UN ACERCAMIENTO AL CÁLCULO A TRAVÉS DE LA CINEMÁTICA DEL COTIDIANO USANDO GEOGEBRA

María del Socorro Valero Cázarez, Ma. Guadalupe Barba Sandoval,
Ma. Paulina Ventura Regalado, Ana Laura Ramírez Torres,
Edgar C. Aguillón Martínez.
paraklet@prodigy.net.mx, mgbarba1@prodigy.net.mx, pau.ventur@hotmail.com,
analauraramireztorres@prodigy.net.mx, aguillonec@gmail.com
Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios No. 164
Medio Básico y Medio Superior

Resumen

La construcción de conceptos matemáticos a partir del uso de diferentes representaciones ha cobrado un gran impulso como consecuencia del desarrollo de herramientas digitales; la importancia del uso de múltiples representaciones estriba en que cada representación de un objeto matemático solo muestra una parte del mismo. En este sentido, el uso del software de acceso libre GeoGebra, que posee elementos de geometría dinámica, capacidades de cálculo simbólico, y el uso simultáneo de los diferentes sistemas de representación, resulta relevante para el aprendizaje del Cálculo. En este taller nuestro objetivo es mostrar cómo crear y cómo usar escenarios para el desarrollo de situaciones de aprendizaje basadas en la Cinemática a través de GeoGebra, situaciones que corresponden al cotidiano de los estudiantes a fin de evitar el fenómeno de la exclusión social del conocimiento matemático.

Palabras clave: *Cálculo, Cinemática, Cotidiano, GeoGebra*.

1. INTRODUCCIÓN

Para Garbin (2005), la complejidad y la frecuencia del uso de ciertos procesos de pensamiento, como los de representación, traslación, abstracción, deducción, entre otros, distinguen al Pensamiento Matemático Elemental (PME) del Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) y, la transición entre ambos se ubica en el nivel medio superior (NMS). Quienes trabajamos en este nivel educativo tejemos sobre los cimientos del PME, y estamos obligados a conectar con ellos y construir desde esos primeros conocimientos, conceptos matemáticos, procesos, modos de hacer y comprensiones sobre los procesos elementales involucrados y crear puentes. Es la etapa de transición que permite el paso, entre el PME y el PMA. Este tránsito no es siempre lineal y en él hay que favorecer la construcción y reconstrucción de los conceptos matemáticos.

En razón de la complejidad que rodea a los procesos de aprendizaje de los objetos matemáticos cuyo estudio se ubica en el NMS es importante considerar los resultados de investigación en torno a las metodologías que se siguen para analizar la construcción de conceptos matemáticos pues éstas son cada vez más finas.

2. ELEMENTOS TEÓRICOS

Desde el punto de vista de Hitt (2003), el avance tecnológico ha influido notablemente en el desarrollo de nociones teóricas que antes se tomaban en cuenta pero que no eran consideradas como cruciales en términos de explicar el aprendizaje de conceptos matemáticos. Estos aspectos teóricos son la base para entender el estudio de las diferentes representaciones de los objetos matemáticos y su papel en la construcción de conceptos. Duval (1998, p. 175) lo resume en la forma siguiente: "...estamos entonces en presencia de lo que se podría llamar la paradoja cognitiva del pensamiento matemático: por un lado, la aprehensión de los objetos matemáticos no puede ser otra cosa que una aprehensión conceptual y, por otro lado, solamente por medio de las representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos".

Dentro de este marco de referencia, la visualización matemática de un problema, juega un papel importante, y tiene que ver con entender un enunciado mediante la puesta en juego de diferentes representaciones de la situación en cuestión y ello, afirma Hitt (ídem), nos permite realizar una acción que posiblemente puede conducir hacia la construcción de un conocimiento directo e intuitivo para la solución del problema.

El otro elemento que consideramos clave en nuestro diseño, es el relacionado con el trabajo de Cordero y Silva-Crocci (2012) para quienes la lejanía que existe entre el discurso matemático escolar (DME) y el cotidiano, es lo que da lugar al fenómeno de la *exclusión social del conocimiento matemático*. Ellos plantean que, los modelos educativos se han preocupado por atender al conocimiento desde los conceptos de manera que los usos del mismo se han dejado de lado, lo que se traduce a su vez en la inexistencia de referentes específicos relativos a la funcionalidad del conocimiento.

> Hoy en los cursos de matemáticas se habla de gráficas cartesianas sin entender su historia y su desarrollo. Pero más aún nuestros alumnos son jóvenes, mujeres y hombres, que tienen cierta vivencia, cierta cultura, cierto pensamiento de la vida; que seguramente expresan en sus gráficas. Hacen su propio conocimiento de las gráficas de las funciones. Pero probablemente ni les hacemos caso y peor aún les imponemos "lo que deben ser las gráficas de las funciones". Hacemos un discurso unilateral de lo que es correcto y de lo que no lo es. La percepción de sus reinterpretaciones es tan insensible e insensata que provoca una exclusión social del conocimiento matemático (p. 4).

Por otra parte, respecto de la herramienta digital en que se basa nuestro trabajo, GeoGebra, Gavilán y Barroso (2011) distinguen dos tipos de relaciones entre el usuario y el software: *relaciones explícitas dadas por el usuario* y *relaciones explícitas dadas (devueltas) por el programa*: dada una figura construida con GeoGebra, además de las relaciones establecidas por el usuario (en su construcción), aparecen otras relaciones entre los objetos de la figura que se deducen de las anteriores. En esta situación GeoGebra se vuelve una herramienta de descubrimiento y comprobación empírica de relaciones. Si la figura no es construida por el usuario-alumno (por ejemplo, es proporcionada al estudiante por su profesor) todas las relaciones entre objetos de la figura son susceptibles de ser "descubiertas" por el usuario. La diferencia entre ambas opciones está en el peso dado a las relaciones que explícitamente deba proporcionar el usuario y a la necesidad de conocer con mayor o menor profundidad el uso del artefacto.

Luego, el otro aspecto a considerar en relación a la herramienta digital de elección tiene que ver con los propósitos del profesor cuando utiliza un instrumento en el aula; Gavilán y Barroso (ídem) parten de la consideración de que en los conceptos matemáticos como objetos de enseñanza y aprendizaje se pueden distinguir tres dimensiones:

- *dimensión semántica (significativa)***:** hace referencia a los significados que se vinculan al concepto; para este propósito, puede ser pertinente considerar situaciones no matemáticas en las que aparece el concepto.
- *dimensión sintáctica (representativa)***:** hace referencia a las representaciones del concepto (las maneras en que se "escribe" el concepto). En esta componente se incluyen los distintos modos de representar el concepto, y las posibles traducciones entre ellas (traslaciones).

- *dimensión procedimental (algorítmica)***:** se incluyen en esta dimensión los algoritmos que se vinculan al concepto.

Durante la puesta en marcha de este laboratorio enfocamos nuestra atención en las dos primeras dimensiones. Se mostrará paso a paso la construcción de tres distintos escenarios de especial significancia para los jóvenes, en donde se destaca el estudio de situaciones del ámbito de la Cinemática, y, se revisarán los instrumentos que permiten implementar en la clase de Cálculo de bachillerato estas actividades de manera que al profesor interesado en su uso no le suponga desplegar ningún esfuerzo adicional.

Es importante mencionar que las actividades están pensadas para trabajarse en equipos de 3 a 4 integrantes a fin de que se establezcan debates al interior de cada equipo. Cuando alguno de los equipos plantee algún cuestionamiento al profesor, se sugiere que él a su vez haga alguna pregunta que dirija la atención de los estudiantes hacia el aspecto clave para el despeje de la duda.

Actividad 1. La Cascarita

Objetivo: Destacar la relación de covariación presente en la representación gráfica de una función.

1ª Parte. **Construcción**. Desarrollo del procedimiento de construcción de la actividad.

2ª Parte. Manipulación. En el juego de **La Cascarita** (abrir el archivo **lacascarita.ggb**), el jugador apodado el **Frijolito**, que es la estrella del futbol de la escuela, es retado a jugar unos minutos contra cuatro compañeros. Las reglas de este juego que debes considerar son:

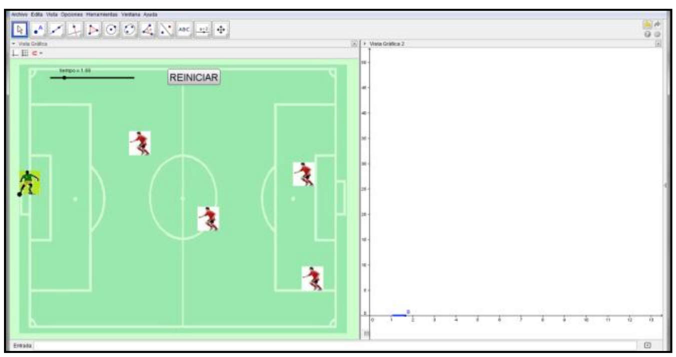


Figura 1

a) El **Frijolito** debe evitar chocar con los jugadores contrarios (**NOTA IMPORTANTE**: El **Frijolito** es el único jugador que queda bajo control del usuario. Su desplazamiento se realiza tomando con el "mouse" el punto **A** que se encuentra en su pie izquierdo).
b) Cuando se aproxime a su portería uno de sus contrincantes, él deberá estar ahí para evitar que le anoten gol.
c) Cuando lleves al **Frijolito** dentro la portería contraria y anotes gol, debes dar **CLICK** en el botón izquierdo del "mouse" para incrementar el contador de goles.

El tiempo de duración del juego es controlado por el deslizador ***tiempo***. Para arrancar el juego pulsa el botón **REINICIAR** y, para volver a jugarlo primero pulsa la combinación de teclas **CTRL-F** y después nuevamente el botón **REINICIAR**.

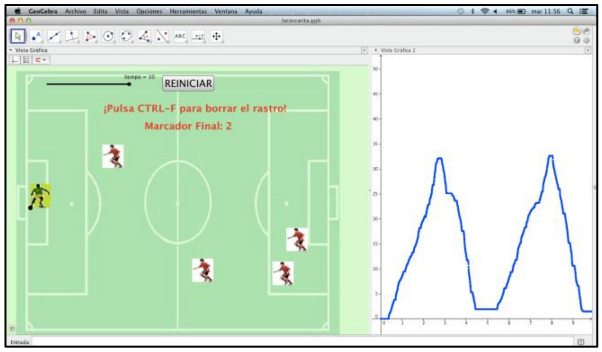


Figura 2

3ª Parte. Reflexión. Después de jugar a la **Cascarita**, contesta las siguientes preguntas leyendo con atención cada uno de los enunciados:

1. ¿Dirías tú que la gráfica azul representa el camino que el **Frijolito** recorrió durante el juego?
2. ¿Hacia dónde se mueve el **Frijolito** cuando la gráfica azul crece?
3. ¿Hacia dónde se mueve el **Frijolito** cuando la gráfica decrece?
4. ¿Hacia dónde se mueve el **Frijolito** cuando la gráfica no crece ni decrece?
5. ¿Cuáles son las variables presentes en la gráfica cartesiana?
6. ¿Entonces, qué es lo que representa la gráfica?

7. Analiza con cuidado cada una de las gráficas siguientes y explica lo que tú crees que hizo el **Frijolito** para poder generar cada una de ellas.

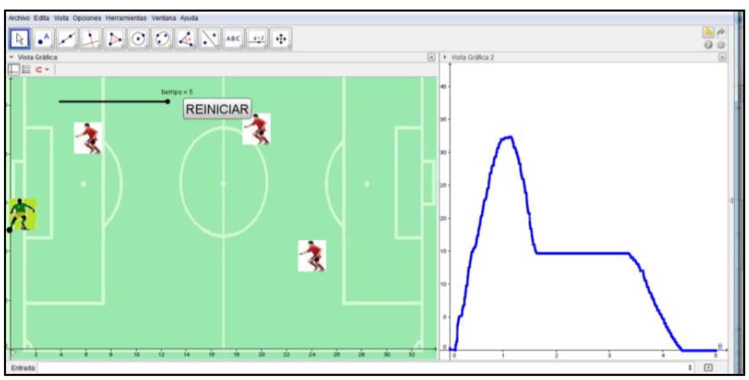


Figura 3

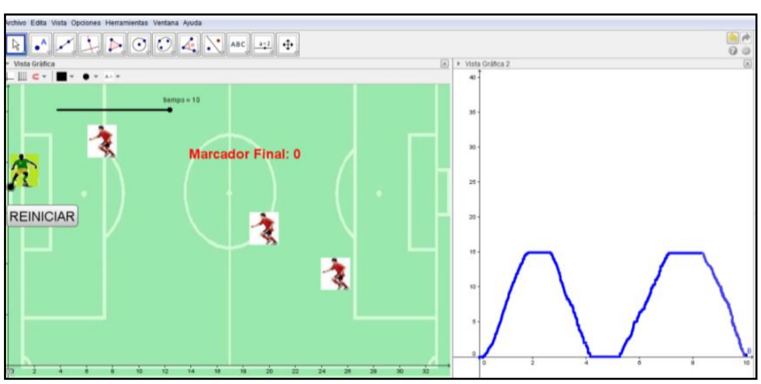


Figura 4

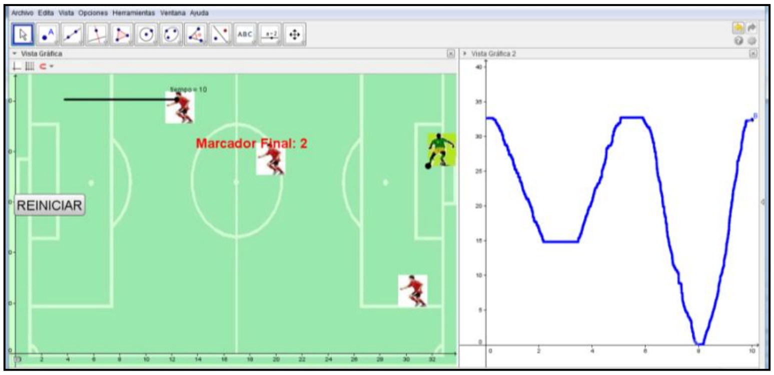


Figura 5

Actividad 2. Hípico

Objetivo: Destacar la naturaleza covariacional de la función lineal relacionando la ordenada al origen con la posición inicial de un movimiento con velocidad constante y la pendiente con la velocidad del mismo.

1ª Parte. **Construcción**. Desarrollo del procedimiento de construcción de la actividad.

2ª Parte. **Manipulación**. Abre el archivo **hipico.ggb**. Se tienen, en una pista de carreras, dos caballos con sus respectivos jinetes. Los valores de la posición de arranque y velocidad de cada caballo las puedes definir al inicio de la carrera usando los deslizadores que se encuentran en pantalla.

Figura 6

Para iniciar la carrera, pulsa el botón **Reiniciar** y la combinación de teclas **CTRL-F** para borrar las gráficas existentes. Observa con atención el movimiento de los caballos y las gráficas que a la derecha de manera simultánea se van generando.

3ª Parte. Reflexión. Lee cuidadosamente cada una de las preguntas siguientes y da respuesta a cada una de ellas lo más ampliamente posible:

1. ¿Las gráficas a la derecha de la pantalla representan la trayectoria que siguen cada uno de los caballos en la carrera?
2. ¿Qué les sucede a estas gráficas cuando aumentas la posición de arranque? ¿Y cuándo disminuye, qué pasa con ellas?
3. ¿Qué les sucede a las gráficas cuando aumentas la velocidad? ¿Y cuándo disminuye, qué sucede con ellas?

4. Entonces, en tu opinión, ¿qué representan las gráficas de las rectas?
5. ¿De qué tipo es la relación existente entre las variables que identificaste? Subraya la que consideres la opción correcta.

   a) cuadrática b) cúbica c) lineal

6. ¿Cuáles son las variables cuya presencia identificas en las gráficas?
7. ¿Puedes determinar la expresión que relaciona a estas variables? Escríbela.
8. Para cada una de las gráficas siguientes, contesta las preguntas correspondientes.

Figura 7

a) ¿Cuánto vale la velocidad (**v1**) con que se desplaza el caballo 1 (el de fondo marrón-verde)?
b) ¿Cuál es el valor de su posición de arranque (**pa1**)?
c) ¿Cuál es el valor de la ordenada al origen de la recta cuya gráfica es verde oscuro?
d) ¿Cuánto vale su pendiente?
e) Define una función que relacione a la posición del caballo 1 con el tiempo.
f) ¿Cuál es el dominio de esta función?
g) ¿Cuál es su imagen?

Contesta las preguntas anteriores para el caballo 2:

h) Posición de arranque
i) Velocidad
j) Ordenada al origen de la color mostaza
k) Pendiente de la recta color mostaza
l) Función
m) Dominio e imagen
n) ¿Cuál de los dos caballos gana la carrera?
o) Si la competencia hubiera durado 15 segundos, ¿a qué distancia se encontrarían cada uno de los caballos respecto del punto de partida?

Figura 8

a) ¿Cuánto vale la velocidad (**v1**) con que se desplaza el caballo 1 (el de fondo marrón-verde)?
b) ¿Cuál es el valor de su posición de arranque (**pa1**)?
c) ¿Cuál es el valor de la ordenada al origen de la recta cuya gráfica es verde oscuro?
d) ¿Cuánto vale su pendiente?
e) Define una función que relacione a la posición del caballo 1 con el tiempo.
f) ¿Cuál es el dominio de esta función?
g) ¿Cuál es su imagen?

Contesta las preguntas anteriores para el caballo 2:

h) Posición de arranque
i) Velocidad
j) Ordenada al origen de la recta color mostaza
k) Pendiente de la recta color mostaza
l) Función
m) Dominio e imagen
n) ¿Cuál de los dos caballos gana la carrera?
o) Si la competencia hubiera durado 15 segundos, ¿a qué distancia se encontrarían cada uno de los caballos respecto del punto de partida?

Figura 9

a) ¿Cuánto vale la velocidad (**v1**) con que se desplaza el caballo 1 (el de fondo marrón-verde)?
b) ¿Cuál es el valor de su posición de arranque (**pa1**)?
c) ¿Cuál es el valor de la ordenada al origen de la recta cuya gráfica es verde oscuro?
d) ¿Cuánto vale su pendiente?
e) Define una función que relacione a la posición del caballo 1 con el tiempo.
f) ¿Cuál es el dominio de esta función?
g) ¿Cuál es su imagen?

Contesta las preguntas anteriores para el caballo 2:

h) Posición de arranque
i) Velocidad
j) Ordenada al origen de la color mostaza
k) Pendiente de la recta color mostaza
l) Función
m) Dominio e imagen
n) ¿Cuál de los dos caballos gana la carrera?
o) Si la competencia hubiera durado 15 segundos, ¿a qué distancia se encontrarían cada uno de los caballos respecto del punto de partida?

Actividad 3. El Basquetbolista

Objetivo: Clarificar la relación entre la intersección de la gráfica de la función $h(t)$ con el eje vertical con la posición inicial de la pelota así como la relación entre su velocidad inicial con la altura del punto máximo de la parábola y con ello, destacar la naturaleza covariacional de la función cuadrática $h(t) = h_0 + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$.

1ª Parte. **Construcción**. Desarrollo del procedimiento de construcción de la actividad.

2ª Parte. **Manipulación**. Abre el archivo **elbasquetbolista.ggb**. En pantalla puedes ubicar un deslizador con el que es posible establecer la altura del basquetbolista y por ende, la posición inicial de la pelota y otro con el que puedes definir con qué velocidad el jugador va a lanzar la pelota verticalmente hacia arriba. Para iniciar la animación, basta con pulsar el botón **INICIAR**. Observa con atención qué es lo que sucede a la derecha de la pantalla cuando la pelota es lanzada por el jugador.

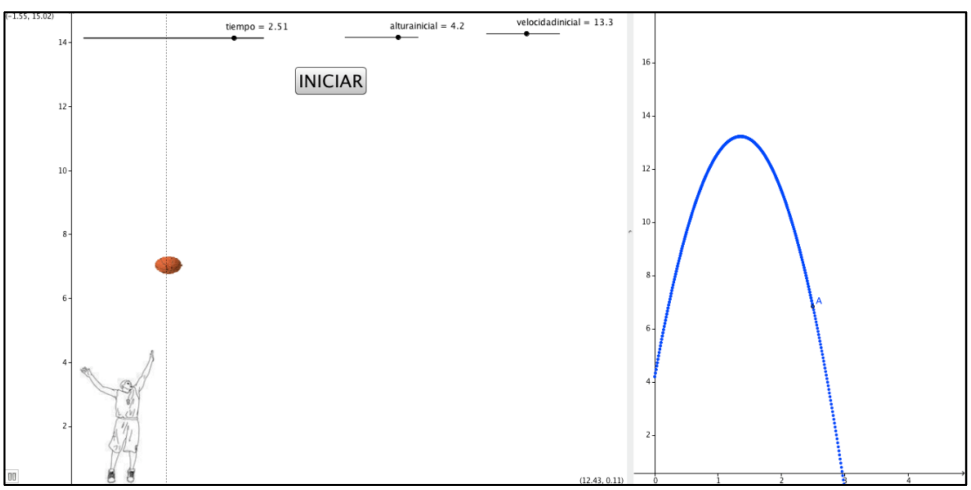


Figura 10

3ª Parte. **Reflexión**. Después de operar la actividad de GeoGebra con diferentes valores para la posición y la velocidad inical, contesta las siguientes preguntas leyendo con atención cada uno de los enunciados:

1. ¿Qué cambios observas en la gráfica de la derecha cuando aumenta la altura del jugador?
2. Y, cuando cambias el valor de la velocidad inicial, ¿cómo cambia la gráfica de la derecha?
3. ¿Qué forma tiene la trayectoria de la pelota?

   a) Lineal   b) Parabólica   c) Cúbica

4. ¿Qué representa la parábola que aparece en el lado derecho de la pantalla?

   a) La trayectoria seguida por la pelota cuando es lanzada por el basquetbolista
   b) La relación de covariación entre la posición de la pelota y el tiempo cuando ésta es lanzada verticalmente hacia arriba.

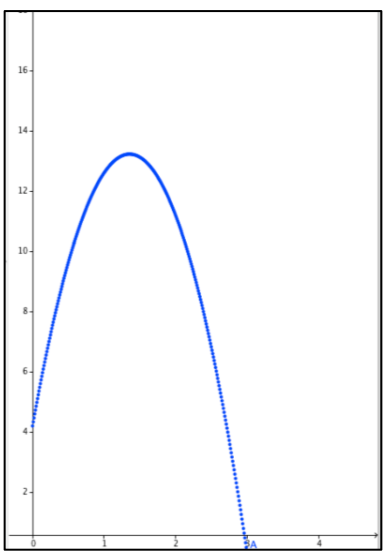
5. ¿Qué tipo de función modela la relación entre la altura de la pelota y el tiempo durante el movimiento vertical de ésta?

   a) Lineal   b) Cuadrática   c) Cúbica

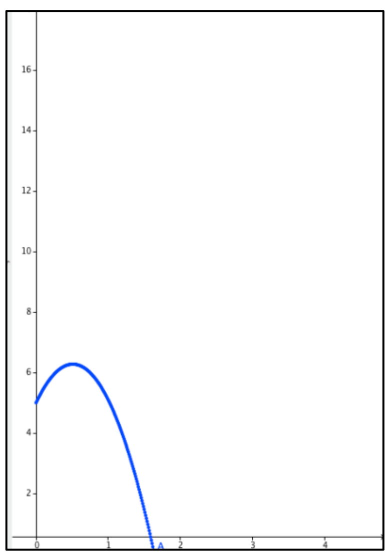
6. Selecciona la expresión correcta con la cual es posible calcular la posición vertical de la pelota, ***h*(*t*)**, como función del tiempo.

   a) $h(t) = v_0 t$ b) $h(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ c) $h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$

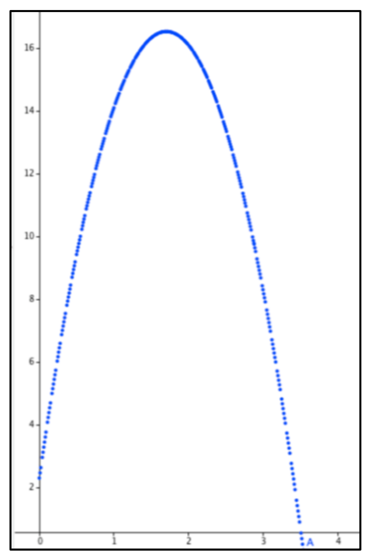
7. Relaciona las gráficas siguientes con las expresiones que las acompañan, uniendo la figura con la expresión que a tu juicio le corresponda. Argumenta tus elecciones.



a) $\boldsymbol{h(t) = 2.3 + 16.7t - 4.9t^2}$



b) $\boldsymbol{h(t) = 4.2 + 13.3t - 4.9t^2}$



c) $\boldsymbol{h(t) = 5 + 5t - 4.9t^2}$

3. REFERENCIAS

Cordero, F. y Silva-Crocci, H. (2012). Matemática educativa, identidad y latinoamérica: el quehacer y la usanza del conocimiento disciplinar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 15*(3), 295-318.

Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*. Grupo Editorial Iberoamérica. Traducción de: Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Vol. 5 (1993).

Garbin, S. (2005). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8* (2), 169–193.

Gavilán, J. y Barroso, R. (2011). Geogebra Como Instrumento de la Práctica del Profesor. *Actas de las II Jornadas Sobre Geogebra en Andalucía*. Jornadas Sobre Geogebra en Andalucía 2(2), 1-5. Huelva: Servicio de Publicaciones de la Saem Thales.

Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana X*(2), 213-223.