

# LA CONSTRUCCIÓN DEL MODELO SITUACIONAL DE UN PROBLEMA HISTÓRICO: ¿EL ÁRBOL ROTO O EL BAMBÚ ROTO?

José Antonio Juárez López, Josip Slisko Ignjatov, Lidia Aurora Hernández Rebollar

jajul@fcfm.buap.mx, lhernan@fcfm.buap.mx, jslisko@fcfm.buap.mx

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Reporte de investigación

Modelación y aplicaciones y matemática en contexto

Básico

## RESUMEN

El presente estudio aborda las diferencias en la construcción de los diferentes modelos situacionales que presentan estudiantes de tercer grado de secundaria al enfrentarse a un problema de trigonometría. Este estudio se enfoca en la fase de comprensión textual conocida como Modelo Situacional. Se aplicaron a un total de 193 estudiantes de secundaria cuatro versiones del problema “El árbol roto por el viento”. Los resultados señalan una inadecuada construcción del modelo situacional. En el análisis de los dibujos de los estudiantes se pretende detectar las posibles causas por las que pocos estudiantes logran construir dicho modelo en forma adecuada.

**PALABRAS CLAVE:** Modelo Situacional, problemas matemáticos verbales, árbol roto.

## INTRODUCCIÓN

En este trabajo se presentan los resultados de una investigación cualitativa cuyo propósito fue analizar la construcción del modelo situacional durante la comprensión textual de un problema de trigonometría. Dicho estudio incluyó el análisis de los dibujos que realizaron 193 estudiantes de secundaria después de haber leído un problema verbal de trigonometría que aparece comúnmente en los libros de texto.

El propósito central de esta investigación fue conocer con más detalle los factores y procesos que intervienen en la construcción del modelo situacional, destacando la importancia que tiene éste en la construcción del modelo matemático, como paso previo que conduce a la resolución del problema planteado.

### *Preguntas de investigación*

Las preguntas a las que se pretendió dar respuesta mediante este estudio y que sirvieron como guía en el diseño del instrumento para la recolección de datos, así como para el análisis de las respuestas, se presentan en seguida.

- ¿Cuál de los dos planteamientos favorece más la construcción adecuada del modelo situacional, “El árbol roto” o “El bambú roto”?
- ¿Qué elementos favorecen u obstaculizan la construcción del modelo situacional en cada una de las versiones del problema?

### *Supuestos iniciales*

En este estudio se partió del supuesto de que los estudiantes a los que se les presente la versión del problema en que se usa “un bambú” como una planta más simple que “un árbol”, tendrán un mejor desempeño en la elaboración del modelo situacional que los estudiantes a los que se les presente la versión del problema del árbol roto. De ahí que el supuesto central de la investigación quedaría formulado de la siguiente manera:

El planteamiento del problema del “árbol caído”, en su versión “el bambú roto” tendrá un efecto positivo en la forma como los estudiantes elaborarán el modelo situacional en comparación con los estudiantes a los que se les presente la versión “el árbol roto”.

Una pregunta más que fue considerada en este estudio se refiere al efecto que pudiera tener la inclusión de dos sub-versiones en el título del planteamiento, es decir, quisimos comprobar si al agregar la frase “que forma un triángulo” en cada versión del problema provocaría algún cambio en la elaboración del modelo situacional. La hipótesis era que esa frase debería causar un efecto positivo, pues los alumnos tratarían de que su objeto dibujado (árbol o bambú roto) se pareciera a un triángulo. Estos detalles se discuten en el siguiente apartado.

### LA CONSTRUCCIÓN DEL MODELO SITUACIONAL Y LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS VERBALES

Nathan, Kintsch y Young (1992) proponen un modelo teórico en el que, para resolver un problema, el sujeto ha de leer y comprender el enunciado. Posteriormente debe generar tanto una representación cualitativa del problema (modelo de la situación) mediante el uso de sus conocimientos previos sobre el mundo real, como un modelo algebraico (o geométrico según sea el caso) del problema (en general, modelo matemático) utilizando para ello los conocimientos matemáticos que tenga disponibles.

Con respecto al Modelo Situacional, varios investigadores (Kintsch y van Dijk, 1978; Kintsch, 1986) han señalado que es una estructura integrada que recoge información episódica previa acerca de alguna situación así como información general instantánea de la memoria semántica.

De acuerdo con Diezmann (2000), hacer un dibujo de la situación planteada en el problema puede resultar crucial para el que intenta resolver un problema verbal. De esta forma, una gran cantidad de problemas verbales en los que interviene o se describe una situación real, la cual necesariamente debe ser modelada por los resolutores, se presentan al sujeto como si tal representación mental de la situación fuera un proceso inmediato. Para esta investigadora, representar la información escrita de un problema en un diagrama es, en principio, un proceso de traducción que involucra la decodificación de información lingüística y la codificación de información visual. En este sentido, Heagarty y Kozhevnikov (1999) investigaron la relación que existe entre la visualización matemática y la resolución de problemas matemáticos, entendiendo a la primera como la habilidad de los individuos para utilizar imágenes visuales o diagramas. Las imágenes visuales de tipo espacial las clasifican en esquemáticas y en pictóricas, y en su investigación concluyen que, el uso de representaciones espaciales esquemáticas está relacionado positivamente con el éxito en la resolución de problemas matemáticos, mientras que el uso de representaciones pictóricas está relacionado negativamente.

En esta misma línea, Edens y Potter (2007) examinaron en su estudio la relación entre el desempeño en ciertas tareas de dibujo y el logro en la resolución de problemas, proporcionando evidencia de que las estrategias de enseñanza basadas en dibujos pueden proveer información útil para los docentes acerca del nivel de comprensión espacial de sus estudiantes.

## 6. Modelación y Aplicaciones y Matemática en Contexto

Diversos autores (Borromeo-Ferri, 2006; Juárez y Slisko, 2013; Leiss, Schukajlow, Blum, Messner y Pekrun, 2010) sostienen que el modelo situacional es una fase importante en el proceso de modelación debido a que en él se describe la transición entre la situación real y el modelo situacional como una fase de comprensión de la tarea. En la Figura 1 se observa un esquema de dicho proceso.

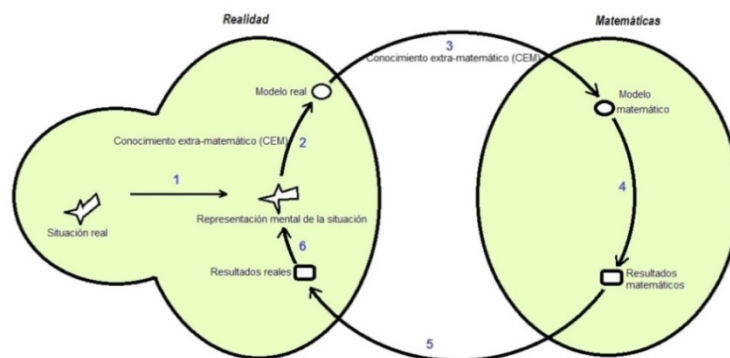


Figura 1. Esquema del proceso cíclico de modelación desde una perspectiva cognitiva inspirado en Borromeo-Ferri (2006), p. 92

1. Comprendiendo la tarea.
2. Simplificación/Estructuración de la tarea; uso/necesidad de (CEM), dependiendo de la tarea.
3. Matematización; CEM es requerido aquí fuertemente.
4. Trabajar matemáticamente, usando competencias matemáticas individuales.
5. Interpretando.
6. Validando.

Desde esta misma perspectiva cognitiva, diversos trabajos se han enfocado en el complejo proceso de comprensión textual durante la resolución de problemas verbales, tanto de álgebra y problemas realistas, así como con problemas aritméticos de tipo cambio, comparación y combinación (Vicente y Orrantia, 2007). Estos investigadores sugieren la necesidad de crear un modelo de la situación del problema, aplicando para ello el conocimiento del mundo real que posea el alumno. Lo más importante sobre los modelos de situación es que son resultado de la información que se deriva del conocimiento previo del lector. En otras palabras, el lector genera proposiciones puente, inferencias, fragmentos de su propio conocimiento previo, fragmentos del conocimiento previo social, etc.

Esto implica que el texto base solo representaría aquellos significados expresados por el texto, pero la comprensión real involucraría la construcción de un nuevo modelo, o actualización de un modelo antiguo. Estos modelos serían subjetivos, por lo que implicaría que la comprensión es personal, *ad hoc* y única, y definiría una interpretación específica de un texto específico en un momento específico.

No obstante la cantidad de investigaciones que señalan la importancia del modelo situacional durante la comprensión del texto del problema, algunos investigadores como Voyer (2010), sostiene que la cuestión de la influencia de la construcción de dicho modelo sobre el desempeño de los estudiantes en la resolución de problemas verbales permanece abierta. En el mismo sentido, van Dijk y Kintsch (1983) subrayan que “...sabemos muy poco acerca de las

*condiciones que favorecen o inhiben la construcción de los modelos situacionales a partir de los textos... ” (p. 346).*

### MÉTODO

El tipo de estudio que presentamos es de corte cualitativo mediante la aplicación de hojas de trabajo con cuatro versiones distintas de un mismo problema. Se trata de un estudio exploratorio-comparativo en el que se contó con la participación de estudiantes de secundaria a los que se les aplicaron cuatro versiones de un problema de trigonometría.

Los sujetos que participaron en esta investigación fueron 193 estudiantes que cursaban el tercer grado de secundaria de dos escuelas de la Ciudad de Puebla. La mayoría de los estudiantes de dichas instituciones pertenecen a un nivel socioeconómico medio y su edad oscila entre los 14 y 16 años. En ambas instituciones se llevaban a cabo actividades docentes apegadas al Plan y Programas de estudio de Educación Secundaria vigentes.

El instrumento utilizado en esta investigación consistió en proporcionar a los estudiantes una las diferentes versiones del planteamiento que aparece a continuación.

Lee con cuidado el enunciado del problema siguiente:

*Un árbol (bambú) ha sido roto por el viento, de tal manera que sus dos partes forman con la Tierra un triángulo rectángulo. La parte superior forma un ángulo de  $35^{\circ}$  con el piso, y la distancia, medida sobre el piso, desde el tronco (bambú) hasta la cúspide caída es de 5 m. Halla la altura que tenía el árbol (bambú).*

Posterior a la lectura se les pidió que dibujaran la situación descrita en el texto.

En el caso de la versión “El árbol roto que forma un triángulo” que llamaremos (ART), fueron aplicados 50 cuestionarios. Para el caso de la versión “El árbol roto”, que llamaremos (AR), se aplicaron 45 cuestionarios. La versión titulada “El bambú roto que forma un triángulo” (BRT) fue contestada por 50 estudiantes y la versión “El bambú roto” (BR) la respondieron 48 alumnos.

Para este estudio se consideró que el modelo matemático que serviría en la resolución del problema planteado es el triángulo rectángulo como el que aparece en la Figura 2. Sin embargo, en las respuestas de los estudiantes se observó que ninguno de ellos logró construir el modelo de la situación, como etapa previa en la elaboración del modelo matemático, con los datos en forma correcta y por lo tanto, no se analizó este aspecto.

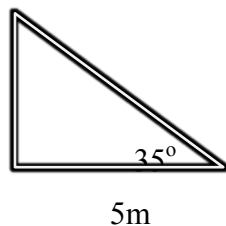


Figura 2. Modelo matemático de la situación descrita en el problema

### ANÁLISIS DE LOS MODELOS SITUACIONALES CONSTRUIDOS POR LOS ALUMNOS EN CADA VERSIÓN DEL PROBLEMA

En la Tabla 1 se muestra el número de estudiantes para cada tipo de MS elaborado ante la versión del problema “El árbol roto que forma un triángulo” (ART).

## 6. Modelación y Aplicaciones y Matemática en Contexto

Tabla 1. Clasificación de los distintos MS en la primera versión del problema

Distintos MS en la versión “El árbol roto que forma un triángulo”			
MS con triángulo rectángulo	MS con triángulo arbitrario no ajeno a la situación	MS con triángulo arbitrario sin elementos de la situación	MS sin triángulo
20% (10/50)	32% (16/50)	18% (9/50)	30% (15/50)

En la mayoría de los MS de estos alumnos aparecieron un mayor número de elementos realísticos que acompañan a la situación, como el viento, ramas y hojas del árbol e incluso nubes y lluvia.

Los resultados para esta versión del problema muestran un primer fenómeno. Aunque en el título de la actividad aparece la frase “...que forma un triángulo”, parece no haber influido en la comprensión de la situación así como en su correspondiente modelo de la situación.

En la Figura 3, por ejemplo, tenemos un MS en el que el estudiante dibujó un triángulo arbitrario con elementos descritos en la situación. Obsérvese la manera en la que este alumno construyó su modelo de la situación; un triángulo arbitrario que se formó a lo largo del tronco del árbol. Un modelo como este evidencia que los sujetos elaboran su propio MS en relación directa con las experiencias de la vida real o con informaciones obtenidas acerca de fenómenos naturales que ocurren en su entorno.

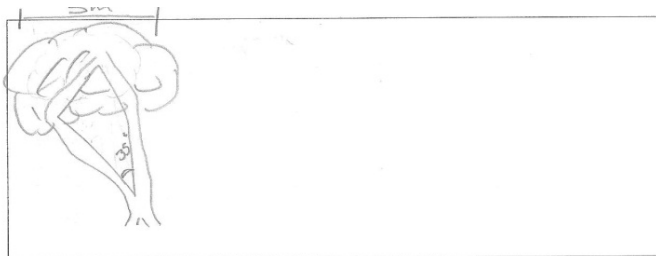


Figura 3. MS realizado por un estudiante (triángulo arbitrario relacionado con la situación)

Este comportamiento puede explicarse también de acuerdo con lo que afirma Borromeo-Ferri (2006), en el sentido de que: “*El individuo tiene una representación mental de la situación, la cual está dada en el problema. Esta RMS puede ser muy diferente, por ejemplo dependiendo del estilo de pensamiento matemático del individuo: imaginaciones visuales en conexión con fuertes asociaciones con sus propias experiencias; o el enfoque se encuentra más en los números y hechos dados en el problema, los cuales, el individuo quiere combinar o relacionar*”

(Borromeo-Ferri, 2006; p. 92)

En este apartado presentamos los diferentes MS construidos por los estudiantes ante la versión “El árbol roto”. Es interesante el hecho de que sólo un estudiante de los 44 que contestaron esta versión del cuestionario elaboró el modelo situacional en forma correcta, lo cual coincide con lo que Diezmann (2000) encontró con niños de primaria, ya que afirma que aunque ‘dibujar un diagrama’ es preconizado como una estrategia útil en la resolución de problemas, generar un diagrama apropiado es problemático para muchos estudiantes.

## 6. Modelación y Aplicaciones y Matemática en Contexto

En la tabla siguiente se muestra el número de estudiantes para cada tipo de MS elaborado ante la versión del problema “El árbol roto” (AR).

Tabla 2. Clasificación de los distintos MS en la segunda versión del problema

Distintos MS en la versión “El árbol roto”			
MS con triángulo rectángulo	MS con triángulo arbitrario no ajeno a la situación	MS con triángulo arbitrario ajeno a la situación	MS sin triángulo
29.5%	29.5%	9%	32%
13/44	13/44	4/44	14/44

De la tabla anterior se aprecia que un porcentaje importante de los estudiantes elaboraron el MS considerando un triángulo rectángulo (casi 10 puntos porcentuales más que en la versión anterior). Este resultado nos confirma que el cambio en el título del problema no produjo ningún efecto en la construcción del MS. Por otro lado, el mismo número de estudiantes elaboraron su MS con un triángulo arbitrario que no es ajeno a la situación descrita en el problema.

En la Figura 11 mostramos el MS de uno de los estudiantes que dibujó un triángulo arbitrario. Es interesante la forma como se ve influida la construcción de este modelo por la interferencia de los conocimientos de la realidad que el sujeto puede evocar en el momento de imaginar la situación.

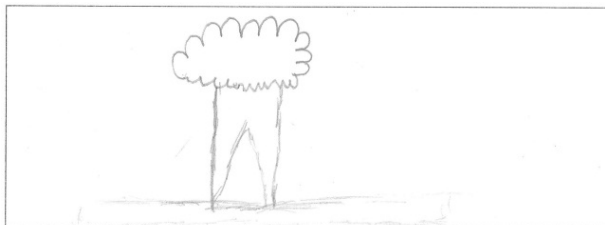


Figura 4. MS realizado por un estudiante (triángulo arbitrario relacionado con la situación)

De acuerdo con nuestra hipótesis acerca de que el cambio en el título podría provocar algún efecto en la elaboración del MS parece no haberse confirmado para esta versión del problema, ya que, como se observa en las Tablas 1 y 2 los porcentajes respectivos para cada tipo de MS son muy similares en el caso de los estudiantes que usan un triángulo rectángulo o un triángulo arbitrario no ajeno a la situación.

Algunos resultados de la aplicación de la versión: “El bambú roto que forma un triángulo” se presentan en este apartado. En este caso encontramos que 26 alumnos de los 50 que respondieron esta versión del problema fueron capaces de dibujar el triángulo rectángulo que se requiere en el enunciado del problema, esto representa el 52% del total de estudiantes. Si comparamos este porcentaje con el de la versión “El árbol roto que forma un triángulo” (ART), evidentemente hay una diferencia significativa en favor de la versión “El bambú roto que forma un triángulo”. Esta diferencia indica nuevamente la importancia del MS y su construcción por parte de los estudiantes. Asimismo se confirma la hipótesis sobre el efecto positivo en la elaboración del MS de la versión que contiene el “bambú” en comparación con la versión que contiene “el árbol”.

## 6. Modelación y Aplicaciones y Matemática en Contexto

En la Tabla 3 se muestra el número y porcentaje de estudiantes para cada tipo de MS elaborado ante la versión del problema “El bambú roto que forma un triángulo” (BRT).

Tabla 3. Clasificación de los MS en la tercera versión del problema

Distintos MS en la versión “El bambú roto que forma un triángulo”			
MS con triángulo rectángulo	MS con triángulo arbitrario no ajeno a la situación	MS con triángulo arbitrario ajeno a la situación	MS sin triángulo
52%	26%	8%	14%
26/50	13/50	4/50	7/50

Se encontró que el 26% de los estudiantes elaboraron su MS incluyendo un triángulo arbitrario relacionado con la situación. En la Figura 5 se muestra un ejemplo de este tipo de dibujo realizado por un estudiante. Aquí se observa nuevamente cómo es concebido el ángulo de  $35^\circ$  dentro de la situación; en la parte superior y opuesto al piso. Esta concepción aparece también en las versiones del árbol.

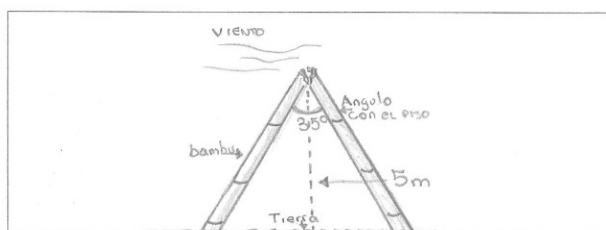


Figura 5. MS realizado por un estudiante (triángulo arbitrario relacionado con la situación)

Los resultados de la aplicación de la versión “El bambú roto” se muestran en este apartado. Esta versión del problema fue contestada por 48 estudiantes. En la Tabla 4 se muestran los porcentajes para cada tipo de MS elaborados por los estudiantes. Encontramos que sólo 12 de ellos elaboraron su MS haciendo uso de un triángulo rectángulo, lo cual representa el 25% del total que respondió el problema. Si se compara este resultado con el de la versión BRT, vemos que hay una diferencia amplia en el uso del triángulo rectángulo para construir el MS. Como en las otras versiones, un porcentaje muy bajo de estudiantes asignaron los datos numéricos en forma correcta, en este caso, sólo dos alumnos hicieron tal cosa.

Tabla 4. Clasificación de los MS en la cuarta versión

Distintos MS en la versión “El bambú roto”			
MS con triángulo rectángulo	MS con triángulo arbitrario no ajeno a la situación	MS con triángulo arbitrario ajeno a la situación	MS sin triángulo
25%	39.6%	4.2%	31.2%
12/48	19/48	2/48	15/48

## 6. Modelación y Aplicaciones y Matemática en Contexto

En el caso de los estudiantes que dibujaron en su MS un triángulo arbitrario no ajeno a la situación, encontramos que casi el 40% de ellos representaron la situación de esta forma. Si se compara con el porcentaje correspondiente en la versión BRT observamos que hay una diferencia bastante amplia. Podemos ver un ejemplo de ello en la Figura 6.

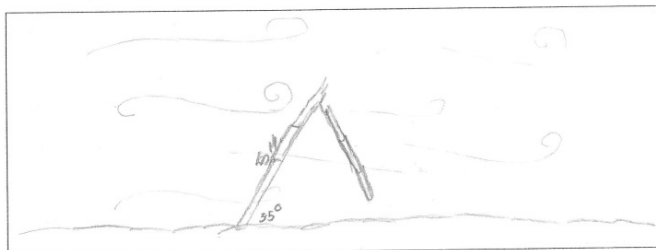


Figura 6. MS realizado por un estudiante (triángulo arbitrario relacionado con la situación)

### DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Uno de los primeros hallazgos interesantes en este estudio fue el hecho de que un porcentaje muy bajo de estudiantes elaboraron el modelo de la situación de forma que les permitiera resolver el problema en las cuatro versiones en que se presentó el planteamiento. Lo anterior revela, una vez más, la gran importancia de la construcción adecuada del modelo situacional como parte del proceso de comprensión textual y como paso previo para la elaboración del modelo matemático. Se halló una diferencia importante en el porcentaje de alumnos que lograron representar la situación mediante un triángulo rectángulo en la versión “El bambú roto que forma un triángulo”, con respecto de las otras tres versiones, en las que se obtuvieron porcentajes bajos.

En las diversas producciones de los alumnos se observa que algunos de ellos dibujaron triángulos no rectángulos para representar la situación que se describe en el enunciado del problema. Aunque los dibujos no representan la situación real mediante el triángulo rectángulo, se pudo apreciar en estas producciones, mediante la versión “El bambú roto que forma un triángulo”, es más natural para los estudiantes imaginarse una situación donde aparece un triángulo que cuando se plantea con la versión “El árbol roto que forma un triángulo”. Lo anterior podría deberse a que, para los estudiantes es más factible que el viento haya vencido la verticalidad del bambú que la del árbol, posiblemente porque en este último caso se piensa que la raíz del mismo es más fuerte y su tronco es más grueso y por lo tanto más difícil de arrancar del piso.

Con los resultados obtenidos en este estudio, se confirma una vez más la importancia que tiene el modelo situacional durante el proceso de comprensión textual del problema planteado. Creemos que estos hallazgos pueden ser utilizados para emprender otras investigaciones que ayuden a esclarecer todo el proceso de modelación así como servir de referentes en el diseño y elaboración de libros de texto en los que se plantea la resolución de problemas verbales.

### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Borromeo-Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modeling process. *The International Journal on Mathematics Education*, 38(2), 1–8.
- Diezmann, C. (2000). The difficulties students experience in generating diagrams for novel problems. En Nakahara, T. y Koyama, M. (Eds.) *Proceedings 25<sup>th</sup> Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 241-248.



## 6. Modelación y Aplicaciones y Matemática en Contexto

- Edens, K. y Potter, E. (2007). The relationship of drawing and mathematical problem solving: *Draw for Math Tasks. Studies in Art Education, A Journal of Issues and Research*, 48(3), 282-298.
- Heagarty, M. y Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology*, 91(4), 684-689.
- Juárez, J. A. y Slisko, J. (2013). Constructing a situation model of a trigonometry problem: An exploratory study. En Lindmeier, A. M. y Heinze, A. (Eds.). *Proceedings of the 37<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 5, p. 81. Kiel, Germany: PME.
- Kintsch, W. (1986). Learning from text. *Cognition and Instruction*, 3(2), 87-108.
- Kintsch, W y van Dijk, T. A. (1978). Toward a model of text comprehension and production. *Psychological Review*, 85(5), 363-394.
- Leiss, D., Schukajlow, S., Blum, W., Messner, R. y Pekrun, R. (2010). The role of the situation model in mathematical modeling-task analyses, student competencies, and teacher interventions. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(1), 119-141.
- Nathan, M. J., Kintsch, W. y Young, E. (1992). A theory of algebra-word-problem comprehension and its implications for the design of learning environments. *Cognition and Instruction*, 9(4), 329-389.
- van Dijk, T. A. y Kintsch, W. (1983). The Cognitive Model, en van Dijk, T. A. y Kintsch, W. (Eds.). *Strategies of discourse comprehension*. (pp.333-385). New York: Academic Press.
- Vicente, S. y Orrantia, J. (2007). Resolución de problemas y comprensión situacional. *Cultura y Educación*, 19(1), 61-85.
- Voyer, D. (2010). Performance in mathematical problem solving as a function of comprehension and arithmetic skills. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9, 1073-1092.