

## LA TRANSPOSICIÓN PRO-CONSTRUCTIVA DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PRESENTE EN LA ENSEÑANZA DE LAS ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

Lorena Jiménez Sandoval, Gustavo Martínez Sierra  
lorejim79@gmail.com, gmartinezsierra@gmail.com  
Universidad Autónoma de Zacatecas, CICATA-IPN  
Superior

### Resumen

Problemas de aprendizaje de las estructuras algebraicas se asocian al nivel de abstracción, al lenguaje formal y la función que desempeñan en la sistematización de estructuras particulares. Empleando el método de análisis histórico, se construye un sistema conceptual que permite caracterizar la construcción social de las estructuras algebraicas a la vez que se explica: cómo es que las características a las que se asocian los problemas de aprendizaje, son reflejo de su emergencia arraigada al Enfoque Estructural de la matemática y, cómo es que se configuró una forma de representar, reproducir y difundir el conocimiento matemático al interior de la comunidad académica, que a su vez sirvió como instrumento de aprendizaje para matemáticos menos experimentados y vino a sustituir la transposición didáctica de las estructuras algebraicas.

**Palabras clave:** *Representación, reproducción, difusión, institucionalización, construcción social.*

### 1. INTRODUCCIÓN

Los problemas de aprendizaje de las estructuras algebraicas que muestran los estudiantes, radican fundamentalmente en el nivel de abstracción, el lenguaje formal implícito en su teoría y la función que desempeñan en la sistematización de diferentes estructuras particulares (Dubinsky, Dauthermann, Leron & Zazkis, 1994; Simpson & Stehlíková, 2006; Weber, 2002 y Hazzan, 1999).

Hazzan (1999), plantea que quienes estudian conceptos del Álgebra Abstracta tienden a *reducir la abstracción* de diferentes formas para lograr comprenderlos, convirtiéndolos inconscientemente en conceptos mentalmente más accesibles. Dubinsky *et al.* (1994), reporta que hay estudiantes que sí logran construir conceptos sobre diferentes objetos matemáticos, pero que no pueden textualizarlos a falta de un lenguaje o sistema de símbolos adecuado que les permitan luego manipularlos. Por su parte Simpson & Stehlíková (2006), hablan de la incapacidad que presentan los estudiantes que sí han logrado identificar comportamientos o propiedades comunes en conjuntos de objetos matemáticos, pero que son incapaces de organizar y sistematizar esta información para que les sea útil en la construcción de nuevo conocimiento.

La hipótesis que prueba esta investigación es que, es al Enfoque Estructural al que pueden atribuirse los problemas de aprendizaje descritos. Tradicionalmente esta concepción de la matemática suele atribuirse a David Hilbert (1862-1943), cuyo método axiomático sienta las bases para representar y reproducir el conocimiento matemático de una manera abstracta, sistematizando varias teorías existentes hasta antes de 1930, principalmente en la teoría de algebraica de los números y la teoría de polinomios. Sin embargo, Corry (2007) afirma que si bien, el enfoque axiomático de Hilbert tuvo influencias duraderas en la investigación y la educación matemática a lo largo del siglo XX, su propia concepción sobre papel del pensamiento axiomático de las matemáticas y en la ciencia en general, fue significativamente diferente a la



forma en la que llegó a ser entendida y practicada por los matemáticos de las generaciones siguientes.

Corry (2007) explica que la visión según la cual el método axiomático serviría como un recurso de enseñanza útil tanto en licenciatura como en el posgrado, además de servir como una herramienta para identificar y desarrollar el talento matemático creativo, se debe a un desvío de la atención en la propuesta de Hilbert que hiciera Robert L. Moore (1862-1932), en la primera década del siglo XX en los Estados Unidos y, Jean Dieudonné (1906-1992), fundador del grupo Bourbaki, a partir de 1930, en Europa. Según Corry (1996), aun cuando Hilbert adelantó muchos de los elementos que constituirían la base del Enfoque Estructural del Álgebra, él mismo nunca lo adoptó ni sugirió que debía adoptarse para la construcción de conocimiento matemático y mucho menos para la enseñanza de forma tal que ocurrió tal como lo dice Durkheim (1982), los conceptos, como construcciones colectivas, no pueden individualizarse sin ser retocadas, modificadas y en consecuencia, falseadas.

Corry (1996) construye el constructo teórico de *imágenes de la matemática* para hablar del cambio profundo en la concepción misma de la matemática, del alcance y de los fines de la investigación algebraica y considera, que lo que permite entender adecuadamente el desarrollo del Enfoque Estructural de la matemática, es el énfasis que hay que hacer, junto al análisis del crecimiento del cuerpo de conocimiento relevante, en el cambio de la imagen de las matemáticas que contribuyó a este crecimiento.

Para Corry (2001) las imágenes del conocimiento incluyen tanto lo cognitivo como las visiones normativas de los científicos en cuanto a su propia disciplina y son estas últimas las que ayudan a discutir cuestiones que surgen del conjunto de conocimientos pero que no son, en general, parte de él ni pueden ser resueltas dentro de él, entre éstas se encuentran preguntas como: ¿Cuál debe ser considerada como una metodología legítima para el desarrollo de la disciplina? ¿Qué personas o instituciones tienen o adquieren la autoridad para resolver los desacuerdos dentro de la disciplina? ¿Cuál es el plan de estudios adecuado para la universidad que permitirá educar a la próxima generación de científicos en una disciplina determinada? Las imágenes de la matemática permiten entender ideas concebidas en el marco del carácter reflexivo, que sobre sí misma tiene la matemática, y representa una característica única de esta ciencia que además le permite formar parte de su propio objeto, en el sentido de que absorbe ciertas imágenes del conocimiento directamente en el cuerpo del conocimiento. Corry (2001) describe el Enfoque Estructural como un cambio de imagen de la matemática que básicamente cambió la disciplina del Álgebra.

Considerando estas particularidades de la ahora llamada Álgebra Abstracta y específicamente de las estructuras algebraicas, se presentan los resultados de investigar cómo fue la evolución epistemológica y la conformación de la normativa institucional que legitimó el tratamiento formal, la función sistematizadora y el nivel de abstracción que caracteriza a las estructuras algebraicas en el saber textualizado respondiendo así a la pregunta de esta investigación ¿Cómo ocurrió la Construcción Social de las Estructuras Algebraicas?

## 2. MARCO TEÓRICO

Se parte del principio de que la realidad se construye socialmente, entendiendo esta realidad “como una cualidad propia de los fenómenos que reconocemos como independientes de nuestra propia volición” (Berger & Luckmann, 2001, p. 13), esta cualidad se impone a nuestras acciones



e ideas en la medida en que la conocemos y reconocemos como tal. Cada uno de los fenómenos que componen la realidad tiene características específicas y cada individuo acumula conocimiento respecto de estas características que dan significado y edifican su realidad, al mismo tiempo que guían las acciones que en ella realiza. Se establece así un proceso dialéctico entre la realidad que se impone como preexistente y las *acciones*, guiadas por la acumulación de conocimiento, que cada individuo realiza en ésta y mediante el cual se conforma la sociedad y por ende los contextos sociales en los que terminan inmersos dichos fenómenos.

Según Berger (1969), el citado proceso dialéctico pasa por tres momentos: *externalización, objetivación e internalización*. El momento de externalización se da a través de *acciones* guiadas por el cúmulo de conocimientos internalizados. De ellas aquí interesan particularmente: la *difusión*, que se entiende como la acción a través de la cual un conocimiento construido en la individualidad se da a conocer a otros por algún medio oral o escrito; la *representación*, entendida como el conjunto de objetos materiales y simbólicos junto al significado objetivado en éstos objetos, que dan sentido a determinado conocimiento que fue producido por un individuo y que pone a disposición de otros a través de la externalización y; la *reproducción* del conocimiento, que refiere el empleo de un determinado conocimiento construido por otros en un contexto específico. Los productos de estas acciones pueden ser artículos, libros y toda clase de documentos en donde se reportan resultados de una investigación, así como, lenguajes, símbolos y cualquier herramienta a través de la cual es posible la objetivación del conocimiento construido.

Las acciones de representación, reproducción y difusión del conocimiento ocurren generalmente al mismo tiempo derivado del hecho de que para difundir el conocimiento construido es necesario que éste sea representado, textualizándolo en un medio oral o escrito a la vez que se reproduce el conocimiento construido por otros y que ha sido internalizado.

Las acciones, a través de las cuales se da la externalización, se orientan por una intencionalidad de doble carácter: uno individual que obedece a la necesidad del ser social que lo sitúe como parte de determinados entornos y comunidades; y otro social que obedece a la necesidad de ser coproductor de la realidad (Berger, 1969). Estas acciones se diversifican en tanto se complejiza la realidad y se agrupan, de acuerdo al carácter social de la intencionalidad con la que se realizan hasta llegar a formar parte de procesos a través de los cuales un cuerpo de conocimientos llega a quedar establecido socialmente como realidad. De estos procesos interesa únicamente caracterizar la validación, la institucionalización y la legitimación del conocimiento porque se considera que es a través de éstos que el conocimiento externalizado por un individuo y objetivado en sus productos, es internalizado por los integrantes de la comunidad a la que pertenece o pretende pertenecer. De este modo la objetivación se identifica con los símbolos materiales a través de los cuales se representa el conocimiento y los conceptos construidos, y la internalización se identifica con la reproducción que de estos se hace en posteriores acciones de externalización. La comunidad receptora del conocimiento, le imprime un nivel de aceptación que le da la solidez necesaria para que, como conocimiento validado, sirva para la construcción de uno nuevo en la misma comunidad a la vez que lo dispone a otras comunidades orientando y sustentando su desarrollo. La validación ocurre cada vez que un integrante de la comunidad reproduce este conocimiento que ha internalizado y objetivado en el marco de sus fines, proyectos e imágenes, en una nueva acción de externalización. La validación del conocimiento marca el inicio del *proceso de institucionalización*.



El proceso de institucionalización quedará descrito por el comportamiento tipificado que se caracterizará por el sistema de acciones (difusión, representación y reproducción), estructuradas y realizadas por los agentes de la comunidad, el medio de interacción específico, el marco de intenciones individuales y sociales que se va constituyendo en regulador de la interacción de los integrantes de la comunidad y que ellos realizan como modos de ejecución prescritos que gozan de una aceptación generalizada e incondicional y se denominará *práctica institucionalizadora*.

De esta forma, el hablar o describir una práctica institucionalizadora implicará irremediamente responder a los siguientes cuestionamientos: ¿Qué acción o acciones integran la práctica? ¿Quiénes realizan estas acciones? ¿Qué intencionalidades sociales las identifican? ¿A qué intencionalidades individuales responden dichas acciones? ¿Cuál es el medio y/o contexto en donde se realizan? ¿Cuáles son los objetos y significados compartidos objetivados en ellos? (Olive, 2009).

La legitimación es un proceso generalmente externo al colectivo que produce el conocimiento y puede identificarse a través de una acción de reproducción para un fin cercano o ajeno al de su origen, y es justamente la que dará cuenta de las posibles distorsiones que se explicarán más bien como el ajuste que sufre el conocimiento al formar parte de nuevos proyectos en el marco de propósitos e imágenes del conocimiento de menor identificación con las de su emergencia. Tal es el caso de la transposición didáctica que se asume como una acción de reproducción que transforma funcionalmente el conocimiento que se identifica con el saber sabio para hacer posible su enseñanza reproduciéndolo como saber a enseñar.

La validación, institucionalización y legitimación del conocimiento ocurren en comunidades que pueden ser situadas en el tiempo, viven en determinada época y en determinados contextos que en parte han sido heredados y en parte son constituidos por ellas mismas a través de las acciones de sus integrantes. Para dar cuenta de esta temporalidad se describe la construcción social de las estructuras algebraicas por *fases*. Una *Fase Contextual* se caracteriza a través de dos aspectos: el primero de ellos son las acciones de difusión, representación y reproducción del conocimiento, realizadas en un lapso de tiempo específico por individuos que se llaman *agentes* de la fase contextual, resaltando el rol de los integrantes de la comunidad como constructores activos de las realidades sociales, y el segundo, son los momentos de externalización e internalización objetivados en estas acciones que se prefiguran como modos de ejecución y comportamientos tipificados que llegarán a normar sus propias acciones, es decir, por cada una de las partes que integran una práctica institucionalizadora.

Los procesos de construcción de conocimiento (validación, institucionalización y legitimación), como sucesión de hechos en el tiempo, pueden traslaparse, es decir, es posible que existan acciones que formen parte de la validación de cierto conocimiento, que impulsen el proceso de legitimación y perfilen, a su vez, una práctica institucionalizadora como parte del proceso de institucionalización.

### 3. MÉTODO

De acuerdo González & Sierra (2003) la investigación histórica se considera como un proceso de búsqueda sistemática de datos que respondan preguntas acerca de fenómenos del pasado con el propósito de alcanzar una mejor comprensión de instituciones, prácticas y tendencias. Gómez (2003), presenta una clasificación de las corrientes que han seguido las investigaciones en la



matemática educativa que realizan un análisis histórico-epistemológico: el enfoque de la enseñanza desde una perspectiva histórica, el enfoque de los obstáculos epistemológicos, el análisis de los libros de texto, el enfoque de la reproducción en los estudiantes de las etapas de la historia y el enfoque sociocultural; que a su vez agrupa en tres tipos: las que intentan confrontar historia y psicología, las que intentan reorientar la enseñanza con la perspectiva histórica y las que intentan estudiar los conceptos bajo una dimensión cultural, independientemente de las personas.

El método histórico está vinculado al análisis de las distintas etapas del objeto de investigación en su sucesión cronológica y permite entender su origen, evolución y desarrollo, las etapas y períodos principales de su construcción y las conexiones socioculturales fundamentales, en el caso que nos ocupa, estas etapas las llamamos fases contextuales y, entendemos la investigación histórica, como el estudio de las unidades de relación entre los hechos sociales y el acontecer sucesivo e imprevisto de los mismos (Piñuel, 2002). El método empleado consta de cinco momentos: planteamiento de la investigación, de heurística crítica, análisis de la documentación, de hermenéutica y exposición y, en el marco de los momentos de heurística crítica, análisis de la documentación y hermenéutica subyace una metodología de análisis de contenido.

#### 4. RESULTADOS

En el marco del interés de la investigación en el que la primera interrogante fue ¿qué procesos están detrás de la determinación de que el concepto de estructura algebraica conservara las características de abstracción, el lenguaje formal y su función sistematizadora en su paso por la transposición didáctica? Se responde describiendo, en primer lugar, que estas características no se conservan propiamente por un proceso de transposición didáctica y que más bien son propias de su emergencia como conocimiento matemático que llegaron al texto escolar a través de una transferencia que no las desarraigó de su empleo y su sentido en el texto del saber sabio.

Estas características no fueron encarnadas en el concepto de estructura algebraica de manera simultánea si no que fue necesario que transcurrieran al menos 10 años para que cada una de ellas se fuera constituyendo como parte de una construcción conceptual que culmina objetivando un interés del grupo Bourbaki que concibió, que era una metodología la que podía cohesionar el conocimiento matemático que había proliferado hasta su época.

La construcción del conocimiento matemático y, particularmente la construcción de las estructuras algebraicas, ocurre en un proceso global que institucionaliza el método axiomático como forma de representación del conocimiento matemático que sustenta, de una manera lógicamente segura, el contenido matemático que se pone a disposición de otros a través de la externalización y cuya textualización objetiva el sistema de conceptos con el que se concibió la realidad del comportamiento de determinados entes matemáticos. Esta forma de representación del conocimiento matemático se reproduce por integrantes de la comunidad matemática para la construcción de nuevo conocimiento matemático, es decir, vive en el saber sabio.

La difusión del conocimiento matemático bajo ésta forma de representación adquirió una doble función, por un lado, a la vez que externalizaba la construcción de conocimiento matemático, se empleó como medio para internalizar este conocimiento como una vía de aprendizaje de nuevas teorías o nuevas formas de representar las teorías existentes, sin ser esta representación, el



producto de una transformación funcional que proveyera a este conocimiento matemático de características de “accesibilidad” para quienes no forman parte del contexto de su emergencia.

Fue la formalización o el empleo de un lenguaje formal lo que propició la ocurrencia de procesos de generalización que expandieron el empleo del método axiomático como una metodología que permitía focalizar la atención en las relaciones que existían entre los entes matemáticos para dar paso a procesos de abstracción.

Se configuró, a manera de práctica institucionalizadora, esta forma de representar, reproducir y difundir el conocimiento matemático al interior de la comunidad académica que a su vez servía como instrumento de aprendizaje para matemáticos menos experimentados en determinada área de la matemática. Sin embargo, esta práctica fue instrumentada en dos sentidos: como mecanismo que además facilitaba la sistematización del conocimiento para una presentación que eliminaba toda dificultad vivida al momento de su construcción y, como un momento clímax de argumentación teórica, cuestión que era implícitamente clara para los matemáticos. De esta forma fue validada por la comunidad académica como la forma de sistematizar y difundir el conocimiento matemático construido en procesos de investigación y producción de conocimiento, es decir fue validada como una metodología para el desarrollo de la disciplina y legitimada por otras comunidades como la manera ideal de construcción de conocimiento matemático convirtiéndola así en parte fundamental de un plan de estudios adecuado que permitiría educar a las próximas generaciones de científicos de la matemática.

Estas características eliminaron la tensión entre el sistema didáctico y su entorno de la que habla Chevallard (1996), pero es el único elemento que se puede identificar como indicio de transposición didáctica.

Fue una práctica institucionalizadora de transposición proconstructiva del conocimiento matemático la que sustituyó la transposición didáctica de las estructuras algebraicas de forma tal que se desnaturaliza del entorno de su emergencia en donde si estaba claro que ésta era solo una forma de representación del conocimiento matemático que facilitaba el acceso a las teorías matemáticas por cualquier experto o integrante de la comunidad académica pero no significó una propuesta de la forma en la que se debía enseñar matemáticas. Esto fue asentado por Hilbert en diversos documentos y jamás fue propuesto por sus sucesores Emmy Noether o Emil Artin.

Es en el texto de B.L. van der Waerden en donde se plasma que éste podía servir y, había sido utilizado por los estudiantes, para tener un primer acercamiento con el Álgebra moderna y es el hecho de centrar la atención en el método axiomático, el lenguaje formal y una práctica de sistematización abstracto genérica del conocimiento matemático, lo que da pauta para que éste se convierta en una forma obligada de representación del conocimiento matemático.

## 5. CONCLUSIONES

Las implicaciones que la construcción social de las estructuras algebraicas tiene en el ámbito de la enseñanza, se encuentra una transposición proconstructiva del conocimiento matemático que suplió a la transposición didáctica en el nivel superior al menos desde 1885 (para el caso de las estructuras algebraicas) y que adquiere su mayor expresión en 1945 con la publicación de “*La arquitectura de las matemáticas*”. Es ésta transposición la que en muchas áreas de la matemática

fue producto de una transferencia al sistema didáctico del nivel superior como una forma idónea que sustenta la formación de futuros matemáticos.

Los resultados de esta investigación ponen en evidencia la existencia de conocimiento matemático presente en el texto del saber escolar del nivel superior cuyo origen no está arraigado a un proceso de transposición didáctica, esta naturaleza lo hace diferente a conceptos de otras áreas de la matemática y al saber escolar textualizado en otros niveles del sistema de enseñanza. Las estructuras algebraicas no sufrieron una transformación funcional a modo de transposición didáctica, tal y como lo plantea Chevallard (1996), sino que fue la forma de representar, reproducir y difundir el conocimiento matemático al interior de la comunidad académica la que sobrevivió una transferencia al ámbito escolar.

Entre algunas de las interrogantes pendientes de responder se identifican:

¿Qué otros conceptos o elementos conceptuales del texto del saber escolar del nivel superior tienen su origen en transposiciones proconstructivas del conocimiento matemático?

¿Es posible resignificar las prácticas de sistematización abstracto genérica, axiomatización y formalización, sistematización y transposición proconstructiva del conocimiento matemático en el sistema didáctico y cómo es que opera esta resignificación?

¿Cómo establecer una relación entre la presencia, en el texto del saber escolar, de una transposición proconstructiva del conocimiento matemático y las dificultades en el aprendizaje de la matemática en lo general y de las estructuras algebraicas en lo particular?

¿Cómo resolver esta ausencia de transposición didáctica en la enseñanza de las estructuras algebraicas en el nivel superior, particularmente en la formación de futuros matemáticos?

## 6. REFERENCIAS

- Berger, P. (1969). *El Dosel Sagrado. Elementos para una Sociología de la Religión*. Argentina: Amorrortu Editores.
- Berger, P. & Luckmann, T. (2001). *La Construcción Social de la Realidad*. Argentina: Amorrortu Editores.
- Chevallard, Y. (1996). *Transposición didáctica*. Argentina: Aique Grupo Editor.
- Corry, L. (1996). Axiomática Moderna y Algebra Estructural en la Obra de David Hilbert. *Mathesis* 12, 1-56.
- Corry, L. (2001). Mathematical Structures from Hilbert to Bourbaki: The Evolution of an Image of Mathematics. En A. Dahan and U. Bottazzini (Eds.), *Changing Images of Mathematics in History. From the French Revolution to the new Millenium* (pp. 167-186). London, Harwood Academic Publishers.
- Corry, L. (2007). Axiomatics between Hilbert and the New Math: Diverging Views on Mathematical Research and their Consequences on Education. *International Journal for the History of Mathematics Education*, 2 (2), 21-37.
- Dubinsky, E., Dautermann, J., Leron, U. & Zazkis, R. (1994). On learning fundamental concepts of group theory. *Educational Studies in Mathematics*, 27 (3), 267-305.
- Durkheim, E. (1982). *Las Formas Elementales de la vida Religiosa*, Madrid: Akal S.A.



- Gómez, B. (2003). La investigación histórica en didáctica de la matemática. En Castro, E. (Coordinadora), *Investigación en Educación Matemática*. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Granada, España.
- González, M.T. & Sierra, M. (2003). El Método de Investigación Histórica en la Didáctica del Análisis Matemático, *Investigación Matemática*. En VII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, 109-130, Granada.
- Hazzan, O. (1999). Reducing abstraction level when learning abstract algebra concepts. *Educational Studies in Mathematics* 40(1), 71–90
- Olivé, L. (2009), Por una Auténtica interculturalidad basada en el reconocimiento de la pluralidad epistemológica. En Olivé L. & Sousa Santos B. (Ed.), *Pluralismo Epistemológico. Por una auténtica interculturalidad basada en el reconocimiento de la pluralidad epistemológica* (pp. 19-30). Bolivia: Consejo Latinoamericano de Ciencias Sociales.
- Piñuel R., J. L. (2002). Epistemología, Metodología y Técnicas del Análisis de Contenido. *Estudios de Sociolingüística*, 3(1), 1-42.
- Simpson, A. & Stehlíková, N., (2006). Apprehending Mathematical Structure: A Case Study Of Coming To Understand A Commutative Ring, *Educational Studies in Mathematics*, 61, 347–371.
- Weber, K. (2002). Student Difficulty In Constructing Proofs: The Need For Strategic Knowledge, *Educational Studies in Mathematics*, 48, 101–119.