

DISEÑO DE UNA ACTIVIDAD PARA EL TRATAMIENTO DE LOS LÍMITES $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}$ Y $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\text{cos}(x)}{x}$, ENFOCADA A ESTUDIANTES DE NIVEL MEDIO SUPERIOR



María del Socorro García González y Catalina Navarro Sandoval
mgargonza@gmail.com, nasacamx@yahoo.com.mx
Unidad Académica de Matemáticas, Chilpancingo, Guerrero, México

Resumen

El objetivo del presente trabajo es proponer una actividad alternativa para estudiantes de nivel medio superior, con la que se pretende que éstos, deduzcan y visualicen los que hemos denominado límites especiales: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\text{cos}(x)}{x}$, al momento en que son abordados en clase, utilizando para ello recursos tales como: graficación de funciones y tablas de valores en donde se aproxima al valor que tiende x en los límites pedidos.

Palabras Clave

Límites, deducción, visualización.

Introducción

De acuerdo a los resultados obtenidos en Navarro (2004), los denominados límites especiales:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\text{cos}(x)}{x}$, que deberían ser trabajados en el bachillerato, muchas veces no se abordan, e incluso según la investigación antes mencionada, se propone deben ser vistos en la universidad por su complejidad, por ello que algunos maestros (entrevistados en dicha investigación) sostienen que muchos alumnos, cuando llegan al curso de cálculo diferencial e integral, no tienen conocimientos básicos suficientes para comprender las demostraciones de los límites especiales, de ahí que les representen un problema dado que no están acostumbrados a manejar formalismos en su aprendizaje, ante esta problemática se diseña una propuesta dirigida a profesores en servicio para abordar las deducciones de éstos en el bachillerato sin tanto formalismo.

Tomando en cuenta lo anteriormente citado y la importancia que tienen dichos límites cuando se aborda la demostración de la derivada del $\text{sen}(x)$; en el presente trabajo nos hemos

interesado en elaborar una propuesta por medio de la cual los alumnos puedan deducir y visualizar los límites especiales al momento en que son abordados en clase.

Metodología

Para abordar las deducciones de los límites $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(x)}{x}$, sin tanto formalismo Navarro (2004), diseña una propuesta para profesores basada en la visualización de gráficas de funciones algebraicas y trigonométricas, en donde por medio del análisis de los parámetros de las funciones algebraicas, pone en evidencia el comportamiento similar de las funciones trigonométricas y muestra que éstos dos tipos de funciones tienen características comunes, luego, a partir de éste análisis aborda los límites especiales, no dejando de lado ni la parte analítica ni la algebraica. Al igual que en ésta propuesta nosotros utilizamos como una herramienta importante la visualización de las gráficas para poder deducir los límites de nuestro interés, por ello tomamos en cuenta los resultados de Patiño (2007), investigación que reporta que la representación gráfica de transformaciones de funciones algebraicas y trigonométricas permite al estudiante relacionar éstas con comportamientos análogos; empero también deja ver que los alumnos en el nivel medio superior, no están familiarizados con la graficación de las funciones trigonométricas. Por ello, nos dimos a la tarea de buscar recursos que ayudaran al alumno a superar ésta dificultad; así encontramos en Cabezas, Trujillo y Morales (2004) que el uso del software *Descartes* como instrumento de visualización, en el aprendizaje del cálculo y, en particular, del concepto de límite, mejora la disposición de los alumnos al estudio de dichos contenidos, además de facilitar la relación de los procesos con imágenes mentales, produciendo en ellos una mejor comprensión de los conceptos, sin embargo aclara que para una correcta aplicación de este instrumento de visualización es necesario que los estudiantes tengan una preparación previa en el manejo de la computadora y desarrollen una actitud de cambio frente a sus metodologías de estudio.

Basados en éstos trabajos optamos por implementar el uso del software *Geometra Sketchpad* en el diseño de las actividades a fin de facilitar a los alumnos el trabajo con las gráficas de las funciones.

Para el diseño de nuestra propuesta usamos como marco Teórico la Teoría de Situaciones Didácticas y como metodología a la Ingeniería Didáctica. Por ello primeramente nos dimos a la tarea de realizar un estudio epistemológico, didáctico y cognitivo respecto del tema de límite.

En el estudio epistemológico se halló que la noción de *límite* no se desarrolló de forma independiente sino que al contrario, muestra una interdependencia con otras nociones tales como *variable, función, continuidad, infinito, infinitesimal, número, número real, continuo numérico, y sucesión*, además evolucionó tratando de resolver problemas diversos tales como: la relación entre lo discreto y lo continuo.

Para el estudio cognitivo, aplicamos un cuestionario a 20 alumnos que cursaban el tercer año de preparatoria de la Universidad Autónoma de Guerrero, en él se les pedía argumentar qué entendían por los términos: función y límite de una función, también se les propusieron algunos ejercicios donde se les pedía calcular el límite de funciones algebraicas y trigonométricas, con éste estudio pudimos percatamos que existen ciertas dificultades de los alumnos respecto al tema de límites, en primer lugar el que más persiste es el de manejar los términos ecuación y función como sinónimos lo que les obstaculiza tener una idea clara de lo que es el límite de una función, de la misma forma, el algoritmo del método de sustitución representa un obstáculo al toparse con funciones de la forma $f(x) = g(x)/h(x)$ en donde existe un valor para x que hace que $g(x)$ y $h(x)$ sean *cero*.

En el estudio didáctico, a fin de identificar los semestres donde se abordan los límites especiales en el nivel medio superior, se procedió a la revisión de los programas de estudio correspondientes a dicho sistema (ver bibliografía), en dicha revisión se encontró que los semestres en donde se abordan varían entre el cuarto y el sexto semestre del bachillerato. Aunado a esta actividad se procedió también a la realización de una entrevista informal con un profesor en servicio y un alumno que cursaba el quinto semestre, ambos del Colegio de Bachilleres del Estado de Oaxaca, plantel 03 (COBAo 03), el fin de esta entrevista, fue constatar lo que se había encontrado en la revisión de los planes de estudio, y la forma en cómo los *límites especiales* eran tratados en clase, como resultado se obtuvo que éstos límites especiales son abordados en el curso de cálculo diferencial, sin demostración alguna; al cuestionar al

profesor respecto de este hecho, contestó que se debía a la complejidad que envolvía al proceso de la demostración (argumento que coincide con lo reportado en Navarro, 2004); por ésta razón, él de manera personal, en clase, sólo los presenta bajo el tema de *límites trigonométricos especiales*, y posteriormente los utiliza como herramientas para calcular otros límites tales como; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{5x}$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sec}(\theta)-1}{\theta \text{Sec}(\theta)}$.

Para conocer la forma en que los límites de nuestro interés son abordados, se realizó un análisis de algunos libros encontrados en la bibliografía de los planes revisados, en ellos se halló que los límites especiales son demostrados haciendo uso principalmente de trazos geométricos, identidades trigonométricas, fórmulas para calcular áreas de sectores y triángulos, se utilizan también medidas angulares pero en radianes. Un aspecto que nos llamó la atención en estas presentaciones es que, primero es demostrado el $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}$ y posteriormente es utilizado para hallar el $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(x)}{x}$; sin embargo en los libros Purcell (1992), Swokowski(1989) y Hughes-Hallet (2001) encontramos una propuesta diferente de tratar a estos límites, en los dos primeros se sugiere utilizar tablas donde se aproximen a los valores de x para ver qué sucede con $f(x)$ y darse una idea del límite de dicha función y se hace explícito que ésta idea un tanto intuitiva puede ayudar al alumno a la búsqueda del límite sugerido. En el tercero se hace énfasis en la utilización de la gráfica de la función para deducir el límite.

Basados en ésta revisión, el diseño de las actividades elaboradas para tratar a los límites especiales, estuvieron enfocadas al uso de la graficación de funciones algebraicas y trigonométricas y se implementaron recursos como la visualización, la creación de tablas de valores, la calculadora y el software graficador, éste último se usó para elaborar las gráficas de las funciones que les fueron presentadas en las actividades, cabe mencionar que el estudiante no utilizó directamente el software, ya que ello implicaba un trato previo con el programa, además no se tuvo tiempo para hacerlo.

La propuesta diseñada se aplicó, a un grupo de tercer año del COBAo 03, ubicado en la Ciudad de Pinotepa Nacional Oaxaca, que había cursado la materia cálculo diferencial, dicho grupo estaba formado por 41 alumnos, de los cuales sólo 32 participaron en la solución de la actividad. La propuesta se conformó de un total de cuatro actividades, una preliminar y tres posteriores; la actividad preliminar tuvo como fin conocer las concepciones que tienen los alumnos sobre los conceptos, *función* y *límite de una función*, y así mismo percatarnos de la forma cómo calculan los límites de funciones, centrando principalmente nuestro interés en los límites especiales

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\text{cos}(x)}{x}.$$

La actividad número uno perseguía el fin de que los estudiantes pudieran determinar el límite de funciones y así mismo identificarlo en las gráficas propuestas, mediante el análisis mismo de las gráficas y sus recursos propios para hallar el límite de una función (nos referimos a los métodos que saben utilizar para el cálculo de límites). Se trabajaron con límites de las funciones lineal (x), cuadrática(x^2) y cúbica(x^3), posteriormente se trabajaron con las transformaciones gráficas y operaciones básicas entre dichas funciones, en particular la suma y el cociente de funciones.

El objetivo de la actividad número dos consistió en que los estudiantes, calcularan límites de funciones trigonométricas, en particular $\text{seno}(x)$ y $\text{coseno}(x)$, por ello se les presentaron las gráficas de dichas funciones y se les pidió que observaran las gráficas propuestas y argumentaran sobre los límites que se les pedía, en ésta actividad se pretendía que fueran capaces de utilizar como herramienta a la visualización. Posteriormente se les presentaron funciones trigonométricas con transformaciones que implicaban las operaciones suma, resta y multiplicación de los parámetros de las funciones, de ellas tenían que identificar en las gráficas presentadas el límite que se les pedía.

En la actividad número tres se les pidió calcular los límites $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\text{cos}(x)}{x}$, el objetivo de ésta actividad fue que los alumnos pudieran calcular e identificar estos límites con recursos que habían utilizado previamente, además se les facilitó una herramienta que no se les

había propuesto anteriormente, ésta era una tabla en donde aparecían valores aproximados al que tendía x , esto es a cero. Se les pidió además explicar el por qué de su resultado.

Para la resolución de la actividad preliminar se pidió trabajar individualmente, esto con el fin de enfrentar al alumno con el problema, para el resto de las actividades se propuso trabajar en equipos, con la intención de que los alumnos pudieran intercambiar información con sus pares, y a sí mismo, justificar la pertinencia y validez de la forma en que resolvían las actividades propuestas.

Resultados y Discusión

A continuación mostramos por actividades los resultados obtenidos.

En la actividad preliminar, el objetivo fue logrado exitosamente, pues la mayoría contestó la actividad (ver figuras 1 y 2) y pudimos conocer las concepciones que tenían los alumnos sobre los conceptos, *función* y *límite de una función*, de igual modo nos percatarnos de la forma en que calculan los límites de nuestro interés.

¿Qué entiendes por el término función?
Es una correspondencia en donde a cada valor del dominio le corresponde solo un valor del codominio.

¿Qué entiendes por el término límite?
Punto final de algo, término.

¿Cómo definirías el límite de una función?
Punto o número en el cual termina o puede detenerse.

¿Cómo calculas el límite de una función?
Sustituyendo el valor al cual tiende x en la función.

¿Qué entiendes por el término función?
La que sigue una ecuación, desde todo valor del dominio le corresponde un valor de la co-domina, cuando se le da un valor.

¿Qué entiendes por el término límite?
Cuando se va en una sucesión que termina ahí.

¿Cómo definirías el límite de una función?
El límite de una función es cuando la gráfica se hace horizontal en un punto, que no puede estar, que en ese punto no existe la función.

¿Cómo calculas el límite de una función?
Algunos de sustituir los valores arbitrarios, o por el método gráfico.

Figuras 1 y 2, actividad preliminar

A partir de los resultados obtenidos en ésta actividad nos dimos cuenta de ciertos problemas que algunos alumnos tienen al trabajar con el concepto de límite, por ejemplo, algunos estudiantes argumentaban que una función continua no tiene límite y que una función discontinua si lo tiene, y es que para ellos es precisamente el valor de x , en donde $f(x)$ no es continua el límite de la función (ver figura 3). También observamos que la mayoría de los alumnos, hizo uso del método de sustitución para resolver los límites pedidos, así cuando se les pidió calcularan límites de la forma $f(x)/g(x)$ en donde el valor al cual tendía x provocaba que

tanto numerador como denominador se volvieran cero, los resultados por ellos concebidos fueron: ∞ , $-\infty$ o indeterminado (ver figura 4)

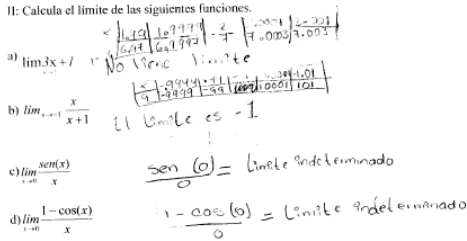


Figura 3, actividad preliminar

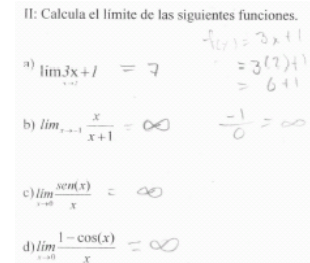


Figura 4, actividad preliminar

La actividad número uno, perseguía el fin de que los estudiantes pudieran determinar el límite de funciones y así mismo identificarlo en las gráficas propuestas, mediante el análisis mismo de éstas y sus recursos propios para hallar el límite de una función, acción que podemos decir se cumplió, ya que la mayoría de los alumnos halló los límites pedidos y los identificó en cada una de las representaciones gráficas, otros más sólo resolvieron y no usaron las gráficas, notamos en estos resultados, que algunos alumnos hacen uso de tablas y en ellas se aproximan al valor al que tiende x , pero solo con valores enteros.

Para los límites de funciones con transformaciones gráficas, notamos que hubo problemas solamente en uno de ellos que correspondía a la forma $0/0$, en ella muchos argumentaron que el límite era infinito(∞), a pesar de estar haciendo uso de tablas y ver la gráfica, parece que no pudieron confrontar estos dos resultados y mirar lo que realmente se les estaba presentando, en los resultados llama mucho la atención el caso de un alumno (ver figura 5), que tiene arraigada la idea de que las funciones continuas no tienen límite.

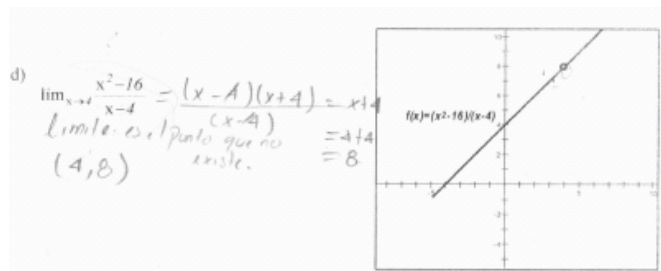


Figura 5, actividad 1, el límite es el punto que no existe

Para la actividad número dos, la mayoría de los alumnos participantes, al menos con las funciones prototipo $\text{seno}(x)$ y $\text{coseno}(x)$, dieron sus resultados sólo a través del análisis de las gráficas propuestas, lo cual nos deja ver que implícitamente hicieron uso del recurso de la visualización (ver figuras 6 y 7), otros más siguieron utilizando los métodos de sustitución y la creación de tablas para los límites de funciones que implicaban transformaciones gráficas entre ellas, las mayoría recurrió al uso del método de sustitución, aunque hubo quienes al observar la gráfica emitieron sus resultados, en conclusión, podemos decir que sí se cumplió con el objetivo planteado.

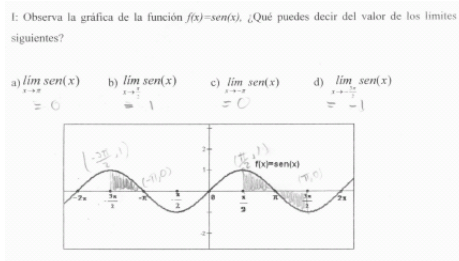


Figura 6, bloque 1, actividad 2

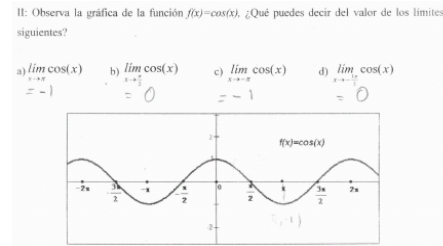


Figura 7, bloque 1, actividad 2

En este bloque, hubo un equipo, que primero convirtió los radianes a grados y posteriormente usando el algoritmo de sustitución halló el resultado, sólo que al evaluar los valores de x en $f(x)$, lo hicieron con valores aproximados a éste y no al que verdaderamente tendía x , esto puede verse claramente en las figuras 8 y 9.

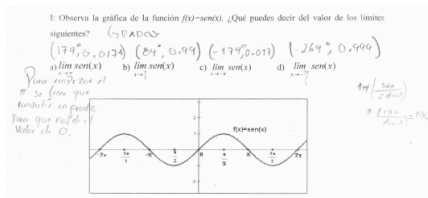


Figura 8, bloque 1, actividad 2

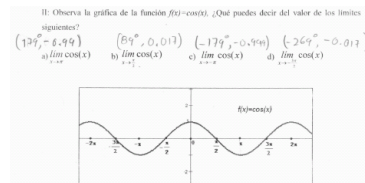


Figura 9, bloque 1, actividad 2

En la actividad número tres, notamos que la mayoría pudo contestar la actividad correctamente, aunque algunos estudiantes mostraban ciertos problemas al comparar la tabla con la gráfica, pues el confrontar dichos recursos les impedía argumentar un resultado, otros presentaron problemas al trabajar con el método de sustitución, pues para ellos la calculadora (donde hacen las operaciones de sustitución) les dice una cosa mientras que la gráfica indica otra (ver figura 10), pero hubo a quienes el trabajo se les facilitó mucho con dichos recursos, otros más, en menor proporción, tienen muy arraigado el algoritmo de sustitución lo que los cierra al empleo

de otros métodos, esto lo argumentamos porque algunos alumnos al resolver esta actividad, sólo sustituyeron el valor de x , en la función y les queda la forma $0/0$, que dijeron era igual a infinito(∞), y los recursos proporcionados ni siquiera los tomaron en cuenta.

Al pedirles que argumentaran el porqué de sus resultados la mayoría coincidió en que fue por el recurso de la gráfica (ver figura 11), donde les fue más fácil mirar el límite al que se estaba tendiendo en lugar de toda la tabla, la cual les resultaba menos fácil de comprender ya que no sabían a qué número correspondía el símbolo “?”.

Otros alumnos dijeron que fue tanto el uso de la tabla cómo el de la gráfica los que les permitieron emitir el resultado.



Conclusiones

Basados en los datos recogidos de la aplicación de la actividad podemos afirmar que ésta propuesta sí les permitió, deducir y visualizar los límites $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\text{cos}(x)}{x}$, sin embargo existen pequeños problemas, que dificultan la total comprensión de éstos resultados

como es el hecho de usar el método de sustitución en donde al evaluar x , en $f(x)$, les queda la expresión $0/0$, así como también la lectura o interpretación de lo que se les presenta, en este caso las tablas y las gráficas de las funciones, lo cual desde nuestra opinión exige que de ser implementados en clase estos recursos para resolver límites de la forma $0/0$, requerirá primero de un trabajo tanto con gráficas de funciones como con tablas de aproximaciones, en el cual los alumnos puedan realmente comprender el valor y la finalidad de estos para posteriormente ser utilizados, con el fin de que en los cursos posteriores los alumnos sean capaces de manejarlos favorablemente al calcular límites.

Bibliografía

Ayres F. (1991): *Cálculo Diferencial e Integral*. México: Mc Graw-Hill.

Cabezas, C., Trujillo M. y Morales J. (2004). *Efectos del Uso de Software de Visualización en las Clases de Cálculo en la Actitud de los Alumnos y en el Rol del Profesor*. Extraído el día 16 de diciembre del 2005 del sitio web: <http://www.tise.cl/archivos/tise2004/pp/12.pdf>.

Chamorro, M.C. (2006). *Didáctica de las matemáticas para la educación infantil*. Madrid: Pearson Prentice-Hall.

Colegio de matemáticas. *Programa de estudios de la asignatura de: matemáticas VI. Áreas I y II*. Universidad Nacional Autónoma de México Escuela Nacional Preparatoria.

Coordinación de Educación Media Superior. (2000). *Programas de estudio. Área: Físico-Matemáticas*. Universidad Autónoma de Guerrero.

Ferrari, M. (2001). *Una visión Socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México, D.F, México.

Hughes-Hallet D., Gleason, A, et al. (2001): *Cálculo*. Segunda Edición. México: CECSA.

Inzunza, S. (2001). *La calculadora algebraica: una herramienta didáctica para la enseñanza de las matemáticas en el bachillerato*. Extraído el día 16 de diciembre del 2005.

Medina, A. (2000). *Concepciones históricas asociadas al concepto de Límite e implicaciones didácticas*. Universidad Pedagógica Nacional. México, D.F, México.

Navarro, C. (2004). *Elaboración y funcionamiento de una ingeniería didáctica basada en la visualización de los límites $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(x)}{x}$* . Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México, D.F, México.

Patiño, D. (2007). *Estudios de comportamientos análogos de funciones algebraicas y trigonométricas usando transformaciones gráficas*. Tesis de licenciatura no publicada. UAG. Chilpancingo, Guerrero.

Programa de matemáticas 4 (Cálculo Diferencial). Nivel Medio Superior. Instituto Politécnico Nacional.

Purcell E. (1992): *Calculo Diferencial e integral*. Octava Edición. México: Prentice-Hall.

Secretaría de docencia. Coordinación general de la escuela preparatoria. *Programa de estudio: Cálculo Diferencial e Integral*. Universidad Autónoma del estado de México.

Secretaría de Educación Pública. Dirección de coordinación académica. *Programa de Estudio: Cálculo diferencial*. Colegio de Bachilleres del Estado de Oaxaca.

Stewart J. (1998): *Cálculo de una variable*. Cuarta Edición. México: Thomson.

Swokoski E. (1989): *Cálculo con Geometría analítica*. Segunda Edición. México: Grupo Editorial Iberoamérica.