



## Open Archive Toulouse Archive Ouverte

OATAO is an open access repository that collects the work of Toulouse researchers and makes it freely available over the web where possible

This is an author's version published in:

<http://oatao.univ-toulouse.fr/22246>

### Official URL

<https://doi.org/10.3166/RIA.29.349-368>

**To cite this version:** Besnard, Philippe and Grégoire, Eric and Raddaoui, Badran *Un système argumentatif pour le raisonnement sur des ressources limitées*. (2015) *Revue d'Intelligence Artificielle - RIA*, 29 (3-4). 349-368. ISSN 0992-499X

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository administrator: [tech-oatao@listes-diff.inp-toulouse.fr](mailto:tech-oatao@listes-diff.inp-toulouse.fr)

## A conjugate gradient like method for $p$ -norm minimization in functional spaces

Claudio Estatico · Serge Gratton · Flavia Lenti · David Titley-Peloquin

Received: date / Accepted: date

**Abstract** We develop an iterative algorithm to recover the minimum  $p$ -norm solution of the functional linear equation  $Ax = b$ , where  $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  is a continuous linear operator between the two Banach spaces  $\mathcal{X} = L^p$ ,  $1 < p < 2$ , and  $\mathcal{Y} = L^r$ ,  $r > 1$ , with  $x \in \mathcal{X}$  and  $b \in \mathcal{Y}$ . The algorithm is conceived within the same framework of the Landweber method for functional linear equations in Banach spaces proposed by Schöpfer, Louis and Schuster (Inverse Probl., 22:311–329, 2006). Indeed, the algorithm is based on using, at the  $n$ -th iteration, a linear combination of the steepest current “descent functional”  $A^*J(b - Ax_n)$  and the previous descent functional, where  $J$  denotes a duality map of the Banach space  $\mathcal{Y}$ . In this regard, the algorithm can be viewed as a generalization of the classical conjugate gradient method on the normal equations (CGNR) in Hilbert spaces.

We demonstrate that the proposed iterative algorithm converges strongly to the minimum  $p$ -norm solution of the functional linear equation  $Ax = b$  and that it is also a regularization method, by applying the discrepancy principle as stopping rule.

According to the geometrical properties of  $L^p$  spaces, numerical experiments show that the method is fast, robust in terms of both restoration accuracy and stability, promotes sparsity and reduces the over-smoothness in reconstructing edges and abrupt intensity changes.

**Keywords** Iterative regularization · Banach spaces · Conjugate gradient method

---

C. Estatico  
Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Genova, Italy  
E-mail: estatico@dima.unige.it

S. Gratton  
Université de Toulouse, INP-IRIT, France  
E-mail: serge.gratton@enseeiht.fr

F. Lenti  
Institut de Recherche en Informatique de Toulouse, France  
E-mail: flavialenti@gmail.com

D. Titley-Peloquin  
Department of Bioresource Engineering, McGill University, Canada  
E-mail: david.titley-peloquin@mcgill.ca

**Mathematics Subject Classification (2010)** 65J20 · 47A52 · 65F10

## 1 Introduction

We discuss the problem of iteratively recovering a solution of the functional equation

$$Ax = b, \quad (1)$$

where  $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  is a linear and continuous operator between two functional spaces  $\mathcal{X}$  and  $\mathcal{Y}$ , with  $x \in \mathcal{X}$  and  $b \in \mathcal{Y}$ .

The problem we consider is ill-posed, since its solution is not unique or does not exist for arbitrary data or does not depend continuously on the data [2]. There is now an exhaustive and comprehensive literature about linear and nonlinear inverse ill-posed problems in Hilbert spaces. Over the last decade, there has been a growing interest in studying inverse ill-posed problems in Banach spaces, because many applicative problems are therein better modeled ([3], [8], [19], [20], [22], [21], [23], [25], to name just a few references).

In [20], Schöpfer, Louis and Schuster computed a regularized solution in Banach spaces by means of the following generalized Landweber, i.e. gradient-type, iterative scheme

$$x_{n+1} = j^{\mathcal{X}^*} \left( j^{\mathcal{X}}(x_n) - \alpha_n A^* j^{\mathcal{Y}}(Ax_n - b) \right), \quad (2)$$

where  $j^{\mathcal{X}}$ ,  $j^{\mathcal{X}^*}$  and  $j^{\mathcal{Y}}$  are duality mappings of the corresponding spaces  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{X}^*$ ,  $\mathcal{Y}$  [25], and  $\alpha_n > 0$  is a appropriately chosen step size. The discrepancy principle is employed to obtain a suitable stopping index in the case of noisy data. Like in Hilbert spaces, the method turned out to have good regularizing properties but its convergence speed is generally very slow.

The conjugate gradient (CG) algorithm for linear systems is known to enjoy better convergence properties than methods based solely on gradient descent, but its original formulation by Hestenes and Stiefel applies only in Hilbert spaces. In this respect, the algorithm we develop in this paper can be considered as an extension to Banach space settings of the conventional CG method on the normal equations for linear systems in Hilbert spaces (also known as CGNR method). Indeed, on the basis of the theoretical framework of [20], we suggest using a different “descent functional” than the steepest one  $A^* j^{\mathcal{Y}}(b - Ax_n)$  at each iterative step, which is defined by the same kind of linear combination as in the CGNR method. More specifically, in [20] the spaces  $\mathcal{X}$  is assumed to be smooth and uniformly convex and  $\mathcal{Y}$  can even be an arbitrary Banach space. Although our convergence proof closely follows the arguments of [20], in this paper we restrict the analysis to the case of  $\mathcal{X} = L^p$  with  $1 < p < 2$  and  $\mathcal{Y} = L^r$  with  $r > 1$ . On the other hand, we argue that a generalization to other Banach spaces could be obtained without strong changes.

To give a numerical validation, we apply our algorithm to a standard image restoration problem. The exact solution presents discontinuities characterized by different dimensions and different intensities. Reconstructions obtained by using the proposed approach are compared with the ones obtained by CG in Hilbert

spaces, and by both steepest descent and Landweber methods in Hilbert and Banach spaces.

Since the proposed method is based on the minimization of  $p$ -norm (with  $1 < p < 2$ ), it is expected to overcome the typical over-smoothing drawback effects of regularization in Hilbert spaces and to enhance the sparsity of the reconstructed solution. Our first numerical evidences confirm such a positive behavior in both convergence speed and accuracy of the restoration.

Due to the intrinsic non-linearity of the duality maps, we mention that, differing from original CG method in Hilbert spaces, the short term recursion formula for computing the descent functionals (which have the same role of the descent directions in Hilbert spaces) does not guarantee now their full mutual conjugacy. Thus, the proposed algorithm does not converge within  $n$  iterations for  $n \times n$  linear systems in Banach spaces. A concomitant proposal by Herzog and Wollner [13] for the linear system (1) in a reflexive Banach space with  $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}^*$  self-adjoint and positive, preserves the conjugacy of the descent directions, so that convergence in a finite number of steps holds as in the finite dimensional Hilbertian case. Another positive fact is that, differing from the proposed algorithm, the method in [13] does not require to solve any one-dimensional minimization problem for the computation of the optimal step size at each iteration, since a closed formula holds as in the Hilbertian case. On the other hand, to keep the mutual conjugacy of any new descent direction, such an algorithm requires the storage of all the previous descent directions, which are all used for the implementation of a modified Arnoldi conjugation procedure as the iterations go on. Although finite convergence is not assured, the CG-like method proposed in the present paper does not require any other storage than the last descent (functional) direction and can be used in a more general setting, since the operator  $A$  is here not required to be self-adjoint. Moreover, differing from [13], the iterations are here explicitly computed in the dual space  $\mathcal{X}^*$ , as generally done in [20], [22] and [3].

The remainder of this paper is organized as follows. In Section 2, we give the necessary theoretical tools used in Section 3 and Section 4 to prove the strong convergence for noise-free and noisy data  $b$ , respectively. In Section 5, a practical implementation issue related to the step size computation is described and in Section 6 the numerical experiments are presented and discussed. Some conclusions are drawn in Section 7.

## 2 Preliminaries

The aim of this section is to briefly recall basic tools and classical notations usually used in the Banach space setting for the regularization of ill-posed problems. For details and proofs, we suggest the following monographs: [7], [17], [25].

Following the same notation as [20], throughout the paper, both  $\mathcal{X}$  and  $\mathcal{Y}$  are two real Banach spaces with dual spaces  $\mathcal{X}^*$  and  $\mathcal{Y}^*$  equipped with the corresponding operator norm. For  $x^* \in \mathcal{X}^*$  and  $x \in \mathcal{X}$  we denote by  $\langle x^*, x \rangle_{\mathcal{X}^* \times \mathcal{X}}$  and  $\langle x, x^* \rangle_{\mathcal{X} \times \mathcal{X}^*}$  the duality pairing defined as  $\langle x^*, x \rangle_{\mathcal{X}^* \times \mathcal{X}} = \langle x, x^* \rangle_{\mathcal{X} \times \mathcal{X}^*} = x^*(x)$ . In general, we omit subscripts indicating the space when this piece of information is implicitly clear. In particular, this will be done for any norm of vectors or oper-

ators throughout the paper.

The operator  $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  is continuous and linear, and  $A^* : \mathcal{Y}^* \rightarrow \mathcal{X}^*$  denotes its adjoint operator of  $A$ , that is, the operator such that  $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$ ,  $\forall x \in \mathcal{X}$  and  $y \in \mathcal{Y}^*$ . We have  $\|A\| = \|A^*\|$  in each corresponding operator norm.

For two real numbers  $a$  and  $b$ , we write  $a \vee b = \max\{a, b\}$ ,  $a \wedge b = \min\{a, b\}$ .

Throughout the paper, for  $p, r \in (1, +\infty)$ , we usually denote by  $q = p^*$  and  $s = r^*$  their Hölder conjugates.

## 2.1 Duality mapping

The key point in the generalization of the regularization method in Banach spaces is the duality mapping [1], [14], [18]. A duality map is an appropriate function which associates an element of a Banach space  $\mathcal{X}$  with an element of its dual  $\mathcal{X}^*$ , and it is useful when the Banach space  $\mathcal{X}$  is not isometrically isomorphous to its dual  $\mathcal{X}^*$ . Formally, we have the following definition.

### Definition 1 (Duality mapping)

The (set-valued) mapping  $J_p^{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \rightarrow 2^{\mathcal{X}^*}$  with  $p \geq 1$  defined by

$$J_p^{\mathcal{X}}(x) = \left\{ x^* \in \mathcal{X}^* : \langle x^*, x \rangle = \|x\| \|x^*\|, \|x^*\| = \|x\|^{p-1} \right\},$$

is called duality map of  $\mathcal{X}$  with gauge function  $t \mapsto t^{p-1}$ .

In general, by  $j_p^{\mathcal{X}}(x) \in \mathcal{X}$  we will denote a single-valued selection of the subset  $J_p^{\mathcal{X}}(x) \subset \mathcal{X}$ . If  $\mathcal{X} = l^r$  or  $\mathcal{X} = L^r$ , with  $1 < r < +\infty$ , the duality map is a single-valued function which will be denoted as  $j_p^r(\cdot)$ . If  $r = p$ , the apex will be usually omitted.

*Example 1* Let us consider  $x \in l^r(\mathbb{R}^n)$ . For every  $p \in (1, +\infty)$ , the duality map  $j_p^r$  is given by

$$j_p^r(x) = \|x\|^{p-r} |x|^{r-1} \text{sign}(x), \quad (3)$$

where  $\text{sign}(\cdot)$  denotes the sign function and the product has to be considered as component-wise. In particular, for the Hilbert space  $l^2$ , according to the Riesz representation Theorem,  $j_2$  is the identity operator, i.e.  $j_2(x) = x$ .

The meaning of any duality mapping is naturally related to the sub-gradient of the Banach norm. We first recall the following basic definition.

### Definition 2 (Subgradient of convex functional)

Let  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Then,  $x^* \in \mathcal{X}^*$  is a subgradient of  $f$  at  $x \in \mathcal{X}$  if

$$f(y) \geq f(x) + \langle x^*, y - x \rangle, \quad \forall y \in \mathcal{X}.$$

The set  $\partial f(x) \subset \mathcal{X}^*$  of all subgradients of  $f$  at  $x$  is called subdifferential of  $f$  at  $x$ .

The following important theorem give us a simple and heuristic way to understand the meaning of any duality map.

**Theorem 1 (Asplund Theorem)** [1] Let  $\mathcal{X}$  be a Banach space and  $p > 1$ . Then

$$J_p^{\mathcal{X}} = \partial \left( \frac{1}{p} \|\cdot\|^p \right). \quad (4)$$

The Asplund Theorem is a key step for an intuitive “geometrical” interpretation of any Banach space and its duality maps. In our context, it will be useful in the following sections for the computation of the subdifferential of the residual functional  $\frac{1}{p} \|Ax - b\|^p$  by the chaining rule.

## 2.2 Geometry of Banach spaces and Bregman distance

Regarding the regularization theory in Banach spaces, the geometrical properties of the spaces, like convexity and smoothness, play a crucial role [7]. These properties, which can be viewed as an extension to Banach space of heuristic basic properties of Hilbert (or simply Euclidean) spaces, are strictly related to the duality maps and will be useful to prove the convergence of the proposed algorithm. The “degree” of convexity or smoothness of a Banach space is given by its modulus of convexity and its modulus of smoothness, and we refer to Section 2.1 of [20] for their formal definitions and for the subsequent characterization of  $p$ -convex,  $p$ -smooth, uniformly convex and uniformly smooth Banach spaces.

In [5], it has been argued that the Bregman distance is the correct measure for measuring the “quality” of the regularized solution in the case of convex regularization in Banach spaces. Moreover, due to the geometrical properties of Banach spaces, it is often more appropriate to exploit the Bregman distance between two vectors  $x$  and  $y$  instead of more conventional norm-distances like  $\|x - y\|^p$  or  $\|j_p^{\mathcal{X}}(x) - j_p^{\mathcal{X}}(y)\|^p$  to prove convergence of the algorithms [6], [10], [20].

Generally, the Bregman distance associated to a convex functional is defined as the difference between the functional and its linear approximation around  $x$  as follows [4].

**Definition 3 (Bregman distance)**

Let  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  be a convex and continuously-differentiable functional on a Banach space  $\mathcal{X}$ . Then the Bregman distance  $\Delta(x, y)$  of  $f$  between  $x \in \mathcal{X}$  and  $y \in \mathcal{X}$  is defined as

$$\Delta(x, y) = f(x) - f(y) - f'(y)(x - y),$$

where  $f'(y)$  is the first order Taylor expansion of  $f$  at  $y$ .

The role of a Bregman distance is similar to the role of any metric. However, any Bregman distance in general does not satisfy the triangle inequality nor symmetry. As shown by the following special case first example, the Bregman distance is a generalization of the square norm distance in Hilbertian contexts, when the basic square norm distance functional is considered.

*Example 2* If  $\mathcal{X}$  is an Hilbert space, then  $\Delta_2(x, y) = \frac{1}{2}\|x - y\|^2$ , for  $f_2(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ .

*Example 3* In a general Banach space  $\mathcal{X}$ , by considering the convex functional  $f_p(x) = \frac{1}{p}\|x\|^p$ , thanks to the Asplund Theorem (4) the associated Bregman distance  $\Delta_p$  is

$$\Delta_p(x, y) = \frac{1}{p}\|x\|^p - \frac{1}{p}\|y\|^p - \langle j_p(y), x - y \rangle, \quad (5)$$

for any  $x, y \in \mathcal{X}$ , where  $j_p$  is a single-valued selection of  $J_p^{\mathcal{X}}$ .

In general  $\Delta_p(x, y) \geq 0$ , and  $\Delta_p(x, y) = 0$  if and only if  $j_p(y) \in J_p^{\mathcal{X}}(x)$  [25]. From that, for all  $x, z \in \mathcal{X}$  we have  $\frac{1}{p}\|z\|^p - \frac{1}{p}\|x\|^p - \langle j_p(x), z - x \rangle \geq 0$ , which, by setting  $y = -(z - x)$ , yields

$$\frac{1}{p}\|x - y\|^p - \frac{1}{p}\|x\|^p + \langle j_p(x), y \rangle \geq 0. \quad (6)$$

In general, the Bregman distance in the primal space  $\mathcal{X}$  and the Bregman distance in its dual space  $\mathcal{X}^*$  are strictly linked, since

$$\Delta_p(x, y) = \Delta_q(j_p(x), j_p(y)).$$

This duality, together with basic relationships about strong convergence in norm and convergence in Bregman distance (see [25], and [20] Theorem 2.12) and with the Xu-Roach inequality (see [26], and [20] Theorem 2.8), will have an important role in the convergence analysis of our algorithm.

### 3 CG and its convergence: the noise-free case

We restrict to the case  $\mathcal{X} = L^p$  with  $1 < p < 2$  and  $\mathcal{Y} = L^r$ , with  $r > 1$ . By implicitly considering the classical isomorphisms, in the following  $L^q$  and  $L^s$  denote the dual spaces of  $L^p$  and  $L^r$ , respectively.

Concerning our functional equation (1), we are interested in finding the minimum  $p$ -norm solution of (1), denoted hereinafter as  $\bar{x}$ , with exact data  $b \in \mathcal{R}(A)$ . In this respect, we first recall the following existence and characterization result.

**Theorem 2** [20] *If  $b \in \mathcal{R}(A)$ , then there exists the minimum  $p$ -norm solution  $\bar{x} \in L^p$  of (1) and  $j_p(\bar{x}) \in \overline{\mathcal{R}(A^*)}$ . Moreover, if  $\tilde{x} \in L^p$  fulfils  $j_p(\tilde{x}) \in \overline{\mathcal{R}(A^*)}$  and  $\tilde{x} - \bar{x} \in \mathcal{N}(A)$ , then  $\tilde{x} = \bar{x}$ .*

To recover the minimum  $p$ -norm solution  $\bar{x}$ , we propose the following algorithm based on the well known conjugate gradient method in Hilbert spaces.

#### Algorithm 1 Conjugate Gradient based method in Banach spaces

Choose a constant  $C \in (0, 1)$ , and let

$$\gamma = \frac{Cr}{2^r - 1 + Cr} \quad (7)$$

be a relaxation parameter and  $d$  an arbitrary constant satisfying

$$0 < d \leq \left(1 - \frac{2^r - 1 + r}{r} \gamma\right) \frac{1}{\|A\|}.$$

Set  $n = 0$ ,  $x_0^* = 0$ ,  $p_0^* = A^* j_r(b)$ ,  $R_0 = \|b\|$ , and

$$\alpha_0 = \arg \min_{\alpha \in \left[0, \frac{d^{p-1}}{\|A\|^p} R_0^{p-r}\right]} \|A j_q(x_0^* + \alpha p_0^*) - b\|^r. \quad (8)$$

**While**  $R_n > 0$  **do:**

  Update  $n \leftarrow n + 1$ .

  Compute

$$\begin{cases} x_n^* = x_{n-1}^* + \alpha_{n-1} p_{n-1}^*, \\ x_n = j_q(x_n^*), \\ p_n^* = -A^* j_r(Ax_n - b) + \beta_n p_{n-1}^*, \end{cases} \quad (9)$$

  where

$$\alpha_n = \arg \min_{\alpha \in [0, T_n]} \|A j_q(x_n^* + \alpha p_n^*) - b\|^r \quad (10)$$

and

$$\beta_n = \gamma \frac{R_n^r}{R_{n-1}^r}, \quad (11)$$

with

$$R_n = \|Ax_n - b\|,$$

$$T_n = \min \left\{ \frac{R_n^{2-r} (V_n - d\|A\|Q_n)}{G_q 2^{q-2} \|x_n^*\|^{q-2} (q-1) \|A\|^2 Q_n^2}, \frac{\|x_n^*\|}{\|A\| R_n^{r-1} Q_n} \right\},$$

$$V_n = 1 - \frac{2^r - 1}{r} \gamma Q_{n-1},$$

$$Q_n = \frac{1 - \gamma^{n+1}}{1 - \gamma},$$

and  $G_q$  the constant value of the Banach space defined in [20].

**End while**

Before providing the convergence proof, which follows the idea developed in [20], some comments are useful. First, it is interesting to notice that the functional  $p_n^*$  is a linear combination of the current steepest descent functional  $-A^* j_r (Ax_n - b)$  and the previous descent functional  $p_{n-1}^*$ . This is a key point in the definition of the CG method in Hilbert spaces, where the descent functionals are just descent directions.

On the other hand, there are two important facts to mention as main differences between (the proposed) CG in Banach and (the conventional) CG in Hilbert spaces. The first is that in Banach spaces the optimal step size  $\alpha_n$  cannot be directly computed by means of an explicit formula, since the corresponding one-dimensional minimization problem (10) is no more quadratic. The second is related to the weight  $\beta_n$  of (11). Now  $\beta_n$  is different from the Fletcher Reeves formula for CG in Hilbert spaces. Indeed  $\beta_n$  now concerns the ratio of the norms of the two last residuals (instead of the norms of the last two gradients) and it requires the relaxation factor  $\gamma < 1/2$  defined in (7), which does not appear in the original CG method. Hence, recalling the optimality condition on the step size (10), differing from the original CG method,  $\beta_n$  is always lower than  $1/2$ . Although such a constraint is necessary only for our theoretical convergence proof, our numerical tests show that it helps the method to be more stable.

We prove the following main convergence result.

**Theorem 3** *Let  $\mathcal{X} = L^p$  with  $1 < p < 2$  and  $\mathcal{Y} = L^r$ , with  $r > 1$ . The sequence of the iterations  $(x_n)_n$  of Algorithm 1 defined in (9), either stops at or converges strongly to the minimum  $p$ -norm solution  $\bar{x}$  of (1).*

*Proof* First of all, by simple induction on the definition of  $x_n^*$  and  $p_n^*$ , we have that any  $x_n^* = j_p(x_n) \in \overline{\mathcal{R}(A^*)}$ , since  $x_0^* = 0 \in \overline{\mathcal{R}(A^*)}$  and  $p_0^* = A^* j_r(b) \in \overline{\mathcal{R}(A^*)}$ . Then, if the algorithm at step  $n$  gives  $R_n = 0$ , by Theorem 2 we have that  $x_n = \bar{x}$ . Indeed, by  $0 = R_n = \|Ax_n - b\| = \|A(x_n - \bar{x})\|$ , we know that  $x_n - \bar{x} \in \mathcal{N}(A)$ , so that  $x_n = \bar{x}$ .

Otherwise we have that  $R_n > 0$  for all  $n > 0$ . In this case, as similarly done in [20] for the Landweber method in Banach space, the proof of convergence will be structured in the following four steps:



1. the sequence of the Bregman distances  $(\Delta_p(\bar{x}, x_n))_n$  obeys a recursive inequality which implies its convergence;
2. the sequence of the residuals  $(R_n)_n$  is such that  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$ ;
3. the sequence of the iterates  $(x_n)_n$  has a Cauchy subsequence;
4. the sequence of the iterates  $(x_n)_n$  converges strongly to  $\bar{x}$ .

Before going on, we itemize some notations used in the proof.

$$g_n^* = -A^* j_r(Ax_n - b),$$

$$\Delta_n = \Delta_p(\bar{x}, x_n),$$

$$c_{k,n} = \prod_{l=k+1}^n \beta_l = \gamma^{n-k} \frac{R_n^r}{R_k^r},$$

$$\tau_n = \frac{\alpha_n \|A\| R_n^{r-1} Q_n}{\|x_n^*\|},$$

$$W = G_q 2^{q-2} (q-1),$$

$$S_n = \frac{W \tau_n \|x_n^*\|^{q-1} Q_n}{R_n} \|A\|.$$

**1. First step: the sequence of Bregman distances  $(\Delta_n)_n$  is non-decreasing and convergent.**

By (5), we can write

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1} &= \frac{1}{p} \|\bar{x}\|^p - \frac{1}{p} \|x_{n+1}\|^p + \langle x_{n+1}^*, \bar{x} - x_{n+1} \rangle = \frac{1}{q} \|x_{n+1}\|^p + \frac{1}{p} \|\bar{x}\|^p - \langle x_{n+1}^*, \bar{x} \rangle \\ &= \frac{1}{q} \|x_{n+1}^*\|^q + \frac{1}{p} \|\bar{x}\|^p - \langle x_{n+1}^*, \bar{x} \rangle \\ &= \frac{1}{q} \|x_n^* + \alpha_n p_n^*\|^q + \frac{1}{p} \|\bar{x}\|^p - \langle x_n^*, \bar{x} \rangle - \alpha_n \langle p_n^*, \bar{x} \rangle. \end{aligned}$$

For  $n = 0$ , since  $x_0 = 0$ , then  $R_0 = \|b\| > 0$ ,  $p_0^* = A^* j_r(b)$  and  $\Delta_0 = \frac{1}{p} \|\bar{x}\|^p$ . Hence

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{1}{q} \|\alpha_0 p_0^*\|^q + \frac{1}{p} \|\bar{x}\|^p - \alpha_0 \langle p_0^*, \bar{x} \rangle = \frac{1}{q} \alpha_0^q \|A^* j_r(b)\|^q + \Delta_0 - \alpha_0 \langle j_r(b), A\bar{x} \rangle \\ &= \frac{1}{q} \alpha_0^q \|A^* j_r(b)\|^q + \Delta_0 - \alpha_0 \langle j_r(b), b \rangle \leq \frac{1}{q} \alpha_0^q \|A\|^q R_0^{(r-1)q} + \Delta_0 - \alpha_0 R_0^r \end{aligned}$$

To obtain a reduction of the Bregman distance at first iteration, we consider the upper-bound for  $\alpha_0 > 0$  defined in (8), since

$$\frac{1}{q} \|A\|^q \alpha_0^q R_0^{(r-1)q} - \alpha_0 R_0^r < 0 \iff \alpha_0 < \frac{q^{p-1}}{\|A\|^p} R_0^{p-r} \implies \Delta_1 < \Delta_0. \quad (12)$$

Now we consider  $n > 0$ . Thanks to the Xu-Roach inequality ([20], Theorem 2.8),

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1} &= \frac{1}{q} \|x_n^* + \alpha_n p_n^*\|^q + \frac{1}{p} \|\bar{x}\|^p - \langle x_n^*, \bar{x} \rangle - \alpha_n \langle p_n^*, \bar{x} \rangle \\ &\leq \frac{1}{q} \left[ \|x_n^*\|^q + q G_q \int_0^1 \frac{(\|x_n^* + t \alpha_n p_n^*\| \vee \|x_n^*\|)^q}{t} \varrho_q \left( \frac{t \|\alpha_n p_n^*\|}{\|x_n^* + t \alpha_n p_n^*\| \vee \|x_n^*\|} \right) dt \right. \\ &\quad \left. - q \langle x_n, -\alpha_n p_n^* \rangle \right] + \frac{1}{p} \|\bar{x}\|^p - \langle x_n^*, \bar{x} \rangle - \alpha_n \langle p_n^*, \bar{x} \rangle, \end{aligned}$$

that is

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1} &\leq \Delta_n + G_q \int_0^1 \frac{(\|x_n^* + t \alpha_n p_n^*\| \vee \|x_n^*\|)^q}{t} \varrho_q \left( \frac{t \|\alpha_n p_n^*\|}{\|x_n^* + t \alpha_n p_n^*\| \vee \|x_n^*\|} \right) dt \\ &\quad + \alpha_n \langle p_n^*, x_n - \bar{x} \rangle. \end{aligned} \tag{13}$$

We now study the last two addenda of the inequality (13).

A) Let us consider the term

$$\langle p_n^*, x_n - \bar{x} \rangle. \tag{14}$$

From

$$\begin{aligned} p_n^* &= g_n^* + \beta_n p_{n-1}^* = g_n^* + \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \prod_{l=k+1}^n \beta_l \right] g_k^* = g_n^* + \sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n} g_k^* \\ &= -A^* \left[ j_r(Ax_n - b) + \sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n} j_r(Ax_k - b) \right], \end{aligned}$$

thanks to (6) we have

$$\begin{aligned} \langle p_n^*, x_n - \bar{x} \rangle &= -\langle j_r(Ax_n - b) + \sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n} j_r(Ax_k - b), Ax_n - b \rangle \\ &= -R_n^r - \sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n} \langle j_r(Ax_k - b), Ax_n - b \rangle \\ &\leq -R_n^r - \sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n} \left[ \frac{1}{r} \|Ax_k - b\|^r - \frac{1}{r} \|Ax_k - b - Ax_n + b\|^r \right] \\ &\leq -R_n^r - \sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n} \left[ \frac{1}{r} R_k^r - \frac{1}{r} (\|Ax_k - b\| + \|Ax_n - b\|)^r \right] \\ &= -R_n^r + \sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n} \left[ \frac{1}{r} (R_k + R_n)^r - \frac{1}{r} R_k^r \right] \\ &\leq -R_n^r + \frac{2^r - 1}{r} \sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n} R_k^r, \end{aligned} \tag{15}$$

where the last inequality holds by construction of the optimal step size (10) which guarantees that the residuals  $R_k$  decrease.

B) Let us consider the term

$$G_q \int_0^1 \frac{(\|x_n^* + t\alpha_n p_n^*\| \vee \|x_n^*\|)^q}{t} \varrho_q \left( \frac{t\|\alpha_n p_n^*\|}{\|x_n^* + t\alpha_n p_n^*\| \vee \|x_n^*\|} \right) dt. \quad (16)$$

Since  $0 \leq t \leq 1$  and  $\|x_n^*\| \leq \|x_n^* + t\alpha_n p_n^*\| \vee \|x_n^*\| \leq \|x_n^*\| + \alpha_n \|p_n^*\|$ , we have

$$p_n^* = -A^* \left[ j_r(Ax_n - b) + \sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n} j_r(Ax_k - b) \right],$$

so that

$$\begin{aligned} \|p_n^*\| &= \left\| -A^* \left[ j_r(Ax_n - b) + \sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n} j_r(Ax_k - b) \right] \right\| \\ &\leq \|A\| \left\| j_r(Ax_n - b) + \sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n} j_r(Ax_k - b) \right\| \\ &\leq \|A\| \left[ \|j_r(Ax_n - b)\| + \sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n} \|j_r(Ax_k - b)\| \right] \\ &= \|A\| \left[ R_n^{r-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \gamma^{n-k} \frac{R_n^r}{R_k^r} R_k^{r-1} \right] \leq \|A\| R_n^{r-1} \left[ 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \gamma^{n-k} \frac{R_n}{R_k} \right] \\ &\leq \|A\| R_n^{r-1} \left[ 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \gamma^{n-k} \right] = \|A\| R_n^{r-1} \left[ \frac{1 - \gamma^{n+1}}{1 - \gamma} \right] = \|A\| R_n^{r-1} Q_n, \end{aligned} \quad (17)$$

that is,  $\|p_n^*\| \leq \|A\| R_n^{r-1} Q_n$ . This last inequality, together with condition on  $T_n$  of (10), gives

$$\alpha_n \|p_n^*\| \leq \alpha_n \|A\| R_n^{r-1} Q_n \leq \|x_n^*\|. \quad (18)$$

By means of the latter, we have that

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{(\|x_n^* + t\alpha_n p_n^*\| \vee \|x_n^*\|)^q}{t} \varrho_q \left( \frac{t\|\alpha_n p_n^*\|}{\|x_n^* + t\alpha_n p_n^*\| \vee \|x_n^*\|} \right) dt \\ &\leq \int_0^1 \frac{(\|x_n^*\| + \alpha_n \|p_n^*\|)^q}{t} \varrho_q \left( \frac{t\|\alpha_n p_n^*\|}{\|x_n^*\|} \right) dt \\ &\leq \int_0^1 \frac{(\|x_n^*\| + \alpha_n \|p_n^*\|)^q}{t} \varrho_q \left( \frac{t\alpha_n \|A\| R_n^{r-1} Q_n}{\|x_n^*\|} \right) dt \\ &\leq (\|x_n^*\| + \alpha_n \|p_n^*\|)^q \int_0^1 \frac{1}{t} \varrho_q(t\tau_n) dt = (\|x_n^*\| + \alpha_n \|p_n^*\|)^q \int_0^{\tau_n} \frac{1}{t_1} \varrho_q(t_1) dt_1 \\ &\leq (\|x_n^*\| + \alpha_n \|p_n^*\|)^q \int_0^1 \frac{1}{t} \varrho_q(t\tau_n) dt = (\|x_n^*\| + \alpha_n \|p_n^*\|)^q \int_0^{\tau_n} \frac{1}{t_1} \varrho_q(t_1) dt_1 \\ &\leq (\|x_n^*\| + \alpha_n \|p_n^*\|)^q \int_0^{\tau_n} \frac{1}{t_1} \frac{q-1}{2} t_1^2 dt_1 = (\|x_n^*\| + \alpha_n \|p_n^*\|)^q \frac{q-1}{2^2} \tau_n^2 \\ &\leq (2\|x_n^*\|)^q \frac{(q-1)}{2^2} \tau_n^2 = 2^{q-2} \|x_n^*\|^{q-2} (q-1) \alpha_n^2 \|A\|^2 R_n^{2(r-1)} Q_n^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Now, reconsidering (13), we can write

$$\begin{aligned}\Delta_{n+1} &\leq \Delta_n + G_q \int_0^1 \frac{(\|x_n^* + t\alpha_n p_n^*\| \vee \|x_n^*\|)^q}{t} \varrho_q \left( \frac{t\|\alpha_n p_n^*\|}{\|x_n^* + t\alpha_n p_n^*\| \vee \|x_n^*\|} \right) dt \\ &\quad + \alpha_n \langle p_n^*, x_n - \bar{x} \rangle \\ &\leq \Delta_n + G_q \left[ 2^{q-2} \|x_n^*\|^{q-2} (q-1) \alpha_n^2 \|A\|^2 R_n^{2(r-1)} Q_n^2 \right] \\ &\quad + \alpha_n \left[ -R_n^r + \frac{2^r - 1}{r} \sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n} R_k^r \right].\end{aligned}$$

We have that  $(\Delta_n)_n$  is a non-increasing sequence, that is,  $\Delta_{n+1} \leq \Delta_n$ , if

$$\alpha_n \left( \alpha_n \left[ G_q 2^{q-2} \|x_n^*\|^{q-2} (q-1) \|A\|^2 R_n^{2(r-1)} Q_n^2 \right] - R_n^r + \frac{2^r - 1}{r} \sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n} R_k^r \right) \leq 0. \quad (20)$$

The latter holds if

$$R_n^r - \frac{2^r - 1}{r} \sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n} R_k^r \geq 0 \quad (21)$$

and

$$0 \leq \alpha_n \leq \min \left\{ \frac{R_n^r - \frac{2^r - 1}{r} \sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n} R_k^r}{G_q 2^{q-2} \|x_n^*\|^{q-2} (q-1) \|A\|^2 R_n^{2(r-1)} Q_n^2}, \frac{\|x_n^*\|}{\|A\| R_n^{r-1} Q_n} \right\}, \quad (22)$$

$\forall n = 1, 2, 3, \dots$ , where condition (18) has been considered.

First we show that the relaxation parameter  $\gamma < \frac{1}{2}$  of (7) allows (21) to be always true. Indeed we have

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n} R_k^r = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma^{n-k} \frac{R_n^r}{R_k^r} R_k^r = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma^{n-k} R_n^r = \frac{\gamma - \gamma^{n+1}}{1 - \gamma} R_n^r \leq \frac{\gamma}{1 - \gamma} R_n^r,$$

so that

$$R_n^r - \frac{2^r - 1}{r} \sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n} R_k^r \geq \left( 1 - \frac{2^r - 1}{r} \frac{\gamma}{1 - \gamma} \right) R_n^r = (1 - C) R_n^r > 0. \quad (23)$$

By means of these conditions on  $\gamma$  and  $\alpha_n$ , we can finally write

$$0 \leq \Delta_{n+1} \leq \Delta_n + W \|x_n^*\|^q \tau_n^2 - \frac{\|x_n^*\| \tau_n}{\|A\| Q_n} V_n R_n \leq \Delta_n, \quad (24)$$

where  $\tau_n$ ,  $W$  and  $V_n$  have been previously properly defined. According to the aim of the first step of this proof, this last inequality shows that the sequence  $(\Delta_n)_n$  is both non-increasing and bounded by below, so that it is convergent.

*Remark 1* From (15) and (23), we obtain that  $-\langle p_n^*, x_n - \bar{x} \rangle > 0$ , which shows that  $p_n^*$  is a descent functional at the current point  $x_n$ , as expected by any gradient-type iteration scheme.

**2. Second step: the sequence of residuals  $(R_n)_n$  vanishes, that is,**  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$ .

On the ground of [20] Theorem 2.12 (b), since by first step we know that  $(\Delta_n)_n$  is bounded, then the sequence  $(x_n)_n$  is bounded. In addition, since  $\|x_n^*\| = \|j_p(x_n)\| = \|x_n\|^{p-1}$  and  $R_n = \|Ax_n - b\|$ , then both the sequences  $(x_n^*)_n$  and  $(R_n)_n$  are bounded too.

We rewrite (24) as follows

$$\Delta_{n+1} \leq \Delta_n - \frac{1 - S_n}{\|A\|} \frac{V_n}{Q_n} \tau_n \|x_n^*\| R_n \leq \Delta_n$$

that is

$$\Delta_n - \Delta_{n+1} \geq \frac{1 - S_n}{\|A\|} \frac{V_n}{Q_n} \tau_n \|x_n^*\| R_n \geq 0.$$

For all  $n \in \mathbf{N}$  we have

$$0 \leq \sum_{k=0}^n \frac{1 - S_k}{\|A\|} \frac{V_k}{Q_k} \tau_k \|x_k^*\| R_k \leq \sum_{k=0}^n (\Delta_k - \Delta_{k+1}) = \Delta_0 - \Delta_{n+1} \leq \Delta_0$$

which yields that

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1 - S_k}{\|A\|} \frac{V_k}{Q_k} \tau_k \|x_k^*\| R_k < +\infty, \quad (25)$$

that is, the numerical series is convergent.

Since  $S_k \geq 0$  by construction, in order to first ensure that the limit inferior of  $(R_n)_n$  is zero we impose the following condition

$$0 \leq S_k \leq 1 - \frac{d\|A\|Q_k}{V_k} \quad \text{so that} \quad \frac{1 - S_k}{\|A\|} \frac{V_k}{Q_k} \geq d > 0, \quad (26)$$

where  $d$  is a positive constant independent from  $n$ . This guarantees that the product of the first two factors of any element of the series (25) stays uniformly bounded away from zero.

The latter inequality leads to the following constructive condition on the constant  $d$

$$1 - \frac{d\|A\|Q_k}{V_k} \geq 0$$

which is satisfied when  $d$  is chosen such that

$$0 < d \leq \left(1 - \frac{2^r - 1 + r}{r} \gamma\right) \frac{1}{\|A\|} \quad (27)$$

since

$$0 < 1 - \frac{2^r - 1 + r}{r} \gamma \leq \frac{V_k}{Q_k}. \quad (28)$$

On this ground, we can write

$$1 - \frac{d\|A\|Q_k}{V_k} \geq S_k = \frac{W \tau_k \|x_k^*\|^{q-1} Q_k}{R_k V_k} \|A\|,$$

which is equivalent to

$$\tau_k = \frac{\alpha_k \|A\|_q R_k^{r-1} Q_k}{\|x_k^*\|} \leq \frac{(V_k - d\|A\|Q_k) R_k}{W\|x_k^*\|^{q-1} Q_k \|A\|},$$

that is,

$$\alpha_k \leq \frac{R_k^{2-r} (V_k - d\|A\|Q_k)}{W\|x_k^*\|^{q-2} Q_k^2 \|A\|^2}, \quad (29)$$

as requested by the the upper bound  $T_n$  of (10). From (25), we finally have

$$d \sum_{k=0}^{+\infty} \tau_k \|x_k^*\| R_k \leq \sum_{k=0}^n \frac{1 - S_k}{\|A\|} \frac{V_k}{Q_k} \tau_k \|x_k^*\| R_k < +\infty. \quad (30)$$

Suppose now that  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} R_n > 0$ . Then there exists  $n_0 \in \mathbf{N}$  and  $\varepsilon > 0$  such that  $R_n \geq \varepsilon \forall n \geq n_0$ . In this case, from (30), we would have

$$\varepsilon d \sum_{k=n_0}^{\infty} \tau_k \|x_k^*\| \leq d \sum_{k=n_0}^{+\infty} \tau_k \|x_k^*\| R_k < +\infty.$$

Since the series is convergent, then we should have true at least one of the following two conditions:

1.  $(x_k)_k$  is a null sequence.

$$\frac{1}{p} \|x\|^p = \Delta_p(0, x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \Delta_p(x_k, x) < \frac{1}{p} \|x\|^p$$

But this is a contradiction, so that  $(x_n)_n$  cannot be vanishing.

2. the numerical sequence  $(\tau_k)_n$  is a null sequence.

Since  $\tau_k = \frac{\alpha_k \|A\| R_k^{r-1} Q_k}{\|x_k^*\|}$ , if  $\tau_k \rightarrow 0$  then  $\alpha_k \rightarrow 0$  because  $R_k \geq \varepsilon$ , and  $\|x_k^*\| \leq c$ .

But the step size  $\alpha_k$ , which solves the one-variable minimization problem (10), cannot be a vanishing sequence when the residual does not vanish, that is, if  $R_k \leq \varepsilon$  definitively, as supposed. Indeed, from (14) and (23), we have that

$$\langle p_k^*, x_k - \bar{x} \rangle \leq -(1 - C) R_k^r \leq -(1 - C) \varepsilon^r < 0,$$

which means that any functional  $p_k^*$  is a descent functional with negative slope uniformly bounded away from zero. Moreover, since the duality map  $j_q$  is continuous, then the map  $\phi_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  defined as

$$\alpha \rightarrow \phi_k(\alpha) = \|A j_q(x_k^* + \alpha p_k^*) - b\|^r$$

is continuous with respect to  $\alpha$ , with  $\phi_k(0) = R_k^r \geq \varepsilon^r$  and  $\phi_k'(0) \leq c < 0$ , with  $c = c(\varepsilon)$  a fixed constant. On this grounds, by sign permanence Theorem, we have that there exists a  $\delta > 0$  such that  $\phi_n(\alpha)$  is decreasing in  $[0, \delta]$ , so that  $\alpha_k \geq \delta > 0$  for any  $k$ . So, we have necessarily that  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$ .

On the other hand, by construction of the step size based on the one dimensional minimization problem (10), we recall that  $0 < R_{n+1} \leq R_n$ , so that

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0. \quad (31)$$

### 3. Third step: the sequence $(x_n)_n$ has a Cauchy subsequence.

By boundedness of  $(x_n)_n$  and  $(j_p(x_n))_n$  we can find a subsequence  $(x_{n_k})_k$  such that

- (a) the sequence of the norm  $(\|x_{n_k}\|)_k$  is convergent,  
 (b) the sequence  $(j_p(x_{n_k}))_k$  is weakly convergent,  
 The sequence  $(R_{n_k})_k$  is also null by (31). We want to show that  $(x_{n_k})_k$  is a Cauchy (sub)sequence. By virtue of [20] Theorem 2.12 (e), we have for all  $k, l \in \mathbb{N}$ , with  $l > k$ ,

$$\Delta_p(x_{n_k}, x_{n_l}) = \frac{1}{q} (\|x_{n_k}\|^p - \|x_{n_l}\|^p) + \langle j_p(x_{n_l}) - j_p(x_{n_k}), x_{n_l} \rangle.$$

The first addendum satisfies

$$(\|x_{n_k}\|^p - \|x_{n_l}\|^p) \longrightarrow 0 \quad \text{as } k \longrightarrow +\infty \quad \text{for [20] Theorem 2.12 (d) (ii).}$$

Regarding the second term, we have

$$\langle j_p(x_{n_l}) - j_p(x_{n_k}), x_{n_l} \rangle = \langle j_p(x_{n_l}) - j_p(x_{n_k}), \bar{x} \rangle + \langle j_p(x_{n_l}) - j_p(x_{n_k}), x_{n_l} - \bar{x} \rangle. \quad (32)$$

Here

$$\langle j_p(x_{n_l}) - j_p(x_{n_k}), \bar{x} \rangle \longrightarrow 0 \quad \text{as } k \longrightarrow +\infty \quad \text{for (b), and}$$

$$\begin{aligned} |\langle j_p(x_{n_l}) - j_p(x_{n_k}), x_{n_l} - \bar{x} \rangle| &= \left| \sum_{n=n_k}^{n_l-1} \langle j_p(x_{n+1}) - j_p(x_n), x_{n_l} - \bar{x} \rangle \right| \\ &= \left| \sum_{n=n_k}^{n_l-1} \alpha_n \langle p_n^*, x_{n_l} - \bar{x} \rangle \right| \\ &\leq \left| \sum_{n=n_k}^{n_l-1} \alpha_n \left\| j_r(Ax_n - b) + \sum_{j=0}^{n-1} c_{j,n} j_r(Ax_j - b) \right\| \|Ax_{n_l} - b\| \right| \\ &\leq \sum_{n=n_k}^{n_l-1} \alpha_n R_n^{r-1} Q_n R_n = \sum_{n=n_k}^{n_l-1} \frac{\tau_n \|x_n^*\| R_n}{\|A\|} \rightarrow 0 \quad \text{as } k \rightarrow +\infty \text{ by (30).} \end{aligned}$$

Hence we can write

$$\langle j_p(x_{n_l}) - j_p(x_{n_k}), x_{n_l} \rangle \longrightarrow 0,$$

which prove that the (sub)sequence  $(x_{n_k})_k$  is a Cauchy sequence. Finally, since it is Cauchy, it converges strongly to a point  $\tilde{x} \in \mathcal{X}$ .

#### 4. Forth step: the sequence $(x_n)_n$ converges strongly to the minimum $p$ -norm solution $\bar{x}$

We know that the subsequence  $(x_{n_k})_{n_k}$  converges to an element  $\tilde{x} \in \mathcal{X}$ . We prove now that  $\tilde{x} = \bar{x}$  and  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - \bar{x}\| = 0$ .

From  $\|Ax_{n_k} - b\| = \|A(x_{n_k} - \bar{x})\| = R_{n_k} \longrightarrow 0$  as  $k \longrightarrow +\infty$ , then, by continuity of  $A$ , we have that  $(\tilde{x} - \bar{x}) \in \mathcal{N}(A)$  and  $j_p(\tilde{x}) \in \mathcal{R}(A^*)$ . Hence, by recalling Theorem 2,  $\tilde{x} = \bar{x}$ . It remains to prove that not only the subsequent  $(x_{n_k})_k$  converges to  $\bar{x}$ , but the full sequence  $(x_n)_n$  converges strongly to  $\bar{x}$ .

By continuity of the Bregman distance, we can state that

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \Delta_{n_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \Delta_p(\bar{x}, x_{n_k}) = \Delta_p(\bar{x}, \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k}) = \Delta_p(\bar{x}, \bar{x}) = 0.$$

Hence the sequence  $(\Delta_n)_n$  is convergent (by first point of the proof), and has a subsequence converging to zero. Theorem 2.12 (d) of [20], allows us to state that  $x_n \rightarrow \bar{x}$  strongly, that is,

$$\|x_n - \bar{x}\| \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow +\infty,$$

which concludes the proof.

#### 4 CG and its regularization properties: the noisy case

In the previous section, we proved that the CG method, in the case  $\mathcal{X} = L^p$  with  $1 < p < 2$  and  $\mathcal{Y} = L^r$ , converges to the minimum  $p$ -norm solution of (1) for exact data  $b \in \mathcal{R}(A)$ . In the same setting, now we consider the case of noisy data  $b_\delta \in \mathcal{Y}$  with a known noise level  $\delta > 0$ , that is,

$$\|b - b_\delta\| \leq \delta.$$

According to the well known semi-convergence behavior of any iterative regularization algorithm, in the case of noisy data an early stop of the iterations prevents noise amplification in the restoration process. Hence, our algorithm for noisy data is based on the discrepancy principle stopping rule, that is, the iterations are stopped as soon as  $\|Ax_n - b_\delta\| \leq \tau\delta$ , where  $\tau > 1$  is a fixed constant value. This way, the restoration is accepted as soon as its residual is equal or less than  $\tau$  times the magnitude of the noise of the (noisy) data  $b_\delta$  (indeed, searching for a solution  $x_n$  such that the corresponding residual is smaller than the noise level  $\delta$  is unreasonable). After introducing the algorithm, in the subsequent theorem we will prove that it belongs to the class of iterative regularization methods, by showing that its iterations either stop at or converge strongly to the minimum  $p$ -norm solution  $\bar{x}$  of (1) as the noise level  $\delta$  goes to zero.

#### Algorithm 2 Regularization by Conjugate Gradient method in Banach spaces

Choose two constants  $C \in (0, 1)$  and  $\tau \in (1, +\infty)$  such that  $C + \tau^{-1} \in (0, 1)$ , and let

$$\gamma = \frac{Cr}{(2 + \tau^{-1})^r - 1 + Cr} \quad (33)$$

be a relaxation parameter and  $d$  an arbitrary constant satisfying

$$0 < d \leq \left( (1 - \gamma)(1 - \tau^{-1}) - \frac{(2 + \tau^{-1})^r - 1}{r} \gamma \right) \frac{1}{\|A\|}.$$

Set  $n = 0$ ,  $x_0^* = 0$ ,  $p_0^* = A^* j_r(b_\delta)$ ,  $R_0 = \|b_\delta\|$ , and

$$\alpha_0 = \arg \min_{\alpha \in \left[ 0, \frac{q^{p-1}(1-\tau^{-1})^{p-1}R_0^{p-r}}{\|A\|^p} \right]} \|A j_q(x_0^* + \alpha p_0^*) - b_\delta\|^r, \quad (34)$$

**While**  $R_n > \tau\delta$  **do**:

    Update  $n \leftarrow n + 1$ .

    Compute



$$\begin{cases} x_n^* = x_{n-1}^* + \alpha_{n-1} p_{n-1}^*, \\ x_n = j_q(x_n^*), \\ p_n^* = -A^* j_r(Ax_n - b_\delta) + \beta_n p_{n-1}^*, \end{cases} \quad (35)$$

where

$$\alpha_n = \arg \min_{\alpha \in [0, T_n]} \|Aj_q(x_n^* + \alpha p_n^*) - b_\delta\|^r \quad (36)$$

and

$$\beta_n = \gamma \frac{R_n^r}{R_{n-1}^r}, \quad (37)$$

with

$$R_n = \|Ax_n - b_\delta\|,$$

$$T_n = \min \left\{ \frac{R_n^{2-r} (V_n - d\|A\|Q_n)}{G_q 2^{q-2} \|x_n^*\|^{q-2} (q-1) \|A\|^2 Q_n^2}, \frac{\|x_n^*\|}{\|A\| R_n^{r-1} Q_n} \right\},$$

$$V_n = 1 - \tau^{-1} - \frac{(2 + \tau^{-1})^r - 1}{r} \gamma Q_{n-1},$$

$$Q_n = \frac{1 - \gamma^{n+1}}{1 - \gamma},$$

and  $G_q$  the constant value of the Banach space defined in [20].

**End while**

**Theorem 4** Let  $\mathcal{X} = L^p$  with  $1 < p < 2$  and  $\mathcal{Y} = L^r$ , with  $r > 1$ . The sequence of the iterations  $(x_n)_n$  of Algorithm 2 is a regularization method.

*Proof* According to [20], to show that Algorithm 2 is a regularization method we consider a sequence of “less and less” noisy data  $(b_h)_{h \in \mathbb{N}}$  such that

$$\|b - b_h\| \leq \delta_h,$$

with  $\lim_{h \rightarrow +\infty} \delta_h = 0$ , and  $0 < \delta_{h+1} < \delta_h$ . We then will prove that for any data  $\delta_h$  there exists an iteration  $x_n$  such that  $\|Ax_n - b_h\| < \tau \delta_h$ , and that the sequence of iterates  $(x_n)_n$  either stops at or converges strongly to the minimum  $p$ -norm solution  $\bar{x}$  of (1) as the noise level  $\delta_h$  goes to zero. To this aim, we consider the following adaptive setting of the noisy data  $(b_h)_h$  as the iterations go on.

REPEAT, for  $n = 0, 1, 2, \dots$ , the following steps:

IF for all  $h > h_{n-1}$  (where  $h_{-1} = 0$ ) the discrepancy principle is satisfied, that is,

$$\|Ax_n - b_h\| < \tau \delta_h, \quad (38)$$

THEN STOP the iterations;

ELSE choose the smallest integer value  $h_n > h_{n-1}$  such that  $\|Ax_n - b_{h_n}\| \geq \tau \delta_{h_n}$ , and consider Algorithm 2 with noisy data  $b_\delta = b_{h_n}$ , that is

$$\begin{cases} x_n^* = x_{n-1}^* + \alpha_{n-1} p_{n-1}^* \\ x_n = j_q(x_n^*) \\ p_n^* = -A^* j_r(Ax_n - b_{h_n}) + \beta_n p_{n-1}^* \end{cases} \quad (39)$$

We notice that the discrepancy principle related to  $\delta_h$  is satisfied for any  $h_n < h \leq h_{n-1}$ , and the algorithm find a regularized solution for the associated data  $b_h$  with  $h_n < h \leq h_{n-1}$ . On the other hand, if the inequality (38) holds for all  $h > h_{n-1}$  at a certain iteration  $n$ , then  $x_n = \bar{x}$  as in the case of exact data (indeed the sequence of noise levels is such that  $\lim_{h \rightarrow +\infty} \delta_h = 0$ ), that is, the iterations stop at the minimum  $p$ -norm solution of (1).

So we have to consider only the case where inequality (38) is never fulfilled. In such a case  $R_n = \|Ax_n - b_{h_n}\| > 0$  for all  $n$ . The proof follows the same steps of the noiseless case of Theorem 3, so we report the basic different arguments.

First we show that, since  $R_n = \|Ax_n - b_{h_n}\| > \tau\delta_{h_n}$ , the sequence of Bregman distances  $(\Delta_n)_n$  is non-decreasing and convergent.

As already shown at the beginning of the first step of the proof of Theorem 3, we have

$$\Delta_{n+1} = \frac{1}{q} \|x_n^* + \alpha_n p_n^*\|^q + \frac{1}{p} \|\bar{x}\|^p - \langle x_n^*, \bar{x} \rangle - \alpha_n \langle p_n^*, \bar{x} \rangle.$$

For  $n = 0$ , it becomes

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{1}{q} \alpha_0^q \|A^* j_r(b_{h_0})\|^q + \frac{1}{p} \|\bar{x}\|^p - \alpha_0 \langle j_r(b_{h_0}), A\bar{x} \rangle \\ &= \frac{1}{q} \alpha_0^q \|A^* j_r(b_{h_0})\|^q + \Delta_0 - \alpha_0 \langle j_r(b_{h_0}), b_{h_0} \rangle + \alpha_0 \langle j_r(b_{h_0}), b_{h_0} - b \rangle \\ &\leq \frac{1}{q} \alpha_0^q \|A\|^q R_0^{(r-1)q} + \Delta_0 - \alpha_0 R_0^r + \alpha_0 R_0^{r-1} \delta_{h_0}. \end{aligned}$$

Similarly to (12), this gives the upper-bound for  $\alpha_0 > 0$ , in order to obtain a reduction of the Bregman distance at the first iteration. Indeed, since  $R_0 > \tau\delta_{h_0}$  we have that, if

$$\frac{1}{q} \alpha_0^q \|A\|^q R_0^{(r-1)q} - \alpha_0 R_0^r + \alpha_0 R_0^r \tau^{-1} < 0 \iff \alpha_0 < \frac{q^{p-1} (1 - \tau^{-1})^{p-1} R_0^{p-r}}{\|A\|^p}$$

then  $\implies \Delta_1 < \Delta_0$ .

For  $n > 0$ , we have again (13)

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1} &\leq \Delta_n + G_q \int_0^1 \frac{(\|x_n^* + t\alpha_n p_n^*\| \vee \|x_n^*\|)^q}{t} \varrho_q \left( \frac{t \|\alpha_n p_n^*\|}{\|x_n^* + t\alpha_n p_n^*\| \vee \|x_n^*\|_q} \right) dt \\ &\quad + \alpha_n \langle p_n^*, x_n - \bar{x} \rangle. \end{aligned}$$

We study the two latter addenda of this inequality.

A) Following the analogous computation of (15), since  $R_k > \tau\delta_{h_k}$  we have

$$\begin{aligned}
\langle p_n, x_n - \bar{x} \rangle &= \langle -A^* \left( j_r(Ax_n - b_{h_n}) + \sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n} j_r(Ax_k - b_{h_k}) \right), x_n - \bar{x} \rangle \\
&= -\langle j_r(Ax_n - b_{h_n}), Ax_n - b_{h_n} \rangle + \langle j_r(Ax_n - b_{h_n}), b - b_{h_n} \rangle \\
&\quad - \sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n} \langle j_r(Ax_k - b_{h_k}), Ax_n - b \rangle \\
&\leq -R_n^r + R_n^{r-1} \delta_{h_n} - \sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n} \left[ \frac{1}{r} \|Ax_k - b_{h_k}\|^r \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{r} \|Ax_k - b_{h_k} - Ax_n + b\|^r \right] \\
&\leq -R_n^r + \tau^{-1} R_n^r \\
&\quad - \sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n} \left[ \frac{1}{r} R_k^r - \frac{1}{r} (\|Ax_k - b_{h_k}\| + \|Ax_n - b_{h_n}\| + \delta_{h_n})^r \right] \\
&\leq (\tau^{-1} - 1) R_n^r + \sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n} \left[ \frac{1}{r} (R_k + (1 + \tau^{-1}) R_n)^r - \frac{1}{r} R_k^r \right] \\
&\leq (\tau^{-1} - 1) R_n^r + \frac{(2 + \tau^{-1})^r - 1}{r} \sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n} R_k^r.
\end{aligned} \tag{40}$$

B) The other term (which is equivalent to (16)) is estimated as in (17), where instead of  $j_r(Ax_n - b)$  and  $j_r(Ax_k - b)$ , we respectively consider  $j_r(Ax_n - b_{h_n})$  and  $j_r(Ax_k - b_{h_k})$ , obtaining again the same bound (18) and the same inequality (19).

Now reconsidering (13), we have

$$\begin{aligned}
\Delta_{n+1} &\leq \Delta_n + G_q \left[ 2^{q-2} \|x_n^*\|^{q-2} (q-1) \alpha_n^2 R_n^{2(r-1)} Q_n^2 \right] \\
&\quad + \alpha_n \left[ (\tau^{-1} - 1) R_n^r + \frac{(2 + \tau^{-1})^r - 1}{r} \sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n} R_k^r \right],
\end{aligned}$$

so that  $\Delta_{n+1} \leq \Delta_n$  if

$$\begin{aligned}
G_q \left[ 2^{q-2} \|x_n^*\|^{(q-2)} \alpha_n^2 R_n^{2(p-1)} Q_n^2 \right] \\
+ \alpha_n \left[ (\tau^{-1} - 1) R_n^r + \frac{(2 + \tau^{-1})^r - 1}{r} \sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n} R_k^r \right] \leq 0.
\end{aligned} \tag{41}$$

The relaxation parameter (33), as shown by the same computations of (23), now leads to

$$(1 - \tau^{-1}) R_n^r - \frac{(2 + \tau^{-1})^r - 1}{r} \sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n} R_k^r \geq 1 - (C + \tau^{-1}) > 0, \tag{42}$$

since  $C + \tau^{-1} \in (0, 1)$  by definition, so that (41) holds if

$$0 \leq \alpha_n \leq \min \left\{ \frac{(1 - \tau^{-1}) R_n^r - \frac{(2 + \tau^{-1})^r - 1}{r} \sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n} R_k^r}{G_q 2^{q-2} \|x_n^*\|^{q-2} (q-1) \|A\|^2 R_n^{2(r-1)} Q_n^2}, \frac{\|x_n^*\|}{\|A\| R_n^{r-1} Q_n} \right\}, \tag{43}$$

$\forall n = 1, 2, 3, \dots$ , where condition (18) has been considered. Thanks to the same results of (24), the sequence  $(\Delta_n)_n$  is convergent.

The second step, as well as for the noiseless case of Theorem 3, is to show that  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$ . Following exactly the same formal computation, the series (25) still converges. Similarly to (27) and (28), the constant  $d$  of (26) is now chosen such that

$$0 < d \leq \left( (1 - \gamma)(1 - \tau^{-1}) - \frac{(2 + \tau^{-1})^r - 1}{r} \gamma \right) \frac{1}{\|A\|},$$

since now

$$0 < (1 - \gamma)(1 - \tau^{-1}) - \frac{(2 + \tau^{-1})^r - 1}{r} \gamma \leq \frac{V_k}{Q_k}.$$

This leads to the same bound (29) on the step size  $\alpha_n$  and the inequalities (30). On this ground, the reductio ad absurdum leading to (31) can be done similarly, by noticing that, thanks to (40) and (42),

$$\langle p_k^*, x_k - \bar{x} \rangle \leq -(1 - (C + \tau^{-1}))R_k^r \leq -(1 - (C + \tau^{-1}))\varepsilon^r < 0,$$

that is,  $p_k^*$  would still be a descent functional with negative slope uniformly bounded away from zero.

The third step of the proof is to show that the sequence  $(x_n)_n$  has a Cauchy subsequence. The proof is basically the same, where the convergence of the second addendum of (32) is given by

$$\begin{aligned} |\langle j_p(x_{n_l}) - j_p(x_{n_k}), x_{n_l} - \bar{x} \rangle| &= \left| \sum_{n=n_k}^{n_l-1} \langle j_p(x_{n+1}) - j_p(x_n), x_{n_l} - \bar{x} \rangle \right| \\ &= \left| \sum_{n=n_k}^{n_l-1} \alpha_n \langle p_n^*, x_{n_l} - \bar{x} \rangle \right| \\ &= \left| \sum_{n=n_k}^{n_l-1} \alpha_n \langle j_r(Ax_n - b_{h_n}) + \sum_{j=0}^{n-1} c_{j,n} j_r(Ax_j - b_{h_j}), Ax_{n_l} - b \rangle \right| \\ &\leq \left| \sum_{n=n_k}^{n_l-1} \alpha_n \langle j_r(Ax_n - b_{h_n}) + \sum_{j=0}^{n-1} c_{j,n} j_r(Ax_j - b_{h_j}), Ax_{n_l} - b_{h_{n_l}} \rangle \right| \\ &\quad + \left| \sum_{n=n_k}^{n_l-1} \alpha_n \langle j_r(Ax_n - b_{h_n}) + \sum_{j=0}^{n-1} c_{j,n} j_r(Ax_j - b_{h_j}), b_{h_{n_l}} - b \rangle \right| \\ &\leq \sum_{n=n_k}^{n_l-1} \alpha_n R_n^{r-1} Q_n (R_{n_l} + \delta_{h_{n_l}}) \leq \sum_{n=n_k}^{n_l-1} \alpha_n R_n^{r-1} Q_n (R_n + \delta_{h_n}) \\ &\leq (1 + \tau^{-1}) \sum_{n=n_k}^{n_l-1} \frac{\tau_n \|x_n^*\| R_n}{\|A\|} \rightarrow 0 \quad \text{as } k \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

This ground, the proof can be completed as well as in the step four of the noiseless case.

## 5 Practical implementation for the step size computation

As already sketched, the classical CG method in Hilbert space gives a simple and closed form expression for the step size  $\alpha_n$  of (10), which is the same optimal choice of the steepest descent method [2]. Indeed, in that Hilbertian case, the corresponding minimization problem

$$\arg \min_{\alpha} \|A(x_n + \alpha p_n) - b\|^2$$

is a simple one-dimensional quadratic and differentiable minimization problem, whose first derivative is linear. In our more general Banach settings, problem (10)

$$\begin{cases} \arg \min_{\alpha} \|A j_q(x_n^* + \alpha p_n^*) - b\|^r = \arg \min_{\alpha} \Phi(\alpha) \\ \alpha \in [0, T] \end{cases}$$

does not allow a closed form explicit solution, according to Galois' results on the solution of a polynomial equation. Thus, the description of the practical implementation of the proposed algorithm leaves a practical question open.

In order to find the minimum of  $\Phi(\alpha)$ , we can evaluate the first derivative of  $\Phi(\alpha)$

$$\Phi'(\alpha) = j_r(A j_q(x_k^* + \alpha p_k^*) - b)^* \cdot ((q-1) A(j_{q-1}(|x_k^* + \alpha p_k^*|) \circ p_k^*)) \quad (44)$$

where  $\circ$  is the component-wise product, and we find the critical point by solving the equation  $\Phi'(\alpha) = 0$ . If  $p \neq 2$  or  $r \neq 2$ , (44) is no longer a linear equation, so we cannot compute its solution explicitly. Iterative methods can be used, such as the simplest secant method

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - \Phi'(\alpha_k) \frac{\alpha_k - \alpha_{k-1}}{\Phi'(\alpha_k) - \Phi'(\alpha_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots$$

as first basic example. However, this approach becomes very expensive in computational load in real problems with large-scale matrices.

To avoid this high computational load, we use the recent and efficient derivative-free algorithm for bound-constrained optimization (BCDFO) developed in [11], which is based on the iterative trust-region method. The idea behind a trust region method is very simple: the  $k+1$  iteration  $\alpha_{k+1} = \alpha_k + s_k$  is an approximate solution of the quadratic subproblem

$$m_k(\alpha_k + s_k) = \Phi(\alpha_k) + g_k^T s_k + \frac{1}{2} s_k^T H_k s_k, \quad (45)$$

inside the trust region

$$\mathcal{B}_{\infty}(\alpha_k, \Delta_k) = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \|\alpha - \alpha_k\|_{\infty} \leq \Delta_k\}.$$

where  $g_k$  is an approximation of the gradient of  $\Phi$  at point  $\alpha_k$ ,  $H_k$  is an approximation of its Hessian and  $\Delta_k$  is a positive scalar representing the size of the trust region.

The point  $\alpha_k + s_k$  is acceptable and  $\Delta_k$  is increased if

$$\varrho_k = \frac{\Phi(\alpha_k) - \Phi(\alpha_k + s_k)}{m_k(\alpha_k) - m_k(\alpha_k + s_k)} > \eta,$$

where  $\eta > 0$  is a suitable constant. If  $\varrho_k < \eta_1$ , the size of the trust region  $\Delta_k$  is decreased and  $s_k = 0$ . The key fact is that the function  $m_k$  is evaluated not using the true derivatives but interpolating known function's values at a given set  $Y_k$ . The geometry of this space has to cover the space to guarantee the convergence from an arbitrary starting point [24].

In our case, the BCDFO is a particular implementation where bounds on the variables are handled by an active set strategy (for details and convergence proofs, see [11]). Although efficient, the algorithm BCDFO to solve the one dimensional minimization problem (10) cannot be considered as optimal, so that the appropriate computation of the step size still remains an open problem.

## 6 Numerical results

In this section, first numerical experiments illustrate the performance of the proposed conjugate gradient technique in Banach spaces. We choose a basic image restoration problem [2] and we compare the technique with the Landweber method in Banach spaces (2).

Consider the operator equation of the first kind

$$g(t_1, t_2) = \int \int G_1(y_1, t_1) f(y_1, y_2) G_2(y_2, t_2) dy_1 dy_2, \quad (46)$$

where

$$G_1(y_1, t_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(y_1-t_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

and

$$G_2(y_2, t_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y_2-t_2)^2}{2\sigma_2^2}}.$$

The linear system  $Ax = b$  obtained by the discretization of the operator equation (46) is considered. Fig.1(a) shows the exact solution  $x^\dagger$  for the given right-hand side  $b$  shown in Fig.1(b).

The exact solution  $x^\dagger$  presents discontinuities characterized by different dimen-

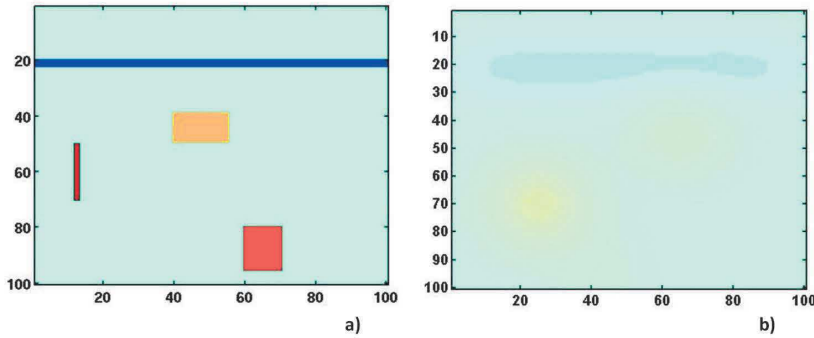


Fig. 1 Exact solution  $x^\dagger$  of the linear system  $Ax = b$  (a), exact data  $b$  (b).

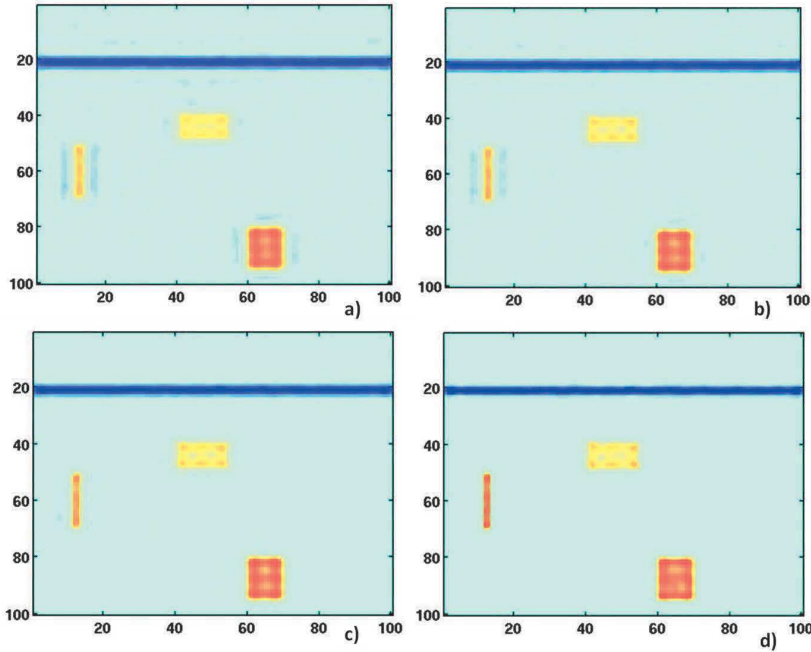
sions and different intensities. Since the solution is almost-sparse, we look for the minimum  $p$ -norm solution with  $p \in (1, 2)$ , in order to promote sparsity in the restored solution. For more information about the role of the sparsity in inverse problems, we refer to [25], [8], [15].

To simulate noisy data  $b_\delta$ , we add white Gaussian noise and measure the noise level  $\|b - b_\delta\| = \delta$ . When the noise is Gaussian, it is well known that the least square solution is the maximum likelihood estimate of  $x$ . For this reason,  $\|Ax - b_\delta\|_2^2$  is used. In our numerical tests, the parameters of the proposed CG algorithm are selected as follows:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{Cr}{(2+\tau^{-1})^r - 1 + Cr}, \text{ with } C = 0.9 \text{ and } \tau = 10. \\ d &= d \leq \left( (1-\gamma)(1-\tau^{-1}) - \frac{(2+\tau^{-1})^r - 1}{r} \gamma \right) \frac{1}{\|A\|} - 10^{-6}, \\ G_q &\text{ is evaluated using the estimate given in [20].} \end{aligned}$$

Fig. 2 shows the reconstructed solution by using the conjugate gradient method in  $l^2$  (a), and by using the proposed approach in  $l^{1.8}$  (b), in  $l^{1.5}$  (c) and in  $l^{1.2}$  (d). As stopping criterion, the discrepancy principle is used [12].

By direct visual inspection, it is clear that smaller  $p$  promotes sparsity and reconstruction of abrupt discontinuities. The reconstructed solutions in Banach spaces are less over-smoothed than the typical of Hilbert reconstructions, and few artifacts and oscillations are present, both in the spot images and in the background.



**Fig. 2** Reconstructed solution using conjugate gradient in Hilbert space (a) and using the generalization of the conjugate gradient in  $l^{1.8}$  (b),  $l^{1.5}$  (c) and  $l^{1.2}$  (d).

**Table 1** RMSE for CG and Landweber methods in  $l^p$ 

Method	$p = 2$	$p = 1.8$	$p = 1.5$	$p = 1.2$
CG	0.4091	0.3568	0.3246	0.2454
LW	0.3957	0.3552	0.3311	0.2452

Table 1 shows the Root Mean Square Error (RMSE):

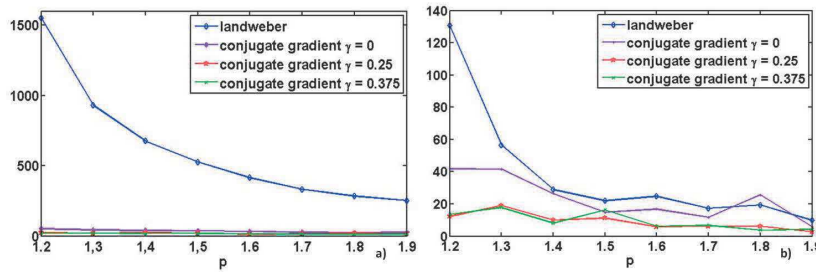
$$RMSE(X_{rec}, X_{ref}) = \frac{\|X_{rec} - X_{ref}\|_2^2}{\|X_{ref}\|_2^2} \quad (47)$$

where  $X_{ref}$  and  $X_{rec}$  are the reference and the reconstructed solutions of Fig. 2, respectively. The RMSEs of the proposed CG and the Landweber methods are very similar, and the corresponding reconstructions look almost identical (so that, to save space, we do not show the reconstructions of the Landweber method).

Anyway, as we can see in Fig.3, the proposed CG method considerably outperforms the Landweber one both in terms of iterations number and computational time, for each value of  $\gamma$  (7). We recall that  $\gamma = \frac{Cr}{(2+\tau^{-1})^{r-1}+Cr}$ , where  $c \in [0, 1)$ , then, in this case,  $\gamma \in [0, 0.4)$  for  $r = 2$ .

It must be pointed out that the computational cost of each iteration is completely different for Landweber and the proposed technique. In the latter, a 1-dimensional non-linear problem (10) must be minimized at each iteration.

The dependence on the  $\gamma$  and  $p$  parameters in terms of computational time is

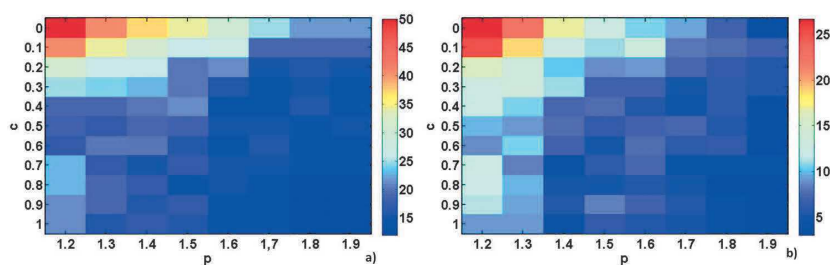


**Fig. 3** Iteration number(a) and computational time (b) against the  $p$  parameter for Conjugate gradient and Landweber method. Note that the conjugate gradient method with  $\gamma = 0$  is the steepest descent one.

analyzed.

In fig.4, the iteration numbers and computational time against  $c$  and  $p$  are shown. The computational time decreases for increasing  $p$  and  $\gamma$  values. Like in Hilbert space, the conjugate gradient method in  $l^p$  outperforms the Landweber method and the steepest descent method. These results are confirmed by different experiments (not shown here to save space) and an application of the proposed technique to a real remote sensed data could be found in [16]. On these grounds, we can summarize that the conjugate gradient method is really more efficient of the Landweber method especially for large scale matrices. Moreover, its convergence speed can be further improved by means of the applications of a dual preconditioner as in [9].





**Fig. 4** Iteration number (a) and computational time (b) against the  $c$  and  $p$  parameter for Conjugate gradient method. Note that the conjugate gradient method with  $\gamma = 0$  is the steepest descent one.

## 7 Conclusions

An iterative method, based on a generalization of the conjugate gradient method for the minimization in  $l^p$  Banach spaces is proposed.

We demonstrate that the conjugate gradient method converges strongly to the minimum  $p$ -norm solution and that together with the discrepancy principle as stopping rule, the proposed method is a regularization method.

Numerical experiments, undertaken on an image restoration problem, show that the method is robust in terms of reconstruction accuracy and it is faster than the Landweber method and the steepest descent one.

**Acknowledgements** The work of C. Estatico is partly supported by PRIN 2012 2012MTE38N and GNCS-INdAM. The work of F. Lenti is supported by the AVENUE project of the RTRA STAE foundation.

## References

1. Asplund E.: Positivity of duality mappings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73, 200-203 (1967).
2. Bertero M., Boccacci P.: *Introduction to inverse problems in imaging*, 98-127, IOP publishing, London, 1998.
3. Bonesky K., Kazimiersky K., Maass P., Schöpfer F., Schuster T.: Minimization of Tikhonov functional in Banach spaces, *Abstr. Appl. Anal.*, (2008).
4. Bregman L.M.: The relaxation method of finding the common points of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming, *USSR Comp. Math. Math. Phys.*, 7, 200-217 (1967).
5. Burger M., Osher S.: Convergence rates of convex variational regularization, *Inverse problems*, 20, 1411-1421, (2004).
6. Butnariu D., Resmerita E.: Bregman distances, totally convex functions and a method for solving operator equations in Banach spaces, *Abstr. Appl. Anal.*, 2006, 1-39, (2006).
7. Cioranescu I., *Geometry of Banach spaces, duality mappings and nonlinear problems*, 1-87, Mathematics and its Applications, 62, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990.
8. Daubachies L., Defrise M., De Mol C.: An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with sparsity constraint, *Comm. Pure Appl. Math.*, 57, 1413-1457, (2004).
9. Brianzi P., Di Benedetto F., Estatico C.: Preconditioned iterative regularization in Banach spaces, *Comput. Optim. Appl.*, 54, 263-282, (2013).
10. Grasmair M.: Generalized Bregman distances and convergences rate for non-convex regularization methods, *Inverse problems*, 26, 1-20, (2010).
11. Gratton S., Toint P.L., Tröltzsch A.: An active-set trust-region method for derivative-free nonlinear bound-constrained optimization, *Optim. Methods Softw.*, 26, 873-894, (2011).

12. Hansen P.C.: Rank-deficient and discrete ill-posed problem: numerical aspects of linear inversions, Monographs on Mathematical Modeling and Computation, SIAM, Philadelphia, 1998.
13. Herzog R., Wollner W.: A conjugate direction method for linear systems in Banach spaces, J. inverse ill-posed problems, (published online on Nov. 2016).
14. Kien B.T.: The normalized duality mapping and two related characteristic properties of a uniformly convex Banach space, Acta Math. Vietnam., 27, 53-67, (2002).
15. Lenti F., Nunziata F., Estatico C., Migliaccio M.: Analysis of reconstructions obtained solving  $l^p$ -penalized minimization problems, IEEE Trans. Geosci. Remote Sens., 53, 4876-4886, (2015).
16. Lenti F., Nunziata F., Estatico C., Migliaccio M.: Conjugate gradient method in Hilbert and Banach spaces to enhance the spatial resolution of radiometer data, IEEE Trans. Geosci. Remote Sens., 54, 397-406, (2016).
17. Lindstrauss J., Tzafriri L.: Classical Banach spaces, 53-104, Springer, Berlin, 1996.
18. Milicic P.M.: On moduli of expansion of the duality mapping of smooth Banach spaces, J. Inequ. Pure Appl. Math., 3, 1-7, (2002).
19. Resmerita E.: Regularization of ill-posed problems in Banach spaces: convergence rates, Inverse problems, 21, 1303-1314, (2005).
20. Schöpfer F., Louis A.K., Schuster T.: Nonlinear iterative methods for linear ill-posed problems in Banach spaces, Inverse problems, 22, 311-329, (2006).
21. Schöpfer F., Schuster T.: Fast regularizing sequential subspace optimization in Banach spaces, Inverse problems, 25, 1-22, (2009).
22. Schöpfer F., Schuster T., Louis A.K.: Metric and Bregman projections onto affine subspaces and their computation via sequential subspace optimization methods, J. inverse ill-posed problems, 15, 479-506, (2007).
23. Schöpfer F., Schuster T., Louis A.K.: An iterative regularization method for the solution of the split feasibility problem in Banach spaces, Inverse problems, 24, 1-20, (2008).
24. Scheinberg K., Toint, Ph.L.: Self-correcting geometry in model based algorithms for derivative-free unconstrained optimization, Technical report, TR09/06, Department of Mathematics, University of Namur, Belgium, (2009).
25. Schuster T., Kaltenbacher B., Hofmann B., Kazimierski K.: Regularization methods in Banach spaces, Radon series on Computational and Applied Mathematics, 10, de Gruyter, Berlin, 2012.
26. Xu Z.B., Roach G.F.: Characteristic inequalities of uniformly convex and uniformly smooth Banach spaces, J. Math. Anal. Appl., 157, 189-210, (1991).

# Un système argumentatif pour le raisonnement sur des ressources limitées

Philippe Besnard<sup>1</sup>, Éric Grégoire<sup>2</sup>, Badran Raddaoui<sup>2</sup>

1. IRIT CNRS UMR 5505 – Univ. Toulouse

118 route de Narbonne  
F-31065 Toulouse Cedex  
besnard@irit.fr

2. CRIL CNRS UMR 8188 – Univ. Artois

Rue Jean Souvraz, SP 18  
F-62307 Lens Cedex  
{gregoire,raddaoui}@cril.fr

*RÉSUMÉ.* Dans cet article, nous proposons quelques bases pour l'argumentation déductive pour le raisonnement sur des ressources consommables et limitées. Nous nous appuyons sur une nouvelle logique, simple et proche du langage et des principes de la logique booléenne, permettant le raisonnement à partir de ressources consommables en quantité bornée. Une méthode des tableaux sémantiques pour cette logique est fournie. Enfin, pour prendre en compte la rareté des ressources consommables en argumentation, nous développons une approche pour le traitement du raisonnement argumentatif à partir des ressources consommables en quantité bornée.

*ABSTRACT.* This paper is intended to lay down the basics of logic-based argumentation involving bounded resources. First, a simple variant of Boolean logic is introduced, allowing us to reason about consuming resources. An adapted tableau method for the logic is provided. Then, the main concepts of logic-based argumentation are revisited in this framework.

*MOTS-CLÉS :* théorie de l'argumentation, ressources limitées, raisonnement automatique.

*KEYWORDS:* argumentation theory, bounded resources, automated reasoning.

DOI:10.3166/RIA.29.349-368

## 1. Introduction

De nombreuses études se sont concentrées sur le raisonnement en présence d'incohérences en intelligence artificielle. Dans ce contexte, différentes approches ont été proposées dans la littérature pour permettre de raisonner sans trivialisations malgré les contradictions. Il y a en particulier les théories de l'argumentation (Bench-Capon, Dunne, 2007 ; Besnard, Hunter, 2008 ; Rahwan, Simari, 2009). L'argumentation est

une approche attrayante pour raisonner avec des connaissances imparfaites, notamment contradictoires ; elle est essentiellement fondée sur la justification d'une conclusion plausible par des raisons en faveur de celle-ci. Pour l'essentiel, l'argumentation consiste à mettre en œuvre un raisonnement logique, dans une situation de communication précise, avec une intention claire et admise. Depuis quelques années, l'argumentation formelle est un thème de recherche très populaire qui a un large éventail d'applications telles que la prise de décision (Bench-Capon *et al.*, 2012), la négociation entre agents (Amgoud, Vesic, 2012 ; Hadidi *et al.*, 2012), le raisonnement non monotone (Chesñevar *et al.*, 2000), et ainsi de suite, dans le domaine juridique (Prakken, 1993 ; Prakken, Sartor, 1996), médical (Hunter, Williams, 2010), etc.

Plusieurs théories de l'argumentation ont émergé ces dernières années. Dans cet article, nous nous intéressons aux systèmes d'argumentation déductifs dans la lignée de (Pollock, 1987 ; Amgoud, Cayrol, 2002 ; Besnard, Hunter, 2008 ; Santos, Martins, 2008 ; Besnard *et al.*, 2013). Ces modèles sont essentiellement dédiés à la construction d'arguments et de contre-arguments à partir d'une base de connaissances éventuellement incohérente et à l'interaction entre ces différents arguments. Ces nombreux modèles diffèrent par leur niveau d'abstraction et aussi par le langage logique sur lequel ils sont construits. Mais ces modèles argumentatifs partagent le principe qu'un argument est un couple prémisses-conclusion tel que la conclusion est une formule inférée à partir des prémisses, lesquelles sont une collection de formules logiques.

La notion de ressources est largement utilisée dans le discours commun, c'est aussi une notion primitive et fondamentale en informatique. Informellement, une ressource désigne n'importe quelle entité (un processus, un type de données, un composant matériel, une formule logique, etc) manipulable par une opération au sens large. La notion de ressources et les problématiques liées à leur gestion sont au cœur de cet article. Le raisonnement sur des ressources limitées concerne tous les domaines où les décisions portent sur des ressources qui ne sont pas infinies. Le champ de l'intelligence artificielle regorge de situations de ce genre. Un robot autonome doit, par exemple, planifier ses actions pour éviter une perte d'énergie. Un agent intelligent qui négocie sur le web doit être conscient de ses ressources financières et il doit donc assumer les conséquences financières de chaque décision qu'il prend. Beaucoup de décisions d'un agent dépendent de leur influence sur ses ressources limitées comme le temps, l'argent, l'énergie, etc. En bref, la capacité de raisonner à partir de ressources consommables est indispensable dans de nombreuses situations appelant une décision.

Alors que la logique classique a depuis longtemps été considérée comme un outil privilégié en intelligence artificielle pour la formalisation et l'exploitation des connaissances, la logique classique n'est pas adaptée pour le raisonnement sur la consommation de ressources limitées. En effet, lorsque ces ressources sont représentées par des formules logiques classiques, il est possible d'utiliser à souhait (et donc de manière inépuisable) ces formules dans un même processus déductif. Ce qui est contre-intuitif au sens de ressources consommables en quantité bornée. Considérons par exemple une prémisses exprimant qu'une ressource particulière est disponible pour un certain agent. Lorsque cette prémisses est censée représenter une ressource consommable qui ne peut

être effectivement utilisée qu’une seule fois, cette dernière ne devrait plus être réutilisable après qu’elle ait été appliquée (la ressource étant ainsi “consommée”) dans le raisonnement. Puisqu’au contraire, selon la logique classique, chaque prémisses reste toujours accessible, même après qu’un raisonnement en ait fait usage, nous visons donc une logique qui ne perpétue pas les informations représentant des ressources consommables après qu’elles aient été utilisées dans un raisonnement.

Prenons par exemple à un client qui dépense un euro pour acheter une viennoiserie. Nous interprétons cet échange en considérant que le client consomme l’argent qu’il possède pour obtenir la viennoiserie en question. Considérons les formules classiques suivantes :  $1 \text{ euro}$  et  $1 \text{ euro} \rightarrow \text{brioche}$ , exprimant respectivement « *j’ai un euro* » et « *si j’ai un euro alors j’achète une brioche* ». L’application de la règle de Modus Ponens sur ces deux prémisses permet d’inférer la conclusion *j’achète une brioche*. Cependant, au sens des ressources, la vérité de cette conclusion n’est pas compatible avec le maintien de la vérité de la première prémisses. En effet, la conjonction de la première prémisses et de la conclusion donne : « *j’ai un euro et j’achète une brioche* », proposition irréaliste au sens des ressources puisque l’action d’achat remet en cause la disponibilité des ressources qu’elle requiert. Poursuivons l’exemple avec une autre possibilité d’achat : « *si j’ai un euro alors j’achète une chocolatine* », exprimé par la formule classique  $1 \text{ euro} \rightarrow \text{chocolatine}$ , qui avec la première prémisses entraîne la conclusion « *j’achète une chocolatine* ». En combinant cette déduction avec la précédente, nous concluons : « *j’achète une brioche et j’achète une chocolatine* », qui est aussi irréaliste au sens des ressources car la déduction de la conclusion  $\text{brioche} \wedge \text{chocolatine}$  nécessite en réalité *deux fois* la pré-condition « *j’ai un euro* ». De surcroît, l’hypothèse  $1 \text{ euro}$  reste encore valable. Or, ce raisonnement est évidemment absurde compte tenu de la limitation des ressources du client (par hypothèse, il n’a qu’un seul euro).

De manière générale, si un agent a engagé une ressource  $R1$  dans son raisonnement par l’intermédiaire d’une prémisses  $R1 \wedge R2$ , il faut remplacer cette dernière par la formule  $R2$  dans l’ensemble des formules disponibles, traduisant ainsi l’idée que  $R1$  est maintenant consommée suite au raisonnement de l’agent. Un objectif complémentaire est de pouvoir représenter la quantité disponible, *e.g.* deux unités de la ressource  $R1$  au moyen de deux copies de la formule représentant une unité de la ressource (alors que la logique classique ne fait pas de distinction selon qu’un ou plusieurs exemplaires de la même formule sont disponibles). Ainsi, nous voulons avoir un moyen de représenter la consommation, à l’occasion d’un raisonnement, de tout ou partie de la quantité disponible d’une ressource donnée. Par exemple, nous voulons pouvoir capturer un raisonnement qui exige trois copies de la ressource  $R1$ , partant d’une quantité totale de cinq, et donc laissant après coup deux copies de  $R1$  disponibles.

Nous présentons dans cet article, en fonction de ce que nous envisageons intuitivement ci-dessus, un système logique, que nous appelons la *logique consommatrice*, particulièrement simple mais néanmoins adapté pour modéliser des raisonnements qui mettent en jeu des ressources consommables en quantité bornée ; c’est une logique qui tient compte de l’épuisement des ressources. Nous considérons un langage similaire à celui de la logique propositionnelle classique et présentons une version de la

méthode des tableaux (Smullyan, 1968) traitant la consommation des prémisses. Finalement, pour prendre en compte l'impact de la consommation des ressources dans l'argumentation, nous exploitons cette logique en adaptant la théorie de l'argumentation logique. Nous utilisons cette logique pour la définition d'arguments, de contre-arguments et pour la caractérisation des conflits entre arguments. En particulier, la relation de conflit induite exprime que deux conclusions s'opposent s'il y a dans leurs consommés respectifs un exemplaire commun d'une ressource.

Il semble bien que les notions de ressources et de consommation n'aient pas été traitées auparavant dans le cadre de l'argumentation logique. Et, à notre connaissance, le seul travail qui prend en compte la quantité des ressources dans le cadre de l'argumentation abstraite (Dung, 1995) est celui de (Rotstein *et al.*, 2011) où les auteurs intègrent une nouvelle contrainte de gestion des ressources limitées dans la sélection des arguments acceptables à la Dung.

Cet article est structuré comme suit. La section 2 débute par une introduction à certains cadres logiques pour le raisonnement en présence des ressources finies. Nous présentons ensuite notre logique de ressources via son système déductif fondé sur la méthode des tableaux. Nous achevons la section en donnant, d'une part, des exemples illustrant le fonctionnement de la méthode des tableaux en termes de consommation de ressources et, d'autre part, quelques propriétés de la notion d'inférence consommatrice définie par notre système déductif. Notre logique sert en section 4 à développer un modèle argumentatif. Nous étudions dans ce cadre les notions d'argument, de sous-argument, de contre-argument et d'arbre argumentatif. Nous terminons l'article par le sujet de l'agrégation des arguments et des contre-arguments relatifs à une conclusion donnée, au sein d'une même structure arborescente appelée *arbre argumentatif*.

## 2. Logiques de ressources

En logique propositionnelle classique, un même processus d'inférence peut faire intervenir un nombre quelconque (fini) de fois la même formule afin de dériver une conclusion, ce qui est entre autres reflété par l'implication matérielle :  $\alpha \rightarrow \beta$  signifie que si  $\alpha$  est vraie, alors  $\beta$  aussi, mais  $\alpha$  reste quand même vraie. Cela ne convient pas lorsqu'il s'agit de prendre en compte la notion de ressources consommables.

Pour remédier à cette limitation, plusieurs formalismes logiques ont été proposés dans la littérature. Les *logiques de ressources* (Roorda, 1991) sont conçues comme des outils pour spécifier et vérifier des propriétés de systèmes complexes. Ces dernières années, un intérêt croissant s'est porté sur ces logiques de ressources car elles permettent non seulement de traiter la gestion des ressources mais aussi d'analyser de manière intrinsèque les phénomènes qui y sont liés. Parmi ceux-ci, nous pouvons citer les processus de conservation-distribution, production-consommation, localisation-mobilité, ou encore partage-séparation des ressources. Les logiques de ressources connues ainsi que leurs différentes variantes peuvent être classées en deux catégories comme suit.

## 2.1. Les logiques de production-consommation

La plus connue des logiques de ressources est certainement la *logique linéaire*  $\mathcal{LL}$  inventée par Jean-Yves Girard (Girard, 1987 ; 1995). Son héritage, issu de la logique classique et intuitionniste, est la mise en évidence du rôle essentiel des règles structurales d'affaiblissement et de contraction dont l'absence conduit à une décomposition de chaque connecteur de la logique classique en deux versions distinctes, l'une additive et l'autre multiplicative (Dosen, Schroder-Heister, 1993). Par conséquent, la logique linéaire ne peut introduire des hypothèses superflues dans les preuves, ni dupliquer implicitement une hypothèse. Cette logique permet donc de formaliser naturellement des problèmes liés à des aspects de production-consommation de ressources et de cumul de ressources, comme par exemple les jetons dans les modèles de réseaux de Petri (Girault, 1997).

Différents fragments de la logique linéaire ont été développés comme la logique linéaire intuitionniste (Hyland, Paiva, 1993), la logique linéaire non commutative (Abrusci, 1991), la logique linéaire multiplicative MLL (Roorda, 1991), la logique linéaire light (Girard, 1998) et ses différentes variantes telles que BLL (Girard *et al.*, 1992), LLL (Girard, 1998), SLL (Lafont, 2004), ELL (Girard, 1998) et la logique linéaire distributive (Leneutre, 1998), etc.

## 2.2. Les logiques de partage-séparation

Née plus récemment, la logique de ressources  $\mathcal{BI}$  (*The Logic of Bunched Implications* en anglais) (O'Hearn, Pym, 1999 ; Pym, 1999) est une logique de ressources qui combine les connecteurs de la logique intuitionniste avec ceux du fragment multiplicatif de la logique linéaire intuitionniste. À la différence de la logique linéaire, cette logique interprète les formules comme des ressources devant être soit partagées, soit séparées. Elle inclut en particulier un opérateur de composition s'interprétant en termes de partage et de séparation de ressources. Elle permet donc d'aborder formellement des problèmes liés à des aspects de partage-séparation de ressources. La logique  $\mathcal{BI}$  se décline en une version intuitionniste et une version classique qui se distinguent par les propriétés de leurs opérateurs additifs. Plusieurs variantes de la logique  $\mathcal{BI}$  ont été définies, parmi lesquelles les logiques spatiales (Caires, Lozes, 2006 ; Calcagno *et al.*, 2005) et les logiques de séparation (Ishtiaq, O'Hearn, 2001) qui sont construites autour de la version classique de la logique  $\mathcal{BI}$ .

Pour rendre compte des divers aspects de l'interaction et la consommation des ressources bornées, les logiques de ressources que nous venons de présenter, que ce soient les logiques  $\mathcal{LL}$  ou les logiques  $\mathcal{BI}$  « mélangent » généralement plusieurs types de connecteurs logiques, qui peuvent être additifs ou multiplicatifs, intuitionnistes ou linéaires, commutatifs ou non commutatifs, etc. De plus, le type d'interactions entre les ressources exprimé par la logique se traduit par un type particulier d'interaction entre les différents connecteurs considérés (distributivité, etc.). De ce fait, ces logiques sont caractérisées par une syntaxe complexe qui ne facilite pas l'appréhension d'aspects fondamentaux liés à une application particulière (dans notre cas, l'argumentation).

### 2.3. Une logique consommatrice « simple »

Dans cet esprit, nous proposons une nouvelle variante des logiques de production-consommation, variante dont la syntaxe est simple et abordable. Naturellement, notre logique vise à formaliser des problèmes liés à des aspects de production et de consommation de ressources, ainsi que le cumul de ressources. À la différence des logiques linéaires, elle permet de ne consommer que la quantité de ressources nécessaire sans transformer la totalité de la ressource concernée en conclusions. Il importe de noter qu'en introduisant notre formalisme, notre intention n'est nullement de poser une critique des précédentes logiques de ressources. Nous suivons une voie alternative en essayant de rester aussi proche que possible de la logique classique, qui est la plus attractive pour la communauté de l'intelligence artificielle. Il s'agit notamment de rester le plus proche possible de la logique propositionnelle classique afin de profiter au maximum des travaux existants, tels que des algorithmes relativement efficaces.

Il n'en reste pas moins que notre système formel est un rival de la logique propositionnelle classique puisqu'il abandonne la philosophie booléenne afin de prendre en compte la consommation de ressources et l'interaction entre les ressources. Ce qui conduit à des règles d'inférence différentes. A titre d'illustration, mentionnons que notre système ne peut admettre l'*idempotence* de la conjonction puisque la notion de ressources exige ne pas identifier  $\alpha \wedge \alpha$  avec  $\alpha$ .

Notre logique de ressources, définie en section 3, possède quelques particularités :

1. Elle utilise une structuration des ressources sous forme de multi-ensembles plutôt que sous forme d'ensembles.
2. Elle interprète les formules atomiques comme des ressources élémentaires, de sorte que la répétition d'une même formule atomique représente autant d'exemplaires de la ressource.
3. Elle repose sur le fait que la disponibilité est aux ressources ce que la vérité est aux propositions en logique classique.
4. Elle postule qu'une information (sauf à avoir été fournie répétitivement) ne peut être exploitée qu'une seule fois au cours d'un même raisonnement.

## 3. La logique consommatrice $\mathcal{CL}$

### 3.1. Langage

Dans cette section, nous introduisons une variante relativement simple de la logique propositionnelle classique, intégrant l'idée de raisonnement à partir de ressources consommables. Nous appelons ce système formel logique consommatrice, noté  $\mathcal{CL}$  (pour *Consumption Logic* en anglais). Son langage, noté  $\mathcal{L}_{\mathcal{CL}}$ , est similaire à celui de la logique propositionnelle.

L'alphabet de la logique consommatrice est constitué d'un ensemble infini dénombrable de variables propositionnelles, notées  $a, b, c$ , etc. Intuitivement, elles désignent



des ressources élémentaires. Le symbole  $\perp$  représente l'absurde. Les connecteurs de négation, de disjonction, de conjonction, d'implication et d'équivalence sont notés respectivement  $\neg$ ,  $\vee$ ,  $\wedge$ ,  $\rightarrow$  et  $\leftrightarrow$ . Nous utilisons aussi les symboles de parenthèses comme d'habitude. Les formules de  $\mathcal{L}_{CL}$  sont construites de manière standard, en utilisant des variables propositionnelles, des connecteurs et des parenthèses.

Les littéraux sont des formules constituées d'exactly une variable propositionnelle, qui peut être précédée du connecteur de négation.

Les formules de  $\mathcal{L}_{CL}$  sont dénotées par les lettres grecques minuscules  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , etc. Les multi-ensembles de formules (à la différence de la logique classique, une formule peut exister en plusieurs exemplaires non assimilables) sont dénotés par les lettres grecques majuscules  $\Delta, \Theta, \Phi, \Psi$ , etc. Le symbole  $\uplus$  représente l'union multi-ensembliste en remplacement du symbole d'union classique  $\cup$ . Par exemple, l'union multi-ensembliste  $\{a, a \rightarrow \neg b\} \uplus \{a, b \wedge c\}$  est le multi-ensemble  $\{a, a \rightarrow \neg b, a, b \wedge c\}$ .

Le cadre multi-ensembliste est crucial dans la mesure où, une variable propositionnelle  $a$  de  $\mathcal{L}_{CL}$  désignant une ressource consommable, il faut distinguer  $\{a\}$  (cas où la ressource  $a$  est unique) de  $\{a, a\}$  (cas où il y a deux copies de la ressource  $a$ ).

### 3.2. Une méthode des tableaux pour $\mathcal{CL}$

La *méthode analytique des tableaux* (Beth, 1970 ; Smullyan, 1968) est une procédure de preuve par réfutation. Une réfutation d'un ensemble de formules  $\Phi$  est une dérivation de  $\perp$  à partir de  $\Phi$ , c'est-à-dire que pour prouver qu'une formule  $\alpha$  est un théorème, on montre que  $\neg\alpha$  est incohérente. Plus précisément, un calcul des tableaux consiste en une collection finie de *règles de décomposition*, dont chacune spécifie comment décomposer syntaxiquement une formule selon son connecteur principal (chaque règle est constituée d'un *antécédent* et d'une liste de *conséquents*). S'il existe une règle pour traiter chaque connecteur, la procédure finit par produire un ensemble composé uniquement de formules atomiques et de leurs négations. Un tel ensemble, dont aucun élément ne peut se voir appliquer de règle, est aisément reconnaissable comme cohérent ou incohérent. Les éléments d'un tableau sont disposés en un arbre dit *tableau*, dont la racine est l'ensemble des formules de départ, et dont les branches sont créées et vérifiées systématiquement. Si une formule atomique et la négation de celle-ci apparaissent comme étiquettes de nœuds dans une même branche, alors cette branche du tableau mène à une contradiction explicite et est considérée comme fermée. Si toutes les branches sont fermées, la preuve est terminée et signifie que l'ensemble des formules de départ est incohérent.

Afin d'adapter cette idée pour  $\mathcal{CL}$ , quelques conditions doivent être imposées pour tenir compte de particularités liées à la gestion de ressources. D'une part, la méthode des tableaux pour  $\mathcal{CL}$  est définie comme un processus de réfutation où chaque formule n'est *pas* dupliquée dans toutes les branches du tableau (dans le cas classique, chaque formule est systématiquement dupliquée). Ceci s'explique par le fait que les copies d'une formule représentent le nombre maximal de fois où cette formule pourra être

utilisée dans le même processus de déduction. D'autre part, chaque exemplaire de la même ressource peut être utilisé au plus une fois dans la fermeture du tableau. Ces deux contraintes permettent que chaque exemplaire de la même formule soit consommée au plus une fois au cours d'un même processus de déduction.

En résumé, pour construire le tableau, nous commençons par étiqueter la racine par les formules du multi-ensemble de départ. Nous appliquons ensuite les règles de décomposition sur ces formules pour étiqueter les nœuds enfants de la racine, et réitérons cette opération sur les nœuds et formules au fur et à mesure de leur apparition.

La première catégorie de règles de décomposition est constituée des *R-règles* (*Rewriting rules* en anglais), qui sont les suivantes :

DÉFINITION 1. — (*R-règles*).

$$\frac{\neg(\alpha \vee \beta)}{\neg\alpha, \neg\beta} [\neg\vee] \quad \frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha, \beta} [\wedge] \quad \frac{\neg(\alpha \rightarrow \beta)}{\alpha, \neg\beta} [\neg\rightarrow] \quad \frac{\neg\neg\alpha}{\alpha} [\neg\neg]$$

Une R-règle n'introduit pas de nouvelle branche dans l'arbre. Lorsque la règle est appliquée, ses conséquents sont ajoutés sur la même branche. Par convention, les deux conséquents des R-règles  $[\neg\vee]$ ,  $[\wedge]$  et  $[\neg\rightarrow]$  étiquettent deux nœuds enfants successifs.

La deuxième catégorie de règles de décomposition, celles qui introduisent de nouvelles branches, est constituée des *I-règles* (*Introducing rules* en anglais).

DÉFINITION 2. — (*I-règles*).

$$\frac{\alpha \vee \beta}{\alpha \mid \beta} [\vee] \quad \frac{\neg(\alpha \wedge \beta)}{\neg\alpha \mid \neg\beta} [\neg\wedge] \quad \frac{\alpha \rightarrow \beta}{\neg\alpha \mid \beta} [\rightarrow]$$

$$\frac{\alpha \leftrightarrow \beta}{\alpha \wedge \beta \mid \neg\alpha \wedge \neg\beta} [\leftrightarrow] \quad \frac{\neg(\alpha \leftrightarrow \beta)}{\alpha \wedge \neg\beta \mid \neg\alpha \wedge \beta} [\neg\leftrightarrow]$$

Le symbole  $\mid$  dénote l'introduction d'une nouvelle branche dans le tableau.

Pour montrer qu'une formule  $\alpha$  s'ensuit des hypothèses  $\Delta$ , nous montrons que le multi-ensemble de formules  $\Delta \uplus \{\neg\alpha\}$  est incohérent. Pour cela, nous cherchons à obtenir un tableau fermé dont la racine est étiquetée par les formules de  $\Delta \uplus \{\neg\alpha\}$ .

Comme chaque branche de l'arbre représente une alternative possible et que les formules étiquetant les nœuds d'une branche sont interprétées conjonctivement, les R-règles doivent être appliquées autant de fois que possible avant les I-règles (sinon l'application d'une R-règle pourrait causer la duplication injustifiée d'une formule dans différents sous-arbres).

Une règle s'applique au niveau d'un nœud. Pour l'appliquer, il faut qu'existe, dans la sous-branche allant de ce nœud jusqu'à la racine, un exemplaire, pas encore décomposé, d'une formule instanciant l'antécédent de la règle. Cet exemplaire ne pourra plus être à nouveau l'objet d'une décomposition. Par contre, les sous-formules de cet exemplaire (qui correspondent donc aux conséquents de la règle) sont elles-mêmes candidates pour d'éventuelles décompositions.

Après qu'aucune règle de décomposition ne puisse plus être appliquée, la seconde partie de la procédure de preuve consiste à vérifier si le tableau est fermé ou non. Il s'agit de considérer successivement toutes les branches du tableau. Chaque fois qu'une formule atomique et sa négation étiquettent chacune un nœud dans la même branche, elles sont cochées comme « fermant » et cela ferme cette branche. Naturellement, un littéral déjà coché comme fermant ne peut pas contribuer à la fermeture d'une autre branche (intuitivement, une même copie d'un littéral peut être utilisée au plus une fois dans tout le processus de fermeture). Pour finir, un tableau est fermé si et seulement si toutes ses branches sont fermées comme indiqué ci-dessus ; sinon il est ouvert.

En pratique, la vérification déterminant si le tableau est fermé s'effectue durant la construction de l'arbre de sorte que qu'une branche en cours de développement puisse le cas échéant être fermée, ce qui évite de la développer davantage.

D'une manière formelle, nous définissons un tableau et sa fermeture comme suit :

**DÉFINITION 3 (Tableau).** — *Soit  $\Phi$  un multi-ensemble fini de formules. Un tableau pour  $\Phi$  est un arbre fini  $T$  dont la racine se compose des éléments de  $\Phi$  et dont les autres nœuds sont des formules,  $T$  étant construit par application unique des R-règles et des I-règles. Fermer une branche  $b$  de  $T$  consiste à cocher deux nœuds  $n_1$  et  $n_2$  de  $b$  qui ne sont pas encore cochés et tels que  $n_1$  et  $n_2$  sont des littéraux complémentaires.  $T$  est dit fermé si et seulement si il existe une énumération de ses branches qui permet de toutes les fermer l'une après l'autre.*

Ici, « application unique des R-règles et des I-règles » signifie qu'une règle ne s'applique qu'une seule fois à un même exemplaire d'une formule : e.g. la R-règle  $[\wedge]$  ne permet pas de produire quatre copies de  $a$  à partir d'un unique exemplaire de  $a \wedge a$ .

Bien sûr, après que la première branche du tableau ait été fermée, on ferme la deuxième tout en ayant conservé les coches qui ont permis de fermer la première, et ainsi de suite (de par la notion de ressources, il est en général incorrect de fermer une branche si on a auparavant effacé les coches qui ont servi à fermer les précédentes !).

Une preuve par tableau d'une formule  $\alpha$  sous le multi-ensemble d'hypothèses  $\Delta$  est un tableau fermé dont la racine est  $\Delta \uplus \{\neg\alpha\}$ . Formellement :

**DÉFINITION 4 ( $\mathcal{CL}$ -conséquence).** — *Soient  $\Delta$  un multi-ensemble de formules de  $\mathcal{L}_{CL}$  et  $\alpha$  une formule de  $\mathcal{L}_{CL}$ .  $\Delta \vdash_{\mathcal{CL}} \alpha$  s'il existe un tableau fermé pour  $\Delta \uplus \{\neg\alpha\}$ .*

Dans toute la suite, pour les inférences à prémisse unique, c'est-à-dire  $\{\alpha\} \vdash_{\mathcal{CL}} \beta$ , les accolades seront omises pour une meilleure lisibilité :  $\alpha \vdash_{\mathcal{CL}} \beta$ .

Par ailleurs, l'expression  $\alpha \equiv_{\mathcal{CL}} \beta$  est une abréviation pour  $\alpha \vdash_{\mathcal{CL}} \beta$  et  $\beta \vdash_{\mathcal{CL}} \alpha$ .

**NOTATION 5.** — *Dans la représentation graphique des tableaux, le symbole  $\times$  indique les littéraux cochés, c'est-à-dire ceux qui ont servi au processus de fermeture.*

**EXEMPLE 6.** — Prenons  $\Delta = \{\neg(a \rightarrow \neg a), \neg(a \wedge (\neg b \vee \neg c))\}$  et  $\alpha = a \wedge b \wedge c$ . Nous voulons montrer que  $\alpha$  est une  $\mathcal{CL}$ -conséquence de  $\Delta$ . Par réfutation, il s'agit de montrer que  $\Delta \uplus \{\neg\alpha\}$  est incohérent. La figure 1 représente un tableau complet

(toutes les formules de  $\Delta$  et leurs sous-formules ont été décomposées en littéraux) pour le multi-ensemble  $\Delta \uplus \{\neg\alpha\}$ . Puisque toutes les branches de l'arbre sont fermées, le multi-ensemble  $\Delta \uplus \{\neg\alpha\}$  est incohérent, et, par conséquent,  $\Delta \vdash_{\mathcal{CL}} \alpha$ .  $\square$

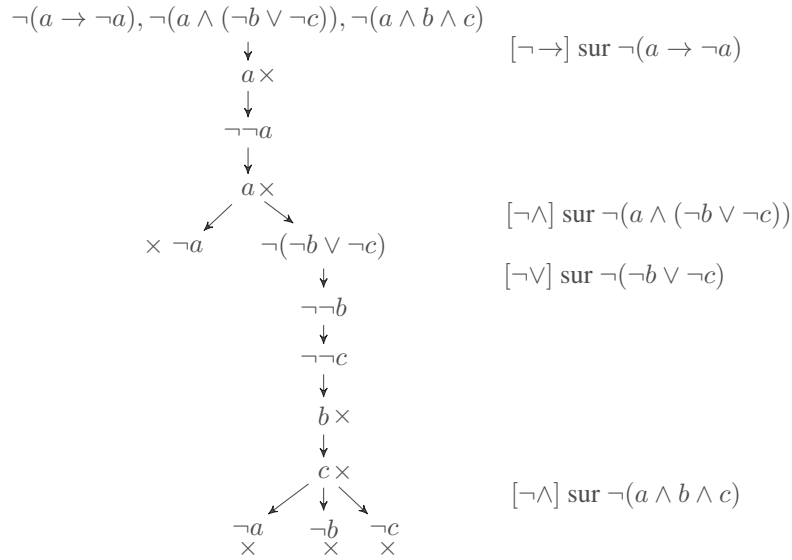


Figure 1. Un tableau (fermé) pour  $\Delta \uplus \{\neg(a \wedge b \wedge c)\}$

EXEMPLE 7. — Soit  $\Delta = \{a \vee a, a \rightarrow b, a \rightarrow c\}$  et  $\alpha = b \wedge c$ . Nous cherchons une preuve, par tableau, de  $\alpha$  à partir de  $\Delta$ . La figure 2 représente un tableau ouvert de  $\Delta \uplus \{\neg\alpha\}$  car il y a deux branches non fermées. En fait, il n'existe aucun tableau fermé de  $\Delta \uplus \{\neg\alpha\}$  (la preuve est omise car marginale pour cet article).  $\square$

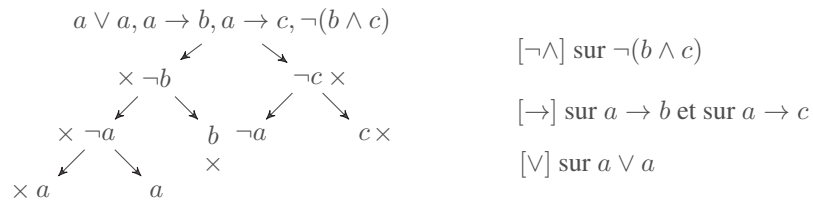


Figure 2. Un tableau (ouvert) pour  $\Delta \uplus \{\neg(b \wedge c)\}$

La relation de conséquence consommatrice  $\vdash_{\mathcal{CL}}$  vérifie les propriétés suivantes.

PROPOSITION 8. —  $\alpha \vdash_{\mathcal{CL}} \alpha$  [Réflexivité]  
 Si  $\Delta \vdash_{\mathcal{CL}} \alpha$  alors  $\Delta \uplus \{\beta\} \vdash_{\mathcal{CL}} \alpha$  [Monotonie]

PREUVE 9. — Il est clair qu'il existe un tableau fermé  $T$  pour le multi-ensemble  $\{\alpha, \neg\alpha\}$  tel que  $\{\alpha, \neg\alpha\}$  est la racine de  $T$ . Par conséquent,  $\alpha \vdash_{\mathcal{CL}} \alpha$ .

Par définition,  $\Delta \vdash_{\mathcal{CL}} \alpha$  implique qu'il existe un tableau fermé  $T$  de  $\Delta \uplus \{\neg\alpha\}$ . On modifie  $T$  en ajoutant  $\beta$  à sa racine. Si  $\beta$  est une instance d'un antécédent d'une R-règle, appliquer cette règle ne crée pas de nouveau branchement et donc l'arbre ainsi étendu reste fermé. Il suffit de répéter l'opération récursivement sur les sous-formules de  $\beta$  tant qu'elles permettent d'appliquer une R-règle. L'arbre final est tel qu'aucune I-règle n'est appliquée alors qu'une R-règle le pourrait, c'est donc un tableau selon la définition 3 et il est fermé puisqu'aucun nouveau branchement n'a été introduit. D'où  $\Delta \uplus \{\beta\} \vdash_{\mathcal{CL}} \alpha$ . ■

#### 4. Système d'argumentation basé sur la logique consommatrice $\mathcal{CL}$

Nous présentons dans cette section un système formel d'argumentation basé sur la logique consommatrice  $\mathcal{CL}$ .

Lorsqu'un multi-ensemble d'hypothèses est incohérent, le cadre argumentatif fournit des repères pour discriminer entre toutes les déductions. À cette fin, un système argumentatif fait appel aux concepts d'arguments, de contre-arguments, d'attaque et de conflits entre arguments. Il permet également la représentation de conflits entre arguments, notamment à travers ce qu'on appelle les arbres argumentatifs. Nous nous plaçons donc dans le contexte d'une base de connaissances  $\Delta$ , éventuellement incohérente, qui contient des formules de  $\mathcal{L}_{\mathcal{CL}}$ . Par souci de simplification, et sans perte de généralité, nous supposons que toute formule de  $\Delta$  est cohérente.

##### 4.1. Arguments

Dans le contexte de ressources consommables, un argument élicite un multi-ensemble de formules dont la consommation permet de produire la conclusion de l'argument.

DÉFINITION 10 (Argument). — *Un argument est un couple  $A = \langle \Phi, \alpha \rangle$  tel que :*

1.  $\Phi \subseteq \Delta$ ,
2.  $\Phi \not\vdash_{\mathcal{CL}} \perp$ ,
3.  $\Phi \vdash_{\mathcal{CL}} \alpha$ ,
4.  $\Phi$  est minimal, c-à-d. il n'existe pas  $\Phi' \subset \Phi$  tel que  $\Phi' \vdash_{\mathcal{CL}} \alpha$ .

On dit que  $\langle \Phi, \alpha \rangle$  est un argument en faveur de  $\alpha$ .  $\Phi$  est le *support* de l'argument et  $\alpha$  sa *conclusion*. Notation :  $Supp(A) = \Phi$  et  $Conc(A) = \alpha$ .

EXEMPLE 11. — Considérons la base de connaissances

$$\Delta = \left\{ \begin{array}{l} a \wedge a, \quad \neg a \vee c, \quad a \rightarrow \neg b, \\ a, \quad \neg a \vee c, \quad b \vee \neg a \vee \neg c \end{array} \right\}.$$

Parmi les arguments qui peuvent être générés à partir de  $\Delta$ , nous pouvons citer :

$$\begin{aligned} & \langle \{a \wedge a, a\}, a \wedge a \wedge a \rangle \\ & \langle \{a \wedge a, a \rightarrow \neg b\}, a \wedge \neg b \rangle \\ & \langle \{a, a \wedge a, \neg a \vee c, \neg a \vee c, b \vee \neg a \vee \neg c\}, b \wedge c \rangle \\ & \langle \{a \wedge a, \neg a \vee c, b \vee \neg a \vee \neg c, a \rightarrow \neg b\}, \neg a \rangle \end{aligned}$$

Le dernier n'est pas un argument classique, son support n'a pas de modèle booléen.  $\square$

Commençons par caractériser l'équivalence entre arguments d'une façon intuitive : deux arguments qui partagent le même support et qui ont des conclusions équivalentes selon  $\vdash_{\mathcal{CL}}$  peuvent être vus comme équivalents. D'où la définition formelle suivante :

DÉFINITION 12 (Arguments quasi-identiques). — Deux arguments  $\langle \Phi, \alpha \rangle$  and  $\langle \Psi, \beta \rangle$  sont quasi-identiques si et seulement si  $\Phi = \Psi$  et  $\alpha \equiv_{\mathcal{CL}} \beta$ .

Pour un argument, il y a une infinité d'arguments qui lui sont quasi-identiques :

PROPOSITION 13. — Soit  $\langle \Phi, \alpha \rangle$  un argument. Il existe un nombre infini d'arguments de la forme  $\langle \Psi, \beta \rangle$  tel que  $\langle \Phi, \alpha \rangle$  et  $\langle \Psi, \beta \rangle$  sont quasi-identiques.

PREUVE 14. — Puisque  $\langle \Phi, \alpha \rangle$  un argument,  $\Phi \vdash_{\mathcal{CL}} \alpha$ . De plus,  $\alpha \equiv_{\mathcal{CL}} \beta$  pour tout  $\beta$  de la forme  $\alpha \wedge \bigwedge_1^n \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ . Mais  $\Phi$  est minimal pour l'inférence de  $\alpha$ , de sorte que  $\Phi$  est minimal pour l'inférence de  $\beta$ . Par conséquent,  $\langle \Phi, \beta \rangle$  est un argument. D'après la définition 12,  $\langle \Phi, \alpha \rangle$  et  $\langle \Phi, \beta \rangle$  sont quasi-identiques.  $\blacksquare$

Pour les arguments dont la conclusion est une formule conjonctive, il est possible de définir une notion de sous-arguments.

DÉFINITION 15 (Sous-argument). — Soit  $\alpha = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n$  (modulo l'associativité et la commutativité de  $\wedge$ ).  $\langle \Psi, \beta \rangle$  est un sous-argument de  $\langle \Phi, \alpha \rangle$  si et seulement si  $\langle \Psi, \beta \rangle$  est un argument tel que  $\Psi \subset \Phi$  et  $\beta = \bigwedge_{i=1}^k \alpha_i$  (avec  $k < n$ ).

EXEMPLE 16. — L'argument  $\langle \{\neg c, a \vee \neg b, b \vee c\}, a \rangle$  est un sous-argument de  $\langle \{\neg c, \neg c, a \vee \neg b, b \vee c, b \vee c\}, a \wedge b \rangle$ . Les prémisses  $\{\neg c, b \vee c, a\}$  supportent la conjonction  $a \wedge b$  et les formules  $\{\neg c, a \vee \neg b, b \vee c\}$  supportent la conclusion  $a$ . Autre exemple, l'argument  $\langle \{a \vee b, c \vee d, \neg b, \neg d\}, a \wedge c \rangle$  est un sous-argument de  $\langle \{a \vee b, \neg d, c \vee d, \neg b, \neg b\}, a \wedge \neg b \wedge c \rangle$ . Et à titre de contre-exemple pour finir,  $\langle \{a \wedge b\}, b \vee \neg c \rangle$  ne possède aucun sous-argument.  $\square$

PROPOSITION 17. — Tout argument  $\langle \Phi, \alpha \rangle$  a un nombre fini de sous-arguments.

PREUVE 18. — Soit  $\langle \Phi, \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rangle$  un argument. Ses sous-arguments sont tous de la forme  $\langle \Psi, \bigwedge_{i=1}^k \alpha_i \rangle$  où  $\Psi \subset \Phi$  et  $k < n$ . D'une part, puisque  $\Phi$  est un multi-ensemble fini, il n'y a qu'un nombre fini de multi-ensembles  $\Psi \subset \Phi$ . D'autre part, il n'y a qu'un nombre fini de parties propres de  $\{1, \dots, n\}$ , donc il n'y a qu'un nombre

fini de conjonctions  $\bigwedge_{i=1}^k \alpha_i$ . D'où il n'y a qu'un nombre fini de couples  $\langle \Psi, \bigwedge_{i=1}^k \alpha_i \rangle$  tels que  $\Psi \subset \Phi$  et  $k < n$ . ■

NOTATION 19. — La cardinalité d'un multi-ensemble  $\Delta$ , notée  $|\Delta|$ , est le nombre total de copies de formules présentes dans  $\Delta$ .

PROPOSITION 20. — Soit  $\langle \Phi, \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rangle$  un argument tel que  $n > 1$  et  $|\Phi| > 1$ .  $\langle \Phi, \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rangle$  possède au moins  $m$  sous-arguments où  $m$  est la taille du plus grand sous-ensemble de  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ .

PREUVE 21. — Soit  $\langle \Phi, \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rangle$  un argument tel que  $n > 1$  et  $|\Phi| > 1$ . Puisque  $\Phi \vdash_{\mathcal{CL}} \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n$  alors pour tout  $\beta$  de la forme  $\bigwedge_{i=1}^k \alpha_i$ , avec  $k < n$ , il existe un sous-multi-ensemble minimal  $\Psi \subset \Phi$  tel que  $\Psi \vdash_{\mathcal{CL}} \beta$ . Mais,  $\Phi \not\vdash_{\mathcal{CL}} \perp$  d'où  $\Psi \not\vdash_{\mathcal{CL}} \perp$ . Ainsi,  $\langle \Psi, \beta \rangle$  est un sous-argument de  $\langle \Phi, \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rangle$ . Or, si  $m$  est la taille du plus grand sous-ensemble de  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ , alors il y a au moins  $m$  formules  $\beta$  de la forme  $\bigwedge_{i=1}^k \alpha_i$ . D'où au moins  $m$  sous-arguments  $\langle \Psi_1, \beta_1 \rangle, \dots, \langle \Psi_m, \beta_m \rangle$  pour  $\langle \Phi, \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rangle$ . ■

EXEMPLE 22. — L'argument  $\langle \{a, \neg a \vee b, a, c\}, a \wedge b \wedge c \rangle$  possède six sous-arguments qui sont :  $\langle \{a\}, a \rangle$ ,  $\langle \{a, \neg a \vee b\}, b \rangle$ ,  $\langle \{c\}, c \rangle$ ,  $\langle \{a, c\}, a \wedge c \rangle$ ,  $\langle \{a, \neg a \vee b, a\}, a \wedge b \rangle$ , et  $\langle \{a, \neg a \vee b, c\}, b \wedge c \rangle$ . Mais  $\langle \{a, a\}, a \wedge a \rangle$  a un seul sous-argument :  $\langle \{a\}, a \rangle$ . □

Pour un argument ayant un support comportant plus d'une formule et ayant une conclusion conjonctive, il est possible de définir une famille de sous-arguments qui justifient chacun un membre primitif de la conclusion (primitif au sens où ce membre n'est pas lui-même conjonctif). De cette idée naît la notion de *sous-argument minimal* :

DÉFINITION 23 (Sous-argument minimal). —  $\langle \Psi, \beta \rangle$  est un sous-argument minimal de  $\langle \Phi, \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rangle$  si  $\langle \Psi, \beta \rangle$  est un sous-argument de  $\langle \Phi, \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rangle$  et s'il existe  $i$  tel que  $\beta = \alpha_i$  où le connecteur principal de  $\alpha_i$  n'est pas la conjonction.

EXEMPLE 24. — L'argument  $\langle \{\neg b, \neg(\neg a \wedge \neg b)\}, a \rangle$  est un sous-argument minimal de  $\langle \{\neg(\neg a \wedge \neg b), \neg d, c \vee d, \neg b, \neg b\}, a \wedge \neg b \wedge c \rangle$ . À titre de contre-exemple, parmi les sous-arguments de  $\langle \{\neg(\neg a \wedge \neg b), \neg d, c \vee d, \neg b, \neg b\}, a \wedge \neg b \wedge c \rangle$ , on peut relever  $\langle \{\neg(\neg a \wedge \neg b), c \vee d, \neg b, \neg d\}, a \wedge c \rangle$  qui n'est pas minimal : il a des sous-arguments, par exemple,  $\langle \{\neg(\neg a \wedge \neg b), \neg b\}, a \rangle$ . □

L'illustration qui précède reflète une conséquence triviale de la définition 23 :

LEMME 25. — Un sous-argument minimal n'a aucun sous-argument.

PREUVE 26. — Si  $\langle \Phi, \alpha \rangle$  est un sous-argument minimal alors  $\alpha$  est une formule dont le connecteur principal n'est pas la conjonction. Donc,  $\alpha$  ne peut pas s'écrire sous la forme  $\bigwedge_{i=1}^k \alpha_i$  avec  $k > 1$ . Ainsi,  $\langle \Phi, \alpha \rangle$  ne peut pas avoir de sous-arguments. ■

PROPOSITION 27. — Soit  $\langle \Phi, \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rangle$  un argument tel que  $n > 1$  et  $|\Phi| > 1$  où pour  $1 \leq i \leq n$ , le connecteur principal de  $\alpha_i$  n'est pas la conjonction. Alors,  $\langle \Phi, \alpha \rangle$  a au moins  $m$  sous-arguments minimaux où  $m$  est la taille du plus grand sous-ensemble de  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ .

PREUVE 28. — Puisque  $\langle \Phi, \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rangle$  est un argument,  $\Phi \vdash_{\mathcal{CL}} \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n$  et  $\Phi \not\vdash_{\mathcal{CL}} \perp$ . Donc, pour tout  $\alpha_i$  il existe un sous-multi-ensemble  $\Psi_i \subset \Phi$  tel que  $\Psi_i$  est minimal pour l'inférence de  $\alpha_i$  et  $\Psi_i \not\vdash_{\mathcal{CL}} \perp$ . De ce fait,  $\langle \Psi_i, \alpha_i \rangle$  est un sous-argument de  $\langle \Phi, \alpha \rangle$ . C'est un sous-argument minimal car, par hypothèse, le connecteur principal de  $\alpha_i$  n'est pas la conjonction. Donc, pour tout  $\alpha_i$ , il existe un sous-argument minimal  $\langle \Psi_i, \alpha_i \rangle$  de  $\langle \Phi, \alpha \rangle$ . D'où, si  $m$  est la taille du plus grand sous-ensemble de  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  alors  $\langle \Phi, \alpha \rangle$  possède au moins  $m$  sous-arguments minimaux. ■

EXEMPLE 29. — L'argument  $\langle \{a \vee b, \neg d, c \vee d, \neg b, \neg b\}, a \wedge \neg b \wedge c \rangle$  de l'exemple 16 a trois sous-arguments minimaux :  $\langle \{a \vee b, \neg b\}, a \rangle$ ,  $\langle \{\neg b\}, \neg b \rangle$  et  $\langle \{\neg d, c \vee d\}, c \rangle$ . L'argument  $\langle \{a, a, b\}, a \wedge a \wedge b \rangle$  a deux sous-arguments minimaux  $\langle \{a\}, a \rangle$  et  $\langle \{b\}, b \rangle$ . Enfin,  $\langle \{a\}, a \rangle$ ,  $\langle \{a \wedge b\}, a \rangle$  et  $\langle \{a \wedge b\}, b \rangle$  sont les trois sous-arguments minimaux de  $\langle \{a, a \wedge b\}, a \wedge b \wedge a \rangle$ . □

Les arguments ne sont pas nécessairement indépendants au sens où un argument peut en subsumer un autre. Cette idée donne lieu à la notion de *conservativité*.

DÉFINITION 30 (Relation de conservativité). — *Un argument  $\langle \Phi, \alpha \rangle$  est plus conservatif qu'un argument  $\langle \Psi, \beta \rangle$  si et seulement si  $\Phi \subseteq \Psi$  et  $\beta \vdash_{\mathcal{CL}} \alpha$ .*

EXEMPLE 31. —  $\langle \{a, \neg a \vee b\}, b \rangle$  est plus conservatif que  $\langle \{a, a, \neg a \vee b\}, a \wedge b \rangle$ .  $\langle \{a, \neg a \vee b\}, b \vee \neg d \rangle$  est plus conservatif que  $\langle \{a, a, \neg a \vee b, \neg a \vee b, \neg b \vee c\}, b \wedge c \rangle$ . □

La proposition 32 ci-dessous exprime qu'un argument est moins conservatif que ses sous-arguments. La réciproque n'est pas vraie en toute généralité.

PROPOSITION 32. — *Si  $\langle \Psi, \beta \rangle$  est un sous-argument de  $\langle \Phi, \alpha \rangle$ , alors  $\langle \Psi, \beta \rangle$  est plus conservatif que  $\langle \Phi, \alpha \rangle$ .*

PREUVE 33. — Soit  $\langle \Psi, \beta \rangle$  un sous-argument de  $\langle \Phi, \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rangle$ . Par définition d'un sous-argument,  $\Psi \subset \Phi$  et  $\beta = \bigwedge_{i=1}^k \alpha_i$  avec  $k < n$ . Par ailleurs, il est clair que  $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \vdash_{\mathcal{CL}} \bigwedge_{i=1}^k \alpha_i$ , i.e.,  $\alpha \vdash_{\mathcal{CL}} \beta$ . Puisque  $\Psi \subset \Phi$  et  $\alpha \vdash_{\mathcal{CL}} \beta$  alors  $\langle \Psi, \beta \rangle$  est plus conservatif que  $\langle \Phi, \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rangle$ . ■

Pour montrer que la réciproque n'est pas toujours vraie, reprenons l'exemple 31. L'argument  $\langle \{a, \neg a \vee b\}, b \rangle$  est un sous-argument à la fois de  $\langle \{a, a, \neg a \vee b\}, a \wedge b \rangle$  et  $\langle \{a, a, \neg a \vee b, \neg a \vee b, \neg b \vee c\}, b \wedge c \rangle$ .  $\langle \{a, \neg a \vee b\}, b \rangle$  est donc plus conservatif que les deux arguments  $\langle \{a, a, \neg a \vee b\}, a \wedge b \rangle$  et  $\langle \{a, a, \neg a \vee b, \neg a \vee b, \neg b \vee c\}, b \wedge c \rangle$ . Cependant,  $\langle \{a, \neg a \vee b\}, b \vee \neg d \rangle$  n'est pas un sous-argument de  $\langle \{a, a, \neg a \vee b, \neg a \vee b, \neg b \vee c\}, b \wedge c \rangle$ .

Pour deux arguments, être quasi-identiques équivaut à être chacun plus conservatif que l'autre :

PROPOSITION 34. — *Deux arguments  $\langle \Phi, \alpha \rangle$  et  $\langle \Psi, \beta \rangle$  sont quasi-identiques si et seulement si chacun d'eux est plus conservatif que l'autre.*

PREUVE 35. — Si  $\langle \Phi, \alpha \rangle$  et  $\langle \Psi, \beta \rangle$  sont quasi-identiques alors  $\Phi \subseteq \Psi$ ,  $\Psi \subseteq \Phi$ ,  $\alpha \vdash_{\mathcal{CL}} \beta$  et  $\beta \vdash_{\mathcal{CL}} \alpha$ . Pour la réciproque, considérons deux arguments  $\langle \Phi, \alpha \rangle$  et  $\langle \Psi, \beta \rangle$  tel que chacun est plus conservatif que l'autre. D'une part,  $\Phi \subseteq \Psi$  et  $\alpha \vdash_{\mathcal{CL}} \beta$ . D'autre part,  $\Psi \subseteq \Phi$  et  $\beta \vdash_{\mathcal{CL}} \alpha$ . En combinant tout cela,  $\Phi = \Psi$  et  $\alpha \equiv_{\mathcal{CL}} \beta$ . ■



## 4.2. Interactions entre arguments

Un des éléments de base d'un système d'argumentation est la contrariété. Elle a pour objet de représenter les conflits pouvant exister entre les arguments. Les travaux en argumentation déductive considèrent des relations de conflit comme le *rebuttal*, le *defeater*, l'*undercut* (Besnard, Hunter, 2008) et le *challenge* (Besnard *et al.*, 2013), etc. Notre système d'argumentation est muni de la relation de conflit qui consiste à nier un élément du support de l'argument ciblé. En général, cela ne revient pas à nier directement la conclusion de l'argument.

Comme les formules peuvent être conflictuelles, les arguments interagissent les uns avec les autres. C'est pourquoi nous définissons une notion de contrariété générale qui, intuitivement, indique comment un argument peut être attaqué.

**DÉFINITION 36** (Argument contrarié). — *Un argument  $\langle \Phi, \alpha \rangle$  est contrarié si et seulement si  $\exists \beta \in \Phi$  tel qu'il existe une partie cohérente  $\Psi$  de  $\Delta$  vérifiant  $\Psi \vdash_{\mathcal{CL}} \neg\beta$ .  $\langle \Phi, \alpha \rangle$  est totalement contrarié lorsque la même condition est vraie pour tout  $\beta \in \Phi$ .*

**EXEMPLE 37.** — Soit  $\Delta = \{a, a, \neg b, a \rightarrow b, \neg a \vee c, c \rightarrow d, \neg c \vee \neg a\}$ . L'argument  $\langle \{a, a, \neg a \vee c, a \rightarrow b, c \rightarrow d\}, b \wedge d \rangle$  est contrarié car  $\{a \rightarrow b, \neg b\} \vdash_{\mathcal{CL}} \neg a$ . Il n'est pas totalement contrarié car pour tout  $\Psi$  de  $\Delta$ , si  $\Psi \not\vdash_{\mathcal{CL}} \perp$  alors  $\Psi \not\vdash_{\mathcal{CL}} \neg(c \rightarrow d)$ .  $\{a \rightarrow b, \neg b\} \vdash_{\mathcal{CL}} \neg a$ ,  $\{a, \neg b\} \vdash_{\mathcal{CL}} \neg(a \rightarrow b)$  et  $\{a, \neg c \vee \neg a, a\} \vdash_{\mathcal{CL}} \neg(\neg a \vee c)$  montrent que l'argument  $\langle \{a, a, a \rightarrow b, \neg a \vee c\}, b \wedge c \rangle$  est totalement contrarié.  $\square$

Vu qu'un argument est « composé » d'un ensemble de sous-arguments, la propriété suivante découle naturellement.

**PROPOSITION 38.** — *Un argument  $\langle \Phi, \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rangle$  est totalement contrarié si et seulement si chacun de ses sous-arguments est totalement contrarié.*

**PREUVE 39.** —  $\longrightarrow$  Soit  $\langle \Phi, \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rangle$  un argument totalement contrarié. Par l'absurde, supposons qu'il existe un sous-argument  $\langle \Psi, \beta \rangle$  de  $\langle \Phi, \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rangle$  tel que  $\langle \Psi, \beta \rangle$  n'est pas totalement contrarié. Donc, il existe  $\gamma \in \Psi$  tel que pour tout  $\Theta \subseteq \Delta$ , si  $\Theta \not\vdash_{\mathcal{CL}} \perp$  alors  $\Theta \not\vdash_{\mathcal{CL}} \neg\gamma$ . Or,  $\Psi \subseteq \Phi$  donc  $\gamma \in \Phi$ . Ce qui implique qu'il existe  $\gamma \in \Phi$  tel que pour tout  $\Theta \subseteq \Delta$ , si  $\Theta \not\vdash_{\mathcal{CL}} \perp$  alors  $\Theta \not\vdash_{\mathcal{CL}} \neg\gamma$ . D'où,  $\langle \Phi, \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rangle$  n'est pas totalement contrarié, en contradiction avec l'hypothèse.  $\longleftarrow$  Soient  $\langle \Psi_1, \beta_1 \rangle, \dots, \langle \Psi_m, \beta_m \rangle$  tous les sous-arguments de  $\langle \Phi, \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rangle$ . Donc,  $\Phi \subseteq \Psi_1 \cup \dots \cup \Psi_m$ . Pour tout  $1 \leq i \leq m$ ,  $\langle \Psi_i, \beta_i \rangle$  est totalement contrarié, donc pour tout  $\gamma \in \Psi_i$  il existe  $\Theta \subseteq \Delta$  tel que  $\Theta \not\vdash_{\mathcal{CL}} \perp$  et  $\Theta \vdash_{\mathcal{CL}} \neg\gamma$ . Au vu de  $\Phi \subseteq \Psi_1 \cup \dots \cup \Psi_m$ , pour tout  $\delta \in \Phi$ , il existe  $i \in \{1, \dots, m\}$  tel que  $\delta \in \Psi_i$ . D'où, pour tout  $\delta \in \Phi$ , il existe  $\Theta \subseteq \Delta$  tel que  $\Theta \not\vdash_{\mathcal{CL}} \perp$  et  $\Theta \vdash_{\mathcal{CL}} \neg\delta$ . Ainsi,  $\langle \Phi, \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rangle$  est totalement contrarié.  $\blacksquare$

À la lumière du concept de contrariété, nous pouvons définir une relation d'attaque entre arguments de la manière suivante :

**DÉFINITION 40** (Undercut). — *Un undercut d'un argument  $\langle \Phi, \alpha \rangle$  est un argument  $\langle \Psi, \neg(\beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_n) \rangle$  tel que  $\{\beta_1, \dots, \beta_n\} \subseteq \Phi$ .*

EXEMPLE 41. — Reprenons l'exemple 37. Les arguments  $\langle \{a \rightarrow b, \neg b\}, \neg(a \wedge a) \rangle$ ,  $\langle \{a \rightarrow b, \neg b\}, \neg a \rangle$  ainsi que  $\langle \{\neg b, a\}, \neg(a \rightarrow b) \rangle$  et  $\langle \{a, a, \neg(a \wedge c)\}, \neg(\neg a \vee c) \rangle$  sont tous des undercuts de  $\langle \{a, a, a \rightarrow b, \neg a \vee c\}, b \wedge c \rangle$ .  $\square$

La propriété suivante est directement issue des deux définitions 36 et 40.

PROPOSITION 42. — *Si un argument  $\langle \Phi, \alpha \rangle$  est contrarié, alors il a un undercut.*

PREUVE 43. — Par définition, si  $\langle \Phi, \alpha \rangle$  est contrarié alors il existe une partie cohérente  $\Psi$  de  $\Delta$  tel que  $\Psi \vdash_{\mathcal{CL}} \neg\beta$  pour au moins un  $\beta \in \Phi$ . Puisque  $\Psi \not\vdash_{\mathcal{CL}} \perp$  et  $\Psi \vdash_{\mathcal{CL}} \neg\beta$  alors il existe  $\Psi' \subset \Psi$  tel que  $\Psi'$  est minimal pour l'inférence de  $\neg\beta$  et par conséquent  $\langle \Psi', \neg\beta \rangle$  est un undercut de  $\langle \Phi, \alpha \rangle$ .  $\blacksquare$

Selon la proposition 44, un argument hérite des undercuts de ses sous-arguments :

PROPOSITION 44. — *Soit  $\langle \Psi, \beta \rangle$  un sous-argument de  $\langle \Phi, \alpha \rangle$ . Si  $\langle \Theta, \gamma \rangle$  est un undercut de  $\langle \Psi, \beta \rangle$ , alors  $\langle \Theta, \gamma \rangle$  est aussi un undercut de  $\langle \Phi, \alpha \rangle$ .*

PREUVE 45. — Si  $\langle \Theta, \gamma \rangle$  est un undercut de  $\langle \Psi, \beta \rangle$  alors il existe  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} \subseteq \Psi$  tels que  $\gamma = \neg(\gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_n)$ . Puisque  $\langle \Psi, \beta \rangle$  est un sous-argument de  $\langle \Phi, \alpha \rangle$  alors  $\Psi \subset \Phi$  et donc  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} \subseteq \Phi$ . Ainsi,  $\langle \Theta, \gamma \rangle$  est un undercut de  $\langle \Phi, \alpha \rangle$ .  $\blacksquare$

EXEMPLE 46. — Considérons la base

$$\Delta = \{ b, b, a \vee \neg b, \neg(b \wedge c), \neg a \vee c, d \wedge e \}.$$

L'argument  $\langle \{b, b, \neg a \vee c, \neg(b \wedge c)\}, \neg a \wedge b \rangle$  possède deux sous-arguments  $\langle \{b\}, b \rangle$  et  $\langle \{b, \neg a \vee c, \neg(b \wedge c)\}, \neg a \rangle$ . L'argument  $\langle \{b, a \vee \neg b, \neg a \vee c, \neg(b \wedge c)\}, \neg b \rangle$  est un undercut de  $\langle \{b\}, b \rangle$  et donc aussi de  $\langle \{b, b, \neg a \vee c, \neg(b \wedge c)\}, \neg a \wedge b \rangle$ . De même,  $\langle \{b, b, a \vee \neg b, \neg a \vee c\}, \neg \neg(b \wedge c) \rangle$  est un undercut de  $\langle \{b, \neg a \vee c, \neg(b \wedge c)\}, \neg a \rangle$  et c'est donc également un undercut de  $\langle \{b, b, \neg a \vee c, \neg(b \wedge c)\}, \neg a \wedge b \rangle$ .  $\square$

Les undercuts étant eux-mêmes des arguments, ils peuvent être comparés entre eux en termes de conservativité, ce qui permet de considérer les plus représentatifs.

DÉFINITION 47 (Undercut conservatif maximal). —  *$\langle \Psi, \beta \rangle$  est un undercut conservatif maximal de  $\langle \Phi, \alpha \rangle$  si et seulement si  $\langle \Psi, \beta \rangle$  est un undercut de  $\langle \Phi, \alpha \rangle$  tel que pour tout undercut  $\langle \Psi', \beta' \rangle$  de  $\langle \Phi, \alpha \rangle$ , si  $\Psi' \subseteq \Psi$  et  $\beta \vdash_{\mathcal{CL}} \beta'$  alors  $\langle \Psi, \beta \rangle$  et  $\langle \Psi', \beta' \rangle$  sont quasi-identiques.*

Autrement dit, un undercut conservatif maximal d'un argument  $\langle \Phi, \alpha \rangle$  est un undercut qui n'est pas strictement moins conservatif qu'un autre undercut de  $\langle \Phi, \alpha \rangle$ .

EXEMPLE 48. — Considérons l'argument  $\langle \{\neg a \vee b, a\}, b \rangle$  issu de la base

$$\Delta = \{ a, a, c, a \rightarrow b, \neg(a \wedge c), \neg b \vee c \}.$$

$\langle \{a, \neg b \vee c, \neg(a \wedge c)\}, \neg(a \wedge (a \rightarrow b)) \rangle$ ,  $\langle \{c, \neg(a \wedge c)\}, \neg(a \wedge (a \rightarrow b)) \rangle$ , ainsi que  $\langle \{a, \neg b \vee c, \neg(a \wedge c)\}, \neg((a \rightarrow b) \wedge a) \rangle$  et  $\langle \{c, \neg(a \wedge c)\}, \neg((a \rightarrow b) \wedge a) \rangle$  sont tous des undercuts conservatifs maximaux de  $\langle \{a, a \rightarrow b\}, b \rangle$ . Pour ce qui est de l'argument  $\langle \{a, a, \neg b \vee c, \neg(a \wedge c)\}, \neg(a \rightarrow b) \rangle$ , c'est bien un undercut de  $\langle \{a \rightarrow b, a\}, b \rangle$  mais ce n'en est pas un undercut conservatif maximal.  $\square$

PROPOSITION 49. — Si  $\langle \Psi, \neg(\beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_n) \rangle$  est un undercut conservatif maximal de l'argument  $\langle \Phi, \alpha \rangle$ , alors  $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  est le plus grand ensemble inclus dans  $\Phi$ .

PREUVE 50. — Soit  $\langle \Psi, \neg(\beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_n) \rangle$  un undercut conservatif maximal de  $\langle \Phi, \alpha \rangle$ . Raisonnant par l'absurde, supposons que  $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  n'est pas le plus grand ensemble inclus dans  $\Phi$ . C'est-à-dire qu'il existe  $\gamma \in \Phi$  tel que  $\gamma \notin \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ . Puisque  $\Psi \vdash_{\mathcal{CL}} \neg(\beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_n)$  alors  $\Psi \vdash_{\mathcal{CL}} \neg(\beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_n \wedge \gamma)$ . Il existe  $\Psi' \subseteq \Psi$  minimal pour l'inférence de  $\neg(\beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_n)$ . Puisque  $\Psi' \not\vdash_{\mathcal{CL}} \perp$  (car  $\Psi \not\vdash_{\mathcal{CL}} \perp$ ), il s'ensuit que  $\langle \Psi', \neg(\beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_n \wedge \gamma) \rangle$  est un argument. Donc,  $\langle \Psi', \neg(\beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_n \wedge \gamma) \rangle$  est un undercut de  $\langle \Phi, \alpha \rangle$ . Or,  $\Psi' \subseteq \Psi$  et  $\neg(\beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_n) \vdash_{\mathcal{CL}} \neg(\beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_n \wedge \gamma)$ . Puisque  $\langle \Psi, \neg(\beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_n) \rangle$  est un undercut conservatif maximal de  $\langle \Phi, \alpha \rangle$ , la définition 47 entraîne  $\neg(\beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_n) \equiv_{\mathcal{CL}} \neg(\beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_n \wedge \gamma)$ . De ce fait,  $\Phi$  n'est pas minimal pour l'inférence de  $\alpha$ , ce qui est en contradiction avec les hypothèses. ■

PROPOSITION 51. — Un undercut conservatif maximal  $\langle \Psi, \beta \rangle$  d'un argument  $\langle \Phi, \alpha \rangle$  n'a aucun sous-argument.

PREUVE 52. —  $\langle \Psi, \beta \rangle$  étant un undercut,  $\beta$  est de la forme  $\neg(\beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_n)$ . Or, un argument  $\langle \Psi, \beta \rangle$  n'a de sous-argument que si  $\beta$  est une formule conjonctive. ■

Il est évident qu'un argument  $\langle \Phi, \alpha \rangle$  peut avoir un très grand nombre d'undercuts conservatifs maximaux. Tout particulièrement, si un argument  $\langle \Psi, \neg(\beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_n) \rangle$  est un undercut conservatif maximal de  $\langle \Phi, \alpha \rangle$ , alors  $\langle \Psi, \neg(\beta_2 \wedge \dots \wedge \beta_n \wedge \beta_1) \rangle$ ,  $\langle \Psi, \neg(\beta_3 \wedge \dots \wedge \beta_n \wedge \beta_1 \wedge \beta_2) \rangle$ ,  $\dots$ ,  $\langle \Psi, \neg(\beta_n \wedge \beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_{n-1}) \rangle$  sont également des undercuts conservatifs maximaux de  $\langle \Phi, \alpha \rangle$ . Mais ces undercuts conservatifs maximaux sont quasi-identiques. Cela suggère un nouveau raffinement du concept d'undercut destiné à réduire encore la taille de l'ensemble des contre-arguments représentatifs.

Nous supposons, pour chaque argument, une énumération, dite *canonique*, de tous ses undercuts conservatifs maximaux. L'énumération canonique sert à sélectionner les undercuts conservatifs maximaux par ordre d'apparition en ne retenant pas un undercut conservatif maximal s'il est quasi-identique à l'un de ses prédécesseurs.

DÉFINITION 53 (Undercut pertinent). — Soit  $\langle \Psi_1, \beta_1 \rangle, \dots, \langle \Psi_n, \beta_n \rangle, \dots$  l'énumération canonique de tous les undercuts conservatifs maximaux de  $\langle \Phi, \alpha \rangle$ . Un argument  $\langle \Psi_i, \beta_i \rangle$  est un undercut pertinent de  $\langle \Phi, \alpha \rangle$  si et seulement si pour tout  $j < i$ ,  $\langle \Psi_i, \beta_i \rangle$  et  $\langle \Psi_j, \beta_j \rangle$  ne sont pas quasi-identiques.

EXEMPLE 54. — Reprenons les arguments de l'exemple 48. Supposons que le début de l'énumération canonique des undercuts conservatifs maximaux de  $\langle \{a \rightarrow b, a\}, b \rangle$  soit :

$$\begin{aligned} & \langle \{a, \neg b \vee c, \neg(a \wedge c)\}, \neg(a \wedge (a \rightarrow b)) \rangle \\ & \quad \langle \{c, \neg(a \wedge c)\}, \neg((a \rightarrow b) \wedge a) \rangle \\ & \quad \langle \{c, \neg(a \wedge c)\}, \neg(a \wedge (a \rightarrow b)) \rangle \\ & \quad \langle \{a, \neg b \vee c, \neg(a \wedge c)\}, \neg((a \rightarrow b) \wedge a) \rangle \\ & \quad \vdots \end{aligned}$$

Alors,  $\langle \{a, \neg b \vee c, \neg(a \wedge c)\}, \neg(a \wedge (a \rightarrow b)) \rangle$  et  $\langle \{c, \neg(a \wedge c)\}, \neg((a \rightarrow b) \wedge a) \rangle$  sont des undercuts pertinents de  $\langle \{a \rightarrow b, a\}, b \rangle$ . □

Pour capturer un dialogue autour d'une thèse initiale, on regroupe arguments et contre-arguments en une structure appelée *arbre argumentatif* décrivant la façon dont les arguments s'enchainent au fil de la discussion. La thèse initiale de la discussion est alors la racine de l'arbre et à chaque nœud correspond un argument. Formellement :

DÉFINITION 55 (Arbre argumentatif). — *Un arbre argumentatif  $T$  pour  $\alpha$  est un arbre dont les nœuds sont des arguments tel que :*

1. *La racine de  $T$  est un argument en faveur de  $\alpha$ ,*
2. *pour tout nœud  $\langle \Psi, \beta \rangle$  ayant comme ancêtres  $\langle \Psi_1, \beta_1 \rangle, \dots, \langle \Psi_n, \beta_n \rangle$ , il existe au moins une formule  $\gamma \in \Psi$  telle que pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,  $\gamma \notin \Psi_i$ ,*
3. *les fils d'un nœud  $\langle \Psi, \beta \rangle$  sont tous les undercuts pertinents de  $\langle \Psi, \beta \rangle$  qui vérifient 2.*

Suivant (Besnard, Hunter, 2008), la condition 2 de la définition 55 vise à éviter la circularité lors de la construction des branches de l'arbre argumentatif.

NOTATION 56. — *Afin de simplifier la représentation des arbres argumentatifs, le symbole  $\star$  est utilisé pour désigner la conclusion d'un undercut pertinent.*

EXEMPLE 57. — Considérons

$$\Delta = \{ a, a, b, \neg c, a \rightarrow c, \neg(a \wedge b), \neg b \vee \neg c \}.$$

La figure 3 présente un arbre argumentatif pour  $\neg b \wedge a$  avec les abréviations  $\Psi_1 = \{a, a \rightarrow c, \neg b \vee \neg c\}$ ,  $\Psi_2 = \{\neg c, a \rightarrow c\}$ ,  $\Psi_3 = \{b\}$ , et  $\Psi_4 = \{\neg c\}$ .

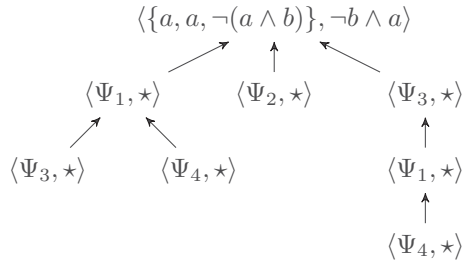


Figure 3. Un arbre argumentatif pour  $\neg b \wedge a$

□

## 5. Conclusion

La contribution de cet article est double. Nous avons d'abord introduit une logique  $\mathcal{CL}$  pour raisonner sur des ressources épuisables, avec une méthode de déduction automatique dédiée. Cette logique  $\mathcal{CL}$  est très proche de la logique propositionnelle

standard, raison pour laquelle elle est facile à comprendre et à manipuler. Puis, nous avons présenté un modèle d'argumentation pour les raisonnements sur des ressources consommables. Celui-ci s'appuie sur le langage de la logique  $\mathcal{CL}$  pour représenter *in fine* les arguments et leurs interactions.

En ce qui concerne les perspectives, nous envisageons de définir des procédures de preuve aussi efficaces et générales que possible pour la logique  $\mathcal{CL}$ . Notamment, il serait intéressant d'étudier comment la résolution pourrait être adaptée pour  $\mathcal{CL}$ . Dans le même contexte, nous envisageons d'étudier les aspects calculatoires liés à la logique  $\mathcal{CL}$ . Enfin, il serait judicieux de définir une méthode pour générer de manière automatique les arguments et les arbres argumentatifs, voire même pour accepter/rejeter les arguments à partir de ces arbres.

## Bibliographie

- Abrusci V. M. (1991). Phase semantics and sequent calculus for pure noncommutative classical linear propositional logic. *Journal of Symbolic Logic*, vol. 56, n° 4, p. 1403-1451.
- Amgoud L., Cayrol C. (2002). A reasoning model based on the production of acceptable arguments. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, vol. 34, n° 1-3, p. 197-215.
- Amgoud L., Vesic S. (2012). A formal analysis of the role of argumentation in negotiations dialogues. *Journal of Logic and Computation*, vol. 22, n° 5, p. 957-978.
- Bench-Capon T. J. M., Atkinson K., McBurney P. (2012). Using argumentation to model agent decision making in economic experiments. *Autonomous Agents and Multi-Agent Systems*, vol. 25, n° 1, p. 183-208.
- Bench-Capon T. J. M., Dunne P. E. (2007). Argumentation in artificial intelligence. *Artificial Intelligence*, vol. 171, n° 10-15, p. 619-641.
- Besnard P., Grégoire É., Raddaoui B. (2013). A conditional logic-based argumentation framework. In *International conference on scalable uncertainty management*, p. 44-56.
- Besnard P., Hunter A. (2008). *Elements of argumentation*. MIT Press.
- Beth E. W. (1970). *Formal methods: An introduction to symbolic logic and to the study of effective operations in arithmetic and logic*. Dordrecht, The Netherlands, Reidel.
- Caires L., Lozes É. (2006). Elimination of quantifiers and undecidability in spatial logics for concurrency. *Theoretical Computer Science*, vol. 358, n° 2-3, p. 293-314.
- Calcagno C., Cardelli L., Gordon A. D. (2005). Deciding validity in a spatial logic for trees. *Journal of Functional Programming*, vol. 15, n° 4, p. 543-572.
- Chesñevar C. I., Maguitman A. G., Loui R. P. (2000). Logical models of argument. *ACM Computing Surveys*, vol. 32, n° 4, p. 337-383.
- Dosen K., Schroder-Heister P. (1993). *Substructural logics*. Oxford University Press.
- Dung P. M. (1995). On the acceptability of arguments and its fundamental role in nonmonotonic reasoning, logic programming and n-person games. *Artificial Intelligence*, vol. 77, n° 2, p. 321-358.
- Girard J.-Y. (1987). Linear logic. *Theoretical Computer Science*, vol. 50, p. 1-102.

- Girard J.-Y. (1995). Linear logic: its syntax and semantics. In Y. L. J.Y. Girard, L. Regnier (Eds.), *Advances in linear logic*, p. 1-42. Cambridge University Press.
- Girard J.-Y. (1998). Light linear logic. *Information and Computation*, vol. 143, n° 2, p. 175-204.
- Girard J.-Y., Scedrov A., Scott P. J. (1992). Bounded linear logic: A modular approach to polynomial-time computability. *Theoretical Computer Science*, vol. 97, n° 1, p. 1-66.
- Girault F. (1997). *Formalisation en logique linéaire du fonctionnement des réseaux de Petri*. Thèse de doctorat non publiée, Université Paul Sabatier, Toulouse.
- Hadidi N., Dimopoulos Y., Moraitis P. (2012). Tactics and concessions for argumentation-based negotiation. In *Conference on computational models of argument*, p. 285-296.
- Hunter A., Williams M. (2010). Argumentation for aggregating clinical evidence. In *IEEE international conference on tools with artificial intelligence (1)*, p. 361-368.
- Hyland M., Paiva V. de. (1993). Full intuitionistic linear logic (extended abstract). *Annals of Pure and Applied Logic*, vol. 64, n° 3, p. 273-291.
- Ishtiaq S. S., O'Hearn P. W. (2001). BI as an assertion language for mutable data structures. In *Annual symposium on principles of programming languages*, p. 14-26.
- Lafont Y. (2004). Soft linear logic and polynomial time. *Theoretical Computer Science*, vol. 318, n° 1-2, p. 163-180.
- Leneutre J. (1998). Distributive linear logic. In *International workshop on logic, language, information and computation*, p. 31-43.
- O'Hearn P. W., Pym D. J. (1999). The logic of bunched implications. *Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 5, n° 2, p. 215-244.
- Pollock J. L. (1987). Defeasible reasoning. *Cognitive Science*, vol. 11, n° 4, p. 481-518.
- Prakken H. (1993). An argumentation framework in default logic. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, vol. 9, n° 1-2, p. 93-132.
- Prakken H., Sartor G. (1996). A dialectical model of assessing conflicting arguments in legal reasoning. *Artificial Intelligence and Law*, vol. 4, n° 3-4, p. 331-368.
- Pym D. J. (1999). On bunched predicate logic. In *Annual IEEE symposium on logic in computer science*, p. 183-192.
- Rahwan I., Simari G. R. (Eds.). (2009). *Argumentation in artificial intelligence*. Springer.
- Roorda D. (1991). *Resource logics: Proof-theoretical investigations*. Thèse de doctorat non publiée, University of Amsterdam.
- Rotstein N. D., Oren N., Norman T. J. (2011). Resource boundedness and argumentation. In *International workshop on theory and applications of formal argumentation*, p. 117-131.
- Santos E., Martins J. P. (2008). A default logic based framework for argumentation. In *European conference on artificial intelligence*, p. 859-860.
- Smullyan R. M. (1968). *First-order logic*. Springer-Verlag.