

Technical university of Lodz, Poland,  
Белорусский национальный технический университет, Минск

## MODELOWANIE ODDZIAŁYWANIA GRUNTU NA MASZYNY ROBOCZE

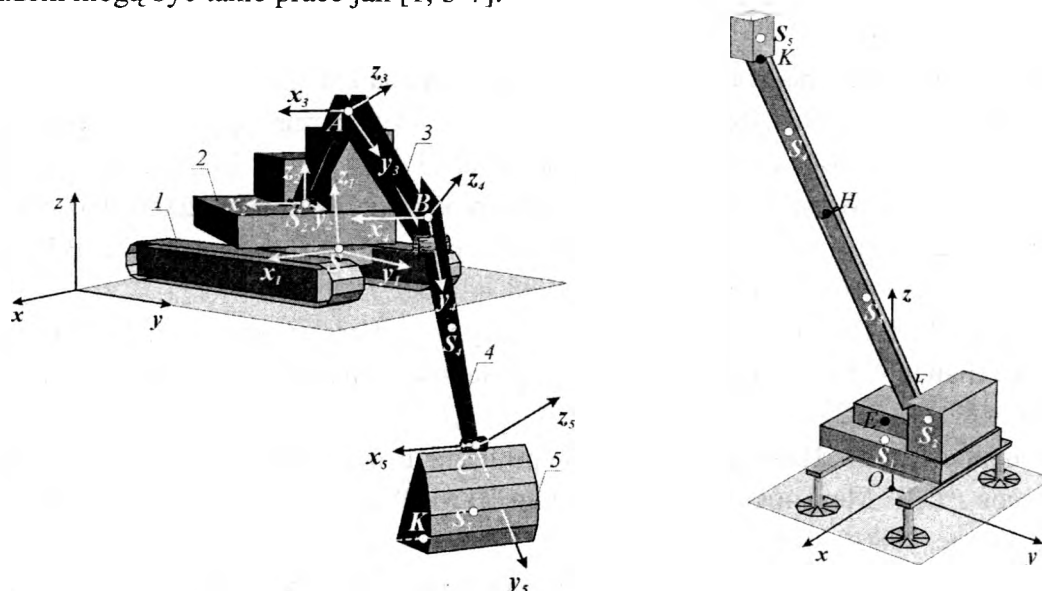
Grabski J., Strzałko J., Pronkevich S.A.

*In the paper some remarks concerning mechanical modelling of engineering machine including soil-machine interaction are presented. A more adequate model of ground-excavator interaction than the model presented in the recently published paper is proposed. Analysis of dynamics of a caterpillar model with unilateral soil-caterpillar interaction allows establish a stability region of machine during the operation.*

### 1. Wprowadzenie

Celem pracy jest przedstawienie sposobu modelowania maszyn roboczych z uwzględnieniem wzajemnego oddziaływania podłoża i maszyny.

Modelowanie maszyn roboczych takich jak koparki, żurawie, podnośniki za pomocą układu odpowiednio połączonych ze sobą sztywnych brył (rys. 1) nie jest zagadnieniem nowym; przykładem mogą być takie prace jak [1, 3-7].



Rys. 1 Przykładowe modele maszyn roboczych (koparka, podnośnik koszowy)

W analizowanych w pracach [1, 3, 4, 5] modelach maszyn, złożonych z łańcucha ciał sztywnych, zakładano, że układ spoczywa na sztywnym podłożu. Wpływ podatności podłoża na dynamikę koparki przedstawiony był w pracach [6, 7]. Jednakże, przyjęty w tych pracach model oddziaływania podłoża na maszynę wymaga – naszym zdaniem – pewnej modyfikacji.

Proponowane tu modele oddziaływania grunt-maszyna różnią się tym od używanych w pracach [6, 7], że dwustronne oddziaływanie podłoża na maszynę zostało zastąpione przez oddziaływanie jednostronne. Dzięki temu możliwe było uwzględnienie zmiany charakteru oddziaływania w przypadku odrywania się części powierzchni gaśienic od podłoża.

W tej pracy rozpatrywane są dwa sposoby modelowania oddziaływania gruntu. Pierwszy polega na wprowadzeniu dyskretnych elementów sprężysto tłumiących w miejscach kontaktu sztywnej gaśienicy z podłożem (rys. 2). Taki model oddziaływania jest wykorzystywany przy analizie dynamiki modelu maszyny złożonego ze sztywnych brył.

Drugim modelem gruntu jest ciało sprężysto-plastyczne; taki model jest używany do analizy dynamiki maszyn z wykorzystaniem metody elementów skończonych (systemy ANSYS, LS-DYNA).

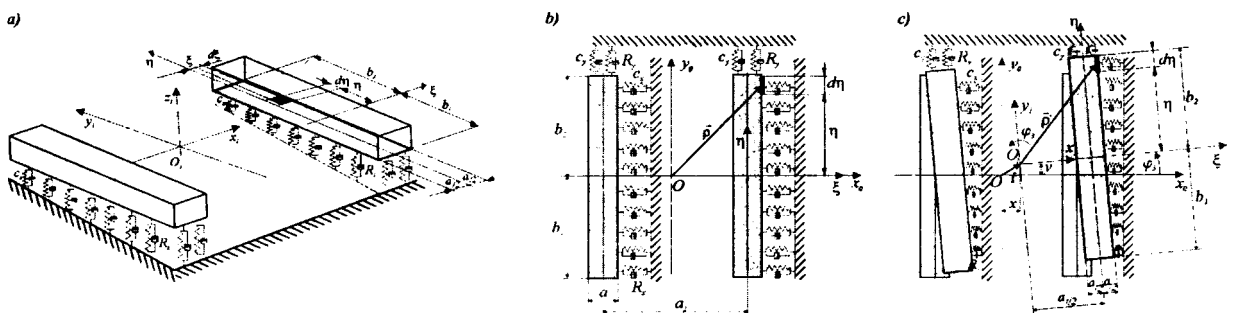
## 2. Opis modelu złożonego ze sztywnych brył

We wcześniej publikowanych pracach równania ruchu modelu maszyny wyprowadzane były w tradycyjny sposób – "ręcznie". Taka metoda generowania równań dynamiki sprawdza się w przypadku prostych układów, ale przy modelowaniu wieloczłonowych układów przestrzennych prowadzi do licznych błędów. W tej pracy do generowania równań dynamiki wykorzystywany był komputer i oprogramowanie *Mathematica 5.2* [8].

Równania dynamiki modelu złożonego z łańcucha ciał sztywnych były generowane na podstawie równań Lagrange'a. Wszystkie wielkości wektorowe określające ruch układu i wykonywane na nich działania zostały przedstawione w zapisie macierzowym. Do określenia energii kinetycznej, potencjalnej konieczne jest wyznaczenie położenia i prędkości środka masy każdego z ciał układu w zależności od współrzędnych uogólnionych i prędkości uogólnionych. Należy zaznaczyć, że dla nadwozia, wysięgnika, a także łyżki koparki i kosza podnośnika macierze masowych momentów bezwładności – występujące we wzorach na energię kinetyczną ciała – nie są diagonalne.

### 2.1. Modelowanie oddziaływania gruntu

Jak wspomniano, w pierwszym modelu – w przypadku koparki – gąsienice są traktowane jak ciała sztywne. Przyjęto, że oddziaływanie gruntu jest opisane reologicznym modelem jest Kelvina-Voigta. Przy takim założeniu oddziaływanie podłoża na gąsienice można przedstawić za pomocą elementów sprężysto-tłumiących pokazanych na rys. 2.



Rys. 2 Modelowanie oddziaływania podłoża na gąsienicę: a) w kierunku  $z_1$  – prostym do płaszczyzny podłoża; b), c) w płaszczyźnie  $x_1y_1$

Odształcenia elementów sprężysto-tłumiących ( $\lambda = [\lambda_x \ \lambda_y \ \lambda_z]^T$ ), modelujących oddziaływanie gruntu, wyznacza się na podstawie zależności

$$\lambda = \mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} + \mathbf{A}_{1/0}\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho} , \quad (1)$$

przy czym  $\boldsymbol{\rho}$  oznacza wektor położenia elementu sprężysto-tłumiącego,  $\mathbf{A}_{1/0}$  jest macierzą transformacji współrzędnych. Dla małych kątów obrotu ( $\mathbf{A}_{1/0} \cong \boldsymbol{\Phi}_1 = \boldsymbol{\Phi} + \mathbf{I}$ ) otrzymuje się

$$\lambda \cong \mathbf{r} + \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\rho} . \quad (2)$$

Energię odkształcenia elementów sprężystych (umieszczonych pod jedną gaśienicą) można wyznaczyć jako

$$V_s = \int_{-b_1}^{b_2} \frac{1}{2} c_x \lambda_x^2 d\eta + \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{2} c_y \lambda_y^2 d\xi + \int_{-b_1}^{b_2} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{2} c_z \lambda_z^2 d\xi d\eta, \quad (3)$$

gdzie:  $c_x$ ,  $c_y$ ,  $c_z$  oznaczają współczynniki sztywności elementów sprężystych w kierunkach osi  $x_1$ ,  $y_1$  i  $z_1$ . Całkowita energia odkształcenia gruntu jest określona (inaczej niż w pracach [6, 7]) wzorem

$$V_s = \frac{1}{12} \left[ 12ac_y y^2 + (b_1 + b_2)(12c_x x^2 + ac_z(12z^2 - 12(b_1 - b_2)z\varphi_1 + 4(b_1^2 - b_1b_2 + b_2^2)\varphi_1^2 + (3a_1^2 + a^2)\varphi_2^2)) + 12(b_1 - b_2)(b_1 + b_2)c_x x\varphi_3 + 4(b_1^3 + b_2^3)c_x + a(3a_1^2 + a^2)c_y \right] \varphi_3^2, \quad (4)$$

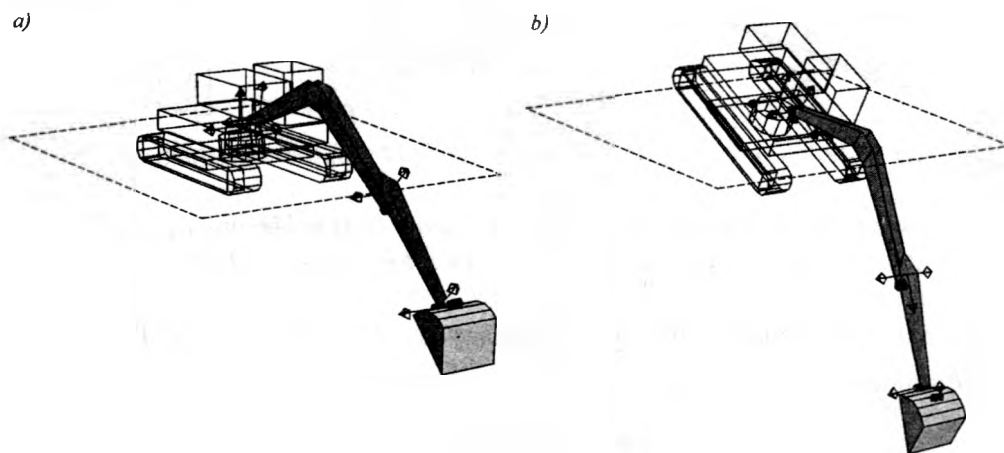
przy czym:  $x$ ,  $y$  i  $z$  są współrzędnymi opisującymi ruch środka masy podwozia,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  i  $\varphi_3$  oznaczają kąty obrotu podwozia wokół osi  $x_1$ ,  $y_1$  i  $z_1$ . Pozostałe wielkości (wymiary) są zaznaczone na rys. 2.

W podobny sposób wyznaczona została funkcja opisująca dyssypację energii w gruncie.

Różniczkowe równania ruchu były generowane w sposób automatyczny – przez komputer, a następnie rozwiązywane numerycznie, również przy użyciu systemu *Mathematica 5.2*.

## 2.2. Wyniki rozwiązań numerycznych dla modelu złożonego ze sztywnych brył

Wyniki obliczeń przeprowadzonych dla koparki przy założeniu jednostronnego i dwustronnego oddziaływania podłoża są pokazane na rys. 3. Przedstawione zostały na nim położenia równowagi koparki dla modelu o dwustronnym oddziaływaniu (a) oraz dla modelu o jednostronnym oddziaływaniu podłoża (b). Jak wynika z rysunku dobór modelu ma istotny wpływ na otrzymane rezultaty.



Rys. 3 Porównanie wyników obliczeń dla modelu podłoża:  
a) o dwustronnym oddziaływaniu, b) o jednostronnym oddziaływaniu

Przykładowe wyniki rozwiązania zadania polegającego na analizie ruchu koparki w przypadku sterowania ruchem roboczym łyżki są pokazane na rys. 4. Zostały na nim przedstawione obszary kontaktu powierzchni gaśienic (zaznaczone jaśniejszym kolorem) oraz

obszary, które są uniesione nad powierzchnią gruntu (ciemniejsze) w przypadku, gdy osprzęt koparki wraz z urobkiem obraca się względem podwozia. Zamieszczone wyniki dotyczą przypadku, w którym sterowanie kątem obrotu nadwozia koparki (kątem  $\alpha$ ) odbywało się według następującego programu:

$$\alpha = 0.1116t^2$$

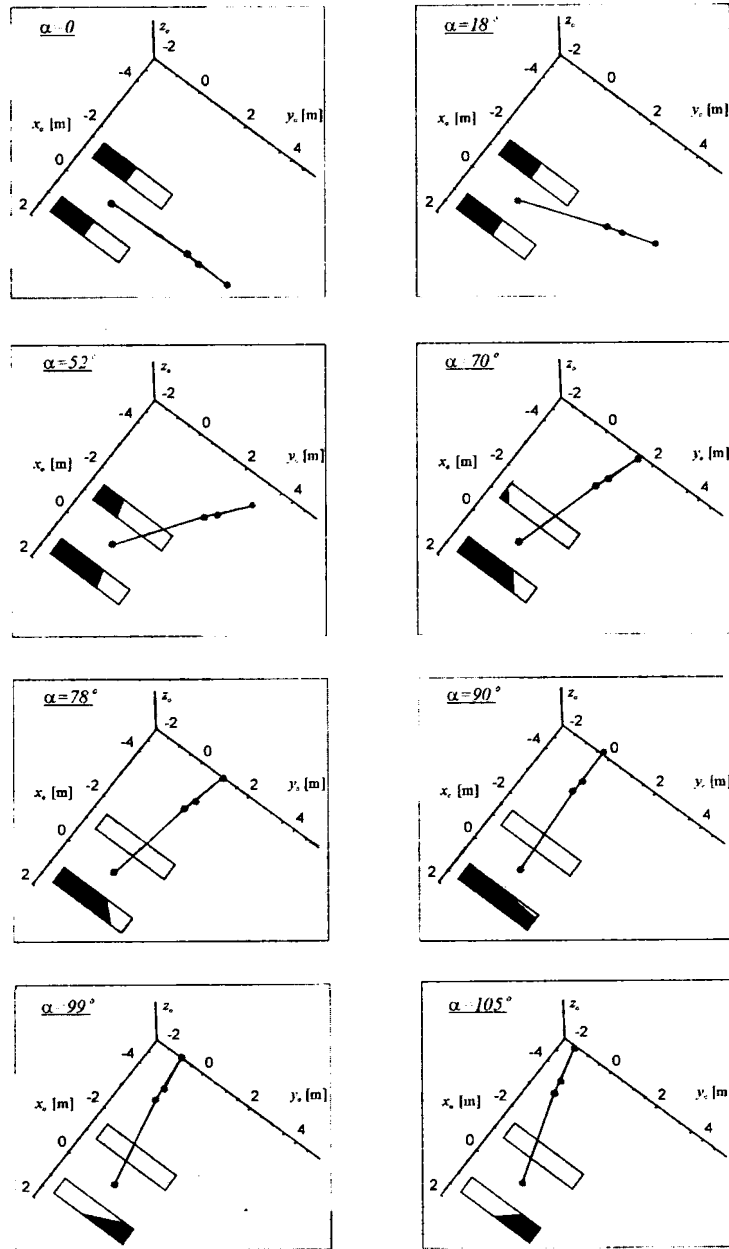
$$\alpha = 0.6977 + 0.558(t - 2.5)$$

$$\alpha = 1.3083 + 0.558(t - 3.6) - 0.1487(t - 3.6)^2$$

$$\text{dla } t \in [0, 2.5]$$

$$\text{dla } t \in (2.5, 3.6]$$

$$\text{dla } t \in (3.6, 5.5]$$



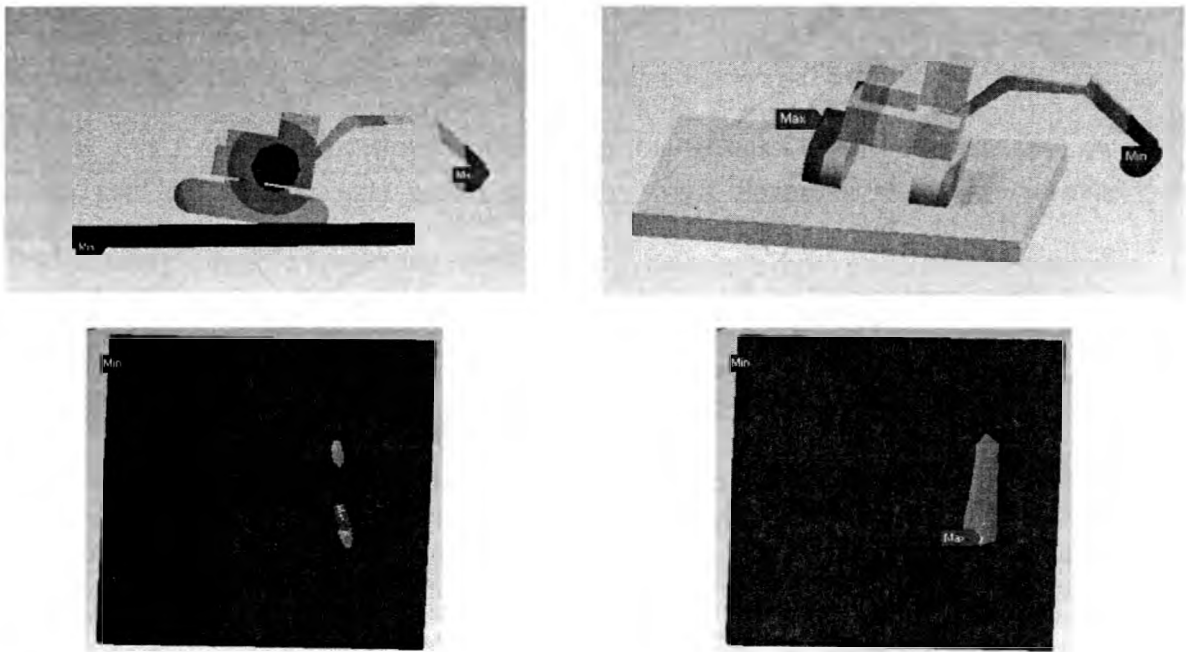
Rys. 4 Zmiany wielkości czynnej i biernej powierzchni gąsienic w kolejnych fazach obrotu koparki (powierzchnia kontaktu jest na rysunku jaśniejsza)

Z rysunku wynika, że dla  $\alpha=90^\circ$  prawie cała powierzchnia jednej gaśienicy odrywa się od podłoża.

### 3. Model MES

Oddziaływanie pomiędzy maszyną a podłożem można określać wykorzystując metodę elementów skończonych. Model rozpatrywanej model maszyny został zbudowany w systemie ANSYS Workbench 9. Analizowane były dwa przypadki: model maszyny złożony ze sztywnych brył oraz sprężysty model maszyny. W obu przypadkach podłoże traktowano jako sprężyste.

Wyniki rozwiązań numerycznych otrzymanych z metody elementów skończonych dla maszyny złożonej ze sztywnych ciał zostały pokazane na rys. 5. Otrzymane rezultaty odpowiadają wynikom otrzymanym z rozwiązania analitycznego.



*Rys. 5 Wyniki obliczeń z programu ANSYS dla sprężystego modelu podłoża i nieodkształcalnego modelu koparki*

### 4. Wnioski

Przedstawione w pracy uwagi dotyczące modelowania koparki i opisu oddziaływania podłoża na gaśienice oraz otrzymane rezultaty obliczeń numerycznych pozwalają na następujące stwierdzenia:

- matematyczny model oddziaływania podłoża na gaśienice, wykorzystywany w pracach [6, 7] do analizy dynamiki koparki, jest niewłaściwy – jego najistotniejszą wadą jest dwustronne oddziaływanie,
- zaproponowane alternatywne sposoby modelowania oddziaływania gruntu są pozbawione podstawowej wady krytykowanego modelu – dwustronne oddziaływanie podłoża na gaśienicę zostaje zastąpione przez oddziaływanie jednostronne,
- rezultaty otrzymane dla zaproponowanego modelu znacząco różnią się od tych, które uzyskuje się dla modelu o dwustronnym oddziaływaniu,

- przedstawione rezultaty obliczeń numerycznych są ważnym argumentem przeciwko stosowaniu modelu o dwustronnym oddziaływaniu pomiędzy podłożem a gaśienicą.

## Literatura

1. Grabski J. Analiza dynamiki maszyn roboczych z wykorzystaniem macierzowych metod mechaniki. Zeszyty Naukowe Nr 804, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej 1998.
2. Kane T.R., Levinson D.A. A Method for Testing Numerical Integrations of Equations of Motion of Mechanical Systems. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 55 (1988), s. 711-715.
3. Koivo A.J., Thoma M., Kocaoglan E., Andrade-Cetto J. Modeling and control of excavator during digging operation. *Journal of Aerospace Engineering*, Vol. 9, No. 1, 1996.
4. Strzałko J. Energetyczne kryterium poprawności równań ruchu i weryfikacja ich rozwiązań w zagadnieniach dynamiki maszyn. Zeszyty Naukowe Nr 795, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej 1998.
5. Strzałko J., Grabski J. Dynamic analysis of model with time-varying mass. *Acta Mechanica* 112/1-4, 1995, s. 173-186.
6. Towarek Z. Dynamics of a single-bucket excavator on a deformable soil foundation during the digging of ground. *International Journal of Mechanical Sciences*, Volume 45, Issues 6-7, June-July 2003, 1053-1076.
7. Towarek Z. Dynamics of a Single Bucket Excavator During the Rotation of the Body with Regard to Flexibility of a Soil Foundation. *Machine Dynamics Problems*, 2005, Vol. 29, No 3, 73-90.
8. Wolfram S. *The Mathematica Book*, 4th ed. Wolfram Media / Cambridge University Press, 1999.