# A resolução de problemas com a folha de cálculo na aprendizagem de métodos formais algébricos

Sandra Nobre

Agrupamento de Escolas Professor Paula Nogueira;
UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

Nélia Amado

FCT, Universidade do Algarve;
UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

## Introdução

A Álgebra é um tópico matemático com um peso significativo nos currículos de Matemática a partir do 3.º ciclo do ensino básico. É também reconhecido que os alunos apresentam algumas dificuldades na aprendizagem deste tema, em particular, na aplicação dos métodos formais, o que pode estar relacionado com o ritmo a que os tópicos são estudados, bem como dever-se à abordagem predominantemente formal com que são apresentados (Herscovics & Lincheviski, 1994).

A resolução de problemas apresenta-se como um contexto privilegiado para a abordagem da Álgebra tornando a sua aprendizagem mais significativa. As situações problemáticas permitem ainda a utilização de uma diversidade de representações matemáticas (NCTM, 2000) que contribuem fortemente para a aprendizagem dos métodos algébricos formais. Deste modo, a resolução de problemas apresenta-se como um excelente veículo para a aprendizagem de conteúdos matemáticos permitindo uma melhor compreensão e aquisição de conhecimentos matemáticos e auxiliando os alunos a estabelecer conexões entre conteúdos de diversas áreas.

Neste estudo, elegemos a resolução de problemas como o tipo de tarefa que melhor se coaduna com uma aprendizagem dos métodos algébricos assente no seu significado e na sua aplicabilidade. Por outro lado, pretende-se levar os alunos a entender e ser capazes de usar a simbologia algébrica e os métodos formais algébricos, tomando como suporte o uso da folha de cálculo e a sua forma específica de funcionamento, que muitos autores consideram ajudar a fazer a transição entre a linguagem aritmética e a linguagem algébrica. Por exemplo, a ideia de variável é fortemente estimulada pelo processo de gerar colunas dependentes de outras e a ideia de solução de uma equação corresponde à inspeção dos valores assumidos por uma dada variável — ou seja, a procura do valor da incógnita que verifica certas relações estabelecidas.

Tendo por base estes dois pilares — resolução de problemas e uso da folha de cálculo — foi implementada uma experiência de ensino, assumindo como orientação geral a de proporcionar aos alunos uma compreensão (aprendizagem com significado) dos métodos algébricos associados aos sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas e à resolução de equações do 2.º grau a uma incógnita.

O quadro teórico da investigação apresenta como linhas centrais a resolução de problemas na aprendizagem da Álgebra e as representações matemáticas que estão envolvidas no uso de métodos algébricos, desde os mais informais aos mais formais.

Debruçamo-nos, em particular, sobre as representações matemáticas utilizadas pelos alunos e sobre a transição dos métodos informais para os métodos formais algébricos. O recurso à folha de cálculo, pelas suas características e linguagem híbrida, parece promover determinadas representações que estabelecem uma ponte entre a Aritmética e a Álgebra e, como tal, pode contribuir para uma aprendizagem mais significativa da Álgebra. Este estudo tem como principal objetivo saber de que forma a folha de cálculo como recurso para a resolução de problemas constitui uma mais-valia na aprendizagem de métodos algébricos estudados no 9.º ano do ensino básico.

## Enquadramento teórico

### A resolução de problemas na aprendizagem da Álgebra

Atualmente, a resolução de problemas é reconhecidamente um contexto universal de aprendizagem matemática e é uma das abordagens recomendada para o estudo da Álgebra por facilitar o desenvolvimento de processos algébricos. Windsor (2010) destaca a resolução de problemas como uma oportunidade para enriquecer e transformar o pensamento dos alunos. Tendo como referência estas recomendações, a resolução de problemas surge nesta investigação como uma atividade privilegiada para trabalhar e estimular o pensamento algébrico, nomeadamente no que respeita ao uso da linguagem algébrica e ao domínio de métodos formais de natureza algébrica. A definição de problema e de resolução de problemas adotada neste estudo está em sintonia com a proposta por Schoenfeld (1983), na qual a noção de problema inclui situações que o aluno não sabe como resolver ou situações para as quais não possui os procedimentos matemáticos que permitiriam resolvê-la de forma imediata.

Na atividade de resolução de problemas, em sala de aula, o professor desempenha um papel fundamental devendo, através de um discurso adequado, incentivar os alunos a pensar algebricamente ao invés de os conduzir diretamente para uma determinada estratégia ou procedimento. Em particular, a partir do desenvolvimento de diferentes abordagens aos problemas, a discussão das ideias relativas ao pensamento algébrico dos vários alunos revela-se fundamental (Windsor, 2010).

Kieran (2006) afirma que na resolução de problemas algébricos, os alunos preferem frequentemente recorrer a métodos aritméticos, mostrando dificuldade em utilizar equações. Embora à primeira vista o pensamento aritmético possa parecer um obstáculo para o desenvolvimento do pensamento algébrico, a verdade é que ele também pode ser visto como uma via para esse desenvolvimento.

Koedinger, Alibali, & Nathan (2008) consideram que os alunos inicialmente têm melhor desempenho na resolução de problemas do que na resolução de equações. Os problemas ajudam-nos a utilizar o seu raciocínio com quantidades e números, baseando-se nos seus conhecimentos sem a preocupação de memorizar como manipular os símbolos. Esta forma de raciocinar, mais independente da utilização de regras, fórmulas e do simbolismo algébrico, pode ser encarada como uma oportunidade para o surgimento de múltiplas representações, para o seu tratamento e conversões, o que pode contribuir para uma melhor aprendizagem dos métodos algébricos. Esta ideia é defendida por Hiebert & Carpenter (1992) que consideram que o uso de representações simbólicas não deve ser exigido aos alunos numa fase inicial da resolução de um problema. Primeiramente, eles devem ser envolvidos em experiências com múltiplas representações para que possam fazer conexões entre elas e os símbolos surjam de forma natural. Para estes autores, os alunos podem desenvolver uma compreensão incompleta quando não têm oportunidade para explorar outras representações para além das simbólicas. Apesar de haver alunos que usam apenas representações simbólicas e que conseguem aplicar os símbolos e regras para encontrar a solução de problemas, a aprendizagem de qualquer procedimento matemático deve ter por base o conhecimento conceptual que permita uma compreensão profunda e completa do que significam os símbolos e as regras.

A utilização da folha de cálculo surge como uma alternativa que permite a exploração e resolução de problemas de modo informal. Na resolução de um problema, este ambiente acentua a necessidade de identificar todas as variáveis relevantes e, além disso, estimula a procura de relações de dependência entre as variáveis. A estruturação das condições do problema em colunas permite identificar um conjunto de números com um único nome o que dá uma imagem da variável. Esta ação leva os alunos a refletir e permite-lhes compreender o significado matemático de variável (Wilson, 2007). A definição de relações intermédias entre as diversas variáveis, por meio de fórmulas, isto é, a decomposição de uma relação de dependência em sucessivas relações mais simples é um dos aspetos a salientar nesta ferramenta, com consequências decisivas no processo de resolução de problemas (Carreira, 1992; Haspekian, 2005). A folha de cálculo permite ainda dar uma organização algébrica a uma resolução aparentemente aritmética (Haspekian, 2005). O reconhecimento dos elementos envolvidos num problema e o estabelecimento de relações entre eles constitui um passo fundamental para utilizar a Álgebra na resolução de problemas. Como referem Dettori, Garuti, & Lemut (2001), a folha de cálculo revela-se bastante útil para a introdução da Álgebra, podendo ser um novo meio a integrar na resolução de problemas, ajudando a compreender o que significa resolver uma equação mesmo antes da aprendizagem formal da resolução de equações. Pode ainda facilitar o raciocínio perante um problema, contribuindo para selecionar a informação relevante, e funcionar de forma a promover as capacidades de generalização, abstração e síntese, fundamentais na Matemática. A resolução de problemas na folha de cálculo permite o estabelecimento de relações entre a linguagem simbólica neste ambiente digital e a linguagem simbólica algébrica, com lápis e papel. O recurso à folha de cálculo também constitui um meio para preencher o hiato entre o pensamento algébrico e a capacidade de usar a notação algébrica para expressar tal pensamento, como é descrito por Carreira, Jones, Amado, Jacinto & Nobre (2015).

## Representações matemáticas

É amplamente reconhecido que representações matemáticas facilitam a aprendizagem matemática, no sentido em que apoiam a compreensão dos conceitos, ajudam os alunos a estabelecer e perceber as conexões entre diferentes conceitos matemáticos, e salientam a ligação entre os conceitos matemáticos e as ideias provenientes da experiência, em particular, num contexto de trabalho assente na resolução de problemas.

A utilização de diversos tipos de representações matemáticas permite aos alunos expressarem e comunicarem as suas ideias, mas são ainda uma ferramenta que ajuda a atingir a compreensão de uma propriedade ou conceito (Dufour-Janvier, Bednarz & Belanger, 1987). Por outro lado, permitem compreender o significado envolvido nos processos matemáticos realizados pelos alunos.

Deste modo, podemos afirmar que as representações matemáticas podem ser encaradas como poderosas lentes através das quais podemos analisar a forma como os alunos exprimem o seu pensamento algébrico no estudo dos diferentes tópicos.

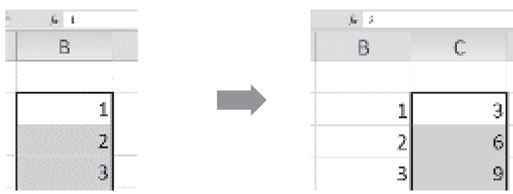
Cabe ao aluno, perante uma situação, optar por um determinado sistema de representação e tirar dele todo o partido. Para isso, deve ter oportunidade para avaliar a eficácia de determinados modos de representação e de interiorizar o seu significado: "As representações são úteis para o aluno, desde que ele as consiga usar eficazmente" (Dufour-Janvier et al., 1987, p. 121). Friedlander e Tabach (2001) consideram que a capacidade para trabalhar com várias representações permite eliminar as desvantagens de cada uma, tornando o processo de aprendizagem da Álgebra mais significativo e efetivo. Assim, estes autores defendem a necessidade de serem proporcionadas aos alunos tarefas que exijam o recurso a várias representações, o estabelecimento de relações entre elas, para que desta forma os alunos lhes atribuam significado. A resolução de problemas parece ser a melhor opção para alcançar este propósito, na medida em que facilita o recurso a uma diversidade de representações assim como ao estabelecimento de relações entre elas.

Para Duval (2006), as representações semióticas e a conversão de representações são fundamentais no processo de aquisição do conhecimento matemático: "nenhuma atividade matemática pode ser realizada sem usar um sistema de representação semiótico, porque um processo matemático envolve sempre a substituição de uma representação semiótica por outra" (p. 107). Para este autor, a dificuldade reside na passagem de uma representação para outra. Duval (2003) apresenta duas classes de transformações de representações semióticas: conversões e tratamentos. Assim, considera que os "tratamentos são transformações de representações dentro do mesmo registo, por exemplo: efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou representação" (p. 16), enquanto as "conversões são transformações de representações que consistem em mudança de registo conservando os mesmos objetos denotados, por exemplo: reconhecer a escrita algébrica de uma equação na sua representação gráfica" (p. 16). Na sua perspetiva, é a conversão das várias representações de um objeto matemático que possibilita a construção do conhecimento, afirmando que a "originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registos de representação" (Duval, 2003, p. 14). A conversão de representações é uma atividade que deve ser muito trabalhada e incentivada no ensino da Matemática, em particular, no estudo da Álgebra. Porém, esta atividade não é simples nem imediata para todos os alunos.

A escolha de um sistema de representação para efetuar determinado tratamento é também um aspeto fundamental, tendo em conta as suas potencialidades e os propósitos do aluno. Por exemplo, realizar um cálculo numérico complexo utilizando apenas linguagem natural pode tornar-se numa tarefa impossível, uma vez que as capacidades de tratamento podem ficar de imediato saturadas. Neste caso, é necessário um registo simbólico de representação numérica para efetuar o cálculo.

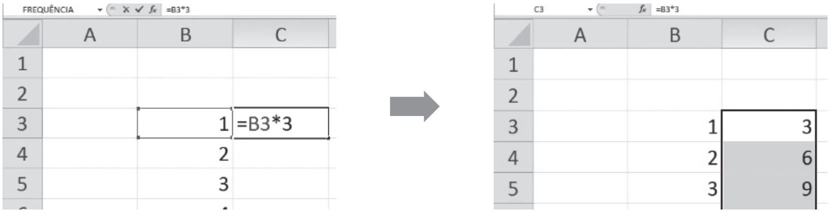
No trabalho com papel e lápis, consideramos: os registos em linguagem natural, no sistema de notação numérico-SNN, no sistema de notação algébrico-SNA, as representações pictóricas e as gráficas. Na folha de cálculo, consideramos: a linguagem natural, a inserção de valores numéricos, de fórmulas (variável célula e variável-coluna), representações gráficas e a formatação de células específicas, designadamente usando a cor (Haspekian, 2005). No estudo das representações no ambiente da folha de cálculo, usamos também as noções de conversão e tratamento propostas por Duval que podem ser estendidas às representações criadas neste ambiente computacional.

Nas Figuras 1 e 2, apresentamos alguns exemplos de tratamentos na folha de cálculo: a construção de uma sequência sem e com o recurso a fórmulas, respetivamente. No primeiro caso, obtemos uma sequência linear arrastando a alça de um conjunto de células. A mesma sequência pode ser gerada com recurso a uma fórmula que estabelece a relação entre as duas colunas. No segundo caso a introdução da fórmula deixa explícita a relação entre as duas colunas.




a) b)

Figura 1. Construção de uma sequência numérica (a) e construção de uma sequência estabelecendo uma relação (não explícita) com a coluna anterior (b).




c) d)

Figura 2. Escrita de uma fórmula para o estabelecimento de uma relação (c) e construção de uma sequência estabelecendo uma relação entre as duas colunas (variável-coluna) (d).

Na Figura 1, os tratamentos são implícitos uma vez que omitem as relações entre as colunas; por sua vez, na Figura 2, os tratamentos são explícitos por revelarem essas relações. A folha de cálculo permite ainda a conversão entre a tabela numérica e a respetiva representação gráfica. Esta característica é muito relevante na medida em que permite aos alunos relacionarem os números na tabela com a respetiva representação gráfica, possibilitando-lhes observar tendências e estabelecer conjeturas.

## A aprendizagem de métodos formais algébricos

Vários estudos mostram que os alunos têm dificuldades na compreensão e utilização de letras (MacGregor & Stacey, 1997) e, por vezes, nem tentam compreender o seu significado, preferindo lembrar simplesmente os procedimentos. A passagem do registo informal ao formal não é fácil para a maioria dos alunos. O pouco tempo despendido na fase informal e a rápida esquematização são responsáveis por estas dificuldades. Na maior parte das vezes, as estratégias são automatizadas muito rapidamente e, uma vez adquiridos os procedimentos algébricos e os métodos tornados rotineiros, há uma grande tendência para os alunos cometerem erros que não são capazes de identificar nem corrigir (Wagner, 1983). Os alunos apresentam, por vezes, uma elevada performance na aplicação de procedimentos formais, mas revelam uma compreensão limitada do seu significado e mostram dificuldade em lidar com situações problemáticas diferentes das habituais. Küchemann (1981) afirma que os alunos revelam uma reduzida flexibilidade matemática para adaptar procedimentos de resolução de problemas a situações novas, a menos que sejam capazes de relacioná los com procedimentos informais.

A literatura relacionada com a aprendizagem da Álgebra permite-nos conhecer algumas dificuldades sentidas pelos alunos no estudo dos métodos formais, em particular nos tópicos matemáticos selecionados para esta investigação.

No estudo de sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas está previsto o estudo do método de substituição e do método gráfico, podendo ainda ser abordado o método da adição ordenada. Algumas investigações indicam que a utilização do sinal de igual pode causar dificuldades na resolução de problemas que envolvem duas equações do 1.º grau a duas incógnitas (Filloy, Rojano & Solares, 2004). Para estes autores alguns alunos resolvem equações com uma incógnita, mas não resolvem problemas com duas incógnitas, manifestando dificuldades na aplicação da "transitividade do sinal de igual", quando se depararam, por exemplo, com duas equações na forma $4x-3=y$ e $6x+7=y$. Os alunos revelam dificuldade em substituir o $y$ na primeira equação pela expressão do 1.º membro da segunda equação. Isto pode ser interpretado como os alunos considerarem os $y$'s como sendo diferentes.

No estudo das equações do 2.º grau a uma incógnita, para além de outros aspetos, os alunos devem aprender a utilizar a fórmula resolvente e a compreender o significado das raízes. Vaiyavutjamai e Clements (2006) explicam que os alunos até conseguem obter as soluções de uma equação do tipo $(x-a)(x-b)=0$ mas dificilmente interpretam o seu significado. Numa perspetiva semelhante, Didiş et al. (2011) afirmam que os alunos têm dificuldades em compreender o significado dos símbolos nas equações do 2.º grau e acrescentam que esta compreensão pode melhorar com a apresentação das equações noutras formas, salientando que tal pode ajudar a promover um melhor entendimento das técnicas de factorização. Por outro lado, salientam a importância de encorajar os alunos a recorrerem a diferentes técnicas na resolução de equações do 2.º grau, como forma de melhorar a compreensão que os alunos têm dessas equações. Num estudo, com alunos do 10.º ano, Didiş et al. (2011) verificaram ainda que os alunos, ao aplicarem a lei do anulamento do produto, ignoravam o fator nulo. Assim, recomendam que sejam propostas tarefas levem os alunos a compreender e a assumir este fator em vez de apresentar a técnica da lei do anulamento do produto apenas como uma regra.

## Metodologia de investigação

### Opções metodológicas

Para este estudo adotamos uma metodologia essencialmente qualitativa de carácter interpretativo. A investigação segue um *design* de experiência de ensino com recurso a um estudo de caso, onde a primeira autora assume o duplo papel de professora da turma e investigadora.

Seguindo as recomendações de Yin (2005), ao fazer um estudo múltiplo de casos, é importante verificar quais lugares ou pessoas proporcionarão melhor riqueza de dados e proporcionarão melhor cruzamento de casos (cross case issues), tendo em conta a "lógica do inquérito". Neste artigo apresentamos parte de um dos casos de um estudo mais alargado que envolve dois casos em que os participantes foram selecionados de acordo com: i) a disponibilidade e interesse em participar no estudo; ii) diferentes desempenhos na disciplina de Matemática; e iii) diversidade de estratégias e/ou representações habitualmente utilizadas na resolução de tarefas. A partir dos critérios enunciados foram selecionadas duas alunas de uma mesma turma de 9.º ano. Iremos apresentar um extrato do caso de Ana, uma aluna com 14 anos, interessada e participativa, que habitualmente não revela dificuldades em Matemática. Esta aluna manifesta uma grande preocupação com o seu desempenho escolar, em particular, com a realização da prova final de avaliação de Matemática para o 3.º ciclo. Ana tem vindo a utilizar a folha de cálculo para resolver problemas nas aulas de Matemática sempre que tal é recomendado, como relatado em Nobre, Amado & Carreira (2012).

Tal como é sugerido por Yin (2005) para a recolha de dados num estudo de caso, foi privilegiada a observação direta dos alunos no seu ambiente natural, a sala de aula.

Em sala de aula, procedemos à recolha das produções da aluna, à captura dos ecrãs do computador, à gravação áudio dos diálogos e à observação participante registada em notas de campo. Após o estudo de cada um dos tópicos, foi realizada uma entrevista a Ana com o objetivo de obter mais informações acerca das suas aprendizagens. Procurou-se deste modo recolher dados de diversas fontes, tendo em conta o que é uma prática recomendada na investigação qualitativa e em particular nos estudos de caso.

A análise de dados tem por base a análise de conteúdo (Bardin, 1977) a partir das produções da aluna, das transcrições das gravações áudio, dos registos de *frames* no Excel (obtidos por gravação do ecrã do computador) e das entrevistas. Numa fase inicial foram identificadas e analisadas as representações matemáticas utilizadas por Ana e criadas as categorias para as representações em papel e lápis (linguagem natural, sistema de notação numérico-SNN, sistema de notação algébrico-SNA, pictóricas e gráficas) e na folha de cálculo (linguagem natural, inserção de valores numéricos, variável-célula, variável-coluna, formatação). Seguidamente foram identificadas as transformações das representações em cada um dos ambientes assim como conversões entre representações do papel e lápis para a folha de cálculo e vice-versa. Em paralelo foram analisados os diálogos que ocorreram durante a resolução e a discussão das tarefas em sala de aula e na entrevista. Foram ainda analisadas as representações utilizadas pela aluna na folha de cálculo. Esta análise permite-nos ter uma visão global da atividade da aluna, em particular da forma como utiliza e coordena as representações matemáticas na aprendizagem dos métodos formais.

## A experiência de ensino

A experiência de ensino teve lugar no ano letivo de 2010/11 na aula de Matemática, tendo a resolução de problemas assumido o papel central, embora tenham sido propostas tarefas de natureza diversa (Ponte, 2005), no estudo do tema Álgebra.

Alguns problemas foram propostos para serem resolvidos com recurso à folha de cálculo e como ponto de partida para a aprendizagem de métodos formais. Os alunos dispunham de computadores na sala de aula e foi privilegiado o trabalho em pares. Algumas das tarefas iniciais podem ser vistas como problemas suscetíveis de resoluções formais do ponto de vista algébrico, no entanto, foram primeiro explorados com recurso à folha de cálculo. Para cada uma destas tarefas, foram promovidos momentos de discussão e de síntese, procurando promover a construção de uma ponte entre o trabalho realizado na folha de cálculo e o trabalho com papel e lápis, recorrendo ao simbolismo algébrico, se possível a partir dos próprios alunos. Após a apresentação das tarefas à turma, o momento seguinte foi dedicado ao trabalho dos alunos — na maior parte das vezes, em pares ou em pequenos grupos. Dependendo da situação, existiram momentos de discussão intercalados com o trabalho dos alunos. Durante o período de discussão, os alunos partilharam com os colegas o trabalho desenvolvido. Concluída a discussão seguiu-se a síntese das ideias e/ou conceitos tratados com os contributos dos alunos.

## Apresentação dos Resultados

Analisamos seguidamente o trabalho desenvolvido por Ana no estudo dos dois tópicos. Debruçamo-nos sobre as representações matemáticas que utiliza e sobre a forma como as articula para obter as respostas às tarefas propostas. É dado particular destaque à atividade de resolução de problemas no ambiente da folha de cálculo, em articulação com o trabalho com papel e lápis.

Em cada um dos tópicos focamo-nos nas tarefas resolvidas com a folha de cálculo. Apresentamos excertos das produções de Ana e diálogos ocorridos na sala de aula bem como dados da entrevista que ilustram o modo como a aluna expressa o seu pensamento algébrico e a forma como utiliza e coordena as representações matemáticas na aprendizagem dos métodos formais.

### *I — Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas*

*Representações, conversões e tratamentos.* Analisamos as produções de Ana nas tarefas B1, E1 e F1, propostas para resolver na folha de cálculo, visando a aprendizagem dos métodos formais de substituição e gráfico de resolução de sistemas.

*Tarefa B1.*

> A Sofia gosta muito de colocar desafios aos colegas. Logo na primeira aula de Matemática, apresentou a seguinte proposta:
>
> - Para descobrires o meu dia de aniversário basta multiplicares o dia do meu nascimento por 12 e o mês por 30 e adicionares os dois valores obtidos. Se o resultado for 582 é esse o dia e o mês do meu aniversário!
>
> Consegues descobrir o dia do aniversário da Sofia?

Figura 3. Problema "Adivinhar o dia de aniversário".

Ana e a colega iniciam a resolução do problema convertendo a informação do enunciado para a folha de cálculo. Selecionam como variáveis independentes: o dia e o mês. Após diversas tentativas, decidem estabelecer relações intermédias: o produto do número correspondente ao dia por 12 e o produto do número correspondente ao mês por 30, obtendo de seguida a soma. Nomeiam a coluna C como "dia do nascimento" e constroem uma coluna de números entre 1 e 31, através do arrastamento. Na coluna D, apresentam o produto dos valores da coluna C por 12, conforme a condição do enunciado. Seguidamente, as alunas iniciam um processo para determinar o produto dos diferentes meses por 30 e as respetivas somas com o valor obtido na coluna D (Figura 4).

| C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | |
| dia do nascimento | | mês do meu nascimento/Janeiro | | Soma | | Fevereiro | | Soma |
| 1 | 12 | 1 | 30 | 42 | | 2 | 60 | 72 |
| 2 | 24 | 1 | 30 | 54 | | 2 | 60 | 84 |
| 3 | 36 | 1 | 30 | 66 | | 2 | 60 | 96 |
| 4 | 48 | 1 | 30 | 78 | | 2 | 60 | 108 |
| 5 | 60 | 1 | 30 | 90 | | 2 | 60 | 120 |

| C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | |
| dia do nascimento | | mês do meu nascimento/Janeiro | | Soma | | Fevereiro | | Soma |
| 1 | =1*12 | 1 | =1*30 | =D3+F3 | | 2 | 60 | =60+D3 |
| 2 | =2*12 | 1 | =1*30 | =F4+D4 | | 2 | 60 | =J4+D4 |
| 3 | =3*12 | 1 | =1*30 | =F5+D5 | | 2 | 60 | =J5+D5 |
| 4 | =4*12 | 1 | =1*30 | =F6+D6 | | 2 | 60 | =60+D6 |
| 5 | =5*12 | 1 | =1*30 | =F7+D7 | | 2 | 60 | =60+D7 |

Figura 4. Excerto da produção de Ana para a tarefa B1.

As alunas geram sequências numéricas (com incremento constante ou nulo) assim como fórmulas para estabelecer relações, criando variáveis-coluna. Como o procedimento se revela moroso, as alunas julgam que estão a seguir um caminho incorreto, abandonam a sua resolução, aguardando pela discussão onde é apresentada tabela de dupla entrada e a respetiva fórmula para a obter. Na entrevista, Ana reconhece que a estratégia selecionada não foi a melhor, o que as levou a desistir.

Na discussão na turma, os alunos concluem que existiam três datas possíveis para o aniversário. Como síntese, os alunos escrevem a relação algébrica entre o dia e o mês, $12d+3m=582$, tendo feito a verificação das soluções encontradas.

Esta tarefa destaca-se por ter proporcionado a resolução de um problema que possibilita o estabelecimento de relações entre variáveis na folha de cálculo e, posteriormente, a conversão dessas representações para o SNA. Os alunos lidam com uma equação linear envolvendo duas incógnitas, o que os leva a dar sentido às incógnitas numa equação indeterminada e perceber que estas equações podem admitir várias soluções.

Na aula seguinte foi proposta a resolução de outro problema na folha de cálculo que inclui o trabalho com várias condições e o estabelecimento de relações entre diferentes variáveis. Da discussão e síntese surge a escrita das condições do problema na forma de sistema de equações e a formalização do termo "sistema de equações".

*Tarefa E1.*

Problema: A corrida de cavalos

O Russo e o Relinchão são dois cavalos que participam numa corrida de 2400 metros. O Russo teve um bónus de 140 metros e partiu com esse avanço em relação ao relinchão. O Russo correu a uma velocidade de 11m/s e o Relinchão a 14m/s.

Qual dos dois cavalos ganhou a corrida?

Figura 5. Problema "A corrida de cavalos".

Na resolução deste problema, Ana converte a informação do enunciado para a folha de cálculo, seleciona o tempo como variável independente e a distância percorrida por cada cavalo como variável dependente. A aluna opta por gerar sequências numéricas, com incremento fixo (Figura 6).

| tempo (s) | Relinchão | Russo |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 140 |
| 1 | 14 | 151 |
| 2 | 28 | 162 |
| 3 | 42 | 173 |
| 170 | 2380 | 2010 |
| 171 | 2394 | 2021 |
| 172 | 2408 | 2032 |
| 173 | 2422 | 2043 |

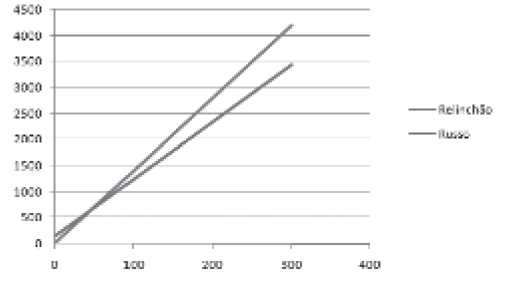



Figura 6. Excerto da produção de Ana para a primeira situação da Tarefa E1.

Ana converte depois a tabela para uma representação gráfica relacionando o tempo e a distância percorrida por cada um dos cavalos no mesmo referencial. Segue o mesmo processo nas duas situações colocadas posteriormente, em que os cavalos correm à mesma velocidade, sendo que numa delas o Russo mantém um avanço (Figura 7) e na outra não leva qualquer avanço (Figura 8).

| tempo | Relinchão | Russo |
|---|---|---|
| 0 | 14 | 140 |
| 1 | 28 | 154 |
| 2 | 42 | 168 |
| 3 | 56 | 182 |
| 4 | 70 | 196 |
| 5 | 84 | 210 |
| 6 | 98 | 224 |
| 7 | 112 | 238 |
| 8 | 126 | 252 |
| 9 | 140 | 266 |
| 10 | 154 | 280 |

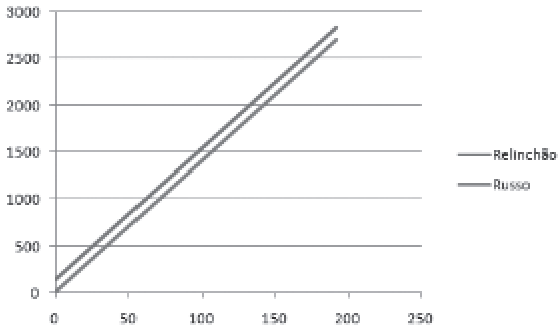



Figura 7. Excerto da produção de Ana para a segunda situação da Tarefa E1.

| tempo | Relinchão | Russo |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 14 | 14 |
| 2 | 28 | 28 |
| 3 | 42 | 42 |
| 4 | 56 | 56 |
| 5 | 70 | 70 |
| 6 | 84 | 84 |
| 7 | 98 | 98 |
| 8 | 112 | 112 |
| 9 | 126 | 126 |
| 10 | 140 | 140 |

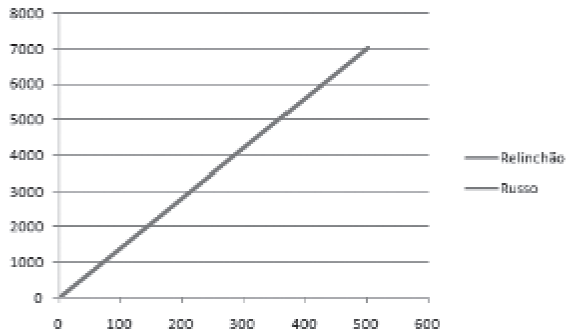



Figura 8. Excerto da produção de Ana para a terceira situação da Tarefa E1.

Após a discussão, os alunos convertem o trabalho realizado na folha de cálculo para o ambiente de papel e lápis onde escrevem a equação que representa a distância percorrida por cada um dos cavalos e os respetivos sistemas associados, passando depois à sua classificação. Na entrevista, Ana reconhece a importância desta tarefa na aprendizagem do método gráfico "… foi daí que obtivemos os gráficos para aprender a resolver sistemas graficamente".

*Tarefa F1.*

O problema "galinhas e coelhos"

Numa quinta há galinhas e coelhos. Ao todo são 212 cabeças e 700 patas. Quantas galinhas e quantos coelhos existem na quinta?

Figura 9. Problema "Galinhas e coelhos".

Na resolução deste problema (Figura 9), Ana converte a informação do enunciado para a folha de cálculo e começa por escolher como variável independente o número de coelhos e estabelece a relações entre esta e as outras variáveis. Utiliza a coluna "Soma das patas" para controlo (Figura 10).

| Coelhos | Galinhas | Soma das Cabeças | Coelhos | Galinhas | Soma das patas |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 211 | 212 | 4 | 422 | 426 |
| 2 | 210 | 212 | 8 | 420 | 428 |
| 3 | 209 | 212 | 12 | 418 | 430 |
| 4 | 208 | 212 | 16 | 416 | 432 |
| 137 | 75 | 212 | 548 | 150 | 698 |
| 138 | 74 | 212 | 552 | 148 | 700 |
| 139 | 73 | 212 | 556 | 146 | 702 |

| Coelhos | Galinhas | Soma das Cabeças | Coelhos | Galinhas | Soma das patas |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 211 | 212 | =F4*4 | =G4*2 | =L4+K4 |
| 2 | 210 | 212 | =F5*4 | =G5*2 | =L5+K5 |
| 3 | 209 | 212 | =F6*4 | =G6*2 | =L6+K6 |
| 4 | 208 | 212 | =F7*4 | =G7*2 | =L7+K7 |
| 137 | 75 | 212 | =F140*4 | =G140*2 | =L140+K140 |
| 138 | 74 | 212 | =F141*4 | =G141*2 | =L141+K141 |
| 139 | 73 | 212 | =F142*4 | =G142*2 | =L142+K142 |

Figura 10. Excerto da produção de Ana para a Tarefa F1.

Ana apresenta a sua resolução à turma e a tradução algébrica é feita a partir do diálogo entre a professora e os alunos.

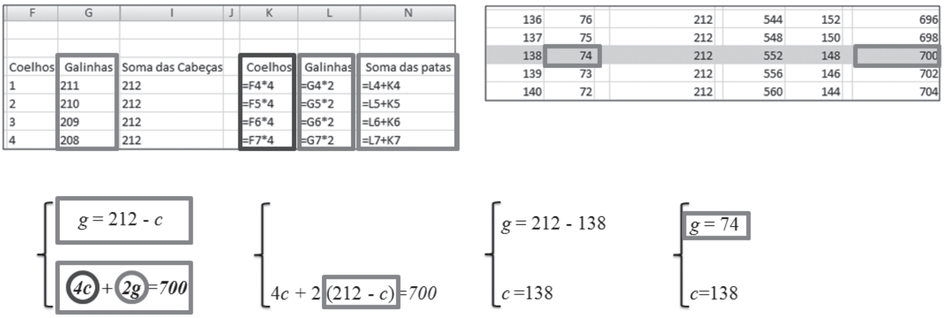



Figura 11. A tradução da folha de cálculo para papel e lápis.

O objetivo foi relacionar o trabalho na folha de cálculo com o método de substituição (Figura 11). Esta conversão das representações da folha de cálculo para o sistema de notação algébrico serve de suporte para a formalização do método de substituição.

A primeira coluna, nomeada “Coelhos”, é a variável independente e a segunda coluna, “Galinhas”, é uma variável dependente. Ana constrói a segunda coluna através de uma sequência numérica com incremento fixo (–1). No trabalho com papel e lápis, a letra $g$ designa o número de galinhas e a $c$ de coelhos, $g = 212 - c$. A quarta coluna “Coelhos” (corresponde ao número de patas dos coelhos) e a quinta coluna “Galinhas” (corresponde ao número de patas das galinhas) surgem como dependentes das duas primeiras, respetivamente. A sexta coluna (correspondente ao total de patas dos animais) surge como outra relação de dependência das duas anteriores. A esta última coluna cabe o papel de dispositivo de regulação para a procura da solução, ou seja, no trabalho com papel e lápis procuramos valores de $g$ e $c$, onde $c$ representa o número de coelhos, tais que $4c + 2g = 700$. Obtêm-se assim as duas equações que constituem o sistema. Através do arrastamento, a folha de cálculo efetua automaticamente os cálculos que correspondem à substituição dos valores correspondentes em cada célula de acordo com a fórmula inserida, levando assim à solução. Este trabalho de conversão da folha de cálculo para o SNA é fundamental para que os alunos se apropriem do significado de cada coluna construída na folha de cálculo e tenham oportunidade de compreender a correspondência que existe entre os procedimentos habituais na folha de cálculo e o método de substituição na resolução de sistemas de equações. A partir da resolução deste problema e da formalização realizada através da conversão do trabalho realizado na folha de cálculo para o papel e lápis, Ana começa a utilizar o método de substituição para resolver sistemas de equações, embora ainda com pouca fluência como a aluna refere na entrevista.

Na resolução destes problemas verificamos que a linguagem natural está sempre presente. No trabalho com a folha de cálculo, Ana utiliza a linguagem natural para nomear colunas, explicar os procedimentos e apresentar a resposta aos problemas. Por vezes, recorre ao registo numérico usufruindo da geração automática de sequências com incremento constante ou nulo, em outros casos para inserir fórmulas gerando variáveis-coluna. As representações gráficas surgem apenas quando solicitadas. Na parte final das resoluções, para procurar ou realçar as soluções, a aluna vale-se do realce colorido ou da formatação automática para colorir as respetivas células.

A atividade na folha de cálculo permite a Ana uma evolução na aprendizagem dos métodos formais de resolução de sistemas, que começa com a escrita de equações com duas incógnitas, seguida pela escrita de um sistema e da sua resolução pelo método gráfico e pelo método de substituição. As conversões, das tabelas para a respetiva representação gráfica e do trabalho realizado na folha de cálculo para o SNA revela-se fundamental em todo o seu percurso de aprendizagem.

***II — Equações do 2.º grau a uma incógnita***

*Representações, conversões e tratamentos.* No estudo deste tópico são propostas três tarefas para resolver na folha de cálculo. Apresentamos de seguida excertos do trabalho desenvolvido por Ana na resolução dessas tarefas.

*Tarefa B3.*

**Resolve o seguinte problema no Excel. Explica todo o teu raciocínio de forma clara, apresentando todas as justificações.**

1. O Carlos, a Ana e o Ricardo são três irmãos. A Ana tem um ano a mais do que o Carlos e um ano a menos do que o Ricardo.

No outro dia a Ana estava a fazer operações com os números que correspondem às suas idades e disse para os irmãos:

- Comparei o produto das vossas idades com o quadrado da minha idade e descobri uma coisa muito interessante! Vejam se também conseguem descobrir!

Figura 12. Problema "As idades dos irmãos".

Este problema (Figura 12) coloca aos alunos a questão "O que poderá Ana ter descoberto?". Ana começa logo por escrever na folha de cálculo "Ao lermos o enunciado, reparamos que o irmão mais novo é Carlos, Ricardo é o mais velho e Ana é a irmã do 'meio'". Converte depois a informação do enunciado para a folha de cálculo. Seleciona a idade de Ana como variável independente, na célula E5, e utiliza as fórmulas "=E5-1" para a idade de Carlos e "=E5+1" para a idade de Ricardo. Insere, posteriormente, as respetivas fórmulas para o "produto das idades dos irmãos" e para o "quadrado da idade de Ana" (Figura 13).

| Carlos | Ana | Ricardo | | Produto das idades dos irmãos | quadrado da idade da Ana |
|---|---|---|---|---|---|
| -1 | 0 | 1 | | -1 | 0 |
| 0 | 1 | 2 | | 0 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | | 3 | 4 |
| 2 | 3 | 4 | | 8 | 9 |
| 3 | 4 | 5 | | 15 | 16 |
| 4 | 5 | 6 | | 24 | 25 |

| Carlos | Ana | Ricardo | Produto das idades dos irmãos | | quadrado da idade da Ana |
|---|---|---|---|---|---|
| =E5-1 | 0 | =E5+1 | =F5*D5 | | =E5*E5 |
| =E6-1 | 1 | =E6+1 | =F6*D6 | | =E6*E6 |
| =E7-1 | 2 | =E7+1 | =F7*D7 | | =E7*E7 |
| =E8-1 | 3 | =E8+1 | =F8*D8 | | =E8*E8 |

Figura 13. Excerto da resolução de Ana na folha de cálculo.

Após arrastar as alças das células, observa os valores e descobre a relação entre as idades dos irmãos que regista em linguagem natural (Figura 14).

> A ana ao fazer o produto das idades dos irmãos e fazendo o quadrado da sua idade verificou que se somarmos um ao produto das idades do irmão, obtemos a idade da Ana.

Figura 14. Resposta de Ana.

No entanto o diálogo que estabelece com a professora mostra alguma insegurança.

Ana: Eu fiz isto…

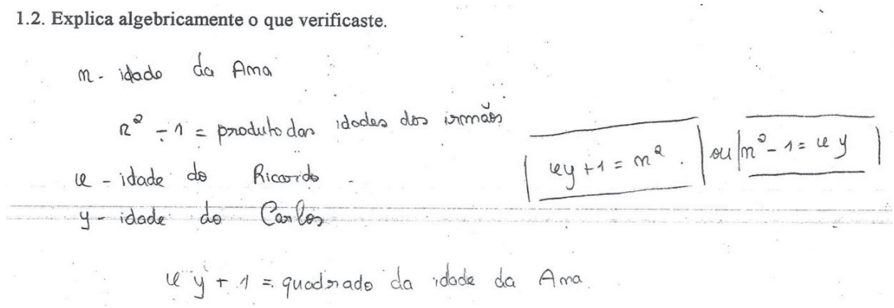
Professora: Isso é válido para qualquer idade?

Ana: Sim … [Com o rato, na folha de cálculo, começa a apontar e a comparar os valores das colunas "Produto das idades dos irmãos" e "quadrado da idade de Ana" ] –1, 0; 0,1; 3, 4; 8, 9; 15, 16 … Acho que não é isto!

Professora: Mas por que não?

Ana: É um bocado esquisito…

A questão seguinte pede a explicação algébrica do resultado obtido. Tal como a maioria dos alunos, Ana converte a informação da folha de cálculo mas não apresenta explicitamente a relação que existe entre as idades dos três irmãos, pois não contempla a diferença entre as suas idades (Figura 15).



1.2. Explica algebricamente o que verificaste.

$n$ - idade da Ana

$n^2 - 1$ = produto das idades dos irmãos

$x$ - idade do Ricardo

$y$ - idade do Carlos

$\boxed{xy + 1 = n^2}$ ou $\boxed{n^2 - 1 = xy}$

$xy + 1$ = quadrado da idade da Ana.

Figura 15. Resposta de Ana.

A aluna apresenta uma legenda com o significado das variáveis e escreve igualdades utilizando um misto de linguagem natural e expressões algébricas. Por fim, como resposta à questão, apresenta duas equações equivalentes. Nenhum aluno da turma expressa a relação desejada pelo que a professora os interroga a partir da resolução de uma aluna.

Após o questionamento da professora acerca das relações entre as idades dos irmãos e relacionando-as com o trabalho efetuado na folha de cálculo, os alunos chegam à igualdade que a professora escreve no quadro, $(a-1)(a+1)=a^2-1$. A professora tenta depois que os alunos reconheçam a igualdade.

Professora: Ao olharem para ali não reconhecem esta igualdade?

Patrícia: É uma equação do 2.º grau.

Carolina: Conhecemos, conhecemos… É uma coisa… que…

Ana: Lei do anulamento do produto…

Carolina: É aquilo que a professora deu…

Ana: É a lei do anulamento do produto! $a^2-1=a-1$ ou $a^2-1=a+1$

Patrícia: Isto é a lei do anulamento do produto?! É do quadrado do binómio!

Carolina: Oh pá, eu já disse isso!… Eu não sei nada disso do quadrado do binómio!

Ana: Não, não! Isso aí é outra coisa… A diferença de quadrados!

Professora: É a diferença de quadrados, será?

Ana: É sim, por causa que… A professora até deu isso no exemplo no ano passado… Eu lembro-me um pouco disso, por causa do teste intermédio.

Este diálogo retrata alguma confusão no reconhecimento da igualdade. Ana é uma das alunas que não a reconhece de imediato, mas aos poucos parece recordar-se de que este exemplo tinha sido tratado no ano letivo anterior.

Ao avançarem para a situação seguinte, na qual os irmãos têm 5 anos de diferença, Ana tal como a maioria dos colegas, decide utilizar a folha de cálculo e descobre que a diferença é de 25. Uma aluna antecipou-se e generaliza, dizendo bem alto para toda a turma: "É sempre a diferença ao quadrado!"

Por fim, na questão em que a diferença das idades entre os irmãos é k, os alunos já não recorrem à folha de cálculo.

Professora: Se a diferença entre as idades deles, em vez de ser 1, em vez de ser 5, for $k$, o que é que acontecerá?

Ana e Carolina: $a^2 - k^2$ [resposta em simultâneo].

[…]

Alguns alunos: $a - k$ vezes $a + k$ é igual a $a^2 - k^2$.

Patrícia: é só substituir o 5 pelo $k$.

Este diálogo com a turma conduz os alunos à generalização da condição que tinham encontrado anteriormente.

O problema envolvendo as idades levou os alunos a deduzirem a fórmula da diferença de quadrados através de um processo de generalização. Nas duas primeiras situações Ana recorre à conversão dos enunciados para a folha de cálculo, o que lhe permite observar a variação através da comparação dos diferentes valores numéricos nas colunas e a leva a escrever as relações. Na última situação a aluna já não sente a necessidade de recorrer à folha e cálculo e converte a informação do enunciado diretamente para o SNA.

*Tarefa D3.*

> 1. A Carlota atirou uma bola que embateu por diversas vezes no chão.
>
> A bola a partir do momento que tocou no chão descreveu uma trajectória em que a sua altura, em cada instante $t$, é dada por uma função quadrática.
>
> Na primeira vez, que tocou no chão, a altura $A$ da bola é dada por $A(t) = -20t^2 + 160t$ ($A$ em centímetros e $t$ em segundos).
>
> Na segunda vez, a altura $B$ da bola é dada por $B(t) = -20t^2 + 120t$ ($B$ em centímetros e $t$ em segundos).
>
> Na terceira vez, a altura $C$ da bola é dada por $C(t) = -20t^2 + 80t$ ($C$ em centímetros e $t$ em segundos)
>
> Na quarta vez, a altura $D$ é dada por $D(t) = -20t^2 + 40t$ ($D$ em centímetros e $t$ em segundos).
>
> Por fim, a bola rolou no chão e parou.

Figura 16. Problema "A bola saltitona".

Na primeira questão (Figura 16), é pedida a simulação na folha de cálculo do 1.º salto da bola e a representação gráfica. Ana começa por inserir os dados na folha de cálculo, contudo a aluna utiliza a primeira expressão algébrica para substituir no instante 0, a segunda para o instante 1 e assim sucessivamente. Estas representações revelam uma compreensão ainda pouco nítida do enunciado, pois é pedida a simulação do primeiro salto e a aluna recorre também às expressões algébricas das funções que definem os restantes saltos. Após a intervenção da professora, Ana assim como alguns dos seus colegas recorrem corretamente às expressões para os diferentes saltos.

Depois, Ana introduz corretamente os dados na folha de cálculo, recorrendo a uma variável-coluna, como se mostra na Figura 17, com os quais obtém, de seguida, a representação gráfica.

| Tempo | Altura |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 140 |
| 2 | 240 |
| 3 | 300 |
| 4 | 320 |
| 5 | 300 |
| 6 | 240 |
| 7 | 140 |
| 8 | 0 |

| Tempo | Altura |
|---|---|
| 0 | =-20*D4^2+160*D4 |
| 1 | =-20*D5^2+160*D5 |
| 2 | =-20*D6^2+160*D6 |
| 3 | =-20*D7^2+160*D7 |
| 4 | =-20*D8^2+160*D8 |
| 5 | =-20*D9^2+160*D9 |
| 6 | =-20*D10^2+160*D10 |
| 7 | =-20*D11^2+160*D11 |
| 8 | =-20*D12^2+160*D12 |

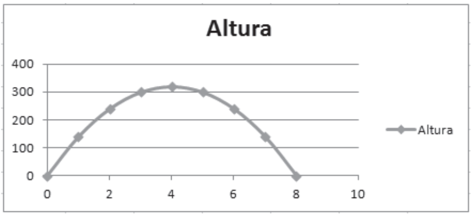



Figura 17. Excerto da produção de Ana na folha de cálculo.

Nas questões seguintes, em articulação com o trabalho realizado na folha de cálculo, os registos com papel e lápis têm também lugar, nomeadamente para indicar a altura máxima que a bola atinge e o instante em que isso acontece, bem como o tempo que a bola demora até embater de novo no chão. Ana não mostra qualquer dificuldade em responder a estas questões.

Noutra questão (Figura 18), pretende-se que os alunos indiquem os valores de $t$ para os quais $A(t) = 0$ e que expliquem o seu significado no contexto do problema. Ana facilmente interpreta a condição e aquando da sua discussão a professora pede ainda aos alunos para justificarem algebricamente os valores de $t$, ou seja, para utilizarem a notação algébrica para resolver a equação $A(t) = 0$. Contrariamente à maioria dos colegas, Ana rapidamente resolve a equação, recorrendo corretamente à lei do anulamento do produto (Figura 26), sem omitir o fator nulo.

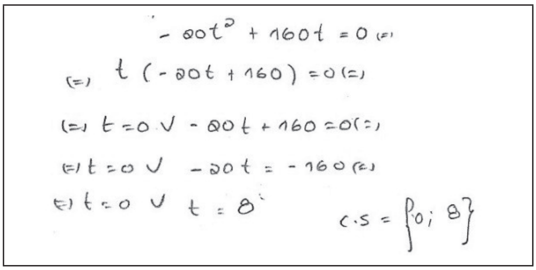



Figura 18. Resposta de Ana.

A professora reforça ainda a conexão entre as representações que os alunos têm presentes (dados da tabela, representação gráfica e algébrica) para uma ampliação da compreensão do significado da solução da equação.

Professora: … Vocês já tinham respondido a esta questão observando a tabela e observando o gráfico. Agora têm uma resolução algébrica. … No vosso gráfico quando é que a parábola interseta o eixo dos *xx*?

Turma: No 0 e 8.

Professora: Portanto, significa que 0 e 8 são as raízes ou as soluções daquela equação que ali está.

Na resposta à questão 1.5 (Figura 19), Ana, indica corretamente os valores para $t$, mas revela dificuldade na explicação do significado dos valores encontrados. Esta dificuldade parece ter sido ultrapassada no momento da discussão com a turma.

**1.5. Indica para que valores de $t$ se verifica a condição $A(t) = 240$. Explica o significado desses valores no contexto do problema.**

Os valores de $t$ são o 2 e o 6, o significado é, os 2 seg onde ela continua a ganhar altitude e os 6 seg, onde a bola perde altitude para regressar à posição do repouso.

Figura 19. Resposta de Ana à questão 1.5.

Muitos alunos demonstram dificuldade na resolução da questão 1.6 (Figura 20) e não a resolvem. Ana consegue resolver até ao penúltimo passo. Dadas as dificuldades dos alunos e uma vez que alguns já tinham conseguido resolver esta questão, a professora pede a uma aluna para ir ao quadro apresentar a sua resolução e explicar o seu processo de resolução. A professora indicou, por fim, que é possível escrever uma equação do 2.º grau como um produto de fatores, deixando visíveis as suas soluções, ou seja, na forma $c(x - r_1)(x - r_2) = 0$, onde $c$ é uma constante e $r_1$ e $r_2$ são as raízes.

**1.6. Verfica, algebricamente, que $A(t) - 240 = 0$ é uma equação equivalente à equação $\underline{-20(t-2)(t-6) = 0}$**

momentos em que a bola atinge os 240 cm de altura.

$$-20\,(t-2)(t-6) = 0$$

$$-20\,(t^2 - 6t - 2t + 12) = 0$$

$$-20\,(t^2 - 8t + 12) = 0$$

$$\boxed{-20t^2 + 160t} - 240 = 0$$

$$A(t) - 240 = 0$$

Figura 20. Resposta de Ana à questão 1.6.

Noutra aula, os alunos resolvem ainda outro problema na folha de cálculo envolvendo uma função quadrática, cuja representação gráfica é uma parábola com a concavidade virada para cima, sem raízes, contrariamente ao que acontecia na tarefa D3. Ana não manifesta dificuldades acerca do cálculo de imagens e vice-versa bem como a respetiva interpretação no contexto do problema. Na entrevista revela que, com esta tarefa, "foi onde ficámos a conhecer o outro gráfico, a outra parábola…", referindo-se à parábola com concavidade virada para cima. A professora colocou questões acerca do valor da temperatura inicial e final da substância para que os alunos interpretassem os valores da tabela ou do gráfico construídos na folha de cálculo e Ana não tem dificuldades em responder. Só posteriormente foi apresentada a fórmula resolvente e os alunos começaram a utilizá-la para resolver diferentes tarefas.

Ao longo do estudo deste tópico, os problemas propostos para explorar na folha de cálculo e em articulação com papel e lápis revelam-se importantes, em particular para o estudo da diferença de quadrados, para a compreensão do significados das raízes de uma equação do 2.º grau, para a sua interpretação gráfica, para a factorização, para a aplicação da lei do produto e para a escrita de equações equivalentes. Para além das conversões que foram incentivadas da folha de cálculo para o sistema de notação algébrico com papel e lápis os alunos também têm oportunidade de atribuir significado aos tratamentos efetuados no sistema de notação algébrico. Todas estas conversões são importantes e servem de base para o trabalho que é realizado a seguir, nomeadamente envolvendo a fórmula resolvente.

## Resultados e conclusões

As produções de Ana evidenciam que a resolução de problemas na folha de cálculo no estudo dos sistemas de equações do 1.º grau a duas incógnitas e das equações do 2.º grau promoveram o desenvolvimento do seu pensamento algébrico, levando-a, a partir de experiências informais, a uma aprendizagem gradual dos métodos formais, como sugerem Herscovics & Lincheviski (1994) e Hiebert & Carpenter (1992). O trabalho com diferentes representações, assim como as conversões para o SNA e os tratamentos neste registo, revelam-se muito importantes para a aprendizagem dos métodos formais algébricos.

Na resolução de problemas, as representações geradas por Ana na folha de cálculo seguem habitualmente um mesmo padrão. A aluna começa por nomear colunas, identificando as variáveis. Este processo de nomeação de colunas, permite identificar um conjunto de números com um único nome, dá uma imagem da variável, fornece um suporte importante para a atividade de papel e lápis, sendo uma ação que ajuda os alunos a compreender o significado matemático das variáveis envolvidas no problema (Wilson, 2007). Após nomear as colunas, Ana prossegue para o estabelecimento das relações de dependência entre as variáveis identificadas, usando o registo numérico para gerar sequências de incremento constante ou nulo ou procede ao registo de fórmulas para gerar varáveis coluna. Este procedimento associa-se à facilidade de experimentação que o Excel oferece no arrastamento de variáveis-célula, assim como à necessidade de um processo de reflexão (Wilson, 2007). Neste trabalho, temos evidências de que a aluna assume uma grande proximidade dos significados entre o trabalho que realiza na folha de cálculo e o que executa com papel e lápis. Em particular, a aluna relaciona as variáveis na folha de cálculo com as variáveis que utiliza no papel, o que lhe permite facilmente efetuar conversões para o SNA. Estas representações na folha de cálculo, assentes no estabelecimento de relações funcionais, possibilitam-lhe a obtenção das respostas pretendidas, como defendem Dettori et al. (2001) relativamente ao estabelecimento de relações entre variáveis presentes nos problemas, observado na folha de cálculo. Por outro lado, a folha de cálculo induz a aluna num processo de generalização, característico deste recurso computacional, que também é destacado por Dettori et al. (2001). Além disso, a resolução de problemas com a folha de cálculo nos diferentes tópicos proporciona a Ana a análise de representações gráficas de sistemas de duas equações do 1.º grau e de parábolas, em simultâneo com a observação da variação numérica nas tabelas.

Os métodos formais dos tópicos em análise apresentam características distintas pelo que o trabalho com a folha de cálculo também se revela diferenciado. No caso dos sistemas de equações, por exemplo, o recurso ao método de substituição implica um conhecimento sólido da escrita de equações, da sua resolução e da substituição de variáveis pelo que foram propostos problemas específicos para etapas consideradas cruciais para uma melhor compreensão do método. Quanto às equações do 2.º grau, os problemas propostos na folha de cálculo levam os alunos à compreensão do significado da diferença de quadrados, da factorização, da lei do anulamento do produto e da escrita de equações equivalentes, o que é fundamental para a aprendizagem da resolução da equação do 2.º grau e do significado das suas soluções. A fórmula resolvente não é diretamente trabalhada a partir dos problemas propostos na folha de cálculo, contudo estes revelam-se importantes e servem de base para uma melhor compreensão da aplicação deste método formal de resolução de equações do 2.º grau.

Na resolução dos sistemas de equações, no método de substituição, Ana começa por desenvolver a compreensão da escrita de relações no ambiente híbrido da folha de cálculo e, por fim, na linguagem algébrica, o que a leva, com a intervenção da professora, à noção de sistema de equações. Posteriormente, para além do estabelecimento de relações, a ideia de substituição surge naturalmente por parte da aluna, tendo sido formalizada na discussão com a turma, ao estabelecer uma ponte entre o trabalho na folha de cálculo e com papel e lápis. No que respeita ao método gráfico de resolução de sistemas, o trabalho na folha de cálculo é crucial na medida em que possibilita rapidamente a representação gráfica o que parece ser uma forma bastante eficaz para os alunos compreenderem o significado desta situação e estabelecerem uma comparação entre diferentes representações.

No estudo das equações do 2.º grau, a resolução de problemas na folha de cálculo, em articulação com o trabalho com papel e lápis, proporciona a Ana a compreensão do significado das soluções de uma equação, do significado de escrever uma equação do 2.º grau como um produto de fatores a partir das suas raízes ou zeros, da aplicação da lei do anulamento do produto e do significado do fator nulo em que habitualmente os alunos manifestam dificuldades (Didiş et al., 2011; Vaiyavutjamai & Clements, 2006).

O tempo despendido na fase informal de aprendizagem parece ter sido suficiente para Ana desenvolver a compreensão na aprendizagem dos métodos formais de resolução de sistemas e de equações do 2.º grau e assim evitar cometer determinados erros como refere Wagner (1983).

A resolução de problemas na folha de cálculo incentiva as conversões para o sistema de notação algébrico no ambiente de papel e lápis, sendo que este tipo de conexões é essencial para o desenvolvimento do seu pensamento algébrico, como é destacado por Dettori et al. (2001). Este estabelecimento de relações entre a linguagem simbólica, na folha de cálculo, e a linguagem simbólica algébrica, com lápis e papel, vem ao encontro daquilo que é destacado por Carreira et al. (2015) e revela-se preponderante na aprendizagem dos métodos formais. Outro aspeto a salientar é que uso das expressões algébricas não surge de forma isolada, mas sim em conjugação com representações tabulares ou gráficas. São bastante visíveis as conexões que a aluna faz entre as várias representações e a facilidade que mostra nas conversões entre elas, o que constitui uma forte evidência do desenvolvimento do seu pensamento algébrico (Schoenfeld, 2008). Tal como é descrito na literatura, Ana, apesar de inicialmente não utilizar a linguagem algébrica formal não está inibida de desenvolver o seu pensamento algébrico (Carreira et al. 2015; Kieran, 2007; Zazkis & Liljedahl, 2002). Para além disso, a aluna ganha destreza nessas conversões, o que é fundamental no processo de aquisição de conhecimento (Duval, 2006).

Em sala de aula revelam-se ainda cruciais os momentos de discussão (Ponte, 2005), servindo de suporte para Ana e os seus colegas desenvolverem uma perspetiva algébrica acerca de métodos de resolução. Estas discussões permitem ainda refletir sobre as estratégias surgidas e desenvolver diferentes formas de entender e abordar os problemas propostos (Windsor, 2010).

## Referências


Bardin, L. (1977). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Carreira, S. (1992). *A aprendizagem da Trigonometria num contexto de aplicações e modelação com recurso à folha de cálculo* (Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Carreira, S., Jones, K., Amado, N., Jacinto, H., & Nobre, S. (2015). *Youngsters solving mathematical problems with technology*. New York, NY: Springer. (no prelo).

Dettori, G., Garuti, R., & Lemut, E. (2001). From arithmetic to algebraic thinking by using a spreadsheet. In R. Sutherland, T. Rojano, A, Bishop & R. Lins (Eds). *Perspectives on school algebra* (pp. 191–208). Dordrecht: Kluwer.

Didiş, M, Baş, S., & Erbaş, A. (2011). Students' reasoning in quadratic equations with one unknown. In M. Pytlak, E. Swoboda, & T. Rowland (Eds.), *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Rzeszów, Poland: ERME.

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 109–122). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Duval, R. (2003). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In S. D. A. Machado (Org.). *Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica* (pp. 11–33). Campinas: Papirus.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103–131.

Filloy, E., Rojano, T. & Solares, A. (2004). Arithmetic/algebraic problem solving and the representation of two unknown quantities. In M. Johnsen Høines & A. B. Funglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 391–398). Bergen University College: PME.

Friedlander, A., & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.). *The roles of representation in school mathematics* (pp. 173–185). Reston, VA: NCTM.

Haspekian, M. (2005). An 'instrumental approach' to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: The case of spreadsheets. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *10*(2), 109–141.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *27*(1), 59–78.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65–97). New York, NY: Macmillan.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 11–50). Rotherham: Sense

Kieran, C. (2007). Developing Algebraic reasoning: the role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante*, *16*(1), 5–26.

Küchemann, D. (1981). Algebra. In K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics*, (pp. 102–119). London: John Murray.

Koedinger, K. R., Alibali, M. W., & Nathan, M. J. (2008). Trade-offs between grounded and abstract representations: Evidence from algebra problem solving. *Cognitive Science*, *32*, 366–397.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11–15. *Educational Studies in Mathematics*, *33*(1), 1–19.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Nobre, S., Amado, N. & Carreira, S. (2012). Solving a contextual problem with the spreadsheet as an environment for algebraic thinking development. *Teaching Mathematics and its Applications*, *31*, 11–19.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Números e Álgebra no currículo escolar. In I. Vale et. al. (Orgs.). *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp.5–27). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Secção de Educação Matemática.

Schoenfeld, A. (1983). The wild, wild, wild, wild, wild world of problem solving: A review of sorts. *For the Learning of Mathematics*, *3*, 40–47.

Schoenfeld, A. (2008). Early algebra as mathematical sense making. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 479–510). New York, NY: Lawrence Erlbaum.

Vaiyavutjamai, P., & Clements, M. A. (2006). Effects of classroom instruction on students' understanding of quadratic equations. *Mathematics Education Research Journal*, *18*(1), 47–77.

Wagner, S. (1983). What are these things called variables? *Mathematics Teacher*, *76*, 474–479.

Wilson, K. (2007). Naming a column on a spreadsheet. *Research in Mathematics Education*, *8*, 117–132.

Windsor. W., (2010). Algebraic thinking: A problem solving approach. In L. Sparrow, B., Kissane, & C. Hurst (Eds.). *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, (pp. 665–672). Fremantle, WA: MERGA.

Yin, R. K. (2005). *Introducing the world of education. A case study reader*. Thousand Oaks: Sage Publications.

Zazkis, R., & Liljedhal, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, *49*, 379–402.

**Resumo.** Neste estudo, a resolução de problemas apoiada na utilização da folha de cálculo é o contexto privilegiado para promover a aprendizagem de métodos formais da Álgebra. Foi implementada uma experiência de ensino, numa turma do 9.º ano de escolaridade, tendo como propósito proporcionar aos alunos uma compreensão dos métodos algébricos associados aos sistemas de duas equações do 1.º grau e à resolução de equações do 2.º grau a uma incógnita. Apresentamos o caso de Ana, analisando as representações a que esta aluna recorre na atividade de resolução de vários problemas com recurso à folha de cálculo que, pelas suas características e linguagem híbrida, parece promover determinadas representações que contribuem para a transição entre a Aritmética e a Álgebra e, como tal, contribuem para a aprendizagem do simbolismo algébrico e dos métodos formais.

Os resultados do estudo realizado permitem concluir que Ana recorreu frequentemente a 'conversões' para o sistema de notação numérico ao abordar os problemas propostos. No entanto, o recurso à folha de cálculo encorajou o uso da notação algébrica e no decurso da experiência de ensino observou-se que as 'conversões' foram sendo progressivamente efetuadas para o sistema de notação algébrico. A resolução de problemas contextualizados revelou-se útil para o estabelecimento de relações entre a linguagem simbólica, na folha de cálculo, e a linguagem simbólica algébrica, com lápis e papel. Contribuiu para dar sentido aos métodos formais algébricos tendo por base abordagens informais às situações colocadas nos problemas.

*Palavras-chave:* Resolução de problemas; Folha de cálculo; Pensamento algébrico; Representações matemáticas; Conversões e tratamentos; Métodos formais algébricos.

**Abstract.** In this study, students' problem solving supported by the use of the spreadsheet is the privileged context to promote the learning of formal algebra methods. A teaching experiment was implemented in a 9th grade class with the purpose of providing students insight and understanding into the algebraic methods associated with solving systems of 1st degree equations and 2nd degree equations. Here we present the case of the student Ana through the analysis of the representations that she produced when solving several of the problems in the spreadsheet, taking into account that this tool has special characteristics and presents a hybrid mathematical language that may facilitate the transition from arithmetic to algebra and therefore promote the learning of the algebraic symbolic language and formal methods.

The results of the research study showed that at an early stage Ana often resorted to 'conversions' to the numeric notation system when addressing the given problems. However her work with the spreadsheet encouraged her use of the algebraic notation and throughout the teaching experiment her conversions become mostly to this notation system. Solving contextualized problems also proved to be useful for the establishment of relations between the symbolic language of the spreadsheet and the algebraic symbolic language performed with paper and pencil. It helped to make sense of the algebraic formal methods based on informal approaches to the problem situations.

*Keywords:* Problem solving; Spreadsheet; Algebraic thinking; Mathematical representations; Conversions and treatments; Algebraic formal methods.

■■■

SANDRA NOBRE
Agrupamento de Escolas Professor Paula Nogueira;
UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa;
Bolseira FCT- Bolsa com a referência SFRH/BD/69917/2010
sandraggnobre@gmail.com

NÉLIA AMADO
FCT, Universidade do Algarve;
UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
namado@ualg.pt

JOÃO PEDRO DA PONTE
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

(recebido em abril de 2015, aceite para publicação em outubro de 2015)