

EN BUSCA DE LA DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Carlos Oropeza L., Javier Lezama A.
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN.
carlos_oropezamx@yahoo.es; jlezamaipn@gmail.com
Laboratorio Didáctico.

Resumen

En este trabajo reportamos algunas experiencias de clase con estudiantes de un curso de Álgebra Lineal, en las que se les hace trabajar actividades que los obligan a elaborar representaciones de carácter geométrico a los conceptos de dependencia e independencia lineal. Dichas experiencias tienen carácter exploratorio y se orientan a detectar elementos distintos en el proceder de los estudiantes de cuando se hace un tratamiento convencional en el estudio de dichos conceptos. Estas experiencias con centración en representaciones geométricas, nos aportarán elementos para problematizar la adquisición del concepto de dependencia e independencia lineal. Las investigaciones didácticas reconocen en tales conceptos una especial complejidad, debido a su carácter abstracto. Esperamos, a partir de la actividad desarrollada en este laboratorio detectar elementos de carácter cognitivo y didáctico en el proceso de comprensión de dichos conceptos, que nos permitan estructurar preguntas precisas sobre la adquisición de conceptos del Álgebra Lineal en el aula, vía representaciones visuales o de contextualización.

Palabras clave: Dependencia lineal, independencia lineal, Wronskiano.

Introducción

La investigación en Matemática Educativa, se ha ocupado cada vez más, al estudio de los procesos de aprendizaje de las matemáticas y los procesos de instrucción asociados a dicho aprendizaje en el nivel universitario.

El aprendizaje del álgebra lineal en los estudiantes de ingeniería, presenta dificultades que al parecer son diferentes a las que se producen en otras áreas de la matemática, como por ejemplo, el cálculo. En la instrucción del álgebra lineal, no es usual partir de conocimientos físicos o geométricos para comenzar la construcción de sus conceptos. La mayor parte de los conceptos algebraicos, son presentados a partir de definiciones formales que no son usuales en las otras áreas de la matemática escolar, tal es el caso de una presentación axiomática que define las características del objeto matemático a estudiar; la existencia de tales objetos definidos, en la mayoría de los casos no parte de conocimientos previos, ni de argumentos provenientes de la física o la geometría, sino que se construyen formalmente. Esto hace que muchos estudiantes perciban al álgebra como demasiado abstracta y sus objetos carentes de significado y en extremo alejados de aplicación en la realidad. Esta necesidad de profunda abstracción ha promovido diversas reflexiones en torno a la búsqueda de presentaciones diferentes del tema. Con el fin de intentar clarificar la comprensión y construcción de los conceptos matemáticos de dependencia e independencia lineal en las funciones polinómicas que se abordan en la asignatura de álgebra lineal, en la presente propuesta se pretende hacer uso de las representaciones geométricas para

que los alumnos puedan incorporarlas en la búsqueda de significados en el concepto antes referido.

Algunos los problemas relativos al aprendizaje del álgebra lineal se refieren a las diferentes representaciones que puede tener un mismo objeto y para las cuales no resulta muy claro para un estudiante que se trata del mismo objeto. El alumno se encuentra, por ejemplo, con dos representaciones diferentes de la suma de vectores, una geométrica con una definición formal y otra enteramente formal para espacios vectoriales generales (Sierpinski, 1996). Cabe preguntarse, entonces, cómo se realiza el pasaje de una forma de representación a otra y de qué manera contribuyen estas representaciones diversas en la construcción de un concepto algebraico. Comprendemos que una representación única, no es capaz de transmitir la totalidad de su significado, por lo que se hace necesario un acercamiento a través de diversas representaciones al concepto para llegar a su comprensión y construcción.

La visualización juega un papel importante en la construcción de conceptos matemáticos. Existen diversas definiciones y caracterizaciones de la visualización. *“La visualización es la capacidad, el proceso y el producto de creación, interpretación, empleo de y reflexión sobre cuadros, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensando y desarrollando ideas desconocidas y anticipando el entendimiento”* (Arcavi, 1999, p.56). Por otra parte, la visualización no puede ser entendida como el simple acto de ver, sino como *“la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende”*. (Cantoral & Montiel, 2002, p.24). En la visualización se utilizan matemáticas relacionadas con el campo de lo numérico, gráfico, algebraico, verbal y también de lo gestual. De esta manera, la visualización opera con el funcionamiento de las estructuras cognitivas, las relaciones entre las diversas representaciones de un objeto matemático y además intervienen en una determinada cultura.

En las actividades que se proponen en este trabajo, se apunta, por una parte a reconocer cómo el abordaje de conceptos de álgebra lineal haciendo uso de distintas representaciones, favorece la construcción de las mismas. Por otra parte, se intenta determinar si por medio de la visualización de funciones, es posible identificar la presencia de dependencia o independencia lineal de las mismas, al menos en casos particulares. De esta manera, mediante la realización de las actividades se deberá poner de manifiesto el doble papel que juegan los objetos matemáticos y la operatividad de los elementos visuales en el contexto del concepto mismo. En este marco, irán surgiendo, por lo tanto preguntas que guiarán la investigación que estamos realizando, en referencia a cómo diseñar un acercamiento al álgebra lineal, en este caso particular a los conceptos de dependencia e independencia lineal que involucren diversas representaciones y de qué manera éstas pueden favorecer la construcción de dichos conceptos.

Una secuencia de actividades para introducir la dependencia e independencia lineal

Se presenta a continuación una secuencia de actividades diseñada con la finalidad de trabajar los conceptos de dependencia e independencia lineal de funciones y polinomios de primero y segundo grado, haciendo uso de recursos y representaciones geométricas. Se parte en ellas de la

consideración de la importancia de la visualización o representación geométrica para la comprensión de objetos matemáticos en la asignatura de Álgebra Lineal, y de que los recursos geométricos deben poseer un papel central en el aula, no siendo relegados únicamente a la ejemplificación. La exploración gráfica debe complementar al estudio teórico de un tema, permitiendo mejorar la construcción de los conceptos matemáticos.

Los recursos tecnológicos contribuyen en gran medida a la exploración gráfica, permitiendo aprovechar sus ventajas tanto en aspectos gráficos como de velocidad de cálculo. La tecnología brinda facilidades para la visualización. Sin embargo, es fundamental tener en cuenta que lo importante en el aula es el diseño de las propuestas didácticas y no los recursos que se utilizan para su puesta en práctica. En las actividades que propusimos en esta investigación, los estudiantes pudieron hacer uso de los recursos tecnológicos disponibles, lo que les facilitó la experimentación y visualización, sobre todo en cuanto a las facilidades de graficación y tiempo de realización de cálculos.

La investigación posee características de tipo cualitativo, radicando nuestro interés en la exploración de conceptos. El análisis de datos es de tipo inductivo, ya que las categorías e interpretaciones se construirán a partir de la información que se obtenga. El foco de investigación tendrá, como acabamos de afirmar, un carácter exploratorio, descriptivo e interpretativo.

En esta sección se analizan algunas de las respuestas emitidas por un grupo de estudiantes de segundo semestre de ingeniería en la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán (UNAM), México.

En el trabajo se ha puesto una atención especial en los significados que los estudiantes e ingeniería asignan al concepto de dependencia e independencia lineal con relación a los vectores libres (flecha) y funciones de primero y segundo orden haciendo uso del Wronskiano para su análisis. Las experiencias convencionales nos muestran que frecuentemente los profesores de la asignatura de álgebra Lineal dan la definición, inician con ejercicios simples, aumentan el grado de dificultad y solicitan al estudiante continúe con la solución de los ejercicios.

Haciendo uso de esta consideración, la propuesta que se plantea en las actividades diseñadas tiene como propósito construir una serie de hipótesis que reflejen cómo enfrentan a su solución los estudiantes, qué respuestas dan, la actividad matemática que se provoca las argumentaciones que se generan y los conceptos matemáticos que logran poner en juego. Proponemos de manera implícita reflexionar sobre las posibles ventajas que dichas actividades pueden producir con miras al aprendizaje del concepto en contraste con la forma convencional con que se revisan dichos conceptos.

ACTIVIDAD 1. *Construcción en el plano y del plano*

En esta actividad se pretende que los alumnos incorporen antecedentes que les ayuden a la adquisición del concepto de combinación lineal como antecedente del concepto de dependencia e independencia lineal. También se pretende que a partir de la solución de ésta, los estudiantes deduzcan el concepto de combinación lineal, logren una interpretación adecuada de los vectores libres que se asocian a cada uno de los puntos marcados en los diferentes cuadrantes, recuperen el

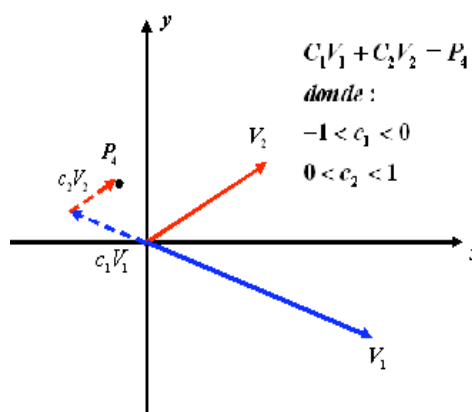
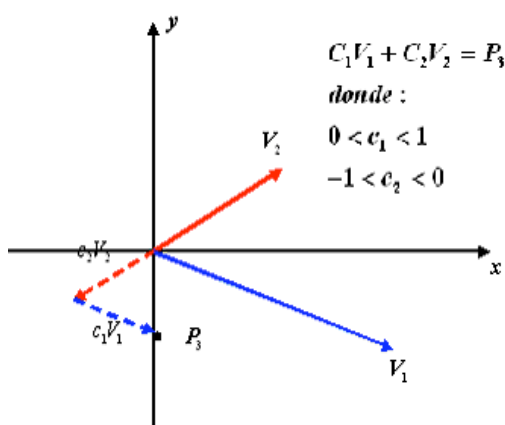
significado del producto de un escalar por un vector, practiquen la suma de vectores preferentemente a partir del método del paralelogramo y hagan uso de los elementos geométricos como una alternativa para verificar y construir sus respuestas.

Como se puede apreciar en el resultado de la actividad que se reporta, presenta en forma general que los estudiantes logran responder en menor o mayor medida los cuestionamientos asociados a la misma. En la discusión final se observó que al finalizar la misma la totalidad de los integrantes en los cinco equipos coinciden en una respuesta común siendo para ellos este hecho un agente motivador que les permite aceptar naturalmente la solución de las actividades restantes.

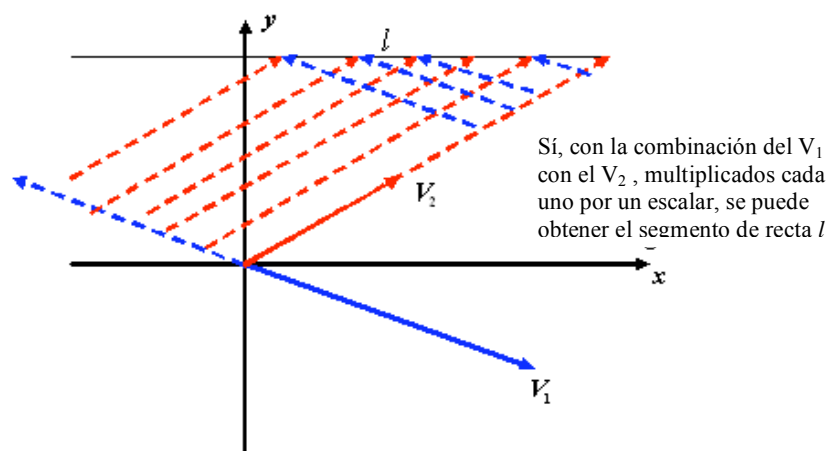
Es importante observar los métodos y las herramientas utilizadas por los alumnos en la resolución de las actividades, esto deja de cierta manera claro la idea que tienen del concepto de estudio.

Algunas respuestas a la actividad

1. Con los vectores V_1 y V_2 construye los vectores P_1 , P_2 , P_3 y P_4 de la siguiente figura



2. ¿Con los vectores V_1 y V_2 puedes formar el segmento de recta l ?



3. ¿Con los vectores V_1 y V_2 puedes formar la totalidad del plano?

Sí, ya que cualquier combinación lineal de los vectores V_1 y V_2 , multiplicados cada uno por cualquier escalar que pertenezca a los números reales, dará un punto en el plano R^2 .

4. ¿Son los vectores V_1 y V_2 los únicos que pueden formar el plano R^2 ?, proponer otro ejemplo distinto.

No, existen infinidad de vectores que pueden formar el plano R^2 , siempre y cuando los dos sean diferentes de cero.

5. Escribe la ecuación que caracteriza la resultante de los vectores V_1 y V_2

$$c_1V_1 + c_2V_2 = r$$

Como se puede apreciar en el resultado de la actividad que se reporta, presenta en forma general que los estudiantes logran responder los cuestionamientos asociados a la misma. En la discusión final se observó que la totalidad de los integrantes en los equipos coinciden en una respuesta común, siendo para ellos este hecho un agente motivador que les permite aceptar naturalmente la solución de las actividades restantes.

Es importante observar los métodos y las herramientas utilizadas por los alumnos en la resolución de las actividades, esto deja de cierta manera claro la idea que tienen del concepto estudiado.

En estas actividades, se está poniendo en juego el concepto de base de un espacio vectorial, aparte de la de combinación lineal y generación de un espacio vectorial.

ACTIVIDADES 2, 3 y 4. *Uso del Wronskiano y determinación de dependencia e independencia lineal*

En las siguientes actividades se espera que los estudiantes lleguen a deducir que el escenario representacional no proporciona información suficiente para poder obtener directamente una categorización sobre el concepto de dependencia e independencia lineal.

Estas actividades fueron realizadas en clases posteriores a la actividad 1 anteriormente reportada. Para este momento, los alumnos ya habían visto las definiciones de dependencia e independencia lineal y habían trabajado con el docente un ejemplo en el que aplicaban el método del Wronskiano.

En la actividad 2, se ponen en juego los conocimientos que el estudiante tiene de una recta, su pendiente, su ordenada al origen, el uso de derivadas sucesivas, y la solución de un determinante.

La actividad 3, propone que los estudiantes hagan uso de los elementos de una parábola, la gráfica de una función constante, el uso de derivadas sucesivas y la solución de un determinante.

Finalmente en la actividad 4 se estudian polinomios de segundo orden con la intención de tender un puente con otra serie de actividades que se han diseñado para tal fin.

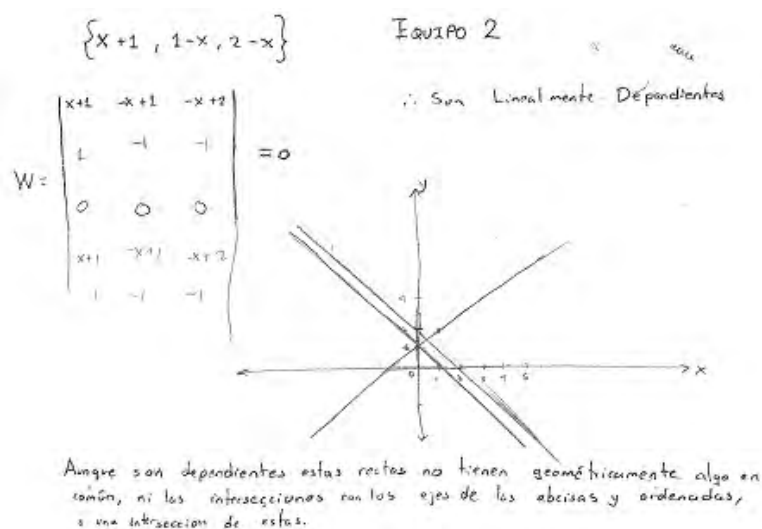
El surgimiento de dicho obstáculo, puede conducir hacia un nuevo desplazamiento del uso de la demostración analítica denominada isomorfismo lineal, el cual asocia un significado equivalente entre los polinomios de orden "n" y el espacio \mathbf{R}^{n+1} .

Algunas respuestas a las actividades

ACTIVIDAD 2

Dadas las siguientes funciones $\{x + 1, 1 - x, 2 - x\}$:

- Determine si son linealmente dependientes o independientes utilizando el Wronskiano.
- Grafique y plantee una explicación del porqué sucede la dependencia.
- ¿Es posible determinar gráficamente su dependencia?



La actividad que hace uso del Wronskiano, está fundamentada en la definición la cuál involucra las n-1 derivadas sucesivas del conjunto de funciones, donde n representa el orden del polinomio.

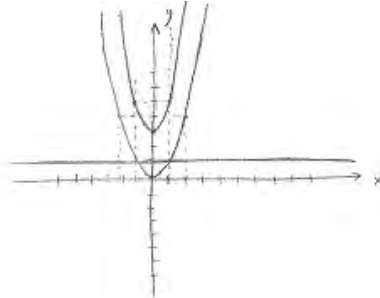
Haciendo uso de esta distribución se propone en la primera parte de esta actividad un conjunto de polinomios de primer orden en donde la respuesta que emiten los estudiantes se puede apreciar con claridad que a pesar de llegar a la solución analítica, ellos no encuentran una interpretación geométrica convirtiéndose la exploración que efectúan en algo sumamente interesante.

ACTIVIDAD 3

Dados los siguientes polinomios $2x^2+3$, x^2 , 1 .

- Determine si son linealmente dependientes o independientes utilizando el Wronskiano.
- Grafique y plantee una explicación del porqué sucede la dependencia.
- ¿Es posible determinar gráficamente su dependencia?
- ¿Qué sucedería con las respuestas anteriores si las funciones fueran $2x^2+3$, x^2 , 7 ?

$$\begin{Bmatrix} 2x^2+3 \\ x^2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2x^2+3 & x^2 & 1 \\ 4x & 2x & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 8x - 8x = 0$$


∴ Son linealmente dependientes.

En este caso tenemos 3 funciones de las cuales una es constante y dos de segundo grado, no tienen raíces que compartan, intersecciones o alguna característica geométrica de la cual podamos deducir si son o no dependientes.

En esta actividad nuevamente logran encontrar el resultado analítico sin llegar a una interpretación geométrica.

ACTIVIDAD 4

Dados los siguientes polinomios $-2x^2+x-4$, x^2-4x-4 , $8x^2-7x-4$.

- Determine si son linealmente dependientes o independientes.
- Grafique y plantee una explicación del porqué sucede la dependencia.
- ¿Es posible determinar gráficamente su dependencia?

$$\{-2x^2+x-4, x^2-4x-4, 8x^2-7x-4\}$$

$$\begin{vmatrix} -2x^2+x-4 & x^2-4x-4 & 8x^2-7x-4 \\ -4x+1 & 2x-4 & 16x-7 \\ -4 & 2 & 16 \end{vmatrix} = (-2x^2+x-4)(2x-4)(16) + (8x^2-7x-4)(-4x+1)(2) + (x^2-4x-4)(16x-7)(-4)$$

$$- (8x^2-7x-4)(2x-4)(-4) - (-2x^2+x-4)(16x-7)(2) - (x^2-4x-4)(-4x+1)(16)$$

$$= [-4x^3 + 2x^2 - 8x - 8x^2 + 4x + 16]16 + [-32x^3 + 28x^2 + 16x + 8x^2 - 7x - 4]2 + [16x^3 - 64x^2 - 64x - 7x^2 + 28x + 28](-4)$$

$$- [16x^3 - 14x^2 - 8x - 32x^2 + 28x + 16](-4) - [32x^3 - 16x^2 - 64x + 16x^2 - 7x + 28]2 - [4x^3 + 16x^2 + 16x + x^2 - 4x - 4]16 =$$

$$\begin{aligned}
 &= -64x^3 - 96x^2 - 64x + 256 - 64x^3 + 72x^2 + 18x - 8 + 64x^3 - 209x^2 - 199x + 112 + 64x^3 - 189x^2 + 89x + 64 \\
 &+ 64x^3 + 96x^2 + 192x - 56 + 64x^3 - 272x^2 - 192x + 64 = \\
 &= -64x^3 - 64x^3 + 64x^3 + 64x^3 + 64x^3 - 96x^2 + 72x^2 - 209x^2 - 189x^2 + 96x^2 - 276 \\
 &- 64x + 18x - 199x + 89x + 192x - 192x + 256 - 8 + 112 + 64 - 56 + 64 \\
 &= \underline{128x^3 - 760x^2 - 32x + 432} \neq 0
 \end{aligned}$$

Entonces los polinomios son Linealmente Independientes.

En la resolución de esta actividad se aprecia una gran mecanización de la herramienta matemática en cuanto al álgebra se refiere, pero incluso el equipo 2 que muestra sus respuestas no logra alcanzar la gráfica de los polinomios. Dicha mecanización se pone de manifiesto en que como este ejercicio se encuentra a continuación del que requiere del método del Wronskiano, hicieron uso de este recurso en lugar de recurrir a la definición de combinación lineal, que hubiera facilitado los cálculos.

Discusión de los resultados

En este apartado se describen algunos de los elementos que consideramos son relevantes de comentar.

En la actividad 1, se observaron algunas dificultades por parte de los alumnos cuando trabajan con los cuadrantes II, III y IV ya que les cuesta establecer los rangos del valor que deben tener los escalares para cumplir con las condiciones que les solicitan. Algunos estudiantes discutieron incluso acerca de los signos que debían tener cada uno de los escalares que intervienen en las combinaciones lineales correspondientes.

Algunos de los equipos llegan sin problemas a la generación de la recta l a partir de los dos vectores que originalmente se proponen. En términos generales la mayoría de los estudiantes hacen uso de los elementos geométricos asociados a cada inciso del diseño en esta actividad.

Los equipos de estudiantes al trabajar con el Wronskiano presentan regularmente cierta resistencia, pues el concepto involucra hacer uso de derivadas sucesivas. También llegan a

presentar frecuentemente resultados contradictorios entre los cálculos obtenidos y su respuesta en forma geométrica.

Conclusiones

El diseño de situaciones orientadas a la construcción de un concepto algebraico no resulta sencillo, debido a las características propias del álgebra en el discurso matemático escolar.

En relación a la puesta en práctica de las actividades podemos decir que si bien la totalidad de los estudiantes no pudieron resolverlas correctamente, se generó en el aula un ambiente en el que los intercambios de opiniones fueron muy ricos.

Resulta notorio que al solicitar interpretaciones las gráficas de la dependencia e independencia lineal de funciones polinómicas, muchos estudiantes intentaron identificar dichas interpretaciones a través de la búsqueda de intersecciones entre las curvas y intersecciones de las mismas con los ejes coordenados. Interpretamos estas respuestas como un intento de transferencia de conocimientos adquiridos en el análisis matemático a esta otra rama de la matemática. Esto nos permite identificar como una dificultad, la interpretación del concepto de dependencia e independencia lineal en la asignatura de álgebra lineal sobre objetos conocidos en otras áreas de la matemática cuando éstos son considerados como vectores.

Referencias Bibliográficas:

- Arcavi, A. (1999). The role of visual representations in the learning of mathematics. En Hitt, F., Santos, M. (Ed.), *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 55-80). Morelos, México.
- Cantoral, R.; Montiel, G. (2002). *Una presentación visual del polinomio de Lagrange*. Enseñanza de la Matemática. Asociación Venezolana de Educación Matemática, Vol. 11 (1), 24–38.
- Grossman, S. I. (1999). *Álgebra Lineal*. México: McGraw-Hill.
- Lay, D. C. (2001). *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones*. México: Pearson Educación.
- Poole, D. (2004). *Álgebra Lineal. Una introducción moderna*. México: Thomson Learning.
- Williams, G. (2002). *Álgebra Lineal con aplicaciones*. México: McGraw- Hill.
- Sierpinska, A. (1996). *Problems related to the design of the teaching and learning process in linear algebra*. Research Conference in Collegiate Mathematics Education, Central Michigan University.