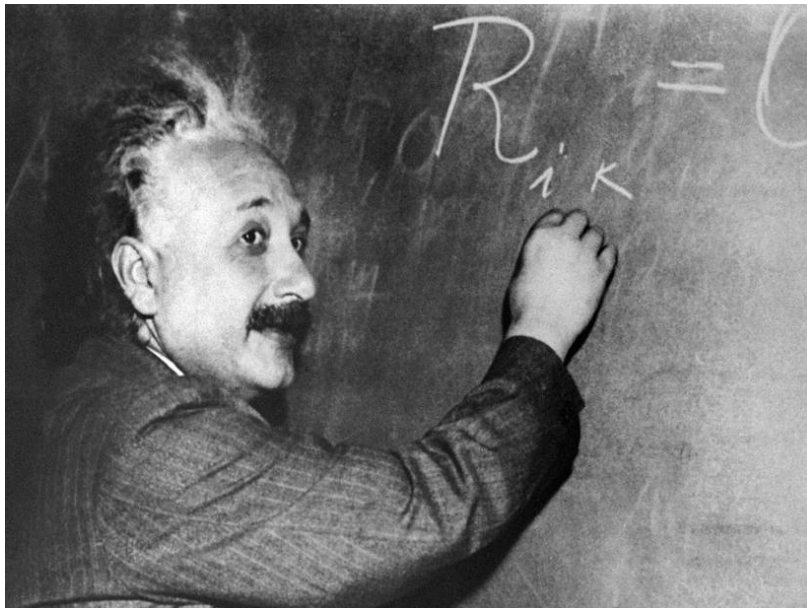


# RELATIVITÉ GÉNÉRALE

*par*

**David SÉNÉCHAL**

*Ph.D., Professeur Titulaire*



**UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE**

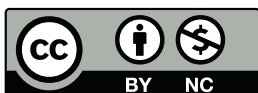
Faculté des sciences

Département de physique

(mars 2020)

Ce **manuel électronique** fut utilisé dans le cadre du cours PHQ615 (Relativité générale) à l'Université de Sherbrooke, depuis 2018. Il fait partie d'une collection de manuels électroniques diffusés par des professeurs du département de physique de l'Université de Sherbrooke. Il a été revisité pour une diffusion sous licence libre en collaboration avec la fabriqueREL en mars 2020. Il est diffusé sous licence *Creative Commons* dans sa version BY-NC, sauf indications contraires.

**L'auteur**, David Sénéchal, est professeur titulaire à l'Université de Sherbrooke. Son domaine de recherche est la modélisation numérique des matériaux quantiques. C'est dans un esprit de partage et de collaboration qu'il a décidé de partager cette ressource éducative libre. La liste de ses publications est disponible sur [Google Scholar](#).



Sauf indications contraires, le contenu de ce manuel électronique est disponible en vertu des termes de la [Licence Creative Commons Attribution - Pas d'utilisation commerciale 4.0 International](#).

**Vous êtes encouragé à :**

**Partager** – copier, distribuer et communiquer le matériel par tous moyens et sous tous formats.

**Adapter** – remixer, transformer et créer à partir du matériel.

**Selon les conditions suivantes :**

**Paternité** – Vous devez citer le nom de l'auteur original.

**Pas d'utilisation commerciale** – Vous n'avez pas le droit d'utiliser le matériel à des fins commerciales.

*Une théorie est avant tout faite de la manière dont elle est pensée, dont elle est comprise, dont elle est interprétée, bref, dont elle est vécue. C'est qu'une théorie doit être interprétée pour être appliquée, et l'on ne peut guère la définir en en donnant simplement les règles; des règles qui sont infiniment plus complexes, plus fluides qu'il n'apparaît au premier abord; une théorie n'existe guère que dans l'esprit, l'opinion, le jugement de ses experts, comme une oeuvre d'art en quelque sorte. Isolée, oubliée, sans applications théoriques ou pratiques, elle est comme un livre perdu au fond d'une bibliothèque, que personne ne lirait, n'aimerait, dont on n'aurait aucun besoin. Bref une théorie vive, elle est à comprendre dans l'esprit de ses experts, à un moment donné de sa vie. Et, parallèlement à la manière dont les générations d'experts la comprennent, sans même que ses équations ne varient, elle évolue.*

— Jean Eisenstaedt, *Einstein et la relativité générale*



# TABLE DES MATIÈRES

<b>Table des matières</b>	<b>5</b>
<b>1 Rappels de relativité restreinte</b>	<b>11</b>
A Espace-temps	11
1 Structure de l'espace-temps pseudo-euclidien.	12
2 Transformations de Lorentz.	13
3 Temps propre, vitesse et accélération	16
B Dynamique relativiste	19
1 Action d'une particule libre	19
2 Particule chargée dans un champ électromagnétique	20
3 Forme covariante de l'équation du mouvement	22
4 Transformation des champs électromagnétiques.	23
C Problèmes.	25
<b>2 Géométrie riemannienne</b>	<b>29</b>
A Vecteurs et tenseurs sur un espace courbe	29
B Connexion affine	33
1 Transport parallèle	33
2 Dérivée covariante	34
3 Relation entre la connexion affine et le tenseur métrique.	36
C Géodésiques	39
1 Description mathématique d'une courbe.	39
2 Définitions d'une géodésique	40
D Courbure	42
1 Définition du tenseur de Riemann	42
2 Tenseur de Riemann et transport parallèle	43
3 Tenseurs de Ricci, courbure scalaire et tenseur d'Einstein	45
E Exemples simples en dimension 2.	45
1 La sphère.	46
2 Le cylindre	47
3 Le cône	48
4 Le tore	49
5 L'hyperbole	50
F Annexe : intégrales et théorème de Stokes généralisé	53
1 Pseudotenseur complètement antisymétrique.	53
2 Pseudotenseur dual.	54
3 Éléments d'hypervolume, de volume, de surface et de longueur	55
4 Théorème de Stokes généralisé	57
5 Exemples en dimension 2	57
G Problèmes.	59

<b>3</b>	<b>Principes de la relativité générale</b>	<b>67</b>
A	Théorie newtonienne de la gravitation . . . . .	67
1	Loi de Poisson . . . . .	67
2	Le principe d'équivalence . . . . .	68
B	Le principe de relativité générale . . . . .	69
1	Mouvement inertiel d'une particule. . . . .	70
2	Coordonnées localement cartésiennes. . . . .	70
3	Limite non relativiste . . . . .	72
4	Formulation lagrangienne alternative . . . . .	73
C	Distances et durées . . . . .	75
1	Décalage vers le rouge . . . . .	75
2	Définition des distances . . . . .	77
D	Équations du champ de gravitation . . . . .	78
1	Action d'Einstein-Hilbert. . . . .	78
2	Tenseur d'énergie-impulsion . . . . .	79
3	Variation de l'action d'Einstein-Hilbert . . . . .	80
4	Équations d'Einstein . . . . .	82
5	Limite non relativiste . . . . .	82
E	La constante cosmologique . . . . .	84
F	Problèmes. . . . .	86
<b>4</b>	<b>Géométrie de Schwarzschild</b>	<b>89</b>
A	Solution de Schwarzschild . . . . .	89
1	Métrique isotrope générale . . . . .	89
2	Résolution des équations du champ. . . . .	91
B	Géodésiques de Schwarzschild . . . . .	93
1	Équations générales des géodésiques dans la solution de Schwarzschild . . . . .	93
2	Trajectoires des particules massives. . . . .	94
3	Mouvement radial . . . . .	97
4	Mouvement circulaire . . . . .	98
5	Précession des orbites elliptiques. . . . .	100
6	Trajectoire des photons . . . . .	102
7	Déviation des rayons lumineux . . . . .	103
C	Précession géodétique . . . . .	105
D	Horizons et singularités. . . . .	108
1	Singularités intrinsèques vs singularités de coordonnées. . . . .	108
2	Horizon d'événements. . . . .	109
3	Surface à décalage infini . . . . .	110
E	Coordonnées de Kruskal-Szekeres. . . . .	110
1	Cônes de lumière entrants et sortants . . . . .	110
2	Coordonnées de Kruskal-Szekeres . . . . .	112
3	Diagramme d'espace-temps de Kruskal-Szekeres . . . . .	114
F	Trous de vers. . . . .	115
1	Pont d'Einstein-Rosen . . . . .	115
2	Trou de ver dans le trou noir de Schwarzschild . . . . .	116
G	Rayonnement de Hawking et évaporation des trous noirs. . . . .	118
1	Température de Hawking. . . . .	119

2	Évaporation du trou noir . . . . .	120
H	Problèmes. . . . .	122
<b>5</b>	<b>Géométrie de Kerr</b>	<b>127</b>
A	Métrie de Kerr . . . . .	127
1	Entraînement des repères . . . . .	128
2	Métrie de Kerr . . . . .	128
3	Cas limites de la métrie de Kerr . . . . .	129
4	singularités de la métrie de Kerr . . . . .	131
B	Ergosphère et processus de Penrose . . . . .	133
C	Géodésiques équatoriales dans la métrie de Kerr . . . . .	134
D	Effet Lense-Thirring . . . . .	135
E	Problèmes. . . . .	138
<b>6</b>	<b>Ondes gravitationnelles</b>	<b>141</b>
A	Relativité linéarisée . . . . .	141
1	Déformation du tenseur métrique . . . . .	141
2	Équations d'Einstein linéarisées . . . . .	143
B	Propagation des ondes gravitationnelles . . . . .	145
1	Solution générale à l'équation d'onde . . . . .	145
2	Effet du passage d'une onde gravitationnelle . . . . .	147
C	Rayonnement des ondes gravitationnelles . . . . .	149
1	Fonction de Green pour l'équation d'onde . . . . .	149
2	Approximation des sources compactes . . . . .	151
3	Rayonnement causé par un objet binaire. . . . .	153
4	Énergie portée par une onde gravitationnelle . . . . .	156
5	Détection des ondes gravitationnelles . . . . .	160
D	Problèmes. . . . .	164
<b>7</b>	<b>Cosmologie</b>	<b>167</b>
A	Le principe cosmologique. . . . .	167
B	Univers de Friedmann-Lemaître . . . . .	168
1	Métrie de Friedmann-Lemaître . . . . .	168
2	Espace à courbure spatiale constante positive . . . . .	171
3	Espace à courbure spatiale constante négative. . . . .	173
4	Géodésiques dans l'espace de Friedmann-Lemaître. . . . .	174
5	Décalage vers le rouge cosmologique . . . . .	175
6	La constante de Hubble . . . . .	175
C	Modèles cosmologiques . . . . .	177
1	Équations de Friedmann-Lemaître . . . . .	177
2	Équations du mouvement du fluide cosmologique . . . . .	178
3	Paramètres cosmologiques . . . . .	181
4	Diagramme de phase cosmologique . . . . .	182
5	Évolution temporelle du facteur d'échelle . . . . .	184
D	Cosmologie inflationnaire. . . . .	188
1	Les paradoxes du modèle cosmologique standard . . . . .	188
2	Le problème de l'horizon. . . . .	188

3	Expansion inflationnaire . . . . .	189
4	L'inflaton. . . . .	190
E	Problèmes. . . . .	194
<b>8</b>	<b>Annexes</b>	<b>197</b>
A	Formulaire . . . . .	197
B	Unités géométriques. . . . .	200
C	Vecteurs et tenseurs . . . . .	201
1	Composantes covariantes et contravariantes . . . . .	201
2	Tenseurs . . . . .	203
D	Tenseur d'énergie-impulsion d'un fluide parfait . . . . .	205
E	Calcul du tenseur de Riemann avec SymPy . . . . .	209
1	Calcul de quantités reliées à la métrique statique à symétrie sphérique générale, en fonction des fonctions inconnues $A(r)$ et $B(r)$ .. . . .	209
2	Calcul de quantités reliées à la métrique de Schwarzschild . . . . .	211



# TABLE DES PROBLÈMES

1.1	Addition des vitesses . . . . .	25
1.2	Tenseur métrique et élément de volume . . . . .	25
1.3	accélération constante . . . . .	25
1.4	Forme générale de la transformation de Lorentz . . . . .	25
1.5	composition des transformations de Lorentz . . . . .	26
1.6	paradoxe des jumeaux . . . . .	26
1.7	Effet Compton . . . . .	27
1.8	mouvement dans un champ électrique constant . . . . .	27
1.9	mouvement dans un champ magnétique constant . . . . .	27
1.10	mouvement dans des champs magnétique et électrique parallèles . . . . .	28
1.11	mouvement dans des champs magnétique et électrique croisés . . . . .	28
2.1	coordonnées stéréographiques sur la sphère . . . . .	59
2.2	connexion affine pour une métrique diagonale . . . . .	59
2.3	coordonnées polaires planes . . . . .	59
2.4	géodésiques sur le tore . . . . .	60
2.5	transport parallèle le long d'un parallèle sur la 2-sphère . . . . .	60
2.6	transport parallèle le long d'un parallèle sur la 2-sphère (suite) . . . . .	60
2.7	coordonnées curvilignes sur le plan . . . . .	60
2.8	quadri-divergence . . . . .	61
2.9	vecteurs de Killing . . . . .	61
2.10	vecteurs de Killing (suite) . . . . .	62
2.11	commutation des dérivée covariantes . . . . .	62
2.12	identité de Bianchi . . . . .	62
2.13	métrique non triviale pour un espace plat . . . . .	62
2.14	symétrie du tenseur de Ricci . . . . .	63
2.15	facteur d'échelle . . . . .	63
2.16	séparation des coordonnées . . . . .	63
2.17	géométrie de la 3-sphère . . . . .	63
2.18	géométries conformes . . . . .	64
3.1	coordonnées de Kottler-Møller . . . . .	86
3.2	décalage en fréquence d'un satellite . . . . .	86
3.3	référentiel tournant . . . . .	87
3.4	variation de la connexion affine . . . . .	87
3.5	tenseur d'énergie-impulsion du champ électromagnétique . . . . .	87
3.6	Conservation de l'énergie-impulsion . . . . .	88
4.1	surface d'une sphère . . . . .	122
4.2	paradoxe des jumeaux . . . . .	122
4.3	Force de marée près d'un trou noir . . . . .	122
4.4	troisième loi de Kepler . . . . .	123
4.5	orbite circulaire d'un photon . . . . .	123
4.6	théorème de Jebsen-Birkoff . . . . .	123

4.7	problème de Kepler relativiste . . . . .	124
4.8	coordonnées de Lemaître . . . . .	125
4.9	Coordonnées de Painlevé-Gullstrand . . . . .	125
4.10	coordonnées de Kruskal-Szekeres . . . . .	126
5.1	limite $r_s \rightarrow 0$ de la métrique de Kerr . . . . .	138
5.2	orbites circulaires . . . . .	138
5.3	orbites circulaires extrêmes dans la métrique de Kerr . . . . .	138
6.1	caractère tensoriel de $h_{ij}$ . . . . .	164
6.2	conservation de l'énergie-impulsion par les équations d'Einstein . . . . .	164
6.3	tenseur de Riemann d'une onde gravitationnelle . . . . .	164
6.4	Moment cinétique du trou noir de Kerr . . . . .	164
7.1	courbure scalaire de l'espace . . . . .	194
7.2	espace plat . . . . .	194
7.3	Décalage vers le rouge d'une particule massive . . . . .	194
7.4	carré de la courbure . . . . .	194
7.5	Décalage du facteur $\gamma$ . . . . .	195
7.6	travail de la pression . . . . .	195
7.7	Cosmologie newtonienne . . . . .	195
7.8	distribution du corps noir . . . . .	195

# CHAPITRE 1

## RAPPELS DE RELATIVITÉ RESTREINTE

L'objectif de ce chapitre, comme son nom l'indique, est d'offrir au lecteur un rappel des notions mathématiques de base de la théorie de la relativité restreinte. Parce qu'il s'agit de rappels, nous passons sous silence tout le volet «interprétation» de la théorie et ses applications particulières. Nous visons plutôt à mettre le lecteur sur les rails d'un point de vue formel, mathématique. Le lecteur non familier avec les notions de tenseurs et de composantes covariantes et contravariantes peut consulter l'annexe 8.C.

---

### A Espace-temps

Les notions newtoniennes d'espace absolu et de temps absolu sont en contradiction avec les lois régissant les phénomènes électromagnétiques, comme démontré à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, soit par expérimentation (expérience de Michelson & Morley), soit par raisonnement direct à partir des équations de Maxwell (Lorentz, Poincaré, Einstein). La conséquence est qu'on ne peut pas attribuer un caractère absolu à la notion de simultanéité de deux événements : la chose dépend du référentiel de l'observateur. Par contre, on peut considérer que l'espace et le temps forment ensemble un ensemble plus grand appelé *espace-temps*, décrit par quatre coordonnées  $(ct, x, y, z)$  et que ce nouvel espace possède, lui, un caractère absolu. On veut dire par là qu'on peut considérer les points de ce nouvel espace, appelés *événements*, comme ayant une existence indépendante du référentiel de l'observateur. Assigner des coordonnées d'espace-temps à un événement (ou à un ensemble d'événements) relève donc d'un choix de référentiel, mais les événements eux-mêmes existent indépendamment de ces coordonnées. En ce sens, la théorie de la relativité restreinte constitue une relativisation des notions de temps et d'espace qui s'appuie sur l'introduction d'un nouvel absolu : l'espace-temps.

### 1.A.1 Structure de l'espace-temps pseudo-euclidien

**position** Sur l'espace-temps, nous allons utiliser les coordonnées temporelle et spatiales dans l'ordre suivant :  $(ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ .<sup>1</sup> Tant que l'espace-temps est plat, c'est-à-dire dans le régime étudié par la relativité restreinte, on peut introduire une base orthonormée  $(e_0, e_1, e_2, e_3)$  dans l'espace-temps. On peut alors décrire un événement  $E$  à l'aide d'un vecteur position  $x$  dont les composantes contravariantes sont les coordonnées :<sup>2</sup>

$$x = x^i e_i \quad (1.1)$$

Notons d'emblée que la notion de vecteur position dans un espace n'est applicable que si l'espace est plat. Par exemple, on ne peut pas localiser un point situé sur la surface d'une sphère à l'aide d'un vecteur à deux composantes (le nombre de coordonnées décrivant cette surface) issu d'une origine définie quelque part sur cette surface. Pour que ce soit possible, il faut que l'addition des coordonnées, composante par composante, soit une opération bien définie, c'est-à-dire qui produise les coordonnées d'un autre point dans l'espace considéré, le même quelle que soit la base choisie. Autrement dit, la notion de vecteur position a un sens si l'espace étudié a lui-même une structure d'espace vectoriel. Dans ce cas, additionner deux points (ou événements)  $E_1$  et  $E_2$  a un sens et produit un troisième point  $E = E_1 + E_2$  dont les coordonnées sont les sommes des coordonnées de  $E_1$  et de  $E_2$ .

#### Notation indicielle et vectorielle

On utilisera des indices tirés du milieu de l'alphabet ( $i, j, k, l$ , etc.) pour désigner les composantes des vecteurs et tenseurs dans l'espace-temps ou dans l'espace complet considéré, même s'il est euclidien. À l'occasion, on utilisera des indices tirés des premières lettres de l'alphabet ( $a, b, c$ , etc.) pour les indices purement spatiaux. De plus, nous utiliserons des caractères gras italiques (ex.  $x$ ) pour désigner des vecteurs dans l'espace-temps (quadrivecteurs) ou dans l'espace total considéré, même s'il est euclidien. Des caractères gras droits (ex.  $\mathbf{x}$ ) seront utilisés pour les vecteurs purement spatiaux dans un contexte relativiste (pour éviter la confusion avec les quadrivecteurs) et, à l'occasion, pour des matrices ou des tenseurs considérés comme des matrices.

**Intervalle** La structure de l'espace-temps en relativité restreinte est définie par la notion d'*intervalle*, qui généralise la notion de distance dans l'espace. L'intervalle entre deux événements  $E_1$  et  $E_2$ , noté  $s^2$ , est défini comme suit :

$$s^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2 \quad (1.2)$$

1. On numérote à partir de zéro dans le but de laisser la place à des extensions de l'espace-temps comportant plus de trois dimensions d'espace.

2. Contrairement aux cours plus élémentaires portant en partie sur la relativité restreinte, nous n'utiliserons pas le préfixe *quadri* pour désigner les vecteurs dans l'espace-temps. Au contraire, on emploiera le préfixe *tri* pour désigner les objets purement spatiaux, qui se rencontrent moins souvent dans ce cours. Ainsi, la position ordinaire dans l'espace, notée  $\mathbf{r}$ , sera qualifiée de *trivecteur*, ou on parlera du *trivecteur position*, etc. Nous ferons une exception pour la quadrivitesse et la quadriaccélération.

Pour faciliter les choses, on suppose souvent que l'un des événements est situé à l'origine de l'espace-temps, de sorte que l'intervalle entre un événement  $E$  et l'origine s'écrit

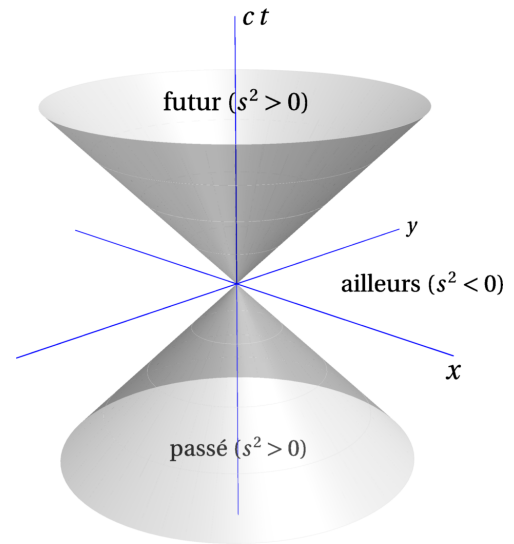
$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (1.3)$$

La proposition centrale en relativité restreinte est que l'intervalle est un invariant (ou scalaire). La forme de l'intervalle est semblable à celle de la distance au carré dans l'espace euclidien habituel, sauf pour les signes opposés entre les contributions temporelle et spatiale. Cette différence de signe est essentielle et définit ce qu'on appelle un espace *pseudo-euclidien*. L'intervalle peut être positif, négatif ou nul, ce qui permet de séparer l'espace-temps en plusieurs régions relativement à l'origine (voir fig. 1.1). Deux événements qui peuvent être reliés par un signal lumineux (c'est-à-dire se propageant à la vitesse limite) sont séparés d'un intervalle nul, qui sera donc nul dans tous les référentiels. Ceci entraîne que la vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels, indépendamment de l'état de mouvement de la source ou du détecteur.

Notons que plusieurs ouvrages sur la relativité générale utilisent une convention différente, soit un signe opposé, dans la définition de l'intervalle, de manière à ce que l'intervalle soit positif pour des séparations spatiales. Notre définition (1.3) se base sur la *signature*  $(+, -, -, -)$ , ce qui est conforme à ce qui est utilisé dans les manuels de théorie quantique des champs et aussi dans une bonne fraction des manuels de relativité générale.

**FIGURE 1.1**

Par rapport à un événement donné adopté comme origine, l'espace-temps se divise en plusieurs sections : le *passé* ( $t < 0, s^2 > 0$ ), le *futur* ( $t > 0, s^2 > 0$ ) et l'*ailleurs* ( $s^2 < 0$ ). Ces régions sont séparées par le *cône de lumière*, constitué des points qu'un signal lumineux peut atteindre à partir de l'origine (cône supérieur) et des points qui peuvent atteindre l'origine par un signal lumineux (cône inférieur).



## 1.A.2 Transformations de Lorentz

L'intervalle (1.3) peut être exprimé à l'aide d'un tenseur métrique :  $s^2 = g_{ij} x^i x^j$ . Les composantes covariantes de ce tenseur sont les suivantes :

$$[g_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

**Avertissement : vitesse de la lumière**

On utilisera dans la suite de ce manuel un système d'unités dans lequel la vitesse de la lumière  $c$  est égale à l'unité. Cela revient à mesurer les distances en secondes, ce qui est déjà le fondement du système international d'unités (SI), car le mètre est défini en fonction de la seconde. Les vitesses seront donc dorénavant des quantités sans unités, alors que l'accélération aura les unités d'une longueur inverse (ou du temps inverse, ce qui est la même chose). Ce choix fait partie de ce qu'on appelle les *unités géométriques*, en fonction desquelles la constante gravitationnelle  $G$  est aussi égale à 1. L'annexe 8.B contient un tableau qui permet de convertir rapidement vers les unités habituelles une expression exprimée en unités géométriques.

Le tenseur métrique contravariant  $g^{ij}$  devant respecter la contrainte  $g^{ik}g_{kj} = \delta_j^i$ , la matrice correspondante est donc l'inverse de la matrice ci-dessus, c'est-à-dire la même :  $g^{ij} = g_{ij}$ .

Le passage d'un référentiel  $S$  vers un autre référentiel  $S'$  se déplaçant à vitesse constante par rapport à  $S$  est défini par une transformation linéaire entre les coordonnées  $x^i$  utilisées dans  $S$  et les nouvelles coordonnées  $x'^i$  utilisées dans  $S'$ . Une telle transformation prend donc la forme générale suivante (voir éq. 8.35) :

$$x'^i = \Lambda^i_j x^j \quad (1.5)$$

Le tenseur métrique étant le même dans tous les référentiels inertiels (car l'intervalle est un invariant et son expression est la même dans tous les référentiels inertiels), la matrice  $\Lambda$  doit respecter les contraintes suivantes :

$$g_{ij} x'^i x'^j = g_{ij} \Lambda^i_k \Lambda^j_l x^k x^l = g_{kl} x^k x^l \quad (1.6)$$

ou encore, puisque cette relation est valable pour tout  $x$ ,

$$g_{kl} = g_{ij} \Lambda^i_k \Lambda^j_l \quad (1.7)$$

En notation matricielle, cette relation prend la forme suivante :

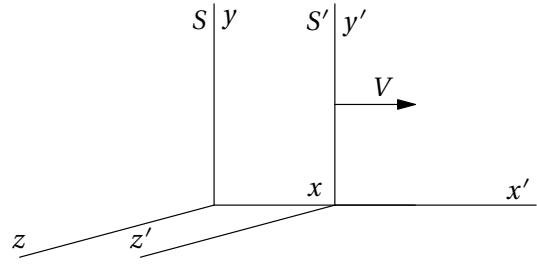
$$\mathbf{g} = \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{g} \mathbf{\Lambda} . \quad (1.8)$$

Toute matrice  $\mathbf{\Lambda}$  respectant cette contrainte définit une *transformation de Lorentz*. Comme  $\mathbf{g}^{-1} = \mathbf{g}$  dans l'espace-temps de Minkowski, on peut inverser la relation ci-haut et obtenir

$$\mathbf{\Lambda}^{-1} = \mathbf{g} \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{g} . \quad (1.9)$$

**nombre de paramètres dans la transformation de Lorentz** Voyons combien de paramètres sont nécessaires pour décrire toutes les transformations de Lorentz possibles. La matrice  $\Lambda$  comporte  $4 \times 4 = 16$  éléments réels. La contrainte (1.7) représente en fait une matrice de contraintes (une pour chaque composante  $g_{ij}$ ), mais comme elle est symétrique lors de l'échange  $i \leftrightarrow j$ , cela ne constitue que 10 contraintes indépendantes. Il reste donc  $16 - 10 = 6$  paramètres indépendants pour couvrir l'ensemble des transformations de Lorentz. Évidemment, une rotation ordinaire dans l'espace constitue une transformation des axes qui, sans impliquer un changement de référentiel, respecte la contrainte ci-dessus. Comme une rotation est définie par 3 paramètres (les angles d'Euler, par exemple), il reste 3 paramètres pour définir les transformations de Lorentz proprement dites, ou *transformation spéciale de Lorentz* (angl. *Lorentz boost*). Ces trois paramètres sont évidemment les trois composantes de la vitesse relative des deux référentiels.

FIGURE 1.2



**transformation de Lorentz et rapidité**

Considérons deux référentiels  $S$  et  $S'$  se déplaçant l'un par rapport à l'autre à une vitesse  $V$  le long de l'axe des  $x$ , comme illustré à la figure 1.2. La transformation de Lorentz décrivant ce changement

de référentiel est la suivante :

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - Vt) & y' &= y \\ t' &= \gamma(t - Vx) & z' &= z \end{aligned} \quad (1.10)$$

où  $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2}$ . On introduit aussi la **rapidité**  $\psi$  définie par la relation

$$\tanh \psi = V \quad (1.11)$$

La transformation de Lorentz prend alors la forme

$$\begin{aligned} x' &= x \cosh \psi - t \sinh \psi & y' &= y \\ t' &= t \cosh \psi - x \sinh \psi & z' &= z \end{aligned} \quad (1.12)$$

L'avantage de la rapidité est que (1) la transformation de Lorentz est formellement similaire à une rotation dans l'espace, où les fonctions circulaires ont été remplacées par des fonctions hyperboliques et (2) la composition de deux transformations de Lorentz successives dans la même direction se fait par simple addition des rapidités. La matrice  $\Lambda$  correspondante est

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -V\gamma & 0 & 0 \\ -V\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \psi & -\sinh \psi & 0 & 0 \\ -\sinh \psi & \cosh \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

mais elle serait différente pour un changement de référentiel accompagné d'une rotation des axes, ou suivant un axe quelconque.

**transformation inverse**

Les composantes covariantes  $A_i$  d'un vecteur se transforment à l'aide de la transposée de la matrice inverse de  $\Lambda$ , selon la relation (8.41) :

$$A'_i = (\Lambda^{-1})^j_i A_j \quad (1.14)$$

Naturellement, la matrice inverse de (1.13) s'obtient simplement en changeant le signe de  $V$ , car il suffit d'inverser la vitesse pour revenir au référentiel initial à partir du nouveau référentiel  $S'$ . Nous allons adopter la notation suivante pour la transformation inverse :

$$(\Lambda^{-1})^i_j = \Lambda_j^i \quad (1.15)$$

(notez l'ordre des indices). Cette notation se justifie en exprimant la transformation d'un vecteur covariant en fonction de sa version contravariante et du tenseur métrique :

$$A'_i = (g_{ik}A^k)' = g_{ik}A'^k = g_{ik}\Lambda^k_l A^l = g_{ik}\Lambda^k_l g^{lj} A_j \quad (1.16)$$

Or, selon l'éq. (1.9), l'expression qui précède  $A_j$  ci-dessus n'est autre que  $\Lambda_i^j$ . Donc

$$\Lambda_i^j = g_{ik}g^{lj}\Lambda^k_l \quad (1.17)$$

Autrement dit, la matrice de transformation inverse s'obtient simplement en élevant et abaissant les indices à l'aide du tenseur métrique et de son inverse, qui est dans ce cas le même dans tous les référentiels (ce point est capital pour que l'argument fonctionne). Notez aussi que la position horizontale des indices (droite ou gauche) est importante et doit être préservée.

**gradient** De même que la position est le prototype du vecteur contravariant, le gradient est le prototype de vecteur covariant. L'opérateur gradient est défini par l'ensemble des dérivées par rapport aux coordonnées :

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \quad (1.18)$$

où  $\nabla$  est le trigradient. Sachant que  $x^j = (\Lambda^{-1})^j_i x'^i$  (transformation inverse), on voit que

$$\partial'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = (\Lambda^{-1})^j_i \partial_j \quad (1.19)$$

et donc que le gradient se transforme comme un vecteur covariant, ce qui justifie la notation utilisée.

**transformation des vecteurs de base** Naturellement, le passage d'un référentiel à un autre peut être vu comme un changement de base dans l'espace-temps considéré comme un espace-vectoriel. En accord avec les relations (8.33) et (8.39), on peut écrire

$$e_i = \Lambda^j_i e'_j \quad e'^i = \Lambda^i_j e^j \quad (1.20)$$

### 1.A.3 Temps propre, vitesse et accélération

**ligne d'univers** Le mouvement d'une particule dans l'espace-temps définit une courbe  $x^i = f^i(\xi)$ , appelée dans ce cas *ligne d'univers* (angl. *world line*), où  $\xi$  est un paramètre définissant la courbe mathématiquement. Toute courbe continue dans un espace quelconque peut bien sûr être représentée par une telle fonction, et le paramètre  $\xi$  peut être choisi de manière arbitraire, pourvu que (i) la relation entre les différentes composantes  $x^i$  soit inchangée et que (ii) tous les points de la courbe soient effectivement décrits par les  $d = 4$  fonctions  $f^i(\xi)$ . Un changement de paramètre  $\xi \rightarrow \xi'(\xi)$  nous fait passer d'un ensemble de fonctions  $f^i(\xi)$  à un ensemble de fonctions différentes  $f'^i(\xi')$ , tel que

$$x^i = f^i(\xi) \equiv f'^i(\xi'(\xi)) . \quad (1.21)$$

Un tel changement de paramètre est souvent appelé *reparamétrisation*. Notez qu'une reparamétrisation n'affecte pas les *valeurs* de  $x^i$ , mais seulement la relation mathématique (ou fonction) entre  $x^i$  et le paramètre décrivant la courbe. En particulier, on pourrait utiliser la coordonnée temporelle comme paramètre ( $\xi = t$ ). On utilise généralement le *temps propre* ( $\xi = \tau$ ), tel que défini ci-dessous.



**Temps propre** Le **temps propre**  $\tau$  d'un objet en mouvement est simplement le temps tel qu'il s'écoule dans le référentiel de l'objet. Dans le référentiel inertiel  $S'$  qui se déplace avec l'objet à un instant donné, la différentielle de temps propre coïncide avec  $dt'$ . Cependant, l'objet peut en général être accéléré de sorte que le référentiel  $S'$  n'est pas le même à tous les instants. Quel que soit le référentiel dans lequel on observe l'objet, la différentielle de temps propre peut toujours être exprimée comme suit :

$$d\tau = \sqrt{dx^i dx_i} = \sqrt{dt^2 - d\mathbf{r}^2} = dt \sqrt{1 - \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2} = dt \sqrt{1 - \mathbf{v}^2} = \frac{dt}{\gamma} \quad (1.22)$$

où  $v$  est la vitesse de l'objet, qui peut dépendre du temps. En effet, dans le référentiel  $S'$ ,  $dx^i dx_i = dt'^2$  et de plus l'expression ci-haut est invariante, puisque  $dx^i dx_i$  est un invariant.

Pour l'obtenir le temps propre total écoulé sur la ligne d'univers de l'objet, on doit procéder par intégration :

$$\tau = \int d\tau = \int \frac{dt}{\gamma} = \int dt \sqrt{1 - \mathbf{v}^2} \quad (1.23)$$

La différentielle de temps propre coïncide avec la différentielle d'intervalle dans un système d'unités géométriques ( $c = 1$ ) :  $d\tau = ds$ . Par contre le temps propre écoulé le long d'une ligne d'univers non rectiligne n'est pas égal à l'intervalle entre les extrémités de cette ligne : la distance entre deux points diffère de la longueur d'une courbe qui les relie. L'expression *temps propre* est également plus évocatrice, plus intuitive.

**4-vitesse** Considérons un objet se déplaçant à une 3-vitesse instantanée  $\mathbf{v}(t)$ . On définit sa **quadrivitesse**  $u^i$  comme

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} \quad \text{ou} \quad \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \quad (1.24)$$

La différentielle  $d\tau$  est invariante, alors que  $dx^i$  se transforme comme les coordonnées; donc  $u^i$  est un vecteur. En fonction de la vitesse  $\mathbf{v}$ , les composantes explicites sont

$$u^i : (\gamma, \gamma\mathbf{v}) \quad \text{car} \quad \frac{d}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} = \gamma \frac{d}{dt} \quad (1.25)$$

Par contraction on obtient l'invariant  $u^i u_i = 1$ . Le temps propre écoulé le long d'une ligne d'univers peut alors s'écrire comme

$$\tau = \int d\tau = \int u_i u^i d\tau = \int u_i dx^i \quad (1.26)$$

**4-accélération** On définit aussi la quadriaccélération

$$a^i = \frac{du^i}{d\tau} = \gamma \frac{du^i}{dt} \quad \text{ou} \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \quad (1.27)$$

L'expression explicite (1.25) de la quadrivitesse donne

$$a^i = \gamma \frac{d}{dt} (\gamma, \gamma\mathbf{v}) \quad (1.28)$$

Puisque

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{(1-\mathbf{v}^2)^{3/2}}, \quad (1.29)$$

où  $\mathbf{a}$  est le trivecteur accélération, on trouve sans peine que

$$a^i = \left( \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})}{(1-\mathbf{v}^2)^2}, \frac{\mathbf{a}}{1-\mathbf{v}^2} + \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})\mathbf{v}}{(1-\mathbf{v}^2)^2} \right) \quad (1.30)$$

À partir de ce vecteur, on peut construire certains invariants. Par exemple,

$$\begin{aligned} u_i a^i &= u_i \frac{du^i}{d\tau} \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (u_i u^i) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.31)$$

En utilisant les expressions explicites pour  $u^i$  et  $a^i$  en fonction des composantes temporelles et spatiales, la condition  $u_i a^i = 0$  ressort de manière triviale, c'est-à-dire n'apporte rien de nouveau. Par contre, un autre invariant, intéressant celui-là, est  $a^i a_i$ . On calcule que

$$a^i a_i = -\gamma^4 (\mathbf{a}^2 + \gamma^2 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})^2) \quad (1.32)$$

Cette quantité est la même dans tous les référentiels, même si les valeurs de  $\mathbf{v}$  et de  $\mathbf{a}$  changent.

**Vecteur courant** Un autre vecteur est formé par la densité de courant et la densité de charge :

$$J^i : (\rho, \mathbf{J}) \quad (1.33)$$

Pour s'en convaincre, il suffit d'écrire l'équation de continuité comme

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \partial_i J^i = 0 \quad (1.34)$$

Comme la conservation de la charge doit être valide dans tous les référentiels et que  $\partial_i$  est un vecteur, le quadricourant  $J^i$  en est forcément un lui aussi, par le théorème du quotient.

## B Dynamique relativiste

### 1.B.1 Action d'une particule libre

En relativité, les équations du mouvement doivent être les mêmes dans tous les référentiels inertiels. Pour cela il faut que l'action soit invariante par rapport aux transformations de Lorentz, c'est-à-dire qu'elle ait la même forme dans tous les référentiels. Ainsi, si elle est stationnaire dans un référentiel, elle le sera dans tous les référentiels. Guidés par ce principe, essayons d'obtenir l'action d'une particule libre.

Soit  $x^i(\tau)$  la ligne d'univers de la particule, décrite en fonction du temps propre  $\tau$ . La quantité invariante la plus simple qu'on peut construire avec une telle ligne d'univers est sa longueur propre, c'est-à-dire le temps écoulé dans le référentiel (non inertielle, en général) de la particule. Nous supposons donc que l'action d'une particule libre est simplement son temps propre. Cette quantité doit être multipliée par une constante qui donne à l'action ses unités naturelles, soit celles d'une énergie fois un temps. La seule constante relative à la particule ayant les unités d'une énergie est sa masse  $m$ . On suppose donc que l'action est

$$S = -m \int d\tau \quad (1.35)$$

Puisque  $d\tau = dt/\gamma$ , cela revient à

$$S = -m \int dt \sqrt{1 - \mathbf{v}^2} \quad (1.36)$$

Le lagrangien d'une particule libre est donc

$$L = -m \sqrt{1 - \mathbf{v}^2} \quad (1.37)$$

Dans l'approximation non relativiste ( $v \ll 1$ ) on a  $\sqrt{1 - \mathbf{v}^2} \approx 1 - \mathbf{v}^2/2$  et donc

$$L \approx -m + \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \quad (1.38)$$

On retrouve donc le lagrangien habituel  $\frac{1}{2} m \mathbf{v}^2$  d'une particule libre, plus une constante ( $-m$ ) qui n'affecte pas les équations du mouvement.

L'impulsion généralisée  $\mathbf{p}$  est définie comme

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}} \quad (1.39)$$

Le hamiltonien qui correspond à ce lagrangien est

$$H = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = \frac{m \mathbf{v}^2}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}} + m \sqrt{1 - \mathbf{v}^2} = \frac{m}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}} \quad (1.40)$$

Le hamiltonien est dans ce cas égal à l'énergie cinétique de la particule, plus une constante appelée **énergie de masse**. Dans l'approximation non relativiste,  $H$  devient

$$H \approx m + \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \quad (1.41)$$

On reconnaît l'énergie cinétique usuelle, plus une constante : l'énergie au repos  $m$ .

Le hamiltonien doit en principe être exprimé en fonction des moments conjugués. On vérifie facilement dans ce cas-ci que  $H$  a l'expression suivante en fonction de  $\mathbf{p}$  :

$$H = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \quad (1.42)$$

## 1.B.2 Particule chargée dans un champ électromagnétique

**potentiel électromagnétique** Considérons maintenant non pas une particule libre, mais une particule de charge  $e$  dans un champ électromagnétique. Nous allons supposer que le champ électromagnétique peut être décrit par un vecteur  $A^i(x)$ , fonction de la position et du temps. Nous constaterons plus tard que ce vecteur est constitué du potentiel électrique  $\Phi$  comme composante temporelle, et du potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  comme partie spatiale :  $A^i = (\Phi, \mathbf{A})$ , mais cette identification n'est pas nécessaire pour le moment. Nous allons cependant supposer que le produit  $eA^i$  a les unités de l'énergie, ce qui compatible avec cette identification.<sup>3</sup>

À l'action de la particule libre – appelons-la  $S_0$  – on doit ajouter une action  $S_1$  décrivant l'interaction de cette particule avec le champ électromagnétique. Cette action doit bien sûr être invariante. L'invariant le plus simple qu'on peut construire à l'aide du vecteur  $A^i$  et du mouvement de la particule est l'intégrale

$$S_1 = -e \int A_i dx^i \quad (1.43)$$

où nous avons multiplié par la charge  $e$  de la particule, car l'interaction entre une particule chargée et le champ électromagnétique doit nécessairement être proportionnelle à sa charge. L'intégrale est effectuée sur la ligne d'univers de la particule. Comme l'intégrand est la contraction de deux vecteurs, il est forcément invariant. Cette action peut aussi s'exprimer ainsi :

$$\begin{aligned} S_1 &= e \int (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} - \Phi dt) \\ &= e \int dt (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - \Phi) \end{aligned} \quad (1.44)$$

L'action à considérer est l'action totale  $S_0 + S_1$ , ou le lagrangien correspondant :

$$L = -m \sqrt{1 - \mathbf{v}^2} + e \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e \Phi \quad (1.45)$$

Nous allons maintenant obtenir les équations du mouvement et s'assurer qu'elles coïncident avec la formule connue de la force de Lorentz. Les équations de Lagrange sont, dans ce cas,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{m \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}} \right) + e \dot{\mathbf{A}} - e v_a (\nabla A_a) + e \nabla \Phi \quad (1.46)$$

3. Nous allons utiliser le système international (SI) pour les unités électromagnétiques, en dépit qu'il ne soit pas idéal pour décrire l'électromagnétisme dans un contexte relativiste. Le système de Heaviside-Lorentz lui est certainement préférable, mais est moins familier.

Le premier terme du membre de droite est par définition la force  $\mathbf{F}$  (la dérivée de la quantité de mouvement par rapport au temps). On peut donc écrire

$$\mathbf{F} = -e\nabla\Phi - e\dot{\mathbf{A}} + e\mathbf{v}_b\nabla A_b \quad (1.47)$$

Notons que la dérivée temporelle  $\dot{\mathbf{A}}$  est une dérivée **totale** par rapport au temps et non une dérivée partielle. Cette dérivée est non seulement due à la variation temporelle de  $\mathbf{A}$  à une position donnée, mais aussi au déplacement de la particule dans le temps d'un point à un autre :

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} \quad (1.48)$$

La composante  $a$  de la force totale peut donc s'exprimer comme

$$F_a = -e\partial_a\Phi - e\frac{\partial A_a}{\partial t} - e v_b\partial_b A_a + e v_b\partial_a A_b \quad (1.49)$$

mais

$$-v_b\partial_b A_a + v_b\partial_a A_b = (\mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}))_a \quad (1.50)$$

Donc on obtient

$$\mathbf{F} = -e\nabla\Phi - e\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + e\mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) \quad (1.51)$$

En fonction du champ électrique  $\mathbf{E}$  et du champ magnétique  $\mathbf{B}$  définis par

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A} \quad (1.52)$$

on écrit finalement

$$\boxed{\mathbf{F} = e\mathbf{E} + e\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}} \quad (1.53)$$

qu'on appelle la **force de Lorentz**.

Construisons maintenant le hamiltonien. Le moment généralisé est

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}} + e\mathbf{A} \quad (1.54)$$

Le moment généralisé est, dans ce cas, distinct de la quantité de mouvement  $m\gamma\mathbf{v}$ . Le hamiltonien correspondant est

$$H = \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} - L = \frac{m}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}} + e\Phi \quad (1.55)$$

où il est compris que la vitesse  $\mathbf{v}$  doit être remplacée par  $(\mathbf{p} - e\mathbf{A})/m\gamma$ . Si on définit la *quantité de mouvement*

$$\boldsymbol{\pi} := \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}} = \mathbf{p} - e\mathbf{A} \quad (1.56)$$

alors on a la relation suivante, conséquence immédiate de la relation connue entre l'énergie et la quantité de mouvement d'une particule :

$$H = \sqrt{m^2 + \boldsymbol{\pi}^2} + e\Phi = \sqrt{m^2 + (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2} + e\Phi \quad (1.57)$$

Ceci est le hamiltonien relativiste d'une particule chargée dans un champ électromagnétique quelconque.

Dans l'approximation non relativiste, le hamiltonien devient

$$\boxed{H \approx m + \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + e\Phi} \quad (1.58)$$

### 1.B.3 Forme covariante de l'équation du mouvement

Plutôt que de passer par les équations de Lagrange, qui ne sont pas manifestement covariantes, nous pourrions déduire les équations du mouvement sous une forme covariante directement à partir du principe de la moindre action. C'est ce que nous ferons ici. L'action d'une particule chargée dans un champ électromagnétique est

$$\begin{aligned} S &= -m \int d\tau - e \int A_i dx^i \\ &= -m \int \sqrt{dx^i dx_i} - e \int A_i dx^i \end{aligned}$$

En pratique, le mouvement de la particule serait paramétré d'une certaine manière, par exemple à l'aide de son temps propre  $\tau$ . Nous désignerons par un point les dérivées par rapport à ce paramètre :

$\dot{x}^i = \frac{dx^i}{d\tau}$ . L'action peut alors s'écrire

$$S = -m \int \sqrt{\dot{x}^i \dot{x}_i} d\tau - e \int A_i \dot{x}^i d\tau \quad (1.59)$$

Notons que nous ne supposons pas immédiatement que le paramètre utilisé est le temps propre, de sorte que  $\dot{x}^i \dot{x}_i \neq 1$  en général.

Nous devons maintenant effectuer une variation de la ligne d'univers :  $x^i \rightarrow x^i + \delta x^i$ . La variation correspondante de l'action est, au premier ordre,

$$\begin{aligned} \delta S &= -m \int \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^i \dot{x}_i}} \dot{x}_i \delta \dot{x}^i d\tau - e \int \partial_j A_i \delta x^j \dot{x}^i d\tau - e \int A_i \delta \dot{x}^i d\tau \\ &= -m \int \dot{x}_i \delta \dot{x}^i d\tau - e \int \partial_i A_j \delta x^i \dot{x}^j d\tau - e \int A_i \delta \dot{x}^i d\tau \\ &= m \int \ddot{x}_i \delta x^i d\tau - e \int \partial_i A_j \dot{x}^j \delta x^i d\tau + e \int \partial_j A_i \dot{x}^j \delta x^i d\tau \\ &= m \int \ddot{x}_i \delta x^i d\tau - e \int F_{ij} \dot{x}^j \delta x^i d\tau \end{aligned} \quad (1.60)$$

Notons que nous avons utilisé la propriété  $\dot{x}^i \dot{x}_i = 1$  de la quadrivitesse, mais seulement *après* avoir effectué la variation. En effet, cette propriété n'est vraie que si le temps propre est utilisé comme paramètre de la ligne d'univers, alors que la variation pourrait être appliquée dans une paramétrisation quelconque  $x^i(\xi)$ . Mais dès la deuxième équation, nous avons adopté le temps propre comme paramètre. Nous avons effectué des intégrations par parties dans la quatrième ligne. Nous avons aussi introduit le *tenseur de Faraday*

$$F_{ij} := \partial_i A_j - \partial_j A_i \quad (1.61)$$

Le tenseur de Faraday, de par sa définition, est antisymétrique. On constate, en utilisant la relation (1.52) que ses composantes sont les composantes des champs électrique et magnétique :

$$[F_{ij}] : \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.62)$$

Comme la variation  $\delta x^i$  est arbitraire, la condition  $\delta S = 0$  entraîne l'équation suivante :

$$m \ddot{x}_i = e F_{ij} \dot{x}^j \quad (1.63)$$

Il s'agit en fait de la force de Lorentz, exprimée sous une forme covariante. Aucune approximation n'a été effectuée : c'est donc une expression relativiste. C'est un exercice simple de démontrer qu'on retrouve la forme habituelle de cette force en substituant l'expression de la quadriaccélération et de la quadrivitesse.

Cette équation s'exprime également sous la forme suivante :

$$\dot{u}^i = \frac{e}{m} F^i_j u^j \quad (1.64)$$

où le tenseur mixte  $F^i_j = g^{ik} F_{kj}$  a les composantes suivantes (les trois dernières rangées changent de signe par rapport à  $F_{ij}$ ) :

$$[F^i_j] : \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.65)$$

L'équation (1.64) est une équation matricielle simple dont la solution générale s'exprime en fonction des vecteurs et valeurs propres de la matrice  $F^i_j$ .

#### 1.B.4 Transformation des champs électromagnétiques

Il est bon de détailler la transformation des composantes de  $F^{ij}$  lors d'un changement de référentiel. Comme il s'agit d'un tenseur doublement contravariant, la loi de transformation est la suivante :

$$F'^{ij} = \Lambda^i_k \Lambda^j_l F^{kl} \quad (1.66)$$

Supposons que les deux référentiels  $S$  et  $S'$  se déplacent l'un par rapport à l'autre le long de l'axe des  $x$ . La matrice de transformation est donnée par l'expression (1.13). Le nouveau tenseur électromagnétique est alors obtenu par multiplication des matrices :

$$\begin{pmatrix} 0 & -E'_x & -E'_y & -E'_z \\ E'_x & 0 & -B'_z & B'_y \\ E'_y & B'_z & 0 & -B'_x \\ E'_z & -B'_y & B'_x & 0 \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \Lambda^T \quad (1.67)$$

## Chapitre 1. Rappels de relativité restreinte

On obtient explicitement

$$\begin{aligned}E'_x &= E_x & B'_x &= B_x \\E'_y &= \gamma(E_y - v B_z) & B'_y &= \gamma(B_y + v E_z) \\E'_z &= \gamma(E_z + v B_y) & B'_z &= \gamma(B_z - v E_y)\end{aligned}\tag{1.68}$$

Exprimons ces transformations différemment en appelant respectivement  $\mathbf{E}_\perp$  et  $\mathbf{E}_\parallel$  les composantes de  $\mathbf{E}$  perpendiculaire et parallèle à la direction de  $\mathbf{v}$ , la vitesse relative des référentiels. On écrit alors

$$\begin{aligned}\mathbf{E}'_\perp &= \gamma(\mathbf{E}_\perp + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_\perp) & \mathbf{E}'_\parallel &= \mathbf{E}_\parallel \\ \mathbf{B}'_\perp &= \gamma(\mathbf{B}_\perp - \mathbf{v} \wedge \mathbf{E}_\perp) & \mathbf{B}'_\parallel &= \mathbf{B}_\parallel\end{aligned}\tag{1.69}$$

### Remarques :

- ◆ Supposons que  $\mathbf{E} = 0$  et  $\mathbf{B} \neq 0$  dans  $S$ . Par un changement de référentiel, on peut augmenter la composante de  $\mathbf{B}$  perpendiculaire à  $\mathbf{v}$  et faire apparaître un champ électrique perpendiculaire à  $\mathbf{v}$ .
- ◆ De même, si  $\mathbf{E} \neq 0$  et  $\mathbf{B} = 0$  dans  $S$ , un changement de référentiel augmente la composante perpendiculaire de  $\mathbf{E}$  et fait apparaître un champ magnétique.
- ◆ Si  $\mathbf{B} \neq 0$  et  $\mathbf{E} = 0$  dans un référentiel, alors il n'existe aucun référentiel dans lequel  $\mathbf{B} = 0$ . De même, si  $\mathbf{B} = 0$  et  $\mathbf{E} \neq 0$  dans un référentiel, alors  $\mathbf{E} \neq 0$  dans tous les référentiels.



## C Problèmes

### Problème 1.1 Addition des vitesses

Soit deux référentiels  $S$  et  $S'$  reliés par la transformation de Lorentz (1.10) et une particule se déplaçant à une vitesse  $\mathbf{v}$  dans  $S$ . Montrez que les composantes de sa vitesse  $\mathbf{v}'$  dans  $S'$  sont les suivantes :

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - v_x V} \quad v'_y = \frac{v_y}{1 - v_x V} \sqrt{1 - \mathbf{v}^2} \quad v'_z = \frac{v_z}{1 - v_x V} \sqrt{1 - \mathbf{v}^2} \quad (1.70)$$

### Problème 1.2 Tenseur métrique et élément de volume

Supposons que les coordonnées spatiales  $x^i$  soient définies relativement à une base quelconque  $\{\mathbf{e}_i\}$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Montrez que l'élément de volume, indépendant de la base, est donné par

$$d^3 x \sqrt{g} \quad (1.71)$$

où  $g := \det(g_{ij})$  est le déterminant du tenseur métrique.

### Problème 1.3 accélération constante

Un vaisseau spatial quitte la Terre (l'origine) au temps  $t = 0$  et se déplace dans la direction  $x$  avec une accélération constante  $g$ , telle que ressentie par ses occupants.

**A** Calculez la vitesse  $v(t)$  et la position  $x(t)$  du vaisseau, vues du référentiel terrestre ( $t$  est le temps terrestre). Calculez et exprimez vos résultats en unités géométriques ( $c = 1$ ). Ensuite, restaurez la valeur de  $c$  dans le résultat final en utilisant strictement l'analyse dimensionnelle. Indice : l'invariant associé à la quadri-accélération peut être utile, de même que la rapidité  $\eta$ .

**B** Montrez que si le vaisseau garde toujours la même accélération propre  $g$ , un signal lumineux envoyé de la Terre à un temps  $t > 1/g$  ne pourra jamais l'atteindre.

**C** La destination du vaisseau est la galaxie d'Andromède (2,8 millions d'a.l.). Pour arriver à bon port à vitesse nulle, le pilote change le signe de l'accélération à mi-parcours afin de ralentir pendant la deuxième moitié du trajet. Calculez le temps propre (le temps tel que ressenti par les occupants) nécessaire afin d'atteindre la destination, si l'accélération  $g$  est égale à  $9,8 \text{ m/s}^2$ .

### Problème 1.4 Forme générale de la transformation de Lorentz

En partant de la transformation de Lorentz pour une vitesse relative  $\mathbf{u} = u\mathbf{x}$  des deux référentiels, montrez que la forme plus générale de la transformation de Lorentz pour une vitesse relative

quelconque  $\mathbf{u}$  est

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma u_x & -\gamma u_y & -\gamma u_z \\ -\gamma u_x & 1 + (\gamma - 1)\hat{u}_x^2 & (\gamma - 1)\hat{u}_x \hat{u}_y & (\gamma - 1)\hat{u}_x \hat{u}_z \\ -\gamma u_y & (\gamma - 1)\hat{u}_x \hat{u}_y & 1 + (\gamma - 1)\hat{u}_y^2 & (\gamma - 1)\hat{u}_y \hat{u}_z \\ -\gamma u_z & (\gamma - 1)\hat{u}_x \hat{u}_z & (\gamma - 1)\hat{u}_y \hat{u}_z & 1 + (\gamma - 1)\hat{u}_z^2 \end{pmatrix} \quad (1.72)$$

où

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}} \quad \hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \quad (1.73)$$

Indice : commencez par le cas  $u_z = 0$ . Dans ce cas, La matrice de transformation peut s'obtenir de la matrice associée à une vitesse relative  $\mathbf{u} = u\mathbf{x}$  par une rotation supplémentaire dans le plan  $x y$  appliquée avant la transformation de Lorentz, et la rotation inverse appliquée après. Connaissant la forme de la matrice de rotation, cela vous mènera à la forme ci-dessus dans le cas  $u_z = 0$ . Ensuite, donnez un argument purement inductif pour parvenir à la forme ci-dessus. Vous pouvez vous servir d'un logiciel de calcul symbolique (sympy ou Mathematica) si vous voulez; dans ce cas, annexe une copie imprimée de votre fichier de calcul avec les développements qui y apparaissent clairement.

### Problème 1.5 composition des transformations de Lorentz

Considérons trois référentiels :  $S$ ,  $S'$  et  $S''$ . On passe de  $S$  à  $S'$  à l'aide d'une transformation de Lorentz simple de vitesse  $u$  dans la direction  $x$ . De même, on passe de  $S'$  à  $S''$  à l'aide d'une transformation de Lorentz simple de vitesse  $v$  dans la direction  $y$ . Montrez que la transformation qui nous fait passer directement de  $S$  à  $S''$  est le produit d'une transformation de Lorentz simple et d'une rotation. Déterminer l'axe et l'angle de cette rotation.

Indice : Construisez les matrices associées aux deux transformations de Lorentz (notées  $\Lambda_u$  et  $\Lambda_v$ ), ainsi que leur produit  $\Lambda_v \Lambda_u$ . Multipliez le résultat par une matrice de rotation  $R(\theta)$  d'angle  $\theta$  dans le plan approprié et déterminez l'angle  $\theta$  pour que le produit  $R \Lambda_v \Lambda_u$  ne comporte aucune rotation. Utilisez l'expression des transformations de Lorentz en fonction des rapidités et procédez à un calcul symbolique.

### Problème 1.6 paradoxe des jumeaux

Nous allons étudier ici le paradoxe des jumeaux de Langevin, notés ici A et B. Alors que A reste sur Terre, à  $x = 0$ , B part dans un vaisseau spatial et sa ligne d'univers est décrite par la fonction  $x(t) = \ell(1 - \cos \omega t)$ , entre les temps  $t = 0$  et  $t = 2\pi/\omega$ , moment auquel B revient sur Terre. Appelons  $\tau_A$  et  $\tau_B$  les temps propres de A et de B pendant ce voyage.

**A** Quelle est la valeur maximale de  $\omega$  possible ?

**B** Obtenez une expression pour le rapport  $\tau_B/\tau_A$  en fonction de  $\omega\ell$  et de l'intégrale elliptique

complète de seconde espèce définie par

$$K(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} \, d\theta$$

Faites-en un graphique en fonction de  $\omega\ell$ . Montrez que  $\tau_B < \tau_A$ .

**C** Obtenez une expression approximative de ce rapport dans le cas des petites vitesses.

### Problème 1.7 Effet Compton

Ce problème vise à illustrer comment les lois de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement permettent de déterminer le changement dans l'énergie d'un photon, suite à une collision avec un électron au repos (effet Compton). Le formalisme des quadrivecteurs permet de résoudre ce problème de manière particulièrement efficace et élégante. Rappelons qu'une particule de quantité de mouvement  $\mathbf{p}$  est associée à une onde de longueur d'onde  $\lambda = h/|\mathbf{p}|$  ( $h$  est la constante de Planck).

Un photon de quantité de mouvement  $\mathbf{p}_1$  est incident sur un électron au repos (masse  $m$ ), et est ensuite dévié d'un angle  $\theta$ . Exprimez le changement dans la longueur d'onde du photon en fonction de l'angle  $\theta$  et de la longueur d'onde de Compton de l'électron, définie comme  $\lambda_c := h/mc$ . Démontrez cette relation en vous servant des quadrivecteurs.

**Indice :** calculez l'invariant  $p_4^2 = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3)^2$ , où  $\mathbf{p}_1$  et  $\mathbf{p}_3$  sont respectivement les quadrivecteurs énergie-impulsion des photons incident et diffusé, alors que  $\mathbf{p}_2$  est celui de l'électron qui sert de cible. Effectuez le développement de cette expression le plus loin possible avant de substituer les composantes des quadrivecteurs.

### Problème 1.8 mouvement dans un champ électrique constant

**A** Une particule de masse  $m$  et de charge  $e$  se déplace dans un champ électrique uniforme  $\mathbf{E} = E\mathbf{x}$ . Supposez que la particule est initialement au repos et à l'origine. Exprimez les coordonnées de la particule en fonction du temps propre  $\tau$ . Indice : solutionnez l'éq. (1.64) par une méthode matricielle.

**B** Exprimez la coordonnée  $x$  en fonction du temps  $t$ . Montrez que, pour des temps petits, on retrouve le mouvement attendu en physique non relativiste.

### Problème 1.9 mouvement dans un champ magnétique constant

**A** Une particule de masse  $m$  et de charge  $e$  se déplace dans un champ magnétique uniforme  $\mathbf{B} = B\mathbf{z}$ . Supposez que la particule a initialement une 3-vitesse  $v_0$  dans la direction  $x$ . Exprimez les coordonnées de la particule en fonction du temps propre  $\tau$ , modulo une constante additive. Indice : solutionnez l'éq. (1.64) par une méthode matricielle.

**B** Comment la fréquence du mouvement dépend-elle de l'énergie de la particule?

**Problème 1.10 mouvement dans des champs magnétique et électrique parallèles**

Une particule de masse  $m$  et de charge  $e$  se déplace dans des champs magnétique et électrique constants et parallèles :  $\mathbf{E} = E\mathbf{z}$  et  $\mathbf{B} = B\mathbf{z}$ . Supposez que la particule a initialement une 3-vitesse  $v_0$  dans la direction  $x$ . Exprimez les coordonnées de la particule en fonction du temps propre  $\tau$ , modulo une constante additive. Indice : solutionnez l'éq. (1.64) par une méthode matricielle.

**Problème 1.11 mouvement dans des champs magnétique et électrique croisés**

Une particule chargée de masse  $m$  et de charge  $e$  se déplace dans des champs électrique et magnétique croisés :  $\mathbf{E} = E\mathbf{x}$  et  $\mathbf{B} = B\mathbf{z}$ .

**A** Supposez que  $|E| < |B|$ . Trouvez le changement de référentiel nécessaire pour ramener le problème à celui d'une particule en champ magnétique seulement, sans champ électrique. Faites un schéma de la trajectoire de la particule dans le référentiel original.

**B** Supposez que  $|E| > |B|$ . Trouvez le changement de référentiel nécessaire pour ramener le problème à celui d'une particule en champ électrique seulement, sans champ magnétique. Faites un schéma de la trajectoire de la particule dans le référentiel original.

**C** Supposez que  $E = B$  et que la particule est initialement au repos. Exprimez les coordonnées de la particule en fonction du temps propre  $\tau$ , en solutionnant l'éq. (1.64). Indice : solutionnez l'éq. (1.64) par une méthode matricielle et calculez directement l'exponentielle résultante à l'aide de son développement de Taylor.

## CHAPITRE 2

# GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE

### A Vecteurs et tenseurs sur un espace courbe

**l'espace n'est pas vectoriel** Comme indiqué au chapitre 1, les quantités physiques d'intérêt sont souvent des vecteurs et des tenseurs. Or, un espace courbe ne possède pas la structure d'un espace vectoriel. Considérons par exemple la surface d'une sphère, soit un espace courbe de dimension 2, qu'on désignera par  $S_2$ . Cet espace est plongé dans l'espace cartésien de dimension 3 ( $\mathbb{R}^3$ ) qui, lui, est un espace vectoriel. Les points appartenant à  $S_2$  peuvent être considérés comme des vecteurs dans  $\mathbb{R}^3$ , mais pas comme des vecteurs dans  $S_2$ , notion qui n'a pas de sens. Spécifiquement, on peut cartographier  $S_2$  avec les coordonnées polaires habituelles  $(\theta, \phi)$ . Par contre, l'addition «vectorielle» des composantes,  $(\theta_1, \phi_1) + (\theta_2, \phi_2) = (\theta_1 + \theta_2, \phi_1 + \phi_2)$ , ne définit pas une addition des points appartenant à  $S_2$ , ne serait-ce qu'en raison de la périodicité de ces coordonnées.

**espace tangent** Par contre, la seule notion qui doit être remise en question ici est celle de vecteur position. Si on s'intéresse plutôt à la vitesse d'une particule ou à toute autre quantité définie localement, on peut continuer d'utiliser la notion de vecteur si on se place sur le plan de  $\mathbb{R}^3$  qui est tangent à la sphère en un point donné. C'est sur cet *espace tangent* que les vecteurs et tenseurs seront définis.

Commençons par établir la notation. Nous allons considérer un espace courbe  $V_d$  de dimension  $d$  plongé dans un espace plat  $V_D$  de dimension  $D > d$ , appelé *espace-hôte*. L'espace-hôte  $V_D$  est muni d'une distance euclidienne (comme l'espace tridimensionnel habituel) ou pseudo-euclidienne (comme l'espace-temps de Minkowski). Dans ce chapitre, la distinction entre espaces-hôte euclidien et pseudo-euclidien ne sera pas importante. Les points de  $V_D$  seront désignés par  $\mathbf{X}$ , et l'espace  $V_d$  peut être défini comme une fonction à  $d$  variables prenant ses valeurs dans  $V_D$ , notée  $\mathbf{X}(x)$ , où  $x = (x^1, \dots, x^d)$ . Attention! Les coordonnées portent un indice «contravariant» afin de les étiqueter, mais elles ne forment pas un vecteur contravariant! Certaines d'entre elles peuvent être des angles, etc.

L'espace tangent  $T_x$  au point  $x$  est engendré par les vecteurs

$$e_i = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^i} \quad (2.1)$$

qui en forment une base. Un vecteur  $A$  sur  $T_x$  peut être exprimé en fonction de composantes contravariantes :  $A = A^i e_i$ .

Le fait de supposer que l'espace  $V_d$  puisse être plongé dans un espace pseudo-euclidien de dimension supérieure facilite les démonstrations et donne plus de prise à l'intuition. Ce n'est cependant pas une hypothèse nécessaire : on peut très bien s'en passer et construire la géométrie riemannienne de manière *intrinsèque*. Cependant, cela nous prendrait un peu plus de temps, car certains concepts, en particulier la notion d'espace tangent, de transport parallèle, etc., devraient être introduits avec plus de soin. D'un autre côté, l'hypothèse que tout espace de dimension  $d$  puisse être plongé dans un espace euclidien ou pseudo-euclidien de dimension  $D > d$  est validée par le [théorème du plongement](#), dû à [John Forbes Nash](#). Nous ne perdons donc rien en généralité en supposant que ce plongement existe.

**changements de coordonnées** L'espace  $V_d$  peut être décrit par plusieurs systèmes de coordonnées différents. On pourrait passer des coordonnées  $x^i$  aux coordonnées  $x'^i$ , qui peuvent s'exprimer en fonction des anciennes coordonnées  $x^i$ . Ce changement de coordonnées est caractérisé par la matrice jacobienne

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \quad \text{et son inverse} \quad \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} . \quad (2.2)$$

Notons que

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} = \delta_j^i \quad (2.3)$$

En notation matricielle, on notera ces matrices

$$\left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'} \right) \quad \text{et} \quad \left( \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}} \right) = \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'} \right)^{-1} \quad (2.4)$$

Le changement de coordonnées va affecter les vecteurs de base sur  $T_x$  :

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^i} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x'^j} \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} \mathbf{e}'_j \quad (2.5)$$

La matrice de changement de base est en fait la matrice jacobienne. À la différence d'un espace décrit par des coordonnées cartésiennes, elle dépend maintenant de  $x$ .

**tenseur métrique** La correspondance entre vecteurs contravariants et vecteurs covariants doit se faire à l'aide du tenseur métrique. On suppose que la notion d'intervalle sur l'espace  $V_d$  est héritée de la métrique sur  $V_D$ , qu'on va noter par le produit scalaire  $\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}'$ . L'intervalle entre deux points  $x$  et  $x + dx$  et alors donné par

$$ds^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^j} dx^i dx^j \quad (2.6)$$

On définit le tenseur métrique

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^j} \quad (2.7)$$

de sorte que

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (2.8)$$

Nous avons donc tous les éléments permettant de définir les vecteurs et tenseurs sur l'espace  $T_x$ , c'est-à-dire définis localement au point  $x$ . En particulier, lors d'un changement de coordonnées,

$$A'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} A^j \quad \text{et} \quad A'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} A_j \quad (2.9)$$

**gradient** Rappelons que le prototype du vecteur covariant est le gradient d'un scalaire  $\phi$ . Lors d'un changement de coordonnées, le gradient se transforme comme suit :

$$\partial'_i \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x'^i} = \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \partial_j \phi \quad (2.10)$$

ce qui correspond bien à la transformation obtenue en (1.19), où  $(\partial x / \partial x')$  remplace la transformation de Lorentz inverse  $\Lambda^{-1}$ .

**intégrales invariantes** Pour être indépendante du système de coordonnées, l'intégrale  $I$  sur l'espace ou l'espace-temps d'une fonction scalaire  $f(x)$  doit prendre la forme suivante :

$$I = \int d\Omega \sqrt{|g|} f(x) \quad g = \det(g_{ij}) \quad (2.11)$$

où  $d\Omega = d^d x$  désigne l'élément de volume. Pourquoi devons-nous introduire ce facteur  $\sqrt{|g|}$  ? Lors d'un changement de coordonnées, la mesure d'intégration se transforme à l'aide du jacobien :

$$d^d x' = d\Omega \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| \quad \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| = \det \left( \frac{\partial x}{\partial x'} \right) \quad (2.12)$$

Le tenseur métrique, lui, se transforme ainsi :

$$g'_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} g_{kl} \quad (2.13)$$

En notation matricielle, cette relation prend la forme suivante :

$$\mathbf{g}' = \left( \frac{\partial x}{\partial x'} \right)^T \mathbf{g} \left( \frac{\partial x}{\partial x'} \right) \quad (2.14)$$

Donc, en calculant le déterminant des deux côtés,

$$g' = g \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|^2 \quad (2.15)$$

et donc

$$\sqrt{|g'|} d\Omega' = \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right| \sqrt{|g|} \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| d\Omega = \sqrt{|g|} d\Omega \quad (2.16)$$

car le premier jacobien annule le deuxième (son inverse). Bref, la combinaison  $\sqrt{|g|} d\Omega$  est un invariant et doit être utilisée comme mesure d'intégration lorsqu'on désire obtenir une quantité invariante à partir d'un intégrant scalaire. Notons que dans le cas d'un espace pseudo-euclidien, le déterminant de  $g_{ij}$  est négatif et la valeur absolue est importante. Voir à cet effet l'annexe 2.F pour un traitement plus complet des intégrales dans un espace de dimension 4.

**Exemple 2.1 sphère unité plongée dans  $\mathbb{R}^3$**

La sphère de rayon  $R = 1$  plongée dans l'espace tridimensionnel peut être décrite par les coordonnées angulaires. Le vecteur position dans  $\mathbb{R}^3$  est

$$\mathbf{X} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \quad (2.17)$$

Les vecteurs de base sur le plan tangent à  $(\theta, \varphi)$  sont

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta} = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta) \\ \mathbf{e}_2 &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \varphi} = (-\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, 0) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Le tenseur métrique est

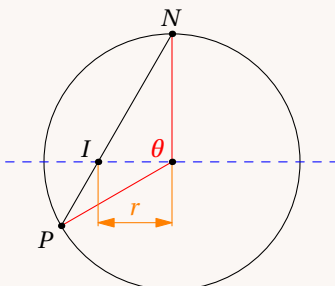
$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

de sorte que l'élément de distance est

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (2.20)$$

Le déterminant du tenseur métrique est  $g = \sin^2 \theta$ , de sorte que la mesure d'intégration invariante est  $\sin \theta d\theta d\varphi$ .

On peut également paramétrer la sphère unité à l'aide des *coordonnées stéréographiques*, définies par l'intersection sur le plan  $xy$  de la droite qui part du pôle Nord vers le point choisi de la sphère :



La figure ci-dessus représente une coupe de la sphère et du plan  $xy$ . Le point  $P$  de la sphère est représenté par le point  $I$ , qui est l'intersection sur le plan  $xy$  du segment qui relie le pôle Nord  $N$  au point  $P$ . On montre que la distance  $OI$  est donnée par  $r = \sin \theta / (1 - \cos \theta)$  : en effet, le segment est une droite d'équation  $z = \alpha r + 1$ , où la pente  $\alpha$  peut être déterminée en posant que le point  $P$  est sur la droite :  $\cos \theta = \alpha \sin \theta + 1$ , ce qui donne  $\alpha = (\cos \theta - 1) / \sin \theta$ . En posant  $z = 0$  (le point  $I$ ) on trouve donc  $r = -1/\alpha = \sin \theta / (1 - \cos \theta)$ . On vérifie sans peine que  $1 + r^2 = 2/(1 - \cos \theta)$ , donc  $\sin \theta = 2r/(1 + r^2)$ . On peut donc écrire, en fonction de  $r$  et  $\varphi$ ,

$$\mathbf{X} = \left( \frac{2r \cos \varphi}{r^2 + 1}, \frac{2r \sin \varphi}{r^2 + 1}, \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1} \right) \quad (2.21)$$

ce qui constitue une description alternative de la sphère. On pourrait également utiliser les coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  sur le plan pour exprimer les points de la sphère ainsi :

$$\mathbf{X} = \left( \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right) \quad (2.22)$$



## B Connexion affine

### 2.B.1 Transport parallèle

On s'intéresse souvent aux dérivées d'un vecteur ou d'un tenseur. Or la dérivée d'un vecteur nécessite de comparer deux vecteurs basés en des points différents, aussi proches soient-ils. Littéralement, on doit transporter un vecteur  $A(x)$  défini dans  $T_x$  vers l'espace  $T_{x+dx}$ , dans le but d'y être comparé au vecteur  $A(x+dx)$ . Du point de vue de l'espace-hôte  $V_D$ , le vecteur  $A(x)$  doit être transporté sans modification vers  $x+dx$ ; mais comme les deux espaces tangents  $T_x$  et  $T_{x+dx}$  ne sont pas parallèles,  $A(x)$  a une composante parallèle à  $T_{x+dx}$  et une composante qui lui est perpendiculaire. La prescription correcte est de ne considérer que la composante parallèle, c'est-à-dire de projeter  $A(x)$  sur l'espace tangent  $T_{x+dx}$  avant de le comparer à  $A(x+dx)$ . Cette procédure porte le nom de *transport parallèle*.

**symbole de Christoffel** Soyons plus spécifiques. Les vecteurs de base au point  $x+dx$  sont

$$e_i(x+dx) = e_i(x) + \partial_j e_i(x) dx^j \quad \text{où} \quad \partial_j e_i = \partial_j \partial_i X = \partial_i \partial_j X = \partial_i e_j \quad (2.23)$$

On définit la *connexion affine*  $\Gamma_{ij}^k$ , aussi appelée *symbole de Christoffel*, comme étant la projection sur l'espace tangent (spécifiquement sur  $e^k$ ) de la dérivée  $\partial_j e_i$  :

$$\Gamma_{ij}^k = e^k \cdot \partial_j e_i = \partial^k X \cdot \partial_j \partial_i X \quad (2.24)$$

Notons que, par définition,  $\partial^k = g^{km} \partial_m$ . En raison de l'égalité des dérivées secondes croisées, on voit que la connexion est symétrique dans ses deux derniers indices :

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \quad (2.25)$$

Notons aussi que la projection de  $\partial_i e_j$  sur l'espace tangent peut aussi s'écrire

$$\text{proj} \partial_i e_j = \Gamma_{ij}^k e_k \quad (2.26)$$

Il suffit de prendre le produit scalaire de cette expression avec  $e^m$  pour s'en convaincre.

Les composantes covariantes de la projection de  $A(x)$  sur  $T_{x+dx}$  sont donc

$$\begin{aligned} A_i + \delta A_i &= A(x) \cdot e_i(x+dx) \\ &= A(x) \cdot (e_i(x) + \partial_j e_i(x) dx^j) \\ &= A_i + A_k e^k \cdot \partial_j e_i dx^j \\ &= A_i + \Gamma_{ij}^k A_k dx^j \end{aligned} \quad (2.27)$$

On peut donc écrire que le changement dans les composantes covariantes de  $A$  causé par le transport parallèle est

$$\delta A_i = \Gamma_{ij}^k A_k dx^j \quad (2.28)$$

**vecteur contravariant** Résumons : un vecteur covariant voit ses composantes modifiées de la manière suivante lors d'un transport parallèle du point  $x$  au point  $x + dx$  :  $\delta A_i = \Gamma_{ij}^k A_k dx^j$ . Qu'en est-il d'un vecteur contravariant? Nous allons montrer que

$$\delta A^i = -\Gamma_{kj}^i A^k dx^j \quad (2.29)$$

La preuve est simple. La contraction d'un vecteur covariant  $B_i$  et d'un vecteur contravariant  $A^i$  est un scalaire, et ce scalaire n'est pas affecté par le transport parallèle. Donc

$$\begin{aligned} 0 &= \delta(A^i B_i) = \delta A^i B_i + A^i \delta B_i \\ &= \delta A^i B_i + A^i \Gamma_{ij}^k B_k dx^j \\ &= \delta A^i B_i + A^k \Gamma_{kj}^i B_i dx^j \\ &= (\delta A^i + A^k \Gamma_{kj}^i dx^j) B_i \end{aligned} \quad (2.30)$$

Nous avons échangé les indices  $i$  et  $k$  en passant de la deuxième à la troisième ligne afin de mettre  $B_i$  en évidence à la dernière ligne. Comme cette expression doit s'annuler, quel que soit le vecteur  $B_i$ , l'expression entre parenthèses doit être nulle et il s'ensuit la relation (2.29).

Il semble à première vue que l'existence d'un espace-hôte, donc d'une fonction  $\mathbf{X}(x)$ , soit essentielle à la définition de la connexion affine. Nous verrons plus bas que ce n'est pas le cas et qu'on peut exprimer  $\Gamma_{ij}^k$  uniquement en fonction du tenseur métrique et de ses dérivées.

## 2.B.2 Dérivée covariante

Considérons un champ vectoriel  $A^i(x)$ , c'est-à-dire un vecteur dont les composantes contravariantes sont une fonction de la position  $x$ . Les composantes  $A^i$  changent par la différentielle  $dA^i = \partial_j A^i dx^j$  quand on passe du point  $x$  au point  $x + dx$ . Or cette différentielle inclut le changement imposé par le transport parallèle. Le changement véritable, provenant de la comparaison du vecteur en  $x$  transporté parallèlement en  $x + dx$  et du vecteur déjà en  $x + dx$ , est

$$DA^i = dA^i - \delta A^i = (\partial_j A^i + \Gamma_{kj}^i A^k) dx^j = \nabla_j A^i dx^j \quad (2.31)$$

où nous avons introduit la *dérivée covariante* d'un vecteur :

$$\nabla_j A^i = \partial_j A^i + \Gamma_{kj}^i A^k \quad (2.32)$$

Une autre façon de définir la dérivée covariante est de considérer le vecteur comme un absolu, c'est-à-dire d'inclure les vecteurs de base dans son expression :  $\mathbf{A} = A^i \mathbf{e}_i$ . La dérivée de  $\mathbf{A}$  est alors

$$\partial_i \mathbf{A} = \partial_i (A^j \mathbf{e}_j) = \partial_i A^j \mathbf{e}_j + A^j \partial_i \mathbf{e}_j \quad (2.33)$$

où on a tenu compte de la dépendance en  $x$  des vecteurs de base. Or cette dérivée n'est pas dirigée le long du plan tangent  $T_x$ , en raison du deuxième terme. Il faut la projeter sur le plan. Cette projection est par définition la dérivée covariante :

$$\nabla_i \mathbf{A} = \text{proj } \partial_i \mathbf{A} = \nabla_i A^k \mathbf{e}_k = \partial_i A^k \mathbf{e}_k + A^j \Gamma_{ij}^k \mathbf{e}_k \quad (2.34)$$

Mais cette projection a un caractère absolu, c'est-à-dire ne dépend pas du système de coordonnées, d'où le caractère vectoriel de  $\nabla_i \mathbf{A}$  selon l'indice  $i$  : les composantes de la dérivée covariante forment donc un tenseur  $\nabla_i A^k$  (mixte dans ce cas). C'est donc qu'elle se transforme ainsi lors de changements de coordonnées :

$$\nabla'_j A'^i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} \frac{\partial x'^i}{\partial x^l} \nabla_k A^l \quad (2.35)$$

Pour un vecteur covariant, l'expression de la différentielle corrigée par le transport parallèle est plutôt celle-ci :

$$DA_i = dA_i - \delta A_i = (\partial_j A_i - \Gamma_{ij}^k A_k) dx^j = \nabla_j A_i dx^j \quad (2.36)$$

où la dérivée covariante est maintenant définie ainsi :

$$\nabla_j A_i = \partial_j A_i - \Gamma_{ij}^k A_k \quad (2.37)$$

La dérivée covariante prend donc une forme légèrement différente selon que l'indice affecté est covariant ou contravariant. Encore une fois, on pourrait appliquer la deuxième définition ci-dessus, cette fois dans la base duale :

$$\partial_i \mathbf{A} = \partial_i (A_j e^j) = \partial_i A_j e^j + A_j \partial_i e^j \quad (2.38)$$

Mais

$$\partial_i (e^j \cdot e_k) = 0 \implies \partial_i e^j \cdot e_k = -e^j \cdot \partial_i e_k = -\Gamma_{ki}^l e^j \cdot e_l = -\Gamma_{ki}^j \implies \partial_i e^j = -\Gamma_{ki}^j e^k \quad (2.39)$$

donc

$$\nabla_i \mathbf{A} = \text{proj } \partial_i \mathbf{A} = \nabla_i \mathbf{A}_k e^k = \partial_i A_k e^k - A_j \Gamma_{ki}^j e^k \quad (2.40)$$

ce qui confirme l'expression (2.37).

La dérivée covariante s'applique à des tenseurs quelconques. Pour un tenseur de rang deux, chaque indice reçoit une contribution de la connexion affine. Ainsi, la dérivée d'un tenseur deux fois contravariant prend la forme suivante :

$$\nabla_j T^{ik} = \partial_j T^{ik} + \Gamma_{lj}^i T^{lk} + \Gamma_{lj}^k T^{il} \quad (2.41)$$

alors que la dérivée d'un tenseur mixte est

$$\nabla_j T^i_k = \partial_j T^i_k + \Gamma_{lj}^i T^l_k - \Gamma_{kj}^l T^i_l \quad (2.42)$$

Enfin, notons que la dérivée covariante d'un scalaire est, par définition, le gradient habituel :

$$\nabla_j \phi = \partial_j \phi \quad (2.43)$$

Remarquons qu'une notation alternative est souvent employée pour la dérivée covariante :

$$A^i{}_{;j} = \nabla_j A^i \quad T_{ij;k} = \nabla_k T_{ij} \quad \text{etc.} \quad (2.44)$$

### 2.B.3 Relation entre la connexion affine et le tenseur métrique

On peut abaisser le premier indice de la connexion affine en appliquant le tenseur métrique :

$$\Gamma_{kij}(x) = g_{kl}\Gamma_{ij}^l(x) = \partial_k \mathbf{X} \cdot \partial_i \partial_j \mathbf{X}(x) \quad (2.45)$$

Cette dernière relation nous permet d'exprimer le symbole de Christoffel en fonction des dérivées du tenseur métrique. En effet, comme  $g_{ij} = \partial_i \mathbf{X} \cdot \partial_j \mathbf{X}$ , on trouve

$$\partial_k g_{ij} = \partial_k \partial_i \mathbf{X} \cdot \partial_j \mathbf{X} + \partial_i \mathbf{X} \cdot \partial_k \partial_j \mathbf{X} \quad (2.46)$$

En procédant à des permutations cycliques des indices, on trouve de plus

$$\begin{aligned} \partial_i g_{jk} &= \partial_i \partial_j \mathbf{X} \cdot \partial_k \mathbf{X} + \partial_j \mathbf{X} \cdot \partial_i \partial_k \mathbf{X} \\ \partial_j g_{ki} &= \partial_j \partial_k \mathbf{X} \cdot \partial_i \mathbf{X} + \partial_k \mathbf{X} \cdot \partial_j \partial_i \mathbf{X} \end{aligned} \quad (2.47)$$

En tenant compte de l'égalité des dérivées secondes croisées, on obtient le symbole de Christoffel en prenant la combinaison suivante :

$$\Gamma_{kij}(x) = \partial_k \mathbf{X} \cdot \partial_i \partial_j \mathbf{X}(x) = \frac{1}{2} (\partial_j g_{ik} + \partial_i g_{jk} - \partial_k g_{ij}) \quad (2.48)$$

et donc

$$\Gamma_{ij}^k(x) = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_j g_{il} + \partial_i g_{jl} - \partial_l g_{ij}) \quad (2.49)$$

Cette relation est très importante, car elle sert en pratique à calculer la connexion. Elle indique aussi qu'une connaissance de la métrique, donc des distances sur l'espace considéré, suffit à déterminer comment le transport parallèle est effectué : le concept d'espace-hôte n'est plus nécessaire.

**la connexion n'est pas un tenseur** La connexion affine, bien qu'elle soit affublée d'indices, n'est pas un tenseur, c'est-à-dire elle ne se transforme pas comme tel lors d'un changement de coordonnées. En effet, si on part de la définition (2.24) et qu'on procède à un changement de coordonnées, on trouve

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k &= e'^k \cdot \partial_j' e'_i \\ &= \frac{\partial x'^k}{\partial x^l} e^l \cdot \frac{\partial x^m}{\partial x'^j} \partial_m \left( \frac{\partial x^n}{\partial x'^i} e_n \right) \\ &= \frac{\partial x'^k}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial x'^j} \frac{\partial x^n}{\partial x'^i} e^l \cdot \partial_m e_n + \frac{\partial x'^k}{\partial x^l} e^l \cdot e_n \frac{\partial x^m}{\partial x'^j} \frac{\partial^2 x^n}{\partial x^m \partial x'^i} \\ &= \frac{\partial x'^k}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial x'^j} \frac{\partial x^n}{\partial x'^i} \Gamma_{nm}^l + \frac{\partial x'^k}{\partial x^n} \frac{\partial x^m}{\partial x'^j} \frac{\partial^2 x^n}{\partial x^m \partial x'^i} \\ &= \frac{\partial x'^k}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial x'^j} \frac{\partial x^n}{\partial x'^i} \Gamma_{nm}^l + \frac{\partial x'^k}{\partial x^n} \frac{\partial^2 x^n}{\partial x'^j \partial x'^i} \end{aligned} \quad (2.50)$$

Le premier terme de la dernière équation est conforme à la loi de transformation d'un tenseur covariant de rang 3, mais le deuxième terme vient brouiller les cartes. On peut aussi exprimer ce

dernier autrement, en appliquant la relation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x'^i} \left( \frac{\partial x'^k}{\partial x^n} \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} \right) = 0 \quad (2.51)$$

Cette relation provient du fait que l'expression entre parenthèses est une constante égale à  $\delta_j^k$ . En appliquant la dérivée, on trouve

$$0 = \frac{\partial x'^k}{\partial x^n} \frac{\partial^2 x^n}{\partial x'^i \partial x'^j} + \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x'^i \partial x^n} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^n} \frac{\partial^2 x^n}{\partial x'^i \partial x'^j} + \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^m \partial x^n} \quad (2.52)$$

Le premier terme de cette expression est en fait le deuxième terme de l'éq. (2.50). On peut donc le remplacer par l'opposé du deuxième terme de l'expression ci-dessus pour obtenir la forme suivante de la loi de transformation de la connexion :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{\partial x'^k}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} \Gamma_{mn}^l - \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^m \partial x^n} \quad (2.53)$$

**Transformation de la dérivée covariante** Nous avons démontré plus haut que la dérivée covariante est un vecteur, c'est-à-dire qu'en tant qu'opérateur,  $\nabla_i$  se comporte comme un vecteur covariant. Pour s'en convaincre un peu plus et de manière différente, montrons explicitement que la dérivée covariante d'un vecteur contravariant se transforme comme un tenseur mixte :

$$\begin{aligned} \nabla'_j A'^k &= \partial'_j A'^k + \Gamma_{ij}^k A'^i \\ &= \partial'_j \left[ A^m \frac{\partial x'^k}{\partial x^m} \right] + \left[ \frac{\partial x'^k}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} \Gamma_{mn}^l - \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^m \partial x^n} \right] A^r \frac{\partial x'^i}{\partial x^r} \\ &= \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} \frac{\partial x'^k}{\partial x^m} \partial_n A^m + \frac{\partial x'^k}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} \frac{\partial x'^i}{\partial x^r} \Gamma_{mn}^l A^r \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} &+ A^m \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x'^j \partial x^m} - \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^m \partial x^n} A^r \frac{\partial x'^i}{\partial x^r} \\ &= \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} \frac{\partial x'^k}{\partial x^m} \partial_n A^m + \frac{\partial x'^k}{\partial x^l} \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} \Gamma_{mn}^l A^m + A^m \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x'^j \partial x^m} - \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^m \partial x^n} A^m \\ &= \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} \frac{\partial x'^k}{\partial x^m} \nabla_n A^m \end{aligned} \quad (2.55)$$

À la deuxième ligne, nous avons appliqué la relation (2.53). À la troisième ligne, nous avons appliqué  $\frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^i}{\partial x^r} = \delta_r^m$ . À l'avant-dernière ligne, les deux termes s'annulent mutuellement si on exprime  $\partial'_j$  comme  $\frac{\partial x^n}{\partial x'^j} \partial_n$ .

**La dérivée covariante de la métrique s'annule** La dérivée covariante du tenseur métrique est nulle :

$$\nabla_i g_{jk} = 0 \quad \nabla_i g^{jk} = 0 \quad (2.56)$$

On peut le démontrer explicitement :

$$\begin{aligned} \nabla_i g_{jk} &= \partial_i g_{jk} - \Gamma_{ji}^l g_{lk} - \Gamma_{ki}^l g_{lj} \\ &= \partial_i g_{jk} - \Gamma_{kji} - \Gamma_{jki} \\ &= \partial_i g_{jk} - \frac{1}{2}(\partial_j g_{ik} + \partial_i g_{jk} - \partial_k g_{ij}) - \frac{1}{2}(\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ik}) \\ &= \partial_i g_{jk} - \partial_i g_{jk} = 0 \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$(2.58)$$

La même chose se démontre facilement du tenseur contravariant  $g^{ij}$ .

On peut également tirer ce résultat du fait que la dérivée covariante d'un vecteur est un tenseur. Ainsi, on peut abaisser l'indice contravariant de  $\nabla_i A^j$  à l'aide de  $g_{kj}$ , ce qui veut dire  $g_{jk} \nabla_i A^j = \nabla_i A_k$ . D'un autre côté, cette expression vaut aussi  $\nabla_i (g_{jk} A^j)$ . Comme la dérivée covariante se comporte comme une dérivée ordinaire face aux produits, on a

$$\nabla_i (g_{jk} A^j) = g_{jk} \nabla_i A^j + A^j \nabla_i g_{jk} \quad (2.59)$$

L'égalité des deux premiers termes de cette équation, pour tout vecteur  $A^j$ , nous force à conclure que  $\nabla_i g_{jk} = 0$ .

### Exemple 2.2 sphère unité plongée dans $\mathbb{R}^3$

Retournons aux vecteurs unitaires définis sur la sphère de rayon  $a$  en coordonnées sphériques (exemple 2.1 ci-dessus). Calculons la connexion affine à partir de la relation (2.49). Comme la métrique est diagonale et que la seule composante dépendant des coordonnées est  $g_{22}$  et que  $\partial_1 g_{22} = 2a^2 \sin \theta \cos \theta$ , seules les composantes de la connexion possédant un indice égal à 1 et deux indices égaux à 2 sont non nulles : on constate que

$$\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\frac{1}{2} g^{11} \partial_1 g_{22} = -\sin \theta \cos \theta \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \partial_1 g_{22} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta \quad (2.60)$$

On pourrait également calculer la connexion d'après la définition (2.24) et l'expression (2.18) des vecteurs de base et arriver au même résultat :

$$\Gamma_{22}^1 = e^1 \cdot \partial_2 e_2 = -\sin \theta \cos \theta \quad \Gamma_{21}^2 = e^2 \cdot \partial_1 e_2 = \cot \theta \quad (2.61)$$

### Exemple 2.3 coordonnées polaires planes

Considérons maintenant le plan cartésien, mais décrit par les coordonnées polaires planes  $(r, \varphi)$ . L'espace-hôte coïncide alors avec l'espace étudié et le vecteur  $\mathbf{X}$  est

$$\mathbf{X} = (r \cos \varphi, r \sin \varphi) \quad (2.62)$$

Les vecteurs de base sont donc, par définition,

$$e_1 = e_r = (\cos \varphi, \sin \varphi) \quad \text{et} \quad e_2 = e_\varphi = (-r \sin \varphi, r \cos \varphi) \quad (2.63)$$

Notez que le vecteur  $e_\varphi$  n'est pas unitaire, et le tenseur métrique est alors

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

Comme dans le cas de la sphère, seules les composantes de la connexion possédant un indice égal à 1 et deux indices égaux à 2 sont non nulles :

$$\Gamma_{22}^1 = \mathbf{e}^1 \cdot \partial_2 \mathbf{e}_2 = -r \quad \Gamma_{21}^2 = \mathbf{e}^2 \cdot \partial_1 \mathbf{e}_2 = \frac{1}{r} \quad (2.65)$$

## C Géodésiques

### 2.C.1 Description mathématique d'une courbe

Nous référons le lecteur au paragraphe sur les lignes d'univers à la page 16.

**vecteur tangent** Le vecteur tangent à une courbe  $x^i(\lambda)$  est bien sûr

$$\mathbf{u} = \frac{d}{d\lambda} \mathbf{X}(x(\lambda)) = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \lambda} = \mathbf{e}_i \frac{\partial x^i}{\partial \lambda} . \quad (2.66)$$

Donc les composantes de ce vecteur sont  $u^i = \partial x^i / \partial \lambda$ . Il correspond géométriquement au vecteur tangent à la courbe dans l'espace  $V_D$  dans lequel notre espace d'intérêt est plongé. Indépendamment de  $V_D$ , c'est une combinaison des vecteurs de base de l'espace tangent  $T_x$  en ce point de la courbe. Si on change de paramétrisation, ce vecteur change de la manière suivante :

$$u'^i = \frac{dx^i}{d\xi} = \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\xi} = u^i \frac{d\lambda}{d\xi} \quad \text{ou} \quad \mathbf{u}' = \mathbf{u} \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} . \quad (2.67)$$

En somme, une reparamétrisation affecte la grandeur du vecteur tangent, mais pas sa direction. La grandeur de ce vecteur est précisément

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{g_{ij} u^i u^j} = \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda}} = \sqrt{\frac{ds^2}{d\lambda^2}} = \left| \frac{ds}{d\lambda} \right| \quad (2.68)$$

où  $s$  est la distance (ou intervalle) définie le long de la courbe. On pourrait utiliser cette distance comme paramètre de courbe et dans ce cas  $\frac{ds}{d\lambda} = 1$  et donc  $|\mathbf{u}| = 1$  : le vecteur tangent serait unitaire.

**courbe nulle** Par contre, dans une géométrie pseudo-euclidienne, il est possible que le vecteur tangent soit de longueur nulle. On parle alors de *courbe nulle*; on verra qu'il s'agit des trajectoires des rayons lumineux. Dans ce cas on ne peut pas utiliser l'intervalle écoulé  $s$  comme paramètre de la courbe, car  $s$  est toujours zéro.

**dérivée intrinsèque** La dérivée intrinsèque d'une quantité le long d'une courbe est sa dérivée covariante dans la direction du vecteur tangent. Par exemple, pour un scalaire  $\phi$  :

$$\nabla_\lambda \phi = \frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{dx^i}{d\lambda} \partial_i \phi = u^i \partial_i \phi \quad (2.69)$$

Pour un vecteur contravariant, c'est plutôt la dérivée covariante qu'il faut mettre à contribution :

$$\nabla_\lambda A^j = u^i \nabla_i A^j = u^i \partial_i A^j + \Gamma_{ki}^j A^k u^i \quad (2.70)$$

## 2.C.2 Définitions d'une géodésique

On peut donner deux définitions équivalentes d'une *géodésique* : la première est basée sur le concept de distance la plus courte entre deux points : la courbe géodésique entre deux points A et B est la courbe reliant ces deux-points dont la distance est la plus courte, ou du moins stationnaire au sens du calcul des variations :

$$\delta S_{AB} = 0 \quad \text{où} \quad S_{AB} = \int_A^B ds \quad ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (2.71)$$

La deuxième définition est la suivante : une géodésique est une courbe dont le vecteur tangent est toujours dans la même direction, c'est-à-dire toujours transporté parallèlement à lui-même. Cela signifie que la variation intrinsèque (c'est-à-dire après transport parallèle)  $Du^i$  du vecteur tangent le long de la courbe est proportionnelle à  $u^i$ , ou encore

$$Du^i = du^i + \Gamma_{kj}^i u^k dx^j \propto u^i \quad (2.72)$$

En divisant par la différentielle  $d\lambda$ , on trouve

$$\dot{u}^i + \Gamma_{kj}^i u^k u^j = f(\lambda) u^i \quad (2.73)$$

où le point ( $\dot{\phantom{x}}$ ) dénote une dérivée par rapport à  $\lambda$  et  $f(\lambda)$  représente une dérivée de la grandeur du vecteur tangent  $u$  le long de la courbe. On peut aussi écrire

$$\ddot{x}^i + \Gamma_{kj}^i \dot{x}^k \dot{x}^j = f(\lambda) \dot{x}^i \quad (2.74)$$

En procédant à une reparamétrisation, la grandeur du vecteur tangent change, de même que la fonction  $f(\lambda)$ . Si la courbe est non nulle, on peut toujours utiliser l'intervalle écoulé  $s$  comme paramètre et dans ce cas le vecteur tangent est de grandeur constante. Donc sa variation est strictement nulle ( $f = 0$ ) et l'équation de la géodésique devient simplement

$$\ddot{x}^i + \Gamma_{kj}^i \dot{x}^k \dot{x}^j = 0 \quad (2.75)$$

Le paramètre  $s$  (identique au temps propre  $\tau$  dans le contexte de la relativité générale) est appelé le *paramètre affine* de la géodésique. Le vecteur  $u^i$  coïncide alors avec la quadrivitesse. Si la courbe est nulle, alors la fonction  $f(\lambda)$  est nulle également, car la grandeur  $u_i u^i = 0$  est également constante dans ce cas. L'équation (2.75) s'applique donc à tous les cas.



**Forme alternative** On pourrait tout aussi bien définir la géodésique par l'annulation de la variation de la composante covariante du vecteur tangent à la courbe (en supposant qu'on utilise le paramètre affine) :  $D u_i = 0$ , ce qui donne

$$D u_i = d u_i - \Gamma_{ik}^j u_j dx^k = 0 \quad (2.76)$$

En divisant par la différentielle  $ds$ , on trouve

$$\dot{u}_i - \Gamma_{ik}^j u_j u^k = 0 \quad (2.77)$$

En substituant la forme explicite de la connexion en fonction du tenseur métrique, on trouve

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{u}_i - \frac{1}{2} g^{mj} (\partial_i g_{mk} + \partial_k g_{mi} - \partial_m g_{ik}) u_j u^k \\ &= \dot{u}_i - \frac{1}{2} (\partial_i g_{mk} + \partial_k g_{mi} - \partial_m g_{ik}) u^m u^k \end{aligned} \quad (2.78)$$

Comme les deux derniers termes de la parenthèse se compensent mutuellement en échangeant les indices  $m$  et  $k$ , on trouve la forme alternative suivante de l'équation de la géodésique :

$$\dot{u}_i = \frac{1}{2} \partial_i g_{mk} u^m u^k \quad (2.79)$$

Cette forme a l'avantage de montrer clairement que si la métrique ne dépend pas d'une coordonnée  $x^i$ , alors la composante correspondante  $u_i$  est constante le long de la géodésique.

**courbe de moindre longueur** Revenons maintenant à la première définition d'une géodésique, en tant que courbe de moindre longueur. Nous allons démontrer que l'équation (2.75) est aussi une conséquence de cette définition. L'expression (2.71) de la longueur peut aussi s'écrire ainsi :

$$S_{AB} = \int_A^B d\lambda L(x, \dot{x}) \quad L(x, \dot{x}) = \sqrt{g_{ij}(x) \dot{x}^i \dot{x}^j} \quad (2.80)$$

Considérons maintenant une variation  $\delta x^i(\lambda)$  de la courbe telle que  $\delta x^i(A) = \delta x^i(B) = 0$  et calculons, au premier ordre en  $\delta x$ , la variation de la longueur. Remarquons d'abord qu'une variation de  $x$  entraîne une variation de  $g_{ij}$ , car la métrique dépend de  $x$  :

$$\delta g_{ij} = \partial_k g_{ij} \delta x^k \quad (2.81)$$

La variation de la longueur s'écrit alors

$$\begin{aligned} \delta S_{AB} &= \int_A^B d\lambda \frac{1}{2L} \delta (g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j) \\ &= \int_A^B d\lambda \frac{1}{2L} (\partial_k g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j \delta x^k + 2g_{ij} \dot{x}^j \delta \dot{x}^i) \end{aligned} \quad (2.82)$$

Comme d'habitude dans ce genre de calcul, il faut intégrer par parties les termes contenant  $\delta \dot{x}$  (le deuxième terme de l'expression ci-dessus) afin de faire ressortir uniquement la variation de  $x$ . Nous pouvons aussi supposer que la variable  $\lambda$  est la variable affine, de sorte que  $L = 1$  :

$$\begin{aligned}
 \delta S_{AB} &= \int_A^B d\lambda \left\{ \frac{1}{2} \partial_k g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j \delta x^k - \frac{d}{d\lambda} (g_{ij} \dot{x}^j) \delta x^i \right\} + [g_{ij} \dot{x}^j \delta x^i]_B^A \\
 &= \int_A^B d\lambda \left\{ \frac{1}{2} \partial_k g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j \delta x^k - (\partial_k g_{ij} \dot{x}^j \dot{x}^k + g_{ij} \ddot{x}^j) \delta x^i \right\} \\
 &= \int_A^B d\lambda \left\{ \frac{1}{2} \partial_i g_{kj} \dot{x}^k \dot{x}^j - \partial_k g_{ij} \dot{x}^j \dot{x}^k + g_{ij} \ddot{x}^j \right\} \delta x^i \\
 &= \int_A^B d\lambda \left\{ -\Gamma_{ijk} \dot{x}^j \dot{x}^k - g_{ij} \ddot{x}^j \right\} \delta x^i \tag{2.83}
 \end{aligned}$$

Dans la dernière équation, nous avons utilisé la définition (2.48), en tenant compte de la symétrie  $\Gamma_{ijk} = \Gamma_{ikj}$ . Puisque la variation  $\delta x$  s'annule aux extrémités et que la variation  $\delta S_{AB}$  doit s'annuler pour toutes les variations  $\delta x^i$ , on trouve l'équation suivante :

$$\Gamma_{ijk} \dot{x}^j \dot{x}^k + g_{ij} \ddot{x}^j = 0 \tag{2.84}$$

ce qui équivaut à (2.75) quand on élève l'indice  $i$ .

## D Courbure

### 2.D.1 Définition du tenseur de Riemann

**Les dérivées covariantes de commutent pas** Contrairement aux dérivées partielles ordinaires, le résultat d'une double dérivée covariante dépend de l'ordre dans lequel ces opérations sont effectuées. Autrement dit, étant donné un vecteur covariant  $A_k$ , le tenseur  $\nabla_i \nabla_j A_k$  n'est pas le même que  $\nabla_j \nabla_i A_k$ . En effet :

$$\begin{aligned}
 \nabla_i \nabla_j A_k &= \partial_i (\nabla_j A_k) - \Gamma_{ji}^l \nabla_l A_k - \Gamma_{ki}^l \nabla_j A_l \\
 &= \partial_i \partial_j A_k - \partial_i (\Gamma_{kj}^l A_l) - \Gamma_{ji}^l \partial_l A_k + \Gamma_{ji}^l \Gamma_{kl}^m A_m - \Gamma_{ki}^l \partial_j A_l + \Gamma_{ki}^l \Gamma_{lj}^m A_m \\
 &= \partial_i \partial_j A_k - \Gamma_{kj}^l \partial_i A_l - \partial_i \Gamma_{kj}^l A_l - \Gamma_{ji}^l \partial_l A_k + \Gamma_{ji}^l \Gamma_{kl}^m A_m - \Gamma_{ki}^l \partial_j A_l + \Gamma_{ki}^l \Gamma_{lj}^m A_m \tag{2.85}
 \end{aligned}$$

En échangeant les indices  $i$  et  $j$ , on trouve

$$\nabla_j \nabla_i A_k = \partial_j \partial_i A_k - \Gamma_{ki}^l \partial_j A_l - \partial_j \Gamma_{ki}^l A_l - \Gamma_{ji}^l \partial_l A_k + \Gamma_{ji}^l \Gamma_{kl}^m A_m - \Gamma_{kj}^l \partial_i A_l + \Gamma_{kj}^l \Gamma_{li}^m A_m \tag{2.86}$$

Soustrayant les deux expressions en tenant compte de la symétrie  $\Gamma_{ji}^l = \Gamma_{ij}^l$ , on trouve

$$\begin{aligned}
 \nabla_i \nabla_j A_k - \nabla_j \nabla_i A_k &= -\partial_i \Gamma_{kj}^l A_l + \Gamma_{ki}^l \Gamma_{lj}^m A_m + \partial_j \Gamma_{ki}^l A_l - \Gamma_{kj}^l \Gamma_{li}^m A_m \\
 &= -\partial_i \Gamma_{kj}^l A_l + \Gamma_{ki}^m \Gamma_{mj}^l A_l + \partial_j \Gamma_{ki}^l A_l - \Gamma_{kj}^m \Gamma_{mi}^l A_l \tag{2.87}
 \end{aligned}$$

(on a procédé à des changements d'indices muets dans la deuxième équation afin de toujours donner le même indice au vecteur  $A$ ). La caractéristique remarquable de cette expression est que les dérivées de  $A$  ont disparu. On peut en fait la réécrire comme

$$\nabla_i \nabla_j A_k - \nabla_j \nabla_i A_k = R^l{}_{kji} A_l \quad (2.88)$$

où on a défini le *tenseur de courbure* (ou *tenseur de Riemann*) :

$$R^l{}_{kji} = \partial_j \Gamma_{ki}^l - \partial_i \Gamma_{kj}^l + \Gamma_{ki}^m \Gamma_{mj}^l - \Gamma_{kj}^m \Gamma_{mi}^l \quad (2.89)$$

Notons qu'en dépit du fait que la connexion ne soit pas un tenseur, la combinaison ci-dessus en est un, puisque les dérivées covariantes successives sont des tenseurs.

On définit aussi la version complètement covariante du même tenseur :  $R_{lkji} = g_{lm} R^m{}_{kji}$ . On peut montrer que

$$R_{lkji} = \frac{1}{2} (\partial_l \partial_i g_{kj} + \partial_k \partial_j g_{li} - \partial_l \partial_j g_{ki} - \partial_k \partial_i g_{lj}) + g^{mn} (\Gamma_{mil} \Gamma_{nkj} - \Gamma_{mjl} \Gamma_{nki}) \quad (2.90)$$

On déduit de cette expression les symétries suivantes de ce tenseur :

1. Antisymétrie lors de l'échange des deux premiers indices :  $R_{lkji} = -R_{klji}$
2. Antisymétrie lors de l'échange des deux derniers indices :  $R_{lkji} = -R_{lkij}$
3. Symétrie lors de l'échange du premier groupe de deux indices avec le dernier groupe de deux indices :  $R_{lkji} = R_{jilk}$
4. L'identité cyclique :  $R_{l[kji]} := R_{lkji} + R_{ljik} + R_{likj} = 0$ .

En dépit de sa complexité, le tenseur de Riemann possède donc un nombre d'indices indépendants inférieur au nombre total de combinaisons possibles d'indices en dimension  $d$ , soit  $d^4$ . On montre que le nombre de composantes indépendantes est en fait  $d^2(d^2 - 1)/12$ , ce qui représente 20 composantes en  $d = 4$ , 6 en  $d = 3$  et 1 seule composante en dimension 2.

**Identité de Bianchi** L'une des propriétés importantes du tenseur de Riemann est l'*identité de Bianchi* :

$$\nabla_m R_{ijkl} + \nabla_k R_{ijlm} + \nabla_l R_{ijmk} = 0 \quad (2.91)$$

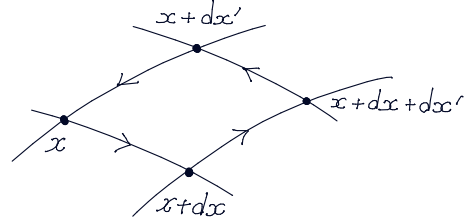
Notez la structure de cette relation : les deux premiers indices du tenseur covariant sont fixes et des permutations cycliques sont appliquées aux trois autres indices.

## 2.D.2 Tenseur de Riemann et transport parallèle

Le tenseur de Riemann est relié au changement d'un vecteur qui subit un transport parallèle le long d'une courbe fermée. Considérons pour cela un quadrilatère infinitésimal autour d'un point  $x$ , c'est-à-dire l'ensemble des points  $x$ ,  $x + dx$ ,  $x + dx + dx'$  et  $x + dx'$  (voir Fig. 2.1). Nous allons transporter un vecteur contravariant  $A^i$  le long de la boucle infinitésimale illustrée et sommer les variations de ses composantes causées par le transport parallèle le long de chaque segment.

FIGURE 2.1

Transport parallèle le long d'un quadrilatère infinitésimal.



Du point  $x$  au point  $x + dx$ , la variation des composantes est

$$\delta A_{(1)}^i = -\Gamma_{jk}^i(x) A^k(x) dx^j \quad (2.92)$$

Du point  $x + dx$  au point  $x + dx + dx'$ , la variation est

$$\begin{aligned} \delta A_{(2)}^i &= -\Gamma_{jk}^i(x + dx) A^k(x + dx) dx'^j \\ &= -\Gamma_{jk}^i(x) A^k(x) dx'^j - \partial_l \Gamma_{jk}^i(x) A^k(x) dx^l dx'^j - \Gamma_{jk}^i(x) \partial_l A^k(x) dx^l dx'^j \\ &= -\Gamma_{jk}^i(x) A^k(x) dx'^j - \partial_l \Gamma_{jk}^i(x) A^k(x) dx^l dx'^j + \Gamma_{jk}^i(x) \Gamma_{ml}^k(x) A^m(x) dx^l dx'^j \end{aligned} \quad (2.93)$$

À la dernière ligne, nous avons appliqué la condition de transport parallèle, ce qui revient à annuler la dérivée covariante dans la direction  $dx'$ . Du point  $x + dx + dx'$  au point  $x + dx'$ , la variation est l'opposée de celle qu'on trouve dans le sens inverse, soit

$$\delta A_{(3)}^i = \Gamma_{jk}^i(x) A^k(x) dx^j + \partial_j \Gamma_{lk}^i(x) A^k(x) dx^l dx'^j - \Gamma_{lk}^i(x) \Gamma_{mj}^k(x) A^m(x) dx^l dx'^j \quad (2.94)$$

(Nous avons changé le signe par rapport à  $\delta A^{i(2)}$  et échangé  $dx$  et  $dx'$ , ce qui revient à échanger les indices  $j$  et  $l$ ). Enfin, la variation du point  $x + dx'$  au point  $x$  est l'opposée de la variation du point  $x$  au point  $x + dx'$ , soit

$$\delta A_{(4)}^i = \Gamma_{jk}^i(x) A^k(x) dx'^j \quad (2.95)$$

En sommant ces quatre contributions, on trouve

$$\Delta A^i = \left( -\partial_l \Gamma_{jk}^i A^k + \Gamma_{jk}^i \Gamma_{ml}^k A^m + \partial_j \Gamma_{lk}^i A^k - \Gamma_{lk}^i \Gamma_{mj}^k A^m \right) dx^l dx'^j \quad (2.96)$$

En uniformisant les indices de  $A$ , on trouve enfin

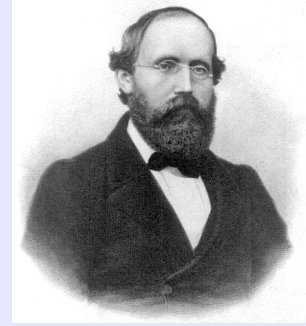
$$\begin{aligned} \Delta A^i &= \left( -\partial_l \Gamma_{jk}^i A^k + \Gamma_{jm}^i \Gamma_{kl}^m + \partial_j \Gamma_{lk}^i - \Gamma_{lm}^i \Gamma_{kj}^m \right) A^k dx^l dx'^j \\ &= R^i{}_{kjl} A^k dx^l dx'^j \end{aligned} \quad (2.97)$$

Le tenseur de Riemann est donc relié au défaut d'intégrabilité du transport parallèle, c'est-à-dire le fait que le transport parallèle d'un vecteur le long d'un contour fermé ne redonne pas le vecteur de départ. On pourrait utiliser cette propriété comme définition du tenseur de Riemann, ou même comme moyen heuristique de le calculer. Notons que l'antisymétrie du tenseur de Riemann dans ses deux derniers indices donne au produit  $dx^l dx'^j$  le caractère d'un élément de surface.

En géométrie différentielle, le changement d'un objet géométrique, tel un vecteur, lors de son transport parallèle le long d'un chemin fermé porte le nom d'*holonomie*.

### Gauss et Riemann

Carl Friedrich Gauss (1777/1855) est l'un des plus grands mathématiciens de l'histoire. Il a notamment travaillé sur la théorie des surfaces et a démontré, en 1828, son «théorème remarquable» ou *theorema egregium* qui exprime la courbure d'une surface comme provenant uniquement des propriétés métriques locales de cette surface. Son étudiant, Bernhard Riemann (1826/1866), va généraliser les travaux de Gauss sur les surfaces à des espaces de dimension arbitraire. Selon Hermann Weyl, Riemann avait l'intuition que la géométrie était en fait déterminée par le contenu matériel de l'univers, une idée vague mais que la relativité générale a plus tard validée et précisée. [wikipédia \(Gauss\)](#) [wikipédia \(Riemann\)](#)



Gauss et Riemann

### 2.D.3 Tenseurs de Ricci, courbure scalaire et tenseur d'Einstein

À partir du tenseur de Riemann,  $R^i{}_{jkl}$  on peut définir diverses contractions. La plus importante est le *tenseur de Ricci*:<sup>1</sup>

$$R_{ik} = R^j{}_{ijk} = \partial_j \Gamma_{ik}^j - \partial_k \Gamma_{ij}^j + \Gamma_{ik}^m \Gamma_{mj}^j - \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mk}^j \quad (2.98)$$

On définit ensuite la *courbure scalaire*, qui est un invariant :

$$R = g^{ik} R_{ik} = R^i{}_i \quad (2.99)$$

On définit en outre le *tenseur d'Einstein* :

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R \quad (2.100)$$

Ce tenseur intervient dans les équations du champ de gravitation.

## E Exemples simples en dimension 2

Afin d'illustrer de la manière la plus simple possible les concepts expliqués dans ce chapitre, nous allons étudier quelques géométries simples en dimension 2.

1. Il existe deux conventions différentes pour définir le tenseur de Ricci. Une convention différente de la nôtre le définit comme  $R_{ik} = R^j{}_{ikj}$ . Comme  $R^l{}_{ijk} = -R^l{}_{ikj}$ , les deux conventions diffèrent par un signe. Cette différence de signe affecte aussi la courbure scalaire. Notre convention est celle de Landau & Lifchitz, de Zee, de Weinberg; le manuel de Hobson utilise l'autre convention.

### 2.E.1 La sphère

Résumons ici ce que nous avons appris sur la sphère dans les exemples 2.1 et 2.2. En fonction des coordonnées sphériques  $(\theta, \varphi)$ , correspondant à  $x^1$  et  $x^2$ , l'élément de distance s'exprime ainsi :

$$ds^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (2.101)$$

Le tenseur métrique a donc les composantes non nulles suivantes :

$$g_{11} = a^2 \quad g_{22} = a^2 \sin^2 \theta \quad (2.102)$$

Les composantes non nulles du tenseur inverse  $g^{ij}$  sont alors

$$g^{11} = \frac{1}{a^2} \quad g^{22} = \frac{1}{a^2 \sin^2 \theta} \quad (2.103)$$

La connexion affine ne comporte que trois composantes non nulles :

$$\Gamma^1_{22} = -\sin \theta \cos \theta \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \cot \theta \quad (2.104)$$

On peut ensuite montrer, à l'aide d'un outil de calcul symbolique, que le tenseur de Riemann ne possède qu'une composante indépendante :

$$R_{1212} = a^2 \sin^2 \theta \quad (2.105)$$

Le tenseur de Ricci est diagonal :

$$R_{11} = 1 \quad R_{22} = \sin^2 \theta \quad (2.106)$$

Enfin, la courbure scalaire est constante :

$$R = \frac{2}{a^2} \quad (2.107)$$

**géodésiques** Les géodésiques sur la 2-sphère sont des grands cercles, c'est-à-dire des cercles centrés au centre de la sphère et de même rayon que celle-ci, vu de l'espace-hôte  $\mathbb{R}^3$ . Pour démontrer ce fait, considérons l'équation générale des géodésiques obtenue de la connexion affine donnée ci-dessus :

$$\ddot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 = 0 \quad \ddot{\varphi} + 2 \cot \theta \dot{\theta} \dot{\varphi} = 0 \quad (2.108)$$

Remarquons que la deuxième de ces équations est une dérivée totale, après multiplication par le facteur intégrant  $\sin^2 \theta$  :

$$\frac{d}{ds}(\dot{\varphi} \sin^2 \theta) = 0 \quad (2.109)$$

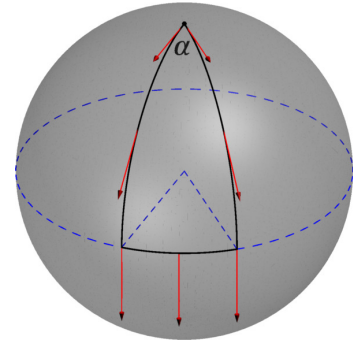
Cette dernière équation découle aussi de la forme alternative (2.79) de l'équation de la géodésique, dans le cas  $i = 2$ , car la métrique est indépendante de  $\varphi$  :  $\dot{u}_\varphi = 0$ , donc  $\dot{u}_\varphi = \text{cte}$ . Comme  $u_\varphi = g_{22} u^\varphi = \sin^2 \theta \dot{\varphi}$ , on trouve l'équation ci-dessus.

Sans chercher à trouver la solution générale à ce système d'équations, remarquons les solutions suivantes :

1. Une solution à  $\varphi$  fixe est possible : la deuxième équation est trivialement satisfaite, alors que la première équation devient  $\ddot{\theta} = 0$ , ce qui entraîne que  $\theta = s/a + \text{cte}$ , où  $s$  est la paramètre affine (la distance le long de la courbe) et  $a$  le rayon de la sphère. Cette équation décrit un méridien quelconque (on peut poser que la constante additive est nulle si on adopte le pôle Nord comme origine.)
2. Une solution à  $\theta$  fixe est possible. Dans ce cas la première équation devient  $\sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 = 0$ , ce qui n'est possible que si  $\theta = \pi/2$  (l'équateur). La deuxième équation est  $\ddot{\varphi} = 0$ , dont la solution est effectivement  $\varphi = s/a + \text{cte}$ .
3. En raison de la symétrie de la sphère, il est clair que tous les grands cercles sont des géodésiques. Cependant, cette symétrie, toute évidente qu'elle soit du point de vue de  $\mathbb{R}^3$ , ne l'est pas si on adopte un point de vue intrinsèque et qu'on ne connaît que la métrique  $g_{ij}$  sans savoir comment l'espace est plongé dans l'espace-hôte.

FIGURE 2.2

Triangle sphérique d'angle  $\alpha$  à son sommet et transport parallèle d'un vecteur le long de ce triangle, menant à un changement de direction d'angle  $\alpha$  à la fin du parcours.



### transport parallèle le long d'un triangle

Illustrons comment la courbure est liée au défaut d'angle lors du transport parallèle. Pour cela, considérons un chemin sur la sphère qui part du pôle Nord ( $\theta = 0$ ), descend vers l'équateur selon le méridien d'origine ( $\varphi = 0$ ), longe l'équateur ( $\theta = \pi/2$ ) jusqu'à  $\varphi = \alpha$  et ensuite remonte au pôle Nord le long du méridien  $\varphi = \alpha$ . Un tel chemin est constitué d'arcs de grands cercles, donc de géodésiques. Un vecteur pointe initialement vers le sud. Son transport parallèle le long du méridien conserve cette direction, car le méridien est une géodésique. Une fois sur l'équateur, le vecteur pointe toujours vers le sud, et pareillement lorsqu'on le remonte vers le pôle le long du méridien  $\varphi = \alpha$ . Cependant, revenu au pôle, il a tourné d'un angle  $\alpha$  en comparaison de sa direction initiale. En général, on peut montrer que l'angle de rotation d'un vecteur qui a subi un transport parallèle le long d'un contour  $C$  sur la sphère est égal à la fraction d'angle solide décrite par ce contour. Cette fraction est précisément  $\alpha$  dans le cas qui nous occupe.

## 2.E.2 Le cylindre

Un exemple encore plus simple que celui de la 2-sphère est celui d'un cylindre, défini par la contrainte  $r = a$  en coordonnées cylindriques. En fonction des deux coordonnées  $z$  et  $\varphi$ , l'élément de distance est le suivant :

$$ds^2 = dz^2 + a^2 d\varphi^2 \quad (2.110)$$

et les composantes non nulles du tenseur métrique sont

$$g_{11} = 1 \quad g_{22} = a^2 \quad (2.111)$$

Comme la métrique est indépendante des coordonnées, la connexion affine est nulle, ainsi que le tenseur de Riemann. Les géodésiques sont donc décrites par les équations triviales suivantes :

$$\ddot{z} = 0 \quad \ddot{\varphi} = 0 \quad (2.112)$$

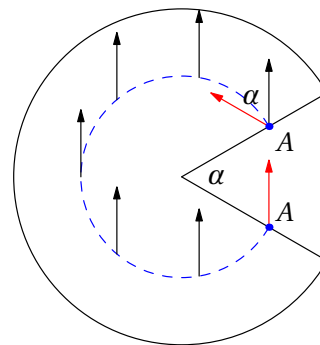
Donc toute courbe du type  $z(s) = As + B$ ,  $\varphi(s) = Cs + D$  constitue une géodésique. On peut éliminer la variable affine  $s$  et obtenir une relation simple  $z(\varphi) = \alpha\varphi + \beta$ , ce qui constitue une hélice de pas  $2\pi\alpha$ . Dans le cas où cette élimination est impossible,  $\varphi$  est constant, ce qui constitue aussi une solution.

**espace plat** Le cylindre n'est pas un espace courbe. Le transport parallèle d'un vecteur le long de toute courbe fermée ne cause aucun changement au vecteur. Ceci est vrai de toute surface pouvant être «déroulée» sur un plan. Physiquement, on peut obtenir un cylindre en enroulant une feuille faite d'un matériau rigide (papier, métal, etc.). Les contraintes imposées au matériau par cet enroulement sont faibles. Par contre, une sphère ne peut pas s'obtenir de cette manière : la courbure locale de la sphère impose des contraintes énergétiques beaucoup plus importantes.

On peut à la rigueur comprendre ce fait en partant de l'échelle atomique. Pour fixer les idées, adoptons un système de coordonnées cartésiennes sur le plan en suivant les axes cristallographiques d'un cristal cubique. Considérons un vecteur qui pointe d'un atome dans la direction d'un de ses voisins immédiats, et transportons ce vecteur parallèlement le long d'un quadrilatère. Sur le cylindre, aucun changement n'est causé par ce procédé, ce qui signifie que les atomes du matériau sont encore alignés comme sur le plan. Sur une portion de sphère, une distorsion apparaîtrait, associée à une densité d'énergie élastique présente partout à l'intérieur du quadrilatère. En somme, toute surface qu'on peut empiriquement produire en enroulant une feuille de papier est *plate*, c'est-à-dire sans courbure.

FIGURE 2.3

Transport parallèle d'un vecteur le long d'une courbe fermée sur un cône d'angle  $\alpha$ . Quand le cône est déroulé sur un plan, comme sur cette figure, le vecteur ne change pas de direction lors du transport, sauf que le point A sur le cône est associé à deux points différents sur le plan, ce qui résulte en une rotation d'angle  $\alpha$  pour le vecteur transporté.



### 2.E.3 Le cône

Un autre exemple intéressant est celui d'un cône. On peut produire un cône en découpant une pointe d'angle  $\alpha$  dans une feuille de papier et en joignant les bords ainsi exposés. Voir à cet effet la figure 2.3. La construction du cône est *chirurgicale* : on doit identifier les points correspondants de chaque bord de la pointe, comme le point A sur la figure. Le transport parallèle d'un vecteur le long d'une courbe fermée qui englobe le sommet va produire un déficit d'angle égal à  $\alpha$  quelle que soit la forme détaillée de cette courbe. La courbure est donc infinie au sommet du cône, et zéro partout ailleurs. Comme le sommet ne fait pas partie de l'enroulement, cela ne contredit pas la règle générale sur les surfaces enroulées énoncée ci-haut.



## 2.E.4 Le tore

Le tore peut être décrit par deux coordonnées angulaires  $\theta$  et  $\varphi$ , le long des deux cercles dont les rayons respectifs sont  $a$  et  $b$  ( $a > b$ ). Ceci dit, on peut définir le tore de deux manières différentes.

**FIGURE 2.4**  
Paramétrisation d'un tore plongé dans  $\mathbb{R}^3$ .

Dans le premier cas (tore plat), le tore par des conditions aux limites périodiques sur le plan. Plus précisément, on définit deux vecteurs de périodicité sur le plan (un réseau de Bravais, en cristallographie), notés  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$ , et on identifie tous les points qui diffèrent par une combinaison entière de ces deux vecteurs :

$$\mathbf{r} \equiv \mathbf{r} + i\mathbf{e}_1 + j\mathbf{e}_2 \quad (i, j \in \mathbb{Z}) \quad (2.113)$$

Cela définit une maille élémentaire qui constitue un tore au sens topologique du terme. Par exemple, en adoptant les vecteurs  $\mathbf{e}_1 = (a, 0)$  et  $\mathbf{e}_2 = (0, b)$  dans le plan, la coordonnée selon chaque direction peut être changée en un angle à condition que l'élément de distance soit  $a d\theta$  dans une direction et  $b d\varphi$  dans l'autre. La métrique est alors la suivante :

$$ds^2 = a^2 d\theta^2 + b^2 d\varphi^2 \quad (2.114)$$

Encore une fois, comme pour le cylindre, la métrique est indépendante des coordonnées, donc la connexion est nulle, ainsi que la courbure. Le cylindre peut être considéré comme un cas limite du tore quand  $a \rightarrow \infty$ . Les géodésiques sont les courbes décrites par une relation linéaire entre les deux angles :  $A\theta + B\varphi = \text{cte}$ . L'absence de courbure du tore se comprend immédiatement quand on définit cette surface comme un plan muni de conditions aux limites périodiques.

**tore plongé dans  $\mathbb{R}^3$**  On peut aussi définir le tore en tant que surface plongée en trois dimensions (fig. 2.4). Dans ce cas, les coordonnées des points du tore sont les suivantes, en fonction des angles  $\theta$  et  $\varphi$  :

$$x = (a + b \cos \varphi) \cos \theta \quad y = (a + b \cos \varphi) \sin \theta \quad z = b \sin \varphi \quad (2.115)$$

On obtient ensuite l'élément de longueur  $dx^2 + dy^2 + dz^2$  en fonction de  $d\theta$  et  $d\varphi$  :

$$ds^2 = (a + b \cos \varphi)^2 d\theta^2 + b^2 d\varphi^2 \quad (2.116)$$

Cette métrique diffère de celle définie en (2.114) par sa dépendance en  $\varphi$ . On montre que la connexion affine ne comporte que trois composantes non nulles :

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -\frac{b \sin \varphi}{a + b \cos \varphi} \quad \Gamma^2_{11} = \frac{\sin \varphi}{b} (a + b \cos \varphi) \quad (2.117)$$

alors que la composante non nulle du tenseur de Riemann covariant est

$$R_{1212} = (a + b \cos \varphi) b \cos \varphi \quad (2.118)$$

Le tenseur de Ricci est diagonal :

$$R_{11} = \frac{\cos \varphi}{b}(a + b \cos \varphi) \quad R_{22} = \frac{b \cos \varphi}{(a + b \cos \varphi)} \quad (2.119)$$

Enfin, la courbure scalaire est :

$$R = \frac{2 \cos \varphi}{b(a + b \cos \varphi)} \quad (2.120)$$

Notons que la courbure scalaire n'a pas toujours le même signe : elle est positive vers l'extérieur du tore ( $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ ), lorsque la surface est convexe, et négative vers l'intérieur du tore ( $\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$ ), lorsque la surface a localement la forme d'un col (ou point de selle).

**formule de Gauss pour la courbure** Cet exemple sert à illustrer une propriété générale de la courbure des surfaces, obtenue par Gauss :

$$R = \frac{2\epsilon}{R_1 R_2} \quad (2.121)$$

où  $R_1$  et  $R_2$  sont les rayons des cercles osculateurs à la surface le long de ses axes principaux au point considéré, et  $\epsilon = 1$  si les deux cercles sont du même côté de la surface (courbure positive) et  $\epsilon = -1$  si les deux cercles sont situés sur des côtés opposés de la surface (courbure négative). Dans le cas du tore, on trouve, à  $\varphi = 0$  et  $\varphi = \pi$ ,

$$R(0) = \frac{2}{b(a+b)} \quad R(\pi) = \frac{-2}{b(a-b)} \quad (2.122)$$

Les rayons des cercles osculateurs sont d'une part  $b$  et, d'autre part,  $a \pm b$  selon qu'on soit du côté extérieur ou intérieur du tore.

## 2.E.5 L'hyperbole

Comme dernier exemple, considérons la surface définie par l'équation de l'hyperboloïde de révolution :

$$r^2 - z^2 = 1 \quad (2.123)$$

où  $r$  est la coordonnée radiale plane. Nous allons utiliser l'angle azimutal  $\varphi$  comme coordonnée, ainsi que  $r$ . L'élément de distance est

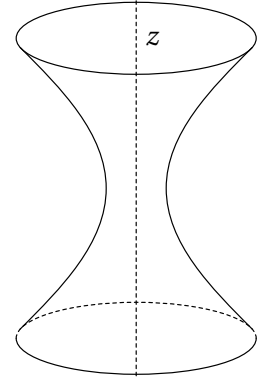
$$ds^2 = dr^2 + dz^2 + r^2 d\varphi^2 \quad (2.124)$$

La relation entre  $r$  et  $z$  nous permet d'écrire  $r dr = z dz$  et d'éliminer  $z$  :

$$ds^2 = \left(1 + \frac{r^2}{r^2 - 1}\right) dr^2 + r^2 d\varphi^2 \quad (2.125)$$

Les composantes du tenseur métrique sont donc

$$g_{11} = 1 + \frac{r^2}{r^2 - 1} \quad g_{22} = r^2 \quad (2.126)$$



**FIGURE 2.5**  
Hyperboloïde de révolution.

On calcule que les composantes non nulles de la connexion affine sont

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{r}{(r^2-1)(2r^2-1)} \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{r(r^2-1)}{2r^2-1} \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -\frac{1}{r} \quad (2.127)$$

Les composantes non nulles du tenseur de Riemann covariant sont

$$R_{1212} = -\frac{r^2}{(r^2-1)(2r^2-1)} \quad (2.128)$$

Les composantes non nulles du tenseur de Ricci sont :

$$R_{11} = -\frac{1}{(r^2-1)(2r^2-1)} \quad R_{22} = -\frac{r^2}{(2r^2-1)^2} \quad (2.129)$$

Enfin, la courbure scalaire est

$$R = -\frac{2}{(2r^2-1)^2} \quad (2.130)$$

Comme  $r > 1$  partout sur cette surface, la courbure est partout négative. De plus, la courbure s'annule comme  $1/r^2$  quand  $r$  est grand, donc cet espace est asymptotiquement plat : il ressemble de plus en plus à un cône quand  $r$  est grand.

**géodésiques** Comme la métrique ne dépend pas de  $\varphi$ , la façon la plus simple d'obtenir les géodésiques est d'utiliser la forme (2.79) de l'équation des géodésiques. Pour la composante 2, cela donne

$$\dot{u}_\varphi = 0 \implies \frac{d}{ds}(g_{\varphi\varphi}\dot{\varphi}) = 0 \implies r^2\dot{\varphi} = h = \text{cte} \quad (2.131)$$

À cela on peut ajouter la contrainte que le vecteur  $t$  est de longueur unité :

$$g_{rr}\dot{r}^2 + g_{\varphi\varphi}\dot{\varphi}^2 = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{2r^2-1}{r^2-1}\dot{r}^2 + \frac{h}{r^2} = 1 \quad (2.132)$$

Une solution simple à ces équations sont les courbes à  $\varphi$  constant, donc  $h = 0$ , qui doivent obéir à l'équation simplifiée suivante :

$$\frac{dr}{ds} = \sqrt{\frac{r^2-1}{2r^2-1}} \quad (2.133)$$

Cette relation, par intégration, permet en principe d'exprimer la coordonnée  $r$  en fonction du paramètre affine  $s$  (l'intégrale s'exprime par des fonctions elliptiques).

La coordonnée  $r$  a ceci de particulier qu'elle ne permet pas de décrire la surface dans son entier : deux points de la surface correspondent à un couple  $(r, \varphi)$  donné, ces deux points étant décrits par des valeurs opposées de  $z$ . Le domaine de  $r$  est également limité à  $r > 1$  et la valeur  $r = 1$  a un caractère exceptionnel : certaines composantes de la connexion et du tenseur de Riemann sont singulières à cette valeur, même si la surface elle-même ne comporte pas de singularité notable en ce point.

**coordonnées hyperbolique** Étant donné la forme hyperbolique, une meilleure coordonnée serait l'angle hyperbolique  $\theta$ , tel que  $r = \cosh \theta$  et  $z = \sinh \theta$ . Utilisons donc cet exemple pour illustrer comment passer d'un système de coordonnées à un autre. La matrice jacobienne pour passer de  $(r, \varphi)$  à  $(\theta, \varphi)$  est

$$\begin{pmatrix} 1/\sinh \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.134)$$

L'élément de distance en fonction de  $\theta$  est

$$\begin{aligned} ds^2 &= dz^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2 \\ &= (\cosh^2 \theta + \sinh^2 \theta) d\theta^2 + \cosh^2 \theta d\varphi^2 \\ &= \cosh 2\theta d\theta^2 + \cosh^2 \theta d\varphi^2 \end{aligned} \quad (2.135)$$

Les composantes non nulles du tenseur métrique sont donc

$$g_{11} = \cosh 2\theta \quad g_{22} = \cosh^2 \theta \quad (2.136)$$

On calcule que les composantes non nulles de la connexion sont

$$\Gamma_{11}^1 = -2\Gamma_{22}^1 = \tanh 2\theta \quad \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \tanh \theta \quad (2.137)$$

et que la seule composante indépendante du tenseur de Riemann est

$$R_{1212} = -\frac{\cosh^2 \theta}{\cosh^2 2\theta} \quad (2.138)$$

Les composantes non nulles du tenseur de Ricci sont :

$$R_{11} = -\frac{1}{\cosh 2\theta} \quad R_{22} = -\frac{\cosh^2 \theta}{\cosh^2 2\theta} \quad (2.139)$$

Enfin, la courbure scalaire est

$$R = -\frac{2}{\cosh^2 2\theta} \quad (2.140)$$

Cette dernière expression est numériquement égale à l'expression correspondante (2.130), car  $r = \cosh \theta$  et donc  $2r^2 - 1 = \cosh 2\theta$ .

Dans le système de coordonnées  $(\theta, \varphi)$ , il y a une correspondance biunivoque entre les points de la surface et les coordonnées. La valeur  $\theta = 0$ , correspondant à  $r = 1$ , n'a pas de caractère singulier. La courbure scalaire est toujours négative, quoique non uniforme : elle tend vers zéro quand  $\theta \rightarrow \pm\infty$ , car dans cette limite la surface s'approche d'un cône.

## F Annexe : intégrales et théorème de Stokes généralisé

Dans cette section, on explique comment généraliser les notions d'intégrale de surface ainsi que les théorèmes intégraux (théorème de la divergence, théorème de Stokes) à un espace à 4 dimensions.

### 2.F.1 Pseudotenseur complètement antisymétrique

On définit le symbole de Levi-Civita,  $\varepsilon_{ijkl}$  par sa propriété d'être complètement antisymétrique lors d'une permutation des indices :  $\varepsilon_{0123} = 1$  et  $\varepsilon_{p(0)p(1)p(2)p(3)} = \text{sign}(p)$ , où  $p$  est une permutation des quatre éléments  $\{0, 1, 2, 3\}$  et  $\text{sign}(p)$  est la signature (ou le signe) de la permutation  $p$ .  $\varepsilon_{ijkl}$  est nul si au moins deux de ses indices sont identiques. On peut définir un tel symbole en dimension  $d$  quelconque : il comportera alors  $d$  indices.

D'après la définition du déterminant d'une matrice  $4 \times 4$   $M$ ,

$$\varepsilon_{ijkl} \det M = \varepsilon_{mnr s} M_{im} M_{jn} M_{kr} M_{ls} \quad (2.141)$$

(une somme sur les indices répétés est implicite, même on n'a pas affaire ici à des indices covariants et contravariants). Le symbole  $\varepsilon_{ijkl}$  n'est pas un tenseur ; par contre, on s'approche d'un tenseur avec l'objet suivant, qu'on appelle le *pseudotenseur complètement antisymétrique* :

$$E_{ijkl} = \varepsilon_{ijkl} \sqrt{|g|} \quad (2.142)$$

Vérifions que cette quantité se transforme presque comme un tenseur covariant de rang 4 :

$$\begin{aligned} E'_{ijkl} &= \varepsilon_{ijkl} \sqrt{|g'|} \\ &= \varepsilon_{ijkl} |J| \sqrt{|g|} & J &= \det \left( \frac{\partial x}{\partial x'} \right) \\ &= \varepsilon_{ijkl} J \text{sign}(J) \sqrt{|g|} \\ &= \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} \frac{\partial x^r}{\partial x'^k} \frac{\partial x^s}{\partial x'^l} \varepsilon_{mnr s} \text{sign}(J) \sqrt{|g|} \\ &= \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} \frac{\partial x^r}{\partial x'^k} \frac{\partial x^s}{\partial x'^l} E_{mnr s} \text{sign}(J) \end{aligned} \quad (2.143)$$

La dernière ligne correspond bel et bien à la règle de transformation d'un tenseur, sauf pour le signe du jacobien qui intervient. Une quantité qui se transforme de cette manière est qualifiée de *pseudotenseur*.

En particulier, un pseudotenseur ne change pas de signe lors de l'inversion de l'une des coordonnées (e.g.  $x^0 \rightarrow x'^0 = -x^0$ ). Un exemple bien connu de pseudovecteur en dimension 3 est le vecteur moment cinétique  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$ . Les vecteurs  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{p}$  sont des vecteurs *polaires* : si les trois coordonnées cartésiennes changent de signe ( $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$ ), alors  $\mathbf{r}' = -\mathbf{r}$  et  $\mathbf{p}' = -\mathbf{p}$ . Par contre,  $\mathbf{L}$  ne change pas de signe : c'est un vecteur *axial*, autrement dit un pseudovecteur.

On définit également la version contravariante du pseudotenseur antisymétrique, de la manière habituelle, c'est-à-dire en élevant les indices à l'aide du tenseur métrique contravariant :

$$\begin{aligned}
 E^{ijkl} &= g^{im} g^{jn} g^{kr} g^{ls} E_{mnr s} \\
 &= g^{im} g^{jn} g^{kr} g^{ls} \varepsilon_{mnr s} \sqrt{|g|} \\
 &= g^{-1} \varepsilon_{ijkl} \sqrt{|g|} \\
 &= \text{sign}(g) \varepsilon_{ijkl} \frac{1}{\sqrt{|g|}}
 \end{aligned} \tag{2.144}$$

Notez que  $\text{sign}(g) = -1$  dans une métrique pseudo-euclidienne. On constate que

$$E^{ijkl} E_{ijkl} = \text{sign}(g) \varepsilon_{ijkl} \varepsilon_{ijkl} = 24 \text{sign}(g) \tag{2.145}$$

On montre également que

$$E^{ijkl} E_{mnr s} = \text{sign}(g) \begin{vmatrix} \delta_m^i & \delta_n^i & \delta_r^i & \delta_s^i \\ \delta_m^j & \delta_n^j & \delta_r^j & \delta_s^j \\ \delta_m^k & \delta_n^k & \delta_r^k & \delta_s^k \\ \delta_m^l & \delta_n^l & \delta_r^l & \delta_s^l \end{vmatrix} \tag{2.146}$$

$$E^{ijkl} E_{mnr l} = \text{sign}(g) \begin{vmatrix} \delta_m^i & \delta_n^i & \delta_r^i \\ \delta_m^j & \delta_n^j & \delta_r^j \\ \delta_m^k & \delta_n^k & \delta_r^k \end{vmatrix} \tag{2.147}$$

$$E^{ijkl} E_{mnkl} = 2 \text{sign}(g) \begin{vmatrix} \delta_m^i & \delta_n^i \\ \delta_m^j & \delta_n^j \end{vmatrix}$$

$$E^{ijkl} E_{mjkl} = 6 \text{sign}(g) \delta_m^i \tag{2.148}$$

$$E^{ijkl} E_{ijkl} = 24 \text{sign}(g) \tag{2.149}$$

## 2.F.2 Pseudotenseur dual

Étant donné un vecteur  $A^i$ , on définit son *pseudotenseur dual* ainsi :

$$\tilde{A}_{jkl} = E_{ijkl} A^i \tag{2.150}$$

En général, le pseudotenseur dual d'un tenseur antisymétrique de rang  $r$  est de rang  $4 - r$  et son expression s'obtient en contractant avec le pseudotenseur complètement antisymétrique :

$$\tilde{A}_{kl} = E_{ijkl} A^{ij} \quad \tilde{A}_l = E_{ijkl} A^{ijk} \tag{2.151}$$

De même, pour des tenseurs covariants, on définit

$$\tilde{A}^{jkl} = E^{ijkl} A_i \quad \tilde{A}^{kl} = E^{ijkl} A_{ij} \quad \tilde{A}^l = E^{ijkl} A_{ijk} \tag{2.152}$$

L'exemple le plus connu de pseudotenseur dual est le dual du tenseur de Faraday : Les composantes habituelles du tenseur de Faraday  $F_{ij} = \nabla_i A_j - \nabla_j A_i$  sont

$$[F_{ij}] = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.153)$$

en fonction des champs électrique et magnétique. On calcul que le pseudotenseur dual associé est

$$[\tilde{F}^{ij}] = -\frac{\text{sign}(g)}{\sqrt{|g|}} \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z & E_y \\ -B_y & E_z & 0 & -E_x \\ -B_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.154)$$

On constate que  $\tilde{F}^{ij}$  s'obtient de  $F_{ij}$  en échangeant les rôles des champs électrique et magnétique, à un facteur multiplicatif près. Dans l'espace de Minkowski, ce facteur est 1.

On peut également passer du pseudotenseur dual au tenseur d'origine en utilisant les relations (2.146-2.149) :

$$A^{jkl} = \text{sign}(g) E^{ijkl} \tilde{A}_i \quad A^{kl} = \frac{1}{2} \text{sign}(g) E^{ijkl} \tilde{A}_{ij} \quad A^l = \frac{1}{6} \text{sign}(g) E^{ijkl} \tilde{A}_{ijk} \quad (2.155)$$

Remarquons enfin que la notion de pseudotenseur dual n'a de sens que pour des tenseurs antisymétriques (donc complètement covariants ou complètement contravariants); en raison du caractère antisymétrique de  $E_{ijkl}$ , la partie symétrique du tenseur  $A$  ne contribue pas à son dual et donc ne doit pas être présente si on veut que la relation de dualité soit réciproque.

### 2.F.3 Éléments d'hypervolume, de volume, de surface et de longueur

**hypervolume** On appellera *hypervolume* la généralisation de la notion de volume à 4 dimensions.

Étant donnés 4 vecteurs infinitésimaux  $dx^i, dy^i, dz^i, dw^i$ , on peut construire un élément d'hypervolume par une généralisation évidente du produit triple :

$$d\Omega = \varepsilon_{ijkl} dx^i dy^j dz^k dw^l \quad (2.156)$$

Les vecteurs infinitésimaux se transforment comme des vecteurs, bien sûr; donc on voit aisément que, lors d'un changement de coordonnées  $x \rightarrow x'$ ,

$$d\Omega = d\Omega' J \quad J = \det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) \quad (2.157)$$

ce qui entraîne que  $d\Omega \sqrt{|g|}$  est un pseudoscalaire. Lors de l'échange de deux vecteurs infinitésimaux,  $d\Omega$  change de signe : il s'agit d'un élément de volume *orienté*. Étant donnée une fonction scalaire  $f(x)$ , l'intégrale

$$\int d\Omega \sqrt{|g|} f(x) \quad (2.158)$$

sera donc un invariant, à un signe près, qui dépend de l'ordre conventionnel des coordonnées.

**volume** On définit un élément de volume (ou d'hypersurface) à l'aide de trois vecteurs infinitésimaux :  $dx^i$ ,  $dy^i$  et  $dz^i$  :

$$dS^{ijk} = \begin{vmatrix} dx^i & dy^i & dz^i \\ dx^j & dy^j & dz^j \\ dx^k & dy^k & dz^k \end{vmatrix} \quad (2.159)$$

On peut représenter cet élément de volume à l'aide de la quantité

$$dS_l = \frac{1}{6} \text{sign}(g) \varepsilon_{ijkl} dS^{ijk} = \text{sign}(g) \varepsilon_{ijkl} dx^i dy^j dx^k \quad (2.160)$$

On constate que  $dS_l \sqrt{|g|}$  est un pseudovecteur covariant, dual de  $dS^{ijk}$ . Étant donné un vecteur  $A^i$ , on peut alors définir l'intégrale de volume ou d'hypersurface

$$\int_V dS_l \sqrt{|g|} A^l \quad (2.161)$$

qui sera aussi un invariant, c'est-à-dire formulée de manière à être indépendante du système de coordonnées choisi.

**surface** Un élément de surface se définit à l'aide de 2 vecteurs infinitésimaux :

$$df^{ij} = \begin{vmatrix} dx^i & dy^i \\ dx^j & dy^j \end{vmatrix} \quad (2.162)$$

où à l'aide de son dual

$$d\tilde{f}_{kl} = \frac{1}{2} \text{sign}(g) \varepsilon_{ijkl} df^{ij} \quad (2.163)$$

Le flux d'un tenseur antisymétrique  $A_{ij}$  au travers d'une surface est donné par l'intégrale

$$\int_S df^{ij} A_{ij} = \int d\tilde{f}_{ij} \sqrt{|g|} \text{sign}(g) \tilde{A}^{ij} \quad (2.164)$$

où  $\tilde{A}^{ij}$  est le dual de  $A_{ij}$ . Cette intégrale est invariante car  $f^{ij}$  est un vrai tenseur, tout comme  $A_{ij}$ . Le facteur  $\sqrt{|g|}$  n'est requis que lorsque la mesure d'intégration est un pseudotenseur.

**ligne** Enfin, l'élément de ligne d'univers est défini par une différentielle simple  $dx^i$  et l'intégrale d'un vecteur  $A_i$  le long d'une courbe  $C$  est invariante :

$$\int_C dx^i A_i \quad (2.165)$$



## 2.F.4 Théorème de Stokes généralisé

Donnons ici, sans démonstration, trois versions d'un théorème qu'on peut appeler le *théorème de Stokes généralisé*. Chacune d'elle se rapporte à une intégrale sur la frontière d'une région. Ainsi,  $\partial H$  désigne la frontière d'un hypervolume  $H$ ;  $c'$  est un objet de dimension 3, une hypersurface fermée et orientée.  $\partial V$  est une surface fermée et orientée, la frontière d'un volume (ou hypersurface)  $V$ , et  $\partial S$  est une courbe fermée, la frontière d'une surface  $S$ .

La première version est une généralisation du théorème de la divergence, qui relie l'intégrale (ou le flux) d'un vecteur  $A^i$  au travers d'une hypersurface fermée  $\partial H$  à l'intégrale de la divergence de  $A^i$  dans l'hypervolume  $H$  :

$$\int_H d\Omega \sqrt{|g|} \nabla_i A^i = \oint_{\partial H} dS_i \sqrt{|g|} A^i \quad (2.166)$$

La deuxième version relie l'intégrale d'un tenseur antisymétrique  $A^{ij}$  sur une surface fermée  $\partial V$  à l'intégrale dans le volume de la divergence du dit tenseur :

$$\int_V dS_j \sqrt{|g|} \nabla_i A^{ij} = \frac{1}{2} \oint_{\partial V} d\tilde{f}_{ij} \sqrt{|g|} A^{ij} \quad (2.167)$$

où

$$\nabla_i A^{ij} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i (\sqrt{|g|} A^{ij}) \quad (2.168)$$

La dernière version relie l'intégrale d'un vecteur le long d'une courbe fermée  $\partial S$  à l'intégrale du rotationnel sur la surface  $S$  :

$$\frac{1}{2} \int_S d f^{ik} (\partial_i A_k - \partial_k A_i) = \oint_{\partial S} A_i dx^i \quad (2.169)$$

Notons que dans cette dernière relation, on peut indifféremment utiliser  $\partial_i A_k - \partial_k A_i$  ou  $\nabla_i A_k - \nabla_k A_i$  car la contribution de la connexion affine disparaît en raison de l'antisymétrie sur  $i, k$ .

## 2.F.5 Exemples en dimension 2

Nous allons appuyer le théorème de Stokes (2.166) par un exemple adapté en dimension 2. Considérons la 2-sphère de rayon  $r$  en coordonnées sphériques  $(\theta, \varphi)$  et le champ vectoriel défini par  $A^\theta = \sin \theta$  et  $A^\varphi = 0$ . En dimension 2, le tenseur antisymétrique comporte deux indices seulement :  $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1$ . Dans ce système,  $\sqrt{|g|} = r^2 \sin \theta$  et la divergence de ce champ vectoriel est

$$\nabla_i A^i = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (r^2 \sin \theta A^\theta) = 2 \cos \theta \quad (2.170)$$

Considérons comme frontière  $\partial H$  le parallèle de coordonnée  $\theta = \alpha$ . L'intégrale de la divergence de  $A^i$  sur la portion de la sphère telle que  $\theta < \alpha$ , qui joue ici le rôle d'hypervolume, est

$$I = \int_H d\Omega \sqrt{|g|} \nabla_i A^i = \int_0^{2\pi} \int_0^\alpha r^2 \sin \theta 2 \cos \theta d\theta d\varphi = 2\pi r^2 \sin^2 \alpha \quad (2.171)$$

Par contre, la courbe  $\partial H$ , qui joue le rôle de l'hypersurface fermée, est définie par la différentielle  $dx^i = (0, d\varphi)$  et l'élément de «surface» associé serait  $dS_k = \varepsilon_{kl} dx^l = (d\varphi, 0)$ . Donc  $dS_l A^l \sqrt{|g|} = r^2 \sin^2 \alpha d\varphi$  et

$$\oint_{\partial H} dS_l \sqrt{|g|} A^l = \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2 \alpha d\varphi = 2\pi r^2 \sin^2 \alpha \quad (2.172)$$

ce qui est bien le résultat attendu par le théorème de Stokes.

Comme **deuxième exemple**, restons sur la sphère et considérons plutôt un champ vectoriel  $A^\varphi = \sin \theta$ ,  $A^\theta = 0$ . Cette fois-ci, le parallèle  $\theta = \alpha$  définit une courbe fermée  $\partial S$  et la portion  $\theta < \alpha$  de la sphère définit une surface bornée par cette courbe. On appliquera la version (2.169) du théorème de Stokes. On calcule immédiatement que

$$I = \oint_{\partial S} A_i dx^i = \int_0^{2\pi} A_\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2 \theta d\varphi = 2\pi r^2 \sin^2 \alpha \quad (2.173)$$

D'un autre côté, on doit calculer

$$I = \frac{1}{2} \int_S df^{ik} (\partial_i A_k - \partial_k A_i) = \int_S df^{ik} \partial_i A_k \quad (2.174)$$

où  $df^{ik}$  est formé des deux vecteur infinitésimaux  $dx^i = (d\theta, 0)$  et  $dy^i = (0, d\varphi)$  :

$$df^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & d\theta d\varphi \\ -d\theta d\varphi & 0 \end{pmatrix} \quad (2.175)$$

L'intégrant, quant à lui, est

$$\partial_i A_k = \begin{pmatrix} 0 & 2r^2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.176)$$

Donc

$$I = \int_S df^{ik} \partial_i A_k = \int_0^{2\pi} \int_0^\alpha 2r^2 \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi = 4\pi r^2 \left[ \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_0^\alpha = 2\pi r^2 \sin^2 \alpha \quad (2.177)$$

ce qui est bel et bien attendu d'après le théorème (2.169).

## G Problèmes

### Problème 2.1 coordonnées stéréographiques sur la sphère

**A** Partez de l'expression suivante pour les coordonnées cartésiennes de la sphère en fonction des coordonnées stéréographiques  $(r, \varphi)$  :

$$\mathbf{X} = \left( \frac{2r \cos \varphi}{r^2 + 1}, \frac{2r \sin \varphi}{r^2 + 1}, \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1} \right)$$

et calculez les quantités suivantes : (1) le tenseur métrique, (2) la connexion affine, (3) le tenseur de Riemann, (4) le tenseur de Ricci et (5) la courbure scalaire. Vous devez remettre cette partie du travail sous la forme d'un carnet python qui peut être imprimé ou transmis via Moodle.

**B** Les coordonnées stéréographiques telles que définies ci-dessus sont inadéquates pour décrire le pôle nord : ce point unique de la sphère correspond à  $r \rightarrow \infty$  et à toutes les valeurs de  $\varphi$ . Par contre, on pourrait définir la projection stéréographique à partir du pôle sud au lieu du pôle nord et utiliser des coordonnées stéréographiques différentes  $(r', \varphi)$  qui, à leur tour, seraient inadéquates pour décrire le pôle sud. C'est un exemple de la nécessité de deux *cartes* pour décrire la sphère au complet. Le passage d'une carte à l'autre, c'est-à-dire la relation mathématique entre  $r$  et  $r'$ , doit être différentiable dans une région commune aux deux cartes pour qu'on puisse parler ici de *variété différentiable*. Trouvez cette relation et commentez.

### Problème 2.2 connexion affine pour une métrique diagonale

Montrez que, si le tenseur métrique est diagonal, la connexion affine se réduit aux composantes suivantes :

$$(a) \quad \Gamma_{jk}^i = 0 \quad \text{si } i, j \text{ et } k \text{ sont différents}$$

$$(b) \quad \Gamma_{jj}^i = -\frac{1}{2g_{ii}} \partial_i g_{jj} \quad (i \neq j)$$

$$(c) \quad \Gamma_{ij}^i = \partial_j \ln \sqrt{|g_{ii}|} \quad (i \neq j)$$

Notez que la convention de sommation est exceptionnellement suspendue dans ces expressions.

### Problème 2.3 coordonnées polaires planes

**A** Utilisez les coordonnées polaires  $(r, \varphi)$  sur le plan euclidien et trouvez l'équation des géodésiques.

**B** Montrez que la solution à ces équations sont des droites.

**Problème 2.4 géodésiques sur le tore**

**A** En partant de l'expression de la métrique pour un tore plongé dans  $\mathbb{R}^3$  ayant des rayons  $a$  et  $b$ , écrivez les équations différentielles satisfaites par les géodésiques. Indice : partez de la forme  $\dot{u}_i = \frac{1}{2} \partial_i g_{jk} u^j u^k$ .

**B** Y a-t-il des solutions triviales? Décrivez-les s'il y a lieu.

**C** Solutionnez numériquement les équations géodésiques en imposant qu'elles passent par le point  $(\theta, \varphi) = (0, 0)$  pour quatre valeurs de  $d\varphi/d\theta$  différentes en ce point (utilisez votre jugement pour obtenir des courbes sensiblement différentes). Posez  $a = 1$  et  $b = 1/3$ . Présentez vos résultats sur quatre graphiques séparés, dans le plan  $(\theta, \varphi)$ , qui tiennent compte de la périodicité des variables  $\theta$  et  $\varphi$ , c'est-à-dire un graphique dont les bornes sont  $\theta \in [0, 2\pi]$  et  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Indice : utilisez les outils de `scipy.integrate`.

**Problème 2.5 transport parallèle le long d'un parallèle sur la 2-sphère**

Considérons la 2-sphère en coordonnées sphériques  $(\theta, \varphi)$ , avec la métrique (2.19). On déplace un vecteur initialement dirigé selon  $e_\varphi$  le long d'un parallèle (courbe à  $\theta$  fixe), par transport parallèle. Calculez comment les composantes de ce vecteur changent en fonction de  $\varphi$ .

**Problème 2.6 transport parallèle le long d'un parallèle sur la 2-sphère (suite)**

Retournons au problème du transport parallèle le long d'un parallèle sur la 2-sphère. Cette fois, trouvons la solution d'une manière différente, plus immédiate. Considérez un cône dont l'axe coïncide avec l'axe polaire et qui soit tangent à la sphère le long du parallèle en question (angle polaire  $\theta$ ).

**A** Montrez que l'angle au sommet de ce cône est  $\chi = \pi/2 - \theta$  et que le déficit d'angle  $\alpha$  associé est relié à  $\chi$  par  $\sin \chi = 1 - \alpha/2\pi$ . Notez que l'angle  $\chi$  est défini comme l'angle entre l'axe du cône et le cône lui-même.

**B** Démontrez, sans calcul, que le résultat du transport parallèle d'un vecteur le long du parallèle sur la sphère doit être le même que le long de la même courbe prise sur le cône tangent.

**C** Retrouvez le résultat du problème évoqué ci-haut, soit une rotation de  $2\pi|\cos \theta|$  par rapport au repère local, pour un vecteur transporté parallèlement. Rationnez à partir du cône plutôt que de la sphère.

**Problème 2.7 coordonnées curvilignes sur le plan**

Décrivons le plan euclidien à l'aide de coordonnées  $(\theta, \varphi)$ , telles que  $\varphi$  a le même sens qu'en coordonnées polaires planes, et  $r = \tan(\theta/2)$ , de sorte que la coordonnée radiale  $r$  va de 0 à l'infini quand  $\theta$  varie de 0 à  $\pi$ .

- A** Obtenez le tenseur métrique dans ces coordonnées.
- B** Calculez la connexion affine.
- C** Considérons une courbe à  $\theta$  constant, c'est-à-dire un cercle. On transporte un vecteur parallèlement le long de cette courbe. Obtenez les équations explicites qui décrivent la variation des composantes  $A^\theta$  et  $A^\varphi$  du vecteur le long de cette courbe et solutionnez ces équations pour obtenir les fonctions  $A^\theta(\varphi)$  et  $A^\varphi(\varphi)$ . Cette dépendance est-elle compatible avec le caractère plat du plan ?

### Problème 2.8 quadri-divergence

- A** Montrez que le gradient du déterminant du tenseur métrique peut s'exprimer ainsi :

$$\partial_i g = g g^{jk} (\partial_i g_{jk}) \quad (2.178)$$

Indice : la relation  $\text{tr} \ln A = \ln \det A$  sera utile, où  $A$  est une matrice quelconque.

- B** Montrez que

$$\Gamma_{ki}^i = \partial_k \ln \sqrt{|g|} \quad (2.179)$$

- C** Montrez que la divergence d'un vecteur  $A^i$  peut s'exprimer comme suit :

$$\nabla_i A^i = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i [\sqrt{|g|} A^i] \quad (2.180)$$

Expliquez ensuite pourquoi le théorème de la divergence prend la forme qu'il a en géométrie riemannienne :

$$\int_H \sqrt{|g|} \nabla_i A^i d^d x = \oint_{\partial H} dS_i \sqrt{|g|} A^i \quad (2.181)$$

### Problème 2.9 vecteurs de Killing

- A** Un changement de coordonnées  $x \rightarrow x'(x)$  qui laisse invariant la forme fonctionnelle du tenseur métrique est une *isométrie* :

$$g'_{ij}(x) = g_{ij}(x) \quad (2.182)$$

(notez que  $x$  apparaît comme argument dans les deux membres de cette équation, ce qui est important). Considérez maintenant une transformation infinitésimale :

$$x'^i(x) = x^i + \varepsilon \xi^i(x) \quad (2.183)$$

où  $\xi$  est un vecteur covariant et où  $\varepsilon$  est une quantité infinitésimale dont on ne garde que le premier ordre. Montrez que cette transformation infinitésimale est une isométrie si

$$g_{ik} \partial_j \xi^k + g_{jk} \partial_i \xi^k + \xi^k \partial_k g_{ij} = 0 \quad (2.184)$$

Un vecteur respectant cette condition est appelé *vecteur de Killing*.

**B** Montrez que cette condition peut aussi s'écrire

$$\nabla_i \xi_j + \nabla_j \xi_i = 0 \quad (2.185)$$

**C** Montrez que si  $\xi^i$  et  $\zeta^i$  sont des vecteurs de Killing, alors leurs combinaisons linéaires en sont aussi.

**Problème 2.10 vecteurs de Killing (suite)**

Montrez qu'un vecteur de Killing  $\xi^i$  respecte la relation suivante :

$$\nabla_i \nabla_j \xi^k = R^k{}_{ijl} \xi^l \quad (2.186)$$

**Problème 2.11 commutation des dérivées covariantes**

**A** Montrez que, pour un vecteur contravariant,

$$\nabla_i \nabla_j A^k - \nabla_j \nabla_i A^k = -R^k{}_{lji} A^l \quad (2.187)$$

**B** Montrez que, pour un tenseur contravariant de rang 2,

$$\nabla_i \nabla_j T^{kl} - \nabla_j \nabla_i T^{kl} = -R^k{}_{mji} T^{ml} - R^l{}_{mji} T^{km} \quad (2.188)$$

**Problème 2.12 identité de Bianchi**

Démontrez l'identité de Bianchi :

$$\nabla_m R_{ijkl} + \nabla_k R_{ijlm} + \nabla_l R_{ijmk} = 0 \quad (2.189)$$

Indice : Vous pouvez supposer que la connexion affine s'annule en un point donné; le calcul est alors beaucoup plus simple.

**Problème 2.13 métrique non triviale pour un espace plat**

Un espace bidimensionnel est caractérisé par la métrique suivante :

$$ds^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{r^2 - a^2} - \frac{r^2 dr^2}{(r^2 - a^2)^2} \quad (2.190)$$

où  $a$  est une constante. Montrez que cette métrique décrit le plan cartésien (c'est-à-dire un espace plat).

**Problème 2.14 symétrie du tenseur de Ricci**

Démontrez, à partir des propriétés de symétrie de  $R_{ijkl}$ , que le tenseur de Ricci est symétrique :  $R_{ik} = R_{ki}$ .

**Solution**

$$R_{ik} = g^{jl} R_{jilk} = g^{jl} R_{lkji} = g^{lj} R_{lkji} = R_{ki}$$

**Problème 2.15 facteur d'échelle**

Supposons qu'on modifie le tenseur métrique covariant par un facteur d'échelle constant :  $g_{ij} \rightarrow \alpha g_{ij}$ . Trouvez comment les quantités suivantes sont alors modifiées :

$$g^{ij} \quad \Gamma_{jk}^i \quad R^i_{jkl} \quad R_{ik} \quad R \quad (2.191)$$

**Problème 2.16 séparation des coordonnées**

Supposons que les composantes du tenseur métrique  $g_{ij}$  se séparent en deux groupes, à la manière d'une somme directe :

$$[g_{ij}] = \begin{pmatrix} g_{ab}^A & 0 \\ 0 & g_{rs}^B \end{pmatrix} \quad (2.192)$$

où les indices  $a, b$  prennent les valeurs  $0, \dots, n-1$  et les indices  $r, s$  les valeurs  $n, \dots, d$ . On suppose en outre que les composantes  $g_{ab}^A$  ne dépendent que des  $n$  premières coordonnées, alors que les composantes  $g_{rs}^B$  ne dépendent que des  $d-n$  coordonnées restantes. Montrez que toutes les quantités d'intérêt ( $g^{ij}$ ,  $\Gamma_{jk}^i$ ,  $R^i_{jkl}$ ,  $R_{ik}$ ) se séparent de même en deux groupes de composantes, pouvant faire l'objet d'un calcul séparé au sein de chaque groupe. Montrez en outre que les traces, comme la courbure scalaire  $R$ , sont la somme des contributions de chaque groupe.

**Problème 2.17 géométrie de la 3-sphère**

Considérons les coordonnées cartésiennes  $(x, y, z, w)$  dans  $\mathbb{R}^4$ . La 3-sphère est l'hypersurface définie par la contrainte  $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$ . (On considère que son rayon est l'unité pour simplifier.)

**A** On peut définir les coordonnées *hypersphériques*  $(\psi, \theta, \varphi)$  comme suit :

$$w = \cos \psi \quad z = \sin \psi \cos \theta \quad x = \sin \psi \sin \theta \cos \varphi \quad y = \sin \psi \sin \theta \sin \varphi \quad (2.193)$$

Vérifiez que ces coordonnées décrivent bien la 3-sphère, donnez leur domaine de variation et calculez le tenseur métrique en fonction de ces coordonnées.

**B** Un autre système de coordonnées possible sur la 3-sphère sont les *coordonnées stéréogra-*

*phiques*, définies comme un 3-vecteur  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  relié comme suit aux coordonnées cartésiennes dans  $\mathbb{R}^4$  :

$$(x, y, z, w) = \left( \frac{2u_1}{1+\mathbf{u}^2}, \frac{2u_2}{1+\mathbf{u}^2}, \frac{2u_3}{1+\mathbf{u}^2}, \frac{1-\mathbf{u}^2}{1+\mathbf{u}^2} \right) \quad (2.194)$$

Montrez, encore une fois, que ces coordonnées décrivent bien la 3-sphère, donnez leur domaine de variation et calculez le tenseur métrique correspondant.

**C** Étudions maintenant un dernier système de coordonnées possible : les *coordonnées de Hopf*  $(\eta, \phi, \psi)$ , définies comme suit :

$$x + iy = e^{i\phi} \sin \eta \quad z + iw = e^{i\psi} \cos \eta \quad (2.195)$$

Montrez, encore une fois, que ces coordonnées décrivent bien la 3-sphère, donnez leur domaine de variation et calculez le tenseur métrique correspondant.

**D** Obtenez les équations des géodésiques dans les coordonnées de Hopf à l'aide de l'équation générale  $\dot{u}_i = \frac{1}{2} \partial_i g_{jk} u^j u^k$ . Utilisez les lois de conservation et la norme fixe de  $u^i$  afin de simplifier les équations. Trouvez les géodésiques dans les cas simples où certaines coordonnées sont constantes et décrivez-les en fonction des coordonnées cartésiennes dans  $\mathbb{R}^4$ .

**E** Montrez, à l'aide d'un outil de calcul symbolique, que la courbure scalaire de la 3-sphère est constante et égale à  $R = 6$ .

### Problème 2.18 géométries conformes

On dit que deux géométries sont reliées par une *transformation conforme*, ou qu'elles sont *conformément équivalentes*, si leurs tenseurs métriques  $g_{ij}$  et  $\tilde{g}_{ij}$  sont localement proportionnels, c'est-à-dire si

$$\tilde{g}_{ij}(x) = \Omega^2(x) g_{ij}(x) , \quad (2.196)$$

où  $\Omega(x)$  est une fonction de la position dans l'espace-temps. Insistons sur le fait que la transformation conforme n'est pas le fruit d'un changement de coordonnées, mais une correspondance entre deux géométries différentes utilisant le même système de coordonnées.

**A** Expliquer pourquoi cette transformation préserve les angles, c'est-à-dire que deux courbes qui s'intersectent avec un angle  $\theta$  dans la première géométrie ( $g_{ij}$ ) vont s'intersecter avec le même angle dans la seconde ( $\tilde{g}_{ij}$ ).

**B** Expliquez pourquoi les liens causaux entre les événements sont les mêmes dans les deux géométries, c'est-à-dire que des événements qui peuvent avoir une relation causale dans la première géométrie pourront aussi en avoir une dans la deuxième, et *a contrario*, que deux événements qui ne peuvent avoir de lien causal dans une géométrie ne pourront en avoir dans l'autre.

**C** Montrez qu'une géodésique nulle dans une géométrie est aussi une géodésique nulle dans l'autre.

**D** Nous allons dans cette partie étudier la notion de compactification conforme, c'est-à-dire une



façon de représenter une géométrie définie sur un espace infini par une géométrie conformé-  
ment équivalente sur un espace fini. En utilisant les coordonnées du cône de lumière  $u = t + x$  et  
 $v = t - x$  dans l'espace-temps de Minkowski en dimension 1 + 1, et en définissant les coordonnées  
compactes  $\tilde{u}$  et  $\tilde{v}$  définies par

$$\tan \tilde{u} = u \quad \tan \tilde{v} = v \quad (2.197)$$

et dont les domaines sont  $[-\pi/2, \pi/2]$ , montrez que l'espace-temps défini par le domaines de  
 $\tilde{u}$  et  $\tilde{v}$  ci-dessus et la métrique  $ds^2 = d\tilde{u} d\tilde{v}$  est conformé-ment équivalent à l'espace-temps de  
Minkowski au complet.

**E** Dans un diagramme où les axes  $\tilde{u}$  et  $\tilde{v}$  sont tracés à  $\mp 45^\circ$ , et dont les bornes sont correctement  
identifiées, tracez les objets suivants : (i) une ligne d'univers qui va de  $t = -\infty$  à  $t = \infty$  ; (ii) une  
courbe de genre espace qui traverse l'espace de  $x = -\infty$  à  $x = \infty$  ; (iii) la région de l'espace-temps  
située dans le futur d'un événement donné que vous pouvez placer où vous voulez dans le dia-  
gramme ; (iv) la région de l'espace-temps qui est potentiellement influencée par deux événements  
quelconques que vous pouvez placer où vous voulez dans le diagramme.



## CHAPITRE 3

# PRINCIPES DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

### A Théorie newtonienne de la gravitation

#### 3.A.1 Loi de Poisson

En mécanique classique non relativiste, le mouvement d'une particule sous l'influence d'une force de gravitation est régi par deux principes :

1. Les lois du mouvement de Newton, en particulier la deuxième loi, qui relie l'accélération d'une particule à la force résultante qui lui est appliquée :  $m\mathbf{a} = \mathbf{f}$ .
2. La loi de la gravitation universelle, qui stipule que deux corps de masses  $m_1$  et  $m_2$  exercent l'un sur l'autre une force centrale dont l'amplitude est proportionnelle au produit de leurs masses et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare :

$$\mathbf{f}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{12} \quad (3.1)$$

où  $\mathbf{f}_{12}$  est la force exercée sur l'objet 1 par l'objet 2,  $r_{12}$  est la distance séparant les deux objets,  $\hat{\mathbf{r}}_{12}$  est le vecteur unitaire dans la direction allant de l'objet 2 vers l'objet 1, et  $G$  est la **constante de Cavendish**, une constante universelle égale à

$$G = 6,67408(31) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \quad (3.2)$$

Notons que dans le système d'unités que nous utilisons jusqu'ici, dans lequel  $c = 1$ , cette constante a les unités  $L/M$ , soit longueur divisée par masse.

Dans un contexte relativiste, où l'action à distance instantanée est impossible, la théorie de Newton doit être reformulée en fonction d'un champ de force.

Le *champ gravitationnel*,  $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ , est défini de manière à ce que la force gravitationnelle exercée sur un objet de masse  $m$  au point  $\mathbf{r}$  soit  $\mathbf{f} = m\mathbf{g}(\mathbf{r})$ . L'accélération d'une particule ne subissant que cette force est alors  $\mathbf{a} = \mathbf{g}(\mathbf{r})$ , indépendamment de sa masse. Ce champ prend ses sources dans la densité de masse  $\rho(\mathbf{r})$  et respecte la loi de Gauss :

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G \rho(\mathbf{r}) \quad (3.3)$$

La solution à cette loi est bien sûr

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -G \int d^3 r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3.4)$$

où l'intégrale est prise sur tout l'espace. Le champ gravitationnel newtonien dérive d'un potentiel :  $\mathbf{g} = -\nabla\Phi$ , où  $\Phi$  est le *potentiel gravitationnel* qui obéit à l'*équation de Poisson* :

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \quad (3.5)$$

La solution générale à l'équation de Poisson ci-dessus est

$$\Phi(\mathbf{r}) = -G \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.6)$$

Un fait capital de cette théorie est que la masse de la particule test n'a pas d'importance : elle disparaît de l'équation du mouvement de la particule, car la *masse inerte* (aussi appelée *masse inertielle*), figurant dans la seconde loi de Newton, est exactement la même que la *masse grave* (ou *masse gravitationnelle*), qui figure dans la loi de la gravitation universelle. Ainsi, toutes les particules ont le même mouvement en présence d'un champ gravitationnel donné, si les conditions initiales sont les mêmes. Il s'agit d'un fait avéré par l'expérience, de Galilée jusqu'à Eötvös. Comme toutes les coïncidences remarquables, cette égalité des deux masses est le symptôme que la théorie newtonienne de la gravitation est passée à côté d'un fait fondamental. Ce fait, c'est que *la gravité ne dépend aucunement de la particule qui la subit*, mais est une propriété de son milieu, en fait une propriété de l'espace-temps.

#### Avertissement : unités géométriques

De la même manière qu'il est possible de choisir les unités de la distance de sorte que  $c = 1$ , il est aussi possible de choisir les unités de la masse de manière à ce que la constante de Cavendish soit égale à l'unité :  $G = 1$ . Le système d'unités dit *géométrique*, dans lequel  $c = G = 1$ , est souvent utilisé par les praticiens de la relativité générale et nous allons l'adopter dans ce cours. Parfois, cependant, nous allons indiquer la forme de certaines formules courantes dans le système SI, en restaurant les symboles  $c$  et  $G$ . L'annexe 8.B, page 200, montre comment récupérer les unités habituelles pour diverses quantités.

Dans le système d'unités géométrique, la loi newtonienne de la gravitation devient

$$\nabla^2\Phi = 4\pi\rho \quad (3.7)$$

### 3.A.2 Le principe d'équivalence

Il est bien connu, d'après les cours élémentaires de mécanique, que l'utilisation d'un référentiel accéléré est incompatible avec les lois de Newton, à moins de faire intervenir des forces dites *fictives* ou *forces d'inertie*, qui sont proportionnelles à la masse de la particule qui les subit. Plus précisément, si un référentiel est en accélération  $\mathbf{a}_0$  par rapport à un référentiel inertiel, alors la deuxième loi de

Newton  $\mathbf{f} = m\mathbf{a}$  s'applique encore, pourvu qu'on inclue dans la force résultante  $\mathbf{f}$  une *force d'inertie* égale à  $-m\mathbf{a}_0$ .

Cette force d'inertie se comporte localement comme une force gravitationnelle, du fait qu'elle est proportionnelle à la masse de la particule. Il est alors impossible de distinguer localement, par quelque moyen que ce soit, cette force d'inertie d'une véritable force de gravitation. L'exemple type est celui d'une fusée, isolée entre plusieurs galaxies et ne subissant qu'une force de gravité négligeable, qui allume ses moteurs de manière à produire une accélération  $\mathbf{a}_0$ . Les occupants de cette fusée, s'ils ne peuvent observer l'univers qui les entoure et sont condamnés à ne procéder qu'à des expériences confinées à l'intérieur de la fusée, ne pourraient faire la distinction entre leur situation et celle produite par un champ gravitationnel à la surface d'une planète. Cette impossibilité de distinguer les deux situations par des expériences locales porte le nom de *principe d'équivalence*.

Le qualificatif *locales* est important. Considérons par exemple une station spatiale de grand rayon mise en rotation de manière à ce que les occupants, confinés à la périphérie extérieure de la station, subissent une gravité effective causée par la force centrifuge. Soit  $r$  la distance au centre de rotation et  $\Omega$  la fréquence de révolution de la station. Le champ gravitationnel effectif est alors de grandeur  $g = \Omega^2 r$ . Cependant, la dépendance en  $r$  de ce champ n'est pas du tout la même que celle du champ réel causé par la présence d'une planète à proximité. En particulier, le champ augmente partout en fonction de  $r$ , ce qui est physiquement impossible dans un champ réel. En fait, le référentiel tournant n'est possible que pour des rayons modestes. Si  $r$  est trop grand, la vitesse tangentielle de rotation excède la vitesse limite  $c$ , ce qui démontre l'impossibilité physique de réaliser un tel référentiel en pratique. Même sans aller si loin, une mesure légèrement non locale du champ gravitationnel effectif montrerait que ce champ diverge d'un point à l'autre au lieu de converger, comme le champ causé par une planète.

À l'opposé, un astronaute dans la station spatiale internationale est en état d'*apesanteur*, c'est-à-dire que la station définit un référentiel accéléré tel que  $\mathbf{a}_0 = \mathbf{g}(\mathbf{r})$ , de sorte que la force d'inertie est l'exacte opposée de la force gravitationnelle, ce qui résulte en une accélération nette nulle. D'où cette maxime que *la sensation de pesanteur est attribuable à tout sauf à la gravité* : elle est absente dans une situation où la seule force en présence est la force de gravité, et peut être importante en l'absence de gravité, comme dans l'exemple de la fusée ci-dessus. La station spatiale est un exemple de *référentiel en chute libre*.

---

## **B** Le principe de relativité générale

Le principe de relativité stipule que les lois de la physique doivent être les mêmes dans tous les référentiels inertiels. C'est ce principe qui a motivé la formulation des lois de la relativité restreinte par Einstein. Le fait que les lois de l'électromagnétisme de Maxwell comportent une vitesse (la vitesse de la lumière), conjugué à ce principe, mène directement à la conclusion que la vitesse de la lumière est la même, indépendamment de l'état de mouvement de la source ou de l'observateur. Ceci mène logiquement aux transformations de Lorentz et au caractère non absolu de l'espace et du temps. Historiquement, c'est l'électrodynamique de Maxwell qui a motivé les travaux de Poincaré, de Lorentz et d'Einstein sur la relativité restreinte.

Suite à la formulation de la relativité restreinte, Einstein s'est attaqué à sa généralisation à des référentiels non inertiels. Qu'est-ce qu'un référentiel non inertielle, sinon un système de coordonnées quelconque dans l'espace-temps ? Les lois de la physique devraient donc être formulées dans l'espace-temps, sans référence à un système de coordonnées particulier, ou à une classe particulière de systèmes de coordonnées comme les systèmes inertiels. On devrait être en mesure de formuler les lois de la physique dans un référentiel accéléré quelconque. C'est ce qu'on appelle le *principe de relativité générale*. Le langage de la géométrie riemannienne et de l'analyse tensorielle est particulièrement adapté à cette tâche.

---

### 3.B.1 Mouvement inertiel d'une particule

Les lois du mouvement d'une particule en relativité restreinte peuvent être obtenues du principe de la moindre action. En l'absence d'interaction, l'action est simplement l'intervalle décrit par la particule le long de sa *ligne d'univers* :

$$S = -m \int ds \quad (3.8)$$

Il s'agit de la seule expression impliquant la ligne d'univers d'une particule qui soit invariante, c'est-à-dire la même dans tous les référentiels. C'est la même expression qui doit être utilisée en relativité générale. Le principe de la moindre action stipule donc que la ligne d'univers suivie par une particule dans son mouvement inertiel doit être une géodésique. Comme vu au chapitre 2, ce principe de la moindre action mène à l'équation suivante pour les géodésiques :

$$\ddot{x}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k = 0 \quad (3.9)$$

De plus, comme démontré à la page 41, cette équation peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$\dot{u}_i = \frac{1}{2} \partial_i g_{jk} u^j u^k \quad (3.10)$$

En relativité restreinte, la notation de quadri-force est introduite pour généraliser la deuxième loi de Newton :  $f^i = m \dot{u}^i$ . La quadri-force associée à un mouvement inertiel est donc

$$f^i = -m \Gamma_{jk}^i u^j u^k \quad (3.11)$$

La connexion affine jouera donc le rôle de champ gravitationnel, réel ou fictif.

---

### 3.B.2 Coordonnées localement cartésiennes

La différence entre un espace-temps plat décrit par un système de coordonnées inertiel, comme en relativité restreinte, et un système de coordonnées non inertiel, est précisément que la connexion affine s'annule partout dans le premier cas et pas dans le second. Dans un espace-temps plat, il est possible de choisir un système de coordonnées tel que la connexion s'annule partout. Dans un espace-temps courbe, cela n'est pas possible. On le voit très bien du fait que le tenseur de Riemann s'exprime en fonction de la connexion affine et que ce tenseur, s'il est non nul dans un système de

coordonnées, ne peut pas s'annuler complètement dans un autre système de coordonnées, en vertu des lois de transformation des composantes d'un tenseur.

Par contre, il est possible d'annuler la connexion en un point particulier  $P$  en procédant à un changement de coordonnées. Il suffit pour cela de définir les nouvelles coordonnées  $x'^i$  de la manière suivante :

$$x'^i = (x^i - x_p^i) + \frac{1}{2}\Gamma_{jk}^i(P)(x^j - x_p^j)(x^k - x_p^k) \quad (3.12)$$

où  $x_p^i$  sont les coordonnées du point  $P$  dans l'ancien système, et  $\Gamma_{jk}^i(P)$  la connexion affine en ce point dans l'ancien système. La relation entre l'ancien et le nouveau système est régie par le jacobien

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = \delta_j^i + \Gamma_{jk}^i(P)(x^k - x_p^k) \quad (3.13)$$

Au point  $P$ , cette expression se réduit à  $\delta_j^i$ . Par contre, la dérivée seconde au point  $P$  n'est pas nulle :

$$\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} = \Gamma_{jk}^i(P) \quad (3.14)$$

Appliquons maintenant la loi de transformation (2.53) de la connexion, au point  $P$  :

$$\begin{aligned} \Gamma'^k_{ij}(P) &= \frac{\partial x'^k}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} \Gamma_{mn}^l(P) - \frac{\partial x'^m}{\partial x^i} \frac{\partial x'^n}{\partial x^j} \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^m \partial x^n} \\ &= \delta_l^k \delta_i^m \delta_j^n \Gamma_{nm}^l(P) - \delta_i^m \delta_j^n \Gamma_{mn}^k(P) \\ &= \Gamma_{ji}^k(P) - \Gamma_{ij}^k(P) = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Dans le nouveau système de coordonnées, la connexion étant nulle au point  $P$  (soit la nouvelle origine  $x' = 0$ ), en ce point l'équation de la géodésique est simplement  $\ddot{x}'^i = 0$ . Bien sûr, cette relation n'est valable qu'au point  $P$ . En relativité générale, ce système de coordonnées représente un référentiel en chute libre à l'événement  $P$ .

La transformation (3.12) n'est pas unique. On pourrait par la suite procéder à une seconde transformation  $x' \rightarrow x''$  qui serait purement *linéaire*. Cette dernière transformation n'affecterait pas l'annulation de la connexion au point  $P$ , car sa deuxième dérivée est nulle. Par contre, elle pourrait permettre de donner au tenseur métrique l'aspect qu'il a dans un système de coordonnées cartésien. En particulier, dans l'espace-temps de Minkowski, on pose  $g_{ij} = \eta_{ij}$  où on a défini la métrique cartésienne

$$[\eta_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

**référentiel localement en chute libre** Un système de coordonnées tel que  $\Gamma_{jk}^i = 0$  au point  $P$  décrit physiquement un référentiel en *chute libre* en ce point. Le mouvement d'un objet ponctuel autour du point  $P$  est alors régi par l'équation de la géodésique au point  $P$ , soit  $\ddot{x}^i = 0$  : l'objet se déplace à vitesse approximativement constante près du point  $P$  et son accélération est nulle précisément en ce point. Par contre, les objets situés au

voisinage du point  $P$  subiront en général une accélération, en raison de la valeur non nulle de  $\Gamma_{jk}^i$  en dehors du point  $P$ . En présence d'un véritable champ gravitationnel, par exemple à proximité d'une planète, il n'est pas possible de trouver un référentiel en chute libre universel, c'est-à-dire qui permet aux particules d'être en état d'apesanteur partout. Concrètement, cela signifie que des particules initialement en repos relatif mais situées en des endroits différents vont acquérir une vitesse relative. La particule de référence, située au point  $P$  qui définit le référentiel inertiel local, restera au repos en ce point, alors que ses voisines, même initialement au repos, subiront une accélération.

De la même manière qu'il n'est pas possible d'éliminer le champ gravitationnel partout par un choix approprié de référentiel, il n'est pas possible d'éliminer la courbure de l'espace-temps par un choix de référentiel, car la courbure est décrite par un tenseur, alors que la connexion affine n'en est pas un. De là à attribuer la gravitation à la géométrie d'un espace-temps courbe, il n'y a qu'un pas, que franchit Einstein et qui s'est avéré correct selon toutes les observations réalisées depuis.

**Déviations géodésiques** On peut rendre ce concept plus précis à l'aide de l'équation de la *déviations géodésiques*. Considérons une géodésique  $x^i(\tau)$ , ainsi qu'une deuxième géodésique  $\bar{x}^i(\tau)$ , très proche de la première. Par ceci on veut dire que la différence  $\xi^i(\tau) = \bar{x}^i(\tau) - x^i(\tau)$  est toujours très petite (infinitésimale, à la rigueur). On montre que cette déviation  $\xi^i$  obéit à l'équation suivante :

$$\nabla_{\lambda}^2 \xi^i + R_{jkl}^i \xi^k u^j u^l = 0 \quad (3.17)$$

où  $\nabla_{\lambda}^2 \xi^i$  est la dérivée directionnelle (ou intrinsèque) seconde, soit  $u^k u^j \nabla_k \nabla_j x^i$ . Dans un espace plat,  $R_{jkl}^i = 0$  et on peut choisir un système de coordonnées tel que  $\nabla_i = \partial_i$ . Dans ce cas, l'équation de déviation géodésique se réduit à  $\ddot{\xi}^i = 0$ , dont la solution est  $\xi^i(\tau) = \xi_0^i + \tau \xi_1^i$ , où  $\xi_0^i$  et  $\xi_1^i$  sont des constantes. En d'autres termes, la différence des coordonnées de deux géodésiques voisines dans un espace-temps plat change linéairement avec le temps ou reste constante, ce qui est manifestement le cas des mouvements rectilignes uniformes. Par contre, dans un espace-temps courbe, deux objets qui sont proches l'un de l'autre et initialement en repos relatif, verront cet état changer au cours du temps. C'est un effet de la *force de marée*, qui est donc directement reliée au tenseur de courbure.

### 3.B.3 Limite non relativiste

La quadrivitesse  $u^i$  d'une particule non relativiste est dominée par sa composante temporelle :  $u^0 \gg u^{1,2,3}$ . Cette affirmation est en fait la définition d'une classe de référentiels dans lesquels elle est vraie. Pour une telle particule, l'équation du mouvement se réduit approximativement à

$$\dot{u}^i = -\Gamma_{00}^i u^0 u^0 \quad (3.18)$$

mais

$$\Gamma_{00}^i = g^{ij} \Gamma_{j00} = \frac{1}{2} g^{ij} (2\partial_0 g_{j0} - \partial_j g_{00}) \quad (3.19)$$

Supposons en outre que la métrique soit presque cartésienne, de sorte que la déviation  $h_{ij}$  de la métrique par rapport à la valeur cartésienne  $\eta_{ij}$  soit petite. Dans ce cas,  $g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij}$  entraîne que  $g^{ij} = \eta^{ij} - h_{ij}$ , de sorte que  $g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j$  au premier ordre en  $h_{ij}$ .<sup>1</sup> Supposons en outre que la

1. Notons que  $h_{ij}$  n'est pas un tenseur en relativité générale, car  $\eta_{ij}$  n'en est pas un non plus : c'est une matrice constante, indépendante du référentiel. Nous ne sommes pas en relativité restreinte ici et tous les changements de



métrique est indépendante du temps :  $\partial_0 g_{j0} = 0$ . l'équation ci-dessus devient alors

$$\Gamma_{00}^i = g^{ij} \Gamma_{j00} = -\frac{1}{2} \eta^{ij} \partial_j h_{00} = -\frac{1}{2} \partial^i h_{00} \quad (3.20)$$

Dans l'approximation non relativiste, la 4-accélération (1.30) se réduit à l'accélération ordinaire pour les trois composantes spatiales et à zéro pour la composante temporelle. On peut donc écrire

$$\ddot{x}^i \approx a^i = \frac{1}{2} \partial^i h_{00} = -\frac{1}{2} \partial_i h_{00} \quad (3.21)$$

ou encore

$$\mathbf{a} = -\frac{1}{2} \nabla h_{00} \quad (3.22)$$

La relation entre le potentiel gravitationnel  $\Phi$  est le tenseur métrique est donc

$$g_{00} \approx 1 + 2\Phi \quad (3.23)$$

car  $\mathbf{a} = \mathbf{g} = -\nabla\Phi$ .

### 3.B.4 Formulation lagrangienne alternative

L'équation des géodésiques peut aussi s'obtenir d'une forme différente du lagrangien, qui suppose que le paramètre affine est utilisé pour décrire les lignes d'univers. Supposons que la ligne d'univers est paramétrée par une variable  $\tau$  qui peut être le temps propre écoulé. Alors l'action est une fonctionnelle de  $x(\tau)$  et de sa dérivée par rapport à  $\tau$ ,  $\dot{x}$  :

$$S = \int d\tau L(x, \dot{x}) \quad (3.24)$$

où nous avons introduit le lagrangien  $L$ . Mais prenons garde! Cette fonction ne coïncide avec le lagrangien habituel que si la variable  $\tau$  est le temps  $t$ , ce qui n'est pas nécessairement le cas ici. Néanmoins, nous utiliserons la même notation. La forme précise de  $L$  en tant que fonction va dépendre de la variable  $\tau$  utilisée, mais les équations du mouvement obtenues par le principe variationnel (les équations de Lagrange) seront équivalentes. En procédant de la manière habituelle en calcul des variations, c'est-à-dire en imposant une variation  $\delta x(\tau)$  dans la ligne d'univers et en calculant la variation correspondante de  $S$ , on trouve

$$\delta S = \int d\tau \left( \frac{\partial L}{\partial x^i} \delta x^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \delta \dot{x}^i \right) \quad (3.25)$$

En intégrant par partie le deuxième terme, tout en supposant que la variation est nulle aux extrémités de la ligne d'univers considérée, on trouve

$$\delta S = \int d\tau \left( \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) \delta x^i \quad (3.26)$$

coordonnées doivent être considérés, pas seulement les transformations de Lorentz. Ces dernière d'ailleurs n'ont un sens que sur un espace-temps plat. Donc l'élévation des indices de  $h_{ij}$  isolément de  $\eta_{ij}$  n'a pas de sens.

et cette variation de l'action doit s'annuler pour une variation arbitraire  $\delta x^i$ , ce qui entraîne les équations de Lagrange :

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0 \quad (3.27)$$

On peut donc utiliser les équations de Lagrange sans nécessairement adopter le temps comme variable décrivant la ligne d'univers.

On peut maintenant écrire la forme suivante du lagrangien pour une particule en relativité générale :

$$L = \frac{1}{2} m g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j \quad (3.28)$$

Les moments conjugués sont des objets naturellement covariants :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = m g_{ij} \dot{x}^j \quad (3.29)$$

mais qui, dans leur version contravariante, sont  $p^i = m \dot{x}^i$ . Dans l'espace-temps de Minkowski, cela concorde avec la définition du quadri-vecteur énergie-impulsion. Le hamiltonien est défini de la manière habituelle, mais ne coïncide pas avec le hamiltonien habituel tiré de l'utilisation du temps comme paramètre du mouvement :

$$H = p_i \dot{x}^i - L = m g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j - L = \frac{1}{2} m g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = \frac{1}{2m} g^{ij} p_i p_j \quad (3.30)$$

Cette dernière forme est la bonne, car le hamiltonien doit formellement s'exprimer en fonction des moments conjugués et des coordonnées (la dépendance en coordonnée vient du tenseur métrique). Les équations de Hamilton sont

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i} \quad (3.31)$$

La première de ces équations nous ramène à l'expression du moment conjugué en fonction de  $\dot{x}^i$ . La deuxième prend explicitement la forme suivante :

$$\dot{p}_i = -\frac{1}{2m} \partial_i g^{jk} p_j p_k = -\frac{m}{2} \partial_i g^{jk} g_{jn} \dot{x}^n g_{kl} \dot{x}^l \quad (3.32)$$

Comme  $p_i = m u_i$ , cela revient à  $\dot{u}_i = -\frac{1}{2} \partial_i g^{jk} g_{jn} g_{kl} u^n u^l$ . De plus, comme  $\partial_i \delta_l^j = \partial_i (g^{jk} g_{kl}) = 0$ , on a l'identité suivante :

$$\partial_i g^{jk} g_{kl} + g^{jk} \partial_i g_{kl} = 0 \quad (3.33)$$

Donc

$$\dot{u}_i = \frac{1}{2} g^{jk} \partial_i g_{kl} g_{jn} u^n u^l = \frac{1}{2} \partial_i g_{nl} u^n u^l \quad (3.34)$$

ce qui coïncide avec l'équation (2.79) des géodésiques. Donc cette formulation alternative de la mécanique lagrangienne, ainsi que l'expression (3.28) du lagrangien dans le cas d'une particule en chute libre, nous mène aux bonnes équations du mouvement, ce qui confirme la validité de la procédure.

**coordonnées cycliques** Si le lagrangien ne dépend pas explicitement d'une coordonnée  $x^k$ , par exemple en raison d'une symétrie, alors le moment conjugué associé  $p_k$  est conservé. Ici apparaît l'avantage de ne pas utiliser le temps comme paramètre de la ligne d'univers. Si un paramètre invariant est utilisé à la place, comme le temps propre  $\tau$  ou un paramètre affine quelconque relié à  $\tau$ , alors  $L$  doit être un invariant, car  $S$  doit être un invariant. Donc  $p_k$  doit être un vecteur covariant, d'où la position de l'indice. En relativité générale,  $p_k$  peut être assez différent de sa version contravariante  $p^k$ . On voit ici que c'est la forme covariante qui est la plus fondamentale.

La conservation de l'énergie est associée au fait que le lagrangien ne dépend pas explicitement du temps. Dans le formalisme lagrangien habituel, comme le temps est la variable qui décrit le mouvement, cela se traduit par la conservation du hamiltonien  $H$ . Dans le nouveau formalisme que nous expliquons ici, la conservation de l'énergie est plutôt exprimée par la conservation du moment conjugué associé à la coordonnée temporelle  $x^0 = t$  :

$$\dot{p}_0 = 0 \quad \text{où} \quad p_0 = m g_{0i} u^i \quad (3.35)$$

Quant au Hamiltonien, ce dernier est numériquement égal à  $\frac{1}{2}m$  si le paramètre affine est utilisé, donc sa conservation est triviale.

**relativité restreinte** Si on applique ce formalisme en relativité restreinte (géométrie de Minkowski), on trouve immédiatement  $p_i = m u_i$  ou encore  $p^i = m u^i$ , ce qui coïncide avec la 4-impulsion.

## C Distances et durées

### 3.C.1 Décalage vers le rouge

L'un des effets les plus notoires de la relativité générale est le *décalage vers le rouge* (angl. *redshift*) des signaux émis par des sources situées dans un potentiel gravitationnel plus faible. Voyons comment cet effet peut-être démontré en général pour une métrique indépendante du temps (c'est-à-dire  $g_{ij}$  fonction de  $\mathbf{r}$  seulement) et qui ne mélange pas espace et temps, c'est-à-dire telle que  $g_{0a} = 0$  ( $a = 1, 2, 3$ ).

Considérons un émetteur  $E$  envoyant un signal lumineux vers un récepteur  $R$ . L'envoi du signal définit un événement  $x_E$  et sa réception un événement  $x_R$ . Le signal se propage le long d'une géodésique nulle entre les deux événements, et l'intervalle  $ds^2$  sur chaque segment de cette géodésique est nul :

$$ds^2 = g_{00}(\mathbf{r}) dt^2 + g_{ab}(\mathbf{r}) dx^a dx^b = 0 \quad (3.36)$$

On peut donc écrire, le long de cette géodésique,

$$dt = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \sqrt{-g_{ab} dx^a dx^b} \quad (3.37)$$

Donc, en intégrant de  $t_E$  à  $t_R$  :

$$t_R - t_E = \int_{\lambda_E}^{\lambda_R} \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \sqrt{-g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b} d\lambda \quad (3.38)$$

où  $\lambda$  est le paramètre affine utilisé le long de la géodésique.

Considérons maintenant une deuxième paire d'événements,  $x'_E$  et  $x'_R$ , aussi associés à l'émission en E et la réception en R d'un signal lumineux, mais décalé dans le temps par rapport au premier, comme le sont deux «tics» successifs d'une horloge. Ces deux autres événements ont entre eux la même différence de temps que les deux premiers, car l'intégrale (3.38) est indépendante du temps. Ainsi,  $t_R - t_E = t'_R - t'_E$ , ou encore  $\Delta t_R = \Delta t_E$  : l'intervalle de temps entre les deux émissions est le même que l'intervalle de temps entre les deux réceptions (on parle ici de «temps-coordonnée» et non pas de temps propre). Cela a beaucoup de sens, sinon il y aurait une accumulation de retard dans les tics successifs d'une horloge, ce qui est impossible en régime permanent dans une situation où la métrique est stationnaire.

Examinons maintenant les différences de temps propres. Comme  $x_E$  et  $x'_E$  sont situés au même endroit, l'intervalle entre ces deux événements est simplement  $\Delta\tau_E = g_{00}(\mathbf{r}_E)\Delta t_E$ , alors que l'intervalle entre les deux réceptions est  $\Delta\tau_R = g_{00}(\mathbf{r}_R)\Delta t_R$ . L'intervalle de temps propre peut être considéré comme la période d'une horloge, ou d'un processus périodique quelconque (inverse de la fréquence propre d'un atome, etc.). Le rapport des fréquences propres  $\nu_E$  et  $\nu_R$  entre l'émetteur et le récepteur, soit l'inverse du rapport des périodes, est donc, puisque  $\Delta t_R = \Delta t_E$ ,

$$\frac{\nu_R}{\nu_E} = \left( \frac{g_{00}(\mathbf{r}_E)}{g_{00}(\mathbf{r}_R)} \right)^{1/2} \quad (3.39)$$

On utilise souvent la notation  $z$  pour le pourcentage de décalage vers le rouge, soit

$$z = \frac{\nu_E}{\nu_R} - 1 = \left( \frac{g_{00}(\mathbf{r}_R)}{g_{00}(\mathbf{r}_E)} \right)^{1/2} - 1 \quad (3.40)$$

Ainsi  $z > 0$  décrit un décalage vers le rouge ( $\nu_R < \nu_E$ ) et  $z < 0$  un décalage vers le bleu ( $\nu_R > \nu_E$ ).

**limite non relativiste** Dans la limite non relativiste, comme  $g_{00} \approx 1 + 2\Phi$ , on a, en première approximation,

$$\begin{aligned} z &= \left( \frac{1 + 2\Phi(\mathbf{r}_R)}{1 + 2\Phi(\mathbf{r}_E)} \right)^{1/2} - 1 \\ &\approx \Phi(\mathbf{r}_R) - \Phi(\mathbf{r}_E) \end{aligned} \quad (3.41)$$

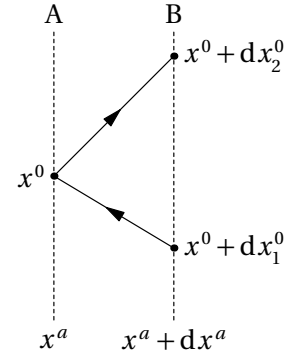
Ainsi, le décalage est effectivement vers le rouge si l'émetteur est situé à un potentiel plus bas que le récepteur. Par exemple, une source située à la surface de la Terre qui émet vers une station spatiale en orbite sera décalée vers le rouge à la réception, comme si le photon perdait de l'énergie en gagnant de l'altitude.

**expérience de Pound et Rebka** Cet effet fut confirmé de manière spectaculaire lors d'une expérience célèbre par [Pound et Rebka](#) en 1960. Des rayons gamma

émis par une source radioactive au sous-sol d'un pavillon de l'Université Harvard furent détectés sept étages plus haut par [effet Mössbauer](#). La finesse de l'effet Mössbauer a permis aux auteurs de l'expérience de mesurer un décalage relatif de  $2,5 \times 10^{-15}$ , sur une distance de 22,5m, avec une précision de 10%. Cette confirmation du principe d'équivalence a plus tard été raffinée à 1% de marge d'erreur par Pound et Snider en 1964.

### 3.C.2 Définition des distances

En relativité restreinte, la distance entre deux points s'obtient en calculant la différence des coordonnées des deux points *pris au même instant* dans un référentiel donné. En relativité générale, les choses sont plus subtiles, car les coordonnées n'ont en général pas de sens physique, de sorte que la notion de simultanéité doit être systématiquement définie en fonction de l'échange de signaux lumineux.



**FIGURE 3.1**

Schéma de l'échange de signaux lumineux afin de déterminer la distance entre les points A et B.

La figure 3.1 illustre comment procéder pour calculer la distance entre des points A et B séparés par une différentielle des coordonnées spatiales  $dx^a$ . On suppose ici que la métrique est indépendante du temps, et qu'un signal est envoyé du point B vers le point A au temps  $x^0 + dx_1^0$  et ensuite réfléchi au point A pour être enfin détecté au point de départ B au temps ultérieur  $x^0 + dx_2^0$ . Le temps de coordonnées requis pour effectuer cet aller-retour est  $dx_2^0 - dx_1^0$ , et la durée associée, qui coïncide avec le double de la distance entre A et B car  $c = 1$ , est obtenue en multipliant par  $\sqrt{g_{00}}$ . Comme les intervalles associés à la propagation des signaux lumineux sont nuls, on peut écrire

$$d\tau^2 = 0 = g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{0a} dx^0 dx^a + g_{ab} dx^a dx^b \quad (3.42)$$

où nous avons explicité les composantes temporelle ( $g_{00}$ ), spatiale ( $g_{ab}$ ) et spatio-temporelle ( $g_{0a}$ ) de la métrique. La différentielle de temps  $dx^0$  peut soit être  $dx_1^0$ , soit  $dx_2^0$ . Rappelons que les indices latins tirés des premières lettres de l'alphabet vont de 1 à 3 seulement. L'équation ci-dessus est une équation quadratique pour  $dx^0$  dont la solution est la suivante :

$$dx_{1,2}^0 = \frac{1}{g_{00}} \left\{ -g_{0a} dx^a \mp \sqrt{(g_{0a}g_{0b} - g_{ab}g_{00})dx^a dx^b} \right\} \quad (3.43)$$

où le signe  $-$  correspond à  $dx_1^0$  et le signe  $+$  à  $dx_2^0$ . La demi-différence de temps de coordonnées entre l'émission et la réception du signal est donc

$$\frac{dx_2^0 - dx_1^0}{2} = \frac{1}{g_{00}} \sqrt{(g_{0a}g_{0b} - g_{ab}g_{00})dx^a dx^b} \quad (3.44)$$

La distance associée est égale à la durée correspondante, qui elle est obtenue en mettant au carré et en multipliant par  $g_{00}$  :

$$d\ell^2 = \frac{1}{g_{00}} (g_{0a}g_{0b} - g_{ab}g_{00}) dx^a dx^b = \left( \frac{g_{0a}g_{0b}}{g_{00}} - g_{ab} \right) dx^a dx^b \quad (3.45)$$

On peut exprimer cette distance en fonction d'une *métrique spatiale*  $\gamma_{ab}$  :

$$\boxed{d\ell^2 = \gamma_{ab} dx^a dx^b} \quad \boxed{\gamma_{ab} = -g_{ab} + \frac{g_{0a}g_{0b}}{g_{00}}} \quad (3.46)$$

Notons que la métrique spatiale ne diffère que de la composante spatiale de la métrique  $g_{ab}$  (sauf pour le signe) que si la métrique de l'espace-temps contient des composantes spatio-temporelles  $g_{a0}$  non nulles.

## D Équations du champ de gravitation

### 3.D.1 Action d'Einstein-Hilbert

La manière la plus sûre et aussi la plus fondamentale de construire les lois qui gouvernent une théorie physique est de mettre à profit le principe de la moindre action. Les principes de symétrie jouent alors un rôle prépondérant afin de déterminer la forme précise de l'action. Rappelons que l'action d'une particule en mouvement inertiel a été construite à partir d'un invariant simple : le temps propre (ou intervalle) le long de la ligne d'univers de la particule. Dans le cas du champ gravitationnel lui-même, l'action  $S$  devra être une intégrale sur l'espace-temps d'une fonction du tenseur métrique  $g_{ij}$  et de ses dérivées  $\partial_k g_{ij}$ . Cette fonction devra être un invariant, c'est-à-dire indépendante du système de coordonnées choisi.

De plus, l'action devra être la somme de deux termes : le premier,  $S_g$ , ne dépendant que du champ gravitationnel lui-même, donc du tenseur métrique, et le deuxième,  $S_m$ , couplant le tenseur métrique aux sources du champ, soit la matière. Nous écrivons donc  $S = S_g + S_m$ . Le principe de la moindre action sera alors mis à l'oeuvre en effectuant une variation  $\delta g_{ij}$  du tenseur métrique, ce qui produira une équation de la forme suivante :

$$\frac{\delta S_g}{\delta g_{ij}} + \frac{\delta S_m}{\delta g_{ij}} = 0 \quad (3.47)$$

La tâche qui nous incombe est donc de calculer les deux termes de l'équation ci-dessus.

La seule quantité dont nous disposons pour construire  $S_g$  qui est (i) un scalaire et (ii) qui dépend du tenseur métrique et de ses dérivées est la courbure scalaire  $R$ . Nous allons donc poser la forme suivante :

$$S_g = \kappa \int d\Omega \sqrt{|g|} R \quad (3.48)$$

où  $\kappa$  est une constante à déterminer. Cette action porte le nom d'*action de Einstein-Hilbert*. Nous fixerons la valeur de  $\kappa$  plus tard en examinant la limite non relativiste et en la faisant correspondre à la loi newtonienne de la gravitation.

### 3.D.2 Tenseur d'énergie-impulsion

Or, nous connaissons la forme de l'action matérielle  $S_m$  : il s'agit de l'action (3.8) d'une particule matérielle, mais sommée sur toutes les particules du système :

$$S_m = - \sum_{\alpha} m_{\alpha} \int d\tau_{\alpha} \sqrt{g_{ij}(x_{\alpha}) \dot{x}_{\alpha}^i \dot{x}_{\alpha}^j} \quad (3.49)$$

où  $x_{\alpha}^i(u_{\alpha})$  est la ligne d'univers de la particule n<sup>o</sup>  $\alpha$  (attention : le symbole  $\alpha$  n'est pas un indice d'espace-temps, mais un numéro, une étiquette pour les différentes particules). Nous allons supposer que les particules de matière forment une espèce de gaz de particules indépendantes. Ceci n'est pas essentiel, mais servira à fixer les idées.

Une variation de la métrique produit l'effet suivant :

$$\begin{aligned} \delta S_m &= -\frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \int d\tau_{\alpha} \frac{1}{\sqrt{g_{ij}(x_{\alpha}) \dot{x}_{\alpha}^i \dot{x}_{\alpha}^j}} \dot{x}_{\alpha}^i \dot{x}_{\alpha}^j \delta g_{ij}(x_{\alpha}) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \int d\tau_{\alpha} \dot{x}_{\alpha}^i \dot{x}_{\alpha}^j \delta g_{ij}(x_{\alpha}) \end{aligned} \quad (3.50)$$

où nous avons supposé que la paramétrisation affine était utilisée pour chaque ligne d'univers, de sorte que la valeur de la racine carrée est l'unité. Nous allons écrire cette variation de l'action sous la forme suivante :

$$\delta S_m = -\frac{1}{2} \int d\Omega \sqrt{|g(x)|} T^{ij}(x) \delta g_{ij}(x) \quad (3.51)$$

où  $T^{ij}$  porte le nom de *tenseur d'énergie-impulsion* (cette terminologie sera motivée plus bas).<sup>2</sup> On peut donc écrire

$$T^{ij}(x) = \frac{1}{\sqrt{|g(x)|}} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \int d\tau_{\alpha} \dot{x}_{\alpha}^i \dot{x}_{\alpha}^j \delta^4(x - x_{\alpha}(\tau_{\alpha})) \quad (3.52)$$

Notons que la fonction delta et le facteur  $\sqrt{|g|}$  sont nécessaires afin de concilier ce résultat avec la définition (3.51).

**la variation  $\delta g^{ij}$**  Une remarque importante s'impose sur la nature de la variation  $\delta g_{ij}$ . Désignons par  $\delta g^{ij}$  la variation correspondante du tenseur métrique contravariant. Comme  $g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i$  est constant, sa variation est nulle. Or,

$$\delta(g^{ik} g_{kj}) = \delta g^{ik} g_{kj} + g^{ik} \delta g_{kj} = 0 \quad (3.53)$$

En postmultipliant par  $g^{jl}$ , on trouve

$$0 = \delta g^{ik} \delta_k^l + g^{ik} g^{jl} \delta g_{kj} = \delta g^{il} + g^{ik} g^{jl} \delta g_{kj} \implies \delta g^{il} = -g^{ik} g^{lj} \delta g_{kj} \quad (3.54)$$

Par contre, si on suit la règle habituelle d'élévation des indices, on trouve plutôt  $(\delta g)^{il} = g^{ik} g^{lj} \delta g_{kj}$ . Le signe est différent. Notez cependant les parenthèses autour de  $\delta g$ , qui apportent une nuance :

2. Les auteurs qui utilisent la signature opposée  $(-+++)$  changent le signe de la définition du tenseur d'énergie-impulsion, car cette définition comporte une puissance de  $g_{ij}$ .

$(\delta g)^{il}$  est la forme contravariante de la variation du tenseur métrique covariant, alors que  $\delta g^{il}$  est la variation du tenseur métrique contravariant, ce qui n'est manifestement pas la même chose. Cela a son impact sur la définition du tenseur d'énergie-impulsion, qui doit toujours procéder de l'éq. (3.51) pour le tenseur contravariant.

### 3.D.3 Variation de l'action d'Einstein-Hilbert

Nous allons montrer dans cette section que la variation de l'action du champ,  $\delta S_g$  est la suivante :

$$\delta S_g = -\kappa \int d\Omega \sqrt{|g|} \left( R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R \right) \delta g_{ij} \quad (3.55)$$

Ceci se fait en plusieurs étapes. Calculons premièrement la variation du déterminant. En utilisant la relation  $\text{tr} \log \mathbf{g} = \log \det \mathbf{g}$  on déduit que

$$\delta \text{tr} \log \mathbf{g} = \text{tr} (\mathbf{g}^{-1} \delta \mathbf{g}) = (\det \mathbf{g})^{-1} \delta \det \mathbf{g} \quad (3.56)$$

ou encore

$$g^{ij} \delta g_{ij} = g^{-1} \delta g \implies \delta g = g g^{ij} \delta g_{ij} \quad (3.57)$$

ce qui nous mène à

$$\delta \sqrt{|g|} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{|g|}} \delta g = \frac{1}{2} \sqrt{|g|} g^{ij} \delta g_{ij} \quad (3.58)$$

Ensuite, nous devons calculer  $\delta R = \delta(g^{ij} R_{ij}) = \delta g^{ij} R_{ij} + g^{ij} \delta R_{ij}$ . Comme  $\delta g^{ij} = -g^{ik} g^{jl} \delta g_{kl}$ , on a

$$\delta R = g^{ij} \delta R_{ij} - R^{kl} \delta g_{kl} \quad (3.59)$$

Il reste à calculer  $\delta R_{ij}$ . Rappelons que

$$R_{ij} = \partial_l \Gamma^l_{ji} - \partial_i \Gamma^l_{jl} + \Gamma^m_{ji} \Gamma^l_{ml} - \Gamma^m_{jl} \Gamma^l_{mi} \quad (3.60)$$

Il faut donc calculer la variation  $\delta \Gamma$  de la connexion. Bien que la connexion ne soit pas un tenseur, en raison de ses propriétés de transformation (2.53), la variation de  $\Gamma$  est un tenseur. En effet, en appliquant une variation à la loi de transformation (2.53), on trouve

$$\delta \Gamma'^k_{ij} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} \delta \Gamma^l_{mn} \quad (3.61)$$

On peut donc calculer la variation dans un référentiel où l'expression du tenseur de Ricci est plus simple, pour ensuite la généraliser en utilisant son caractère tensoriel. En un point donné, on peut se déplacer dans un référentiel où la connexion est nulle et alors en ce point

$$R_{ij} = \partial_l \Gamma^l_{ji} - \partial_i \Gamma^l_{jl} \quad (3.62)$$

La variation correspondante est alors

$$\delta R_{ij} = \partial_l \delta \Gamma^l_{ji} - \partial_i \delta \Gamma^l_{jl} \quad (3.63)$$



La généralisation à un référentiel quelconque s'obtient simplement en remplaçant les dérivées ordinaires par des dérivées covariantes :

$$\delta R_{ij} = \nabla_l \delta \Gamma^l_{ji} - \nabla_i \delta \Gamma^l_{jl} \quad (3.64)$$

Cette égalité porte le nom d'*identité de Palatini*.

La variation totale qui nous intéresse est alors

$$\delta \int d\Omega \sqrt{|g|} R = \int d\Omega \sqrt{|g|} \left\{ \left( \frac{1}{2} g^{ij} R - g^{ik} g^{jl} R_{kl} \right) \delta g_{ij} + g^{ij} (\nabla_l \delta \Gamma^l_{ji} - \nabla_i \delta \Gamma^l_{jl}) \right\} \quad (3.65)$$

**4-divergence** Le dernier terme de cette variation, celui qui comporte les variations de la connexion, peut aussi s'écrire ainsi :

$$g^{ij} (\nabla_l \delta \Gamma^l_{ji} - \nabla_i \delta \Gamma^l_{jl}) = \nabla_l (g^{ij} \delta \Gamma^l_{ji}) - \nabla_i (g^{ij} \delta \Gamma^l_{jl}) \quad (3.66)$$

soit une somme de deux 4-divergences. Or, une telle expression est l'équivalent d'une dérivée totale et peut être intégrée dans l'hypervolume  $H$  pour devenir une intégrale sur la frontière  $\partial H$  de cet hypervolume. Il s'agit de la forme générale du théorème de la divergence :

$$\int_H d\Omega \sqrt{|g|} \nabla_i F^i = \oint_{\partial H} \sqrt{|g|} F^i da_i \quad (3.67)$$

On peut en effet montrer (problème 2.8) que

$$\nabla_i F^i = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i [\sqrt{|g|} F^i] \quad (3.68)$$

Il s'ensuit que

$$\int_H d\Omega \sqrt{|g|} \nabla_i F^i = \int_H d\Omega \partial_i [\sqrt{|g|} F^i] = \oint_{\partial H} \sqrt{|g|} F^i da_i \quad (3.69)$$

où la dernière égalité est une conséquence du théorème de la divergence ordinaire, en dimension quelconque. Ce théorème n'a rien à voir avec la géométrie riemannienne (c'est-à-dire avec la métrique) et n'est qu'un résultat du calcul intégral à plusieurs variables. Rappelons que l'élément d'hypersurface  $da_i$  est défini par

$$da_i = \varepsilon_{ijkl} dx^j dx'^k dx''l \quad (3.70)$$

où  $dx$ ,  $dx'$  et  $dx''$  sont trois éléments infinitésimaux qui définissent un élément d'hypersurface; le produit ci-dessus est une généralisation à 4 dimensions du produit vectoriel en trois dimensions, défini à l'aide du tenseur de Levi-Civita complètement antisymétrique.

Comme la variation de la métrique est supposée nulle à la frontière du domaine, les variations de  $S$  qui s'expriment comme des 4-divergences ne contribuent pas aux équations du champ. Il reste donc les deux premiers termes :

$$\begin{aligned} \delta \int d\Omega \sqrt{|g|} R &= \int d\Omega \sqrt{|g|} \left[ \frac{1}{2} g^{ij} R - g^{ik} g^{jl} R_{kl} \right] \delta g_{ij} \\ &= - \int d\Omega \sqrt{|g|} \left[ R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R \right] \delta g_{ij} \end{aligned} \quad (3.71)$$

On reconnaît entre crochets l'expression du tenseur d'Einstein  $G^{ij}$ . Nous avons donc démontré la relation (3.55).

### 3.D.4 Équations d'Einstein

En combinant les relations (3.55) et (3.51), on trouve la variation de l'action totale :

$$\delta S = \int d\Omega \sqrt{|g|} \left[ -\kappa(R^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}R) - \frac{1}{2}T^{ij} \right] \delta g_{ij} = 0 \quad (3.72)$$

Comme cette variation doit s'annuler pour toute variation  $\delta g_{ij}$  de la métrique, on en déduit que

$$2\kappa(R^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}R) = -T^{ij} \quad (3.73)$$

ou, dans la forme mixte :

$$2\kappa(R_j^i - \frac{1}{2}\delta_j^i R) = -T_j^i \quad (3.74)$$

Calculons la trace des deux côtés de cette dernière équation ( $R_i^i = R$ ,  $\delta_i^i = 4$ ) :

$$2\kappa(R - 2R) = -2\kappa R = -T \quad (3.75)$$

où  $T = T^i_i$  est la trace du tenseur d'énergie-impulsion. Ceci nous permet d'écrire

$$R_{ij} = -\frac{1}{2\kappa} \left( T_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}T \right) \quad (3.76)$$

Dans le vide, donc en l'absence de matière, les équations d'Einstein prennent la forme plus simple suivante :

$$R_{ik} = 0 \quad (\text{vide}) \quad (3.77)$$

Les lecteurs attentifs auront reconnu l'équation qu'Einstein écrit avec satisfaction sur la photo reproduite en couverture de ce manuel.

### 3.D.5 Limite non relativiste

Nous devons maintenant faire le lien entre les équations d'Einstein (3.85) et l'équation de Poisson  $\nabla^2\Phi = 4\pi\rho$ , ne serait-ce que pour identifier la constante multiplicative  $\kappa$ . Nous devons travailler à la fois sur les membres de gauche et de droite de ces équations.

Dans la limite non relativiste, on écrit la métrique ainsi :

$$g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij} \quad (3.78)$$

où en particulier  $h_{00} = 2\Phi$ ,  $\Phi$  étant le potentiel gravitationnel newtonien. En négligeant les termes non linéaires en  $\Phi$ , on montre, par exemple à l'aide d'un calculateur symbolique, que la composante temporelle pure du tenseur de Ricci est, dans cette approximation,

$$R_{00} = \nabla^2\Phi \quad (3.79)$$

D'une autre côté, dans la limite non relativiste, la composante  $T_{00}$  du tenseur d'énergie-impulsion est

$$T^{00} = \sum_a m_a \int d\tau_a \dot{x}_a^0 \dot{x}_a^0 \delta^4(x - x_a(\tau_a))$$

$$= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \int d\tau_{\alpha} \delta^4(x - x_{\alpha}(\tau_{\alpha})) \quad (3.80)$$

Dans cette limite, on peut négliger la vitesse des particules, de sorte qu'elles sont approximativement stationnaires, à des positions  $\mathbf{r}_{\alpha}$  indépendantes du temps alors que  $x_{\alpha}^0 = \tau_{\alpha}$ . L'intégrale sur  $\tau_{\alpha}$  se fait alors trivialement à l'aide de la partie temporelle de la fonction delta et il reste

$$T^{00} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}) = \rho(\mathbf{r}) \quad (3.81)$$

où  $\rho$  est la densité de masse. Cette composante de  $T^{ij}$  domine toutes les autres dans la limite non relativiste, de sorte que la trace  $T$  coïncide avec  $T^{00}$ . Toujours dans la même approximation,  $T_{00} = T^{00}$  et donc

$$T_{00} - \frac{1}{2} T g_{00} = \frac{1}{2} T_{00} = \frac{1}{2} \rho \quad (3.82)$$

L'équation d'Einstein devient donc, dans cette limite,

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{1}{4\kappa} \rho \quad (3.83)$$

La correspondance avec l'équation de Poisson  $\nabla^2 \Phi = 4\pi\rho$  nous permet de déterminer la constante  $\kappa$  :

$$\kappa = -\frac{1}{16\pi} \quad (3.84)$$

Les équations d'Einstein prennent donc la forme suivante :

$$\boxed{R_{ik} = 8\pi \left( T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T \right)} \quad \boxed{R_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} \left( T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T \right)} \quad \text{SI} \quad (3.85)$$

ou, de manière équivalente,

$$\boxed{R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = 8\pi T_{ij}} \quad \boxed{R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}} \quad \text{SI} \quad (3.86)$$

(voir l'annexe 8.B pour une explication du facteur  $G/c^4$  dans les unités SI). Cette dernière forme s'exprime simplement en fonction du tenseur d'Einstein :

$$G_{ij} = 8\pi T_{ij} \quad (3.87)$$

**Interprétation** Les équations d'Einstein (3.85), ainsi que l'équation des géodésiques (3.9), constituent les relations fondamentales de la relativité générale. Les premières décrivent comment la matière influence la géométrie de l'espace-temps, la deuxième comme la géométrie influence le mouvement de la matière. Ces deux équations sont déductibles du principe de la moindre action, en employant une forme simple et invariante de l'action, comme nous l'avons démontré ci-haut. Cette action de la matière sur la géométrie de l'espace-temps fait que la relativité générale est parfois appelée *géomérodynamique*, c'est-à-dire une théorie de la géométrie résultant de *sources matérielles*, comme l'électrodynamique est une théorie des champs électrique et magnétique résultant de sources de charge électrique, en particulier de sources dépendant du temps. Le terme

### Einstein et Hilbert

David Hilbert (1862/1943) est incontestablement l'un des plus grands mathématiciens du XX<sup>e</sup> siècle. Actif dans plusieurs domaines, il enseigne à Göttingen de 1895 à 1930. Hilbert invite Einstein à Göttingen à l'été 1915 et ce dernier y prononce quelques conférences sur sa théorie de la relativité générale telle qu'il la conçoit à l'époque. Une correspondance entre Einstein et Hilbert s'ensuit. Hilbert publie un article en mars 1916 dans lequel il obtient les équations de la relativité générale sous une forme covariante à l'aide du principe de la moindre action, tout en affirmant que ses équations semblent équivalentes à celles déjà publiées par Einstein. Einstein n'avait pas jusque là utilisé le principe de la moindre action et n'avait pas réussi, dans ses premières publications, à établir des équations covariantes pour le champ de gravitation. L'interaction entre les deux chercheurs entre novembre et décembre 1915 provoquera un certain ressentiment d'Einstein à l'égard de Hilbert, à qui il reprochait le désir de s'approprier la paternité de la théorie. La dispute fut apparemment résolue par la suite et Hilbert soutiendra Einstein dans sa jeune carrière à l'époque. [wikipédia](#)



Hilbert

*géomérodynamique* est plus généralement employé pour désigner un programme théorique dans lequel tout, incluant la matière, serait ramené à une description purement géométrique. La relativité générale ne serait qu'une forme effective, approximative, de cette géomérodynamique idéale, dans laquelle la matière ne représente que des singularités de la géométrie. Ce programme a été mis de l'avant par John Archibald Wheeler (1911/2008) et demeure non résolu.

## E La constante cosmologique

L'action du champ de gravitation  $S_g$  pourrait en principe contenir un autre terme, très simple, qui ne fait pas intervenir la courbure scalaire :

$$S_{\text{cosm.}} = 2\kappa\Lambda \int d\Omega \sqrt{|g|} \quad (3.88)$$

Ce terme supplémentaire à l'action de Einstein-Hilbert porte le nom de *terme cosmologique* et la constante  $\Lambda$  est appelée *constante cosmologique*. Cela vient du fait que son impact se fait sentir uniquement à l'échelle cosmologique et qu'il a été introduit par Einstein afin d'imposer un modèle d'Univers statique qui sera rapidement discrédité. Ceci dit, la constante cosmologique est redevenue d'actualité à la fin du XX<sup>e</sup> siècle et est associée au concept d'*énergie sombre*.

Le terme cosmologique dépend tout de même de la métrique via le déterminant  $\sqrt{|g|}$ . Nous avons déjà calculé la variation de ce terme à l'éq. (3.58) :

$$\delta\sqrt{|g|} = \frac{1}{2}\sqrt{|g|} g^{ij} \delta g_{ij}$$

La variation de l'action totale prend maintenant la forme suivante :

$$\delta S = \int d\Omega \sqrt{|g|} [-2\kappa(R^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}R - \Lambda g^{ij}) - T^{ij}] \delta g_{ij} = 0 \quad (3.89)$$

Les équations du champ sont donc modifiées ainsi :

$$2\kappa(R^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}R - \Lambda g^{ij}) = -T^{ij} \quad (3.90)$$

En prenant la trace de cette équation, on trouve

$$-2\kappa R - 8\kappa\Lambda = -T \quad (3.91)$$

ce qui permet de récrire les équations du champ comme

$$2\kappa R^{ij} - 2\kappa\Lambda g^{ij} = -(T^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}T) - 4\kappa\Lambda g^{ij} \quad (3.92)$$

ou encore comme

$$R^{ij} = 8\pi(T^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}T) - \Lambda g^{ij} \quad (3.93)$$

On montre facilement que la limite non relativiste des équations du champ ainsi modifiées est

$$\nabla^2\Phi = 4\pi\rho - \Lambda \quad (3.94)$$

La solution à cette équation pour une source ponctuelle située à l'origine se trouve en substituant l'expression du laplacien en coordonnées sphériques, en l'absence de dépendance angulaire :

$$\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r\Phi) = -\Lambda \quad (r > 0) \quad (3.95)$$

On constate facilement, en intégrant cette équation directement, que

$$\Phi(r) = -\frac{M}{r} - \frac{1}{6}\Lambda r^2 \quad (3.96)$$

où le facteur  $-M$  a été choisi de manière à concorder avec la solution connue quand  $\Lambda = 0$ . Le champ gravitationnel correspondant est

$$\mathbf{g}(r) = -\frac{M}{r^2}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{3}\Lambda\mathbf{r} \quad (3.97)$$

Le terme cosmologique produit donc une force répulsive dont l'amplitude croît avec la distance. Cette force est indépendante de la source, et aura un impact certain à l'échelle de l'Univers dans son ensemble, même si la constante  $\Lambda$  est extrêmement petite. La constante cosmologique a les unités d'une surface inverse (comme la courbure). Sa valeur estimée en 2015 est

$$\Lambda = 1,11 \times 10^{-52} \text{ m}^{-2} \quad (3.98)$$

## F Problèmes

### Problème 3.1 coordonnées de Kottler-Møller

L'espace-temps de Minkowski peut être décrit par un système de coordonnées curvilignes  $(t', x')$  relié comme suit aux coordonnées cartésiennes habituelles  $(t, x)$  :

$$t = (x' + 1/\alpha) \sinh \alpha t' \quad x = (x' + 1/\alpha) \cosh \alpha t' - 1/\alpha \quad (3.99)$$

(les coordonnées  $y = y'$  et  $z = z'$  ne sont pas affectées par cette transformation).

- A** Calculez le tenseur métrique  $g'_{ij}$  dans ce nouveau système, en utilisant les lois de transformation des tenseurs.
- B** Montrez qu'un observateur à  $x'$  fixe est accéléré uniformément dans son propre référentiel. Quelle est alors son accélération propre? Indice : Calculez sa 4-accélération  $a^i$  dans le référentiel inertiel et transformez-la vers le référentiel accéléré. Il est plus simple d'exprimer la différentielle  $d\tau$  en fonction de  $dt'$ , et de transformer les composantes covariantes  $a_i$  d'un référentiel à l'autre avant de retourner aux composantes contravariantes.
- C** Calculez la connexion affine dans ce nouveau système. Vérifiez aussi que le tenseur de Riemann s'annule. Aidez-vous des outils symboliques habituels pour ce faire.
- D** Considérons un objet rigide de longueur  $L$  qui est stationnaire dans le système  $(t', x')$ . Cela signifie que les coordonnées des extrémités de l'objet sont  $x'_A$  et  $x'_B$ , telles que  $x'_B - x'_A = L$ . Existe-t-il, selon-vous, des tensions à l'intérieur de cet objet? Justifiez.
- E** Que se passe-t-il quand  $x' = -1/\alpha$ ?

### Problème 3.2 décalage en fréquence d'un satellite

**A** Un satellite est en orbite circulaire de rayon  $r$  autour de la Terre (dont le rayon est  $R$  et la masse  $M$ ). Une horloge C sur le satellite est comparée à une horloge identique  $C_0$  restée sur Terre. Montrez que le rapport des périodes des deux horloges est

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{M}{R} - \frac{3M}{2r} \quad (3.100)$$

Note : supposez que l'horloge terrestre est située au pôle.

**Problème 3.3 référentiel tournant**

**A** Utilisons les coordonnées polaires planes  $(r, \varphi)$  pour décrire le plan dans un référentiel inertiel, et définissons un référentiel tournant par les coordonnées suivantes :

$$t' = t \quad r' = r \quad \varphi' = \varphi - \omega t \quad z' = z \quad (3.101)$$

Écrivez le tenseur métrique dans ce référentiel tournant.

**B** Un observateur dans ce référentiel tournant désire définir la circonférence d'un cercle de rayon  $r$  comme la longueur d'une courbe à  $r$  et à  $t$  constant. Qu'obtient-il comme circonférence ?

**C** Un deuxième observateur s'oppose au premier en prétendant que leur vitesse par rapport au référentiel inertiel à un rayon  $r$  est  $\omega r$  et donc que le mètre standard du référentiel inertiel devrait être contracté d'un facteur  $\sqrt{1 - \omega^2 r^2}$  par rapport au référentiel tournant, et donc que la circonférence devrait être  $2\pi r / \sqrt{1 - \omega^2 r^2}$ . Lequel des deux a raison et pourquoi ?

**Problème 3.4 variation de la connexion affine**

Montrez que, lors d'une variation  $\delta g_{ij}$  de la métrique, la variation correspondante de la connexion affine est

$$\delta \Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{im} (\nabla_j \delta g_{km} + \nabla_k \delta g_{jm} - \nabla_m \delta g_{jk}) \quad (3.102)$$

**Problème 3.5 tenseur d'énergie-impulsion du champ électromagnétique**

**A** En relativité restreinte, l'action du champ électromagnétique est donnée par l'expression suivante :

$$S_{\text{em}} = -\frac{1}{4} \int d\Omega F^{ij} F_{ij} \quad F_{ij} := \partial_i A_j - \partial_j A_i \quad (3.103)$$

Généralisez ces expressions à un système de coordonnées général.

**B** À partir de la définition générale (3.51) du tenseur d'énergie-impulsion, obtenez la forme de ce tenseur pour le champ électromagnétique. Montrez que

$$T_{\text{em}}^{ij} = -F^i_k F^{jk} + \frac{1}{4} g^{ij} F^{kl} F_{kl} \quad (3.104)$$

Indice : vous pouvez supposer que la variation de la connexion affine induite par une variation  $\delta g_{ij}$  de la métrique est telle que  $\delta \Gamma_{ij}^k = \delta \Gamma_{ji}^k$ .

**C** Exprimez la composante  $T_{\text{em}}^{00}$  en fonction des champs électrique et magnétique dans l'espace-temps de Minkowski. Quel est le sens physique de cette composante ?

**Problème 3.6 Conservation de l'énergie-impulsion**

Montrez que les équations d'Einstein entraînent la conservation de l'énergie-impulsion, c'est-à-dire la relation  $\nabla_i T^{ij} = 0$ . Indice : Utilisez l'identité de Bianchi sur le membre de gauche des équations d'Einstein.



## CHAPITRE 4

# GÉOMÉTRIE DE SCHWARZSCHILD

### A Solution de Schwarzschild

Dans cette section nous allons résoudre les équations d'Einstein dans une situation statique et isotrope, dans laquelle une masse  $M$  située à l'origine des coordonnées est la source du champ. Cette solution fut trouvée en 1915, quelques semaines seulement après la publication des travaux d'Einstein, par l'astronome allemand Karl Schwarzschild.

Il faut d'abord souligner le fait capital qu'une géométrie donnée respectant les équations d'Einstein peut être décrite par une infinité de systèmes de coordonnées différents. Une part importante de la tâche consiste à imposer des contraintes au système de coordonnées de manière à simplifier la résolution des équations d'Einstein. Dans le cas qui nous occupe, ce sont les équations dans l'espace vide qui nous intéressent :  $R_{ik} = 0$ . Ces équations sont valables partout sauf à l'origine, où on suppose que la masse est située.

#### 4.A.1 Métrique isotrope générale

Commençons par trouver la forme la plus générale possible de la métrique dans une géométrie isotrope, c'est-à-dire indépendante de la direction. Le sens de cette dernière condition est le suivant : on introduit trois coordonnées spatiales,  $x^{1,2,3}$ , qui n'ont pas encore de signification sur le plan des distances, mais qui ont un sens du point de vue de la symétrie de rotation. Autrement dit, ces trois coordonnées se comportent comme les coordonnées cartésiennes habituelles au sens des rotations, mais la métrique ne doit dépendre que de combinaisons de ces coordonnées qui sont invariantes par rotation. Si nous formons le 3-vecteur  $\mathbf{r} = (x^1, x^2, x^3)$ , alors la métrique ne peut faire intervenir que les expressions suivantes :

$$\mathbf{r}^2, \quad \mathbf{dr} \cdot \mathbf{dr}, \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{dr} \quad (4.1)$$

La forme la plus générale d'une métrique isotrope est alors la suivante :

$$ds^2 = A(r, t) dt^2 - B(r, t) dt(\mathbf{r} \cdot \mathbf{dr}) - C(r, t)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{dr})^2 - D(r, t) \mathbf{dr}^2 \quad (4.2)$$

Il est pratique d'utiliser les coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  définies de la manière habituelle :

$$x^1 = r \sin \theta \cos \varphi \quad x^2 = r \sin \theta \sin \varphi \quad x^3 = r \cos \theta \quad (4.3)$$

En fonction de ces coordonnées,

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2 \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{dr} = r \, dr \quad \mathbf{dr} \cdot \mathbf{dr} = dr^2 + r^2 \sin^2 \theta \, d\varphi^2 + r^2 \, d\theta^2 \quad (4.4)$$

de sorte que la métrique isotrope la plus générale prend la forme suivante :

$$ds^2 = A(r, t) dt^2 - B(r, t) r dt dr - C(r, t) r^2 dr^2 - D(r, t) (dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + r^2 d\theta^2) \quad (4.5)$$

On peut également redéfinir les fonctions  $B$ ,  $C$  et  $D$  de manière à absorber et regrouper les facteurs de  $r$  :

$$ds^2 = A(r, t) dt^2 - B(r, t) dt dr - C(r, t) dr^2 - D(r, t) (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2) \quad (4.6)$$

On peut maintenant user de notre liberté de changer les coordonnées afin de définir une nouvelle coordonnée radiale  $\bar{r} = \sqrt{D(r, t)}$  de manière à ce que la métrique prenne maintenant la forme suivante :

$$ds^2 = A(\bar{r}, t) dt^2 - B(\bar{r}, t) dt d\bar{r} - C(\bar{r}, t) d\bar{r}^2 - \bar{r}^2 (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2) \quad (4.7)$$

où encore une fois les fonctions  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ont été redéfinies afin de dépendre de  $\bar{r}$ . Nous allons enfin redéfinir  $\bar{r} \rightarrow r$  afin d'alléger la notation :

$$ds^2 = A(r, t) dt^2 - B(r, t) dt dr - C(r, t) dr^2 - r^2 (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2) \quad (4.8)$$

Nous allons ensuite nous débarrasser du terme croisé  $dr dt$ , en introduisant une nouvelle coordonnée de genre temps  $\bar{t}$ , définie par la relation différentielle suivante :

$$d\bar{t} = \Phi(t, r) \left[ A(r, t) dt - \frac{1}{2} B(r, t) dr \right] \quad (4.9)$$

où la fonction  $\Phi$  est définie de manière à ce que le membre de droite soit une différentielle exacte. En clair, ceci signifie que  $\Phi$  est choisi de manière à ce que

$$\frac{\partial \bar{t}}{\partial t} = \Phi A \quad \frac{\partial \bar{t}}{\partial r} = -\frac{1}{2} \Phi B \quad (4.10)$$

et donc, en vertu de l'égalité des dérivées croisées,

$$\frac{\partial}{\partial r} (\Phi A) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\Phi B) \quad (4.11)$$

Cette équation peut être intégrée sur  $t$  en partant de conditions initiales à  $t = 0$  pour générer la fonction  $\Phi$  nécessaire. Bref, il est possible en principe de trouver la nouvelle coordonnée  $\bar{t}$ . En mettant la différentielle au carré, on trouve

$$d\bar{t}^2 = \Phi^2 A^2 dt^2 + \frac{1}{4} \Phi^2 B^2 dr^2 - \Phi^2 AB dt dr \quad (4.12)$$

d'où on tire

$$A dt^2 - B dt dr = \frac{1}{\Phi^2 A} d\bar{t}^2 - \frac{B^2}{4A} dr^2 \quad (4.13)$$

On peut donc finalement supposer que la métrique est diagonale :

$$ds^2 = A(r, t) dt^2 - B(r, t) dr^2 - r^2 (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2) \quad (4.14)$$

où nous avons encore redéfini les fonctions  $A$  et  $B$  et nous sommes retournés à la notation  $\bar{t} \rightarrow t$ . Ainsi, la géométrie isotrope la plus générale est déterminée par deux fonctions  $A(r, t)$  et  $B(r, t)$ .

D'après la métrique ci-dessus, la circonférence d'un cercle dont le rayon est décrit par la coordonnée  $r$  est effectivement  $2\pi r$ . Par contre, cette valeur de  $r$  n'est pas la distance entre le cercle et l'origine, c'est-à-dire n'est pas le rayon du cercle. Le rayon du cercle serait plutôt, à un moment donné  $t$ ,

$$R = \int_0^r \sqrt{B(r, t)} dr \quad (4.15)$$

#### 4.A.2 Résolution des équations du champ

Si on suppose que la métrique est isotrope et stationnaire, c'est-à-dire indépendante du temps, alors elle prend la forme générale suivante :

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2) \quad (4.16)$$

où les fonctions  $A(r)$  et  $B(r)$  sont à déterminer en utilisant les équations du champ  $R_{ik} = 0$ . On peut calculer les composantes de la connexion affine et du tenseur de Ricci à l'aide d'outils de calcul symbolique. Les composantes non nulles de la connexion sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \Gamma_{10}^0 &= \Gamma_{01}^0 = \frac{A'}{2A} & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{A'}{2B} & \Gamma_{33}^2 &= -\frac{1}{2} \sin 2\theta \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{B'}{2B} & \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{r}{B} & \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \cot \theta \\ \Gamma_{33}^1 &= -\frac{r \sin^2 \theta}{B} \end{aligned} \quad (4.17)$$

De même, les composantes non nulles du tenseur de Ricci sont les suivantes :

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{A''}{2B} - \frac{A'}{4B} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{A'}{rB} \\ R_{11} &= -\frac{A''}{2A} + \frac{A'}{4A} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{B'}{rB} \\ R_{22} &= 1 - \frac{1}{B} - \frac{r}{2B} \left( \frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) \\ R_{33} &= R_{22} \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (4.18)$$

Toutes ces expressions doivent s'annuler. Bien sûr, la dernière est redondante. On constate premièrement que la combinaison  $R_{00} + (A/B)R_{11} = 0$  donne, à un facteur  $rB^2$  près,

$$BA' + B'A = (AB)' = 0 \quad (4.19)$$

ce qui entraîne que le produit  $AB$  est une constante, que nous noterons  $\alpha$ . En substituant  $B = \alpha/A$  dans  $R_{22} = 0$ , on trouve

$$A + rA' = \alpha \quad \text{ou encore} \quad (rA)' = \alpha \quad (4.20)$$

dont la solution est  $rA = \alpha(r + k)$  où  $k$  est une autre constante à déterminer. Au total, on peut donc écrire

$$A(r) = \alpha \left( 1 + \frac{k}{r} \right) \quad B(r) = \left( 1 + \frac{k}{r} \right)^{-1} \quad (4.21)$$

On peut vérifier que cette forme satisfait à toutes les équations  $R_{ii} = 0$ , même si nous ne les avons pas toutes utilisées pour y arriver.

### Karl Schwarzschild

Karl Schwarzschild (1873/1916) était un astronome allemand. Alors qu'il était engagé sur le front russe en tant qu'artilleur, il eut connaissance de l'article d'Einstein paru le 25 novembre 1915 dans les comptes-rendus de l'Académie royale de Prusse. Quelques jours plus tard, il avait réussi à résoudre les équations du champ pour un objet à symétrie sphérique sans mouvement de rotation. Il écrivit à Einstein pour lui expliquer sa solution et ce dernier la présenta à l'Académie des sciences de Prusse le 13 janvier 1916. Le 19 juin 1916, Einstein annonça à l'Académie le décès de Schwarzschild, suite à une maladie auto-immune (le Pemphigus) qui affecte particulièrement les populations juives ashkénazes.

[wikipédia](#)



Afin de déterminer les constantes  $\alpha$  et  $k$ , on doit prendre la limite non relativiste et comparer avec la solution connue à l'équation de Poisson pour une masse  $M$  située à l'origine :

$$\Phi(r) = -\frac{M}{r} \quad (4.22)$$

En raison de la correspondance  $g_{00} \approx 1 + 2\Phi$ , on conclut que  $\alpha = 1$  et que  $k = -2M$ . On peut donc enfin écrire la *solution de Schwarzschild* :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (4.23)$$

où on a défini le *rayon de Schwarzschild*  $r_s$  (ou *rayon gravitationnel*) comme

$$r_s = 2M \quad \left[ r_s = \frac{2GM}{c^2} \right] \text{ SI} \quad (4.24)$$

La solution de Schwarzschild n'est valable qu'à l'extérieur de l'objet placé à l'origine, car elle repose sur les équations d'Einstein dans le vide ( $R_{ik} = 0$ ). Généralement, le rayon  $r_s$  est plus petit que le rayon matériel de la source et donc l'apparente singularité de la solution à  $r = r_s$  ne se produit pas. Le rayon de Schwarzschild du soleil est de 3 km; celui de la Terre est de 9 mm.

## B Géodésiques de Schwarzschild

### 4.B.1 Équations générales des géodésiques dans la solution de Schwarzschild

La connexion affine (4.18) devient, en y substituant l'expression des fonctions  $A$  et  $B$ ,

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{10}^0 &= \Gamma_{01}^0 = \frac{r_s}{2r^2(1-r_s/r)} & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} \\
 \Gamma_{00}^1 &= \frac{r_s(1-r_s/r)}{2r^2} & \Gamma_{33}^2 &= -\frac{1}{2}\sin 2\theta \\
 \Gamma_{11}^1 &= -\frac{r_s}{2r^2(1-r_s/r)} & \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r} \\
 \Gamma_{22}^1 &= r_s - r & \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \cot \theta \\
 \Gamma_{33}^1 &= (r_s - r)\sin^2 \theta & &
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

On pourrait substituer ces valeurs dans l'équation générale des géodésiques.

Cependant la forme (2.79) de l'équation des géodésiques est plus commode et permet d'identifier des quantités conservées. Ainsi, comme la métrique ne dépend que de  $r$  et de  $\theta$ , les quantités suivantes sont constantes :

$$u_0 = g_{00}\dot{t} = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\dot{t} = k \tag{4.26}$$

$$u_\varphi = g_{33}\dot{\varphi} = -r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} = -h \tag{4.27}$$

Nous pouvons faire référence au lagrangien nouveau style (3.28). Les moments conjugués aux coordonnées cycliques sont :

$$p_t = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^0} = m g_{0i} \dot{x}^i = m u_0 = m k \tag{4.28}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^3} = m g_{3i} \dot{x}^i = m u_\varphi = -m h \tag{4.29}$$

Naturellement, le moment conjugué à  $t$  est l'énergie de la particule (qu'on note ici  $mk$ ) et le moment conjugué à  $\varphi$  est la composante verticale du moment cinétique, qu'on note ici  $mh$ . En somme,  $k$  est l'énergie par unité de masse et  $h$  le moment cinétique par unité de masse.

En raison de la symétrie par rotation, on peut toujours supposer que la trajectoire est confinée à un plan, par exemple le plan équatorial  $\theta = \pi/2$ . En mécanique newtonienne, cela vient de la conservation des trois composantes du moment cinétique, qui impose à la vitesse d'être dans le plan perpendiculaire au vecteur moment cinétique  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$ . Nous allons donc supposer  $\theta = \pi/2$  dans ce qui suit. Les lois de conservation de l'énergie et du moment cinétique prennent alors la forme

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\dot{t} = k \quad r^2 \dot{\varphi} = h \tag{4.30}$$

Une autre façon de démontrer la possibilité d'une orbite purement équatoriale est de considérer les autres composantes de l'équation des géodésiques :

$$\dot{p}_r = \frac{1}{2}\partial_r g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = \frac{1}{2}\partial_r g_{00}\dot{t}^2 + \frac{1}{2}\partial_r g_{11}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\partial_r g_{22}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\partial_r g_{33}\dot{\varphi}^2$$

$$\dot{p}_\theta = \frac{1}{2} \partial_\theta g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = \frac{1}{2} \partial_\theta g_{33} \dot{\varphi}^2 \quad (4.31)$$

Notons que

$$p_r = g_{rr} \dot{r} = -\frac{\dot{r}}{1-r_s/r} \implies \dot{p}_r = -\frac{\ddot{r}}{1-r_s/r} + \frac{\dot{r}}{(1-r_s/r)^2} \frac{r_s}{r^2} \quad (4.32)$$

$$p_\theta = g_{\theta\theta} \dot{\theta} = -r^2 \dot{\theta} \implies \dot{p}_\theta = -2r \dot{r} \dot{\theta} - r^2 \ddot{\theta} \quad (4.33)$$

On en déduit donc les équations explicites suivantes :

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \ddot{r} + \frac{r_s}{2r^2} \dot{r}^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-2} \frac{r_s}{2r^2} \dot{r}^2 - r(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) = 0 \quad (4.34)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 = 0 \quad (4.35)$$

De la dernière des équations ci-dessus, on voit qu'une solution à  $\theta$  constant est possible, pourvu que  $\cos \theta \sin \theta = 0$ , ce qui entraîne  $\theta = \pi/2$  (équateur) où  $\theta = 0$  (pôle); mais dans ce dernier cas, on doit imposer  $h = 0$  (mouvement purement radial). Sur ce plan, les équations sont maintenant

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{r} = k \quad (4.36a)$$

$$r^2 \dot{\varphi} = h \quad (4.36b)$$

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \ddot{r} + \frac{r_s}{2r^2} \dot{r}^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-2} \frac{r_s}{2r^2} \dot{r}^2 - r \dot{\varphi}^2 = 0 \quad (4.36c)$$

## 4.B.2 Trajectoires des particules massives

Considérons maintenant une particule de masse  $m > 0$ . On peut alors utiliser le temps propre  $\tau$  (la longueur propre de la géodésique) comme paramètre de la géodésique. Dans ces circonstances, la norme de la 4-vitesse est 1. Pour une trajectoire équatoriale, cela se traduit par

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{r}^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2 = 1 \quad (4.37)$$

Éliminons  $\dot{r}$  et  $\dot{\varphi}$  en utilisant les équations (4.30) et substituons dans l'équation ci-dessus. On trouve

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} k^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{h^2}{r^2} = 1 \quad (4.38)$$

ou encore

$$\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) - \frac{r_s}{r} = (k^2 - 1) \quad (4.39)$$

Cette équation nous permet de déterminer comment la coordonnée radiale varie en fonction du temps, comme ce qui est fait en mécanique newtonienne lorsqu'on étudie le potentiel radial effectif.

**limite non relativiste** Afin de souligner la différence entre ce résultat et son analogue non relativiste, nous allons restaurer les unités SI dans cette relation. Il faut pour cela procéder aux remplacements suivants :

$$\dot{r} \rightarrow \frac{1}{c} \dot{r} \quad r_s \rightarrow \frac{2GM}{c^2} \quad h \rightarrow \frac{h}{c} \quad (4.40)$$

En effet, en SI,  $\dot{r}$  a les unités de la vitesse, donc le premier changement est nécessaire afin que l'expression associée soit encore sans unités. De même, en SI,  $h$  a les unités  $L^2/T$  (moment cinétique par unité de masse), alors qu'il a les unités  $L$  en unités géométriques; on doit donc diviser par  $c$  pour conserver ces dernières dimensions. On trouve donc

$$\frac{1}{c^2} \dot{r}^2 + \frac{h^2}{c^2 r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) - \frac{2GM}{r c^2} = (k^2 - 1) \quad (\text{SI}) \quad (4.41)$$

Rappelons que  $k = E/m$ , ce qui devient  $E/(mc^2)$  dans ce système d'unités. Si on note  $\tilde{E}$  l'énergie totale moins l'énergie de masse  $mc^2$  (c'est-à-dire l'énergie mécanique), alors le membre de droite de l'équation ci-dessus devient

$$k^2 - 1 = (k+1)(k-1) = \frac{\tilde{E}}{mc^2} \left(2 + \frac{\tilde{E}}{mc^2}\right) \quad (4.42)$$

L'équation (4.41) devient alors

$$\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) - \frac{2GM}{r} = \frac{\tilde{E}}{m} \left(2 + \frac{\tilde{E}}{mc^2}\right) \quad (\text{SI}) \quad (4.43)$$

Il est clair que, dans la limite non relativiste  $c \rightarrow \infty$ , on a  $\tau \rightarrow t$  et on retrouve

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{h^2}{r^2} - \frac{2GM}{r} = 2\tilde{E}m \quad (\text{SI}) \quad (4.44)$$

La correspondance avec l'équation radiale en mécanique newtonienne est alors parfaite.

**équation de la trajectoire** Afin de déterminer la trajectoire de la particule, on peut troquer la dépendance en  $\tau$  en une dépendance en  $\varphi$ , en utilisant la relation

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{h}{r^2} \quad (4.45)$$

On trouve alors l'équation de la trajectoire :

$$\left(\frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{h^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) - \frac{r_s}{2r} = (k^2 - 1) \quad (4.46)$$

Afin de simplifier la solution de cette équation, on l'exprime en fonction d'une variable sans unités  $u = r_s/r$  et on trouve

$$(u')^2 - \frac{u}{\bar{h}^2} + u^2 - u^3 = \frac{k^2 - 1}{\bar{h}^2} \quad (4.47)$$

où on a introduit le paramètre adimensionné  $\bar{h} = h/r_s$  et où  $u' = du/d\varphi$ . En dérivant cette équation par rapport à  $\varphi$  et en divisant par  $2u'$ , on trouve

$$u'' + u = \frac{1}{2\bar{h}^2} + \frac{3}{2}u^2 \quad (4.48)$$

Dans certains cas, cette équation, sans être soluble explicitement, peut être utile.

**limite non relativiste :** Nous pouvons encore une fois prendre la limite non relativiste, cette fois sans changer de système d'unités, mais en posant que le rayon  $r$  est grand par rapport à  $r_s$ , donc que  $u \ll 1$ . On négligera donc  $u^3$  par rapport à  $u^2$  et  $u^2$  par rapport à  $u$ . En particulier, dans cette approximation, la dernière équation devient linéaire et soluble :

$$u'' + u = \frac{1}{2\bar{h}^2} \quad (4.49)$$

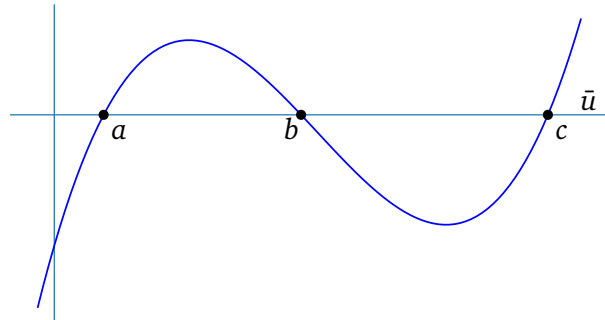
La solution à cette équation linéaire inhomogène est la somme d'une solution particulière à l'équation inhomogène, qu'on peut choisir comme  $u = 1/(2\bar{h}^2)$ , et de la solution générale à l'équation homogène, soit  $u = A \cos(\varphi + \alpha)$ . En choisissant l'origine de  $\varphi$  afin que  $\alpha = 0$ , on trouve donc

$$u(\varphi) = \frac{1}{2\bar{h}^2} (e \cos \varphi + 1) \quad (4.50)$$

où la constante  $e$  est déterminée par les conditions initiales. La coordonnée radiale est donc

$$r(\varphi) = \frac{r_s}{u} = \frac{r_0}{1 + e \cos \varphi} \quad r_0 = 2\bar{h}^2 r_s = \frac{h^2}{M} \quad (4.51)$$

où  $r_0$  est une constante. Il s'agit de l'équation bien connue d'une conique en coordonnées polaires, où  $e$  est l'excentricité. La courbe est un cercle si  $e = 0$ , une ellipse d'excentricité  $e$  si  $0 < e < 1$ , une parabole si  $e = 1$  et une hyperbole si  $e > 1$ .



**FIGURE 4.1**  
polynôme cubique intervenant dans l'éq. (4.52).

**points de rebroussement** Revenons à l'équation (4.47) et isolons la différentielle  $d\varphi$ . On obtient nécessairement une expression de la forme suivante :

$$d\varphi = \frac{du}{\sqrt{(u-a)(u-b)(u-c)}} \quad (4.52)$$

car un polynôme cubique en  $u$  apparaît quand on isole  $(u')^2$  et le coefficient de  $u^3$  dans ce polynôme est l'unité. En intégrant des deux côtés, on trouve en principe une relation entre  $\varphi$  et  $u$ . Si l'énergie mécanique est négative, la particule ne peut s'échapper à l'infini et cette relation  $\varphi(u)$  comporte des points de rebroussement, c'est-à-dire des valeurs minimale et maximale de  $u$  auxquelles  $u' = 0$ . Ces points de rebroussement correspondent donc à deux des racines du polynôme cubique, disons  $a$  et  $b$ , tels que  $a < b$ . Ces valeurs sont nécessairement positives. Le polynôme aussi doit être positif entre ces deux valeurs afin que la racine carrée soit réelle. Cela entraîne que  $c > b$ . Cela entraîne



aussi que le polynôme doit être négatif à  $u = 0$ , ce qui est le cas, car le terme constant du polynôme est  $(k^2 - 1)/\bar{h}^2$  et  $k < 1$  si l'énergie mécanique est négative (voir fig. 4.1). Le cas d'une orbite circulaire correspond à  $a = b$ .

### 4.B.3 Mouvement radial

Considérons le cas d'un mouvement purement radial, c'est-à-dire à  $\varphi$  constant, donc à  $h = 0$ . L'équation (4.39) devient alors

$$\dot{r}^2 - \frac{r_s}{r} = (k^2 - 1) \quad (4.53)$$

Cette équation est une conséquence de la conservation de l'énergie. En effet, on pourrait l'écrire sous une forme plus familière :

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{Mm}{r} = \frac{1}{2} m (k^2 - 1) \quad (4.54)$$

On reconnaît ici, dans la limite non relativiste, la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, égale à une constante.

**chute d'un corps** Il est intéressant ici de se poser la question suivante : si une particule est située à  $r = r_0$  au temps  $t = 0$ , quelle sera son mouvement ultérieur? Plus précisément, quel temps sera nécessaire pour que cette particule tombe jusqu'à la coordonnée  $r < r_0$  et quelle est la distance de chute correspondante, ainsi que le temps propre écoulé? Afin de simplifier les calculs, nous allons supposer que l'énergie mécanique  $\tilde{E}$  de cette particule est nulle, comme si elle était relâchée du repos à l'infini. Cela correspond à  $k = 1$ . On a donc

$$\frac{dr}{d\tau} = -\sqrt{\frac{r_s}{r}} \quad (4.55)$$

(nous avons retenu la racine négative, puisque c'est la chute qui nous intéresse). Par contre, dans la même situation ( $k = 1$ ),

$$\dot{t} = \frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \quad (4.56)$$

et donc

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = -\sqrt{\frac{r_s}{r}} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \quad (4.57)$$

qui peut être intégré :

$$t = \int_r^{r_0} \frac{dr'}{\sqrt{r_s/r'(1-r_s/r')}} = \left[ \frac{2}{3} \sqrt{\frac{r}{r_s}} (3r_s + r) - 2r_s \operatorname{arctanh} \frac{r}{r_s} \right]_{r_0}^r \quad (4.58)$$

Ce qui nous intéresse est de remarquer que le temps nécessaire pour atteindre  $r = r_s$  est infini, ce qu'on peut constater sans même faire l'intégrale exactement. En effet, la divergence de l'intégrand quand  $r' \rightarrow r_s$  n'est pas intégrable, au même titre que dans l'intégrale  $\int_0^a dx/x$ . *Le temps de coordonnées pour atteindre le rayon  $r_s$  est donc infini.*

Par contre, le temps propre pour atteindre  $r = 0$  est fini! On le constate aisément à partir de l'éq. (4.55) : le temps propre qui s'écoule entre la coordonnée  $r_0$  et l'origine est

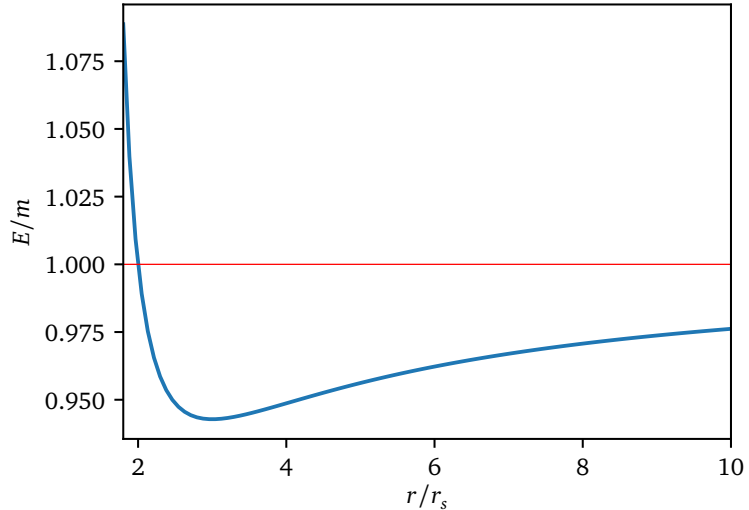
$$\tau = \int_0^{r_0} dr \sqrt{\frac{r}{r_s}} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{r_0^3}{r_s}} \quad (4.59)$$

Un observateur qui «tombe» sur le centre le fait donc en un temps fini de son point de vue. Cependant, il prend un temps infini à atteindre  $r_s$  du point de vue d'un observateur éloigné, pour lequel le temps de coordonnées  $t$  correspond bien au temps physique «newtonien».

Comment peut-on formuler des relations temporelles qui soient exemptes des ambiguïtés liées au choix du système de coordonnées? En utilisant toujours le temps propre de l'observateur et celui de l'objet observé comme références, à partir de signaux lumineux émis de l'objet vers l'observateur. Spécifiquement, on peut faire émettre par l'objet deux signaux lumineux en deux événements différents à la position de l'objet et séparés par un temps propre à l'objet  $\tau_E$  ( $E$  pour émetteur). Ces signaux sont ensuite détectés par l'observateur en deux événements situés au même endroit dans le référentiel de l'observateur et séparés par un temps propre à l'observateur  $\tau_R$  ( $R$  pour récepteur). Ces temps propres sont définis d'une manière indépendante du système de coordonnées choisi. Dans le cas qui nous occupe, l'observateur est situé loin du centre, et donc son temps propre coïncide avec le temps du système de coordonnées de Schwarzschild. Mais en général, il faut bien s'assurer que les coordonnées utilisées ont ce sens.

**FIGURE 4.2**

Énergie d'une orbite circulaire en unités de l'énergie de masse  $m$ , en fonction du rayon  $r$  de l'orbite.



#### 4.B.4 Mouvement circulaire

Étudions maintenant le mouvement circulaire d'un objet autour du centre d'attraction. On pose  $r = \text{cte}$ . L'éq. (4.48), en posant  $u = 1/r = \text{cte}$ , nous fournit une relation entre le rayon et le moment cinétique  $h$  :

$$\frac{1}{r} = \frac{r_s}{2h^2} + \frac{3}{2} \frac{r_s}{r^2} \quad (4.60)$$

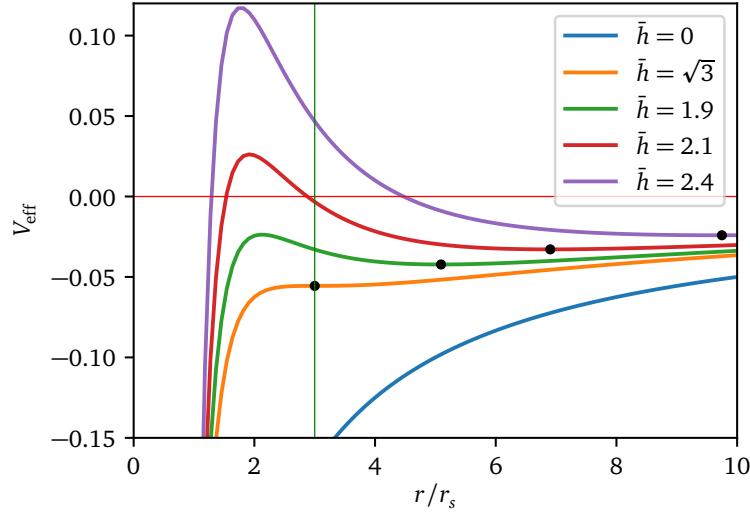
alors que la relation (4.39) nous donne en plus la relation avec l'énergie totale :

$$\frac{h^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) - \frac{r_s}{r} = (k^2 - 1) \quad (4.61)$$

En éliminant  $h$  entre ces deux équations, on trouve une relation entre l'énergie totale et le rayon de l'orbite :

$$k = \frac{1 - \frac{r_s}{r}}{\sqrt{1 - \frac{3r_s}{2r}}} \quad (4.62)$$

Voir le profil d'énergie illustré à la figure 4.2.



**FIGURE 4.3**

Potentiel effectif  $V_{\text{eff}}$  pour différentes valeurs du moment cinétique  $h = \bar{h} r_s$ . L'orbite circulaire est instable en deçà de  $\bar{h} = \sqrt{3}$ , ou encore  $r = 3r_s$ .

Pour déterminer la stabilité d'une orbite circulaire, nous devons considérer le potentiel effectif radial, qui s'obtient de l'éq. (4.39), qu'on peut exprimer ainsi :

$$\frac{1}{2} \dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = \tilde{E} \quad (4.63)$$

où

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{h^2}{2r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) - \frac{r_s}{2r} = \frac{\bar{h}^2 r_s^2}{2r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) - \frac{r_s}{2r} \quad (4.64)$$

L'orbite circulaire correspond au point de dérivée nulle du potentiel effectif, et sera stable s'il s'agit effectivement d'un minimum. La position du minimum se calcule aisément en solutionnant  $V'_{\text{eff}}(r_0) = 0$ . On trouve

$$r_0 = r_s \bar{h} \left( \bar{h} + \sqrt{\bar{h}^2 - 3} \right) \quad (4.65)$$

ce qui montre qu'il n'existe pas d'orbite circulaire stable pour  $\bar{h} < \sqrt{3}$ , correspondant à  $r = 3r_s$ . Si  $\bar{h} < \sqrt{3}$ , les orbites circulaires correspondent à des maximums du potentiel effectif et sont instables, en plus d'être absolument instables si  $r < 2$ , comme démontré plus haut. Voir à cet effet la figure 4.3.

**disques d'accrétion autour d'un trou noir** Ce résultat a d'importantes conséquences en astrophysique. La masse gazeuse qui s'accumule autour d'un objet massif s'organise naturellement en orbites circulaires. Cependant, l'interaction des particules du gaz et le rayonnement lui font progressivement perdre du moment cinétique. Quand le moment cinétique des particules devient inférieur à la limite ci-dessus, la particule tombe littéralement vers le centre et est capturée par le trou noir. Comment une masse de gaz peut-elle perdre du moment cinétique? Il s'agit en fait d'un transfert de moment cinétique vers des rayons plus grands. Imaginons une suite d'anneaux concentriques faits de gaz en orbites circulaires. Ces anneaux ont des vitesses angulaires différentes, car  $\dot{p}$  diminue quand  $r$  augmente. La viscosité du gaz, résultant des interactions entre molécules, aura tendance à accélérer les anneaux extérieurs aux dépens des anneaux intérieurs, car elle tend à uniformiser la vitesse angulaire. Il y aura donc transfert de moment cinétique des anneaux inférieurs vers les anneaux supérieurs. Le gaz des anneaux inférieurs chutera dans le trou noir si son moment cinétique par unité de masse tombe en deçà de  $h = \sqrt{3}r_s$ .

#### 4.B.5 Précession des orbites elliptiques

Considérons maintenant un mouvement général, mais dans l'approximation non relativiste. Nous allons déterminer comment une correction relativiste faible entraîne une précession des orbites elliptiques obtenues dans cette limite. Dans la limite non relativiste, la trajectoire est donnée par l'éq. (4.50). Concentrons-nous sur le cas elliptique ( $e < 1$ ). La courbe est effectivement fermée, puisqu'elle est périodique en fonction de  $\varphi$ . Le demi-grand axe de l'ellipse se calcule facilement :

$$a = \frac{r(0) + r(\pi)}{2} = \frac{h^2}{M} \left( \frac{1}{1+e} + \frac{1}{1-e} \right) = \frac{h^2}{M(1-e^2)} \quad (4.66)$$

Revenons maintenant à l'éq. (4.47), sans négliger complètement le dernier terme, mais en supposant qu'il est petit :

$$u'' + u = \frac{1}{2\bar{h}^2} + \frac{3}{2}u^2$$

Le dernier terme, considéré comme une perturbation, causera une légère déviation à la solution ci-dessus, qu'on peut noter  $\Delta u$  :

$$u(\varphi) = \frac{1}{2\bar{h}^2}(1 + e \cos \varphi) + \Delta u \quad (4.67)$$

En insérant cette forme dans l'éq. (4.48) et en négligeant  $\Delta u$  devant  $u$  lorsque les deux sont présents, on trouve

$$\Delta u'' + \Delta u = \frac{3}{2}u^2 = \frac{3}{8\bar{h}^4}(1 + e \cos \varphi)^2 \quad (4.68)$$

Encore une fois, on doit trouver une solution particulière à l'équation inhomogène pour  $\Delta u$ , qu'on ajoute à la solution générale de l'équation homogène, qui est la même que pour  $u$ . on peut vérifier par substitution qu'une solution à l'équation inhomogène est la suivante :

$$\Delta u = \frac{3}{8\bar{h}^4} \left[ 1 + e^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2\varphi \right) + e \varphi \sin \varphi \right] \quad (4.69)$$

Voici les détails de la solution. Considérons une équation linéaire inhomogène du second degré générale :

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = g(x) \quad (4.70)$$

Si  $y_1(x)$  et  $y_2(x)$  sont deux solutions linéairement indépendantes de la version homogène de l'équation ci-dessus, alors une solution particulière à l'équation inhomogène est

$$y_p(x) = y_2(x) \int dx \frac{y_1(x)g(x)}{W(x)} - y_1(x) \int dx \frac{y_2(x)g(x)}{W(x)} \quad (4.71)$$

où on a défini le wronskien  $W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$ . Dans le cas qui nous occupe, on peut choisir  $y_1(\varphi) = \cos \varphi$  et  $y_2(\varphi) = \sin \varphi$  et le wronskien est l'unité. Il reste donc

$$\begin{aligned} y_p(\varphi) &= \frac{3}{8\bar{h}^4} \left\{ \sin \varphi \int d\varphi \cos \varphi (1 + e \cos \varphi)^2 - \cos \varphi \int d\varphi \sin \varphi (1 + e \cos \varphi)^2 \right\} \\ &= \frac{3}{8\bar{h}^4} \left[ 1 + e^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2\varphi + e \varphi \sin \varphi \right) + e \cos \varphi \right] \end{aligned} \quad (4.72)$$

Le dernier terme de cette solution particulière étant une solution de l'équation homogène, on peut le laisser tomber dans cette solution particulière. On retrouve alors la solution annoncée.

Cette correction  $\Delta u$  est initialement petite, mais le dernier terme croît avec  $\varphi$  et finira par être important. On peut donc ne conserver que ce dernier terme et écrire la solution approchée suivante :

$$u = \frac{1}{2\bar{h}^2} (1 + e \cos \varphi + e \alpha \varphi \sin \varphi) \quad \alpha = \frac{3}{4\bar{h}^2} = 3 \left( \frac{GM}{hc} \right)^2 \quad (4.73)$$

(nous avons restauré les unités SI dans la dernière expression). Remarquons que la solution générale à l'équation homogène pour  $\Delta u$  est aussi négligée, car elle demeure toujours petite, étant purement oscillante. Comme

$$\cos[\varphi(1-\alpha)] = \cos \varphi \cos \alpha \varphi + \sin \varphi \sin \alpha \varphi \approx \cos \varphi + \alpha \varphi \sin \varphi \quad (4.74)$$

quand  $\alpha \ll 1$ , on peut écrire la solution ainsi :

$$u(\varphi) \approx \frac{r_s}{2\bar{h}^2} (1 + e \cos[\varphi(1-\alpha)]) \quad (4.75)$$

Ceci représente une ellipse en précession, c'est-à-dire qui ne revient pas sur elle-même après une période de  $2\pi$ . En fait, le rayon reprend la même valeur après un changement  $2\pi/(1-\alpha)$  de la coordonnée azimutale  $\varphi$ . Ce changement diffère de  $2\pi$  par une petite quantité

$$\Delta \varphi = \frac{2\pi}{1-\alpha} - 2\pi \approx 2\pi\alpha = 6\pi \left( \frac{GM}{hc} \right)^2 \quad (4.76)$$

En exprimant  $h$  en fonction du demi-grand axe  $a$ , on trouve enfin

$$\Delta \varphi = \frac{6\pi GM}{a(1-e^2)c^2} \quad (4.77)$$

Cette formule, appliquée à la planète Mercure, donne une avance du périhélie de  $43''$  par siècle, qui était précisément la partie inexpliquée de l'avance du périhélie de Mercure au moment où Einstein a formulé la théorie de la relativité générale. Il s'agit donc de la première confirmation de la théorie, découverte par Einstein lui-même en 1915. Notons que l'avance totale du périhélie de Mercure est de  $574''$  par siècle, mais que la majeure partie de cette précession est expliquée par les perturbations causées par les autres planètes, notamment Jupiter.

### 4.B.6 Trajectoire des photons

Une particule sans masse comme le photon suit un géodésique nulle. La norme de la 4-vitesse étant nulle dans ce cas, l'éq. (4.37) devient plutôt

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2 = 0 \quad (4.78)$$

Encore une fois, éliminons  $\dot{t}$  et  $\dot{\varphi}$  en utilisant les équations (4.30) et substituons dans l'équation ci-dessus. On trouve

$$\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) = k^2 \quad (4.79)$$

On peut encore une fois utiliser la seconde des relations (4.30) pour troquer la dépendance de  $r$  vis-à-vis du paramètre affine en une dépendance en  $\varphi$  :

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{h}{r^2} \quad (4.80)$$

On trouve alors l'équation de la trajectoire :

$$\left(\frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{h^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) = k^2 \quad (4.81)$$

En fonction de  $u = r_s/r$ , ceci devient

$$(u')^2 + u^2 - u^3 = \frac{k^2}{\bar{h}^2} \quad (4.82)$$

En dérivant par rapport à  $\varphi$  et en divisant par  $u'$ , on trouve enfin

$$u'' + u = \frac{3}{2} u^2 \quad (4.83)$$

**mouvement radial** Considérons premièrement le mouvement radial d'un photon, c'est-à-dire le cas  $h = 0$ . On trouve alors  $\dot{r} = k$ , c'est-à-dire que le paramètre affine décrivant la géodésique, qui n'est pas le temps propre dans ce cas puisque la particule se déplace sur une géodésique nulle, est proportionnel à la coordonnée radiale. En fonction du temps  $t$ , cela revient plutôt à

$$\frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \quad (4.84)$$

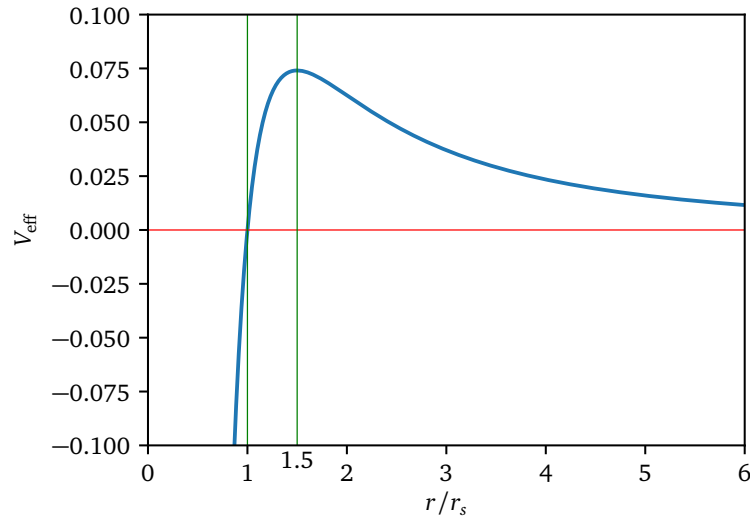
Cette relation s'intègre facilement, pour donner

$$\pm t = r + r_s \ln \left| \frac{r}{r_s} - 1 \right| + \text{cte} \quad (4.85)$$

Le signe + correspond à un photon qui «sort» et le signe – à un photon qui «tombe». On constate que le temps de coordonnée  $t$  nécessaire afin que le photon atteigne le rayon de Schwarzschild est infini. Ainsi, une particule qui tombe vers le centre et qui émet un photon vers un observateur situé à  $r \gg r_s$  semble prendre un temps infini pour parvenir à  $r_s$ , car le signal lumineux qu'elle envoie prend un temps infini pour parvenir à l'observateur quand  $r \rightarrow r_s$ . Ceci est cohérent avec le fait, noté plus haut, que la chute de la particule prend un temps de coordonnée infini pour parvenir à  $r = r_s$ . Cependant, comme nous le verrons plus bas, ceci est une propriété de notre système de coordonnées et non une propriété invariante de la situation.

**FIGURE 4.4**

Potentiel effectif  $V_{\text{eff}}$  pour le mouvement d'un photon autour d'un trou noir. L'orbite circulaire, correspondant au maximum du potentiel à  $r = \frac{3}{2}r_s$ , est instable.



**mouvement circulaire** Un photon peut-il avoir une orbite circulaire autour d'un trou noir? Selon l'éq. (4.83), c'est possible, à condition que  $r = \frac{3}{2}r_s$ . Mais cette orbite est-elle stable? Encore une fois, il faudrait pour cela construire un potentiel effectif radial, qui n'a pas cette fois son analogue en mécanique newtonienne, car il s'applique à une particule de masse nulle. En retournant à l'éq. (4.79), on voit que ce potentiel effectif est

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{h^2}{2r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \quad (4.86)$$

Contrairement au cas massif, la forme de ce potentiel n'est pas paramétrée par  $h$ , qui n'est qu'un préfacteur. Le potentiel ne possède pas de minimum, mais un maximum unique, associé à l'orbite circulaire (car  $\dot{r} = 0$  en ce point), comme illustré à la figure 4.4. Cette orbite est donc instable. Les photons situés en deçà du maximum à  $r = 3r_s/2$  tombent vers le centre.

#### 4.B.7 Déviation des rayons lumineux

Dans la limite  $r \gg r_s$ , l'éq. (4.83) devient

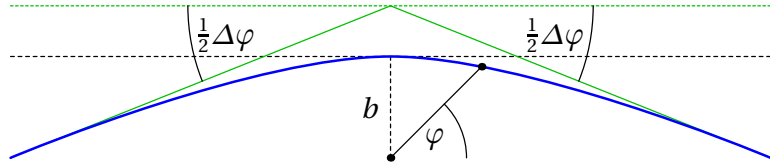
$$u'' + u = 0 \quad (4.87)$$

car on peut alors négliger  $u^2$ . La solution à cette équation est très simple :

$$u(\varphi) = \frac{r_s}{b} \sin \varphi \quad \text{ou} \quad r(\varphi) = \frac{b}{\sin \varphi} \quad (4.88)$$

où on a choisi l'origine de  $\varphi$  de manière à produire  $r \rightarrow \infty$  quand  $\varphi = 0$  et  $\varphi = \pi$ , et où le facteur multiplicatif  $b$  a l'interprétation d'un paramètre d'impact, c'est-à-dire la distance la plus proche de l'origine atteinte par le rayon lumineux quand  $\varphi = \pi/2$ . En fait, l'équation ci-dessus décrit une droite en coordonnées polaires planes. La constante  $r \sin \varphi$  est la composante de la position dans la direction  $\varphi = \pi/2$  est cette composante est constante, ce qui décrit bien une droite.

**FIGURE 4.5**  
Déviation des rayons lumineux.



Ajoutons maintenant une correction relativiste à ce résultat, en supposant que le terme négligé  $\frac{3}{2}u^2$  est très petit, mais non nul. Comme à la section 4.B.5, supposons qu'une correction  $\Delta u$  s'ajoute à la solution ci-dessus en raison de ce terme supplémentaire :

$$\Delta u'' + \Delta u = \frac{3}{2}u^2 = \frac{3r_s^2 \sin^2 \varphi}{2b^2} \quad (4.89)$$

Une solution particulière à cette équation est

$$\Delta u = \frac{3r_s^2}{4b^2} \left(1 + \frac{1}{3} \cos 2\varphi\right) \quad (4.90)$$

et donc au total

$$u(\varphi) = \frac{r_s}{b} \sin \varphi + \frac{3r_s^2}{4b^2} \left(1 + \frac{1}{3} \cos 2\varphi\right) \quad (4.91)$$

Dans la limite  $r \rightarrow \infty$ , c'est-à-dire  $u \rightarrow 0$ , on peut utiliser cette équation pour trouver les angles asymptotiques. Comme la perturbation est petite, on peut supposer que  $\sin \varphi \approx \varphi$  et  $\cos 2\varphi \approx 1$ . On trouve alors la valeur asymptotique  $\varphi = -r_s/b$ , ainsi que la valeur  $\pi - \varphi$  de l'autre côté. La déviation du rayon lumineux par rapport à la droite originale est donc

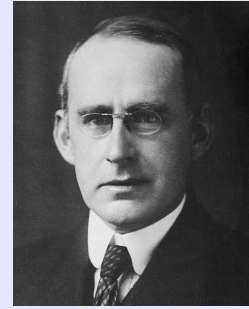
$$\Delta\varphi = \frac{2r_s}{b} \stackrel{\text{SI}}{=} \frac{4GM}{c^2 b} \quad (4.92)$$

Cette déviation a été observée pour la première fois par l'expédition britannique menée par Eddington en 1919 pour observer l'éclipse totale de Soleil en Afrique équatoriale. La déviation observée dans la position angulaire d'une étoile située près du disque solaire était  $\Delta\varphi = 1,98'' \pm 0,16''$  dans un cas et  $\Delta\varphi = 1,61'' \pm 0,4''$  dans l'autre. La prédiction d'Einstein était de  $\Delta\varphi = 1,75''$ . Il s'agit de la deuxième confirmation historique de la théorie de la relativité générale.



### La déviation des rayons lumineux

L'astronome britannique Arthur Eddington (1882/1944) participa à une expédition vers l'île de Principe (au large de la Guinée équatoriale) afin d'observer l'éclipse totale du Soleil prévue pour le 29 mai 1919. Les photos prises par Eddington ce jour-là démontrèrent, avec une bonne marge d'erreur, la déviation des rayons lumineux passant à proximité du Soleil, tel que prédit par la relativité générale. Eddington fut par la suite l'un des plus actifs propagandistes de la nouvelle théorie. Le retentissement médiatique de cette confirmation fut énorme. C'est de cette époque que date la célébrité d'Einstein dans le grand public. Le fait que la théorie de Newton soit corrigée par celle d'un Allemand, au lendemain de la Grande Guerre, et qu'un autre britannique (Eddington) ait contribué à sa confirmation, n'était pas pour déplaire à la presse avide de réconciliations entre les peuples.



Eddington

Moins connue est l'expédition de l'astronome allemand Erwin Finlay-Freundlich (1885/1964) visant à observer la déviation des rayons lumineux lors de l'éclipse solaire du 21 août 1914. À cette époque Einstein avait une prédiction erronée de l'angle de déviation (par un facteur 2). L'éclipse n'était pas visible en Allemagne, mais l'était en Crimée. Une fois sur place, la Première Guerre mondiale éclata entre la Russie et l'Allemagne et les membres allemands de l'expédition furent emprisonnés avant d'avoir pu effectuer les mesures. Ils furent échangés quelques jours plus tard contre des prisonniers de guerre. Les membres américains de l'expédition purent continuer, mais le ciel était nuageux le jour de l'éclipse. S'ils avaient réussi à mesurer la déviation, cette mesure n'aurait pu être en accord avec la prédiction d'Einstein d'alors et aurait pu jeter un discrédit malheureux sur les travaux encore inachevés d'Einstein. [wikipédia](#)

## C Précession géodétique

La *précession géodétique*, aussi appelée *effet de Sitter*, est la précession d'un vecteur attaché à un objet qui suit une géodésique. Elle fait généralement référence à la précession du moment cinétique d'un objet en chute libre.

Commençons par définir un 3-vecteur  $\mathbf{s}$  représentant, par exemple, le spin d'un objet dans son référentiel propre. Nous allons étendre la définition de ce vecteur à un quadrivecteur  $s^i$  dont la composante temporelle est nulle dans le référentiel de l'objet. Cette condition revient à poser  $s_i u^i = 0$ , où  $u^i = \dot{x}^i$  est la quadrivitesse de l'objet. On peut supposer que le vecteur  $\mathbf{s}$  est constant dans le repère de l'objet, en raison de la conservation du moment cinétique. On pense en particulier à un gyroscope.

Nous savons que la quadrivitesse est transportée parallèlement le long d'une géodésique; c'est d'ailleurs une définition possible du concept de géodésique. Afin que le produit  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{s} = u^i s_i$  soit toujours le même, il faut donc que le vecteur  $s^i$  soit lui aussi transporté parallèlement le long d'une géodésique. Lors d'un déplacement infinitésimal  $dx$ , le vecteur  $s^i$  change ainsi en raison du transport parallèle :

$$\delta s^i = -\Gamma_{jk}^i s^j dx^k \quad (4.93)$$

Le changement net de la composante contravariante du vecteur est donc  $Ds^i = ds^i - \delta s^i$ . En divisant par la différentielle de paramètre affine (ex. le temps propre) on trouve

$$\dot{s}^i + \Gamma_{jk}^i s^j \dot{x}^k = 0 \quad (4.94)$$

Cette équation décrit le changement dans le vecteur  $s^i$  résultant de son transport parallèle le long de la géodésique, qui garantit que la condition  $s_i \dot{x}^i = 0$  est toujours respectée. Selon la géodésique suivie, ce changement peut constituer une précession du vecteur  $\mathbf{s}$  dans le référentiel de l'objet, la précession géodétique.

**précession le long d'une orbite circulaire** Calculons la fréquence de cette précession le long d'une orbite circulaire dans le plan équatorial, dans la métrique de Schwarzschild. Comme  $\dot{\theta} = u^2 = 0$  et  $\dot{r} = u^1 = 0$  pour une telle orbite, l'équation (4.94) prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{s}^0 + \Gamma_{10}^0 s^1 u^0 &= 0 \\ \dot{s}^1 + \Gamma_{00}^1 s^0 u^0 + \Gamma_{33}^1 s^3 u^3 &= 0 \\ \dot{s}^2 &= 0 \\ \dot{s}^3 + \Gamma_{13}^3 s^1 u^3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.95)$$

où nous avons tenu compte que les seuls coefficients de connexion non nuls sont ceux indiqués à l'éq. (4.25). En explicitant ces coefficients, on a

$$\begin{aligned} \dot{s}^0 + \frac{M}{r^2(1-2M/r)} s^1 u^0 &= 0 \\ \dot{s}^1 + \frac{M(1-2M/r)}{r^2} s^0 u^0 + (2M-r)s^3 u^3 &= 0 \\ \dot{s}^2 &= 0 \\ \dot{s}^3 + \frac{1}{r} s^1 u^3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.96)$$

Comme l'objet est en orbite circulaire, nous écrirons sa quadri-vitesse comme  $u^i = u^0(1, 0, 0, \omega)$ , où  $\omega = d\varphi/dt$  est une constante. On montre facilement que

$$u^0 = (1-3M/r)^{-1/2} \quad \omega = \sqrt{M/r^3} \quad (4.97)$$

La condition d'orthogonalité  $g_{ij}s^i u^j = 0$  s'écrit donc

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) s^0 u^0 - r^2 s^3 u^3 = 0 \quad (4.98)$$

ce qui nous permet d'exprimer  $s^0$  en fonction de  $s^3$  :

$$s^0 = \frac{\omega r^2}{1 - \frac{2M}{r}} s^3 \quad (4.99)$$

et de reformuler la deuxième des équations (4.96) ainsi :

$$\dot{s}^1 + (3M - r)s^3 u^3 = 0 \quad (4.100)$$

La deuxième et la quatrième des équations (4.96) forment un système couplé :

$$\dot{s}^1 + (3M - r)s^3 u^3 = 0 \quad \dot{s}^3 + \frac{u^3}{r}s^1 = 0 \quad (4.101)$$

Comme  $u^3 = \omega u^0$ , on récrit le système ainsi :

$$\dot{s}^1 + (3M - r)\omega u^0 s^3 = 0 \quad \dot{s}^3 + \frac{\omega u^0}{r}s^1 = 0 \quad (4.102)$$

Dérivons la première équation par rapport à  $\tau$  et substituons-y la deuxième, en profitant du fait que  $u^0$  et  $\omega$  sont des constantes (elles ne dépendent que de  $r$ ) :

$$\ddot{s}^1 - \frac{\omega^2 (u^0)^2}{r} (3M - r)s^1 = \ddot{s}^1 + \omega^2 s^1 = 0 \quad (4.103)$$

dont la solution est immédiate :  $s^1(\tau) = s^1(0) \cos \omega \tau$ . On peut ensuite en déduire  $s^3$  à l'aide de la première des équations du système. On total, on trouve

$$s^1(\tau) = s^1(0) \cos \omega \tau \quad s^3(\tau) = s^1(0) \frac{1}{r} \sqrt{1 - \frac{3M}{r}} \sin \omega \tau \quad (4.104)$$

Il s'agit bien sûr d'un mouvement de précession du vecteur  $\mathbf{s}$  dans le plan défini par les vecteurs unitaires  $\mathbf{e}_r$  et  $\mathbf{e}_\varphi$ . Par contre, la fréquence de précession,  $\omega$ , semble la même que celle de l'orbite, ce qui semble annuler l'effet de précession, car les vecteurs  $\mathbf{e}_r$  et  $\mathbf{e}_\varphi$  eux-mêmes tournent en fonction du temps avec cette fréquence. C'est oublier que la fréquence  $\omega$  est définie en fonction de la coordonnée  $t$  et non du temps propre. Or  $d\tau = dt u^0$ , donc  $\tau = u^0 t = \sqrt{1 - 3M/r} t$ . En exprimant tout en fonction de  $t$ , on trouve donc

$$s^1(t) = s^1(0) \cos \omega' t \quad s^3(t) = s^1(0) \frac{1}{r} \sqrt{1 - \frac{3M}{r}} \sin \omega' t \quad \omega' = \omega \sqrt{1 - \frac{3M}{r}} \quad (4.105)$$

Si le vecteur  $\mathbf{s}$  était vraiment constant dans l'espace, il y aurait quand même un mouvement de précession apparent, du fait de notre utilisation des coordonnées sphériques, de fréquence  $\omega$ . Il faut soustraire cet effet, de sorte que la véritable fréquence de précession, par rapport à un système d'axes cartésiens, est  $\Omega = \omega' - \omega$ , ou

$$\Omega = \omega \left[ \sqrt{1 - \frac{3M}{r}} - 1 \right] = \sqrt{\frac{M}{r^3}} \left[ \sqrt{1 - \frac{3M}{r}} - 1 \right] \quad (4.106)$$

Après une orbite, le changement d'orientation du vecteur  $\mathbf{s}$  sera

$$\alpha = 2\pi \left[ \sqrt{1 - \frac{3M}{r}} - 1 \right] \quad (4.107)$$

Dans la limite de faible champ  $M \ll r$ , on trouve

$$\Omega = -\omega \frac{3M}{2r} = -\omega \frac{3}{4} \frac{r_s}{r} \quad (4.108)$$

Pour un objet en orbite basse autour de la Terre, cette précession accumulée est de l'ordre de quelques secondes d'arc par année, donc parfaitement mesurable.

La sonde *Gravity Probe B*, lancée en 2004 sur une orbite géocentrique d'environ 600 km d'altitude et en opération jusqu'en 2010, a permis de confirmer cet effet :<sup>1</sup> la précession géodétique mesurée et la précession théorique sont

$$\alpha_{\text{obs.}} = -6,6018(183)''/\text{an} \quad \alpha_{\text{th.}} = -6,6061''/\text{an} \quad (4.109)$$

l'accord est donc de 0.5%. En plus de confirmer cet effet, qui est essentiellement un effet de décalage vers le rouge ou de dilatation du temps, la sonde a aussi confirmé l'effet Lense-Thirring (voir page 135).

## D Horizons et singularités

### 4.D.1 Singularités intrinsèques vs singularités de coordonnées

La métrique de Schwarzschild, dans le système de coordonnées que nous avons utilisé, possède une singularité à  $r = r_s$ . Cette singularité se manifeste, comme nous l'avons vu, dans le temps infini que prend un corps en chute libre pour atteindre le rayon de Schwarzschild. Par contre, le temps propre nécessaire à cette chute, pour l'objet en chute libre, est fini. Il est même fini pour atteindre le point  $r = 0$ . Il faut donc se demander si la singularité apparente à  $r = r_s$  n'est pas un artifice du système de coordonnées utilisé. Rappelons l'exemple simple de la géométrie hyperbolique en deux dimensions (section 2.E.5) où une telle singularité est apparue en raison d'un mauvais choix de coordonnées, alors qu'elle a disparu dans un autre choix de coordonnées.

Si la singularité à  $r = r_s$  est réelle, elle doit exister dans tous les systèmes de coordonnées. En particulier, elle devrait être révélée en considérant une quantité invariante. L'invariant non trivial le plus simple à notre disposition est la contraction maximale du tenseur de Riemann avec lui-même :  $R_{ijkl}R^{ijkl}$ . On calcule que

$$R_{ijkl}R^{ijkl} = \frac{12r_s^2}{r^6} \quad (4.110)$$

Cette quantité n'est donc singulière qu'à l'origine. En ce point se situe une véritable singularité de la géométrie de Schwarzschild, ce qu'on appelle une *singularité géométrique* ou *singularité intrinsèque*.

L'objectif de la section 4.E sera de construire un meilleur système de coordonnées pour représenter cette géométrie. Ce seront les *coordonnées de Kruskal-Szekeres*.

1. Voir la brève revue dans Physics Today, juillet 2011 : <https://doi.org/10.1063/PT.3.1150>.

#### 4.D.2 Horizon d'événements

Même si la singularité  $r = r_s$  ne constitue pas une singularité géométrique, elle définit ce qu'on appelle un *horizon d'événements*, ou souvent simplement *horizon*. Expliquons, avec quelques définitions préalables. Premièrement, on appelle *hypersurface* un sous-espace (ou une sous-variété, pour être plus exact) de dimension  $d - 1$  dans un espace de dimension  $d$ . Une hypersurface peut être définie par une seule équation  $f(x) = 0$ , où  $f$  est, par définition, une fonction scalaire. En chaque point  $x$  de l'hypersurface, on définit un vecteur normal  $n_i = \partial_i f(x)$ .

Une hypersurface  $H$  est qualifiée de *nulle* si le vecteur normal  $n_i$  est de longueur nulle partout sur  $H$  :  $n_i n^i = 0$ . Ceci bien sûr n'est possible que dans un espace pseudo-euclidien.

Une définition équivalente d'une hypersurface nulle  $H$  est qu'en chaque point  $x$  de  $H$ , le plan tangent contient un vecteur nul dont le produit avec tous les vecteurs du plan tangent en  $x$  est nul. On démontre l'équivalence de ces deux définitions de la manière suivante : le long de l'hypersurface, la différentielle de  $f$  est nulle, c'est-à-dire  $df = n_i dx^i = 0$ . Or, comme  $n_i$  est un vecteur nul et que  $dx$  est un vecteur quelconque du plan tangent, on obtient bien la propriété annoncée. En fait, un déplacement infinitésimal dans la direction  $n^i$  nous laisse bien dans l'hypersurface, car  $dx^i = \epsilon n^i$  entraîne  $df = \epsilon n^i n_i = 0$  :  $n^i$  appartient au plan tangent, tout en lui étant orthogonal!

Un *horizon des événements* est une hypersurface nulle au travers de laquelle les photons ne peuvent passer que dans un sens : une membrane unidirectionnelle, en quelque sorte. Les géodésiques nulles qui traversent l'horizon de la géométrie de Schwarzschild à  $r = r_s$  ne peuvent le faire que de l'*extérieur* vers l'*intérieur*. L'horizon peut lui-même être considéré comme étant généré géométriquement par des géodésiques nulles. Le vecteur tangent à ces géodésiques est précisément le vecteur orthogonal  $n_i$ . Autrement dit, à partir d'un point d'une hypersurface nulle, on peut générer une géodésique nulle (la courbe intégrale du vecteur  $n_i$ ) et l'ensemble de ces courbes intégrales, passant par des points différents, constitue l'hypersurface nulle dans son ensemble.

**cône de lumière** Dans la géométrie de Minkowski, le cône de lumière futur défini par l'équation  $f(t, r, \theta, \varphi) = t - r = 0$  constitue une hypersurface nulle et un horizon des événements. Le vecteur normal est  $n_i = (1, -1, 0, 0)$  et donc  $n^i = (1, 1, 0, 0)$ . Ce cône peut être vu comme un ensemble de rayons lumineux émis à partir de l'origine. À partir d'un événement situé à l'intérieur du cône, on ne peut pas communiquer avec l'extérieur du cône : les photons ne peuvent pas sortir. Par contre, ils peuvent entrer dans le cône à partir de l'extérieur. Le cône agit effectivement comme une membrane unidirectionnelle pour l'information.

**horizon de Schwarzschild** Dans la géométrie de Schwarzschild, la sphère définie par  $r = r_s$  constitue un horizon d'événements. En effet, la fonction  $f$  qui définit cette hypersurface est  $f(x) = r - r_s$ . Le vecteur normal est  $n_i = (0, 1, 0, 0)$  et sa version contravariante est  $n^i = (0, g^{rr}, 0, 0)$ . Or

$$g^{rr} = -1 + \frac{r_s}{r} \quad (4.111)$$

et  $g^{rr} = 0$  à  $r = r_s$ . Donc  $n^i n_i = 0$  partout sur  $H$ . Cette affirmation, même obtenue dans les coordonnées de Schwarzschild, est indépendante des coordonnées.

**trous noirs et trous blancs** Une hypersurface nulle et compacte (donc qui ne s'étend pas à l'infini) qui ne laisse passer les rayons lumineux que vers l'intérieur définit ce qu'on appelle un *trou noir*.<sup>2</sup> À l'inverse, si une telle hypersurface ne laisse passer les rayons lumineux que de l'intérieur vers l'extérieur, on l'appelle *trou blanc*.<sup>3</sup>

Bien sûr, un véritable trou noir est un objet astrophysique dont la masse est concentrée en deçà du rayon de Schwarzschild et donc pour lequel la métrique de Schwarzschild est applicable dans cette région. Une erreur commune est de supposer que la métrique d'un trou noir est différente de celle causée par un objet massif quelconque. Seul le domaine radial d'application de la métrique est différent.

### 4.D.3 Surface à décalage infini

Nous avons vu à la page 76 que le décalage en fréquence d'un signal se propageant dans une métrique stationnaire est

$$\frac{\nu_R}{\nu_E} = \left( \frac{g_{00}(\mathbf{r}_E)}{g_{00}(\mathbf{r}_R)} \right)^{1/2} \quad (4.112)$$

Une hypersurface où la condition  $g_{00} = 0$  (ou  $g_{tt} = 0$ ) est satisfaite est appelée *surface à décalage infini* (angl. *infinite redshift surface*). Un signal émis à partir d'un événement sur une telle surface est infiniment décalé vers le rouge lorsqu'il atteint le récepteur; il est donc invisible.

Dans la géométrie de Schwarzschild, l'horizon des événements à  $r = r_s$  est aussi une surface à décalage infini, car  $|g_{tt}| = |g^{rr}|$ . Nous verrons au chapitre 5 que cette coïncidence n'est plus vraie pour un trou noir en rotation.

## E Coordonnées de Kruskal-Szekeres

### 4.E.1 Cônes de lumière entrants et sortants

L'un des défauts des coordonnées de Schwarzschild est que la lumière ne s'y déplace pas à la vitesse de la lumière. Par là on entend que les intervalles nuls ne sont pas caractérisés par la relation  $dr = \pm dt$ . Au contraire, la relation qu'on obtient de la métrique (4.23) pour un rayon lumineux radial est

$$\frac{dr}{dt} = \pm \left( 1 - \frac{r_s}{r} \right) \quad (4.113)$$

2. Le terme est habituellement attribué à John Wheeler, peut-être inspiré par l'un des étudiants fréquentant ses cours en 1967. La journaliste scientifique Ann Ewing l'aurait suggéré dès 1964. Quoi qu'il en soit, le concept est plus ancien que l'expression.

3. On peut se demander si la notion d'intérieur et d'extérieur a un caractère absolu ou dépendant des coordonnées : par exemple, on pourrait définir une nouvelle coordonnée radiale par la transformation  $r \rightarrow 1/r$ , ce qui transformerait l'intérieur en extérieur et vice-versa. En fait, on définit l'intérieur d'un trou noir ou d'un trou blanc comme la région où se trouve la singularité géométrique qui, elle, a un caractère absolu.

Récrivons la partie radiale de la métrique de Schwarzschild ainsi :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left[ dt + \frac{r dr}{r - r_s} \right] \left[ dt - \frac{r dr}{r - r_s} \right] \quad (4.114)$$

(nous ignorons la partie angulaire  $r^2 d\Omega^2$  pour le moment). Cette forme nous porte à définir de nouvelles coordonnées  $p$  et  $q$  telles que

$$dp = dt + \frac{r dr}{r - r_s} \quad dq = dt - \frac{r dr}{r - r_s} \quad (4.115)$$

La métrique peut alors s'écrire ainsi :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dp dq, \quad (4.116)$$

où il est implicite que  $r$  doit être exprimé en fonction de  $(p, q)$ .

Est-il possible de définir les coordonnées  $(p, q)$  uniquement à partir d'une relation différentielle? La réponse tient à l'intégrabilité de cette relation. Rappelons qu'étant donnée une relation différentielle

$$dp = A(r, t) dt + B(r, t) dr \quad (4.117)$$

une fonction  $p(r, t)$  existe si la condition d'égalité des dérivées secondes croisées est satisfaite :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t \partial r} = \frac{\partial^2 p}{\partial r \partial t} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial A}{\partial r} = \frac{\partial B}{\partial t} \quad (4.118)$$

Dans le cas qui nous occupe cette relation est trivialement satisfaite, car  $A$  ne dépend pas de  $r$  et  $B$  ne dépend pas de  $t$ .

Une autre façon d'exprimer les relations (4.115) est la suivante :

$$d(p + q) = 2 dt \quad d(p - q) = \frac{2r dr}{r - r_s} \quad (4.119)$$

ce qui mène aux solutions possibles suivantes :

$$p + q = 2t \quad p - q = 2r + 2r_s \ln \frac{|r - r_s|}{r_s} \quad (4.120)$$

(Notez la valeur absolue :  $\int dx/x = \ln|x|$  et non pas  $\ln x$ ). Donc, en somme,

$$p = t + r + r_s \ln \frac{|r - r_s|}{r_s} \quad q = t - r - r_s \ln \frac{|r - r_s|}{r_s} \quad (4.121)$$

Ces nouvelles coordonnées sont intéressantes, car ce sont des coordonnées de cône de lumière, c'est-à-dire que les rayons lumineux respectent la condition  $dp = 0$  (rayons entrants) ou  $dq = 0$  (rayons sortants). En effet, dans les deux cas  $ds^2 = 0$  et le caractère sortant ou entrant se déduit du signe relatif de  $dr$  et de  $dt$ . Cependant, les nouvelles coordonnées  $(p, q)$  ont encore un comportement spécial à  $r = r_s$ , car la métrique s'annule à ce point, ce qui est malsain. Pour remédier à ce problème, définissons

$$P = e^{p/2r_s} \quad Q = -e^{-q/2r_s} \quad (4.122)$$

de sorte que

$$dP = \frac{P}{2r_s} dp \quad dQ = -\frac{Q}{2r_s} dq \quad (4.123)$$

et donc

$$dP dQ = \frac{e^{(p-q)/2r_s}}{4r_s^2} dp dq = \frac{e^{r/r_s} |r - r_s|}{4r_s^2 r_s} dp dq \quad (4.124)$$

La métrique prend alors la forme suivante :

$$ds^2 = \frac{r - r_s}{r} 4r_s^2 e^{-r/r_s} \frac{r_s}{|r - r_s|} dP dQ = \frac{4r_s^3 e^{-r/r_s}}{r} \text{sign}(r - r_s) dP dQ \quad (4.125)$$

La singularité de la métrique a maintenant disparu de  $r = r_s$ , sauf pour un changement de signe.

#### 4.E.2 Coordonnées de Kruskal-Szekeres

Nous préférons des coordonnées qui ont un caractère spatial et temporel à des coordonnées de cône de lumière. Définissons donc encore, et pour la dernière fois, de nouvelles coordonnées  $(u, v)$  telles que  $dv^2 - du^2 = \text{sign}(r - r_s) dP dQ$ , de sorte que

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{1}{2}(P + Q) \\ u &= \frac{1}{2}(P - Q) \end{aligned} \right\} (r > r_s) \quad \left. \begin{aligned} v &= \frac{1}{2}(P - Q) \\ u &= \frac{1}{2}(P + Q) \end{aligned} \right\} (r < r_s) \quad (4.126)$$

Si on traduit ces relations en fonction des coordonnées originales de Schwarzschild, on trouve

$$\boxed{\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{r}{r_s} - 1} e^{r/2r_s} \sinh \frac{t}{2r_s}, \quad u = \sqrt{\frac{r}{r_s} - 1} e^{r/2r_s} \cosh \frac{t}{2r_s} & (r > r_s) \\ v &= \sqrt{1 - \frac{r}{r_s}} e^{r/2r_s} \cosh \frac{t}{2r_s}, \quad u = \sqrt{1 - \frac{r}{r_s}} e^{r/2r_s} \sinh \frac{t}{2r_s} & (r < r_s) \end{aligned}} \quad (4.127)$$

et la métrique prend la forme suivante :

$$\boxed{ds^2 = \frac{4r_s^3}{r} e^{-r/r_s} (dv^2 - du^2) - r^2 d\Omega^2} \quad (4.128)$$

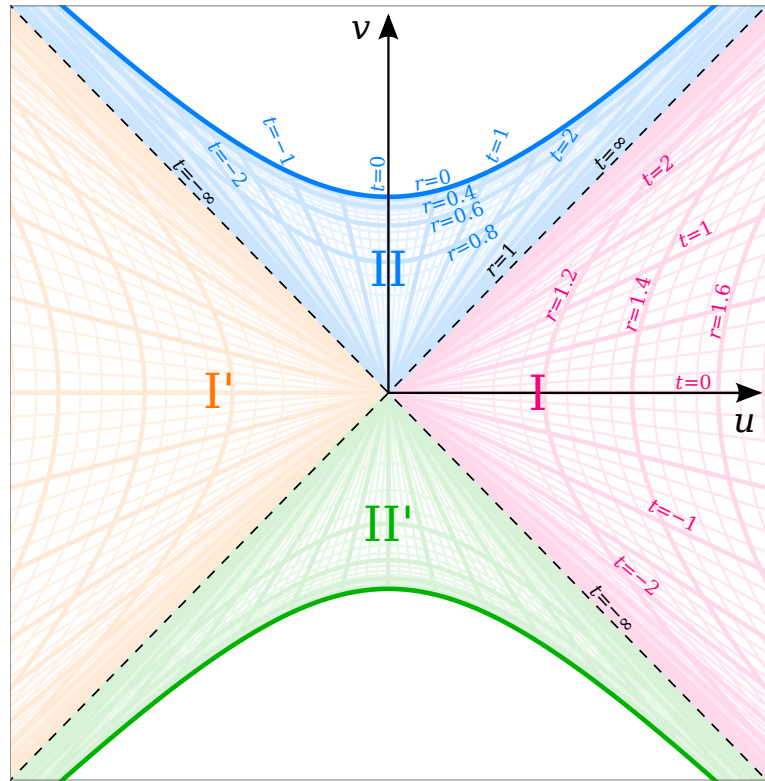
La coordonnée  $r$  doit être considérée comme une fonction de  $(u, v)$  via la relation implicite

$$u^2 - v^2 = \left(\frac{r}{r_s} - 1\right) e^{r/r_s} \quad (4.129)$$

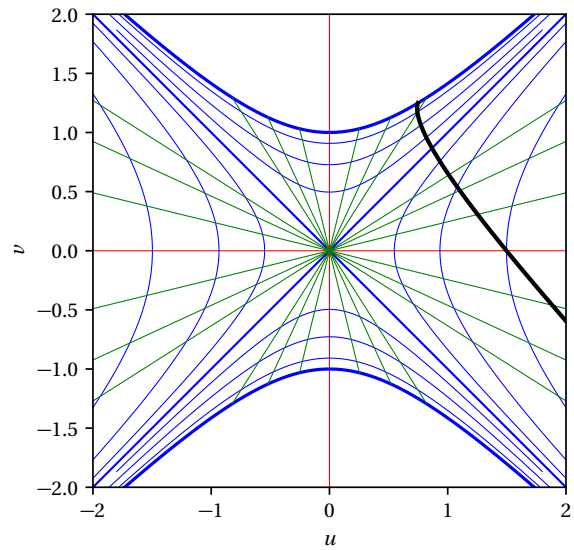
Les coordonnées (4.127) sont appelées *coordonnées de Kruskal-Szekeres*.



**FIGURE 4.6**  
 Diagramme d'espace-temps de la géométrie de Schwarzschild en fonction des coordonnées de Kruskal-Szekeres. Les valeurs de  $r$  et de  $t$  sont exprimées en multiples de  $r_s$ . (source : wikipédia).



**FIGURE 4.7**  
 Ligne d'univers d'un objet en chute libre radiale dans le diagramme de Kruskal.



### 4.E.3 Diagramme d'espace-temps de Kruskal-Szekeres

La figure 4.6 représente un diagramme d'espace-temps de la géométrie de Schwarzschild en fonction des coordonnées de Kruskal-Szekeres  $u$  et  $v$ . Les courbes à  $r$  et à  $t$  constants sont indiquées. Les droites issues de l'origine  $(u, v) = (0, 0)$  correspondent à des valeurs constantes de  $t$ , car le rapport  $v/u$  est  $\tanh(t/r_s)$  à l'extérieur de l'horizon, et  $\coth(t/r_s)$  à l'intérieur. Les courbes à  $r$  constant sont des hyperboles, car  $u^2 - v^2$  ne dépend que de  $r$ . L'horizon  $r = r_s$  correspond à l'origine  $(u, v) = (0, 0)$  pour un temps quelconque, mais aussi à la droite  $u = v$  dans la limite  $t \rightarrow \infty$ . La singularité à  $r = 0$  est décrite par une hyperbole qui limite le diagramme vers le haut (l'espace-temps n'existe pas au-delà de cette courbe).

La courbe en noir sur le diagramme de la fig. 4.7 représente la ligne d'univers d'une particule massive en chute libre radiale (initialement au repos à l'infini). La particule traverse l'horizon ( $r = r_s$ ) sur la diagonale  $u = v$  au temps  $t \rightarrow \infty$ , pour ensuite aboutir à la singularité  $r = 0$ . Rappelons qu'en fonction de son temps propre, le temps que prend la particule pour atteindre  $r = 0$  est fini. D'ailleurs, la métrique n'étant pas singulière en fonction de  $(u, v)$  sauf à  $r = 0$ , les lignes d'univers qui ne touchent pas la singularité ont des temps propres finis. Un signal lumineux radial se propage toujours à  $\pm 45^\circ$  sur ce diagramme, puisque que l'intervalle nul correspond à  $du^2 = dv^2$ .

Il faut cependant garder à l'esprit que ce diagramme ne représente que deux coordonnées sur quatre. En chaque point on doit imaginer que réside une sphère de rayon  $r$ . Les courbes à  $r$  fixe ou à  $t$  fixe ne constituent pas des géodésiques. En particulier, une orbite circulaire stable autour du trou noir correspond à une géodésique dans l'espace complet paramétré par  $(v, u, \theta, \varphi)$ , mais sa représentation correcte requiert d'ajouter un axe des  $\varphi$ , par exemple. Sur le diagramme de Kruskal-Szekeres, cette orbite est projetée sur une courbe à  $r$  constant (une hyperbole), mais cette hyperbole ne constitue pas une géodésique d'un espace projeté où  $(u, v)$  sont les seules coordonnées.

Le diagramme est divisé en quatre régions. La région I est limitée par les droites  $u = \pm v$ ,  $u > 0$  et respecte la condition  $u > v$ . D'après la définition (4.127), ces deux droites correspondent à  $t = \pm\infty$  et la condition  $u > v$  correspond à  $r > r_s$ . Cette région correspond donc à l'extérieur de l'horizon. La région II correspond à  $v > u$ , donc à l'intérieur de l'horizon, et se termine avec la singularité à  $r = 0$ .

Les régions I' et II' sont obtenues en changeant le signe des coordonnées et se comportent comme des copies des régions I et II, mais ne sont pas décrites par les coordonnées de Schwarzschild  $(r, t)$ . Elles sont plutôt décrites par un deuxième ensemble de coordonnées de Schwarzschild  $(r', t')$ , obtenu par les mêmes transformations que (4.127), mais pour des valeurs négatives de  $u + v$ . On constate que la correspondance est

$$u \rightarrow -u, t' = t \quad (\text{région I}') \qquad v \rightarrow -v, t' = -t \quad (\text{région II}') \qquad (4.130)$$

Les coordonnées de Kruskal-Szekeres constituent en fait une extension des coordonnées de Schwarzschild, qui permet de décrire l'espace-temps dans un domaine plus étendu. On peut faire le parallèle avec la notion de prolongement analytique en analyse complexe. Toute particule qui traverse la frontière de I à II doit irréversiblement atteindre la singularité à  $r = 0$ . Les régions I' et II' sont inaccessibles aux particules qui résident dans les régions I et II, en ce sens qu'aucune géodésique issue de la région I ne traverse la frontière entre l'Univers I-II et l'Univers I'-II' (la frontière entre les deux correspond à  $t = -\infty$ ). La région II' est semblable à la région II, mais inversée en quelque sorte : les particules peuvent passer de I à II mais pas l'inverse, alors qu'elles peuvent passer de II'

vers I ou vers I' mais pas l'inverse. En ce sens, la région II' représente l'intérieur d'un «trou blanc». De même, une particule de I' peut tomber dans la région II, de sorte que les deux univers I et I' partagent le même trou noir et le même trou blanc.

L'espace-temps décrit par les coordonnées de Kruskal-Szekeres constitue ce qu'on appelle une *extension maximale* de la solution de Schwarzschild, ce qui signifie que toutes les géodésiques qu'on peut y définir s'étendent sur un domaine infini de leur paramètre affine ou s'achèvent sur une singularité (c'est-à-dire  $r = 0$  ou son analogue dans la région II') dans le passé ou dans l'avenir.

Quant aux singularités de cette géométrie, peut-on leur accorder une réalité fondamentale? Probablement pas, car lorsqu'on s'approche de  $r = 0$ , les effets quantiques qui apparaissent aux très courtes distances seront sans doute importants et modifieront la géométrie, en tout cas la manière dont la géométrie est décrite. Il n'y a pas à ce jour de théorie acceptée de la gravité quantique, même si des efforts considérables sont déployés dans ce sens.

**Un trou noir est dynamique** La métrique de Schwarzschild telle que représentée par le diagramme de Kruskal-Szekeres est éternelle, c'est-à-dire elle existe depuis  $t = -\infty$ . Elle représente une géométrie idéalisée et non réelle. Un trou noir physique est un objet qui s'est formé à un moment donné, suite à l'effondrement d'une étoile massive. Une fois le trou noir formé, la métrique s'applique aux temps ultérieurs. On peut considérer, pour fixer les idées, que le trou noir s'est formé par l'effondrement d'une coquille sphérique de poussière très dense et que cette poussière a suivi une géodésique du genre de celle illustrée à la fig. 4.7. Dans ce cas, la géométrie à l'intérieur de la sphère de poussière n'est pas celle de Schwarzschild et le diagramme de Kruskal-Szekeres ne décrit la situation correctement qu'à la droite de la géodésique illustrée.

## F Trous de vers

Les *trous de vers* sont d'hypothétiques passages qui relient des espaces-temps différents. Les auteurs de science-fiction en font un dispositif permettant à leurs protagonistes de se déplacer rapidement d'un point à l'autre de l'univers, voire de voyager dans le temps.

Dans cette section, nous allons voir comment les deux univers qui sont révélés par les coordonnées de Kruskal-Szekeres dans un trou noir éternel sont reliés par un trou de ver. Malheureusement, nous constaterons que l'utilité d'un tel passage est très limitée.

### 4.F.1 Pont d'Einstein-Rosen

Commençons, en guise de préparation, par considérer la surface bidimensionnelle suivante, telle que décrite par ses coordonnées cylindriques dans l'espace hôte de dimension 3 :

$$r > a \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad z(r) = \pm 2\sqrt{a(r-a)} \quad (4.131)$$

Cette surface de révolution est représentée à la figure 4.8. Sa géométrie intrinsèque peut être décrite par les coordonnées  $r$  et  $\varphi$ . L'élément de longueur est le suivant :

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

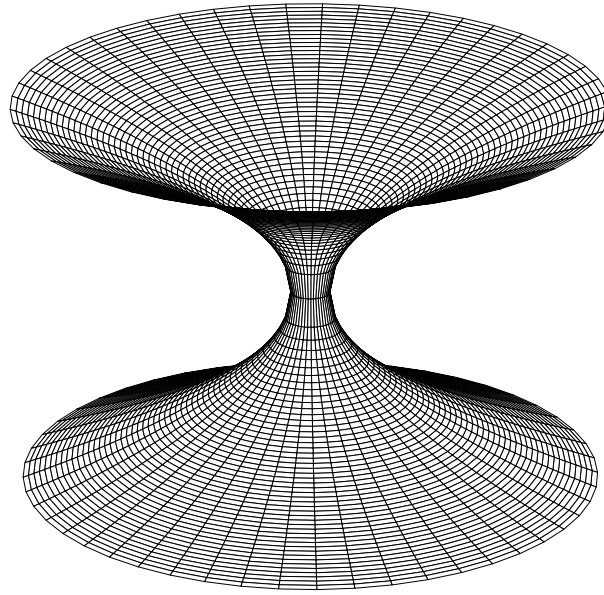


FIGURE 4.8

Le pont d'Einstein-Rosen, tel que représenté lorsque plongé dans  $\mathbb{R}^3$ .

$$\begin{aligned}
 &= \left[ \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 + 1 \right] dr^2 + r^2 d\varphi^2 \\
 &= \left[ \frac{a}{r-a} + 1 \right] dr^2 + r^2 d\varphi^2 \\
 &= \frac{dr^2}{1 - \frac{a}{r}} + r^2 d\varphi^2
 \end{aligned} \tag{4.132}$$

En fonction des coordonnées  $(r, \varphi)$ , la métrique a une singularité à  $r = a$ . Encore une fois, ceci est une caractéristique du système de coordonnées et non pas de la surface elle-même, qui n'a pas de singularité à  $r = 1$ . En fait, cette valeur de  $r$  correspond au «col» qui nous fait passer d'une feuille à l'autre de la surface, c'est-à-dire de  $z$  négatif à  $z$  positif.

Cet exemple simple d'espace porte le nom de *pont d'Einstein-Rosen*, car il montre comment on peut faire le pont entre deux espaces asymptotiquement plats (la métrique devient euclidienne sur chaque feuille quand  $r \gg a$ ). Il illustre aussi comment un système de coordonnées, en l'occurrence  $(r, \varphi)$ , peut nous porter à croire en l'existence d'une singularité et nous cacher l'existence de deux feuilles dans un espace qu'il est incapable de décrire globalement. Le pont d'Einstein-Rosen est le prototype du *trou de ver* (angl. *wormhole*).

---

#### 4.F.2 Trou de ver dans le trou noir de Schwarzschild

Considérons maintenant la ligne  $v = 0$  dans le diagramme de Kruskal-Szekeres. Cette ligne passe par l'origine et relie les régions I et I' du diagramme. Sur cette ligne, la métrique est

$$ds^2 = -\frac{4r_s^3}{r} e^{r/r_s} du^2 - r^2 d\Omega^2 \tag{4.133}$$

La relation entre  $u$  et  $r$  étant, sur cette ligne,

$$u = \sqrt{\frac{r}{r_s} - 1} e^{r/2r_s} \quad (4.134)$$

on peut exprimer la métrique en fonction de  $r$  seulement. Comme

$$du = \left[ \frac{1}{2r_s \sqrt{\frac{r}{r_s} - 1}} e^{r/2r_s} + \frac{1}{2r_s} \sqrt{\frac{r}{r_s} - 1} e^{r/2r_s} \right] dr = \frac{r}{2r_s^2 \sqrt{\frac{r}{r_s} - 1}} e^{r/2r_s} dr \quad (4.135)$$

On trouve

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} - r^2 d\Omega^2 \quad (4.136)$$

ce qui correspond au pont d'Einstein-Rosen dans le plan  $\theta = \pi/2$ . Il y a donc un trou de ver au centre du diagramme de Kruskal-Szekeres, et ce trou de ver fait le pont entre deux univers, correspondant aux régions I et I' du diagramme.

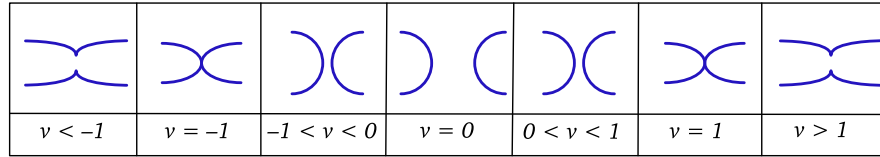


FIGURE 4.9

Fermeture du trou de vers en fonction de la coordonnée  $\nu$  (source : Hobson et al.).

Cependant, avant de courir acheter nos billets à destination de l'univers parallèle, rappelons-nous que cette géométrie n'est pas statique et correspond à la tranche  $\nu = 0$ , ou au temps  $t = 0$ . C'est un instantané. Voyons comment elle évolue dans le temps. Choisissons donc une autre tranche de  $\nu$ , disons  $\nu_0$ . On calcule sans trop de peine que

$$u = \pm \sqrt{\nu_0^2 - \left(1 - \frac{r}{r_s}\right)} e^{r/r_s} \quad (4.137)$$

et que la métrique correspondante sur cette ligne, en fonction de  $r$ , est

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r} (1 - \nu_0^2 e^{-r/r_s})} - r^2 d\Omega^2 \quad (4.138)$$

Le col du trou de ver devient de plus en plus étroit quand  $\nu_0$  augmente. La valeur de  $r$  à laquelle  $g_{rr} \rightarrow \infty$  passe de  $r = r_s$  quand  $\nu_0 = 0$  à  $r = 0$  quand  $\nu_0 \rightarrow \pm 1$ . Le trou de ver se ferme donc quand on s'approche de la singularité physique à  $\nu = \pm 1$ , à l'intérieur de l'horizon. Bien sûr la coordonnée  $\nu$  n'est pas le temps de Schwarzschild, mais c'est une coordonnée de genre temps, et dans cette coordonnée, le temps d'ouverture du trou de ver est de l'ordre de  $r_s$ , soit le temps que la lumière prend pour traverser le diamètre de l'horizon d'un trou noir (voir Fig. 4.9).

La véritable question est : une particule peut-elle emprunter ce trou de vers et passer d'un univers à l'autre, c'est-à-dire de la région I à la région I' ? Il suffit de poser la question pour un photon. La réponse est non : un photon en provenance de la région I ne peut pas emprunter le trou de vers pour passer à la région I'. Comme nous l'avons vu, les photons se déplacent à 45° dans le diagramme de Kruskal-Szekeres, ils ne peuvent donc pas passer de la région I à la région I' ! Quant aux particules massives, elles n'auront pas le temps d'emprunter le trou de ver si les photons n'ont pas le temps. Par contre, un photon peut passer de la région I' vers la région II. Donc, un observateur qui chute dans un trou noir et passe l'horizon, donc qui se retrouve dans la région II, pourrait recevoir des messages en provenance de la région I' (donc de l'autre univers), mais serait par la suite condamné à chuter sur la singularité dans pouvoir communiquer à son tour avec son univers d'origine (la région I).

## G Rayonnement de Hawking et évaporation des trous noirs

La découverte la plus célèbre du physicien britannique Stephen Hawking (1942/2018) est que les trous noirs s'évaporent lentement, par émission de rayonnement rendue possible par l'effet tunnel. Plus précisément, il a montré qu'un trou noir émet constamment un rayonnement de type corps noir (la coïncidence des termes est intéressante) à une température

$$T_H = \frac{\hbar}{8\pi k_B M} \stackrel{\text{SI}}{=} T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G M} \quad (4.139)$$

La présence de la constante de Planck dans cette formule signale qu'il s'agit d'un effet quantique.<sup>4</sup> En degrés Kelvin et en fonction de la masse relative à la masse solaire, cette température est

$$T_H = 6 \times 10^{-8} \left( \frac{M_\odot}{M} \right) \text{ Kelvin} \quad (4.140)$$

Rappelons que la distribution de Planck pour l'énergie émise par intervalle de fréquence à une température  $T$  est

$$B_\omega \stackrel{\text{SI}}{=} \frac{\hbar \omega^3}{2\pi^2 c^2} \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \quad (4.141)$$

4. Remarquons que nous ne pouvons pas simplifier le système d'unités en posant  $\hbar = 1$ , car nous avons déjà posé  $G = 1$  en choisissant les unités géométriques, ce qui entraîne déjà une relation entre les longueurs et les masses. Dans les unités géométriques,  $\hbar$  a les unités d'une longueur au carré, c'est-à-dire d'une surface.

### 4.G.1 Température de Hawking

Nous ne démontrerons pas cette relation ici, faute de temps et d'espace. La démonstration peut se faire de diverses manières, soit par un calcul d'effet tunnel, soit par un calcul, plus subtil mais plus fondamental, impliquant la définition du vide en théorie quantique des champs en fonction d'un observateur situé près de l'horizon en comparaison d'un observateur situé à l'infini.

Par contre, nous allons donner un argument approximatif, basé sur le principe d'incertitude temps-énergie. Supposons donc qu'une paire particule-antiparticule soit créée près de l'horizon, à une coordonnée  $r = r_s + \varepsilon$ . La métrique de Schwarzschild étant indépendante du temps, les énergies des deux particules sont conservées le long de leurs géodésiques. Ces énergies sont respectivement  $p_0$  et  $\bar{p}_0$  pour la particule et l'antiparticule. Notez que les indices sont covariants, car ce sont ces composantes qui sont conservées le long des géodésiques. Si ces particules sont créées à partir du vide, la conservation de l'énergie entraîne que  $p_0 + \bar{p}_0 = 0$ , ce qui est normalement impossible. Par contre, si l'antiparticule traverse l'horizon, alors la composante  $\bar{p}_0$  devient une quantité de mouvement et non une énergie, car la coordonnée  $x^0$  devient alors de genre espace. Il est donc tout à fait possible que  $\bar{p}_0$  soit négative et donc que la contrainte  $p_0 + \bar{p}_0 = 0$  soit à la fin respectée si la particule, elle, s'éloigne à l'infini (on peut également inverser les rôles de la particule et de son antiparticule). Cependant, cette contrainte sera violée pendant un court laps de temps, avant que l'antiparticule ne plonge sous l'horizon, ce qui est possible en mécanique quantique. Pour déterminer l'énergie typique  $E$  de la particule émise, nous devons appliquer la relation d'incertitude temps-énergie  $\mathcal{E}\Delta\tau \sim \hbar$ . Ici  $\mathcal{E}$  est l'énergie de la particule *selon un observateur en chute libre proche de l'horizon* et  $\Delta\tau$  le temps propre nécessaire afin que l'antiparticule chute au travers de l'horizon, que nous allons assimiler au temps propre requis afin que l'observateur en chute libre passe du rayon  $r = r_s + \varepsilon$  au rayon  $r = r_s$ .

Pour calculer approximativement ce temps propre, rappelons-nous que, pour une trajectoire radiale vers le centre,

$$\dot{r} = -\sqrt{k^2 - 1 + \frac{r_s}{r}} = -\sqrt{-\frac{r_s}{r_s + \varepsilon} + \frac{r_s}{r}} \quad (4.142)$$

Dans la seconde équation, nous avons substitué la valeur de l'énergie telle que  $\dot{r} = 0$  à  $r = r_s + \varepsilon$  (le point de départ de la chute). En isolant  $d\tau$  :

$$\Delta\tau = \int_{r_s}^{r_s + \varepsilon} \frac{dr}{\sqrt{-\frac{r_s}{r_s + \varepsilon} + \frac{r_s}{r}}} \quad (4.143)$$

En posant  $r = r_s + x$  on trouve, sachant que  $x$  et  $\varepsilon$  sont petits :

$$\Delta\tau = \int_0^\varepsilon \frac{dx}{\sqrt{-\frac{r_s}{r_s + \varepsilon} + \frac{r_s}{r_s + x}}} \approx \sqrt{r_s} \int_0^\varepsilon \frac{dx}{\sqrt{\varepsilon - x}} = 2\sqrt{r_s \varepsilon} \quad (4.144)$$

Donc l'énergie typique au point de création de la paire est  $\mathcal{E} = \frac{1}{2}\hbar/\sqrt{r_s \varepsilon}$ .

Par contre, cette énergie typique n'est pas  $p_0$ , l'énergie telle qu'elle apparaîtrait à un observateur éloigné, mais plutôt  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}$ , où  $\mathbf{u}$  est la quadrivitesse de la particule. Rappelons que  $p_0$  est conservé le long de la géodésique suivie par la particule. Le calcul ci-haut nous donne donc  $\mathcal{E} \approx p_0 u^0$ , car

la particule émise est supposée non relativiste en ce point d'émission ( $u^1 \ll u^0$ ). Il faut par contre calculer  $u^0$  en ce point. Or  $u^0 = \dot{t}$  et, selon l'équation correspondante de la géodésique,

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t} = k \quad k^2 - 1 = -\frac{r_s}{r_s + \varepsilon} \quad (4.145)$$

(la deuxième équation provient de l'équation ci-haut pour  $\dot{r}$  en posant un point de départ à  $r = r_s + \varepsilon$ ). Au premier ordre en  $\varepsilon$ , on trouve  $k \approx \sqrt{\varepsilon/r_s}$  et donc

$$u^0 = \frac{k}{1 - \frac{r_s}{r_s + \varepsilon}} \approx k \frac{r_s}{\varepsilon} = \sqrt{\frac{r_s}{\varepsilon}} \quad (4.146)$$

Donc en fin de compte

$$p_0 = \varepsilon / u^0 = \frac{1}{2} \hbar \frac{1}{\sqrt{\varepsilon r_s}} \sqrt{\frac{r_s}{\varepsilon}} = \frac{\hbar}{2r_s} = \frac{\hbar}{4M}, \quad (4.147)$$

un résultat indépendant de  $\varepsilon$ . L'énergie typique  $p_0$  pour un observateur situé à l'infini est donc

$$E = \frac{\hbar}{4M} \stackrel{\text{SI}}{=} \frac{\hbar c^3}{4GM} \quad (4.148)$$

N'oublions pas qu'il s'agit ici de l'énergie typique de la particule émise, et non d'une démonstration que le spectre d'énergie doit être celui du corps noir. Par contre, le résultat ci-dessus ne diffère que du résultat rigoureux (4.139) que par un facteur  $2\pi$ . La température de Hawking est en effet l'énergie typique des particules émises lors de ce rayonnement.

Remarquons que l'émission de paires particules-antiparticules n'est pas une nécessité : des photons peuvent aussi être émis (le photon est sa propre antiparticule). Le résultat (4.139) est en fait très général.

## 4.G.2 Évaporation du trou noir

La perte d'énergie du trou noir par rayonnement du corps noir mène à une décroissance de sa masse et sa disparition à échéance. L'énergie émise est donnée par la loi de Stefan-Boltzmann :

$$\frac{dM}{dt} = -\sigma T^4 A \quad \sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60 \hbar^3}, \quad A = 4\pi r_s^2 = 16\pi M^2 \quad (4.149)$$

On écrit aussi cette relation ainsi :

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{\alpha \hbar}{M^2} \quad \alpha := \frac{1}{15360\pi} \stackrel{\text{SI}}{=} \frac{c^4}{15360\pi G^2} = 3.76 \times 10^{49} \text{ kg}^2/\text{m}^2 \quad (4.150)$$

La solution à cette équation est

$$M(t) = [3\alpha \hbar (t_0 - t)]^{1/3} \quad (4.151)$$

où  $t_0$  est le temps de disparition du trou noir.

En fonction de la masse à  $t = 0$ , le temps de vie restant du trou noir est

$$t_0 = \frac{M^3}{3\alpha \hbar} \quad (4.152)$$



Dans la dernière seconde de son existence, un trou noir devrait émettre une énergie  $Mc^2$  équivalente à  $10^{22}$  joules. Une telle émission n'a jamais été observée.

Il est remarquable que plus un trou noir est léger (ou petit), plus il s'évapore rapidement. Un trou noir de la masse du soleil prendrait  $10^{67}$  ans à s'évaporer.<sup>5</sup> Pour qu'un trou noir s'évapore en 1 milliard d'années, il faudrait que son rayon soit de l'ordre de  $10^{-19}$ m, ou que sa masse soit de l'ordre de  $7 \times 10^7$  kg. L'évaporation d'un trou noir est un phénomène impliquant gravitation, thermodynamique et mécanique quantique, ce qui le rend extrêmement intéressant d'un point de vue fondamental, mais qui n'a jamais été observé.

**Entropie d'un trou noir** L'évaporation du trou noir à une certaine température nous permet de lui associer une entropie, en vertu de la relation thermodynamique  $dQ = T dS$ . La perte de chaleur  $dQ$  est simplement la perte d'énergie  $dM$  du trou noir. Comme la relation entre masse et surface de l'horizon est  $A = 4\pi r_s^2 = 16\pi M^2$ , on a  $dA = 32\pi M dM$ , ce qui peut être comparé à  $dS = dQ/T = dM(8\pi k_B M/\hbar)$ . Cela nous porte à conclure que l'entropie d'un trou noir est proportionnelle à la surface de son horizon :

$$S = \frac{k_B A}{4\hbar} \quad (4.153)$$

Rappelons que  $S$  a les unités de la constante de Boltzmann  $k_B$  et que, dans les unités géométriques,  $\hbar$  a les unités d'une surface.

Un trou noir qui s'évapore voit son entropie diminuer : elle est transférée à l'extérieur par rayonnement. Par contre, elle augmente lorsqu'il absorbe la matière environnante. En effet, pour que la deuxième loi de la thermodynamique soit applicable dans ce cas, il faut bien que l'entropie de la matière qui chute dans le trou noir soit subséquentement attribuée au trou noir lui-même, sinon la deuxième loi serait violée. Comme un observateur extérieur au trou noir n'a aucune information sur son contenu, on doit nécessairement attribuer l'entropie à l'horizon et non à ce qui l'a traversé au cours du temps.

Un trou noir n'est habituellement caractérisé que par quelques nombres : sa masse, son moment cinétique, sa charge électrique, etc. Par contre, plusieurs états initiaux ont pu donner naissance à ce trou noir, avant son implosion. L'entropie du trou noir est une caractérisation de cette multiplicité possible d'états initiaux. L'horizon du trou noir cache de l'information et l'entropie est précisément une mesure de l'information manquante.

---

5. Ceci néglige le fait que la température de Hawking d'un tel trou noir étant inférieure à celle du rayonnement fossile, le trou noir commencerait par absorber ce rayonnement avant de s'évaporer, une fois que le rayonnement fossile est devenu plus froid que le trou noir lui-même.

## H Problèmes

### Problème 4.1 surface d'une sphère

Montrez que, dans la métrique (4.14), l'aire de la surface définie par  $t = \text{cte}$  et  $r = \text{cte}$  est  $4\pi r^2$ .

### Problème 4.2 paradoxe des jumeaux

Nous allons étudier ici une version inhabituelle du paradoxe des jumeaux de Langevin. Alice et Béatrice (A et B) sont à bord d'une capsule en orbite autour de l'origine dans une géométrie de Schwarzschild, à un rayon  $R > 1.5r_s$ . À un moment donné, Béatrice sort de la capsule et se maintient au repos à l'aide de fusées d'appoint, et retourne dans la capsule après que cette dernière ait accompli une orbite complète.

**A** Montrez que le temps propre d'Alice écoulé pendant cette orbite est

$$\tau_A = 2\pi R \sqrt{\frac{R-3M}{M}} \quad (4.154)$$

**B** Si  $\tau_B$  est le temps propre de Béatrice pendant qu'Alice accomplit son orbite, montrez que

$$\frac{\tau_B}{\tau_A} = \sqrt{\frac{R-2M}{R-3M}} \quad (4.155)$$

Qu'en concluez-vous sur les âges biologiques respectifs d'Alice et de Béatrice?

### Problème 4.3 Force de marée près d'un trou noir

Dans ce problème, nous allons voir comment la force de marée affecte un astronaute en chute libre radiale vers un trou noir. Nous avons affirmé que la force de marée par unité de masse est déterminée par le tenseur de Riemann. Cependant, on peut montrer que, dans la métrique de Schwarzschild, cette force a exactement la même expression qu'en mécanique newtonienne, soit

$$F_{\text{mar.}} = \frac{2M}{r^3} \quad (4.156)$$

Nous allons supposer dans ce qui suit que le corps humain peut résister mécaniquement à une force de marée inférieure à  $400 \text{ s}^{-2}$ . Notez qu'il s'agit ici d'une force de marée par unité de longueur et par unité de masse, donc l'expression «force» n'est pas, strictement parlant, appropriée.

**A** Combien de «g» (gravité terrestre) cette force de marée maximale représente-t-elle entre les pieds et la tête d'un astronaute de 2 mètres de haut?

**B** À quelle coordonnée radiale  $r$  (en multiples de  $r_s$ ) l'astronaute est-il réduit en bouillie quand il tombe vers un trou noir de masse (i)  $M = 10^5 M_\odot$ , (ii)  $M = 10 M_\odot$  et (iii)  $M = 10^9 M_\odot$  (ce dernier cas représentant un trou noir supermassif) ? Supposez que le rayon gravitationnel du Soleil est de 3 km.

**C** Dans le cas d'un trou noir supermassif ( $M = 10^9 M_\odot$ ), combien de  $g$  la force de marée représente-t-elle pour cet astronaute quand il passe l'horizon ?

#### Problème 4.4 troisième loi de Kepler

Démontrez que la période  $T$  (en temps-coordonnée) d'une orbite circulaire de rayon  $r$  pour une particule massive dans la géométrie de Schwarzschild est

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{M}} \quad (4.157)$$

où  $M$  est la masse du centre d'attraction. Ce résultat est exactement le même qu'en mécanique newtonienne et constitue la troisième loi de Kepler.

#### Problème 4.5 orbite circulaire d'un photon

Un photon est en orbite circulaire de rayon  $r = 3M$  dans la métrique de Schwarzschild.

**A** Calculez la période de cette orbite pour un observateur situé à l'infini.

**B** Calculez la période de cette orbite pour un observateur stationnaire au même rayon que le photon.

#### Problème 4.6 théorème de Jebsen-Birkoff

**A** Obtenez les équations d'Einstein explicites dans le vide, dans le cas d'une métrique générale isotrope dépendant du temps. Vous devez pour cela calculer les composantes du tenseur de Ricci en supposant la forme générale

$$ds^2 = A(r, t) dt^2 - B(r, t) dr^2 - r^2(\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2)$$

Vous pouvez vous aider du calcul numérique, par exemple en modifiant légèrement le carnet python déjà utilisé dans la même situation sans dépendance en temps.

**B** Montrez que la solution à ce problème est la même que sans dépendance en temps. Autrement dit, montrez que la métrique à l'extérieur d'une distribution de masse isotrope dépendant du temps est la même que si cette distribution était concentrée en un point. Ceci constitue le théorème de Jebsen-Birkoff (1921 et 1923).

**C** Montrez que la métrique à l'intérieur d'une coquille sphérique dont la masse est distribuée de manière isotrope représente un espace plat.

**Problème 4.7 problème de Kepler relativiste**

Dans ce problème nous allons déterminer la trajectoire d'une particule relativiste de masse  $m$  dans un potentiel gravitationnel newtonien  $V(r) = -Mm/r$ . Nous allons supposer que le mouvement est entièrement compris dans le plan  $z = 0$  et utiliser les coordonnées polaires planes  $(r, \varphi)$ .

**A** Écrivez le lagrangien  $L$  en fonction de  $r$ ,  $\dot{r}$  et  $\dot{\varphi}$  (ici les points signifient des dérivées par rapport au temps  $t$ ). Obtenez une expression pour les moments conjugués  $p_r$  et  $p_\varphi$  et écrivez le hamiltonien  $H$  en fonction de  $p_r$ ,  $p_\varphi$  et  $r$ .

**B** Sachant que  $H = E$  et  $p_\varphi = \ell$  sont des constantes, obtenez une expression pour  $dr/d\varphi$  en fonction de  $r$  et des paramètres  $E$ ,  $\ell$ ,  $M$  et  $m$ .

**C** Montrez que les trajectoires ont la forme

$$r(\varphi) = \frac{r_0}{1 + e \cos(k\varphi)} \quad (4.158)$$

où

$$k = \sqrt{1 - \left(\frac{Mm}{\ell}\right)^2} \quad e^2 = 1 + \frac{k^2 \ell^2 (E^2 - m^2)}{(MmE)^2} \quad r_0 = \frac{k^2 \ell^2}{MmE} \quad (4.159)$$

Indice : le changement de variables  $u = 1/r$  est requis.

**D** Montrer que pour restaurer les unités non-géométriques dans ces formules, on doit procéder aux substitutions suivante :

$$M \rightarrow GM/c^2 \quad m \rightarrow mc^2 \quad \ell \rightarrow \ell c \quad (4.160)$$

**E** Écrivez les expressions de  $k$ ,  $e$  et  $r_0$  dans la limite non relativiste en fonction de l'énergie non relativiste  $\mathcal{E} = E - m$  et vérifiez que ces expressions sont identiques à ce qu'on obtient directement en mécanique classique non relativiste (consultez pour cela les références appropriées, par exemple d'autres notes de cours).

**F** Pour une particule faiblement relativiste, en orbite elliptique, quelle est l'avance  $\Delta\varphi$  du péri-centre par révolution? Exprimez-la en fonction de l'excentricité  $e$ , du demi-grand axe  $a$  de l'ellipse et de  $M$ .

**G** Considérez, au contraire, une particule en trajectoire hyperbolique extrême ( $e \gg 1$ ) dans le cas *non relativiste*. Exprimez l'angle de déviation  $\theta$  de cette particule en fonction de la distance  $R$  de plus petite approche au centre et de la vitesse à l'infini  $v$  de la particule. En appliquant ce résultat non relativiste à la lumière (!) passant à proximité du soleil, qu'obtient-on comme déviation, en secondes d'arc? C'est ce qu'Einstein a fait en 1907, obtenant un résultat deux fois trop petit par rapport à la prédiction ultérieure de la relativité générale.

**Problème 4.8 coordonnées de Lemaître**

**A** Soit un système de coordonnées dans lequel  $g_{00} = 1$  and  $g_{a0} = 0$ . Montrez que les lignes d'univers telles que  $x^a = \text{cte}$  ( $a = 1, 2, 3$ ) sont des géodésiques.

**B** Les coordonnées de Lemaître  $(\tau, \rho)$  sont reliées aux coordonnées  $(t, r)$  utilisées dans la géométrie de Schwarzschild par les relations différentielles suivantes :

$$d\tau = dt + \sqrt{\frac{r_s}{r}} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr \quad d\rho = dt + \sqrt{\frac{r}{r_s}} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr \quad (4.161)$$

Montrez que l'élément d'intervalle dans ces coordonnées est

$$ds^2 = d\tau^2 - \frac{r_s}{r} d\rho^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad \text{où} \quad r = \left[\frac{3}{2}(\rho - \tau)\right]^{2/3} r_s^{1/3} \quad (4.162)$$

**C** Montrez que les courbes à  $\rho$ ,  $\theta$  et  $\varphi$  constants sont des géodésiques et correspondent à des particules partant du repos à  $r \rightarrow \infty$  et tombant vers la singularité à  $r = 0$  et que  $\tau$  est le temps propre le long de ces géodésiques.

**Problème 4.9 Coordonnées de Painlevé-Gullstrand**

**A** Une particule massive est relâchée du repos à l'infini dans la métrique de Schwarzschild. Montrez que le mouvement de la particule décrit la relation suivante entre le temps  $t$  et la coordonnée radiale  $r$  :

$$t = T + \int_r^\infty \sqrt{\frac{r_s}{x}} \frac{dx}{1 - \frac{r_s}{x}} \quad (4.163)$$

**B** Considérons la relation ci-dessus comme une définition de la fonction  $T(t, r)$ . Montrez que les composantes covariantes de la 4-vitesse de cette particule en chute libre sont  $u_i = \partial_i T$ . Quel est le sens physique de l'hypersurface  $T = \text{cte}$  et quel est son vecteur normal?

**C** Considérons maintenant  $T$  comme une coordonnée qui remplace  $t$ , c'est-à-dire travaillons dans le système de coordonnées  $(T, r, \theta, \varphi)$ . Calculez le tenseur métrique  $g_{ij}$ , ainsi que sa forme contravariante  $g^{ij}$ , dans ce nouveau système. La métrique est-elle singulière à l'horizon  $r = r_s$  dans ce nouveau système? Les coordonnées  $(T, r)$  sont appelées coordonnées de Painlevé-Gullstrand. <sup>a</sup>

**D** Un horizon des événements existe-t-il encore à  $r = r_s$  dans cette métrique?

**E** Montrez que l'élément de temps propre prend la forme suivante

$$d\tau^2 = dT^2 - \left(dr + dT \sqrt{\frac{r_s}{r}}\right)^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (4.164)$$

et que par conséquent : (i) la coordonnée  $T$  a l'interprétation du temps propre d'une particule en chute libre issue de l'infini et (ii) que la vitesse de chute de cette particule est

$$\frac{dr}{dT} = \frac{dr}{d\tau} = -\sqrt{\frac{r_s}{r}} \quad (4.165)$$

Cette vitesse de chute est aussi appelée *vitesse d'écoulement de l'espace*.

*a.* Paul Painlevé obtint cette métrique en 1921 comme solution aux équations d'Einstein, solution en apparence différente de celle de Schwarzschild, et confronta Einstein à cette solution lors de la visite de ce dernier à Paris en 1922. Ni Painlevé ni Einstein ne s'aperçurent à l'époque qu'il ne s'agissait que d'un système de coordonnées différent décrivant la même solution. Einstein refusa même de reconnaître que cette solution était valable, en raison semble-t-il des termes croisés en  $dr dT$ . C'est Georges Lemaître qui démontra l'équivalence des deux solutions en 1931. Paul Painlevé est surtout connu par sa carrière politique : il fut deux fois président du conseil (premier ministre) de la République française, en 1917 et en 1925. Gullstrand était un physiologiste-opticien suédois, prix Nobel de physiologie et féru de mathématiques, qui obtint la même solution en 1922. Apparemment, Gullstrand croyait que la théorie de la relativité était fautive et usa de son influence pour que le prix Nobel ne soit pas attribué à Einstein sur cette base.

#### **Problème 4.10 coordonnées de Kruskal-Szekeres**

Vérifiez que la métrique (4.129) donne bien la métrique de Schwarzschild lorsqu'on applique la transformation (4.127). N'utilisez pas la règle de transformation des tenseurs ; calculez plutôt directement les différentielles  $du$  et  $dv$  en fonction de  $dt$  et  $dr$ .

## CHAPITRE 5

# GÉOMÉTRIE DE KERR

Rares sont les géométries qui peuvent être déduites analytiquement des équations d'Einstein. Le cas important de la géométrie autour d'une masse en rotation a longtemps été étudié, mais n'a été solutionné qu'en 1963 par le théoricien néo-Zélandais Roy P. Kerr (1934/—). Ce chapitre est consacré à une description de cette géométrie. Comme les trous noirs réels sont présumés en rotation, cette géométrie est en pratique plus pertinente que celle de Schwarzschild, quoiqu'elle s'approche de cette dernière dans la limite des petits moments cinétiques.

### A Métrique de Kerr

La solution de Schwarzschild décrit la géométrie issue d'une masse au repos à l'origine, sans mouvement de rotation. Si, au contraire, la masse possède un mouvement de rotation, donc un moment cinétique, la métrique de Schwarzschild n'est plus valable en principe. La raison est que nous avons supposé, en démontrant la métrique de Schwarzschild, qu'elle était isotrope, alors qu'un corps en rotation définit un axe privilégié. De plus, la métrique produite par un corps en rotation va briser l'invariance sous inversion du temps  $t \rightarrow -t$ , tout en étant stationnaire, c'est-à-dire indépendante du temps, car l'inversion du temps change le sens de la rotation. On s'attend donc à ce qu'une telle métrique comporte des composantes mixtes  $g_{0a}$  ( $a = 1, 2, 3$ ). Dans le cas d'un objet en rotation autour de l'axe des  $z$ , cela laisse la porte ouverte à une composante  $g_{t\varphi}$  dans la métrique. Un tel terme reste inchangé si on procède simultanément à une inversion du temps et de l'angle  $\varphi : (t, \varphi) \rightarrow (-t, -\varphi)$ .

La métrique générale dans une telle situation peut être ramenée à la forme suivante :

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + g_{rr} dr^2 + g_{\theta\theta} d\theta^2 + g_{\varphi\varphi} d\varphi^2 + 2g_{t\varphi} dt d\varphi \quad (5.1)$$

(le facteur 2 du dernier terme tient compte de la symétrie  $g_{t\varphi} = g_{\varphi t}$ ). Toutes ces composantes du tenseur métrique sont à priori des fonctions de  $r$  et de  $\theta$ , car nous n'avons pas de symétrie sphérique complète : seulement une symétrie de rotation azimutale ; on dit aussi que le système est *axisymétrique*.

On peut récrire cette métrique sous la forme suivante :

$$ds^2 = \left( g_{tt} - \frac{g_{t\varphi}^2}{g_{\varphi\varphi}} \right) dt^2 + g_{rr} dr^2 + g_{\theta\theta} d\theta^2 + g_{\varphi\varphi} (d\varphi - \omega dt)^2 \quad (5.2)$$

ce qui permet de mettre en évidence une vitesse angulaire  $\omega(r, \theta) = -g_{t\varphi}/g_{\varphi\varphi}$ .

### 5.A.1 Entraînement des repères

**Lois de conservation** L'homogénéité dans le temps de cette métrique entraîne la conservation de l'énergie, et la symétrie de rotation azimutale la conservation de la composante en  $z$  du moment cinétique. Considérons à cet effet l'action d'une particule de masse unité se déplaçant dans cette métrique :

$$S = \int L(x, \dot{x}) d\tau = \frac{1}{2} \int (g_{tt} dt^2 + g_{rr} dr^2 + g_{\theta\theta} d\theta^2 + g_{\varphi\varphi} d\varphi^2 + 2g_{t\varphi} dt d\varphi) \quad (5.3)$$

Le fait que le lagrangien ne dépende ni de  $t$ , ni de  $\varphi$  entraîne que les moments conjugués correspondants sont conservés :

$$p_t = k = g_{tt} \dot{t} + g_{t\varphi} \dot{\varphi} \quad p_\varphi = h = g_{t\varphi} \dot{t} + g_{\varphi\varphi} \dot{\varphi} \quad (5.4)$$

**Entraînement des repères** Considérons une particule qui est relâchée de l'infini avec un moment cinétique nul. À l'infini, cela correspond à  $\dot{\varphi} = 0$ , car très loin on peut supposer que  $g_{t\varphi} \ll g_{\varphi\varphi} \approx r^2$ . Au fur et à mesure que cette particule s'approche du centre, elle conserve sa valeur de  $h$  et donc elle doit éventuellement acquérir une vitesse angulaire non nulle :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{t}} = -\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} = \omega(r, \theta) \quad (5.5)$$

La particule possède donc une vitesse angulaire sans moment cinétique! Ce phénomène porte le nom d'*entraînement des repères* (angl. *frame dragging*), car l'objet massif en rotation entraîne l'espace-temps dans sa rotation.

### 5.A.2 Métrique de Kerr

La solution des équations d'Einstein pour une métrique de la forme (5.1) n'est pas une mince affaire. Elle fut trouvée par R.P. Kerr en 1963 :<sup>1</sup>

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r r_s}{\rho^2}\right) dt^2 + \frac{2a r r_s \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\varphi - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{a^2 r r_s \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (5.6)$$

où on a défini

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad \Delta = r^2 + a^2 - r r_s \quad (5.7)$$

Les deux paramètres  $r_s$  et  $a$  paramétrisent la solution et ont tous les deux les unités d'une longueur. Une forme alternative de la métrique de Kerr souvent utilisée est la suivante :

$$ds^2 = \left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) dt^2 + \frac{2a r r_s \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\varphi - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \frac{\Sigma^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} d\varphi^2 \quad (5.8)$$

1. Voir [cet article](#).



où on a défini

$$\Sigma^2 = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta \quad (5.9)$$

Les coordonnées utilisées ici pour décrire la métrique de Kerr portent le nom de *coordonnées de Boyer-Lindquist*.

Les expressions ci-dessus définissent les composantes covariantes de la métrique. Nous avons à l'occasion besoin des composantes contravariantes :

$$g^{rr} = -\frac{\Delta}{\rho^2} \quad g^{\theta\theta} = -\frac{1}{\rho^2} \quad (5.10)$$

Comme la métrique n'est pas diagonale, la forme de  $g^{tt}$  et de  $g^{\varphi\varphi}$  n'est pas immédiatement évidente :

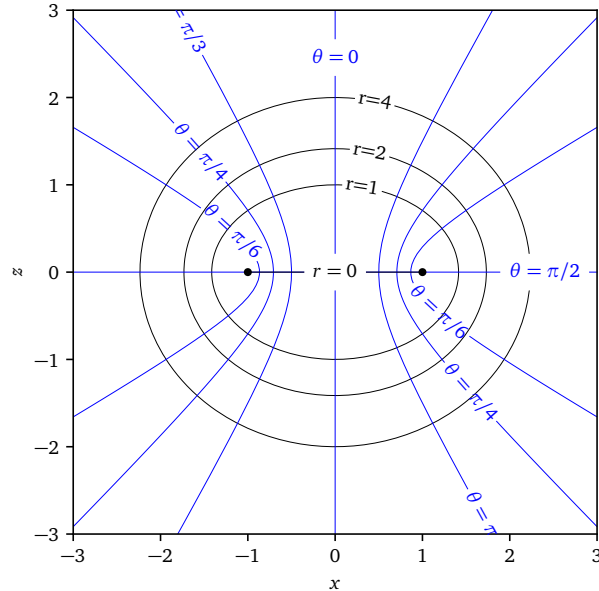
$$g^{tt} = \frac{a^2 r r_s \sin^2 \theta + \rho^2 (a^2 + r^2)}{\rho^2 \Delta} \quad g^{t\varphi} = \frac{a r r_s}{\rho^2 \Delta} \quad g^{\varphi\varphi} = \frac{2 r r_s - \rho^2}{\rho^2 \Delta \sin^2 \theta} \quad (5.11)$$

### 5.A.3 Cas limites de la métrique de Kerr

Premièrement, dans la limite  $a \rightarrow 0$ , la métrique de Kerr se réduit à la métrique de Schwarzschild, comme on le voit facilement en partant de la forme (5.6). Cela suggère fortement que le paramètre  $r_s$  doit être identifié à  $2M$ ,  $M$  étant la masse du trou noir.

**FIGURE 5.1**

Courbes à  $r$  constant et  $\theta$  constant dans le plan  $xz$ , illustrant le sens des coordonnées de Boyer-Lindquist. Notez que la courbe  $r = 0$  est un segment limité par  $x = \pm 1$ , alors que la courbe  $\theta = \pi/2$  est composée de deux segments disjoints limités aussi par  $x = \pm 1$ . Les deux points indiqués correspondent donc à  $(r, \theta) = (0, \pi/2)$ .



Par contre, cette limite  $a \rightarrow 0$  pourrait nous faire croire que les coordonnées  $(r, \theta)$  sont les mêmes que les coordonnées correspondantes de Schwarzschild, ce qui n'est pas le cas. Pour interpréter correctement ces coordonnées, il faut prendre la limite  $r_s \rightarrow 0$  (ou  $M \rightarrow 0$ ), ce qui devrait donner la géométrie de Minkowski pour l'espace plat. On trouve :

$$ds^2 = dt^2 - \frac{\rho^2}{r^2 + a^2} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (5.12)$$

Ceci démontre que nous n'avons pas affaire aux coordonnées sphériques habituelles, en dépit de la notation utilisée. On démontre facilement que la relation avec les coordonnées cartésiennes habituelle est la suivante :

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \cos \varphi \\y &= \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \sin \varphi \\z &= r \cos \theta\end{aligned}\tag{5.13}$$

Les surfaces à  $r$  constant sont des ellipsoïdes oblongs :

$$\frac{x^2 + y^2}{r^2 + a^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1\tag{5.14}$$

En particulier, si  $r = 0$ , l'ellipsoïde en question est un disque de rayon  $a$ . Les surfaces à  $\theta$  fixe sont des hyperboloïdes de révolution autour de l'axe des  $z$  :

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2 \sin^2 \theta} - \frac{z^2}{a^2 \cos^2 \theta} = 1\tag{5.15}$$

La figure 5.1 illustre ces surfaces dans le plan  $y = 0$ .<sup>2</sup>

**limite**  $r \gg r_s$  Si  $r$  est grand, alors  $\rho \approx r$ ,  $\Delta \approx r^2$  et la métrique de Kerr se réduit à

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \frac{2r_s a \sin \theta}{r} dt d\varphi - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2\tag{5.16}$$

Dans la limite non relativiste, on identifie la masse  $M$  de l'objet central au coefficient de  $2/r$  dans  $g_{tt}$ , soit  $r_s/2$ , comme dans la solution de Schwarzschild. Par contre, dans cette limite asymptotique, il existe toujours une composante de la métrique selon  $d\varphi dt$ , qu'on pourrait si on veut exprimer en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{2r_s a \sin \theta}{r} dt d\varphi = \frac{2r_s a}{r^3} dt(x dy - y dx)\tag{5.17}$$

On peut montrer que le moment cinétique de l'objet central est<sup>3</sup>

$$J = \frac{1}{2} r_s a = M a\tag{5.18}$$

On vérifie que, dans les unités géométriques,  $J$  a les unités d'une surface. La vitesse angulaire  $\omega$  devient, dans cette limite,

$$\omega \approx \frac{2J}{r^3}\tag{5.19}$$

2. Dans le plan  $(x, z)$ , ces coordonnées sont équivalentes aux coordonnées elliptiques définies par  $x = a \cosh u \sin \theta$  et  $z = a \sinh u \cos \theta$ . La relation entre  $u$  et  $r$  est simplement  $a \cosh u = \sqrt{r^2 + a^2}$ . Lorsqu'on augmente ce système d'une coordonnée azimutale dans la troisième dimension, on obtient les *coordonnées sphéroïdales aplaties*.

3. Ceci n'est pas une mince tâche, en fait. Une façon d'y arriver en d'utiliser le formalisme ADM (Arnowitt-Deser-Misner), un formalisme hamiltonien de la relativité générale, dans lequel on sacrifie la covariance explicite des équations afin de définir une coordonnée temporelle ayant un statut particulier. Ensuite, on peut définir des quantités conservées comme on le fait habituellement en mécanique hamiltonienne des systèmes continus, via le théorème de Noether. On peut via ce formalisme obtenir une expression pour la densité de moment cinétique qu'on peut intégrer sur tout l'espace afin de trouver le moment cinétique total. Notons que ce formalisme ADM est couramment utilisé dans la relativité numérique, c'est-à-dire la discipline qui cherche à résoudre les équations d'Einstein à l'aide de superordinateurs. Une preuve partielle, mais beaucoup plus simple, s'obtient en se plaçant dans la limite des champs faibles, donc loin de l'origine, et de considérer une source non relativiste en rotation. Voir le problème 6.4.

### 5.A.4 singularités de la métrique de Kerr

La métrique de Kerr possède des singularités évidentes à  $\rho = 0$  et  $\Delta = 0$ . Reste à savoir si ces singularités relèvent des coordonnées utilisées ou de la géométrie sous-jacente. Le calcul de l'invariant  $R^{ijkl}R_{ijkl}$  montre que la singularité à  $\rho = 0$  est intrinsèque à la géométrie, alors que la singularité à  $\Delta = 0$  est une propriété des coordonnées de Boyer-Lindquist.

Une autre façon de le constater est de considérer la limite  $a \rightarrow 0$ . La singularité  $\rho = 0$  se réduit alors à  $r = 0$  et correspond donc à la singularité géométrique de la solution de Schwarzschild, alors que  $\Delta = 0$  se réduit dans cette limite à  $r = r_s$  et définit plutôt un horizon.

La singularité physique  $\rho = 0$  est atteinte quand  $r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0$ , soit quand  $r = 0$  et  $\theta = \pi/2$ . Il faut cependant prendre garde de conclure qu'il s'agit d'un point! D'après notre expérience avec les coordonnées de Boyer-Lindquist (voir fig. 5.1), cette condition définit un *anneau de rayon a* dans le plan équatorial.

**horizons d'événements** Par contre, la singularité de coordonnées à  $\Delta = 0$ , c'est-à-dire à  $r^2 - r r_s + a^2 = 0$ , définit deux surfaces à  $r$  constant, soit

$$r_{\pm} = \frac{1}{2} \left( r_s \pm \sqrt{r_s^2 - 4a^2} \right) = M \pm \sqrt{M^2 - a^2} \quad (5.20)$$

Ces surfaces sont des ellipsoïdes, comme indiqué plus haut. Comme  $g^{rr} = -\Delta/\rho^2$ , ces ellipsoïdes sont des horizons d'événements ( $g^{rr} = 0$ ). Par contre, ce ne sont pas des surfaces à décalage infini. La métrique de Kerr possède donc *deux* horizons au lieu d'un seul comme la métrique de Schwarzschild.

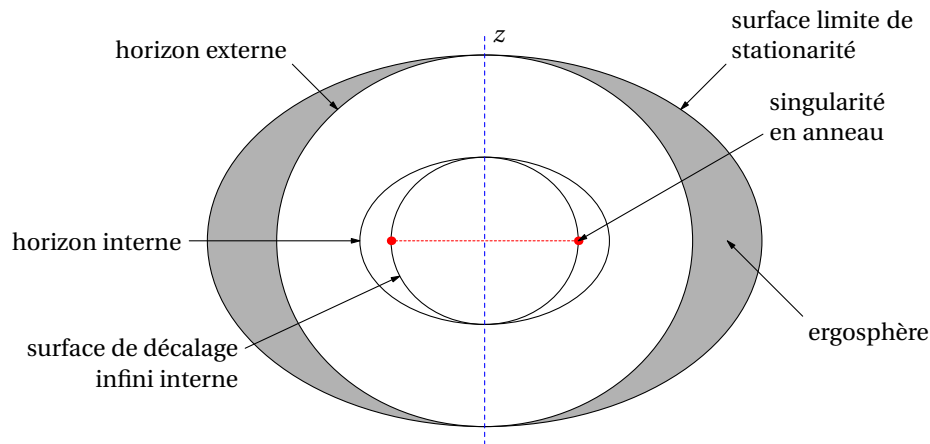


FIGURE 5.2  
Structure d'un trou noir de Kerr.

**Trous noirs extrêmes et censure cosmique** On constate que l'horizon de la métrique de Kerr disparaît si  $a > M$ , car alors il n'y a pas de valeur réelle de  $r$  possible pour cet horizon. Dans ce cas, la métrique de Kerr ne décrirait plus un trou noir et la singularité intrinsèque de la métrique à  $r = 0$  serait visible de l'extérieur. Ce genre de situation est considérée comme impossible par plusieurs auteurs, notamment S. Hawking et Roger Penrose. En fait, les équations d'évolution de la métrique (les équations d'Einstein) ne peuvent pas être appliquées à

une singularité intrinsèque : les équations sont singulières en ce point et donc imprévisibles. Pour pallier ce problème, on invoque l'hypothèse de la *censure cosmique* (angl. *cosmic censorship*), selon laquelle les singularités *nues*, c'est-à-dire non cachées par un horizon d'événements, sont interdites ou impossibles. Cette hypothèse entraîne donc une moment cinétique maximal pour un trou noir de Kerr :  $J_{\max} = M^2$ . Les trous noirs de Kerr approchant cette limite sont qualifiés d'*extrêmes*. On croit que la plupart des trous noirs existants sont extrêmes. Ceci serait dû au mécanisme de formation de ces trous noirs, par lequel de la matière externe possédant un moment cinétique est progressivement absorbée.

**Surfaces limites de stationnarité** Considérons un rayon lumineux émis dans la direction azimutale, c'est-à-dire tel que  $dr = d\theta = 0$ . Comme  $ds^2 = 0$ , on trouve une relation entre  $d\varphi$  et  $dt$  :

$$0 = ds^2 = g_{tt} dt^2 + g_{\varphi\varphi} d\varphi^2 + 2g_{t\varphi} dt d\varphi \quad (5.21)$$

On peut résoudre cette équation quadratique pour  $d\varphi$  étant donné un  $dt$  et trouver l'expression suivante pour la vitesse angulaire de la lumière :

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}}\right)^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}}} \quad (5.22)$$

Loin du trou noir, comme  $g_{tt} > 0$  et  $g_{\varphi\varphi} < 0$ , les deux racines sont les suivantes :

$$\Omega_+ = \omega + \sqrt{\omega^2 + \left|\frac{g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}}\right|} > 0 \quad (5.23)$$

$$\Omega_- = \omega - \sqrt{\omega^2 + \left|\frac{g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}}\right|} < 0 \quad (5.24)$$

La première solution décrit un rayon en co-rotation (c'est-à-dire dans le même sens que l'objet) alors que la deuxième solution décrit un rayon en contre-rotation. La métrique de Kerr comporte une valeur de  $r$  telle que  $g_{tt} = 0$ . En ce point,  $\Omega_+ = 2\omega$  et  $\Omega_- = 0$ . Autrement dit, un photon peut être ralenti au point d'être au repos! Dans la métrique de Kerr,  $g_{tt}$  ne s'annule pas en même temps que  $g_{rr}$  diverge. Notons que nous ne sommes pas en train ici de démontrer que les photons suivent des trajectoires circulaires : ceci n'est pas un calcul de géodésique nulle. Il faut plutôt penser à un objet qui émet de la lumière dans toutes les directions tout en tombant dans le trou noir. La lumière émise dans la direction azimutale est ce qui nous intéresse ici. La surface où  $\Omega_- = 0$  est appelée *surface limite de stationnarité*. Si l'objet tombe plus en avant, alors  $g_{tt}$  change de signe, et les deux fréquences angulaires sont du même signe :

$$\Omega_+ = \omega + \sqrt{\omega^2 - \left|\frac{g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}}\right|} > 0 \quad (5.25)$$

$$\Omega_- = \omega - \sqrt{\omega^2 - \left|\frac{g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}}\right|} > 0 \quad (5.26)$$

Autrement dit, même la lumière est entraînée par ce tourbillon et ne peut pas être émise dans la direction contraire à la rotation. On voit que la surface limite de stationnarité est aussi une surface à décalage infini, car la condition  $g_{tt} = 0$  y est respectée.

**surface à décalage infini** Les surfaces à décalage infini sont obtenues en posant  $g_{tt} = 0$ , soit

$$r r_s = \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (5.27)$$

Les solutions à cette équation sont

$$r = s_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta} \quad (5.28)$$

Il y a donc deux ellipsoïdes à décalage infini, définis par  $s_+$  et  $s_-$ . La surface à  $s_+$  coïncide avec la surface limite de stationnarité décrite ci-dessus. Elle est extérieure au premier horizon, de rayon  $r_+$ , mais le touche aux pôles. La deuxième surface, à  $s_-$ , est intérieure au deuxième horizon, à  $r_-$  et lui touche aux pôles. Elle touche aussi à la singularité géométrique en anneau. Voir la figure 5.2 à cet effet.

## B Ergosphère et processus de Penrose

**ergosphère** Une caractéristique intéressante de la métrique de Kerr est l'existence d'une région extérieure au premier horizon,  $r_+$  mais intérieure à la première surface de décalage infini. On appelle cette région l'*ergosphère*, c'est-à-dire «région capable de produire un travail». Expliquons pourquoi.

Considérons un observateur fixe à l'infini qui lance une particule A dans le trou noir de Kerr. À l'émission, la particule possède une énergie  $E^{(A)} = \mathbf{p}^{(A)} \cdot \mathbf{u}$  où  $\mathbf{u}$  est la quadri-vitesse de l'observateur, soit  $(1, 0, 0, 0)$  et  $\mathbf{p}^{(A)}$  le vecteur énergie-impulsion de la particule.

La particule pénètre ensuite l'ergosphère et, en un point D de celle-ci, se désintègre en deux autres particules B et C. La conservation de l'énergie impose alors

$$\mathbf{p}^{(A)}(D) = \mathbf{p}^{(B)}(D) + \mathbf{p}^{(C)}(D) \quad (5.29)$$

Si la particule C est émise vers l'extérieur, elle peut atteindre un observateur stationnaire à l'infini qui mesurera son énergie et trouvera qu'elle est la même qu'au point D, en raison justement de la conservation de l'énergie dans la métrique de Kerr, c'est-à-dire la conservation de la composante covariante du vecteur d'énergie-impulsion. Au total, la conservation de l'énergie impose que

$$E^{(C)} = E^{(A)} - p_t^{(B)}(D) \quad (5.30)$$

La partie cruciale du raisonnement est la suivante. Supposons premièrement que la particule B ressorte aussi de l'ergosphère. L'énergie de la particule B est en fait le produit  $\mathbf{p}^{(B)} \cdot \mathbf{e}_t$ , où  $\mathbf{e}_t$  est le vecteur de base du plan co-tangent. Le carré de ce vecteur est, par définition,  $\mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_t = g_{tt}$  et donc ce vecteur est du genre temps à l'extérieur de l'ergosphère. Dans ce cas, la particule B a une énergie positive ( $\mathbf{p}^{(B)} \cdot \mathbf{e}_t > 0$ ) et  $E^{(C)} < E^{(A)}$ .

Si, au contraire, la particule B tombe dans le trou noir, elle demeure dans une région où  $g_{tt} < 0$ , donc où  $\mathbf{e}_t$  est de genre espace. Dans ce cas  $p_t(B)$  peut être négatif, car il est le produit d'un 4-vecteur par un vecteur de genre espace et le résultat pourrait être une composante quelconque de la 3-impulsion

de la particule  $\mathbf{p}(B)$  qui peut aussi bien être positive que négative. Dans le cas où cette composante est négative, alors  $E^{(C)} > E^{(A)}$  et nous avons extrait de l'énergie du trou noir!

Par contre, le trou noir ayant avalé cette particule, sa masse et son moment cinétique ont changé :

$$M \rightarrow M + p_t^{(B)} \quad J \rightarrow J - p_\varphi^{(B)} \quad (5.31)$$

Le signe  $-$  dans la dernière équation vient du fait que la composante du moment cinétique d'une particule le long de l'axe du trou noir est  $-p_\varphi$ . La masse du trou noir a donc diminué (on suppose que  $p_t^{(B)} < 0$ ), ainsi que son moment cinétique. À force d'user de ce processus, on épuise le trou noir de Kerr, qui pourrait finir en trou noir de Schwarzschild. À ce moment le processus de Penrose devient impossible, car l'ergosphère disparaît.

## C Géodésiques équatoriales dans la métrique de Kerr

Les géodésiques dans la métrique de Kerr sont plus complexes à obtenir que dans la métrique de Schwarzschild, car la métrique est moins symétrique. Par exemple, on ne s'attend pas à ce que les orbites soient contenues dans un plan, sauf s'il s'agit du plan équatorial, car seule une composante du moment cinétique est conservée.

Il reste que nous disposons de deux intégrales du mouvement. Dans le plan équatorial ( $\theta = \pi/2$ ), celles-ci s'expriment ainsi :

$$p_t = g_{tt} \dot{t} + g_{t\varphi} \dot{\varphi} = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t} + \frac{ar_s}{r} \dot{\varphi} = k \quad (5.32)$$

$$p_\varphi = g_{t\varphi} \dot{t} + g_{\varphi\varphi} \dot{\varphi} = \frac{ar_s}{r} \dot{t} - \left(r^2 + a^2 + \frac{a^2 r_s}{r}\right) \dot{\varphi} = -h \quad (5.33)$$

On peut inverser ce système d'équations et exprimer  $\dot{t}$  et  $\dot{\varphi}$  en fonction des quantités conservées :

$$\begin{aligned} \dot{t} &= \frac{1}{\Delta} \left[ \left( r^2 + a^2 + \frac{a^2 r_s}{r} \right) k - \frac{ar_s}{r} h \right] \\ \dot{\varphi} &= \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{ar_s}{r} k + \left( 1 - \frac{r_s}{r} \right) h \right] \end{aligned} \quad (5.34)$$

Une autre équation utile provient de la norme fixe de la 4-impulsion :  $g^{ij} p_i p_j = 1$  (pour une particule massive) ou  $g^{ij} p_i p_j = 0$  (pour une particule sans masse). Comme on suppose ici que  $p_\theta = 0$ , ceci se réduit à

$$g^{tt} p_t^2 + 2g^{t\varphi} p_t p_\varphi + g^{\varphi\varphi} p_\varphi^2 + g^{rr} p_r^2 = \epsilon \quad (5.35)$$

où le symbole  $\epsilon$  vaut 1 pour une particule massive et zéro pour une particule sans masse. En substituant les composantes contravariantes de la métrique et les quantités conservées  $p_t$  et  $p_\varphi$ , on trouve

$$\dot{r}^2 = k^2 - \epsilon \left( 1 - \frac{r_s}{r} \right) + \frac{a^2(k^2 - \epsilon) - h^2}{r^2} + \frac{r_s(h - ak)^2}{r^3} \quad (5.36)$$

En principe, cette relation nous permet de trouver un potentiel effectif radial. Dans le cas d'une particule massive ( $\epsilon = 1$ ), ce potentiel effectif est

$$V_{\text{eff}} = -\frac{r_s}{2r} + \frac{h^2 - a^2(k^2 - 1)}{2r^2} - \frac{r_s(h - ak)^2}{2r^3} \quad (5.37)$$

Heureusement, ce potentiel a la même forme que pour la métrique de Schwarzschild. Les deux derniers termes ont des coefficients plus complexes, mais on retrouve le résultat (4.64) dans la limite  $a \rightarrow 0$ . On peut de cette expression tirer des conclusions sur la stabilité des orbites circulaires, etc.

## D Effet Lense-Thirring

Nous avons vu à la page 105 comment un gyroscope précesse le long d'une orbite équatoriale circulaire dans la métrique de Schwarzschild. Ce mouvement de précession est essentiellement un effet du décalage gravitationnel des fréquences. Dans la métrique de Kerr, ce mouvement comporte une composante supplémentaire, due à l'entraînement des repères. Cette composante porte le nom d'*effet Lense-Thirring* et la fréquence de précession correspondante dépend de la position du gyroscope par rapport au moment cinétique de l'objet central. La vitesse angulaire de précession  $\Omega$  a les composantes suivantes :

$$\Omega^k = \frac{1}{r^3} \left( J^k - 3 \frac{(\mathbf{J} \cdot \mathbf{r}) x^k}{r^2} \right) \stackrel{\text{SI}}{=} \frac{G}{c^2 r^3} \left( J^k - 3 \frac{(\mathbf{J} \cdot \mathbf{r}) x^k}{r^2} \right) \quad (5.38)$$

Ainsi, le long de l'axe de  $\mathbf{J}$ , la fréquence de précession additionnelle est  $-2J/r^3$ . Au contraire, le long de l'équateur (perpendiculairement à  $\mathbf{J}$ ), la fréquence de précession est  $J/r^3$ .

Afin de démontrer cette relation, nous allons supposer que l'objet central est en rotation lente, c'est-à-dire que nous n'allons conserver dans la métrique de Kerr que les termes au premier ordre en  $a$ . On constate facilement que, dans ce cas,

$$ds^2 = ds^2 \Big|_{\text{Schwarz.}} + \frac{4Ma}{r} \sin^2 \theta dt d\varphi \quad (5.39)$$

où le premier terme représente la métrique de Schwarzschild. Pour nous faciliter la vie davantage, nous allons aussi supposer que le rapport  $M/r$  est petit, de sorte que la métrique complète, dans cette approximation, devient

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{r_s}{r}\right) dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{4Ma}{r} \sin^2 \theta dt d\varphi \quad (5.40)$$

Considérons maintenant un gyroscope en orbite équatoriale, comme à la page 4.C et suivantes. Le vecteur moment cinétique  $\mathbf{s}$  du gyroscope est gouverné par l'équation (4.94) :

$$\dot{s}^i + \Gamma_{jk}^i s^j \dot{x}^k = 0 \quad (5.41)$$

La connexion affine peut-être calculée au premier ordre en  $M$  ; les composantes non nulles dans le plan équatorial ( $\theta = \pi/2$ ) sont les suivantes (il est sous-entendu que  $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$ ) :

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 = \Gamma_{00}^1 = -\Gamma_{11}^1 &= \frac{M}{r^2} & \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{33}^1 &= 2M - r \\ \Gamma_{13}^0 &= -\frac{2Ma}{r^2} & \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r} \\ \Gamma_{03}^1 &= -\frac{Ma}{r^2} & \Gamma_{01}^3 &= \frac{Ma}{r^4} \end{aligned} \quad (5.42)$$

Il est recommandé de vérifier ce calcul à l'aide d'un manipulateur symbolique (ex SymPy), dans lequel le développement au premier ordre en  $M$  est effectué au fur et à mesure afin d'alléger les calculs.

Les composantes de la quadri-vitesse sont  $u = u^0(1, 0, 0, \omega)$  et les équations pertinentes sont :

$$\begin{aligned} \dot{s}^1 + \Gamma_{00}^1 s^0 u^0 + \Gamma_{03}^1 s^0 u^3 + \Gamma_{30}^1 s^3 u^0 + \Gamma_{33}^1 s^3 u^3 &= 0 \\ \dot{s}^3 + \Gamma_{10}^3 s^1 u^0 + \Gamma_{13}^3 s^1 u^3 &= 0 \end{aligned} \quad (5.43)$$

Sachant que  $u^3 = \omega u^0$ , on peut regrouper des termes :

$$\begin{aligned} \dot{s}^1 + u^0 s^0 (\Gamma_{00}^1 + \omega \Gamma_{03}^1) + u^0 s^3 (\Gamma_{30}^1 + \omega \Gamma_{33}^1) &= 0 \\ \dot{s}^3 + u^0 s^1 (\Gamma_{10}^3 + \omega \Gamma_{13}^3) &= 0 \end{aligned} \quad (5.44)$$

La condition d'orthogonalité  $s \cdot u = 0$  nous permet d'éliminer  $s^0$ . Au premier ordre en  $M$ ,

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) u^0 s^0 - r^2 s^3 u^3 = 0 \implies s^0 = s^3 \omega r^2 \left(1 + \frac{2M}{r}\right) \quad (5.45)$$

On peut alors écrire le système suivant, n'impliquant que  $s^1$  et  $s^3$  :

$$\begin{aligned} \dot{s}^1 - s^3 u^0 \left[ (r - 3M)\omega + \frac{Ma}{r^2} + Ma\omega^2 \right] &= 0 \\ \dot{s}^3 + s^1 u^0 \left( \frac{\omega}{r} + \frac{Ma}{r^4} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (5.46)$$

En dérivant la première équation par rapport au temps propre et en y substituant  $\dot{s}^3$  à partir de la deuxième équation, on trouve

$$\ddot{s}^1 + s^1 (u^0)^2 \left( \frac{\omega}{r} + \frac{Ma}{r^4} \right) \left[ (r - 3M)\omega + \frac{Ma}{r^2} + Ma\omega^2 \right] = 0 \quad (5.47)$$

Comme  $u^0 = dt/d\tau$ , on peut éliminer  $u^0$  en exprimant cette équation en fonction du temps  $t$  :

$$\frac{d^2 s^1}{dt^2} + s^1 \left( \frac{\omega}{r} + \frac{Ma}{r^4} \right) \left[ (r - 3M)\omega + \frac{Ma}{r^2} + Ma\omega^2 \right] = 0 \quad (5.48)$$

La solution à cette équation est  $s^1(t) = s^1(0) \cos \omega' t$  où

$$\begin{aligned} (\omega')^2 &= \omega^2 \left( 1 + \frac{Ma}{\omega r^3} \right) \left[ \left( 1 - \frac{3M}{r} \right) + \frac{Ma}{\omega r^3} + \frac{Ma\omega}{r} \right] \\ &\approx \omega^2 \left( 1 + \frac{2Ma}{\omega r^3} - \frac{3M}{r} + \frac{Ma\omega}{r} \right) \end{aligned} \quad (5.49)$$



Sachant que la fréquence  $\omega$  de l'orbite est donnée par la relation  $\omega^2 r^2 = M/r$  et que  $M/r$  est petit, on peut négliger le dernier terme ci-dessus par rapport au premier. En prenant la racine carrée, développée encore une fois à l'ordre  $M$ , il reste

$$\omega' = \omega \left( 1 + \frac{Ma}{\omega r^3} - \frac{3M}{2r} \right) \quad (5.50)$$

La fréquence nette de précession est

$$\Omega = \omega' - \omega = -\frac{3M\omega}{2r} + \frac{J}{r^3} \quad (J = Ma) \quad (5.51)$$

Le premier terme est la fréquence de précession géodétique (4.108) dans la limite des faibles champs. Le deuxième terme est la fréquence de précession de Lense-Thirring dans le cas d'une orbite équatoriale, conformément à l'éq. (5.38).

Le calcul pour une orbite polaire est plus complexe, en raison du fait que le taux de précession n'est pas uniforme le long de l'orbite. Pour un objet en orbite basse autour de la Terre, la précession est de l'ordre de  $0,04''/\text{an}$ , un effet beaucoup plus faible que la précession géodétique. La prédiction a été confirmée par la sonde *Gravity probe B* avec une erreur de 15%.

## E Problèmes

### Problème 5.1 limite $r_s \rightarrow 0$ de la métrique de Kerr

Montrez explicitement que la limite  $r_s \rightarrow 0$  de la métrique de Kerr définit un espace-temps plat. Utilisez l'outil SymPy recommandé.

### Problème 5.2 orbites circulaires

Supposez que la métrique prend la forme suivante dans un système de coordonnées  $(t, r, \theta, \varphi)$  :

$$ds^2 = A dt^2 + 2B dt d\varphi - C d\varphi^2 - D dr^2 - E d\theta^2 \quad (5.52)$$

où  $A, B, C, D, E$  sont des fonctions de  $r$  et de  $\theta$  seulement. La métrique de Kerr est un cas particulier de cette forme. Considérons les orbites équatoriales ( $\theta = \pi/2$ ) d'un objet massif dans une telle métrique.

**A** Sachant que la métrique ne dépend ni du temps  $t$ , ni de  $\varphi$ , obtenez une expression explicite de  $\dot{t}$  et de  $\dot{\varphi}$  en fonction des quantités conservées  $k = u_t$  et  $h = -u_\varphi$ . Exprimez votre réponse en fonction de la métrique générale ci-dessus, et ensuite substituez les valeurs correspondant à la métrique de Kerr à  $\theta = \pi/2$ .

**B** Dans le cas d'une orbite circulaire, montrez que la condition de normalisation de la quadrivitesse mène à la relation suivante :

$$f(r, h, k) := \frac{Ck^2 - 2Bhk - Ah^2}{AC + B^2} = 1 \quad (5.53)$$

**C** Montrez que le mouvement radial d'une orbite non circulaire est gouverné par le potentiel effectif suivant :

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{f(r, h, k)}{2D} + \frac{1}{2D} + \frac{k^2 - 1}{2} \quad (5.54)$$

Exprimez votre réponse en fonction de la métrique générale ci-dessus, et ensuite substituez les valeurs correspondant à la métrique de Kerr à  $\theta = \pi/2$ .

### Problème 5.3 orbites circulaires extrêmes dans la métrique de Kerr

L'objectif de ce problème est de déterminer le rayon, le moment cinétique et l'énergie d'une orbite circulaire minimale dans la métrique de Kerr. Dans cette métrique, Le mouvement radial d'un

objet est gouverné par l'équation suivante :

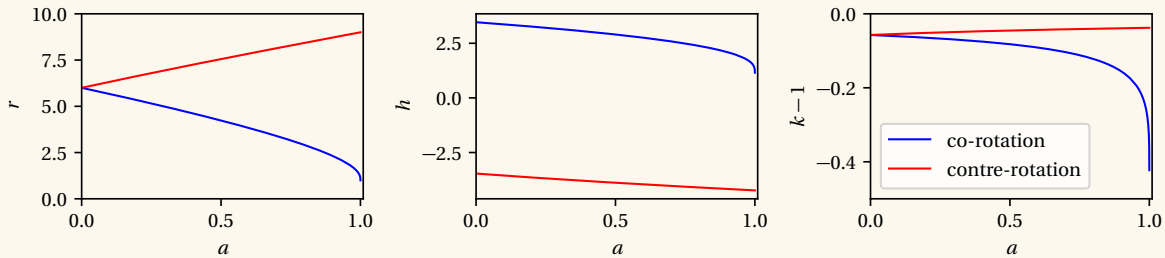
$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = \frac{k^2 - 1}{2} \quad (5.55)$$

où le potentiel effectif est

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{M}{r} + \frac{h^2 - a^2(k^2 - 1)}{2r^2} - \frac{M(h - ak)^2}{r^3} \quad (5.56)$$

Une orbite circulaire correspond à un minimum local du potentiel effectif. Cette orbite devient instable, ou encore minimale, quand ce minimum est sur le point de disparaître.

**A** Mettez en place un système de trois équations à trois inconnues pour les paramètres  $h$ ,  $k$  et  $r$  associés à une orbite circulaire minimale. Écrivez un programme en python (ou dans un autre langage si vous n'êtes pas à l'aise avec python) qui pourra résoudre ces équations numériquement et produire ces paramètres pour une valeur donnée de  $a$  (le paramètre de rotation figurant dans la métrique de Kerr). Posez  $M = 1$  afin de fixer une échelle. Reproduisez les graphiques ci-dessous de ces trois paramètres en fonction de  $a$ . Les deux courbes sur chaque graphique correspondent aux solutions en co-rotation ( $h$  positif) et en contre-rotation ( $h$  négatif).



Indice : en python, la fonction `scipy.optimize.root` sera utile. Les solutions en co- et en contre-rotation se trouvent en choisissant des valeurs d'essai de  $h$  de signes différents (la recherche de racines nécessite des valeurs d'essai).

**B** Quelle pourcentage de son énergie de masse un gaz en accréation autour d'un trou noir de Kerr extrême va-t-il maximalelement perdre en rayonnement avant de sombrer dans l'horizon? Justifiez.

**C** À partir de ces résultats, peut-on affirmer qu'un trou noir finira par excéder la limite  $a = M$  et révéler une singularité nue?



## CHAPITRE 6

# ONDES GRAVITATIONNELLES

### A Relativité linéarisée

#### 6.A.1 Déformation du tenseur métrique

Les équations d'Einstein (3.85) sont non linéaires : les composantes du tenseur métrique  $g_{ij}$  y apparaissent de manière compliquée avec celles de son inverse  $g^{ij}$  dans la connexion affine et cette dernière y apparaît de manière quadratique dans le tenseur de Ricci. Cette nonlinéarité contribue à rendre les équations d'Einstein difficiles à résoudre. Tout le long de ce chapitre, nous allons faire l'approximation que le champ gravitationnel est faible, c'est-à-dire qu'il dévie peu de la métrique de Minkowski. Plus précisément, nous allons poser la forme suivante :

$$g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij} \quad \eta_{ij} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1) \quad (6.1)$$

où la déformation  $h_{ij}$  va être considérée petite. Dans tous les développements, nous allons négliger les termes non linéaires en  $h$ . En effectuant ce traitement pour les équations d'Einstein, on obtiendra donc des équations différentielles linéaires en  $h_{ij}$  impliquant le tenseur d'énergie-impulsion. Ces équations pourront être résolues d'une manière analogue à ce qui est fait en électromagnétisme lorsqu'on étudie le rayonnement d'ondes électromagnétiques, sauf qu'ici il s'agira d'ondes gravitationnelles émises par des masses en mouvement.

**transformations de Lorentz** Même dans l'approximation linéaire, les changements de coordonnées jouent un rôle important. Les plus simples sont les transformations de Lorentz ordinaires qui laissent la métrique de Minkowski invariante :

$$x'^i = \Lambda^i_j x^j \quad \eta_{ij} = \Lambda_i^k \Lambda_j^l \eta_{kl} \quad (6.2)$$

Dans le langage du chapitre 2,

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = \Lambda^i_j \quad \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} = \Lambda_j^i \quad (6.3)$$

et donc on en déduit que

$$\eta_{ij} + h'_{ij} = \Lambda_i^k \Lambda_j^l (\eta_{kl} + h_{kl}) \quad (6.4)$$

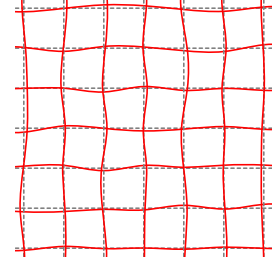
ou encore

$$h'_{ij} = \Lambda_i^k \Lambda_j^l h_{kl} \quad (6.5)$$

Autrement dit, la déformation  $h_{ij}$  se transforme comme un tenseur covariant dans l'espace de Minkowski. De plus, ce tenseur est symétrique :  $h_{ij} = h_{ji}$ , comme le tenseur métrique.

**FIGURE 6.1**

Illustration schématique d'un difféomorphisme. Les courbes des nouvelles coordonnées sont proches de celles des anciennes (en pointillé).



**difféomorphismes** Nous allons maintenant appliquer une transformation de coordonnées générale, mais infinitésimale, c'est-à-dire infiniment proche de l'identité :

$$x'^i = x^i + \xi^i(x) \quad (6.6)$$

Nous allons traiter la fonction  $\xi^i(x)$  comme une quantité infinitésimale, dont on ne conserve que le premier ordre. Une telle transformation infinitésimale porte le nom de *difféomorphisme* et est schématiquement illustrée à la figure 6.1. La matrice de transformation locale est

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = \delta_j^i + \partial_j \xi^i \quad (6.7)$$

La matrice de transformation inverse, à cet ordre, est

$$\frac{\partial x^i}{\partial x'^j} = \delta_j^i - \partial_j \xi^i \quad (6.8)$$

car on respecte alors l'identité

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} = \delta_j^i. \quad (6.9)$$

En effet, au premier ordre,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} &= (\delta_k^i + \partial_k \xi^i)(\delta_j^k - \partial_j \xi^k) \\ &\approx \delta_k^i \delta_j^k + \partial_k \xi^i \delta_j^k - \delta_k^i \partial_j \xi^k \\ &= \delta_j^i + \partial_j \xi^i - \partial_j \xi^i = \delta_j^i \end{aligned} \quad (6.10)$$

Lors d'une telle transformation, la déformation  $h_{ij}$  se transforme ainsi :

$$\begin{aligned} g'_{ij} = \eta_{ij} + h'_{ij} &= (\delta_i^k - \partial_i \xi^k)(\delta_j^l - \partial_j \xi^l)(\eta_{kl} + h_{kl}) \\ &= \eta_{ij} - \partial_i \xi^k \delta_j^l \eta_{kl} - \partial_j \xi^l \delta_i^k \eta_{kl} + \delta_i^k \delta_j^l h_{kl} \\ &= \eta_{ij} - \partial_i \xi_j - \partial_j \xi_i + h_{ij} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Dans ce calcul, nous n'avons conservé que les premiers ordres de petitesse combinés en  $\xi$  et en  $h$ . La résultante est que la déformation se transforme ainsi :

$$h'_{ij} = h_{ij} - \partial_i \xi_j - \partial_j \xi_i \quad (6.12)$$

Nous pouvons donc considérer la déformation  $h_{ij}$  comme un champ défini dans l'espace-temps de Minkowski, qui possède les propriétés d'un tenseur de rang 2, et qui est sujet à des transformations de jauge (6.12), comme le potentiel électromagnétique  $A_i$  :<sup>1</sup>

$$A'_i = A_i - \partial_i \xi \quad (6.13)$$

La possibilité de procéder à des difféomorphismes sans que la physique en soit affectée est l'équivalent infinitésimal du principe de relativité générale. C'est aussi une transformation de jauge, au sens que la fonction  $\xi^l(x)$  n'est pas un paramètre global, mais dépend de la position dans l'espace-temps.

**tenseur métrique contravariant** On peut également écrire le tenseur métrique contravariant ainsi :

$$g^{ij} = \eta^{ij} - h^{ij} \quad h^{ij} = \eta^{ik} \eta^{jl} h_{kl} \quad (6.14)$$

(notez le signe  $-$ ). Cette expression garantit que la relation  $g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j$  est bien respectée au premier ordre en  $h$ . Il est important de souligner encore que nous traitons  $h^{ij}$  comme la version contravariante du tenseur minkowskien  $h_{ij}$  et non comme une déformation du tenseur métrique contravariant  $g^{ij}$ .

## 6.A.2 Équations d'Einstein linéarisées

Afin d'exprimer les équations d'Einstein en fonction de la déformation  $h_{ij}$ , nous devons calculer le tenseur de Ricci, donc la connexion affine et le tenseur de Riemann.

**connexion affine** Commençons par la connexion affine, dont l'expression en fonction du tenseur métrique est donnée à l'éq. (2.24) :

$$\Gamma^k_{ij}(x) = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_j g_{il} + \partial_i g_{jl} - \partial_l g_{ij}) \quad (6.15)$$

$$= \frac{1}{2} (\eta^{kl} - h^{kl}) (\partial_j h_{il} + \partial_i h_{jl} - \partial_l h_{ij}) \quad (6.16)$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_j h_i^k + \partial_i h_j^k - \partial^k h_{ij}) \quad (6.17)$$

où nous avons introduit le tenseur mixte  $h_j^i$  défini de la manière habituelle. Comme  $h_{ij}$  est symétrique, l'ordre des indices mixtes n'est pas important, d'où les indices alignés verticalement.

**tenseur de Riemann** La prochaine étape est le calcul du tenseur de Riemann, donné par l'éq. (2.89) :

$$\begin{aligned} R^l_{kji} &= \partial_j \Gamma^l_{ki} - \partial_i \Gamma^l_{kj} + \Gamma^m_{ki} \Gamma^l_{mj} - \Gamma^m_{kj} \Gamma^l_{mi} \\ &\approx \frac{1}{2} \partial_j (\partial_k h_i^l + \partial_i h_k^l - \partial^l h_{ik}) - \frac{1}{2} \partial_i (\partial_k h_j^l + \partial_j h_k^l - \partial^l h_{jk}) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_k \partial_j h_i^l + \partial^l \partial_i h_{kj} - \partial_i \partial_k h_j^l - \partial^l \partial_j h_{ki}) \end{aligned} \quad (6.18)$$

Notons que les termes quadratiques en  $\Gamma$  ne contribuent pas au premier ordre en  $h$ . Le tenseur de Ricci est alors

$$R_{ki} = R^j_{kji} = \frac{1}{2} (\partial_k \partial_j h_i^j + \partial^j \partial_i h_{kj} - \partial_i \partial_k h_j^j - \partial^j \partial_j h_{ki}) \quad (6.19)$$

1. La comparaison avec la transformation de jauge du champ électromagnétique est imparfaite, car la forme donnée ici est valable même pour les transformations finies et non pas infinitésimales. Une meilleure comparaison pourrait être faite avec les champs de jauge non abéliens, comme ceux décrivant les interactions faible et fortes.

et la courbure scalaire est

$$\begin{aligned}
 R &= g^{ik} R_{ik} = \eta^{ik} R_{ik} \\
 &= \frac{1}{2}(\partial^i \partial_j h_i^j + \partial^j \partial_i h_j^i - \partial_i \partial^i h_j^j - \partial^j \partial_j h_i^i) \\
 &= \partial_i \partial_j h^{ij} - \square h \quad \square := \partial_i \partial^i
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

où nous avons introduit la trace  $h := h_i^i$ .

**équations d'Einstein linéarisées** Les équations d'Einstein (3.86) prennent alors la forme suivante :

$$\frac{1}{2}(\partial_k \partial_j h_i^j + \partial_i \partial_j h_k^j - \partial_i \partial_k h - \square h_{ki} - \eta_{ik} \partial_l \partial_j h^{lj} + \eta_{ik} \square h) = 8\pi T_{ik} \tag{6.21}$$

Nous pouvons simplifier quelque peu cette équation en l'exprimant en fonction de la déformation dite « à trace inversée »

$$\bar{h}_{ij} := h_{ij} - \frac{1}{2}\eta_{ij} h \tag{6.22}$$

dont la trace est l'opposée de celle de  $h_{ij}$  :

$$\bar{h} = \bar{h}_i^i = h_i^i - 2h = -h \tag{6.23}$$

On vérifie que les termes impliquant la trace disparaissent alors :

$$\frac{1}{2}(\partial_k \partial_j \bar{h}_i^j + \partial_i \partial_j \bar{h}_k^j - \square \bar{h}_{ki} - \eta_{ik} \partial_l \partial_j \bar{h}^{lj}) = 8\pi T_{ik} \tag{6.24}$$

**Jauge de Lorentz** Nous allons maintenant utiliser la liberté de procéder à une transformation de jauge afin de simplifier l'équation (6.24). Lors d'une transformation de jauge (difféomorphisme), le champ  $h_{ij}$  se transforme comme en (6.12). En prenant la trace de cette relation, on trouve

$$h' = h - 2\partial_i \xi^i \tag{6.25}$$

et donc le champ  $\bar{h}_{ij}$  se transforme comme suit :

$$\bar{h}'_{ij} = \bar{h}_{ij} - \partial_i \xi_j - \partial_j \xi_i + \eta_{ij} \partial_k \xi^k \tag{6.26}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \partial^j \bar{h}'_{ij} &= \partial^j \bar{h}_{ij} - \partial_i \partial^j \xi_j - \square \xi_i + \partial_i \partial_k \xi^k \\
 &= \partial^j \bar{h}_{ij} - \square \xi_i
 \end{aligned} \tag{6.27}$$

Par conséquent, si on choisit  $\xi^i$  de manière à ce que

$$\square \xi_i = \partial^j \bar{h}_{ij} \tag{6.28}$$

alors le nouveau champ respecte la condition suivante, dite jauge de Lorentz :

$$\partial^j \bar{h}_{ij} = 0 \tag{6.29}$$

Dans cette jauge, l'équation d'Einstein linéarisée devient

$$\square \bar{h}_{ki} = -16\pi T_{ik} \tag{6.30}$$



## B Propagation des ondes gravitationnelles

### 6.B.1 Solution générale à l'équation d'onde

**transformée de Fourier** Dans la jauge de Lorentz et en l'absence de source, donc dans le vide, le champ  $\bar{h}_{ij}$  obéit à l'équation d'onde :

$$\square \bar{h}_{ij} = 0 \quad (6.31)$$

La solution générale à cette équation se trouve par transformation de Fourier. Celle-ci prend la forme suivante dans l'espace-temps :

$$\bar{h}_{ij}(x) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} A_{ij}(q) e^{-iq_j x^j} \quad A_{ij}(q) = \int d\Omega \bar{h}_{ij}(x) e^{iq_j x^j} \quad (6.32)$$

En substituant cette forme dans l'équation d'onde, on trouve immédiatement

$$q_j q^j A_{ik}(q) = 0 \quad (6.33)$$

ce qui a comme solution toute amplitude contrainte par la relation du cône de lumière  $q_j q^j = 0$ . Autrement dit, toute combinaison d'ondes planes dont la fréquence  $q_0$  et le vecteur d'onde  $\mathbf{q}$  respectent la condition  $(q^0)^2 = \mathbf{q}^2$  est une solution à l'équation d'onde. Nous pouvons exprimer cette contrainte ainsi :

$$A_{ik}(q) = A_{ik}(\mathbf{q}) 2\pi \delta(q_j q^j) \Theta(q^0) \quad (6.34)$$

(nous avons imposé une fréquence positive avec la fonction de Heaviside). Le point est que la fonction delta et la fonction de Heaviside sont des invariants de Lorentz, donc que la nouvelle fonction  $A_{ik}(\mathbf{q})$  est également un tenseur.

La condition de Lorentz (6.29) s'applique ainsi à la transformée de Fourier :

$$q^i A_{ij} = 0 \quad (6.35)$$

L'amplitude  $A_{ij}$  comporte 10 composantes indépendantes en raison de la symétrie du tenseur. La condition de Lorentz constitue en fait 4 conditions indépendantes, ce qui réduit le nombre de degrés de liberté de l'amplitude à 6.

**difféomorphismes additionnels** Cependant, la condition de Lorentz ne fixe pas tout. Il est possible de procéder à des difféomorphismes additionnels qui respectent la condition  $\square \xi_j = 0$ . Nous allons montrer que cette liberté de jauge ne laisse que 2 degrés de liberté réels dans l'amplitude  $A_{ij}$ , c'est-à-dire que les ondes gravitationnelles n'ont que deux polarisations possibles.

Voyons cela plus en détail. Un difféomorphisme  $\xi_j$  peut aussi être considéré en transformée de Fourier  $\xi_j$  :

$$\xi_j(x) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \epsilon_j(q) e^{-iq_j x^j} \quad \epsilon_j(q) = \int d\Omega \xi_j(x) e^{iq_j x^j} \quad (6.36)$$

## Chapitre 6. Ondes gravitationnelles

La condition  $\square \xi_j = 0$  devient alors  $q^j q_j \epsilon_i = 0$ . En imposant  $q^j q_j = 0$ , cela laisse 4 amplitudes  $\epsilon_i(q)$  arbitraires. Après ce difféomorphisme, la nouvelle amplitude serait, d'après l'éq. (6.26) prise en transformée de Fourier,

$$A'_{jk} = A_{jk} + i q_j \epsilon_k + i q_k \epsilon_j - i \eta_{jk} q_l \epsilon^l \quad (6.37)$$

Pour rendre les choses plus concrètes sans perte de généralité, supposons que l'onde se propage dans la direction  $z$ , de sorte que le vecteur d'onde  $q^j$  soit  $(\omega, 0, 0, \omega)$  (ou encore  $q_j = (\omega, 0, 0, -\omega)$  pour les composantes covariantes). Le produit  $q^l \epsilon_l$  est alors  $\omega(\epsilon_0 + \epsilon_3)$ .

**jauge transverse sans trace** Les contraintes imposées par la condition de Lorentz  $q^l A_{lj} = 0$  sont les suivantes :

$$A_{03} = -A_{00} \quad A_{13} = -A_{10} \quad A_{23} = -A_{20} \quad A_{33} = -A_{30} = A_{00} \quad (6.38)$$

De sorte qu'en tenant compte de sa symétrie, la matrice  $A_{ij}$  prend la forme suivante en fonction des 6 composantes indépendantes (indiquées en rouge) :

$$\begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & -A_{00} \\ A_{01} & A_{11} & A_{12} & -A_{01} \\ A_{02} & A_{12} & A_{22} & -A_{02} \\ -A_{00} & -A_{01} & -A_{02} & A_{00} \end{pmatrix} \quad (6.39)$$

Les composantes non redondantes de l'équation (6.37) sont alors les suivantes :

$$\begin{aligned} A'_{00} &= A_{00} + i\omega(\epsilon_0 - \epsilon_3) \\ A'_{11} &= A_{11} + i\omega(\epsilon_0 + \epsilon_3) \\ A'_{22} &= A_{22} + i\omega(\epsilon_0 + \epsilon_3) \\ A'_{01} &= A_{01} + i\omega\epsilon_1 \\ A'_{02} &= A_{02} + i\omega\epsilon_2 \\ A'_{12} &= A_{12} \end{aligned} \quad (6.40)$$

Il suffit alors de choisir les composantes du difféomorphisme ainsi :

$$\begin{aligned} \epsilon_0 - \epsilon_3 &= -\frac{A_{00}}{i\omega} \\ \epsilon_0 + \epsilon_3 &= -\frac{A_{00} + A_{11}}{2i\omega} \\ \epsilon_1 &= -\frac{A_{01}}{i\omega} \\ \epsilon_2 &= -\frac{A_{02}}{i\omega} \end{aligned} \quad (6.41)$$

pour que les nouvelles composantes  $A'_{jk}$  soient les suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.42)$$

où  $a$  et  $b$  sont les seules amplitudes indépendantes qui restent. Ce choix de difféomorphisme, ou de jauge porte le nom de *jauge transverse sans trace*.

La solution générale à l'équation d'onde gravitationnelle est donc la suivante : On pose deux tenseurs  $e_{1,ij}(q)$  et  $e_{2,ij}(q)$  qui, lorsque  $q^j = (\omega, 0, 0, \omega)$ , ont la forme suivante :

$$e_{1,ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_{2,ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.43)$$

et dont la forme pour un autre vecteur d'onde s'obtiendrait en appliquant les rotations appropriées. La solution générale est alors

$$\bar{h}_{jk}(x) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} [a(\mathbf{q})e_{1,jk}(\mathbf{q}) + b(\mathbf{q})e_{2,jk}(\mathbf{q})] e^{-iq_j x^j} \quad (6.44)$$

où les deux fonctions  $a(\mathbf{q})$  et  $b(\mathbf{q})$  sont arbitraires et constituent les deux seuls degrés de liberté de la solution, étant donné la jauge transverse sans trace et la condition de Lorentz. Comme la trace de  $\bar{h}_{ij}$  est nulle, celle de  $h_{ij}$  l'est aussi et il n'y a pas de distinction entre ces deux tenseurs dans cette jauge.

### 6.B.2 Effet du passage d'une onde gravitationnelle

Considérons maintenant une onde gravitationnelle de fréquence  $\omega$  se propageant dans la direction  $z$  et voyons quel est son effet sur un nuage de particules en chute libre.

Le mouvement de ces particules est régi par l'équation des géodésiques :

$$\dot{u}^i + \Gamma_{jk}^i u^j u^k = 0 \quad (6.45)$$

Si la particule est initialement au repos, alors  $u^i = (1, 0, 0, 0)$  et l'équation ci-dessus est initialement

$$\dot{u}^0 + \Gamma_{jk}^0 u^j u^k = \dot{u}^0 + \frac{1}{2}(\partial_j h_k^0 + \partial_k h_j^0 - \partial^0 h_{kj})u^j u^k = 0 \quad (6.46)$$

Or, dans la jauge transverse sans trace, seules les composantes  $h_2^1$ ,  $h_1^2$  et  $h_2^2$  sont non nulles, et comme initialement les composantes  $u^2$  et  $u^3$  sont nulles également, il s'ensuit que  $\dot{u}^0 = 0$  et donc que la particule en question reste toujours au repos. En fait, cela signifie que ses coordonnées sont constantes, et résulte d'un choix de coordonnées compatible avec la jauge choisie.

Nous devons plutôt nous attarder à des quantités physiques, c'est-à-dire indépendantes du système de coordonnées choisi. Intéressons-nous donc à la position relative  $(0, \lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$  de deux particules considérées au même instant. La distance les séparant est alors

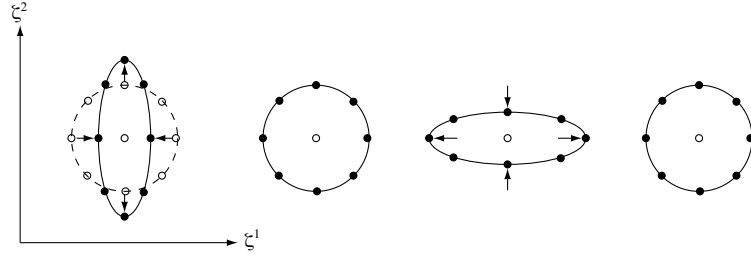
$$\ell^2 = -g_{ij}\lambda^i\lambda^j = (\delta_{ab} - h_{ab})\lambda^a\lambda^b \quad (6.47)$$

Introduisons les variables suivantes :

$$\zeta^a = \lambda^a - \frac{1}{2}h_b^a\lambda^b \quad (6.48)$$

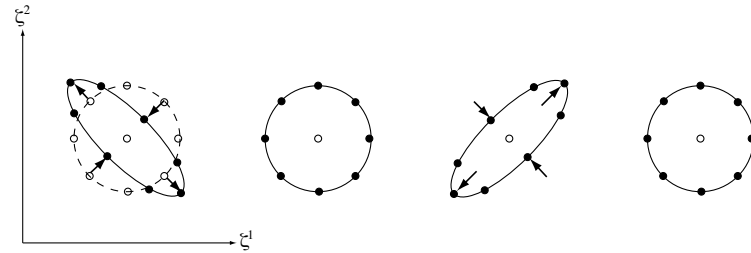
**FIGURE 6.2**

Effet du passage d'une onde gravitationnelle de polarisation  $e_1$  sur une distribution circulaire de particules dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation.



**FIGURE 6.3**

Effet du passage d'une onde gravitationnelle de polarisation  $e_2$  sur une distribution circulaire de particules dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation.



En fonction de ces variables, la distance entre les deux particules devient

$$\ell^2 = \delta_{ab} \zeta^a \zeta^b \quad (6.49)$$

L'avantage de la variable  $\zeta^a$  et qu'elle donne immédiatement la distance entre les deux particules, soit une quantité indépendante de la jauge, comme si nous étions en géométrie euclidienne.

Les coordonnées  $\lambda^a$ , comme nous l'avons vu plus haut, sont constantes lors du passage de l'onde. Par contre, les variables  $\zeta^a$  ne le sont pas. Une onde plane dans la polarisation  $e_1$  est caractérisée par l'amplitude

$$h_b^a = a e_1^a{}_b \cos \omega(z - t) \quad (e_1^a{}_b = -e_{1ab}) \quad (6.50)$$

et la forme précise de  $e_1^a{}_b$  produit le mouvement suivant sur  $\zeta^a$  :

$$\zeta^a = (\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3) + \frac{1}{2} a \cos \omega(z - t) (\lambda^1, -\lambda^2, 0) \quad (6.51)$$

Les paramètres  $\lambda^a$  sont ici des constantes et ce sont les variables  $\zeta^a$  qui oscillent en fonction du temps ou de  $z$ . Notons que  $\zeta^3$  est constant : l'onde est véritablement transverse et n'affecte que les distances dans le plan perpendiculaire à sa propagation. La variable  $\zeta^1$  oscille en antiphasse avec la variable  $\zeta^2$  dans cette polarisation, tel qu'illustré sur la figure 6.2.

Dans la polarisation  $e_2$ , le mouvement est plutôt celui-ci :

$$\zeta^a = (\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3) + b \cos \omega(z - t) (\lambda^2, \lambda^1, 0) \quad (6.52)$$

Les coordonnées «propres» sont alors les combinaisons  $\zeta^1 \pm \zeta^2$  :

$$\begin{aligned} \zeta^1 + \zeta^2 &= (\lambda^1 + \lambda^2) + b \cos \omega(z - t) (\lambda^1 + \lambda^2) \\ \zeta^1 - \zeta^2 &= (\lambda^1 - \lambda^2) - b \cos \omega(z - t) (\lambda^1 - \lambda^2) \end{aligned} \quad (6.53)$$

Ces deux coordonnées propres sont en antiphasse. Ce mouvement est illustré sur la figure 6.3.

### La réalité des ondes gravitationnelles

Avant même d'être détectées, les ondes gravitationnelles ont été l'objet d'une longue controverse au sujet de leur existence même au sein de la théorie de la relativité générale. Einstein a lui-même changé d'avis plusieurs fois à ce sujet. Poincaré avait déjà émis l'hypothèse que de telles ondes existaient, en analogie avec la relativité. Einstein n'y croyait pas trop, en raison de l'absence de dipôles en gravité. Cependant, il publie un premier article en 1916 sur l'approximation linéaire en relativité. En 1918, il publie un autre article, intitulé *Über Gravitationswellen* (sur les ondes gravitationnelles), dans lequel il identifie trois types d'ondes, que Weyl a ensuite appelés longitudinal-longitudinal, longitudinal-transverse et transverse-transverse.



Pirani &amp; Bondi

En 1922, Eddington montre que deux des trois types sont des illusions causées par le système de coordonnées utilisé par Einstein et se propagent à une vitesse qui dépend des coordonnées utilisées, alors que les ondes transverse-transverses se propagent toujours à la vitesse de la lumière. En 1936, Einstein et Rosen soumettent à *Physical Review* un article démontrant que les ondes gravitationnelles ne peuvent exister, en raison d'une singularité dans la solution. L'arbitre de cet article, Howard P. Robertson (le même qui étudia la métrique de Friedmann-Lemaître) fit remarquer que la singularité n'était pas intrinsèque, mais simplement une singularité des coordonnées, et rejeta l'article, tout en contactant Rosen à ce sujet. Einstein, peu habitué au système de revue par les pairs pratiqué par la *Physical Review*, était apparemment furieux et refusa de resoumettre un article amendé à cette revue! Finalement, la question fut réglée lors d'un congrès consacré à la relativité générale en 1957 à Chapel Hill (Caroline du Nord). Les deux principaux protagonistes de ce revirement furent Felix Pirani (1928/2016), qui formula le problème en fonction de quantités covariantes (le tenseur de Riemann) et Hermann Bondi (1919/2005), initialement sceptique, qui raffina et publia un argument initialement proposé par Feynman. [memorial to F. Pirani](#) [ESA \(Bondi\)](#)

## C Rayonnement des ondes gravitationnelles

### 6.C.1 Fonction de Green pour l'équation d'onde

Retournons maintenant à l'équation d'Einstein linéarisée :

$$\square \bar{h}_{ik} = -16\pi T_{ik} \quad (6.30)$$

Prenons un peu de recul, et considérons l'équation d'onde inhomogène pour une fonction scalaire  $\psi(x)$  avec une source  $\rho(x)$  :

$$\square \psi = \rho(x) \quad (6.54)$$

## Chapitre 6. Ondes gravitationnelles

Nous allons définir la *fonction de Green*  $G(x)$  de l'équation d'onde comme étant la solution en présence d'une source ponctuelle à l'origine de l'espace-temps :

$$\square G(x) = \delta^4(x) \quad (6.55)$$

Connaissant la fonction  $G$ , la solution générale à l'équation d'onde pour une source quelconque se trouve par superposition :

$$\psi(x) = \int d^4 y G(x-y)\rho(y) \quad (6.56)$$

comme on le voit sans peine en appliquant l'opérateur  $\square$  sur la solution ci-dessus.

Nous allons montrer que la solution à l'équation (6.55) respectant la causalité est

$$G(x) = \frac{\delta(t - |\mathbf{r}|)}{4\pi|\mathbf{r}|} \quad x = (t, \mathbf{r}) \quad (6.57)$$

Plusieurs preuves sont possibles. Premièrement, remarquons qu'une solution générale à l'éq. (6.55) est la somme d'une solution particulière à cette équation inhomogène, plus la solution générale à l'équation homogène  $\square G(x) = 0$ . Les conditions aux limites seront déterminantes pour décider quelle solution à l'équation homogène doit être ajoutée. En particulier, nous voulons respecter la causalité, donc la solution doit s'annuler pour  $t < 0$ .

Nous choisissons de résoudre l'éq. (6.55) en passant en transformée de Fourier dans le domaine temporel :

$$G(t, \mathbf{r}) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{G}(\omega, \mathbf{r}) e^{-i\omega t} \quad \tilde{G}(\omega, \mathbf{r}) = \int dt G(t, \mathbf{r}) e^{i\omega t} \quad (6.58)$$

En appliquant l'opérateur  $\square = \partial_t^2 - \nabla^2$  sur la forme ci-dessus, on trouve

$$-(\omega^2 + \nabla^2)\tilde{G}(\omega, \mathbf{r}) = \delta^3(\mathbf{r}) \quad (6.59)$$

Nous cherchons une solution isotrope, donc qui ne dépend que de  $r = |\mathbf{r}|$ . En coordonnées sphériques, l'équation ci-dessus devient

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\tilde{G}) + \omega^2 \tilde{G} = -\delta^3(\mathbf{r}) \quad (6.60)$$

Si  $r \neq 0$ , cette équation est homogène (c'est-à-dire le membre de droite s'annule) et sa solution est

$$A \frac{e^{i\omega r}}{r} + B \frac{e^{-i\omega r}}{r} \quad (6.61)$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes.

Si on retourne dans le domaine temporel en procédant à une transformée de Fourier inverse, cette solution devient

$$G(t, \mathbf{r}) = \frac{A}{r} \delta(t-r) + \frac{B}{r} \delta(t+r) \quad (6.62)$$

Le premier terme correspond à une onde sortante de l'origine, alors que le deuxième terme correspond à une onde rentrante. Nous allons donc imposer  $B = 0$  afin de respecter la causalité. Notons que  $r > 0$  par définition, donc le deuxième terme ne serait applicable que si  $t < 0$ .

Jusqu'ici, la fonction delta n'a joué aucun rôle. En fait, elle fixe la normalisation de  $G$ , c'est-à-dire la constante  $A$ . Retournons pour cela à la transformée de Fourier :

$$\tilde{G}(\omega, \mathbf{r}) = A \frac{e^{i\omega r}}{r} \quad (6.63)$$

On peut déterminer  $A$  en demandant que la fonction de Green prenne la valeur statique bien connue  $1/4\pi r$  dans la limite  $\omega \rightarrow 0$ . On trouve ainsi  $A = 1/4\pi$ . Une démonstration plus complète de la valeur de  $A$  consiste à intégrer l'équation (6.63) à l'intérieur d'une sphère de rayon infinitésimal  $a$  centrée à l'origine. La solution trouvée ci-haut devient alors  $G \rightarrow A/r$ , car  $\omega r \rightarrow 0$ . En utilisant le théorème de Gauss et cette expression limite de  $G$ , on trouve

$$\begin{aligned} \int_V (\nabla^2 + \omega^2)G(r) &= \int_S \mathbf{da} \cdot \nabla G(r) + 4\pi\omega^2 \int_0^a dr r^2 G(r) \\ &= -4\pi A + 2\pi A\omega^2 a^2 \end{aligned} \quad (6.64)$$

Comme  $a \rightarrow 0$ , le deuxième terme disparaît. D'autre part, l'intégrale de l'éq. (6.63) dans cette sphère donne  $-1$  en raison de la fonction delta du membre de droite. On en conclut que  $A = 1/4\pi$ , comme anticipé. En bref, la fonction de Green recherchée est

$$G(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi r} \delta(t - r) \quad (6.65)$$

Comme  $r = |\mathbf{r}|$ , on retrouve bien la solution annoncée (6.57). La solution à l'équation (6.54) est donc

$$\psi(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int dt' d^3 r' \delta(t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \frac{\rho(t', \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (6.66)$$

Le contenu physique de cette solution est que l'onde à  $(t, \mathbf{r})$  est déterminée par la source au temps  $t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ , c'est-à-dire au temps dit *retardé*, et que l'effet de la source décroît comme l'inverse de la distance. En intégrant sur  $t'$ , on trouve

$$\psi(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\rho(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (6.67)$$

En appliquant cette solution à l'équation (6.30), on trouve alors

$$\bar{h}_{ik}(t, \mathbf{r}) = -4 \int d^3 r' \frac{T_{ik}(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (6.68)$$

Cette relation n'est bien sûr valable que dans la jauge de Lorentz.

## 6.C.2 Approximation des sources compactes

Supposons que la source  $T_{ik}$  est composée de masses qui se déplacent lentement par rapport à la vitesse de la lumière, de sorte qu'on puisse négliger l'effet de retard au sein de la source. Cela revient à remplacer  $t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  par  $t - r$ . On trouve alors

$$\bar{h}_{ik}(t, \mathbf{r}) = -4 \int d^3 r' \frac{T_{ik}(t - r, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (6.69)$$

Supposons en outre la source est compacte, de sorte que  $|\mathbf{r}'| \ll |\mathbf{r}|$ , ce qui nous permet de remplacer  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  par  $r$ . La solution a alors la forme simple suivante :

$$\bar{h}_{ik}(t, \mathbf{r}) = -\frac{4}{r} \int d^3 r' T_{ik}(t - r, \mathbf{r}') \quad (6.70)$$

Comme  $T_{0i}$  est la densité d'énergie-impulsion de la source, l'intégrale correspondante est l'énergie-impulsion totale  $P_i$  de la source. On peut toujours choisir un référentiel inertiel tel que  $P_a = 0$  ( $a = 1, 2, 3$ ) et dans ce référentiel, l'énergie totale est simplement la masse de la source. On obtient donc

$$\bar{h}_{00}(t, \mathbf{r}) = -\frac{4M}{r} = 4\Phi(r) \quad \bar{h}_{0a}(t, \mathbf{r}) = 0 \quad (6.71)$$

où  $\Phi$  est le potentiel gravitationnel. En plus, les composantes purement spatiales  $h_{ab}$  sont négligeables dans le cas où les vitesses des sources sont non relativistes, car les composantes correspondantes  $T_{ab}$  sont également négligeables en comparaison de  $T_{00}$ . Retournons à la déformation  $h_{ij} = \bar{h}_{ij} - \frac{1}{2}\eta_{ij}\bar{h}$ . Dans cette approximation, on trouve immédiatement

$$\bar{h} = \bar{h}_{00} \quad \text{et donc} \quad h_{00} = \frac{1}{2}\bar{h}_{00} = 2\Phi(r) \quad (6.72)$$

Ceci est conforme à la limite non relativiste obtenue en (3.23). Évidemment, même s'il s'agit d'un résultat attendu, il ne s'agit pas ici d'ondes gravitationnelles.

**tenseur quadripolaire** Nous allons maintenant démontrer que, dans le cas d'une source compacte,

$$\boxed{\bar{h}^{ab}(t) = -\frac{2}{r} \frac{d^2 I^{ab}(t')}{dt'^2} \Big|_{t'=t-r}} \quad I^{ab}(t) = \int d^3 r T^{00}(t, \mathbf{r}) x^a x^b \quad (6.73)$$

Le 3-tenseur  $I^{ab}$  constitue le *tenseur quadripolaire* de la source.

Afin de démontrer cette formule, utilisons les lois de conservation

$$\partial_a T^{ia} + \partial_0 T^{i0} = 0 \quad (6.74)$$

En particulier, considérons l'intégrale

$$\int d^3 r \partial_a (T^{ca} x^b) = \int d^3 r (\partial_a T^{ca}) x^b + \int d^3 r T^{ca} \partial_a x^b \quad (6.75)$$

(notons que  $\partial_a x^b = \delta_a^b$  dans le dernier terme). Cette intégrale peut être convertie en intégrale de surface en utilisant le théorème de la divergence. Comme la source est compacte, cette surface peut être choisie dans une région telle que  $T^{ca} = 0$  et donc l'intégrale s'annule. Il s'ensuit que

$$\int d^3 r T^{cb} = - \int d^3 r (\partial_a T^{ca}) x^b = \partial_0 \int d^3 r T^{c0} x^b \quad (6.76)$$

où on a utilisé l'éq. (6.74). Comme  $T^{cb} = T^{bc}$ , on peut symétriser en  $(c, b)$  et donc

$$\int d^3 r T^{bc} = \frac{1}{2} \partial_0 \int d^3 r (T^{b0} x^c + T^{c0} x^b) \quad (6.77)$$



On peut aussi utiliser le même truc pour l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned}
 \int d^3r \partial_a (T^{0a} x^b x^c) &= \int d^3r (\partial_a T^{0a}) x^b x^c + \int d^3r T^{0a} \partial_a x^b x^c + \int d^3r T^{0a} x^b \partial_a x^c \\
 &= \int d^3r (\partial_a T^{0a}) x^b x^c + \int d^3r T^{0b} x^c + \int d^3r T^{0c} x^b \\
 &= -\partial_0 \int d^3r T^{00} x^b x^c + \int d^3r (T^{0b} x^c + T^{0c} x^b) = 0
 \end{aligned} \tag{6.78}$$

En prenant une dérivée supplémentaire par rapport au temps et en substituant l'éq. (6.77), on trouve

$$\int d^3r T^{bc} = \frac{1}{2} \partial_0^2 \int d^3r T^{00} x^b x^c = \frac{1}{2} \partial_0^2 I^{bc} \tag{6.79}$$

En combinant ce résultat et l'éq. (6.69), on arrive bien à (6.73).

L'importance de ce résultat est que, dans la jauge de Lorentz, ce sont vraiment les composantes spatiales transverses qui représentent l'onde gravitationnelle. En somme, si on place l'origine au centre de la source, le champ gravitationnel loin de la source compte deux contributions :

1. Une contribution statique (6.71), provenant de la masse totale de la source. À cela on peut aussi ajouter la contribution d'une source en rotation aux composantes mixtes  $\bar{h}_{0a}$  (voir problème 6.4).
2. Une contribution dynamique (6.73), qui contient les ondes gravitationnelles émises par la source.

Le rayonnement gravitationnel est donc minimalement quadripolaire. L'ordre de grandeur du moment quadripolaire est  $ML^2$ , où  $M$  est la masse de la source et  $L$  est son étendue spatiale. Dans le cas d'une source composée de particules non relativistes, on peut remplacer  $T^{00}$  par la densité de masse  $\rho$  et donc

$$I^{ab}(t) = \int d^3r \rho(t, \mathbf{r}) x^a x^b \tag{6.80}$$

Ceci contraste avec le rayonnement d'ondes électromagnétiques, dont la première contribution est la dérivée première par rapport au temps du *moment dipolaire* de la distribution de charge. Le moment dipolaire d'une distribution de masse est défini comme

$$d^a = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) x^a \tag{6.81}$$

À la différence du cas électromagnétique, la densité de masse  $\rho$  est toujours positive et donc on peut choisir l'origine de sorte que  $d^a = 0$ . En effet,  $d^a$  n'est rien d'autre que la position du centre de masse de la source. En l'absence de force externe sur la source,  $d^a$  est donc zéro ou du moins constant et aucun rayonnement ne peut en résulter.

### 6.C.3 Rayonnement causé par un objet binaire

Considérons deux objets de masses  $M$  en orbite circulaire de rayon  $a$  l'un autour de l'autre, dans le plan  $xy$ . L'origine est placée au centre de l'orbite. Les deux objets étant liés par l'attraction

gravitationnelle, la fréquence  $\Omega$  de l'orbite est reliée à la distance  $2a$  entre les deux objets par

$$\Omega^2 a = \frac{M}{4a^2} \implies \Omega = \left( \frac{M}{4a^3} \right)^{1/2} \quad (6.82)$$

La position des deux objets en fonction du temps est

$$\mathbf{r}_A = (a \cos \Omega t, a \sin \Omega t, 0) \quad \mathbf{r}_B = -\mathbf{r}_A \quad (6.83)$$

Le 3-tenseur quadripolaire est, dans le cas d'une distribution discrète de masses,

$$I^{ab} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha}^a x_{\alpha}^b \quad (6.84)$$

où  $\alpha$  numérote les différentes particules. Dans le cas qui nous occupe, cette formule se réduit à

$$I^{ab} = 2M x_A^a x_A^b = 2M a^2 \begin{pmatrix} \cos^2 \Omega t & \cos \Omega t \sin \Omega t & 0 \\ \cos \Omega t \sin \Omega t & \sin^2 \Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.85)$$

À l'aide des formules trigonométriques d'angles doubles, peut récrire cette expression ainsi :

$$I^{ab} = M a^2 \begin{pmatrix} 1 + \cos 2\Omega t & \sin 2\Omega t & 0 \\ \sin 2\Omega t & 1 - \cos 2\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.86)$$

La première constatation est que le tenseur quadripolaire oscille au double de la fréquence de rotation de l'étoile binaire. Ce doublement de fréquence est bien sûr dû au caractère quadratique de ce tenseur en fonction des coordonnées des masses.

En appliquant la formule (6.73), on trouve la déformation gravitationnelle suivante :

$$\bar{h}^{ab}(t) = \frac{8M a^2 \Omega^2}{r} \begin{pmatrix} \cos 2\Omega t' & \sin 2\Omega t' & 0 \\ \sin 2\Omega t' & -\cos 2\Omega t' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Bigg|_{t'=t-r} \quad (6.87)$$

On peut aussi écrire toutes les composantes de la déformation, c'est-à-dire incluant les composantes temporelles, car ces dernières sont nulles dans le cas de la partie radiative de la déformation :

$$\bar{h}^{ij}(t) = \frac{8M a^2 \Omega^2}{r} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\Omega t' & \sin 2\Omega t' & 0 \\ 0 & \sin 2\Omega t' & -\cos 2\Omega t' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Bigg|_{t'=t-r} \quad (6.88)$$

On peut ensuite comparer avec la forme générale (6.44) d'une onde gravitationnelle plane, en tenant compte des polarisations (6.43) quand l'onde se propage dans la direction  $z$ . En exprimant les fonctions trigonométriques en fonction d'exponentielles, la forme ci-dessus se réduit à

$$\bar{h}^{ij}(t) = \frac{8M a^2 \Omega^2}{r} \operatorname{Re} \left[ (e_1^{ij} - i e_2^{ij}) e^{2i\Omega(t-z)} \right] \quad (6.89)$$

Dans la direction  $z$  (donc perpendiculaire au plan de l'orbite), l'onde produite par ce système est dans une polarisation circulaire en fonction des polarisations fondamentales et oscille à la fréquence  $2\Omega$ . Son amplitude décroît comme l'inverse de la distance, est proportionnelle à la surface  $a^2$  du système binaire et au carré de la fréquence.

Comment cette onde se présente-t-elle si on ne l'observe pas dans cette direction, mais à un angle polaire  $\theta$  quelconque? On doit dans ce cas appliquer la jauge transverse sans trace à l'aide de la procédure décrite dans la section 6.B.1 :

1. Appliquer une rotation au tenseur (6.88) de manière à ce que le nouvel axe  $z$  soit la direction de propagation.
2. éliminer les composantes non  $xy$  du nouveau tenseur.
3. rendre le tenseur résultant sans trace en soustrayant la moitié de la somme des éléments diagonaux du tenseur restant.

Pour une onde se propageant à un angle  $\theta$  par rapport à la normale au plan de l'orbite, on applique une rotation d'angle  $\theta$  dans le plan  $yz$ , à l'aide de la matrice

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (6.90)$$

Le résultat de la rotation sur  $h^{ab}$  est

$$\begin{aligned} & \frac{8Ma^2\Omega^2}{r} R(\theta) \begin{pmatrix} \cos 2\Omega t' & \sin 2\Omega t' & 0 \\ \sin 2\Omega t' & -\cos 2\Omega t' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R^T(\theta) \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\Omega t' & \sin 2\Omega t' \cos \theta & -\sin 2\Omega t' \sin \theta \\ \sin 2\Omega t' \cos \theta & -\cos 2\Omega t' \cos^2 \theta & \cos 2\Omega t' \sin \theta \cos \theta \\ -\sin 2\Omega t' \sin \theta & \cos 2\Omega t' \sin \theta \cos \theta & -\cos 2\Omega t' \sin^2 \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.91)$$

On tronque ensuite les composantes hors du plan  $xy$  :

$$\bar{h}^{ab}(t) = \frac{8Ma^2\Omega^2}{r} \begin{pmatrix} \cos 2\Omega t' & \sin 2\Omega t' \cos \theta & 0 \\ \sin 2\Omega t' \cos \theta & -\cos 2\Omega t' \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.92)$$

Enfin, on ajoute un multiple de l'identité afin de rendre la trace nulle. On trouve alors

$$\bar{h}^{ab}(t) = \frac{8Ma^2\Omega^2}{r} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta) \cos 2\Omega t' & \cos \theta \sin 2\Omega t' & 0 \\ \cos \theta \sin 2\Omega t' & -\frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta) \cos 2\Omega t' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.93)$$

En restaurant les composantes temporelles on trouve enfin

$$\bar{h}^{ij}(t) = \frac{8Ma^2\Omega^2}{r} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta) \cos 2\Omega t' & \cos \theta \sin 2\Omega t' & 0 \\ 0 & \cos \theta \sin 2\Omega t' & -\frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta) \cos 2\Omega t' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Bigg|_{t'=t-r} \quad (6.94)$$

En particulier, pour une onde se propageant dans la direction  $x$ ,

$$\bar{h}^{ij}(t) = \frac{4Ma^2\Omega^2}{r} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\Omega t' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos 2\Omega t' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Bigg|_{t'=t-r} \quad (6.95)$$

ce qui correspond à la polarisation  $e_1$ , ce qui est conforme à l'intuition étant donné la forme de cette polarisation (fig. 6.2) et la figure du mouvement orbital vue de cet angle, c'est-à-dire le long du plan orbital.

#### 6.C.4 Énergie portée par une onde gravitationnelle

Quelle énergie est portée par une onde gravitationnelle, et donc quelle énergie est perdue lors du rayonnement d'ondes gravitationnelles par un système binaire ou un autre type de système rayonnant? Pour répondre à cette question, il faut pouvoir quantifier l'énergie contenue dans le champ gravitationnel lui-même, donc il faut une expression pour le tenseur d'énergie-impulsion du champ gravitationnel. La question est subtile. L'utilité du tenseur d'énergie-impulsion tient à sa relation avec la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement. Or ces quantités sont conservées en vertu d'une symétrie : l'invariance par translation dans le temps et dans l'espace. En présence d'un champ gravitationnel qui dépend du temps et de la position, une telle invariance ne tient plus! Mais en même temps, la géométrie est ici la variable dynamique en même temps que le «support» de cette variable dynamique. On conçoit alors que la question soit un peu hors-norme.

On cherche à déterminer la forme d'un tenseur d'énergie-impulsion  $t_{ij}$  pour le champ gravitationnel lui-même. Manifestement un tel tenseur doit être nul en l'absence de champ, c'est-à-dire pour un observateur en chute libre, de par le principe d'équivalence. Donc un tel tenseur devrait être proportionnel à la connexion affine. Mais comme on peut toujours choisir un système de coordonnées localement en chute libre, dans lequel  $\Gamma_{jk}^i = 0$  en un point bien précis, il s'ensuit que  $t_{ij}$  devrait être nul en ce point, et donc nul dans tous les systèmes de coordonnées s'il s'agit bien d'un tenseur. Comme le point en question est quelconque, on en conclut que  $t_{ij}$  est nul partout et en toutes circonstances, ce qui nous empêche d'attribuer une énergie et une quantité de mouvement au champ gravitationnel. Nous avons un paradoxe.

**Loi de conservation de l'énergie-impulsion** Pour aller à la source de ce dilemme, retournons à ce que nous avons appelé la loi de conservation de l'énergie-impulsion :  $\nabla^i T_{ij} = 0$ . Comme montré au problème 2.8, une loi de conservation ordinaire caractérisée par un quadricourant  $J^i$  s'exprime comme

$$\nabla_i J^i = 0 \implies \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i [\sqrt{|g|} J^i] = 0 \quad (6.96)$$

De là on tire une relation intégrale via le théorème de la divergence :

$$\int_H \sqrt{|g|} \nabla_i J^i = \oint_{\partial H} da_i J^i = 0 \quad (6.97)$$

où  $H$  est un hypervolume quelconque et  $\partial H$  l'hypersurface qui le borne. Adoptons une hypersurface affectant la forme d'un hypercylindre; les deux extrémités sont des volumes ordinaires  $V$  à temps fixes  $t_i$  et  $t_f$  et leur contribution à l'intégrale ci-dessus est la différence  $Q_f - Q_i$  où

$$Q = \int_V d^3x J^0, \quad (6.98)$$

Cette différence est alors donnée par le flux du 3-vecteur  $\mathbf{J}$  à travers les côtés de l'hypercylindre entre ces deux temps. Ces côtés sont en fait constitués de la frontière  $\partial V$  du volume  $V$  en produit cartésien avec l'intervalle de temps  $[t_1, t_2]$ . La contribution des côtés de l'hypercylindre est le flux du vecteur  $\mathbf{J}$  à travers  $\partial V$ , intégré sur le temps, soit la quantité totale de  $Q$  sortant du volume durant cet intervalle. La relation (6.97) exprime donc la conservation d'une quantité dont la densité est  $J^0$  et le flux  $\mathbf{J}$ .

Dans le cas du tenseur d'énergie-impulsion, cette interprétation n'est plus possible, car

$$\nabla_i T^{ij} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i [\sqrt{|g|} T^{ij}] + \Gamma_{ik}^j T^{ik} \quad (6.99)$$

en raison du fait qu'on a affaire à un tenseur de rang 2 et non à un vecteur. Cette relation ne correspond pas à la conservation de quoi que ce soit, sauf si  $\Gamma_{jk}^i = 0$ , c'est-à-dire en l'absence de champ gravitationnel. Si  $T^{ij}$  représente le tenseur d'énergie-impulsion de la matière, cela signifie physiquement que l'énergie de la matière n'est pas conservée en général en présence d'un champ gravitationnel : il faut lui ajouter une contribution du champ de gravitation. Cependant cette contribution ne peut pas prendre la forme d'un tenseur  $t^{ij}$ , comme expliqué ci-haut.

**pseudo-tenseur d'énergie-impulsion** Par contre, on peut montrer qu'une quantité  $t^{ij}$  joue ce rôle, mais qu'il ne s'agit pas d'un tenseur. On l'appelle le *pseudo-tenseur d'énergie-impulsion* et elle a l'expression suivante :<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} t^{ik} = \frac{1}{16\pi} \{ & (2\Gamma_{lm}^n \Gamma_{np}^p - \Gamma_{lp}^n \Gamma_{mn}^p - \Gamma_{ln}^p \Gamma_{mp}^p)(g^{il} g^{km} - g^{ik} g^{lm}) \\ & + g^{il} g^{mn} (\Gamma_{lp}^k \Gamma_{mn}^p + \Gamma_{mn}^k \Gamma_{lp}^p - \Gamma_{np}^k \Gamma_{lm}^p - \Gamma_{lm}^k \Gamma_{np}^p) \\ & + g^{kl} g^{mn} (\Gamma_{lp}^i \Gamma_{mn}^p + \Gamma_{mn}^i \Gamma_{lp}^p - \Gamma_{np}^i \Gamma_{lm}^p - \Gamma_{lm}^i \Gamma_{np}^p) \\ & + g^{lm} g^{np} (\Gamma_{ln}^i \Gamma_{mp}^k - \Gamma_{lm}^i \Gamma_{np}^k) \} \end{aligned} \quad (6.100)$$

C'est une quantité quadratique en  $\Gamma$  ne comportant pas de dérivées; elle est donc nulle en un point donné dans un référentiel en chute libre. La propriété essentielle de cette quantité est que

$$\partial_k (|g| [T^{ik} + t^{ik}]) = 0 \quad (6.101)$$

(note : il s'agit bien de  $|g|$  et non de  $\sqrt{|g|}$ ). Comme cette expression a la forme d'une quadri-divergence nulle, elle décrit bien une loi de conservation, dans ce cas-ci l'énergie et la quantité de mouvement totales de la matière et du champ de gravitation. Notons aussi que  $t^{ik}$ , quoiqu'il ne soit pas un tenseur lors de changements de coordonnées générales, est un tenseur lors de changements de coordonnées linéaires, tels les transformations de Lorentz, car la connexion affine se transforme

2. Voir Landau & Lifchitz, théorie du champ, §100.

comme un tenseur lors de tels changements de coordonnées restreints. La raison en est que la déviation par rapport à la loi de transformation des tenseurs dans ce cas (éq. (2.53)) implique la deuxième dérivée de la transformation, qui s'annule pour une transformation linéaire.

Cependant, on ne peut pas interpréter  $t^{00}$  comme une densité d'énergie du champ gravitationnel. Physiquement, cette notion n'a pas de sens. L'expression  $t^{ij}$  donnée ci-dessus n'est pas unique : il existe d'autres pseudo-tenseurs qui mènent aussi à une loi de conservation de l'énergie-impulsion totale. Ce qui a un sens, cependant, c'est l'énergie totale obtenue en intégrant sur tout l'espace, en supposant que la métrique soit Minkowskienne à l'infini. On peut aussi donner un sens au flux d'énergie sortant d'une surface éloignée, dans une région où le champ est faible.

**limite des champs faibles** On peut montrer que, dans la limite des champs faibles, le pseudo-tenseur d'énergie-impulsion devient

$$t_{ij} = \frac{1}{32\pi} [\partial_i \bar{h}_{kl} \partial_j \bar{h}^{kl} - 2\partial_k \bar{h}^{lk} (\partial_i \bar{h}_{jl} + \partial_j \bar{h}_{il}) - \frac{1}{2} \partial_i \bar{h} \partial_j \bar{h}] \quad (6.102)$$

Dans la jauge de Lorentz transverse sans trace, cette expression se réduit à

$$t_{ij} = \frac{1}{32\pi} \partial_i \bar{h}_{kl} \partial_j \bar{h}^{kl} \quad (6.103)$$

En particulier, la partie radiative (non statique) de l'onde est telle que  $h_{0i} = 0$ . Donc en somme

$$t_{ij} = \frac{1}{32\pi} \partial_i \bar{h}_{ab} \partial_j \bar{h}^{ab} \quad (6.104)$$

Pour une onde de fréquence  $\omega$  et d'amplitudes  $a$  et  $b$  le long des deux polarisations, il faut moyenner sur une période et on trouve un flux d'énergie dans la direction de propagation donné par

$$F = \frac{\omega^2}{32\pi} (a^2 + b^2) \quad (6.105)$$

**rayonnement d'un objet binaire** Dans le cas de l'objet binaire étudié plus haut, le flux est différent selon qu'on se trouve le long de l'axe  $z$  ou de l'axe  $x$  :

$$F_z = \frac{16}{\pi} \left( \frac{Ma^2\Omega^3}{r} \right)^2 \quad F_x = \frac{2}{\pi} \left( \frac{Ma^2\Omega^3}{r} \right)^2 \quad (6.106)$$

soit 8 fois plus intense dans la direction perpendiculaire au plan de l'orbite que dans ce plan. À un angle  $\theta$  par rapport à la perpendiculaire au plan de l'orbite,  $\bar{h}^{ij}$  est donné par l'éq. (6.94), où la direction  $z$  correspond toujours à la direction radiale (c'est la direction de l'axe de l'orbite qui change). Le flux d'énergie est alors

$$F = \frac{8}{\pi} \left( \frac{Ma^2\Omega^3}{r} \right)^2 \left[ \cos^2 \theta + \frac{1}{4}(1 + \cos^2 \theta)^2 \right] \quad (6.107)$$

En intégrant sur les angles solides, on trouve la puissance rayonnée totale :

$$W = 2\pi \int_{-1}^1 d\cos \theta F(\theta) = \frac{128}{5} (Ma^2\Omega^3)^2 \quad (6.108)$$

Pour un système binaire,  $\Omega^2 = M/(4a^3)$  et donc la perte d'énergie par unité de temps d'un tel système est

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2}{5} \frac{M^5}{a^5} \quad (6.109)$$

Comme l'énergie en fonction de  $a$  est  $E = -M^2/(4a)$ , on trouve

$$\frac{d}{dt} \frac{M^2}{4a} = -\frac{M^2}{4a^2} \frac{da}{dt} = \frac{2}{5} \frac{M^5}{a^5} \quad (6.110)$$

Il est en fait plus pratique de déterminer la variation de la fréquence en fonction du temps :

$$2\Omega \frac{d\Omega}{da} = -\frac{3M}{4a^4} \implies \frac{d\Omega}{dt} = \frac{d\Omega}{da} \frac{da}{dt} = \frac{3M^4}{5a^7\Omega} = \frac{3M^4}{5\Omega} \left( \frac{4\Omega^2}{M} \right)^{7/3} \quad (6.111)$$

ou encore

$$d\Omega \Omega^{-11/3} = M^{5/3} \frac{96}{5 \cdot 2^{1/3}} dt \implies -\frac{3}{8} \Omega^{-8/3} = M^{5/3} \frac{96}{5 \cdot 2^{1/3}} t - \frac{3}{8} \Omega_0^{-8/3} \quad (6.112)$$

où  $\Omega_0$  est la fréquence de l'orbite à  $t = 0$ . En somme,

$$\Omega(t) = \Omega_0 \left[ 1 - M^{5/3} \Omega_0^{8/3} \frac{256}{5 \cdot 2^{1/3}} t \right]^{-3/8} \quad (6.113)$$

En fonction de la période  $P = 2\pi/\Omega$ , on obtient plutôt

$$P(t) = P_0 \left[ 1 - (2\pi M)^{5/3} P_0^{-8/3} \frac{256}{5} 4^{1/3} \pi t \right]^{3/8} \quad (6.114)$$

Pour des temps petits, on peut appliquer la formule du binôme :

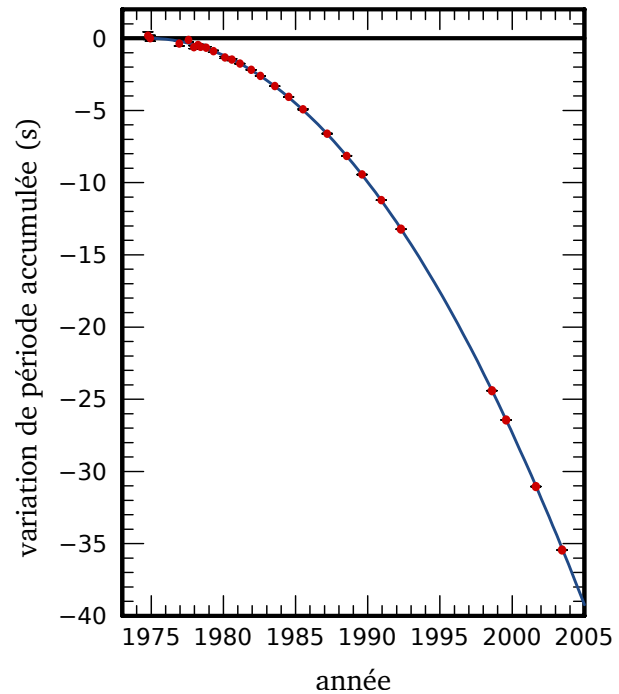
$$P(t) \approx P_0 - \left( \frac{2\pi M}{P_0} \right)^{5/3} \frac{96}{5} 4^{1/3} \pi t \quad (6.115)$$

On présente généralement ce résultat en fonction de la différence de période accumulée depuis l'observation, ce qui équivaut à

$$\int_0^t [P(t') - P_0] dt' = - \left( \frac{2\pi M}{P_0} \right)^{5/3} \frac{48}{5} 4^{1/3} \pi t^2 \quad (6.116)$$

soit une décroissance parabolique en fonction du temps.

**pulsar binaire de Hulse-Taylor** En 1974, R.A. Hulse et J.H. Taylor ont découvert un nouveau pulsar (PSR-B1913) à l'aide du radiotélescope d'Arecibo. Rappelons qu'un pulsar est une étoile à neutrons en rotation rapide qui émet des radiofréquences principalement dans la direction de ses pôles magnétiques. Le désalignement entre l'axe de rotation de l'étoile et celui du pôle magnétique fait que le pulsar se comporte comme un «phare» et que l'intensité du rayonnement radio observé sur Terre oscille à la fréquence de rotation de l'étoile sur elle-même. La période de PSR-B1913 est de 7,75 heures et la distance entre les deux partenaires est de 3 secondes-lumières, soit inférieure au diamètre du soleil. PSR-B1913 a ceci de particulier qu'un décalage périodique des signaux est observé, attribué à l'effet Doppler résultant d'un mouvement orbital du pulsar. Autrement dit, ce pulsar est binaire et possède un mouvement de révolution en plus de son mouvement de



**FIGURE 6.4**  
Variation accumulée de la période de révolution du pulsar binaire de Hulse-Taylor.

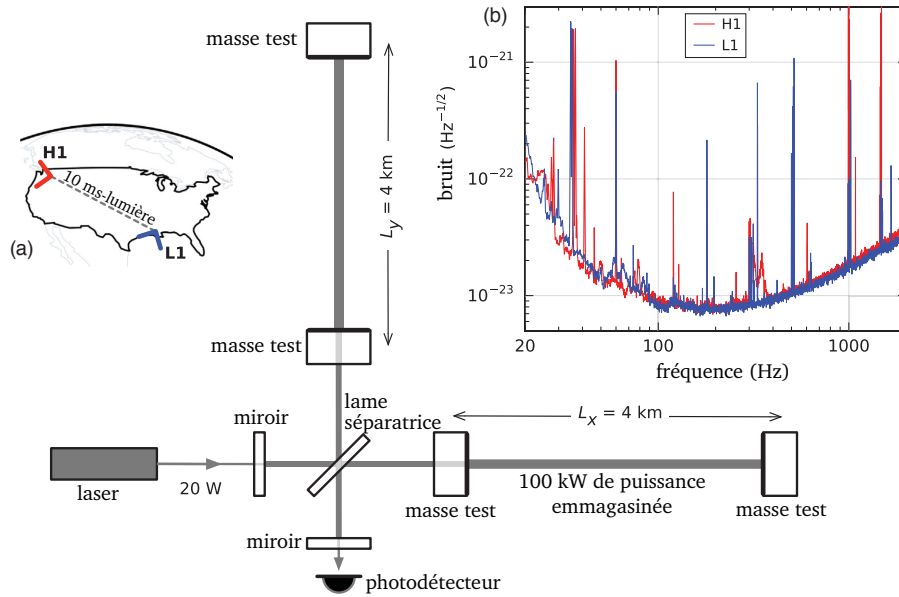
rotation. Hulse et Taylor ont observé que la période orbitale du pulsar diminuait avec le temps de manière linéaire, donc que le retard accumulé augmentait de manière quadratique, comme prédit par la formule (6.116).<sup>3</sup> Voir à cet effet la fig. 6.4. Cette perte d'énergie du pulsar a été attribuée au rayonnement d'ondes gravitationnelles; il s'agit de la première évidence indirecte de l'existence de ces ondes. La différence entre observation et théorie est de l'ordre de 0,2%. La puissance émise en ondes gravitationnelles par ce pulsar binaire équivaut à environ 1.9% de la puissance totale (tous rayonnements) émise par le soleil. Le prix Nobel de physique a été attribué à Hulse et Taylor en 1993 pour cette découverte.

### 6.C.5 Détection des ondes gravitationnelles

Dès 1967 Rainer Weiss proposa de construire un interféromètre de grandes dimensions afin de pouvoir détecter le passage d'ondes gravitationnelles résultant d'événements catastrophiques éloignés. L'année suivante Kip Thorne démarra un programme de recherche visant à établir les sources possibles d'ondes gravitationnelles pouvant être détectées avec ce type d'interféromètre. Après plus de 25 ans de travail, la construction du détecteur LIGO (*Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*) démarra en 1994 et son opération débuta en 2002. Les résultats furent initialement négatifs et une augmentation importante de la sensibilité (*advanced LIGO*) fut mise en place à partir de 2010 et l'observation démarra de nouveau en septembre 2015. Quelques jours à peine après sa mise en production, LIGO détecta son premier événement d'importance, du nom de code GW150914 (pour «14 septembre 2015»). Le prix Nobel fut attribué à Rainer Weiss, Kip Thorne et Barry C. Barish en 2017 pour cette découverte qui semble capable de révolutionner l'astronomie d'observation.

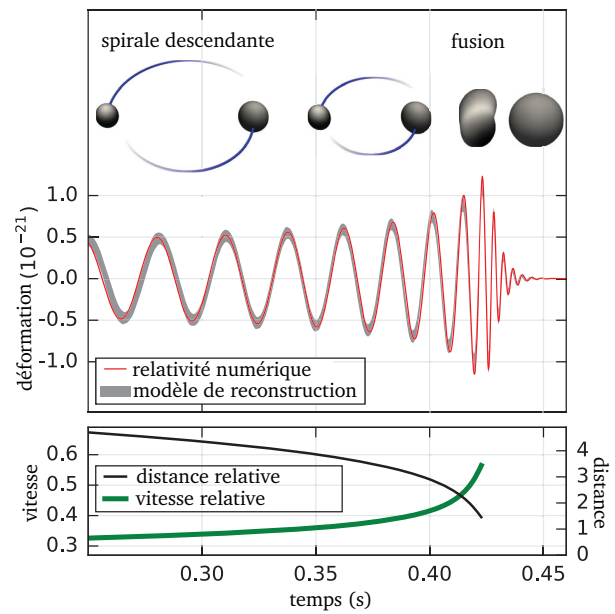
3. En réalité, cette formule ne s'applique qu'une fois corrigée pour l'orbite elliptique du pulsar, mais cela n'affecte que le coefficient du terme en  $t^2$ .





**FIGURE 6.5**  
Schéma de l'interféromètre LIGO (modifié de l'illustration figurant dans la publication originale). [10.1103/PhysRevLett.116.061102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.061102)

**FIGURE 6.6**  
Prédiction théorique du signal perçu par LIGO lors de l'événement GW150914 (modifié de l'illustration figurant dans la publication originale). [10.1103/PhysRevLett.116.061102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.061102)



## Chapitre 6. Ondes gravitationnelles

Un schéma de l'interféromètre LIGO apparaît à la figure 6.5. Le principe en est simple, mais la réalisation complexe. Un interféromètre de type Michelson dont les bras ont 4 km de long est alimenté par un faisceau laser qui est réfléchi de multiples fois sur la longueur de l'interféromètre, comme dans un interféromètre de Fabry-Pérot. Le passage d'une onde gravitationnelle, par exemple polarisée dans le plan de l'interféromètre, cause des changements de longueur (déformations) en antiphase des bras de l'interféromètre, causant l'apparition d'un signal non nul au détecteur qui normalement ne devrait rien recevoir en raison d'une interférence destructrice parfaite. L'amplitude de la déformation détectable de cette manière est infime : une partie sur  $10^{21}$ , soit environ  $10^{-18}$ m, ce qui représente un millième de la taille d'un proton. Le détecteur est un miracle de mécanique. Les masses tests qui portent les miroirs définissant la longueur des bras sont suspendues de manière multiple et les mécanismes de suspension sont en mesure d'éliminer les sources de bruit les plus immédiates, tels les véhicules qui circulent à quelques centaines de mètres du détecteur. Plus important, le détecteur repose sur la coïncidence : deux copies identiques de l'interféromètre ont été construites : l'une près de Hanford WA, l'autre près de Livingstone LA, distantes de 10 ms-lumière. Pour être significatif, un signal doit être détecté aux deux endroits à moins de 10 ms d'intervalle. La figure 6.5 illustre aussi le niveau de sensibilité de LIGO en fonction de la fréquence du signal. Cette sensibilité est maximale autour de 200 Hz.

Un événement capable de générer des ondes gravitationnelles détectables sur Terre est la chute l'un sur l'autre, suivie de la fusion, de deux trous noirs. L'événement GW150914 a pu être modélisé par la relativité générale numérique (angl. *numerical relativity*) et le signal attendu est illustré sur la figure (6.6).<sup>4</sup> L'orbite d'un système binaire de trous noirs est de plus en plus rapide en raison de la perte d'énergie due au rayonnement. Cette perte est initialement bien décrite par la théorie expliquée ci-haut. Par contre, le mouvement devient éventuellement relativiste et les champs très intenses. Il ne peut être décrit par une solution approximative analytique des équations de la relativité générale et une solution numérique doit être obtenue. Le mouvement de chute en spirale des deux trous noirs s'accélère et se termine par une fusion des deux horizons en un seul, auquel point le rayonnement d'ondes gravitationnelles cesse. L'oscillation qui s'accélère (fréquence qui augmente) et qui augmente en intensité produit un *chirp* (littéralement, un «gazouillis») qui, s'il était traduit en onde sonore, serait audible, car il se déroule sur une fraction de seconde. On estime que les trous noirs impliqués dans l'événement GW150914 avaient des masses respectives de 36 et 29 masses solaires et que l'énergie libérée lors de la fusion était de 3 masses solaires, représentant une puissance de  $3,6 \times 10^{49}$  W à son maximum.

D'autres événements ont été détectés depuis septembre 2015. Le 17 août 2017, un sursaut gamma a été détecté par le télescope spatial à rayons gamma *Fermi*. LIGO a observé, 2 secondes avant cet événement, un signal compatible avec la fusion de deux étoiles à neutrons (GW170817). Environ 11 heures plus tard, un événement compatible fut détecté par des télescopes optiques, des radio-télescopes et un télescope à rayons X, dans la galaxie NGC4993.<sup>5</sup> On croit maintenant que ce type d'événement (appelé *kilonova*, soit la fusion de deux étoiles à neutrons ou d'une étoile à neutrons et d'un trou noir) produit environ la moitié des éléments plus lourds que le fer, via ce qu'on appelle le *processus R*. La synchronisation de différents moyens avancés d'observation impensables il y a à

---

4. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration), *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, Phys. Rev. Lett. 116 (6) : 061102 (2016).<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.116.061102>

5. Abbott et al. (LIGO, Virgo and other collaborations), *Multi-messenger Observations of a Binary Neutron Star Merger*, The Astrophysical Journal. 848 (2) : L12 (2017).<https://dcc.ligo.org/public/0145/P1700294/007/ApJL-MMAP-171017.pdf>

peine 20 ans a été capitale dans cette découverte sensationnelle.

## D Problèmes

### Problème 6.1 caractère tensoriel de $h_{ij}$

Dans l'approximation des faibles champs, on écrit  $g_{ij}(x) = \eta_{ij} + h_{ij}(x)$ . Est-ce que  $h_{ij}$  est un tenseur? Justifiez.

### Problème 6.2 conservation de l'énergie-impulsion par les équations d'Einstein

Montrez que les équations d'Einstein linéarisées entraînent la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement des sources.

### Problème 6.3 tenseur de Riemann d'une onde gravitationnelle

Calculez le tenseur de Riemann pour une onde gravitationnelle plane de quadrivecteur d'onde  $q_i$  :

$$h_{ij} = A_{ij} e^{-iq_j x^j} \quad A_{ij} = \text{cte} \quad (6.117)$$

Montrez que si  $q^2 \neq 0$ , alors nécessairement  $R^i{}_{jkl} = 0$  et donc la géométrie est triviale. Indice : servez-vous des équations d'Einstein dans le vide et de la quantité  $w_i = q^j A_{ij} - \frac{1}{2} q_i A$ , où  $A = A^i{}_i$ .

### Problème 6.4 Moment cinétique du trou noir de Kerr

Dans cet exercice nous allons montrer que la métrique de Kerr décrit bien le champ produit par un objet de moment cinétique  $J = Ma$ , dans l'approximation où cet objet est non relativiste. Supposons que la source du champ gravitationnel est un objet compact à symétrie cylindrique (ou azimutale) de moment cinétique  $J = I\omega$ , où  $I$  est le moment d'inertie de l'objet par rapport à l'axe des  $z$  et  $\omega$  sa vitesse angulaire (positive si la rotation est anti-horaire). Plaçons l'origine au centre de masse de l'objet.

**A** Écrivez les composantes de la vitesse  $u^i$  d'un point matériel dans l'objet en fonction de sa position  $x^a$  dans l'approximation non relativiste, ainsi que les composantes  $T^{0a}$  ( $a = 1, 2, 3$ ) du tenseur énergie-impulsion. Exprimez votre résultat en fonction de la densité de masse  $\rho(\mathbf{r})$  et de  $\omega$ .

**B** Appliquez votre résultat pour obtenir la déviation  $\bar{h}_{0a}$  selon la solution

$$\bar{h}_{ik}(t, \mathbf{r}) = -4 \int d^3 r' \frac{T_{ik}(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Vous aurez besoin du développement suivant :

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3}$$

**C** En comparant avec la métrique de Kerr au premier ordre en  $M$ , montrez que le produit  $Ma$  est bel et bien le moment cinétique  $J$  de la source.



## CHAPITRE 7

# COSMOLOGIE

### A Le principe cosmologique

La cosmologie est l'étude de l'Univers dans son ensemble, sur une très grande échelle. Elle requiert des approximations simplificatrices, dont la plus importante est de négliger les variations de densité dans l'univers, c'est-à-dire la granularité de la matière. Ainsi, nous allons imaginer dans ce chapitre que les structures connues de l'Univers, étoiles, amas d'étoiles, galaxies ou groupes de galaxies, sont remplacées par une «soupe» uniforme. On peut comparer cette approximation à celle qui considère la planète Terre comme une sphère, ou encore un ellipsoïde aplati, en négligeant l'existence des continents et des chaînes de montagnes : quoique cette dernière approximation n'ait pas de sens en géologie, elle est parfaitement raisonnable en astronomie.

De plus, on adoptera le «principe cosmologique», qui stipule que l'Univers a les mêmes propriétés partout et dans toutes les directions. Ce principe simplificateur, aussi simple semble-t-il, mérite d'être précisé. En effet, tout le problème vient du fait que nous avons affaire à un milieu matériel et non à un espace vide. Or, nous savons qu'en relativité restreinte, un milieu matériel définit un référentiel particulier dans lequel ce milieu est au repos. Les propriétés apparentes de ce milieu, si elles sont isotropes dans son référentiel, ne le seront plus lorsqu'observées à partir d'un référentiel en mouvement par rapport au milieu. La notion d'isotropie est donc attachée à un référentiel particulier. À l'échelle de l'Univers, cette notion sera également attachée à une catégorie de systèmes de coordonnées.

**coordonnées synchrones** Nous allons définir un système de coordonnées *synchrone* de la manière suivante : on imagine un observateur qui, le long de sa ligne d'univers, perçoit l'Univers de manière isotrope. Par exemple, cet observateur ne détecte aucune anisotropie dans le rayonnement micro-ondes fossile. Un autre observateur, se déplaçant à une vitesse constante par rapport au premier, pourrait en principe détecter un effet Doppler dans ce rayonnement, avec un point de fuite dans la direction du premier observateur. Considérons maintenant un continuum d'*observateurs fondamentaux*, chacun étant basé à un endroit différent et chacun percevant l'Univers de manière isotrope. Les lignes d'univers de ces observateurs fondamentaux ne se croisent pas, sinon ils auraient une vitesse relative quand ils se croisent et ne pourraient pas tous les deux percevoir l'univers de manière isotrope. On peut également considérer une hypersurface de genre espace, ou plutôt une famille d'hypersurfaces de genre espace qui intersectent les lignes d'univers de ces observateurs fondamentaux à angle droit, ce qui signifie qu'un déplacement infinitésimal le long de l'une de ces hypersurfaces à proximité d'un observateur fondamental correspond à un même temps pour cet observateur. Au total, on peut imaginer un système de coordonnées dans l'espace-temps

défini par ces hypersurfaces de genre espace et ces observateurs fondamentaux, de manière à ce que chaque observateur fondamental soit stationnaire (immobile dans l'espace) et qu'une hypersurface donnée corresponde à un temps donné. Ce temps  $t$  est le temps propre de tous les observateurs fondamentaux. C'est ce qu'on entend par une système de coordonnées *synchrone*.

Le fait que les coordonnées spatiales, à un temps  $t$  fixe, décrivent une hypersurface orthogonale aux lignes d'univers des observateurs fondamentaux se traduit par une métrique ayant la forme suivante :

$$ds^2 = dt^2 - g_{ab} dx^a dx^b \quad (7.1)$$

où les indices  $a, b, c$ , appartenant aux premières lettres de l'alphabet latin, varient de 1 à 3 et numérotent les coordonnées *spatiales*. Ainsi, la ligne d'univers d'un observateur fondamental correspond à  $dx^a = 0$  et le temps  $t$  correspond au temps propre écoulé le long de cette ligne d'univers. Ces lignes d'univers sont des géodésiques. En effet, pour qu'elles le soient, il faut simplement que  $\Gamma_{00}^i = 0$ , ce qui est le cas puisque

$$\Gamma_{00}^i = g^{ij} (2\partial_0 g_{j0} - \partial_j g_{00}) \quad (7.2)$$

et que  $g_{00} = 1$  et  $g_{a0} = 0$ .

Reste à déterminer la forme que doit prendre  $g_{ab}$ , tout en conservant une certaine liberté dans le choix des coordonnées spatiales. Considérons à cet effet un triangle, dont les sommets pourraient être trois galaxies, en apparence ponctuelles dans cette approximation, et considérées au même instant  $t$ . Ce triangle a une certaine forme (caractérisée par ses angles aux trois sommets) et cette forme est déterminée par la métrique spatiale  $g_{ab}$ . Si l'Univers est isotrope, le triangle doit demeurer semblable à lui-même au cours du temps, c'est-à-dire qu'il ne peut changer que par un facteur d'échelle. Ce facteur d'échelle doit être le même partout en raison du principe d'homogénéité, mais peut dépendre du temps. Nous écrirons donc la forme générale suivante :

$$ds^2 = dt^2 - S^2(t) h_{ab} dx^a dx^b \quad (7.3)$$

où  $S(t)$  est un facteur d'échelle qui dépend du temps et où  $h_{ab}$  ne dépend pas du temps, mais seulement des coordonnées spatiales.

## **B** Univers de Friedmann-Lemaître

### 7.B.1 Métrique de Friedmann-Lemaître

Lors de l'étude de la métrique de Schwarzschild, nous avons déterminé que l'isotropie ne laissait que trois combinaisons possibles de  $\mathbf{r} = (x^1, x^2, x^3)$  et de  $d\mathbf{r}$  dans la métrique, soit

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \quad , \quad \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \quad , \quad d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \quad (7.4)$$

et donc que la métrique spatiale la plus générale compatible avec l'isotropie aurait la forme suivante ( $d\sigma$  est l'élément de distance spatiale) :

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= C(r)(\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r})^2 + D(r)(d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}) \\ &= C(r)r^2 dr^2 + D(r)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) \end{aligned} \quad (7.5)$$



où  $r^2 \equiv \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$ . On peut toujours redéfinir  $r$  de manière à ce que  $D(r) = 1$ , et donc on peut adopter, sans perte de généralité, la forme suivante pour la métrique spatiale :

$$d\sigma^2 = B(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 = B(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (7.6)$$

Ceci représente en fait un cas particulier de la métrique (4.14) où  $A(r, t) = 1$  et  $B(r, t) = S(t)B(r)$ .

Nous allons maintenant déterminer la forme de  $B$  d'après la condition d'homogénéité. Pour ce faire, calculons la courbure scalaire et demandons qu'elle soit indépendante de la position. Nous devons donc commencer par calculer la connexion affine et ensuite le tenseur de Ricci. En adoptant la forme (7.6) de la métrique spatiale, on vérifie que les composantes non nulles de la connexion sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^r &= \frac{B'}{2B} & \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= -\frac{r}{B} & \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= -\frac{1}{2} \sin 2\theta \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -\frac{r \sin^2 \theta}{B} & \Gamma_{r\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r} \\ & & \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \cot \theta \end{aligned} \quad (7.7)$$

De même, les composantes non nulles du tenseur de Ricci spatial sont les suivantes :

$$\begin{aligned} R_{rr} &= \frac{B'}{rB} \\ R_{\theta\theta} &= 1 - \frac{1}{B} + \frac{rB'}{2B^2} \\ R_{\varphi\varphi} &= R_{\theta\theta} \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (7.8)$$

La courbure scalaire spatiale, quant à elle, est

$$R_s = \frac{2B'}{rB^2} + \frac{2}{r^2} - \frac{2}{r^2 B} \quad (7.9)$$

Par le principe d'homogénéité, la courbure scalaire devrait être une constante, indépendante de la position. L'éq. (7.9) constitue donc une équation différentielle qu'on peut tenter de résoudre. La forme du premier terme suggère de poser  $B = 1/U$  et donc

$$R_s = -\frac{2U'}{r} + \frac{2}{r^2} - \frac{2U}{r^2} \quad (7.10)$$

Comme les deux derniers termes sont semblables, on peut poser  $V = U - 1$  et alors

$$R_s = -\frac{2V'}{r} - \frac{2V}{r^2} \quad (7.11)$$

Enfin, cette dernière forme suggère une loi de puissance pour  $V$  : on pose  $V = -Kr^m$  et on trouve

$$R_s = 2mKr^{m-2} + 2Kr^{m-2} \quad (7.12)$$

ce qui entraîne que  $m = 2$  et  $R_s = 6K$ .<sup>1</sup> Donc  $U = 1 - Kr^2$  et  $B(r) = 1/(1 - Kr^2)$ . Cette solution dépend donc d'un paramètre arbitraire  $K$  (qui peut être positif, négatif ou nul) et la métrique spatiale s'écrit

1. La possibilité  $m = -1$  est aussi valable, mais mène à  $R = 0$  et correspond en fait à la partie spatiale de la métrique de Schwarzschild, dont on sait qu'elle brise la condition d'homogénéité.

alors

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \quad (7.13)$$

Au total, la métrique de l'espace-temps est donc

$$ds^2 = dt^2 - S^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (7.14)$$

**paramètre d'échelle  $R(t)$**  Notons qu'on peut écrire la métrique ci-dessus différemment, en absorbant le paramètre  $K$  dans le facteur d'échelle  $S(t)$ . Pour ce faire, on redéfinit la coordonnée radiale ainsi :  $r = \bar{r}|K|^{-1/2}$  (ou  $\bar{r} = r$  si  $K = 0$ ). On définit aussi l'entier  $k = \text{sgn}(K) = K/|K|$  qui vaut soit 1, -1, ou 0 si  $K = 0$ . On obtient alors la forme suivante :

$$ds^2 = dt^2 - \frac{S^2(t)}{|K|} \left[ \frac{d\bar{r}^2}{1 - k\bar{r}^2} + \bar{r}^2 d\Omega^2 \right] \quad (7.15)$$

Enfin, on définit un nouveau paramètre d'échelle<sup>2</sup>  $R(t) = S(t)|K|^{-1/2}$  (ou  $R(t) = S(t)$  si  $K = 0$ ) et on redéfinit le symbole  $\bar{r} \rightarrow r$  pour obtenir la forme standard suivante :

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (7.16)$$

Cette métrique porte plusieurs noms. Elle a été découverte indépendamment par le Russe Alexandre Friedmann en 1924<sup>3</sup>, le prêtre belge Georges Lemaître en 1927<sup>4</sup>, l'Américain H.P. Robertson en 1929<sup>5</sup> et le Britannique A. G. Walker en 1936. Dans les pays de tradition anglo-saxonne, cette métrique a longtemps été connue exclusivement sous le nom de Robertson-Walker, même si ces deux auteurs sont les derniers de la liste chronologique. De nos jours, la tendance est de la désigner par le quadruple nom Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, ou simplement Friedmann-Lemaître, étant donné la priorité mathématique de Friedmann et la priorité interprétative de Lemaître.<sup>6</sup>

**courbure scalaire spatiale** La courbure scalaire spatiale associée à la métrique (7.16) est

$$R_s = \frac{6k}{R^2(t)} \quad (7.17)$$

Pour démontrer cette relation, notons que la différence entre la partie spatiale de la métrique (7.16) et la métrique (7.13) est simplement le facteur  $S^2(t)$ . Si on multiplie le tenseur métrique par une

2. Ne pas confondre  $R(t)$  avec la courbure scalaire spatiale  $R_s$ , ni cette dernière avec la courbe scalaire de l'espace-temps, qui ne nous occupera pas ici.

3. *Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes*, Zeitschrift für Physik, Vol. 21, pp. 326332 (1924).

4. *Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extragalactiques*, Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, vol. 47, p. 49 (1927).

5. *On the Foundations of Relativistic Cosmology*, Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 15 (11) : p. 822 (1929).

6. Robertson et Walker se sont occupés exclusivement de la partie spatiale de la métrique, en démontrant notamment qu'elle constituait la forme la plus générale d'un espace homogène et isotrope. Friedmann et Lemaître, sans démontrer ce fait, se sont par contre occupés de la dynamique de la métrique dans l'espace-temps et de la relation avec les équations d'Einstein pour la relativité générale.

constante  $\alpha$ , on montre facilement que la courbure scalaire correspondante est multipliée par  $\alpha^{-1}$ . Donc la courbure scalaire spatiale, au lieu de valoir  $6K$ , vaut  $6K/S^2(t) = 6k/R^2(t)$ ; plus le «rayon»  $R(t)$  est grand, plus elle est faible.

Remarquons aussi que la métrique (7.16), quoiqu'elle soit décrite en coordonnées sphériques et que ces coordonnées comportent une origine qui semble un point particulier, aurait la même forme, quelle que soit l'origine. La courbure scalaire, donc la géométrie, est homogène. Il s'agit d'une propriété remarquable de cette métrique. On peut comparer cette situation à celle d'une 2-sphère, dont la géométrie est partout la même, mais dont les coordonnées sphériques habituelles  $(\theta, \varphi)$  laissent entendre que les pôles  $\theta = 0, \pi$  sont des points particuliers.

Enfin, on peut aussi définir une coordonnée  $\psi$  telle que

$$d\psi = \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (7.18)$$

ce qui donne, après intégration,  $r = r(\psi)$ , où

$$\begin{aligned} r(\psi) &= \sin \psi & (k = 1) \\ r(\psi) &= \psi & (k = 0) \\ r(\psi) &= \sinh \psi & (k = -1) \end{aligned} \quad (7.19)$$

et donc la métrique suivante :

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) [d\psi^2 + r^2(\psi) d\Omega^2] \quad (7.20)$$

---

### 7.B.2 Espace à courbure spatiale constante positive

Considérons plus en détail le cas  $k = 1$  et ne nous occupons que de la partie spatiale de la métrique :

$$d\sigma^2 = R^2(d\psi^2 + \sin^2 \psi d\Omega^2) \quad (7.21)$$

Montrons que cette métrique décrit une 3-sphère, c'est-à-dire une surface plongée dans un espace euclidien à quatre dimensions décrit par des coordonnées  $(w, x, y, z)$ , définie par la contrainte

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (7.22)$$

On peut en fait définir les coordonnées hyper-sphériques  $(\psi, \theta, \varphi)$  :

$$\begin{aligned} w &= R \cos \psi \\ x &= R \sin \psi \sin \theta \cos \varphi \\ y &= R \sin \psi \sin \theta \sin \varphi \\ z &= R \sin \psi \cos \theta \end{aligned} \quad (7.23)$$

### Georges Lemaître

Georges Lemaître (1895/1966) était un astronome belge et un prêtre catholique, professeur à l'Université catholique de Louvain. Il étudie la relativité sous Eddington à Cambridge et ensuite au M.I.T. En 1927, indépendamment d'Alexandre Friedmann, Georges Lemaître publie un article dans les Annales de la Société scientifique de Bruxelles intitulé *Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant* établissant que l'Univers est en expansion. Il est le premier à établir la relation de proportionnalité entre la distance et la vitesse de récession des galaxies à partir des données de Slipher et de Hubble lui-même, introduisant donc la constante de Hubble deux ans avant ce dernier. Au début des années 1930, Lemaître propose la théorie de l'*atome primitif*, qui stipule que l'Univers est né lors d'une explosion primordiale et qu'il est en expansion depuis. Cette idée sera plus tard tournée en dérision par l'astrophysicien britannique Fred Hoyle qui la surnommera *big bang*, nom qui lui est resté. En 1951, le pape Pie XII fera un parallèle entre cette théorie et le récit biblique de la création dans un effort pour réconcilier science et religion, au sein d'un courant appelé *concordisme*. Lemaître fera connaître son opposition à cet effort et Pie XII retirera plus tard ses allusions à la théorie de l'atome primitif. Lemaître mourut en 1966, quelques semaines après avoir appris la découverte du rayonnement cosmologique, la confirmation la plus probante de sa théorie. En octobre 2018, un vote électronique des membres de l'Union astronomique internationale approuva à 78% une proposition afin que la loi de Hubble soit dorénavant connue sous le nom de loi de Hubble-Lemaître. [wikipédia](#)



et on montre sans peine que

$$d\sigma^2 = dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = R^2(d\psi^2 + \sin^2 \psi d\Omega^2) \quad (7.24)$$

La coordonnée  $\psi$  varie de 0 à  $\pi$ ,  $\theta$  varie aussi de 0 à  $\pi$  alors que  $\varphi$  varie de 0 à  $2\pi$ . La 3-sphère possède un volume fini, donné par

$$V = \int_0^\pi R d\psi \int_0^\pi R \sin \psi d\theta \int_0^{2\pi} R \sin \psi \sin \theta d\varphi = 2\pi^2 R^3 \quad (7.25)$$

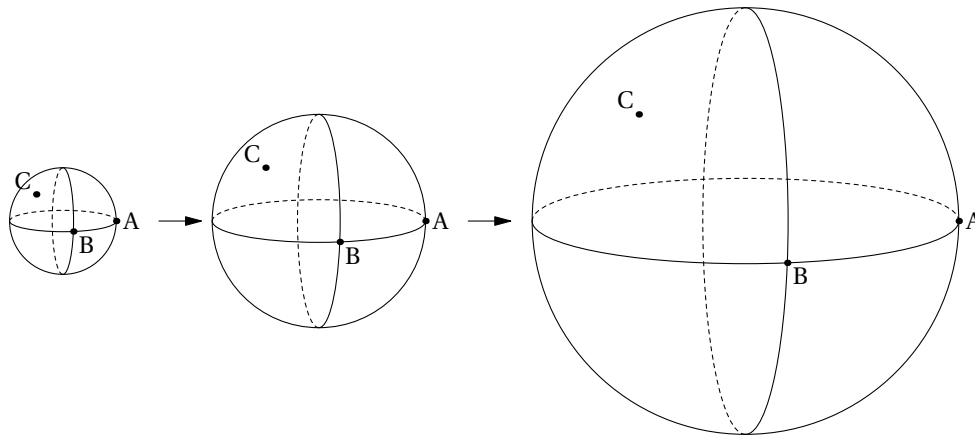
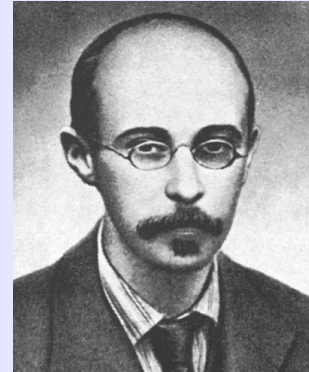
C'est pour cette raison qu'on appelle  $R$  le «rayon de l'Univers» dans ce contexte.

La figure 7.1 illustre une coupe de cet univers sphérique en expansion en fonction du temps. La 2-sphère illustrée ici correspond, par exemple, à la coupe  $w = 0$  de la 3-sphère. Les trois points A, B et C s'éloignent les uns des autres d'autant plus rapidement que le rayon est grand, quoique leurs coordonnées sur la sphère soient constantes. Un voyageur qui se dirige de A vers B, dans l'espoir peut-être de revenir sur A en faisant le tour de l'univers, se trouve confronté à l'expansion de l'univers au fur et à mesure qu'il avance. Un facteur  $R(t)$  en expansion trop rapide pourrait en fait lui interdire d'atteindre le point B.

**Alexandre Friedmann**

Alexandre Friedmann (ou Fridman) (1888/1925) était un physicien théoricien et mathématicien russe actif au début de la période soviétique. En 1924 il publia un article intitulé *Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes* (*Sur la possibilité d'un univers à courbure spatiale négative constante*) dans *Zeitschrift für Physik*. Dans cet article et les suivants, il obtint la forme de la métrique pour des univers contenant une matière homogène et une courbure négative, positive ou nulle. Il est aussi connu comme le mentor de George Gamow et de Vladimir Fock. Friedmann est mort en 1925 d'une fièvre typhoïde diagnostiquée trop tardivement.

wikipédia



**FIGURE 7.1**

Représentation schématique de l'expansion d'un univers à courbure constante positive en fonction du temps.

**7.B.3 Espace à courbure spatiale constante négative**

Supposons maintenant que  $k = -1$ . Dans ce cas, l'espace ne peut pas être plongé dans un espace euclidien de dimension 4, mais peut-être plongé dans un espace pseudo-euclidien de dimension 4, avec les coordonnées suivantes :

$$\begin{aligned}
 w &= R \cosh \psi \\
 x &= R \sinh \psi \sin \theta \cos \varphi \\
 y &= R \sinh \psi \sin \theta \sin \varphi \\
 z &= R \sinh \psi \cos \theta
 \end{aligned}
 \tag{7.26}$$

L'hypersurface constituant l'espace est définie par la relation

$$w^2 - x^2 - y^2 - z^2 = R^2
 \tag{7.27}$$

et la métrique de l'hôte est pseudo-euclidienne :

$$d\sigma^2 = -dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = R^2(d\psi^2 + \sinh^2 \psi d\Omega^2) \quad (7.28)$$

Dans ce cas, le domaine de variation de  $\psi$  est  $[0, \infty]$ , alors que  $\theta$  et  $\varphi$  ont les mêmes domaines de variation qu'avant. Le volume total de l'espace est infini.

Enfin, dans le cas  $k = 0$ , l'espace est plat et la seule particularité de la métrique est ce facteur d'échelle  $R(t)$  qui change en fonction du temps.

#### 7.B.4 Géodésiques dans l'espace de Friedmann-Lemaître

Examinons la forme des géodésiques dans la métrique de Friedmann-Lemaître. Sans perte de généralité, on peut supposer que la géodésique passe par le point  $r = 0$ . Utilisons pour cela la version (2.79) de l'équation de la géodésique en fonction de la quadrivitesse  $u$  :

$$\dot{u}_i = \frac{1}{2} \partial_i g_{jk} u^j u^k \quad (7.29)$$

Comme la métrique ne dépend pas de la coordonnée azimutale  $\varphi$ , on constate que  $\dot{u}_\varphi = 0$ , donc que  $u_\varphi$  est constant. Or

$$u_\varphi = g_{i\varphi} u^i = -R(t)r^2(\psi)u^\varphi \quad (7.30)$$

À  $r = 0$ ,  $r(\psi) = 0$  et donc  $u_\varphi = 0$ , ce qui entraîne que  $u_\varphi = 0$  partout le long de la géodésique, donc que  $u^\varphi = 0$  également. Comme  $u^\varphi = \dot{\varphi}$ , cela entraîne que  $\varphi$  est constant le long de la géodésique.

Considérons ensuite la composante en  $\theta$  de l'équation :

$$\dot{u}_\theta = \frac{1}{2} \partial_\theta g_{jk} u^j u^k = \frac{1}{2} \partial_\theta g_{\varphi\varphi} u^\varphi u^\varphi \quad (7.31)$$

car  $g_{\varphi\varphi}$  est la seule composante du tenseur métrique qui dépend de  $\theta$ . Or, comme  $u^\varphi = 0$ , on se retrouve encore avec l'équation simple  $\dot{u}_\theta = 0$ . Le même raisonnement qui ci-dessus nous mène à la conclusion que  $u^\theta = 0$  et donc que  $\theta$  est constant le long de la géodésique.

Considérons ensuite la composante en  $\psi$  :

$$\dot{u}_\psi = \frac{1}{2} \partial_\psi g_{jk} u^j u^k \quad (7.32)$$

Comme seuls  $g_{\theta\theta}$  et  $g_{\varphi\varphi}$  dépendent de  $\psi$  et que  $u^\theta = u^\varphi = 0$ , on trouve aussi  $\dot{u}_\psi = 0$ , donc

$$u_\psi = g_{\psi\psi} u^\psi = R^2(t)u^\psi = \text{cte} \quad (7.33)$$

Autrement dit,  $R^2(t)\dot{\psi}$  est constant le long de la géodésique.

Quant à la composante temporelle du vecteur  $u$ , elle est fixée par la normalisation. Pour une particule massive,  $u_i u^i = 1$  et donc

$$\dot{t}^2 - R^2(t)\dot{\psi}^2 = 1 \quad \text{ou encore} \quad \dot{t}^2 = 1 + \alpha\dot{\psi} \quad (7.34)$$

alors que pour une particule sans masse,  $u_i u^i = 0$  et donc

$$\dot{t}^2 = R^2(t)\dot{\psi}^2 = \alpha\dot{\psi} \quad (7.35)$$

où  $\alpha$  est une constante le long de la géodésique.

### 7.B.5 Décalage vers le rouge cosmologique

Dans la section 3.C.1, nous avons évalué le décalage en fréquence d'un signal lumineux qui se propage dans une métrique indépendante du temps. Nous allons refaire l'exercice ici, dans un contexte plus général, et ensuite appliqué à la métrique de Friedmann-Lemaître qui, elle, dépend du temps.

Soyons d'abord très généraux. Un observateur possédant une 4-vitesse  $u_E^i$  émet un photon de 4-impulsion  $p_E^i$ , qui est ensuite détecté par un deuxième observateur de 4-vitesse  $u_R^i$ , alors que la 4-impulsion du photon est devenue  $p_R^i$ . La fréquence du photon pour l'observateur-émetteur est  $\nu_E = p_{Ei} u_E^i$ , alors que celle observée par le récepteur est  $\nu_R = p_{Ri} u_R^i$ . Nous allons supposer que les observateurs sont des observateurs fondamentaux, dont les coordonnées spatiales sont fixes. Dans ce cas,  $u_{Ea} = u_{Ra} = 0$  ( $a = 1, 2, 3$ ) et la normalisation  $u_i u^i = 1$  se traduit par  $g_{00}(u^0)^2 = 1$ . Le rapport des fréquences d'émission et de réception est donc

$$\frac{\nu_R}{\nu_E} = \frac{p_{R0} u_R^0}{p_{E0} u_E^0} = \frac{p_{R0}}{p_{E0}} \left( \frac{g_{00}(E)}{g_{00}(R)} \right)^{1/2} \quad (7.36)$$

Retournons maintenant aux géodésiques dans la métrique de Friedmann-Lemaître, en particulier la géodésique suivie par le photon échangé entre l'émetteur et le récepteur. Le long de cette géodésique, on peut choisir un paramètre affine tel que  $\dot{x}^i = p^i$ . Nous allons supposer que le récepteur est situé à l'origine, de sorte que les conclusions de la section précédente s'appliquent. En particulier,  $p_2 = p_3 = 0$  et la composante  $p_1$  est constante le long de cette géodésique :  $p_{1E} = p_{1R}$ . Comme la 4-impulsion du photon respecte la relation  $g_{ij} p^i p^j = 0$ , on en déduit une relation entre  $p_0$  et  $p_1$  :  $p_0 = R^{-1} p_1$ . Comme  $g_{00} = 1$  dans la métrique de Friedmann-Lemaître, la formule (7.36) devient

$$\frac{\nu_R}{\nu_E} = \frac{p_{R0}}{p_{E0}} = \frac{R(t_E)}{R(t_R)} \quad (7.37)$$

On exprime souvent le décalage par le facteur  $z$  :

$$1 + z = \frac{\nu_E}{\nu_R} = \frac{R(t_R)}{R(t_E)} \quad (7.38)$$

Ainsi, si l'univers est en expansion,  $R(t_R) > R(t_E)$  et les photons subissent un décalage vers le rouge, d'autant plus important que le temps de parcours est grand. Si l'Univers était en contraction, les photons subiraient un décalage vers le bleu.

### 7.B.6 La constante de Hubble

En l'absence d'une connaissance précise de la fonction  $R(t)$ , il est d'usage de la représenter par un développement limité par rapport au temps présent  $t_0$  :

$$\begin{aligned} R(t) &= R(t_0) + (t - t_0)\dot{R}(t_0) + \frac{1}{2}\ddot{R}(t_0)(t - t_0)^2 + \dots \\ &= R(t_0) \left[ 1 + (t - t_0)H(t_0) - \frac{1}{2}q(t_0)H^2(t_0)(t - t_0)^2 + \dots \right] \end{aligned} \quad (7.39)$$

où on a défini la *constante de Hubble*  $H$  et le *paramètre de décélération*  $q$  :

$$H(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \quad q(t) = -\frac{\ddot{R}(t)R(t)}{\dot{R}^2(t)} \quad (7.40)$$

On peut aussi exprimer le décalage  $z$  pour un photon émis dans le passé ( $t < t_0$ ) :

$$z = 1 - \frac{R(t_0)}{R(t)} = 1 - \left[ 1 - (t_0 - t)H(t_0) - \frac{1}{2}q(t_0)H^2(t_0)(t_0 - t)^2 + \dots \right]^{-1} \quad (7.41)$$

En supposant que  $(t_0 - t) \ll t_0$ , on peut développer cette expression en série pour obtenir, au même ordre,

$$z \approx (t_0 - t)H_0 + (t_0 - t)^2(1 + \frac{1}{2}q_0)H_0^2 \quad (7.42)$$

où  $H_0 = H(t_0)$  et  $q_0 = q(t_0)$ . De même, on peut développer  $t_0 - t$  en fonction de  $z$ , en supposant que  $z \ll 1$  :

$$(t_0 - t) \approx H_0^{-1}z - H_0^{-1}(1 + \frac{1}{2}q_0)z^2 \quad (7.43)$$

Si on interprète le décalage  $z$  comme résultant d'un effet Doppler<sup>7</sup> associé à la vitesse de récession  $v$  d'une galaxie éloignée, alors  $v = z$  et donc  $v \approx H_0(t_0 - t)$ . La distance  $d$  associée à cette différence de temps s'obtient de la métrique en considérant un rayon lumineux. Comme  $g_{00} = 1$ , cette distance est simplement  $d = t_0 - t$  et donc on obtient la *loi de Hubble-Lemaître* :

$$v \approx H_0 d \quad (7.44)$$

Autrement dit, la vitesse de récession d'une galaxie est proportionnelle à sa distance. Cette loi néglige les mouvements aléatoires des galaxies qui se superposent au mouvement général provenant de l'expansion de l'Univers.

**Distance de Hubble** Définissons la *distance de Hubble*  $d_H$  ainsi :

$$d_H = H^{-1}(t) = \frac{R(t)}{\dot{R}(t)} \quad (7.45)$$

On définit aussi la *distance de Hubble en co-mouvement*

$$\psi_H = \frac{d_H(t)}{R(t)} = \frac{H^{-1}(t)}{R(t)} = \frac{1}{\dot{R}(t)} \quad (7.46)$$

Quelle est l'interprétation de cette quantité? Selon la loi de Hubble, les galaxies éloignées de nous de  $d_H$  s'éloignent de nous à la vitesse de la lumière. Il s'agit donc des objets les plus lointains en contact causal avec nous. Plus généralement, la distance de Hubble nous donne la taille d'une portion de l'Univers dans lequel les objets ont pu être en relation causale.

7. Rappelons que le décalage Doppler relativiste pour un signal émis dans la même direction que la source est

$$1 + z = \sqrt{\frac{1 + v}{1 - v}} \approx 1 + v$$

cette dernière approximation étant valable si  $v$  est petit.



## C Modèles cosmologiques

### 7.C.1 Équations de Friedmann-Lemaître

Jusqu'ici, la fonction  $R(t)$  est inconnue. En principe, elle doit découler des équations d'Einstein pour le tenseur de Ricci, en supposant une certaine forme pour le tenseur d'énergie-impulsion de l'Univers. Nous allons voir dans cette section quelle forme ces équations doivent prendre.

Rappelons d'abord les équations du champ gravitationnel d'Einstein, avec constante cosmologique :

$$R^{ij} = 8\pi \left( T^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} T \right) - \Lambda g^{ij} \quad (7.47)$$

Nous avons besoin d'un modèle pour le tenseur d'énergie-impulsion. Nous allons adopter celui d'un *fluide parfait*, pour lequel on montre (voir annexe 8.D) que le tenseur d'énergie-impulsion a la forme suivante :

$$T^{ij} = (\rho + P) u^i u^j - P g^{ij} \quad (7.48)$$

où  $\rho$  est la densité du fluide,  $P$  sa pression (dans son référentiel propre) et  $u^i$  est la 4-vitesse du milieu, considérée ici comme constante et uniforme. Dans le référentiel du milieu,  $u^i = (1, 0, 0, 0)$  et donc les composantes du tenseur d'énergie-impulsion sont

$$T^{ij} = \text{diag}(\rho, P, P, P) \quad (7.49)$$

La densité d'énergie (ou de masse) est naturellement  $T^{00}$ . La densité de quantité de mouvement est nulle, mais le flux de la composante en  $a$  de la quantité de mouvement le long de l'axe  $a$  est égal à la pression  $P$ . Dans le référentiel du milieu, la version covariante du tenseur peut-être écrite ainsi :

$$T_{ij} = (\rho + P) u_i u_j - P g_{ij} = (\rho + P) \delta_i^0 \delta_j^0 - P g_{ij} \quad (7.50)$$

Comme  $u_i u^i = 1$ , la trace  $T$  est

$$T = T^i_i = (\rho + P) - 4P = \rho - 3P \quad (7.51)$$

De sorte que, toujours dans le référentiel du milieu,

$$T_{ij} - \frac{1}{2} T g_{ij} = (\rho + P) \delta_i^0 \delta_j^0 - \frac{1}{2} (\rho - P) g_{ij} \quad (7.52)$$

En particulier,

$$T_{00} - \frac{1}{2} T g_{00} = \frac{1}{2} (\rho + 3P) \quad T_{11} - \frac{1}{2} T g_{11} = -\frac{1}{2} (\rho - P) \frac{R^2}{1 - kr^2} \quad (7.53)$$

Afin d'appliquer les équations d'Einstein à la métrique de Friedmann-Lemaître, on doit connaître l'expression du tenseur de Ricci pour cette métrique. Le calcul se fait machinalement, avec le résultat suivant :

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3 \frac{\ddot{R}}{R} \\ R_{11} &= \frac{1}{1 - kr^2} (2k + R\ddot{R} + 2\dot{R}^2) \\ R_{22} &= r^2 (2k + R\ddot{R} + 2\dot{R}^2) \\ R_{33} &= r^2 \sin^2 \theta (2k + R\ddot{R} + 2\dot{R}^2) \end{aligned} \quad (7.54)$$

L'équation d'Einstein pour la composante (0, 0) est

$$-3\frac{\ddot{R}}{R} = 4\pi(\rho + 3P) - \Lambda \quad (7.55)$$

ou encore

$$3\frac{\ddot{R}}{R} = -4\pi(\rho + 3P) + \Lambda \quad (7.56)$$

alors que la composante (1, 1) est

$$\frac{1}{1-kr^2} (2k + R\ddot{R} + 2\dot{R}^2) = -4\pi(\rho - P)\frac{R^2}{1-kr^2} + \Lambda\frac{R^2}{1-kr^2} \quad (7.57)$$

ou encore

$$2k + R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 = 4\pi R^2(\rho - P) + \Lambda R^2 \quad (7.58)$$

On montre que les autres équations d'Einstein (associées aux deux autres composantes spatiales) sont équivalentes à cette dernière équation.

En isolant  $\ddot{R}$  et en l'éliminant de la deuxième équation, on trouve les *équations de Friedmann-Lemaître* :

$$\begin{aligned} \ddot{R} &= -\frac{4\pi}{3}R(\rho + 3P) + \frac{1}{3}\Lambda R \\ \dot{R}^2 &= \frac{8\pi}{3}\rho R^2 + \frac{1}{3}R^2\Lambda - k \end{aligned} \quad (7.59)$$

## 7.C.2 Équations du mouvement du fluide cosmologique

Les équations de Friedmann-Lemaître déterminent la fonction d'échelle  $R(t)$  une fois connues la densité et la pression. Par contre, ces dernières quantités dépendent aussi du temps ! Le modèle cosmologique ne peut être complet que si on connaît aussi les équations qui gouvernent l'évolution temporelle de  $\rho$  et de  $P$ .

Ces relations peuvent s'obtenir de la conservation de l'énergie, qui prend la forme suivante :

$$\nabla_i T^{ij} = 0 \quad (7.60)$$

Nous pourrions montrer que la densité, dans une métrique de Friedmann-Lemaître, évolue dans le temps de la manière suivante :

$$\dot{\rho} + (\rho + P)\frac{3\dot{R}}{R} = 0 \quad (7.61)$$

Par contre, bien que la démonstration de cette équation via la loi de conservation de l'énergie-impulsion soit intéressante, elle n'est pas nécessaire, car cette équation est aussi une conséquence des deux équations (7.59). Il suffit pour cela de dériver la seconde de ces équations par rapport au temps et d'y substituer la première pour  $\ddot{R}$  :

$$\begin{aligned} 2\dot{R}\ddot{R} &= \frac{8\pi}{3}\dot{\rho}R^2 + \frac{16\pi}{3}\rho R\dot{R} + \frac{2}{3}R\dot{R}\Lambda \\ &= 2\dot{R}\left[-\frac{4\pi}{3}R(\rho + 3P) + \frac{1}{3}\Lambda R\right] \end{aligned} \quad (7.62)$$

En comparant les deux membres de droite, on arrive bien à l'équation (7.61).

L'éq. (7.61) peut également s'exprimer de la manière suivante :

$$\frac{d}{dt}(\rho R^3) = -3PR^2 \dot{R} \quad (7.63)$$

comme on peut le vérifier sans peine par substitution directe. On peut ensuite transformer la dérivée par rapport au temps en une dérivée par rapport à  $R$  :

$$\frac{d}{dR}(\rho R^3) = \frac{d}{dt}(\rho R^3) \frac{1}{\dot{R}} = -3PR^2 \quad (7.64)$$

donc

$$\boxed{\frac{d}{dR}(\rho R^3) = -3PR^2} \quad (7.65)$$

Pour progresser plus avant, il faut maintenant connaître la relation entre la densité et la pression. Nous allons pour cela supposer que cette dernière prend la forme suivante :

$$P = w\rho \quad (7.66)$$

où  $w$  est une constante. Voyons les cas particuliers :

1. Poussière stellaire. Il s'agit d'un gaz de particules sans interactions mutuelles, dont la pression est nulle. Donc  $w = 0$ .
2. Gaz non relativiste de particules de masse  $m$ . Dans ce cas, la loi des gaz parfaits s'applique :  $PV = Nk_B T$  ou encore  $P = \rho/(m\beta)$ . Donc  $w = k_B T/m$ . Si la température est petite par rapport à l'énergie de masse ( $m\beta \gg 1$ ), cela revient au cas précédent ( $w = 0$ ).
3. Gaz de particules ultrarelativistes. Comme démontré dans l'annexe 8.D, la relation pression-densité est  $P = \frac{1}{3}\rho$ , ou  $w = \frac{1}{3}$ .
4. Énergie sombre. En comparant le tenseur d'énergie-impulsion (7.49) au tenseur métrique, on voit que la constante cosmologique peut être remplacée par un fluide dont la relation densité-pression est  $P = -\rho$ , donc  $w = -1$ . Cela se voit aussi par les équations (7.59) : les substitutions  $\rho \rightarrow \rho + \Lambda/8\pi$ ,  $P \rightarrow P - \Lambda/8\pi$  permettent d'intégrer la constante cosmologique au système d'équations si elle n'y était pas au départ.

Nous allons considérer dans ce qui suit un univers composé essentiellement de matière massive froide ( $w = 0$ ), de rayonnement ( $w = \frac{1}{3}$ ) et d'énergie sombre ( $w = -1$ ).

En appliquant l'équation d'état  $P = w\rho$ , l'éq. (7.65) devient

$$\boxed{\frac{d}{dR}(\rho R^3) = -3w\rho R^2} \quad (7.67)$$

La solution est simple : on pose  $u = \rho R^3$  et l'équation devient alors

$$\frac{du}{dR} = -3w \frac{u}{R} \implies \ln u = -3w \ln R + \text{cte} \quad (7.68)$$

## Chapitre 7. Cosmologie

et donc  $u \propto R^{-3w}$ , ou encore

$$\rho(R) \propto R^{-3(1+w)} \quad \text{ou} \quad \rho(R) = \rho_0 \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3(1+w)} \quad (7.69)$$

où  $R_0$  est la valeur présente du paramètre d'échelle  $R$  et  $\rho_0$  la valeur présente de la densité. Évidemment, cette solution n'est valable que si le fluide cosmique ne comporte qu'une seule composante. S'il comporte plusieurs composantes, on peut quand même retenir cette solution en supposant que les différentes composantes n'interagissent que faiblement entre elles. La densité et la pression sont alors des sommes :

$$\rho = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda \quad P = P_m + P_r + P_\Lambda \quad (7.70)$$

où les indices  $m$ ,  $r$  et  $\Lambda$  désignent respectivement les contributions de la matière ordinaire (massive), du rayonnement (particules sans masse) et de l'énergie sombre. Plus généralement, le tenseur d'énergie-impulsion total sera la somme de trois contributions :

$$T^{ij} = T_m^{ij} + T_r^{ij} + T_\Lambda^{ij} \quad (7.71)$$

et chacune de ces trois composantes sera conservée séparément, en raison du manque d'interactions supposé entre elles :  $\nabla_i T_m^{ij} = 0$ . La relation entre le «rayon»  $R$  et la densité de chaque composante restera donc la même, soit l'éq. (7.69). Les densités des trois composantes s'expriment alors ainsi :

$$\rho_m(R) = \rho_{m,0} \left( \frac{R_0}{R} \right)^3 \quad \rho_r(R) = \rho_{r,0} \left( \frac{R_0}{R} \right)^4 \quad \rho_\Lambda(R) = \rho_{\Lambda,0} \quad (7.72)$$

Ainsi la contribution de l'énergie sombre reste la même au cours du temps, alors que la densité des autres composantes diminue avec l'expansion de l'Univers, la densité de rayonnement diminuant plus rapidement que la densité de matière.

Remarquons que la densité de matière  $\rho_m$  varie comme  $R^{-3}$ , ce qui est assez intuitif : la «quantité de matière»  $\rho R^3$  est en quelque sorte constante. Pour comprendre intuitivement le comportement de la densité de rayonnement  $\rho_r$ , il faut se rendre compte que les photons qui la composent sont décalés vers le rouge à mesure que  $R$  augmente, donc leur énergie diminue par un facteur  $R$  supplémentaire par rapport au simple décompte des photons par unité de volume, d'où la dépendance en  $R^{-4}$ .

En fonction du paramètre d'échelle normalisé  $a(t) = R(t)/R_0$ , la densité totale de l'Univers peut s'écrire ainsi :

$$\rho = \rho_{m,0} a(t)^{-3} + \rho_{r,0} a(t)^{-4} + \rho_{\Lambda,0} \quad (7.73)$$

La majeure partie de l'énergie de rayonnement réside dans le *rayonnement fossile*, ou *fond diffus cosmologique*. La densité d'énergie de ce rayonnement est obtenue en intégrant sur la fréquence la densité spectrale de la distribution du corps noir et est donnée par la loi de Stefan-Boltzmann :

$$\rho = \frac{4\pi^2}{60\hbar^3} (k_B T)^4 \quad (7.74)$$

Comme  $\rho_r(t) = \rho_{r,0} a(t)^{-4}$ , il s'ensuit que

$$T(t) = \frac{T_0}{a(t)} \quad (7.75)$$

et donc la température du fond diffus cosmologique varie en raison inverse du facteur d'échelle.

### 7.C.3 Paramètres cosmologiques

Il est pratique d'introduire, au lieu de la densité d'une composante du fluide cosmique, le *paramètre cosmologique* correspondant :

$$\Omega_\alpha = \frac{8\pi}{3H^2} \rho_\alpha \quad \text{où} \quad H = \frac{\dot{R}}{R} \quad (7.76)$$

( $H(t)$  est la «constante» de Hubble). La deuxième des équations (7.59), quand on omet la constante cosmologique (ou plutôt quand on la traite comme une densité particulière) devient alors

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi}{3} R^2 \rho - k \implies 1 = \Omega - \frac{k}{\dot{R}^2} = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda - \frac{k}{\dot{R}^2} \quad (7.77)$$

On se permet de définir le symbole

$$\Omega_k = -\frac{k}{\dot{R}^2} = -\frac{k}{R^2 H^2} \quad (7.78)$$

qu'on appelle la *densité de courbure*. La deuxième des équations de Friedmann-Lemaître prend alors la forme simple suivante :

$$1 = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k \quad (7.79)$$

En fonction des valeurs présentes  $\Omega_{\alpha,0}$  et  $H_0$ , l'éq. (7.72) devient

$$\Omega_\alpha = \Omega_{\alpha,0} \frac{1}{a^{3(1+w)}} \frac{H_0^2}{H^2} \quad (7.80)$$

Cette relation fonctionne également pour la densité de courbure, avec  $w = -1/3$ , car  $\Omega_k \propto R^{-2}$ . En fonction de ces valeurs présentes, l'éq. (7.79) devient alors

$$H^2 = H_0^2 (\Omega_{m,0} a^{-3} + \Omega_{r,0} a^{-4} + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0} a^{-2}) \quad (7.81)$$

**paramètre de décélération** Le paramètre de décélération défini en (7.40) peut être relié aux paramètres cosmologiques en utilisant la première des équations (7.59) :

$$q = -\frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2} = -\frac{1}{H^2} \frac{\ddot{R}}{R} = \frac{1}{H^2} \frac{4\pi}{3} \rho (1+3w) = \frac{1}{2} (1+3w) \Omega \quad (7.82)$$

pour une seule composante. La relation est additive pour plusieurs composantes :

$$q = \frac{1}{2} (\Omega_m + 2\Omega_r - 2\Omega_\Lambda) \quad (7.83)$$

Cette relation sert à établir la frontière entre les régions de l'espace des paramètres pour lesquelles l'Univers est en accélération perpétuelle des régions pour lesquels il décélère éventuellement.

**Univers ouvert, fermé ou plat** La relation (7.79) nous permet d'identifier des conditions sur les paramètres cosmologiques pour obtenir un univers fermé, ouvert ou plat :

**Univers ouvert** ( $k = -1$ ) Dans ce cas,  $\Omega_k > 0$  et donc  $\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda = \Omega_{\text{tot.}} < 1$ .

**Univers plat** ( $k = 0$ ) Dans ce cas,  $\Omega_k = 0$  et  $\Omega_{\text{tot.}} = 1$ .

**Univers fermé** ( $k = 1$ ) Dans ce cas,  $\Omega_k < 0$  et donc  $\Omega_{\text{tot.}} > 1$ .

**valeurs présentes** Selon les observations, les valeurs présentes des paramètres cosmologiques sont les suivantes :<sup>8</sup>

$$\begin{aligned}
 H_0 &\approx 67.8 \pm 0.9 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \\
 H_0^{-1} &\approx 14.4 \times 10^9 \text{ années} \\
 \Omega_{m,0} &= 0.308 \pm 0.012 \\
 \Omega_{r,0} &\approx 5 \times 10^{-5} \\
 \Omega_{\Lambda,0} &= 0.6911 \pm 0.0062 \\
 |\Omega_k| &< 0.005
 \end{aligned}
 \tag{7.84}$$

### 7.C.4 Diagramme de phase cosmologique

Nous allons maintenant établir un diagramme de phase pour l'Univers en fonction des valeurs présentes des paramètres cosmologiques  $\Omega_{m,0}$  et  $\Omega_{\Lambda,0}$ . Nous allons supposer que  $\Omega_{r,0} = 0$ , car la densité de rayonnement décroît rapidement avec le rayon de l'Univers n'a bientôt pas de conséquence sur l'expansion ou la contraction de l'Univers. Ce modèle est souvent désigné par l'acronyme  $\Lambda$ CDM (pour  $\Lambda$ -cold dark matter).

L'équation (7.81) s'exprime alors comme suit :

$$H^2 = H_0^2 (\Omega_{m,0} a^{-3} + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_k a^{-2}) \tag{7.85}$$

et le paramètre de décélération devient  $q = \frac{1}{2}(\Omega_m - 2\Omega_\Lambda)$ .

La figure 7.2 délimite différentes régions dans le plan  $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$  selon leurs propriétés, tirées de l'équation de Friedmann-Lemaître (7.85). Cette figure constitue, en quelque sorte, un *diagramme de phase* de l'expansion de l'Univers. Par exemple, la frontière entre un univers fermé et un univers ouvert se trouve lorsque  $\Omega_k = 0$ , c'est-à-dire  $\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} = 1$ . Au-dessus de cette droite, l'Univers est fermé (trop de matière) ; en dessous, il est ouvert (pas assez de matière). La frontière entre un univers en accélération et un univers en décélération est définie par la condition  $q = 0$ , soit  $\Omega_{m,0} = 2\Omega_{\Lambda,0}$ . Au-dessus de cette droite, l'expansion de l'Univers accélère, alors qu'en dessous, elle décélère.

Une question intéressante est de savoir si l'expansion peut un jour se transformer en contraction, ou si ce changement s'est produit dans l'autre sens dans le passé. Un tel changement se traduirait par une valeur nulle de  $H$ , donc par la condition

$$\Omega_{m,0} a^{-3} + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_k a^{-2} = 0 \tag{7.86}$$

En utilisant la contrainte  $\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_k = 1$ , on peut récrire cette condition uniquement en fonction de  $\Omega_{m,0}$  et de  $\Omega_{\Lambda,0}$  (nous avons aussi multiplié par  $a^3$ ) :

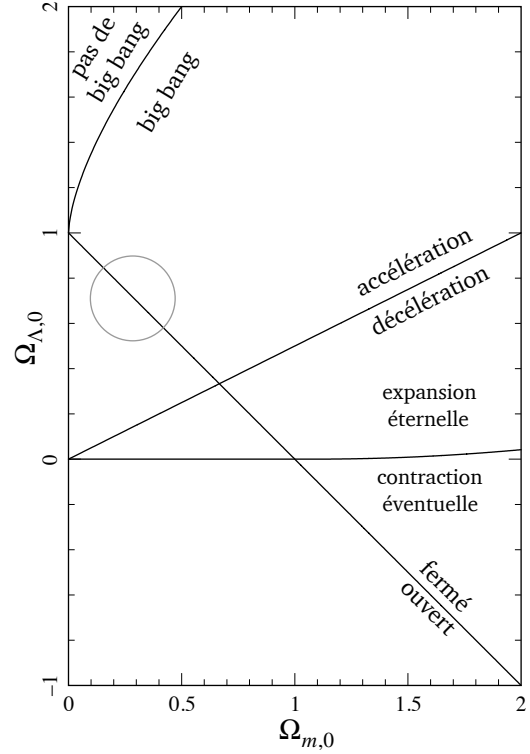
$$f(a) := \Omega_{\Lambda,0} a^3 + (1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0})a + \Omega_{m,0} = 0 \tag{7.87}$$

Il s'agit donc de trouver les racines d'un polynôme de degré 3, pourvu bien sûr que ces racines soient positives, car  $a > 0$ . Notons que pour chaque point du diagramme de phase, il existe potentiellement

8. The Planck Collaboration, *Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters*, <https://arxiv.org/abs/1502.01589v2>

**FIGURE 7.2**

Diagramme de phase du modèle de Friedmann-Lemaître en fonction des valeurs présentes de  $\Omega_m$  et de  $\Omega_\Lambda$ . On suppose que  $\Omega_r = 0$ . Le cercle indique la région compatible avec les observations actuelles.



une ou plusieurs valeurs de  $a$ , ou aucune valeur, respectant cette condition. Comme le polynôme est cubique, il y aura toujours au moins une racine à l'équation (7.87), mais cette racine peut être négative et donc hors du domaine physique.

Considérons premièrement la région  $\Omega_{\Lambda,0} < 0$ . Dans ce cas, le paramètre de décélération  $q$  est toujours positif, donc le signe de  $\dot{R}$  n'a jamais changé et le paramètre d'échelle  $a$  a forcément été nul dans le passé. Donc une explosion initiale (*big bang*) a nécessairement eu lieu. De plus, la fonction  $a(t)$  aura toujours la même convexité (le même signe de  $\ddot{a}$ ), ce qui entraîne qu'il y aura un rebroussement dans le futur, ainsi qu'un effondrement final (*big crunch*).

Considérons ensuite le cas particulier  $\Omega_{\Lambda,0} = 0$ . Dans ce cas, la solution  $a^*$  à l'équation (7.87) se trouve simplement :

$$a^* = \frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0} - 1} < 0 \quad (7.88)$$

(car  $\Omega_{m,0} < 1$ ). Cette solution n'est pas dans le domaine physique  $a \geq 0$ , et donc aucun changement de signe de  $H$  ne se produit.

Supposons enfin que  $\Omega_{\Lambda,0} > 0$ . On désire trouver la frontière, dans le diagramme de phase, entre les régions où un changement de signe de  $H$  est possible et celles où un tel changement est impossible. Autrement dit, la frontière entre les régions où l'équation (7.87) possède une solution et celles où elle possède trois solutions. Sur cette frontière, le polynôme (7.87) aura une racine double, et à cette racine  $a^*$  la dérivée du polynôme sera également nulle. On doit donc résoudre le système d'équations

$$\begin{aligned} 0 &= \Omega_{\Lambda,0} a^3 + (1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0})a + \Omega_{m,0} \\ 0 &= 3\Omega_{\Lambda,0} a^2 + (1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0}) \end{aligned} \quad (7.89)$$

En éliminant  $(1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0})$  à l'aide de la deuxième équation, on trouve

$$a^* = \left( \frac{\Omega_{m,0}}{2\Omega_{\Lambda,0}} \right)^{1/3} \quad (7.90)$$

On peut ensuite substituer cette expression de  $a$  dans la première des équations, ce qui nous donne une équation cubique pour  $\Omega_{\Lambda,0}$  :

$$4(1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0}) + 27\Omega_{m,0}^2\Omega_{\Lambda,0} = 0 \quad (7.91)$$

On peut ensuite résoudre cette équation cubique à l'aide des formules standards. Sans aller dans les détails, on montre que les solutions sont les suivantes :

1. Si  $0 < \Omega_{m,0} < \frac{1}{2}$ , alors l'équation (7.91) possède une racine positive :

$$\Omega_{\Lambda,0} = 4\Omega_{m,0} \cosh^3 \left[ \frac{1}{3} \cosh^{-1} \frac{1 - \Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}} \right] \quad (7.92)$$

On vérifie que, dans ce cas,  $a^* < 1$ , donc un changement de signe dans le passé (car l'Univers est en expansion et  $a_0 = 1$  par définition). Cette courbe est indiquée dans le coin supérieur gauche de la figure 7.2. Au-dessus de cette courbe, le signe de  $H$  est différent, ce qui signifie que le big bang n'a pas eu lieu, mais que l'Univers, qui était en contraction, a changé cette contraction en expansion, en raison de la valeur assez importante de la constante cosmologique.

2. Si  $\frac{1}{2} < \Omega_{m,0} < 1$ , l'équation (7.91) possède encore une racine positive :

$$\Omega_{\Lambda,0} = 4\Omega_{m,0} \cos^3 \left[ \frac{1}{3} \cos^{-1} \frac{1 - \Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}} \right] \quad (7.93)$$

Dans ce cas aussi  $a^* < 1$ .

3. Si  $\Omega_{m,0} > 1$ , alors l'équation (7.91) possède deux racines positives. La plus grande est donnée par l'expression précédente, alors que la plus petite est

$$\Omega_{\Lambda,0} = 4\Omega_{m,0} \cos^3 \left[ \frac{1}{3} \cos^{-1} \frac{1 - \Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}} + \frac{4\pi}{3} \right] \quad (7.94)$$

Cette courbe est aussi illustrée sur la figure 7.2, au centre. Elle est alors combinée à la frontière  $\Omega_{\Lambda,0} = 0$  pour  $0 < \Omega_{m,0} < \frac{1}{2}$ . En dessous de cette courbe, un changement de signe de  $H$  s'est produit dans le passé et l'Univers se dirige vers un big crunch.

### 7.C.5 Évolution temporelle du facteur d'échelle

L'équation (7.85) est en fait une équation différentielle pour l'évolution temporelle du facteur  $a(t)$  :

$$H^2 = \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = H_0^2 (\Omega_{m,0} a^{-3} + \Omega_{r,0} a^{-4} + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0} a^{-2}) \quad (7.95)$$

(nous avons restauré l'effet du rayonnement). En exprimant  $\Omega_{k,0}$  comme  $1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{r,0} - \Omega_{\Lambda,0}$ , on trouve

$$\dot{a}^2 = H_0^2 [\Omega_{m,0} a^{-1} + \Omega_{r,0} a^{-2} + \Omega_{\Lambda,0} a^2 + (1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{r,0} - \Omega_{\Lambda,0})] \quad (7.96)$$



On exprime généralement cette équation en fonction du *temps de Hubble* :

$$\tau = H_0(t - t_0) \quad (7.97)$$

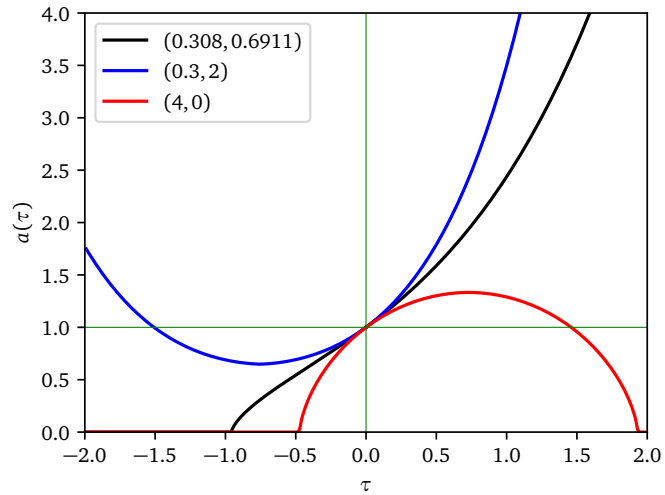
en fonction duquel elle devient

$$\left(\frac{da}{d\tau}\right)^2 = [\Omega_{m,0}a^{-1} + \Omega_{r,0}a^{-2} + \Omega_{\Lambda,0}a^2 + (1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{r,0} - \Omega_{\Lambda,0})] \quad (7.98)$$

Cette équation doit être résolue numériquement pour des valeurs génériques des paramètres cosmologiques.

**FIGURE 7.3**

Évolution du facteur d'échelle  $a$  en fonction du temps de Hubble  $\tau$  pour trois ensembles  $(\Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda,0})$  de paramètres cosmologiques. Le premier ensemble correspond aux valeurs observées.



La figure 7.3 illustre les solutions numériques à l'équation (7.98) pour trois différents ensembles de paramètres cosmologiques  $(\Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda,0})$ . Le premier ensemble (courbe noire) correspond aux paramètres observés. On remarque l'accélération de l'expansion. Le deuxième ensemble (courbe bleue) correspond à un univers dominé par l'énergie sombre : le big bang n'a jamais eu lieu. La dernière solution (courbe rouge) correspond à un univers dominé par la matière, au-dessus de la densité critique : il y a eu un big bang, et à un moment donné l'expansion s'arrête et se transforme en contraction, avec une implosion finale (*big crunch*).

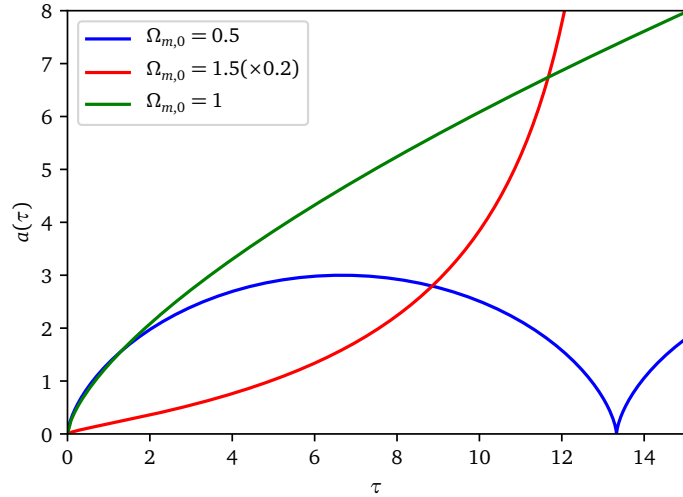
**modèle de Friedmann** En l'absence de constante cosmologique, le modèle  $\Lambda$ CDM est connu sous le nom de modèle de Friedmann. Dans ce cas, l'équation différentielle d'évolution du facteur d'échelle est

$$\left(\frac{da}{d\tau}\right)^2 = [\Omega_{m,0}a^{-1} + 1 - \Omega_{m,0}] \quad (7.99)$$

dont la solution analytique est

$$\tau = \int_0^a dx \left( \frac{x}{\Omega_{m,0} + (1 - \Omega_{m,0})x} \right)^{1/2} \quad (7.100)$$

La forme explicite de l'équation dépend du signe de  $\Omega_{m,0}$  :



**FIGURE 7.4**  
Évolution du facteur d'échelle  $a$  en fonction du temps de Hubble  $\tau$  dans le modèle de Friedmann pour trois valeurs de  $\Omega_m$  correspondant à  $k = \pm 1$  et 0.

1. Si  $k = 0$ , donc  $\Omega_{m,0} = 1$ , la solution est simple :

$$\tau = \frac{2}{3} a^{3/2} \implies a(\tau) = (3\tau/2)^{2/3} \quad (7.101)$$

Ce cas particulier est appelé *modèle d'Einstein-de Sitter*.

2. Si  $k = 1$ , donc  $\Omega_{m,0} > 1$ , la solution est une cycloïde :

$$a = \frac{\Omega_{m,0}}{2(\Omega_{m,0} - 1)} (1 - \cos \chi) \quad \tau = \frac{\Omega_{m,0}}{2(\Omega_{m,0} - 1)^{3/2}} (\chi - \sin \chi) \quad (7.102)$$

On peut la compléter à l'aide du changement de variable d'intégration suivant :

$$x = \frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0} - 1} \sin^2(\chi/2) \quad (7.103)$$

3. Si  $k = -1$ , donc  $\Omega_{m,0} < 1$ , la solution est une cycloïde hyperbolique :

$$a = \frac{\Omega_{m,0}}{2(1 - \Omega_{m,0})} (\cosh \chi - 1) \quad \tau = \frac{\Omega_{m,0}}{2(1 - \Omega_{m,0})^{3/2}} (\sinh \chi - \chi) \quad (7.104)$$

On peut la compléter à l'aide du changement de variable d'intégration suivant :

$$x = \frac{\Omega_{m,0}}{1 - \Omega_{m,0}} \sinh^2(\chi/2) \quad (7.105)$$

Ces solutions sont illustrées à la fig. 7.4.

**modèle de de Sitter** Le modèle de de Sitter décrit un univers complètement dominé par l'énergie sombre, avec  $\Omega_\Lambda = 1$ . On pose alors  $\Omega_{m,0} = \Omega_{r,0} = 0$  et on obtient l'équation d'évolution

$$\left( \frac{da}{d\tau} \right)^2 = a^2 \quad (7.106)$$

dont la solution est élémentaire :  $a(\tau) = e^\tau$ . Cette solution décrit donc un univers *inflationnaire*, en expansion exponentielle.

**modèle statique d'Einstein** Einstein croyait initialement en un univers statique et éternel. Il chercha donc une solution cosmologique aux équations de la relativité générale qui pourrait décrire un tel univers. N'en trouvant pas, il fut alors amené à modifier les lois de la relativité générale afin d'y ajouter une constante cosmologique  $\Lambda$ , et d'ajuster cette constante afin d'arriver à une solution statique.

En retournant aux équations (7.59), on constate qu'un univers statique impose les contraintes suivantes :

$$-\frac{4\pi}{3}R(\rho + 3P) + \frac{1}{3}\Lambda R = 0 \qquad \frac{8\pi}{3}\rho R^2 + \frac{1}{3}R^2\Lambda - k = 0 \qquad (7.107)$$

Ces deux équations peuvent être considérées comme un système qui nous permet de déterminer  $\rho$  et  $\Lambda$ , en admettant qu'on possède une relation entre  $\rho$  et  $P$ . En supposant que  $P = 0$ , ce qui correspond à de la matière froide, on trouve aisément, à l'aide de la première équation,

$$\Lambda = 4\pi\rho \qquad (7.108)$$

En substituant dans la deuxième équation, on en déduit que

$$\Lambda = \frac{k}{R^2} \qquad (7.109)$$

Comme  $\rho$ , et donc  $\Lambda$ , est positif, cela entraîne nécessairement que  $k = 1$  (univers fermé).

Même si elle semble numériquement possible, la solution statique d'Einstein n'est pas viable, car elle n'est pas *stable* : la moindre perturbation par rapport aux conditions ci-dessus entraîne une expansion ou une contraction. En effet, même si l'énergie sombre balance exactement l'effet de la matière dans cette solution, la variation des densités de ces deux composantes en fonction du rayon  $R$  est différente. Si le rayon est un peu trop grand, l'énergie sombre domine et l'univers prend de l'expansion ( $R$  augmente). Si, au contraire, le rayon est un peu trop petit, l'effet de la matière froide domine et l'Univers se contracte ( $R$  diminue).

En somme, les équations de la relativité générale, auxquelles on ajoute quelques principes simplificateurs comme l'homogénéité et l'isotropie, nous amènent naturellement vers un univers dynamique, en expansion ou en contraction.

**L'âge de l'Univers** Comment peut donc obtenir l'âge de l'Univers à partir de la solution des équations de Friedmann-Lemaître? Connaissant les valeurs présentes des paramètres cosmologiques, on peut retourner dans le passé jusqu'à ce que  $a(t) = 0$ . La courbe noire de la figure 7.3 décrit une solution obtenue à l'aide de paramètres compatibles avec les observations actuelles. Le temps de Hubble correspondant au big bang est  $\tau = -0.969$ , soit **13,96 milliards d'années** dans le passé.

Quel sens donner à cette durée? Rappelons que le temps utilisé dans ce chapitre est le temps propre d'un *observateur fondamental*. Ce serait donc le temps perçu par un observateur qui, présent lors du big bang, serait en mouvement inertiel depuis ce temps, et percevrait à chaque instant l'Univers comme étant homogène et isotrope.

## D Cosmologie inflationnaire

### 7.D.1 Les paradoxes du modèle cosmologique standard

Le modèle cosmologique standard décrit ci-haut présente quelques caractéristiques paradoxales, ou du moins difficiles à expliquer naturellement.

**le problème de la platitude** Le fait que  $\Omega_k$  soit petit, c'est-à-dire que  $R$  soit grand, est assez improbable si on balaye les différentes possibilités de conditions initiales. Ce paradoxe porte le nom de *problème de la platitude*. Dans le modèle simple présenté ci-dessus, on ne peut expliquer la petite valeur de  $\Omega_k$  que par un ajustement fin des valeurs initiales. La théorie de l'inflation offre un mécanisme qui permet de régler ce problème.

**le problème de l'horizon** L'Univers qu'on observe aujourd'hui est relativement homogène en dépit du fait que la taille d'une région dans laquelle les causes et effets on pu se propager dans un passé lointain est très petite. Bref, comment expliquer cette homogénéité alors que l'interaction entre les différentes parties de l'Univers était impossible? Ceci sera expliqué plus en détail ci-dessous.

**la naissance des inhomogénéités** À partir d'un Univers homogène, comment les structures observées actuellement (galaxies, etc.) ont-elles pu prendre naissance? C'est le problème de la genèse des inhomogénéités.

La théorie de l'inflation cosmologique apporte une explication satisfaisante à ces questions. Il s'agit cependant d'une théorie encore spéculative, qui a ses détracteurs. Nous en donnerons un bref aperçu dans cette section.

Selon cette théorie, l'Univers a vécu une brève phase d'expansion exponentielle dans le passé. Pendant un période allant de  $10^{-36}$ s après le big bang à  $10^{-32}$ s après le big bang, le facteur d'échelle  $R$  aurait augmenté d'un facteur d'au moins  $10^{26}$ . Le mécanisme de l'inflation doit être la dominance, pendant cette courte période, d'un tenseur énergie-impulsion ayant le caractère d'une constante cosmologique positive, qu'on présume prendre sa source dans un champ scalaire fondamental qu'on appelle l'*inflaton* (sans 'i').

### 7.D.2 Le problème de l'horizon

**horizon des particules** Considérons un observateur situé à l'origine  $\psi = 0$  qui reçoit au temps  $t$  un photon émis au temps  $t_e < t$  en un point de coordonnée radiale  $\psi_e > 0$ . Étant donné que la géodésique du photon est nulle, on a  $R(t)d\psi = dt$  le long de cette géodésique et la coordonnée d'émission peut se calculer ainsi :

$$\psi_e = \int_{t_e}^t \frac{dt'}{R(t')} = \int_{R(t_e)}^{R(t)} \frac{dR}{R\dot{R}} \quad (7.110)$$

où dans la dernière égalité on suppose que la dérivée  $\dot{R}$  peut être exprimée en fonction de  $R$ . Si cette intégrale diverge lorsque  $t_e \rightarrow 0$ , c'est-à-dire lorsque  $R(t_e) \rightarrow 0$ , alors  $\psi_e$  peut être aussi grand

que l'on veut en prenant  $t_e$  suffisamment petit. Cela signifie essentiellement que tout l'Univers à  $t = 0$  est accessible à un observateur au temps présent. Dit autrement, un observateur a accès à l'information d'une fraction de l'Univers aussi grande que l'on veut : il suffit de reculer suffisamment dans le temps.

Par contre, si l'intégrale (7.110) est finie quand  $t_e \rightarrow 0$ , cela signifie qu'une portion seulement de l'Univers est en contact causal avec l'observateur, c'est-à-dire la vision de l'observateur sur l'Univers passé est limitée par ce qu'on appelle un *horizon des particules*. La distance en co-mouvement de cet horizon est

$$\psi_p = \int_0^{R(t)} \frac{dR}{R\dot{R}} \quad (7.111)$$

Afin que cette possibilité se réalise, il faut que  $R\dot{R} = CR^\alpha$  avec un exposant  $\alpha < 1$  et une constante  $C$ . Si tel est le cas, alors  $\dot{R} = CR^{\alpha-1}$  et

$$\ddot{R} = C(\alpha-1)R^{\alpha-2}\dot{R} = (\alpha-1)R^{2\alpha-3} \quad (7.112)$$

qui est négatif si  $\alpha < 1$ . En fait, d'après la première des équations de Friedmann-Lemaître (7.59), dans un modèle sans constante cosmologique,  $\ddot{R} < 0$ . Bref, l'existence d'un horizon des particules est reliée à une décélération de l'expansion de l'univers.

En pratique, cela signifie qu'un observateur fondamental initialement ne peut pas voir le passé de l'Univers dans son ensemble, mais seulement le passé d'une région limitée par cet horizon des particules, mais que cet horizon s'élargit en fonction du temps, de sorte que de plus en plus d'objets apparaissent au cours du temps. Cela signifie-t-il que des galaxies éloignées devraient apparaître soudainement aux astronomes? Presque, sauf que ces galaxies, lorsqu'elles apparaîtraient, seraient fortement décalées vers le rouge et apparaîtraient plus grosses que les autres, car elles étaient plus rapprochées dans le passé!

Ce type d'observation paradoxal ne se produit pas et, surtout, pose un problème fondamental qu'on appelle le *problème de l'horizon*; Comment expliquer l'homogénéité de l'Univers s'il est divisé en multiples régions qui n'ont jamais été en lien causal? En particulier, comment expliquer l'isotropie presque parfaite du rayonnement fossile cosmologique (de l'ordre de  $10^{-5}$ ) dans ce contexte? L'explication donnée généralement est que l'horizon des particules ne doit pas exister : l'Univers ne peut pas avoir été perpétuellement dans un état de décélération depuis l'explosion initiale. C'est ici qu'intervient l'inflation.

### 7.D.3 Expansion inflationnaire

Une expansion inflationnaire est caractérisée par une deuxième dérivée positive du facteur d'échelle :  $\ddot{R} > 0$ . Cela veut aussi dire que la distance de Hubble en co-mouvement  $\psi_H$  décroît avec le temps :

$$\dot{\psi}_H = \frac{d}{dt} \frac{1}{R(t)} = -\frac{\dot{R}(t)}{R^2(t)} < 0 \quad (7.113)$$

Donc, lors d'une expansion inflationnaire, la distance de Hubble en co-mouvement, le rayon causal en quelque sorte, devient de plus en plus petit.

Selon la première des équations de Friedmann-Lemaître, pour que  $\ddot{R}$  soit positif, il faut que  $\rho + 3P$  soit négatif si  $\Lambda = 0$ . Autrement dit, la pression doit être négative, et  $P < -\rho/3$ . Comme la constante

cosmologique correspond à un fluide tel que  $P = -\rho$ , on peut la considérer comme telle et intégrer son effet dans un nouveau type de fluide; notre argument est donc général. On voit aussi qu'une constante cosmologique peut mener à de l'inflation, comme dans le modèle de de Sitter.

#### 7.D.4 L'inflaton

Quel type de matière peut se comporter comme une constante cosmologique? Nous devons trouver la réponse dans la théorie des champs. En physique subatomique, on conçoit chaque particule comme étant un état excité par rapport à l'état fondamental d'un *champ quantique*. Chaque type de particule (électron, muon, photon, quark  $u$ , etc.) correspond à un champ précis. Par exemple, le champ électromagnétique (représenté par le potentiel électromagnétique  $A_i$ ) correspond au photon. Les fermions sont décrits par une catégorie de champ (*champ de Dirac*) qui n'a pas son analogue en physique classique. Par contre, les bosons sont représentés par des champs dont on peut prendre la limite classique. La catégorie de champ la plus simple est le *champ scalaire*, qui décrit des bosons de spin 0. Dans l'état actuel des choses, une seule particule observée appartient à cette catégorie, soit le boson de Higgs. Mais il est possible que d'autres champs scalaires aient joué un rôle important dans les premiers instants de l'Univers.

**action du champ scalaire** Un champ scalaire se définit par une fonction  $\phi(x)$  de l'espace-temps. En fait, la variable dynamique de la théorie est cette fonction elle-même. Le mot *scalaire* signifie ici que lors d'un changement de coordonnées  $x \rightarrow x'$ , la valeur du champ demeure inchangée :

$$\phi'(x') = \phi(x) \quad (7.114)$$

La dynamique du champ scalaire peut être définie à l'aide du principe de la moindre action et la forme généralement utilisée pour l'action est la suivante :

$$S[\phi] = \int d\Omega \sqrt{|g|} \left[ \frac{1}{2} g^{ij} \partial_i \phi \partial_j \phi - V(\phi) \right] = \int d\Omega \sqrt{|g|} \mathcal{L} \quad (7.115)$$

où  $\mathcal{L}$  est la densité lagrangienne associée au champ scalaire, elle-même un scalaire. La fonction  $V(\phi)$  est une *énergie potentielle* associée au champ. Dans le cas le plus simple, elle vaut  $V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2$  et le paramètre  $m$  est alors la masse des particules associées aux champs, lorsqu'on procède à la quantification du champ. Le champ scalaire causant l'inflation, qu'on considère ici, est appelé l'*inflaton*.

L'action  $S[\phi]$  est invariante lors d'un changement de coordonnées et donc respecte le principe de relativité générale. Elle permet deux choses : (1) déterminer la forme du tenseur d'énergie-impulsion associée à ce champ et (2) déterminer l'équation qui gouverne l'évolution du champ lui-même.

**tenseur énergie-impulsion du champ scalaire** Le tenseur énergie-impulsion du champ scalaire se calcule à l'aide de la définition générale, soit en prenant une variation de la métrique  $g_{ij}$  :

$$\delta S = -\frac{1}{2} \int d^4 \sqrt{|g|} T^{ij} \delta g_{ij} \quad (7.116)$$

Or on sait, d'après l'éq. (3.58), que

$$\delta\sqrt{|g|} = \frac{1}{2}\sqrt{|g|}g^{ij}\delta g_{ij} \quad (7.117)$$

et que  $\delta g^{ij} = -g^{ik}g^{jl}\delta g_{kl}$ . Donc

$$\delta S[\phi] = \int d\Omega \sqrt{|g|} \left[ \frac{1}{2}g^{ij}\mathcal{L} - \frac{1}{2}g^{ik}g^{jl}\partial_i\phi\partial_j\phi \right] \delta g_{ij} \quad (7.118)$$

d'où on tire que

$$T_\phi^{ij} = g^{ik}g^{jl}\partial_i\phi\partial_j\phi - g^{ij}\mathcal{L} \quad (7.119)$$

Comparons cette expression avec le tenseur énergie-impulsion d'un fluide parfait :

$$T^{ij} = (\rho + P)u^i u^j - P g^{ij} \quad (7.120)$$

qui devient, dans le repère en chute libre du fluide,

$$T^{ij} = (\rho + P)\delta_0^i\delta_0^j - P\eta^{ij} \implies [T^{ij}] = \text{diag}(\rho, P, P, P) \quad (7.121)$$

Dans ce référentiel en chute libre, les composantes diagonales du tenseur énergie-impulsion du champ sont

$$T^{00} = \rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi) \quad (7.122)$$

$$\sum_{a=1}^3 T^{aa} = 3P = (\nabla\phi)^2 + \frac{3}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{3}{2}(\nabla\phi)^2 - 3V(\phi) \quad \text{ou}$$

$$P = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{6}(\nabla\phi)^2 - V(\phi) \quad (7.123)$$

Pour une valeur constante de  $\phi$ , on voit que  $P = -\rho$ , donc qu'un champ scalaire peut potentiellement induire une période d'inflation, si sa variation dans l'espace-temps est faible par rapport à la valeur de l'énergie potentielle  $V(\phi)$ .

**Équation du champ scalaire** Procédons maintenant à une variation du champ  $\phi$  dans l'action  $S[\phi]$ , de manière à déterminer l'équation différentielle qui gouverne l'évolution du champ  $\phi$ . La variation correspondante de l'action est

$$\delta S = \int d\Omega \sqrt{|g|} [g^{ij}\partial_i\phi\partial_j\delta\phi - V'(\phi)\delta\phi] \quad (7.124)$$

où  $V'(\phi)$  est la dérivée de  $V$  et le facteur  $\frac{1}{2}$  a disparu du premier terme en raison de son caractère quadratique. En intégrant par parties le premier terme et en ignorant les termes de frontière, on trouve

$$\delta S = \int d\Omega \sqrt{|g|} \left[ -\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_j[\sqrt{|g|}g^{ij}\partial_i\phi] - V'(\phi) \right] \delta\phi \quad (7.125)$$

Cette variation de  $S$  doit s'annuler pour une variation quelconque  $\delta\phi$ , donc

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_j[\sqrt{|g|}g^{ij}\partial_i\phi] + V'(\phi) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_j[\sqrt{|g|}\partial^j\phi] + V'(\phi) = 0 \quad (7.126)$$

On reconnaît la quadri-divergence dans le terme de gauche, qui correspond au d'Alembertien dans le cas d'une métrique de Minkowski. Dans ce cas précis, cette équation devient

$$\square\phi + V'(\phi) = 0 \quad (7.127)$$

et dans le cas du potentiel quadratique  $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$ , on retrouve l'équation de Klein-Gordon :

$$\square\phi + m^2\phi = 0 \quad (7.128)$$

**évolution couplée du facteur d'échelle et de l'inflaton** Dans la métrique de Friedmann-Lemaître,  $\sqrt{|g|} = R^3(t)$  et donc l'équation du champ devient

$$\ddot{\phi} - R^2\nabla^2\phi + \frac{3\dot{R}}{R}\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \quad (7.129)$$

En isolant  $\ddot{\phi}$ , soit l'*accélération* du champ, on peut identifier les *forces* en cause :

$$\ddot{\phi} = R^2\nabla^2\phi - \frac{3\dot{R}}{R}\dot{\phi} - V'(\phi) \quad (7.130)$$

Le premier terme provient des tensions associées à la variation spatiale du champ, analogues à celles qui existent au sein d'une corde vibrante et qui causent la propagation d'ondes de déformation. Le deuxième terme agit comme une force de frottement (elle s'oppose à  $\dot{\phi}$ ) qui serait proportionnelle à la constante de Hubble  $H = \dot{R}/R$ . Enfin, le troisième terme est la force provenant de l'énergie potentielle du champ (linéaire dans le cas d'un potentiel quadratique). Nous allons supposer dans ce qui suit que la variation spatiale du champ peut être ignorée, car nous considérons son effet à l'échelle de l'Univers. La deuxième des équations de Friedmann-Lemaître (7.59) peut être associée à l'équation du mouvement ci-dessus pour former un ensemble couplé cohérent :

$$\begin{cases} \ddot{\phi} = -\frac{3\dot{R}}{R}\dot{\phi} - V'(\phi) \\ \dot{R}^2 = \frac{8\pi}{3}R^2\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right) - k \end{cases} \quad (7.131)$$

Nous avons là deux équations différentielles couplées (pour  $\phi$  et  $R$ ) qui gouvernent l'expansion de l'Univers sous l'influence du seul champ scalaire, c'est-à-dire en négligeant l'apport des autres sources d'énergie et en supposant que ce champ scalaire interagit faiblement avec les autres composantes de la matière.

**glissement** Afin de réaliser la condition  $P \sim -\rho$  semblable à ce que produit une constante cosmologique, il est nécessaire, d'après les éqs (7.122) et (7.123), que  $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$ . Si on suppose en outre que  $V(\phi)$  est approximativement constant sur une plage de  $\phi$ , alors la valeur de  $\phi$  changement lentement – régime de glissement (angl. *slow roll*) – et la deuxième des équations ci-dessus devient approximativement

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi}{3}R^2V(\phi) - k \quad \text{ou encore} \quad \dot{R}^2 = A^2R^2 - k, \quad A = \sqrt{\frac{8\pi}{3}V(\phi)} \quad (7.132)$$



La solution à cette équation, avec une condition initiale  $R(0) = 0$ , est

$$R(t) = \frac{\sqrt{-k}}{A} \sinh At = \frac{1}{A} \sinh At \quad (k = -1) \quad (7.133)$$

(on peut la vérifier facilement par substitution). Cette solution n'est valable que si  $k = -1$ . Une autre solution, applicable si  $k = 1$ , et avec condition initiale  $R(0) = A^{-1}$ , est

$$R(t) = \frac{\sqrt{k}}{A} \cosh At = \frac{1}{A} \cosh At \quad (k = 1) \quad (7.134)$$

Enfin, si  $k = 0$ , la solution croissante est simplement

$$R(t) = R(0)e^{At} \quad (7.135)$$

Bref, dans tous les cas, nous obtenons une croissance exponentielle du facteur d'échelle, soit la signature de l'inflation.

**scénarios d'inflation** Il n'y a pas de consensus actuellement sur la forme précise que devrait prendre le potentiel  $V(\phi)$  pour offrir un modèle satisfaisant de l'inflation. Dans le premier modèle, proposé par Alan Guth (1979), l'inflaton passait d'un faux minimum à un minimum absolu de  $V(\phi)$  via un effet tunnel qui s'accompagnait de la création d'une bulle en croissance inflationnaire au sein du milieu primordial. Dans ce scénario, l'Univers visible provient de cette bulle, et d'autres univers sont peut-être issus d'autres bulles. Ce scénario fut abandonné en raison de la difficulté d'arrêter le processus inflationnaire en convertissant l'énergie du champ en matière ordinaire. Un deuxième scénario, proposé en 1981, implique le phénomène de glissement décrit ci-dessus, mais présente d'autres difficultés. La théorie de l'inflation est toujours en faveur en raison de sa résolution des paradoxes mentionnés en début de section, mais un scénario inflationnaire précis est difficile à déterminer à partir des observations.

## E Problèmes

### Problème 7.1 courbure scalaire de l'espace

Montrez que, dans la métrique de Friedmann-Lemaître, la courbure scalaire *spatiale* est égale à  $6k/R^2$ ,  $R$  étant le facteur d'échelle (l'utilisation du symbole  $R$  pour le facteur d'échelle est un peu embêtante ici).

### Problème 7.2 espace plat

Dans le cas  $k = 0$ , la métrique de Friedmann-Lemaître se réduit à

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)(dr^2 + r^2 d\Omega^2) \quad (7.136)$$

Pourquoi alors ne pas définir une nouvelle coordonnée radiale  $\bar{r} = R(t)r$  et conclure que cette métrique est équivalente à celle de Minkowski, c'est-à-dire à un espace-temps plat, quand on l'exprime en fonction de  $\bar{r}$  et de  $d\bar{r}^2$ ?

### Problème 7.3 Décalage vers le rouge d'une particule massive

**A** Montrez que la vitesse d'une particule massive se déplaçant dans la métrique de Friedmann-Lemaître peut s'exprimer comme

$$v(t) = R(t) \frac{d\psi}{dt} \quad (7.137)$$

**B** Montrez que la combinaison

$$R(t)v(t)\gamma(t) \quad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \quad (7.138)$$

est constante au cours du temps pour une particule en chute libre.

**C** une particule en chute libre possède une longueur d'onde de de Broglie  $\lambda_1$  au temps  $t_1$  et  $\lambda_2$  au temps  $t_2$ . Trouvez la relation de décalage entre  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .

### Problème 7.4 carré de la courbure

Montrez que, dans la métrique de Friedmann-Lemaître, le carré de la courbure est

$$R_{ijkl}R^{ijkl} = \frac{12}{R^4} \left\{ (k + \dot{R}^2)^2 + (xxR\ddot{r})^2 \right\} \quad (7.139)$$

**Problème 7.5 Décalage du facteur  $\gamma$** 

Une particule est émise au temps cosmique  $t_e$  avec une vitesse  $v(t_e)$ , dans un univers de Friedmann-Lemaître. Elle est détectée au temps  $t$  avec une vitesse  $v(t)$ . Montrez que  $R(t)\gamma(t)v(t) = R(t_e)\gamma(t_e)v(t_e)$ , où le facteur  $\gamma$  est défini de la manière habituelle :

$$\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2(t)}} \quad (7.140)$$

**Problème 7.6 travail de la pression**

Un volume  $V$  est en co-mouvement avec l'expansion entre les temps  $t$  et  $dt$ . En considérant le travail exercé par la pression sur ce volume en expansion, démontrez la relation entre la densité et le facteur d'échelle  $R$ . Vous pouvez supposer que la relation pression-densité est  $P = w\rho$ .

**Problème 7.7 Cosmologie newtonienne**

Adoptons ici un point de vue strictement newtonien. Supposons que l'Univers soit composé d'une sphère de rayon  $R(t)$  en expansion, de densité  $\rho(t)$  uniforme. Appliquez la loi de Gauss, la deuxième loi de Newton et la conservation de l'énergie pour montrer qu'on retrouve ainsi les équations de Friedmann-Lemaître dans le cas  $k = 0$ , en l'absence de constante cosmologique et pour un matière froide.

**Problème 7.8 distribution du corps noir**

La densité spectrale de la densité de photons dans le rayonnement fossile est donnée par l'expression suivante :

$$n(\nu, T) = \frac{8\pi \nu^2}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \cdot \quad (7.141)$$

$n(\nu, T) d\nu$  représente la fraction de la densité volumique de photons occupée par des photons dont la fréquence est comprise entre  $\nu$  et  $\nu + d\nu$ .  $T$  est la température en degrés Kelvin. En se basant sur le principe que le nombre de photons ne change pas lors de l'expansion et que chaque photon voit sa fréquence modifiée par le facteur de dilatation, montrez que la distribution ci-dessus est préservée lors de l'expansion, pourvu que la température change de manière appropriée en fonction du facteur d'échelle  $R(t)$ .



# CHAPITRE 8

## ANNEXES

### A Formulaire

Connexion affine :

$$\Gamma^k_{ij}(x) = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_j g_{il} + \partial_i g_{jl} - \partial_l g_{ij}) \quad (8.1)$$

Transformation de la connexion affine :

$$\Gamma'^k_{ij} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} \Gamma^l_{mn} - \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^m \partial x^n} \quad (8.2)$$

Dérivées covariantes :

$$\nabla_j A^i = \partial_j A^i + \Gamma^i_{kj} A^k \quad \nabla_j A_i = \partial_j A_i - \Gamma^k_{ij} A_k \quad (8.3)$$

Géodésiques :

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{kj} \dot{x}^k \dot{x}^j = 0 \quad \dot{u}_i = \frac{1}{2} \partial_i g_{mk} u^m u^k \quad (8.4)$$

Tenseur de Riemann ou de courbure :

$$R^l_{kji} = \partial_j \Gamma^l_{ki} - \partial_i \Gamma^l_{kj} + \Gamma^m_{ki} \Gamma^l_{mj} - \Gamma^m_{kj} \Gamma^l_{mi} \quad (8.5)$$

Limite non relativiste :

$$g_{00} \approx 1 + 2\Phi(x) \quad (8.6)$$

Décalage vers le rouge (métrique constante) :

$$\frac{\nu_R}{\nu_E} = \left( \frac{g_{00}(\mathbf{r}_E)}{g_{00}(\mathbf{r}_R)} \right)^{1/2} \quad (8.7)$$

Métrique spatiale induite :

$$d\ell^2 = \gamma_{ab} dx^a dx^b \quad \gamma_{ab} = -g_{ab} + \frac{g_{0a} g_{0b}}{g_{00}} \quad (8.8)$$

Définition générale du tenseur énergie-impulsion :

$$\delta S_m = -\frac{1}{2} \int d\Omega \sqrt{|g|} T^{ij} \delta g_{ij} \quad (8.9)$$

Chapitre 8. Annexes

Équations d'Einstein :

$$R_{ik} = 8\pi \left( T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T \right) \quad R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = 8\pi T_{ij} \quad (8.10)$$

Métrique de Schwarzschild :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad r_s = 2M \quad (8.11)$$

Coordonnées de Kruskal-Szekeres :

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{r}{r_s} - 1} e^{r/2r_s} \sinh \frac{t}{r_s}, \quad u = \sqrt{\frac{r}{r_s} - 1} e^{r/2r_s} \cosh \frac{t}{r_s} \quad (r > r_s) \\ v &= \sqrt{1 - \frac{r}{r_s}} e^{r/2r_s} \cosh \frac{t}{r_s}, \quad u = \sqrt{1 - \frac{r}{r_s}} e^{r/2r_s} \sinh \frac{t}{r_s} \quad (r < r_s) \end{aligned} \quad (8.12)$$

Métrique de Schwarzschild en fonction des coordonnées de Kruskal-Szekeres :

$$ds^2 = \frac{4r_s^3}{r} e^{r/r_s} (dv^2 - du^2) - r^2 d\Omega^2 \quad (8.13)$$

Température de Hawking et entropie d'un trou noir :

$$T_H = \frac{\hbar}{8\pi k_B M} \quad S = \frac{k_B A}{4\hbar} \quad (8.14)$$

Métrique de Kerr :

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{r r_s}{\rho^2}\right) dt^2 + \frac{2a r r_s \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\varphi - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 \\ &\quad - \rho^2 d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{a^2 r r_s \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) \sin^2 \theta d\varphi^2 \end{aligned} \quad (8.15)$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad \Delta = r^2 + a^2 - r r_s \quad (8.16)$$

Gravité linéarisée et transformation de jauge :

$$g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij} \quad h'_{ij} = h_{ij} - \partial_i \xi_j - \partial_j \xi_i \quad (8.17)$$

Déformation à trace inversée :  $\bar{h}_{ij} := h_{ij} - \frac{1}{2} \eta_{ij} h$ .

Condition de Lorentz :  $\partial^j \bar{h}_{ij} = 0$ .

Équations d'Einstein linéarisées :

$$\square \bar{h}_{ki} = -16\pi T_{ik} \quad (8.18)$$

Potentiels retardés :

$$\bar{h}_{ik}(t, \mathbf{r}) = -4 \int d^3 r' \frac{T_{ik}(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (8.19)$$

Rayonnement quadripolaire :

$$\bar{h}^{ab}(t) = -\frac{2}{r} \left. \frac{d^2 I^{ab}(t')}{dt'^2} \right|_{t'=t-r} \quad I^{ab}(t) = \int d^3 r T^{00}(t, \mathbf{r}) x^a x^b \quad (8.20)$$

Polarisations dans la jauge transverse sans trace :

$$\bar{h}_{jk}(x) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} [a(\mathbf{q})e_{1,jk}(\mathbf{q}) + b(\mathbf{q})e_{2,jk}(\mathbf{q})] e^{-iq_j x^j} \quad (8.21)$$

$$e_{1,ij}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_{2,ij}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.22)$$

Métrie de Friedmann-Lemaître :

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right] = dt^2 - R^2(t) [d\psi^2 + s^2(\psi) d\Omega^2] \quad (8.23)$$

$$\begin{aligned} s(\psi) &= \sin \psi & (k=1) \\ s(\psi) &= \psi & (k=0) \\ s(\psi) &= \sinh \psi & (k=-1) \end{aligned} \quad (8.24)$$

Paramètre de Hubble et de décélération :

$$H(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \quad q(t) = -\frac{\ddot{R}(t)R(t)}{\dot{R}^2(t)} \quad (8.25)$$

Loi de Hubble-Lemaître :

$$1 + z = \frac{v_E}{v_R} = \frac{R(t_R)}{R(t_E)} \quad v \approx H_0 d \quad (8.26)$$

Équations de Friedmann-Lemaître :

$$\begin{aligned} \ddot{R} &= -\frac{4\pi}{3} R(\rho + 3P) + \frac{1}{3} \Lambda R \\ \dot{R}^2 &= \frac{8\pi}{3} \rho R^2 + \frac{1}{3} R^2 \Lambda - k \end{aligned} \quad (8.27)$$

$$1 = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k \quad \Omega_k = -\frac{k}{R^2} \quad \Omega_\alpha = \frac{8\pi}{3H^2} \rho_\alpha \quad (8.28)$$

Paramètres cosmologiques :

$$\begin{aligned} H_0 &\approx 67.8 \pm 0.9 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \\ H_0^{-1} &\approx 14.4 \times 10^9 \text{ années} \\ \Omega_{m,0} &= 0.308 \pm 0.012 \\ \Omega_{r,0} &\approx 5 \times 10^{-5} \\ \Omega_{\Lambda,0} &= 0.6911 \pm 0.0062 \\ |\Omega_k| &< 0.005 \end{aligned} \quad (8.29)$$

Inflation sous un champ scalaire (inflaton) :

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= -\frac{3\dot{R}}{R} \dot{\phi} - V'(\phi) \\ \dot{R}^2 &= \frac{8\pi}{3} R^2 \left( \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) - k \end{aligned} \quad (8.30)$$

## B Unités géométriques

Le système d'unités géométriques ramène les temps à des longueurs en posant  $c = 1$  et les masses à des longueurs en posant  $G = 1$ . Le tableau ci-dessous résume les dimensions des différentes quantités physiques et comment les convertir du système géométrique au système habituel, c'est-à-dire par quelle expression les multiplier pour retrouver les formules habituelles.

quantité	dimension (SI)	dimension (géométrique)	facteur de conversion
longueur	$L$	$L$	1
temps	$T$	$L$	$c^{-1}$
masse	$M$	$L$	$c^2 G^{-1}$
vitesse	$L/T$	1	$c$
fréquence	$1/T$	$1/L$	$c$
énergie	$ML^2/T^2$	$L$	$G^{-1} c^4$
densité d'énergie	$M/LT^2$	$L^{-2}$	$G^{-1} c^4$
pression	$M/LT^2$	$L^{-2}$	$G^{-1} c^4$
densité	$ML^{-3}$	$L^{-2}$	$c^2 G^{-1}$

Dans le système international, les dimensions de la constante  $G$  sont  $[G] = LE/M^2 = L^3/MT^2$ . Dans les unités géométriques, on pose  $c = 1$  (donc  $L \equiv T$ ) et  $G = 1$  (donc  $L \equiv M$ ).

Les différentes composantes du tenseur métrique  $g_{ij}$  peuvent avoir des unités différentes, car toutes les composantes des coordonnées n'ont pas nécessairement les mêmes unités (par exemple  $r$  et  $\theta$  en coordonnées polaires). Cela dit, les unités de  $g^{ij}$  sont les inverses de celle de  $g_{ij}$ , car  $g^{ij}g_{jk} = \delta_k^i$ . Pour les fins de cette annexe, supposons pour simplifier que les coordonnées choisies ont toutes les dimensions d'une longueur; alors  $[g_{ij}] = 1$  et  $[g^{ij}] = 1$ . On constate d'après sa définition que la connexion affine a les dimensions  $L^{-1}$  et que le tenseur de Riemann  $R^i_{jkl}$  a les dimensions  $L^{-2}$ , de même que le tenseur de Ricci et la courbure scalaire. L'action a généralement les unités  $ET = ML^2/T$ , ce qui revient à  $L^2$  dans les unités géométriques. Le préfacteur  $\kappa$  dans l'action d'Einstein-Hilbert n'a donc pas d'unités, si on tient compte des unités  $L^4$  de la mesure d'intégration sur l'espace-temps.

Le tenseur d'énergie-impulsion a les unités d'une densité d'énergie, soit  $[T_{ij}] = E/L^3 = M/LT^2$ , dans le système SI. La constante de proportionnalité  $A$  dans les équations d'Einstein

$$R_{ik} = 8\pi A \left( T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T \right) \quad (8.31)$$

doit donc avoir les dimensions  $(M/LT^2)^{-1} \times L^{-2} = T^2/ML$ . La seule combinaison de  $G$  et de  $c$  qui possède ces dimensions est  $G/c^4$ ; en effet,  $[G/c^4] = L^3/MT^2 \times T^4/L^4 = T^2/ML$ .



## C Vecteurs et tenseurs

Les quantités physiques d'intérêt en relativité se transforment de manière précise quand on passe d'un référentiel à un autre : ce sont des scalaires, des vecteurs ou des tenseurs de rang plus élevé. Cette section vise à introduire les notions de base sur les transformations des composantes d'un vecteur (ou d'un tenseur) dans un espace vectoriel simple. En particulier, on y introduit les notions de composantes contravariantes et covariantes d'un vecteur ou d'un tenseur. Dans ce chapitre, ces notions seront appliquées au cas d'un espace-temps plat décrit par un référentiel inertiel; elles seront plus tard appliquées au cas d'un espace-temps courbe ou décrit par des coordonnées curvilignes générales. Pour rendre la discussion plus intuitive, nous travaillerons dans l'espace cartésien à trois dimensions, mais les concepts seront immédiatement généralisables à l'espace-temps quadridimensionnel.

### 8.C.1 Composantes covariantes et contravariantes

**composantes contravariantes** Considérons une base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  dans l'espace tridimensionnel. Cette base n'est pas nécessairement orthonormée. Tout vecteur  $\mathbf{A}$  peut être décomposé selon cette base. Afin de faciliter l'écriture, nous allons affubler les composantes d'un vecteur selon cette base d'indices placés en haut, et nous allons utiliser la convention de sommation d'Einstein, qui stipule que tout indice répété l'un en haut, l'autre en bas, doit être sommé sur toutes ses valeurs possibles :

$$\mathbf{A} = A^1 \mathbf{e}_1 + A^2 \mathbf{e}_2 + A^3 \mathbf{e}_3 = A^i \mathbf{e}_i \quad (8.32)$$

Les 3 quantités  $A^i$  sont appelées *composantes contravariantes* du vecteur  $\mathbf{A}$ . La raison de cette appellation est donnée dans ce qui suit, et est au coeur de la présente section.

Procédons à un changement de base, c'est-à-dire définissons une nouvelle base  $\mathbf{e}'_i$  :

$$\mathbf{e}_i = \Lambda^j{}_i \mathbf{e}'_j \quad (8.33)$$

où les coefficients  $\Lambda^j{}_i$  forment une matrice  $\Lambda$  non singulière (indice de rangée à gauche, indice de colonne à droite). Le vecteur  $\mathbf{A}$  s'exprime également dans l'une ou l'autre base :

$$\mathbf{A} = A^j \mathbf{e}_j = A'^i \mathbf{e}'_i = A^j \Lambda^i{}_j \mathbf{e}'_i \quad (8.34)$$

Comme cette relation doit être vraie pour chacune des composantes séparément, c'est-à-dire pour chaque valeur de l'indice  $i$ , on peut écrire

$$A'^i = \Lambda^i{}_j A^j \quad (8.35)$$

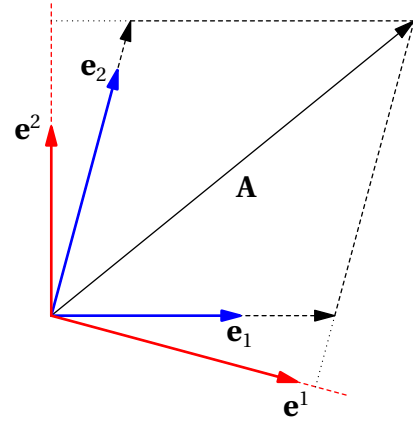
Les composantes  $A^j$  doivent s'exprimer en fonction des composantes  $A'^i$  par l'intermédiaire de la matrice inverse  $\Lambda^{-1}$  :

$$A^i = (\Lambda^{-1})^i{}_j A'^j \quad (8.36)$$

Autrement dit, les composantes contravariantes se transforment à l'aide de la matrice inverse transposée de celle utilisée pour transformer les vecteurs de base (d'où l'expression *contravariante*).

FIGURE 8.1

Illustration d'une base directe  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  (en bleu) et de sa base duale  $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2\}$  (en rouge). Les composantes du vecteur  $\mathbf{A}$  sur la base directe s'obtiennent par produit scalaire avec les vecteurs de la base duale :  $A^i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}^i$ .



**base duale** À la base  $\{\mathbf{e}_i\}$  on associe une *base duale*  $\{\mathbf{e}^i\}$  (l'indice est maintenant en haut) définie par la relation

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_j^i \quad (8.37)$$

Cette base duale permet d'obtenir les composantes contravariantes par projection :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}^i = A^j \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^i = A^j \delta_j^i = A^i \quad (8.38)$$

**composantes covariantes** Comme la relation entre une base et sa duale est la même pour toutes les bases ( $\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{e}'^i \cdot \mathbf{e}'_j = \delta_j^i$ ) et qu'elle a la même structure que la relation (8.34), on en déduit immédiatement que les vecteurs de la base duale se transforment aussi comme les composantes contravariantes lors d'un changement de base :

$$\mathbf{e}'^i = \Lambda^i_j \mathbf{e}^j \quad (8.39)$$

Autrement dit, la base duale est contravariante. Les bases directe et duale sont illustrées sur la figure 8.1.

Tout vecteur peut également être représenté de manière unique sur la base duale, mais cette fois par des composantes dites *covariantes* :

$$\mathbf{A} = A_i \mathbf{e}^i = A'_i \mathbf{e}'^i \quad (8.40)$$

Il est maintenant évident que les composantes covariantes méritent ce nom parce qu'elles se transforment de la même manière que les vecteurs de base :

$$A_i = \Lambda^j_i A'_j \quad \text{ou} \quad A'_i = (\Lambda^{-1})^j_i A_j \quad (8.41)$$

Les composantes covariantes s'obtiennent par projection du vecteur sur la base directe :

$$A_i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i \quad (8.42)$$

Si la base duale coïncide avec la base directe, alors il n'y a pas lieu de distinguer entre composantes covariantes et contravariantes. C'est le cas avec une base orthonormée dans l'espace euclidien à trois dimensions, et c'est pour cela que nous n'accordons pas d'importance à la position des indices dans ce cas. Par contre, pour une base générale, la distinction entre les deux types de composantes est essentielle. Elle est aussi importante dans la description des vecteurs en relativité, car l'espace-temps de Minkowski n'est pas euclidien, mais pseudo-euclidien.

### 8.C.2 Tenseurs

Si  $\{\mathbf{e}_i\}$  est une base de l'espace vectoriel  $V$ , alors les produits  $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\}$  forment une base de l'espace produit tensoriel  $V \otimes V$ . Les éléments de l'espace produit sont appelés **tenseurs**, plus précisément tenseurs de rang 2, car produits de deux facteurs. Nous verrons que plusieurs quantités physiques d'intérêt sont des tenseurs. On peut aussi, dans cet espace produit, utiliser la base duale, ou les bases directe et duale pour des facteurs différents :  $\{\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j\}$ ,  $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j\}$  et  $\{\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j\}$ .

Un tenseur de rang deux sera décrit par des composantes comportant deux indices. Nous avons la liberté de spécifier deux composantes contravariantes, deux composantes covariantes, ou des composantes mixtes :

$$\mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = T_{ij} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j = T^i_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j = T_i^j \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j \quad (8.43)$$

On constate immédiatement que, lors d'un changement de base, ces composantes se transforment de la manière suivante :

$$\begin{aligned} T'^{ij} &= \Lambda^i_k \Lambda^j_l T^{kl} \\ T'_{ij} &= (\Lambda^{-1})^k_i (\Lambda^{-1})^l_j T_{kl} \\ T'^i_j &= \Lambda^i_k (\Lambda^{-1})^l_j T^k_l \\ T'_i^j &= (\Lambda^{-1})^k_i \Lambda^j_l T_k^l \end{aligned}$$

Par abus de langage, on donne le nom de tenseur aux composantes elles-mêmes, et on appelle  $T_{ij}$  un *tenseur covariant*,  $T^{ij}$  un *tenseur contravariant*, alors que les ensembles  $T_i^j$  et  $T^i_j$  sont qualifiés de *tenseurs mixtes*.

On définit généralement des tenseurs de rang  $N$ , sur l'espace produit tensoriel  $V \otimes V \otimes \dots \otimes V$  ( $N$  facteurs), qui comportent  $N$  indices. Un tenseur de rang un est un vecteur. Un tenseur de rang zéro est un *scalaire*, soit une quantité invariante, c'est-à-dire indépendante de la base utilisée.

**Tenseur métrique** La base  $\{\mathbf{e}_i\}$  peut bien sûr être exprimée dans la base duale :

$$\mathbf{e}_i = g_{ij} \mathbf{e}^j \quad (8.44)$$

Les coefficients  $g_{ij}$  sont également les produits scalaires des vecteurs de base :

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = g_{ik} \mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}_j = g_{ik} \delta_j^k = g_{ij} \quad (8.45)$$

La relation inverse s'exprime ainsi :

$$\mathbf{e}^i = g^{ij} \mathbf{e}_j \quad \text{où} \quad g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i \quad \text{et} \quad \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j = g^{ij} \quad (8.46)$$

Comme les vecteurs de base  $\mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{e}^i$  sont respectivement covariants et contravariants, les quantités  $g_{ij}$  et  $g^{ij}$  se transforment bien comme les composantes covariantes et contravariantes d'un tenseur de rang 2. On l'appelle le *tenseur métrique*.

Le produit scalaire  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  s'exprime comme suit en fonction du tenseur métrique :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^i B^j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = A^i B^j g_{ij} \quad (8.47)$$

Le tenseur métrique peut être utilisé pour passer d'une composante covariante à contravariante et vice-versa. Ceci est vrai (par définition) pour les vecteurs de base, mais aussi pour les composantes. En effet,

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= A^i \mathbf{e}_i = A^i g_{ij} \mathbf{e}^j \implies A_j = g_{ij} A^i \\ \mathbf{A} &= A_i \mathbf{e}^i = A_i g^{ij} \mathbf{e}_j \implies A^j = g^{ij} A_i\end{aligned}$$

Plus généralement, le tenseur métrique peut être appliqué de cette manière à tout indice, covariant ou contravariant :

$$T_{ij} = g_{ik} g_{jl} T^{kl} \quad , \quad T_i^j = g^{jk} T_{ik} \quad , \text{ etc.} \quad (8.48)$$

**Contraction** On appelle *contraction* d'un indice covariant et d'un indice contravariant la somme sur les valeurs égales de ces indices, comme dans un produit scalaire. Ainsi, dans l'expression  $A^i \mathbf{e}_i$ , on dit que les deux indices sont *contractés*. Autre exemple : le produit scalaire de deux vecteurs  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  s'exprime ainsi :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A^i \mathbf{e}_i) \cdot (B_j \mathbf{e}^j) = A^i B_j \delta_i^j = A^i B_i \quad (8.49)$$

Les indices d'un tenseur de rang deux peuvent aussi être contractés :  $T^i_i$ .

En général, la contraction de deux indices mène soit à une quantité de rang inférieur de deux à la quantité originale. Par exemple, d'un tenseur de rang 4  $R_{iklm}$  (comme le tenseur de Riemann en géométrie riemannienne), on peut former un tenseur de rang deux par contraction :  $R_{ik} = R^l_{ilk} = g^{ml} R_{mil k}$ . La contraction des indices d'un tenseur de rang 2 produit une quantité de rang zéro, c'est-à-dire un scalaire (ou invariant).

À l'inverse, si on dispose d'une quantité à  $d$  composantes  $B^i$  sans être certain qu'il s'agit d'un vecteur, mais qu'on sait pertinemment que la contraction  $A_i B^i$  est un scalaire si  $A_i$  est un vecteur, alors  $B^i$  est nécessairement un vecteur. C'est ce qu'on appelle souvent le *théorème du quotient*.

## D Tenseur d'énergie-impulsion d'un fluide parfait

Dans cette annexe, nous allons démontrer l'éq. (7.61), mais cette fois à partir de la loi de conservation de l'énergie. Cela permettra de se familiariser un peu plus avec ce concept mécanique dans le cadre de la relativité générale.

**tenseur d'énergie-impulsion** Commençons par écrire la forme du tenseur d'énergie-impulsion pour un fluide parfait. Un tel fluide peut être vu comme un gaz de particules dont les interactions sont négligeables. Les collisions entre particules sont rares, et ont comme effet principal de préserver l'équilibre thermodynamique : elles n'ont pas d'effet sur l'énergie interne du gaz. Dans ce cas, l'action (3.49) décrit adéquatement le fluide et l'expression correspondante du tenseur d'énergie-impulsion figure à l'éq. (3.52) :

$$T^{ij} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \int d\tau_{\alpha} u_{\alpha}^i u_{\alpha}^j \delta^4(x - x_{\alpha}(\tau_{\alpha})) \quad (3.52)$$

où  $u^i = \dot{x}^i$  est la 4-vitesse. Pour simplifier, nous allons supposer que nous sommes dans un référentiel localement en chute libre, où  $g_{ij} = \eta_{ij}$ , donc  $\sqrt{|g|} = 1$  :

$$T^{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \int d\tau_{\alpha} u_{\alpha}^i u_{\alpha}^j \delta^4(x - x_{\alpha}(\tau_{\alpha})) \quad (8.50)$$

Nous pouvons calculer l'intégrale grâce à la fonction delta, en nous rappelant la propriété suivante :

$$\int dx f(x) \delta(g(x)) = \frac{f(x^*)}{|g'(x^*)|} \quad \text{où } g(x^*) = 0 \quad (8.51)$$

On suppose ici que l'équation  $g(x^*) = 0$  n'a qu'une seule solution ; sinon il faut sommer sur ses différentes solutions. Bien sûr, seules comptent les solutions situées dans l'intervalle d'intégration. En mettant à profit la partie temporelle de la fonction delta dans (3.52), on trouve

$$T^{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \frac{1}{|u_{\alpha}^0|} u_{\alpha}^i u_{\alpha}^j \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(\tau_{\alpha})) \quad (8.52)$$

Comme  $m u_{\alpha}^i = p_{\alpha}^i$ , la 4-impulsion de la particule  $\alpha$ , on peut aussi écrire ce qui précède ainsi :

$$T^{ij} = \sum_{\alpha} \frac{1}{E_{\alpha}} p_{\alpha}^i p_{\alpha}^j \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(\tau_{\alpha})) \quad (8.53)$$

où  $E_{\alpha}$  est l'énergie de la particule  $\alpha$ .

**4-vecteur densité** On peut aussi définir un quadrivecteur analogue, décrivant la densité numérique du fluide et le courant associé :

$$n^i = \sum_{\alpha} \int d\tau_{\alpha} u_{\alpha}^i \delta^4(x - x_{\alpha}(\tau_{\alpha})) \quad (8.54)$$

Il s'agit manifestement d'un 4-vecteur, car  $\dot{x}_{\alpha}^i$  est un 4-vecteur et la fonction delta est un invariant. Encore une fois, l'intégrale peut être faite et

$$n^i = \sum_{\alpha} \frac{1}{u_{\alpha}^0} u_{\alpha}^i \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(\tau_{\alpha})) \quad (8.55)$$

La composante temporelle de ce quadrivecteur est la densité de fluide :

$$n^0(x) = \sum_{\alpha} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(\tau_{\alpha})) \quad (8.56)$$

et les composantes spatiales forment la densité de courant :

$$n^a(x) = \sum_{\alpha} v_{\alpha}^a \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(\tau_{\alpha})) \quad u^a = v^a u^0 \quad (8.57)$$

( $v_{\alpha}^a$  est la 3-vitesse de la particule  $\alpha$ ).

**fluide parfait** Nous allons supposer que le milieu est composé d'une multitude de particules en nombre suffisant pour former un fluide et pour que les propriétés macroscopiques puissent être assimilées à des valeurs moyennes sur les particules. La composante  $T^{00}$  est alors

$$T^{00}(x) = \left\langle \sum_{\alpha} E_{\alpha} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(\tau_{\alpha})) \right\rangle = \rho(x) \quad (8.58)$$

où  $\rho$  désigne maintenant la densité d'énergie du fluide, y compris l'énergie de masse bien sûr.

Nous allons en outre nous placer dans le référentiel du fluide, dans lequel aucune direction n'est privilégiée. Dans ce cas, le 3-vecteur  $T^{0a}$  doit être nul et il nous reste à écrire la partie purement spatiale  $T^{ab}$  :

$$T^{ab}(x) = \left\langle \sum_{\alpha} \frac{1}{E_{\alpha}} p_{\alpha}^a p_{\alpha}^b \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(\tau_{\alpha})) \right\rangle \quad (8.59)$$

En raison de notre choix de référentiel, le résultat doit être le même dans toutes les directions, ce qui revient à faire les moyennes sur les directions, ce qui nous permet de remplacer  $p_{\alpha}^a p_{\alpha}^b$  par  $\frac{1}{3} \mathbf{p}_{\alpha}^2 \delta^{ab}$  :

$$T^{ab}(x) = \frac{1}{3} \delta^{ab} \left\langle \sum_{\alpha} \frac{1}{E_{\alpha}} \mathbf{p}_{\alpha}^2 \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(\tau_{\alpha})) \right\rangle \quad (8.60)$$

**gaz non relativiste** Si la température est petite devant l'énergie de masse, on peut simplement appliquer la mécanique statistique non relativiste et utiliser le principe d'équipartition de l'énergie, qui nous dit que la valeur moyenne de chaque terme quadratique dans l'énergie est  $\frac{1}{2} k_B T$ . Comme  $E \approx m$  dans cette limite,

$$\begin{aligned} T^{ab}(x) &= \frac{2}{3} \delta^{ab} \left\langle \sum_{\alpha} \frac{\mathbf{p}_{\alpha}^2}{2m} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(\tau_{\alpha})) \right\rangle \\ &= k_B T \delta^{ab} \left\langle \sum_{\alpha} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(\tau_{\alpha})) \right\rangle \\ &= k_B T n^0(x) \end{aligned} \quad (8.61)$$

où  $n^0(x)$  est la densité de fluide (et non pas la densité d'énergie du fluide). D'après la loi des gaz parfaits, cette expression est précisément la pression du gaz. Donc  $T^{ab}(x) = P\delta^{ab}$  et, plus généralement,

$$[T^{ij}] = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} \quad (8.62)$$

**gaz ultrarelativiste** Si, au contraire, on a affaire à un gaz de particules ultrarelativistes, alors  $|\mathbf{p}_\alpha| = E_\alpha$  et l'expression (8.60) devient

$$T^{ab}(x) = \frac{1}{3}\delta^{ab} \left\langle \sum_\alpha E_\alpha \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha(\tau_\alpha)) \right\rangle = \frac{1}{3}\rho\delta^{ab} \quad (8.63)$$

ou encore

$$T^{ij} = \rho \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (8.64)$$

On montre cependant que, pour un tel gaz,  $P = \frac{1}{3}\rho$ , et donc la forme (8.62) en fonction de la pression est encore valable.

Pour le démontrer, calculons la fonction de partition d'un tel gaz. Sachant que les états d'ondes planes sont dénombrés par la mesure

$$\sum_{\mathbf{p}} \dots = \mathcal{V} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \dots \quad (8.65)$$

où  $\mathcal{V}$  est le volume de l'espace, la fonction de partition est donnée par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} Z &= \mathcal{V} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-\beta|\mathbf{p}|} \\ &= 4\pi\mathcal{V} \int_0^\infty dp p^2 e^{-\beta p} \end{aligned} \quad (8.66)$$

où nous avons utilisé les coordonnées sphériques  $(p, \theta, \varphi)$  pour l'espace des quantités de mouvement et intégré sur les coordonnées angulaires. L'intégrale est simple et donne

$$Z = \frac{8\pi\mathcal{V}}{\beta^3} \quad (8.67)$$

L'énergie moyenne du gaz est donnée par

$$E = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = \frac{3}{\beta} \quad (8.68)$$

alors que la pression est donnée par

$$P = -\frac{\partial F}{\partial \mathcal{V}} \quad \text{où} \quad F = -\frac{1}{\beta} \ln Z \quad (8.69)$$

*Chapitre 8. Annexes*

est l'énergie libre de Helmholtz. On calcule directement que

$$P = \frac{1}{\beta} \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \mathcal{V}} = \frac{1}{\beta \mathcal{V}} \quad (8.70)$$

On a donc la relation

$$P = \frac{1}{3} \frac{E}{\mathcal{V}} = \frac{1}{3} \rho \quad (8.71)$$



## E Calcul du tenseur de Riemann avec SymPy

Dans cette annexe figure le code SymPy utiliser afin de calculer la connexion, le tenseur de Riemann et le tenseur de Ricci à partir du tenseur métrique. Dans l'exemple qui suit, on commence par supposer une métrique isotrope générale, définie à l'aide de fonctions inconnues  $A(r)$  et  $B(r)$ . Ensuite, connaissant la forme de ces fonctions dans la métrique de Schwarzschild, on calcule les mêmes quantités de nouveau. Les différents segments de ce code représentent différentes cellules dans un notebook python sous jupyter lab.

### 8.E.1 Calcul de quantités reliées à la métrique statique à symétrie sphérique générale, en fonction des fonctions inconnues $A(r)$ et $B(r)$ .

```

1 from sympy import *
2 from sympy import Array
3 init_printing()
4 t, r, theta, phi = symbols('t, r, theta, phi')
5 A = Function('A')
6 B = Function('B')
7 gd = Array([
8     [A(r), 0, 0, 0],
9     [0, -B(r), 0, 0],
10    [0, 0, -r**2, 0],
11    [0, 0, 0, -r**2*sin(theta)**2]
12 ])
13 coords = Array([t, r, theta, phi])
14 gu = Array([
15    [1/A(r), 0, 0, 0],
16    [0, -1/B(r), 0, 0],
17    [0, 0, -1/r**2, 0],
18    [0, 0, 0, -1/(r**2*sin(theta)**2)]
19 ])
20 gd, gu

```

#### connexion affine covariante

```

1 dg = derive_by_array(gd, coords)
2 gammad = (permutedims(dg, (2,0,1)) + permutedims(dg, (2,1,0)) - dg) / 2
3 gammad = factor(gammad)
4 gammad

```

#### connexion affine

```

1 gamma = tensorcontraction(tensorproduct(gu, gammad), (1,2))
2 gamma = simplify(gamma)
3 gamma

```

```
1 R1 = derive_by_array(gamma, coords)
2 C = tensorcontraction(tensorproduct(gamma, gamma), (0,4))
3 R = permutedims(R1,(1,2,0,3)) - permutedims(R1,(1,2,3,0))
4   + permutedims(C,(2,0,3,1)) - permutedims(C,(2,0,1,3))
5 R = simplify(R)
6 R
```

### tenseur de Riemann covariant

```
1 Rcov = tensorcontraction(tensorproduct(gu, R), (1,2))
2 Rcov = simplify(Rcov)
3 Rcov
```

### tenseur de Ricci

```
1 Ricci = tensorcontraction(R, (0,2))
2 Ricci = simplify(Ricci)
3 Ricci
```

### Courbure scalaire

```
1 Rm = tensorcontraction(tensorproduct(gu,Ricci), (1,2))
2 Rscal = tensorcontraction(Rm, (0,1))
3 simplify(Rscal)
```

### dérivée covariante

```
1 def dcov(A, coords, pos):
2     rank = len(pos)
3     D1 = derive_by_array(A, coords)
4     for i in range(rank):
5         perm = list(range(rank+1))
6         perm[i+1] = 0
7         perm[0] = 1
8         for j in range(1, i+1):
9             perm[j] += 1
10        if pos[i] is 0:
11            print('indice ', i, ' est covariant, perm = ', tuple(perm))
12            B = tensorcontraction(tensorproduct(gamma, A), (0, i+3))
13            D1 -= permutedims(B, perm)
14        else:
15            print('indice ', i, ' est contravariant, perm = ', tuple(perm))
16            B = tensorcontraction(tensorproduct(gamma, A), (1, i+3))
17            D1 += permutedims(B, perm)
18    return D1
19 simplify(dcov(gd, coords, (0,0)))
```

## 8.E.2 Calcul de quantités reliées à la métrique de Schwarzschild

```

1 from sympy import *
2 from sympy import Array
3 init_printing()
4 t, r, theta, phi = symbols('t, r, theta, phi')
5 k = symbols('k')
6 gd = Array([
7     [(1-k/r), 0, 0, 0],
8     [0, -1/(1-k/r), 0, 0],
9     [0, 0, -r**2, 0],
10    [0, 0, 0, -r**2*sin(theta)**2]
11 ])
12 coords = Array([t, r, theta, phi])
13 gu = Array([
14     [1/(1-k/r), 0, 0, 0],
15     [0, -(1-k/r), 0, 0],
16     [0, 0, -1/r**2, 0],
17     [0, 0, 0, -1/(r**2*sin(theta)**2)]
18 ])
19 gd

```

### connexion affine covariante

```

1 dg = derive_by_array(gd, coords)
2 gammad = (permutedims(dg, (2,0,1)) + permutedims(dg, (2,1,0)) - dg)/2
3 gammad = factor(gammad)
4 gammad

```

```

1 R1 = derive_by_array(gamma, coords)
2 C = tensorcontraction(tensorproduct(gamma, gamma), (0,4))
3 R = permutedims(R1, (1,2,0,3)) - permutedims(R1, (1,2,3,0))
4     + permutedims(C, (2,0,3,1)) - permutedims(C, (2,0,1,3))
5 R = simplify(R)
6 R

```

### tenseur de Ricci

```

1 Ricci = tensorcontraction(R, (0,2))
2 Ricci = simplify(Ricci)
3 Ricci

```

### carré de la courbure

```

1 Rcontra = tensorcontraction(tensorproduct(gu, R), (1,3))
2 Rcontra = tensorcontraction(tensorproduct(gu, Rcontra), (1,4))
3 Rcontra = tensorcontraction(tensorproduct(gu, Rcontra), (1,5))
4 R2 = tensorcontraction(tensorproduct(Rcov, Rcontra), (0,4))

```

## Chapitre 8. Annexes

```
5 R2 = tensorcontraction(R2, (0,3))
6 R2 = tensorcontraction(R2, (0,2))
7 R2 = tensorcontraction(R2, (0,1))
8 R2 = simplify(R2)
9 R2
```

# INDEX

action  
  d'une particule chargée, 20

courant, 18

quadriaccélération, 17  
quadrivitesse, 17