UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

ADIÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS:
UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO NO 3.º ANO

Ricardo Jorge Costa de Vilhena

Mestrado em Educação

Área de especialização em Didática da Matemática

Dissertação orientada por
Dr.ª Marisa Alexandra Ferreira Quaresma
Prof. Doutor João Pedro Mendes da Ponte

2015

Resumo

Esta investigação tem como objetivo estudar a aprendizagem por alunos do 3.º ano da adição de números racionais por justaposição retilínea de segmentos de reta, seguindo uma abordagem de cunho exploratório. O quadro concetual tem por base estudos sobre a aprendizagem dos números racionais, nos seus diferentes significados, e o ensino-aprendizagem da adição de frações e de números decimais. Assume-se que (i) a compreensão do conceito de fração é determinante para a aprendizagem dos números racionais e necessária para a compreensão da adição por justaposição retilínea de segmentos de reta; (ii) a aprendizagem da adição de números racionais deve ser iniciada com base em representações pictóricas e contextos tanto quanto possível próximo da realidade dos alunos. Estes princípios informam a elaboração de uma unidade de ensino, com tarefas organizadas numa sequência ordenada de questões que levem a discussões em grande grupo suscetíveis de promover a compreensão e aprendizagem dos temas trabalhados.

Esta investigação segue uma abordagem qualitativa e insere-se no paradigma interpretativo. Enquanto investigador e professor desempenho o papel de observador participante. Os participantes do estudo são os alunos de uma turma do 3.º ano de escolaridade. A recolha de dados inclui as produções dos alunos, as informações recolhidas do diário de bordo, as gravações áudio e vídeo das aulas e das três entrevistas. Os resultados mostram que os alunos compreenderam a adição de frações por justaposição retilínea de segmentos de reta tendo como base de aprendizagem as representações pictóricas e a barra numérica. A barra numérica desempenhou um papel muito importante pois revelou ser um modelo de simples utilização e apropriação por parte dos alunos, permitindo estabelecer com facilidade uma relação com um contexto real. Assim, a relação entre representações icónicas e simbólicas pode ser apropriada de forma natural pela criança, permitindo a compreensão gradual das diferentes representações. A adição de números decimais com recurso à reta numérica, pela sua complexidade, mostrou ser um tema onde os alunos apresentam mais erros e dificuldades, pois, ao contrário da barra numérica, revela-se fortemente abstrata e descontextualizada.

Palavras-chave: Representações, Adição de números racionais, Barra numérica, Reta numérica.

Abstract

This research aims to study the learning by grade 3 students of the addition of rational numbers using the number line, following an exploratory approach. The conceptual framework is based on studies on the learning of rational numbers, in their different meanings, and the teaching and learning of the addition of fractions and decimals. It is assumed that (i) the understanding of the concept of fraction is decisive for the learning of rational numbers and necessary for the understanding of addition on number line; (ii) learning the addition of rational numbers should be initiated based on pictorial representations and contexts as much as possible close to reality of the students. These principles inform the development of a teaching unit, with tasks arranged in an ordered sequence of questions that lead to large group discussions that may promote understanding and learning of the topics worked on.

This research follows a qualitative approach within the interpretative paradigm. As the researcher and teacher, I assume the role of participant observer. Participants are the students in a grade 3 class. Data collection includes the work produced by the students, the information collected from the logbook, recording audio and video classes and three interviews. The results show that the students understand the addition of fractions based on the pictorial and bar model. The bar model played a very important role because it proved to be of simple use and ownership by the students, allowing to easily establish a relationship with a real context. Thus, the relationship between iconic and symbolic representations may be appropriated in a natural way by the child, allowing the gradual understanding of different representations. The addition of decimal numbers using the number line, because of its complexity, proved to be an area where students make more errors and have difficulties because, unlike bar model, it proves to be highly abstract and decontextualized.

Keywords: Representations, Addition of rational numbers, bar model, number line

Agradecimentos

Quero deixar um agradecimento especial a algumas pessoas sem as quais este estudo não teria sido possível.

Aos meus orientadores, Professora Marisa Quaresma e Professor João Pedro da Ponte, por toda a disponibilidade, apoio, orientação e incentivo durante a realização desta investigação.

Ao meu Colégio pelo apoio na realização deste mestrado, em especial à Dr.ª Maria de Lurdes pela compreensão, confiança e todo o apoio prestado ao longo destes anos.

Aos alunos do 3º ano, assim como à Professora titular da turma, pelo tempo cedido para a aplicação da Unidade de Ensino.

À Nádia, à Dr.ª Maria Helena, à Catarina, à Teresa e ao Nuno, colegas de trabalho com quem, por várias vezes, desabafei o stress das pressões diárias, repartidas entre trabalho e mestrado e a quem agradeço as palavras de apoio e amizade. Um agradecimento especial à Nádia pela preciosa ajuda nas traduções.

À Raquel, ao David, ao Isaac e aos meus sogros, pela compreensão durante as ausências dedicadas à investigação.

À minha família, em especial aos meu pais e irmãos, por tudo.

Um agradecimento especial aos meus avós, por me terem mostrado que o conhecimento é um valor precioso, nos faz crescer e nos torna pessoas mais humildes.

Índice

Índice de figuras

Índice de quadros

Capítulo I

Introdução

Neste capítulo apresento a motivação e contexto curricular que me levou à realização desta investigação sobre o ensino-aprendizagem da adição de números racionais pelos alunos do 3.º ano de escolaridade, assim como o problema e as questões do estudo.

Motivação e contexto curricular do estudo

Ao longo destes anos enquanto professor, tenho vindo a procurar desenvolver um trabalho pedagógico e didático orientado para a aprendizagem com compreensão dos conhecimentos adquiridos pelos alunos. A compreensão de conceitos e procedimentos tem sido uma preocupação transversal às várias áreas curriculares que leciono enquanto professor de 1.º ciclo.

A minha motivação para a realização deste trabalho, prende-se com a necessidade de tentar perceber quais as dificuldades sentidas pelas crianças do 3.º ano na aprendizagem dos números racionais, nomeadamente, a representação em fração e na reta numérica, as quais se revestem de grande complexidade. Estas dificuldades têm sido amplamente documentadas na literatura (ver por exemplo, Barnett-Clarke, Fisher, Marks, & Ross, 2010; Monteiro & Pinto, 2005), sendo importante perceber como se evidenciam no quadro das atuais orientações curriculares.

No ano letivo de 2013-14 lecionei uma turma de 3.º ano já seguindo o novo Programa e Metas Curriculares (MEC, 2013), e senti que o tempo que é possível disponibilizar para que as crianças compreendam e consolidem estes conceitos é muito reduzido, será necessário perceber como realizar um trabalho consistente, que permita aos alunos compreender os diferentes temas matemáticos que têm de aprender.

O Programa e Metas Curriculares (MEC, 2013) preveem o contacto com os números racionais desde muito cedo, a partir do 2.º ano, onde é introduzido o trabalho com frações unitárias e decimais. A aprendizagem das frações é iniciada pelo significado medida, tendo por base o trabalho com a reta numérica. Esta forma de introduzir a aprendizagem dos números racionais e das suas operações levanta algumas questões pois o significado de medida poderá não ser um bom ponto de partida, devido à elevada complexidade simbólica da reta numérica, e tem sido alvo de confusão por parte dos alunos. A reta numérica é uma importante ferramenta matemática para a aprendizagem, mas pela minha experiência não representa um bom ponto de partida para aprendizagem dos números racionais, havendo outras representações como a pictórica, que, por serem mais intuitivas, poderão ser mais adequadas para promover uma efetiva compreensão por parte dos alunos (Quaresma, 2010). Do 2.º para o 3.º ano, há um salto muito grande na complexidade de conceitos relativos aos números racionais. Continua a reforçar-se o trabalho dos números racionais enquanto medida e a sua representação na reta numérica, assim como a equivalência de frações, e operações com frações nomeadamente a adição e subtração, com denominadores iguais e diferentes, mais uma vez recorrendo à reta numérica, a que se segue a aprendizagem do algoritmo para a realização dessas operações.

A Matemática deve ser uma ciência ao alcance de todos. Com as adequadas orientações didáticas, pode trazer inúmeros benefícios em termos de desenvolvimento de capacidades e competências fundamentais para a progressão escolar dos alunos. Segundo as orientações do NCTM (2000), as aprendizagens devem ser focadas no respeito pela individualidade de cada criança, através do desenvolvimento de um currículo que permita o "crescimento matemático" dos alunos com base na resolução de problemas. Os alunos devem ser capazes de compreender a Matemática a fim de progredirem nas suas aprendizagens, suportados por uma avaliação que permita aos professores e alunos melhorar as aprendizagens. Importante também é a utilização de recursos tecnológicos como suporte e estímulo para a aprendizagem da Matemática. Em suma, pretende-se uma aprendizagem da Matemática centrada na compreensão para que os alunos ganhem confiança e adquiram competências que lhes permitam enfrentar os problemas com os quais se vão deparar no futuro.

Objetivo e questões do estudo

Pela minha experiência e pelas dificuldades demonstradas pelos alunos, senti necessidade de aprofundar mais este tema de forma a tentar dar resposta a algumas questões. Dado que o significado parte-todo se encontra subjacente à aprendizagem dos restantes significados de número racional, pode haver uma grande vantagem em iniciar a aprendizagem dos números racionais por este significado.

Deste modo o significado parte-todo pode servir como ponto de partida e suporte para a aprendizagem da noção de fração assim como dos restantes significados, nomeadamente o significado medida. Por outro lado, o uso de representações pictóricas pode apoiar de forma significativa a compreensão das representações mais formais como a fração. Será interessante ainda ver como outras representações, como a linguagem verbal e a barra numérica, podem ajudar nesta compreensão.

Assim, pretendo compreender em que medida uma experiência de ensino que promove a compreensão inicial da fração nos significados parte-todo e medida e assim como o uso de representações pictóricas podem apoiar a aprendizagem da adição de frações e de números decimais. Procurarei também perceber que erros os alunos cometem e que fatores se destacam como importantes na aprendizagem deste tópico.

Mais especificamente, no contexto desta experiência de ensino, procurarei estudar as seguintes questões:

I. Que representações usam os alunos para adicionar números racionais (pictórica, fração, decimal, barra ou reta numérica, linguagem verbal)?

II. Quais os erros mais comuns dos alunos na adição de números racionais quando usam diferentes representações (pictórica, fração, decimal, barra ou reta numérica, linguagem verbal)?

III. Que fatores contribuem para a compreensão da adição de números racionais, nas representações de frações e numerais decimais, nos significados de parte-todo e medida?

Capítulo II

Quadro teórico

Este capítulo aborda três campos de interesse para o presente estudo. Em primeiro lugar apresenta as investigações sobre a aprendizagem dos números racionais, com referência ao sentido de número. Segue-se uma abordagem aos deferentes significados de número racionais assim como algumas das representações mais recorrentes na aprendizagem dos números racionais. Conclui com orientações para a aprendizagem da adição de frações e de números decimais.

Aprendizagem dos números racionais

Aspetos gerais. Os números racionais constituem um importante conjunto numérico. Incluem, nomeadamente, os números inteiros e os números inteiros relativos, assim como os números que se podem escrever como o quociente entre dois números inteiros relativos, representados na forma de $\frac{a}{b}$ sendo b diferente de 0 (Barnett-Clarke, Fisher, Marks, & Ross, 2010). O aluno necessita compreender $\frac{4}{6}$ como uma entidade única, percebendo o que essa entidade é e a sua grandeza (Quaresma, 2010). Com a introdução dos números racionais, a criança aprende que entre os números inteiros 1 e 2 existem outros números. O desenvolvimento do sentido de número racional (McIntosh, Reys & Reys, 1992) depende da compreensão dos seus diferentes significados (nomeadamente parte-todo, medida, quociente e operador) assim como da identificação da unidade. As grandezas envolvidas podem ser contínuas ou discretas (Barnett-Clarke, Fisher, Marks, & Ross, 2010).

Um aspeto fundamental da aprendizagem dos números racionais é que os alunos compreendam que a partição da unidade deve ser realizada em partes iguais, tanto em unidades contínuas como em unidades discretas (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Clarke, Roche e Mitchell, (2008) acrescentam que o significado de parte-todo depende da habilidade do aluno de conseguir particionar (i) uma grandeza contínua, como uma área, um comprimento ou um volume, e (ii) um conjunto de objetos discretos que devem ser particionados em conjuntos com as mesmas quantidades.

Behr, Lesh, Post e Silver (1983) afirmam que, pela sua complexidade, os números racionais podem ser vistos em diversas perspetivas: (i) numa perspetiva prática, o seu conhecimento pode permite lidar com situações e problemas da vida real, (ii) numa perspetiva psicológica, o trabalho com números racionais permite às crianças desenvolver as suas capacidades e estruturas mentais, e (iii) numa perspetiva matemática, a compreensão dos números racionais constitui a base para a aprendizagem da álgebra e o desenvolvimento do raciocínio proporcional.

A aprendizagem dos números racionais deve ser feita na perspetiva do desenvolvimento do sentido do número, o que passa por uma compreensão global dos números e também pela compreensão e destreza em trabalhar com números e operações (McIntosh, Reys, & Reys, 1992).

Dificuldades dos alunos. Behr, Lesh, Post e Silver (1983) afirmam que os números racionais constituem um dos temas mais importantes e complexos que os alunos podem aprender. O problema que se levanta é que muitos alunos sabem aplicar e utilizar os algoritmos específicos relativos a estes números, mas revelam grande dificuldade na compreensão dos conceitos neles envolvidos (Moss & Case, 1999). Na verdade, o facto de as crianças saberem operar com símbolos não quer dizer que tenham compreendido os conceitos subjacentes. O treino permite a alguns alunos respostas certas em situações de cálculo rotineiro, que pode criar a ilusão de que compreendem o que fazem (Monteiro & Pinto, 2005) sem que se verifique uma verdadeira compreensão.

Para além disso, de acordo com Middleton, van de Heuvel-Panhuizen, e Shew (1998), as dificuldades sentidas na aprendizagem nos números racionais também resultam do facto das suas diferentes representações serem tratadas isoladamente. Os alunos precisam de compreender que as frações, números decimais e percentagens têm uma base comum e devem ser capazes de usar cada uma delas sempre que necessário.

A densidade dos números racionais constitui outra dificuldade pois não é fácil para crianças tão pequenas compreender que entre dois números racionais há sempre um outro (Quaresma, 2010), e que por mais perto que se encontrem há sempre uma infinidade de outros números racionais (Barnett-Clarke, Fisher, Marks, & Ross, 2010). Não há um número racional "seguinte" a um número racional dado. Assim, a prática e o discurso que se iniciam no trabalho com os números racionais implicam um salto importante na forma de pensar e de usar os números (Quaresma, 2010).

Monteiro e Pinto (2005) alertam para o facto de grandezas contínuas e discretas serem alvo de muitas dúvidas por parte dos alunos. Por exemplo, determinar a quarta parte de uma folha de papel ou a quarta parte de oito lápis implica representações diferentes. No segundo caso posso representar o resultado por um número inteiro e no primeiro caso isso não é possível. No 3.º ano, a introdução aos números decimais surge de uma forma natural a partir da divisão, operação com a qual os alunos já se encontram familiarizados. Partindo de grandezas discretas, por exemplo, ao dividir 11 bolachas por 2 amigos, percebem que devem deixar de fora uma bolacha para que cada um fique com 5, ou podem dividir essa bolacha que sobra e dar metade a cada um. Assim, de uma forma natural, surgem as representações 11:2=5 ou 5,50 (Monteiro & Pinto, 2005).

Kieran (1980) definiu quatro significados para a interpretação das frações, os quais envolvem diferentes significados: medida, quociente, razão e operador. Mais tarde, Behr, Lesh, Post & Silver (1983) acrescentaram o significado parte-todo, transversal a todos os outros, como base para a aprendizagem dos números racionais (figura 1).

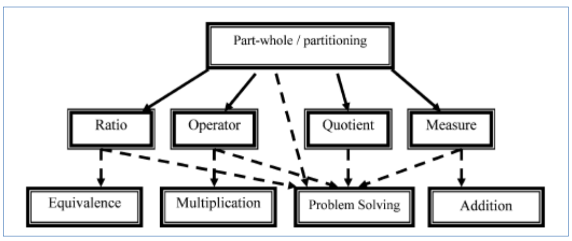


Figura 1– Significados de número racional.

Orientações para o ensino dos números racionais. Barnett-Clarke, Fisher, Marks, & Ross (2010) definem algumas ideias e prioridades essenciais, ao nível do 1.º ciclo, para aprendizagem e compreensão dos números racionais: (i) a passagem dos números inteiros para os números racionais dá origem a um sistema de numeração mais poderoso, mas ao mesmo tempo mais complexo e complicado, sendo uma extensão dos números naturais já conhecidos pelos alunos. Permitem resolver problemas que não era possível resolver apenas com os números inteiros. (ii) Os números racionais apresentam vários significados e a sua compreensão depende da unidade utilizada. À medida que a aprendizagem dos números racionais progride, os alunos desenvolvem uma compreensão da relação que existe entre as frações e os números decimais, tornando-se gradualmente fluentes na utilização destas equivalências (Barnett-Clarke, Fisher, Marks, & Ross, 2010).

Desde muito novas que as crianças estão habituadas a ouvir expressões como "metade" ou "um quarto". Para Llinhares & Sánchez (1997), estes conceitos, já do seu conhecimento, devem servir de ponto de partida para aprendizagem do significado parte-todo, no seu princípio de dividir ou repartir. Desde o trabalho com o conceito parte-todo até ao trabalho algébrico envolvendo a proporcionalidade existe um longo caminho a percorrer. Para estes autores, a introdução às frações não deve ser iniciada a partir de regras algébricas sem antes se ter desenvolvido um trabalho suportado por situações concretas onde os alunos têm a possibilidade de experimentar e visualizar as frações. Posteriormente, o trabalho com as frações deve evoluir progressivamente para situações de cálculo mais abstratas e sem contexto.

Brocardo (2010) propõe três princípios para se trabalhar os números racionais: (i) usar contextos e modelos apropriados, como por exemplo, utilizar dobragens de folhas para trabalhar aspetos relacionados com as frações, (ii) desenvolver gradualmente as grandes ideias subjacentes aos números racionais como a compreensão e integração dos significados de fração, saber operar com frações e a aquisição do conceito da unidade, e (iii) a construção de significados e relações, compreendendo os vários conjuntos numéricos, sendo capaz de efetuar cálculos usando números nas suas diferentes representações, estabelecendo uma teia de relações entre os números e operações.

Um estudo realizado por Monteiro e Pinto (2005) teve como objetivo tentar perceber as razões do insucesso das crianças associado à aprendizagem de números racionais. As conclusões desse estudo referem que, de um modo geral, em Portugal, é atribuída demasiada ênfase aos procedimentos e raramente se estabelecem "pontes" entre procedimentos e conceitos. Por outro lado, as autoras consideram que há situações em que as crianças resolvem bem problemas recorrendo a uma representação pictórica não sendo capazes que transpor esse conhecimento para uma representação matemática simbólica.

Significados de número racional

Parte-todo. A fração, neste significado, surge da comparação entre a parte e o todo, considerado este a unidade. O denominador indica o número de partes em que a unidade está dividida e o numerador o número de partes escolhidas (Monteiro & Pinto, 2005). Para Barnett-Clarke, Fisher, Marks e Ross, (2010) a introdução das frações pelo significado parte todo, partindo de uma unidade já dividida, pode ser uma ferramenta eficaz a curto prazo, mas, se lhe for atribuída muita ênfase, pode restringir a conceção de fração. O significado de parte-todo pode apresentar algumas desvantagens. Em primeiro lugar, o sentido de fração pode demorar a desenvolver-se pois neste significado os números da fração são tratados independentemente indicando o numerador o número de partes tomadas e o denominador o número de partes que se divide a unidade. Outra dificuldade sentida pelos alunos quando iniciam a sua aprendizagem por este significado relaciona-se com a divisão da unidade em partes iguais. Outra dificuldade, ainda, diz respeito à aprendizagem das frações impróprias. Por exemplo, na fração $\frac{5}{4}$, os alunos têm dificuldade em compreender como é possível tomar cinco partes se a unidade apenas se encontra dividida em quatro partes. Para a aprendizagem deste significado, uma noção importante que a criança deve ter interiorizado é a identificação da unidade. A criança deve ser capaz de compreender o que é o todo, tanto numa representação contínua, como uma barra de chocolate, ou numa representação discreta, como um conjunto de canetas.

A relação parte-todo pode ainda referir-se a um todo contínuo ou discreto. Posso ter um quinto de uma folha de papel (unidade contínua) ou um quinto de um conjunto de 10 lápis (unidade discreta). Em ambos os casos, o denominador indica o número de partes em que foi dividida a unidade e o numerador o número de partes escolhidas. É com este significado que normalmente se inicia a aprendizagem das frações, na representação contínua. Uma das confusões que pode surgir numa situação de parte-todo diz respeito à confusão que os alunos podem fazer entre parte-todo e a parte com a outra parte: $\frac{3}{5}$ para alguns alunos pode ser $\frac{5}{3}$, ao relacionar a parte pintada de uma figura com a parte não pintada, invertendo o significado de numerador e denominador. No contexto de grandezas contínuas podem surgir dificuldades nos numerais mistos, exatamente pelo facto de a criança não ser capaz de identificar a unidade. A realização de tarefas em contextos discretos é importante, pois permitem à criança alargar o seu esquema mental de relação parte-todo.

Por outro lado, o significado parte-todo pode servir para se introduzir os números decimais a partir das frações decimais. Esta introdução pode ser realizada a partir da divisão de um retângulo em dez partes iguais. Assim, se dividirmos cada $\frac{1}{10}$ em dez partes iremos obter $\frac{1}{100}$. Podemos dizer que a representação decimal de frações está relacionada com o significado de parte-todo, representando desta forma para criança uma extensão natural dos números naturais (Barnett-Clarke, Fisher, Marks, & Ross, 2010). Charalambous e Pitta-Pantazi (2007) consideram que este significado, em conjunto com o processo de partilha equitativa é fundamental para se compreender os restantes significados das frações (medida, operador, quociente e razão). De acordo com estes autores, é necessário interiorizar certas ideias associadas à relação entre as partes e o todo, tais como (i) as partes, tomadas em conjunto, devem esgotar o todo, (ii) quanto maior o número de partes em que o todo é dividido, menores são as partes produzidas, e (iii) a relação entre as partes e o todo é conservada, independentemente da dimensão, forma, disposição ou orientação das partes equivalentes. Assim, a fração representa uma comparação entre o número de partes tomadas da unidade e o total de partes em que a unidade foi dividida. Desta perspetiva o numerador da fração deve ser menor ou igual ao denominador.

A fração como relação entre a parte e o todo aparece também nas situações de medida e nas situações de partilha equitativa visto que em ambos os casos se compara uma parte facionada com um todo, depois do refinamento da unidade de medida e da situação de partilhar. Aliás, a relação da parte com o todo é uma relação inerente aos números racionais e que é fundamental ser realçada, seja qual for a situação didática, pois o "todo" traduz a unidade fracionada (Monteiro & Pinto, 2005).

Streefland (1993) defende uma abordagem às frações em contextos de partilha equitativa, partindo de situações inspiradas na realidade das crianças num processo construtivo de matematização. Esta abordagem permite não só ligar as frações à divisão de números inteiros, evidenciado o aspeto de quantidade extensiva das frações, mas também o aspeto de relação entre duas grandezas da mesma natureza. Este autor considera que as situações de partilha equitativa representam uma fonte natural e um ponto de partida para o ensino das frações. As relações de partilha equitativa e de parte todo encontram-se relacionadas quando após a partilha em partes iguais se relaciona a parte resultante com a unidade: se partilho 3 pizas por 4 pessoas: $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ os alunos devem compreender o que cada fatia representa relativamente à piza toda.

Medida. A primeira abordagem às frações através significado medida é proposta por alguns autores como Keijzer (2003) que realizou um estudo no quadro da Educação Matemática Realista. O autor, apesar de ter incluído também situações de partilha equitativa e de relação parte-todo, deu ênfase à medida. Defende que esta abordagem prepara para a representação de números na linha numérica, evidenciando as frações equivalentes, o que proporciona uma base para a adição e subtração de racionais.

Também Mailley & Moyer (2004) consideram que o significado de medida pode ser um ponto de partida para se estabelecer um primeiro contacto com as frações. Na sua perspetiva, os alunos embora ainda não utilizem uma linguagem simbólica para comparar frações, recorrendo ao significado de medida e às respetivas representações podem mesmo assim comparar frações. Para Monteiro e

Pinto (2005), este significado prepara ainda os alunos para o trabalho na reta numérica, promovendo desta forma uma abordagem favorável para a aprendizagem da adição e subtração de frações.

Outros significados. No significado quociente associa-se a fração à operação de dividir um número natural por outro. Quando cinco crianças repartem entre si três barras de chocolate temos uma situação com o significado de quociente. A fração $\frac{3}{5}$ representa a relação entre o número de chocolates e o número de crianças, mas também representa o resultado dessa divisão, ou seja, a fração de chocolate que cada criança comeu.

Os operadores são elementos transformadores que alargam/encurtam um segmento de linha; aumentam/diminuem o número de itens de um conjunto discreto de objetos; transformam uma figura noutra, com a mesma forma, mas de dimensões maiores ou menores (Lamon, 2007). No significado operador, a fração $\frac{3}{4}$ é considerada como uma função que é aplicada a um número, um objeto ou um conjunto. Pode definir as seguintes interpretações: (i) duplicador ou partitivo, (ii) aumenta ou encolhe, (iii) multiplicador e divisor, (iv) aumenta pela divisão, e (v) encolhe pela multiplicação. Quando os alunos necessitam de descobrir um quinto de vinte peças de Lego estão a utilizar a representação de fração no significado de operador.

As razões não são números racionais, mas as frações podem ter o significado de razão. Este significado advém da comparação de duas quantidades, sendo considerado um índice comparativo e não um número (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Lamon (1993) ilustra este facto mencionando algumas abordagens alternativas que os alunos seguem na resolução deste problema, "Sete raparigas partilham três pizas e três rapazes partilham uma piza. Quem come mais piza, uma rapariga ou um rapaz?" Se os alunos compararem o número de pessoas com o número de pizas, estão a utilizar a noção de proporção, se compararem raparigas com rapazes e o número de pizas que um grupo comeu com o número de pizas que o outro grupo comeu, estão a empregar a noção de razão (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Para compreender o significado de razão, é indispensável usar raciocínio multiplicativo (Ventura, 2013). Lamon (2007) exemplifica, de uma forma muito simples, o significado razão através do seguinte problema: "O João faz concentrado de limonada utilizando três colheres de açúcar e doze de sumo de limão. A Maria, para fazer o mesmo sumo, utiliza cinco colheres de açúcar para vintes de sumo de limão. Qual dos concentrados fica mais doce?" Por outro lado, exemplifica a relação de proporção da seguinte forma: "O João faz concentrado de limonada utilizando três colheres de açúcar e doze de sumo de limão. Quantas colheres de sumo de limão a Maria necessita juntar a cinco colheres de açúcar, para que seu concentrado fique igual ao do João?" Para a autora, este tipo de problemas é importante para se desenvolver o raciocínio proporcional dos alunos, que se encontra intimamente ligado ao significado razão.

Atividades que promovam a equivalência de frações são importantes para a aquisição do conceito de fração e não devem ser realizadas desprovidas de um contexto que se aproxime da realidade dos alunos, pois por vezes as crianças aprendem as regras para gerar frações equivalentes, mas quando confrontadas com uma situação de adição não são capazes de compreender e realizar esta operação (Pirie & kieren, 1994). Segundo Kieran (1988) diversificar os contextos em que as frações aparecem com diferentes significados é fundamental pois é na síntese desses significados que o sentido do número racional se desenvolve. Um desafio, tanto para professores como alunos, prende-se em saber como fazer a conexão entre os vários significados das frações, de forma a dar uma visão mais alargada dos números racionais (Clarke, Mitchell & Roche, 2008). Os alunos necessitam de tempo para compreender o sentido das frações, mais do que aprender regras para as utilizar (Clarke et al., 2008), pois sendo este um tema bastante complexo é importante que tenham tempo para experimentar a vivenciar situações que lhes permitam construir e consolidar aprendizagens.

Representações de números racionais

Aspetos gerais. De acordo com Goldin (2003), uma *representação* é a configuração de símbolos, carateres, ícones ou objetos aos quais cada um atribui um significado próprio e que pretendem simbolizar qualquer coisa. Podem ainda designar processos ou produtos que são observáveis externamente ou, pelo contrário, constituem ocorrências internas da mente das pessoas (NCTM, 2000).

Representar um número significa atribuir-lhe uma designação, devendo ser trabalhado com os alunos a compreensão que um número pode ter várias representações. A representação de ideias matemáticas é fundamental para que os alunos compreendam e utilizem essas mesmas ideias. (NCTM, 2000). Percentagem, numeral decimal, fração, linguagem verbal e pictórica são representações que um número racional pode tomar e que os alunos devem compreender de forma a desenvolverem a sua capacidade de raciocínio (Quaresma, 2010).

Bruner (1999) define *representação* como a forma em que a criança se liberta de estímulos presentes e conserva a experiência passada num modelo. Distingue três modos fundamentais de representação: (i) as representações ativas estão associadas à ação, onde a criança manipula objetos; (ii) as representações icónicas têm como base a perceção visual, recorrendo a imagens, figuras, esquemas, diagramas ou desenhos para ilustrar conceitos, procedimentos ou a relação entre eles, podendo estas ser elaboradas espontaneamente pelos alunos, e (iii) as representações simbólicas recorrem a símbolos, palavras ou linguagem. No presente estudo irei focar a atenção nas representações simbólicas (fração, número decimal e verbal) e nas representações icónicas (pictóricas, barra numérica e reta numérica). Dentro das representações ativas podemos inserir os materiais manipuláveis.

Verifica-se muitas vezes que os erros dos alunos não resultam da utilização incorreta de uma regra, mas sim por utilizar a regra que não é aplicável a situação particular (Oppenheimer & Hunting, 1999). Quando as crianças dão respostas erradas, não é tanto por estarem erradas, mas sim por estarem a responder a uma outra questão, e há que descobrir a que pergunta estão de facto a responder (Bruner, 1999). As representações desempenham, nesse sentido, um papel fundamental pois refletem a interpretação e o raciocínio da criança fornecendo pistas fundamentais para a compreensão dos seus erros.

As representações são ferramentas para clarificar, articular, justificar e comunicar. Não se tratando de produtos estáticos, capturam o processo de construir um conceito ou uma relação matemática (Valério, 2005), criando um suporte para a compreensão de conceitos e o desenvolvimento de conexões entre os diferentes temas matemáticos (Moyer & Mailley, 2004).

É importante que as crianças tenham não só oportunidades de aprender formas convencionais de representações, mas também de construir e utilizar as suas próprias representações, tornando desta forma a aprendizagem mais significativa. As representações podem servir para apoiar tanto a resolução de um determinado problema como para compreender aquilo que os alunos estão a fazer (Valério, 2005). É importante estimular os alunos a expressar as suas ideias de uma forma que lhes faça sentido, mesmo se as representações que usam não são as convencionais (NCTM, 2000).

O NCTM (2000) indica três prioridades para a utilização das representações, em termos curriculares, e que devem ser mantidas ao longo da escolaridade. Na sua perspetiva, os alunos devem ser estimulados: (i) a desenvolver e comunicar as suas representações de ideias matemáticas, (ii) a utilizar diferentes representações matemáticas para resolver problemas, e (iii) utilizar as representações para modelar fenómenos físicos, sociais e matemáticos.

À medida que os alunos avançam na escolaridade, o ensino da Matemática começa a ficar cada vez mais focado na representação simbólica formal para expressar ideias. Por sua vez, os alunos ficam cada vez mais focados nas regras para se trabalhar com frações e números decimais, assim como em encontrar significado nos padrões dos símbolos e nos enunciados em vez de tentar compreender o que estão a fazer (Oppenheimer & Hunting, 1999).

Quando os alunos são estimulados a comunicar as suas ideias, numa dinâmica de discussão e descoberta, a aprendizagem torna-se mais efetiva pois é construída com base nas representações concetuais dos alunos (Oppenheimer & Hunting, 1999). Num estudo realizado por Valério (2005) os alunos mostraram ser capazes de se apropriar das suas representações, utilizando-as sempre que possível, em detrimento das representações formais posteriormente ensinadas, dando-lhes mais segurança na interpretação e resolução de problemas.

Os alunos constituem elementos ativos e centrais no processo de aprendizagem, por isso, as suas representações contribuem significativamente para a compreensão e aprendizagem da matemática. A "reinvenção" da matemática pelos alunos representa um ponto de partida para discussões onde a partilha de descobertas e experiências vão permitir a construção de aprendizagens efetivas.

Fração. As frações são uma importante representação dos números racionais, expressando relações matemáticas entre duas quantidades contínuas ou discretas, sendo a sua aprendizagem bastante complexa para as idades mais novas (Moyer & Mailley, 2004). De acordo com o NCTM (2010), uma fração é uma expressão simbólica, que pode ser escrita na forma $\frac{a}{b}$, sendo *b* diferente de *0.* Por exemplo, $\frac{1}{2}$ e $\frac{4}{8}$ são frações diferentes que representam o mesmo número racional, constituindo portanto frações equivalentes. Muitos alunos revelam falta de compreensão das frações enquanto representando um número (Hannula, 2003).

A transição dos números naturais para os números racionais representa uma das maiores dificuldades sentidas pelos alunos. A criança ao aprender que o número natural seguinte é sempre maior que o anterior, generaliza este fato para os números racionais e muitas vezes diz, erradamente, que $\frac{1}{4}$ é maior que $\frac{1}{3}$, porque 4 é maior que 3. A representação simbólica de fração, $\frac{a}{b}$, representa outra dificuldade pois os alunos interpretam esta representação enquanto dois números inteiros e não apenas como um único número. Um estudo realizado por Monteiro e Pinto (2005) refere que as dificuldades sentidas pelas crianças na aprendizagem dos números racionais se relacionam com: (i) a compreensão da existência de diferentes significados associados às frações, (ii) a conceção da unidade e (iii) o ensino precoce e descontextualizado dos símbolos e algoritmos.

Vários autores têm apresentado algumas estratégias importantes para que os alunos adquiram o sentido de fração. Uma delas refere-se à utilização de um *ponto de referência:* para comparar as frações $\frac{3}{7}$ e $\frac{5}{8}$ os alunos podem comparar o tamanho das frações com 0, $\frac{1}{2}$ e 1, verificando que a fração $\frac{3}{7}$ é menor que $\frac{1}{2}$ e que a fração $\frac{5}{8}$ é maior que $\frac{1}{2}$. Outra estratégia refere-se ao *pensamento residual* onde os alunos raciocinam de forma a verificar quanto falta para completar a unidade. Assim, para comparar as frações $\frac{5}{6}$ e $\frac{7}{8}$, os alunos concluem que a primeira fração requer $\frac{1}{6}$ para completar a unidade e que a segunda fração requer $\frac{1}{8}$. Assim, verificam com facilidade que $\frac{1}{8}$ é uma parte menor que $\frac{1}{6}$, logo a fração $\frac{7}{8}$ é maior (Clarke et al., 2008). Além disso, a capacidade de estimar reveste-se de grande importância pois dá aos alunos ferramentas que lhes permite compreender e adquirir o sentido de fração.

Número decimal. A representação decimal dos números é também muito utilizada para representar números racionais, nomeadamente nas unidades de media como o dinheiro (Barnett-Clarke, Fisher, Marks, & Ross, 2010). No entanto, quando se pergunta aos alunos o que é um número decimal, eles tendem a responder "...é algo que torna os números ainda mais confusos..." (Sweeney & Quinn, 2000).

Case e Moss (1999) identificaram alguns dos aspetos que contribuem para as dificuldades reveladas pelos alunos na compreensão desta representação dos números racionais. Referem, nomeadamente como erros comuns do ensino: (i) ser demasiadamente centrado em procedimentos na manipulação de números decimais, (ii) ser pouco centrado nos alunos sem valorização das suas intervenções, (iii) não ser feita uma diferenciação clara entre os números naturais e os números racionais e (iv) os números racionais serem ensinados com base em definições.

Entre as dificuldades dos alunos, três autores (Moss & Case, 1999; Oppenheimer & Hunting, 1999; Monteiro & Pinto, 2005) referem a confusão gerada na comparação de números decimais, levando os alunos, por exemplo, a dizerem que 0,184 é maior que 0,3. Monteiro e Pinto (2005) acrescentam outros erros que os alunos cometem de forma recorrente no seu trabalho com os números decimais: (i) confusão entre décimas e centésimas, confusão evidenciada quando os alunos fazem leituras do tipo "dois vírgula cinco", (ii) confusão com o sistema de posição e numeração decimal, dizendo que a soma de uma centésima a 49,09 e dá como resultado 49,010; (iii) ou ainda outro erro comum em alunos, que aprenderam a colocar "vírgula debaixo de vírgula", que ao adicionar 3 a 4,1 obtêm como resultado 4,4, e (iv) a falta de noção da densidade dos números racionais, quando referem que entre 0,1 e 0,2 não existem números.

Diversos autores consideram que a aprendizagem dos números decimais não deve ser realizada de forma isolada, mas sim relacionada com outras representações como as frações e percentagens. Por exemplo, Sweeney e Quinn (2000) propõem que sejam os alunos a verbalizar as suas conceções iniciais relativamente às frações, números decimais e percentagens, partindo de representações pictóricas, como por exemplo o modelo circular. Partindo deste modelo é possível ir construindo um conhecimento relacional entre as diferentes representações, não centrando apenas a aprendizagem nos números decimais. Numa perspetiva semelhante, Clarke, Roche e Mitchell (2008) apontam que é importante variar a utilização de diferentes representações, a fim de alargar a visão e compreensão dos números decimais e das frações por parte dos alunos.

Representação pictórica. De acordo com os estudos desenvolvidos pelo *Rational Number Project (*Cramer, Behr, Post & Lesh, 1997*)* as representações desempenham um papel importante no desenvolvimento do sentido no número racional. Nas turmas em que foi aplicado este projeto, relativamente à aprendizagem das frações, as crianças trabalharam com a representação circular (o "círculo das frações"). Também muito utilizadas são as representações retangulares (a "barra de chocolate"). Em ambos os casos a unidade é representada dividida em várias partes iguais, das quais algumas se destacam pela cor ou textura.

Gravemeijer (1997) afirma que a conexão entre o conhecimento matemático e realidade é ainda um horizonte distante. A modelação e reinvenção da matemática, valorizando as representações dos alunos é um objetivo que deve estar presente nos objetivos pedagógicos e didáticos dos professores. Na sua perspetiva, estes devem proporcionar situações de ensino que estimulem a modelação por parte das crianças como sejam os desenhos, diagramas, ou tabelas, podendo estes modelos dos alunos evoluir para modelos cada vez mais abstratos e relações mais formais. Num nível mais avançado, o aluno já não considera aspetos irrelevantes da situação e usa um modelo que a representa (por exemplo quando traça um círculo para representar uma piza). Progressivamente, a criança evolui de representações concretas, que representam a realidade, para modelos que simplificam os processos de representação. As representações evoluem de *modelos de* representação de situações, para *modelos para* apoiar o raciocínio dos alunos. As representações pictóricas constituem um dos modelos mais naturais para representar unidades e as suas divisões em partes iguais, base para o trabalho com números racionais.

Barra numérica. A barra numérica é uma representação de base pictórica onde se introduzem alguns elementos formais. De acordo com van den Heuvel-Panhuizen, e Shew (1998), esta representação tem algumas vantagens na aprendizagem das frações: (i) a divisão em frações de referência como $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{4}$ permite efetuar estimativas ou até desenvolver o significado de medida, (ii) permite ter uma noção visual da dimensão das frações, (iii) numa fase mais avançada permite relacionar duas grandezas diferentes desenvolvendo também o raciocínio proporcional, (iv) permite desenvolver o sentido do número tanto em alunos com um "pensamento visual" tanto a alunos com um "pensamento simbólico". Na perspetiva destes autores, numa fase inicial, os alunos devem utilizar objetos reais, e à medida que ganham confiança utilizando representações reais e lineares onde podem fazer partilhas equitativas, como sandes ou bolos, podem então começar a usar a barra numérica. Na investigação realizada por Oliveira e Ventura (2005) a barra numérica revelou-se uma ferramenta útil para apoiar os alunos na resolução de problemas, dentro dos significados parte todo e medida. No entanto, Hannula (2003) faz notar que se o trabalho realizado na barra numérica der apenas ênfase ao significado de parte-todo, este, não será o mais adequado para a compreensão do sentido de fração, pois os alunos não apreendem a fração como um número. Por isso, considera ser importante também trabalhar em conjunto os restantes significados.

Van de Heuvel-Panhuizen (2003) considera que a barra numérica, a longo prazo, deve evoluir de um *modelo de* a um *modelo para.* Numa fase inicial, a barra numérica é uma ferramenta útil para representar um problema como forma de visualizar uma ideia. Mais tarde, a barra passa a uma ferramenta de apoio ao raciocínio. Pela sua flexibilidade, representa uma ferramenta poderosa para a aprendizagem, podendo ser utilizada durante muito tempo pois funciona em diferentes níveis de compreensão. É este aspeto que a torna uma representação tão poderosa, permitindo não só representar números racionais assim como estabelecer a relação entre eles (van Heuvel-Panhuizen, 2003). É de registar que a barra numérica é muito usada em Singapura, um dos países que tem tido destaque no que respeita ao desempenho dos alunos na avaliação PISA (Silvestre, 2015).

Reta numérica. Dada uma fração $\frac{a}{b}$, representando um número na reta, temos que "b" representa o número de divisões iguais efetuadas em cada segmento, e "a" o número de partes que se tomam. A representação de frações na reta numérica ajuda a criança a perceber que uma fração é um número, que fica situado entre dois números inteiros que já eram do seu conhecimento: $\frac{3}{5}$ é um número situado entre 0 e 1, e $\frac{3}{2}$ é um número situado entre 1 e 2. Esta representação traz algumas vantagens relativamente à compreensão de alguns conceitos relacionados com as frações: permite visualizar melhor as frações impróprias assim como os numerais mistos. Deste modo, a criança visualiza que os números racionais representam uma extensão dos números naturais preenchendo os espaços entre os números naturais e estabelece a ligação com o conceito de medida (Monteiro & Pinto, 2005). Permite ainda visualizar uma unidade contínua que pode ser repartida. Além disso, permite a utilização de símbolos para identificar partes da reta, ou seja, uma letra *A* representada num ponto da reta pode adquirir vários sentidos até ser identificado dois pontos de referência (Bright, Behr, Post & Wachsmuth, 1988). Estes autores, no entanto, identificam uma grande desvantagem relativamente a outros modelos, a reta requer a integração de duas formas de informação, a visual e a simbólica. Um estudo realizado por estes mesmos autores sobre identificação e comparação de frações na reta numérica concluiu que a utilização deste modelo não foi fácil para os alunos. Uma das suas justificações prende-se com a imagem gráfica da própria representação, que não é intuitiva, e pelo recurso constante a simbologia, o que torna esta representação muito abstrata. Por não ser uma representação intuitiva é necessário um grande trabalho prévio para se utilizar exclusivamente esta representação, como por exemplo exercícios de marcação e visualização de frações equivalentes, para que os alunos ganhem flexibilidade na utilização da reta (Bright et al., 1998).

Outro erro comum está associado à confusão gerada com a contagem na reta numérica, quando as crianças contam os traços indicadores da medida, incluindo muitas vezes o zero, e não os espaços entre as medidas da escala. Exemplo disto acontece quando é pedido à criança para efetuar a medida de um objeto com uma régua "partida" ou incompleta, apenas com uma parte da escala (Mitchel & Horn, 2008). Outra dificuldade refere-se à identificação da unidade quando a reta é maior que uma unidade, pois quando se pede a uma criança para representar $\frac{3}{5}$, ela coloca esse valor no número inteiro 3. Outras dificuldades surgem quando o segmento que representa a unidade está dividido num múltiplo do denominador, por exemplo quando se pede para representar $\frac{3}{5}$ num segmento dividido em 10 partes.

Gray e Doritou (2008) apresentam um estudo no qual fazem a distinção entre linha graduada ("*number track*") e a reta numérica. Assumem a linha graduada como um objeto finito que pode ser representado na forma de um diagrama, enquanto a reta numérica é um conceito abstrato infinito. Concluem que a reta numérica, pelo seu elevado nível de abstração, não se revela uma ferramenta útil para a aquisição do sentido do número, isto porque alunos e professores não fazem a distinção entre os dois modelos, encarando a reta numérica com um objeto finito, tornando desta forma difícil a compreensão da densidade dos números racionais.

Segundo Barnett-Clarke, Fisher, Marks e Ross (2010) a reta numérica representa uma ferramenta útil para representar os números racionais, ajudando a desenvolver o sentido do número, pois define uma imagem visual sobre a magnitude dos números, permitindo comparar, por exemplo, $\frac{5}{8}$ com $\frac{1}{2}$ ou ainda visualizar como 0,9 se encontra perto de 1. Pelo seu lado, Streefland (1982) refere a importância de se trabalhar com a dupla reta numérica, pois permite trabalhar a noção de equivalência de frações assim como o significado de razão, mas não sem antes se recorrer a outras representações como por exemplo o modelo circular, pois é mais familiar para as crianças e pode ser facilmente associado a pizas ou tartes. Para Clarke, Roche e Mitchell (2008), a reta numérica pode trazer vantagens em verificar como os números inteiros, as frações e números decimais se relacionam entre si, assim como adquirir a noção da densidade dos números racionais. No entanto, é de ter em atenção que, como refere Hannula (2003), sendo a aprendizagem dos números racionais um dos temas mais desafiantes para os alunos não é viável a sua aprendizagem através da reta numérica, pois pode conduzir a confusões relativamente à compreensão das frações. A representação de frações na reta pode conduzir a erros de interpretação tanto da reta como das frações.

A articulação de diversas representações. O modelo do iceberg desenvolvido por Webb, Boswinkel e Dekker (2008) representa uma proposta interessante no campo das representações dos alunos. A metáfora apresenta um iceberg com uma pequena ponta fora de água e a restante, e maior, encontra-se submersa. Parte esta que permite e flutuabilidade do iceberg, mantendo a parte menor à tona da água. A parte maior que se encontra dentro de água está definida pelas representações informais e pré-formais dos alunos. Na ponta que se encontra fora de água situam-se as representações formais ou simbólicas. As representações informais são todas aquelas que fazem parte da vivência diária dos alunos como um relógio, uma maçã cortada em fatias ou dinheiro. Evoluindo para o topo do iceberg surgem as representações pré-formais apresentam uma evolução das representações informais dos alunos. Nesta fase, as representações pré-formais articulam-se com as informais. Na ponta do iceberg surgem as representações formais que são todos os símbolos próprios da linguagem formal matemática. A referência a um iceberg surge de forma a indicar quais as representações que apresentam maior peso na aprendizagem, servido assim como uma referência para a aprendizagem da Matemática. As representações informais e pré-formais são a base para a compreensão das representações formais, sendo que os alunos, em qualquer altura, devem poder recorrer às representações informais para solucionar as questões que estão a resolver.

Para Freundenthal, na perspetiva da Matemática Realista, a aprendizagem é feita do ponto de vista da matematização, por considerar as estratégias informais na resolução de situações como uma base para o processo do desenvolvimento de conceitos e de conexões entre eles. Keijzer (2003) analisa os processos de matematização e considera os seguintes: modelação, simbolização, generalização, formalização e abstração. Numa fase inicial as crianças recorrem a desenhos como forma de representar e visualizar uma situação. Depois, desprendem-se de pormenores evoluindo para esquemas ou desenhos desprovidos de pormenores. A linguagem surge como uma forma de expressão de representações. Posteriormente, com a introdução dos símbolos, as crianças desenvolvem uma ligação entre estes os modelos por elas desenvolvidos, para que os símbolos possam depois ser generalizados. A formalização pode ser considerada uma extensão da generalização a regras ou a fórmulas. Os objetos sobre os quais se opera, já não são concretos, mas são números. No processo de abstração o aluno percebe o que é invariante nas relações. Os processos de generalização, formalização e de abstração não obedecem a uma hierarquia. O facto de no processo de formalização já se trabalhar com entes abstratos permite perceber que a abstração pode preceder a formalização.

Ensino e aprendizagem da adição de frações e de números decimais.

As operações com frações devem fazer sentido aos alunos e não devem ser ensinadas desprovidas de significado, fora de contextos significativos para os alunos (Streefland, 1982). Uma dificuldade sentida pelos alunos na adição de números representados por frações evidencia-se quando adicionam os numeradores e os denominadores, não compreendendo a relação entre o todo e a parte (Quaresma, 2010). Para os alunos, o numerador e o denominador constituem dois números inteiros isolados, não compreendendo que a representação de fração simboliza um número. Este erro bastante comum dos alunos é reportado por vários autores (Izsác, Tilema, & Tunç-Pekkan, 2008; Middleton, Heuvel-Panhuizen, & Shew, 1998) e acontece porque os alunos ainda não compreenderam o conceito de fração.

A adição de números racionais é uma extensão da adição de números inteiros, em que o significado das operações se mantém, mas com a introdução de algumas ideias novas. A adição de números racionais justifica-se a partir do mesmo tipo de situações que davam sentido à adição de números naturais, ou seja, situações de parte-todo, de adição de transformação ou de comparação, portanto o sentido da adição não muda, o que se altera são as quantidades envolvidas que agora são medidas ou partes de um todo, e antes eram cardinais ou ordinais (Godino, 2003). Para adicionar frações é importante que os alunos já tenham compreendido o significado do numerador e do denominador.

Também Cruz e Spinillo (2004) referem que os alunos apresentam dificuldade em resolver as adições através do simbolismo formal matemático porque aplicam os conhecimentos adquiridos nos números inteiros nas frações.

No âmbito do RNP, os alunos desenvolveram as suas estratégias para adicionar frações, eram capazes de estimar a soma de adição de frações sem recorrer às regras, enquanto outras que centraram a sua aprendizagem num ensino mais tradicional, suportado apenas pela utilização de manuais escolares, não eram capazes de verbalizar valores aproximados de adição de frações simples (Lamon, 2002).

Izsác, Tilema e Tunç-Pekkan (2008) referem a dificuldade que os alunos sentem quando iniciam a adição de frações pela reta numérica, apresentando dificuldade em marcar as frações equivalentes como pontos na reta, mostrando desta forma que não interiorizaram uma fração enquanto um número. Referem ainda a importância que as representações desempenham na aprendizagem, devendo ser valorizadas as representações dos alunos. Estes autores sugerem que estimar a adição de frações com o mesmo denominador e com denominadores diferentes é um exercício que promove a compreensão do sentido de fração. Numa fase inicial os alunos podem ter como pontos de referência 0, $\frac{1}{2}$ e 1. Argumentam que *divisão recursiva,* a partição de frações na barra numérica, como por exemplo, $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{4}$, são exercícios positivos para introduzir a adição de frações.

Barnett-Clarke, Fisher, Marks e Ross (2010) referem que a aprendizagem das frações, nas idades mais novas, deve ser introduzida às crianças num contexto de realidade ou semi-realidade, como $\frac{1}{2}$ de uma bolacha ou $\frac{1}{8}$ de piza, pois representam partes de uma unidade dentro de um contexto que faz sentido para a criança. O recurso a contextos de realidade ou semi-realidade facilita a compreensão destes conceitos, pois é mais simples para uma criança perceber que se come metade de uma piza e depois come mais um quarto de outra que no total comeu três quartos, do que compreender a expressão numérica $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, inserida num contexto puramente matemático (Monteiro & Pinto, 2005).

O desenvolvimento do sentido de fração é importante pois os alunos devem ser capazes de estimar o resultado de adições com frações (Cramer, Behr, Post & Lesh, 1997). Desta forma, quando adicionamos frações com o mesmo denominador os alunos compreendem que basta adicionar os numeradores da fração enquanto o denominador se mantém o mesmo. Para a adição de frações com diferentes denominadores a situação já se altera. O facto de haver diferentes denominadores indica que deixamos de ter as mesmas proporções unitárias Barnett-Clarke, Fisher, Marks, & Ross, 2010). Assim, o processo de adicionar já não se torna tão intuitivo. Tomemos como exemplo a expressão $\frac{2}{7}+\frac{3}{5}=$. Os denominadores 7 e 5 representam divisões diferentes da mesma unidade. Desta forma, deixamos de ter as mesmas proporções referentes à divisão da unidade. Como podemos então adicionar 2 + 3 em que cada uma das parcelas apresenta diferentes proporções relativamente à mesma unidade?

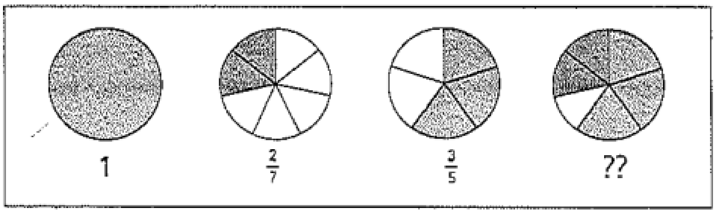


Figura 2-Adição de frações com diferentes denominadores.

Para isso temos de encontrar frações equivalentes às dadas com o mesmo denominador: $\frac{10}{35}+\frac{21}{35}=$, desta forma temos ambas as frações com as mesmas proporções da unidade. Podemos visualizar esta equivalência, de forma muito simples e de fácil compreensão para os alunos, recorrendo a uma representação pictórica. A divisão da unidade, representando uma das frações com barras verticais e a outra com barras horizontais, e sobrepondo as duas representações, produz automaticamente um denominador comum às duas frações. (Ver figuras 3 e 4).

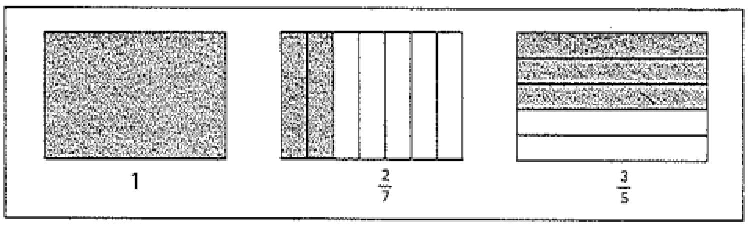


Figura 3 Adição de frações com diferentes denominadores. Representação pictórica das frações $\frac{2}{7}$ e $\frac{3}{5}$.

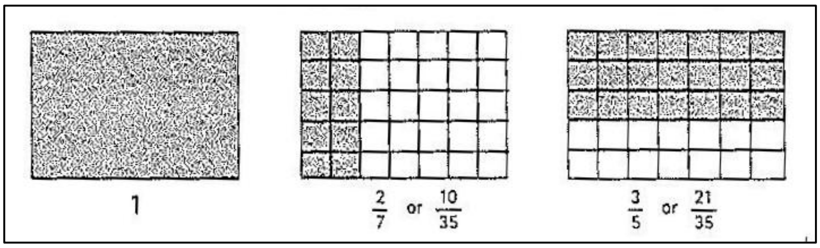


Figura 4 -Adição de frações com diferentes denominadores. Representação pictórica das frações equivalentes $\frac{10}{35}$ e $\frac{21}{35}$.

Desta forma, é possível visualizar o resultado da adição de ambas as frações equivalentes, com a unidade dividida em partes iguais (ver figura 5).

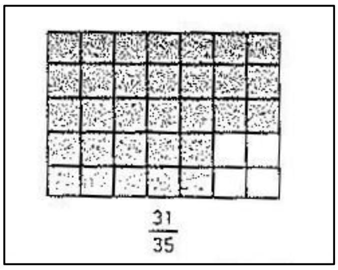


Figura 5 - Soma das frações. $\frac{2}{7}+\frac{3}{5}=\frac{10}{35}+\frac{21}{35}=\frac{31}{35}$.

Este exemplo ilustra como nem sempre o denominador com o número menor é aquele que se utiliza na soma. Quando os denominadores de duas ou mais frações partilham um fator comum maior que 1, podemos sempre encontrar um denominador comum menor que o produto das duas frações (Barnett-Clarke, Fisher, Marks, & Ross, 2010). Deste modo, a ideia que os alunos devem interiorizar é que para se adicionar frações é necessário um denominador comum, não sendo prioritário que se utilize o menor denominador comum (Barnett-Clarke, Fisher, Marks, & Ross, 2010). Além disso, as crianças devem ser capazes de calcular mentalmente $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$ recorrendo à decomposição de números racionais e compreender que $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})$.

Cruz e Spinillo (2004) referem a importância da utilização de referências na adição de frações, a que atribuem o nome de *âncoras,* pois permite que os alunos consigam adicionar frações sem recorrer a regras utilizando representações diferentes das do simbolismo matemático. A utilização e compreensão de *âncoras* permite o desenvolvimento do sentido de número (McIntosh, Reys & Reys, 1992). Essas *âncoras* podem ser as frações $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ ou 1 (unidade). Por exemplo, num estudo foi pedido aos alunos que resolvessem a expressão $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=$. Um aluno resolveu a expressão decompondo $\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$, adicionando $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}$ obteve $\frac{4}{4}$, verificando o referencial 1, enquanto unidade. Depois juntou $\frac{1}{4}$ chegando ao numeral misto $1\frac{1}{4}$. Este aluno, para resolver uma expressão que seria desafiante para muitos alunos, baseou-se na utilização das âncoras $\frac{1}{4}$ e da unidade, representando um bom suporte de apoio ao raciocínio. Segundo Cruz e Spinillo (2004) a intuição deveria desempenhar um papel mais expressivo na aritmética de frações, no sentido de que não se deveria esperar que as crianças utilizassem o algoritmo para calcular operações como $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$, uma vez que tais operações podem ser realizadas com base apenas no conhecimento sobre o que representa cada uma dessas frações.

Nos trabalhos de Streefland (1982) a utilização de tabelas de razão para comparar frações mostrou ser também uma boa ferramenta para se introduzir as operações de adição e subtração com frações, onde os alunos podem fazer comparações do tipo: "Uma pessoa utilizou três colheres de café para quatro chávenas. Numa segunda vez utilizou quatro colheres para cinco chávenas? Em que situação o café ficou mais forte?" Este tipo de questões pode conduzir aos algoritmos formais.

Na perspetiva de Brocardo (2010), a adição de números decimais pode ter como ponto de partida a adição de frações, sendo a transição para os números decimais efetuada a partir das frações decimais. Os números decimais podem ser representados numa fração cujo denominador é uma potência de 10 e em que as percentagens representam relações relativamente a um todo igual a 100, permitindo desta forma fazer uma ponte entre as frações e os números decimais.

Quando, de uma forma mecanizada, se explica aos alunos que basta alinhar o *ponto* dos números decimais para se efetuar a adição, estes estão a alinhar os números de acordo com o sistema posicional dos números. Por exemplo, na expressão 32,4 + 6,17 =, cada número representa também uma fração decimal. Quando se adicionam os números, de acordo com o seu valor de posição, estamos também a adicionar frações decimais. Ao adicionarmos, de acordo com o exemplo anterior, o número 4 (quatro décimas) com o número 1 (uma décima) estamos a efetuar a adição $\frac{4}{10}+\frac{1}{10}=\frac{5}{10}=0{,}5$. Voltando ao exemplo anterior, considerando a totalidade do número, estaríamos a adicionar frações com diferentes denominadores, $\frac{324}{10}+\frac{617}{100}=$. Neste caso, e como foi referido anteriormente sobre a adição de frações, teremos de encontrar frações equivalentes, com um denominador comum, para podermos adicionar as duas frações. Assim teremos $\frac{3240}{100}+\frac{617}{100}=$ representando o mesmo que 32,40+6,17= (Barnett-Clarke, Fisher, Marks, & Ross, 2010).

Capítulo III

Unidade de Ensino

Neste capítulo apresento a planificação da unidade de ensino sobre adição de números racionais. Indico as ideias gerais que estiveram na base da conceção da unidade, tanto no que respeita às tarefas a usar como à dinâmica das aulas, os resultados da avaliação diagnóstica aos alunos bem como a planificação da unidade, as tarefas propostas e a avaliação dos alunos.

Ideias gerais

Com a realização desta unidade de ensino pretendo levar os alunos a compreender a adição de frações e de números decimais por justaposição retilínea, de acordo com o que está previsto nas Metas Curriculares (2013), assim como compreender os erros e as dúvidas dos alunos relativamente a este tema. O conceito de fração, no significado de parte-todo, deve estar consolidado antes de se introduzir o significado de medida (Streefland, 2002). Esta consolidação é possível se for realizada através de representações intuitivas, como a pictórica, que permite uma fácil interiorização e compreensão do significado de parte-todo. A diversidade de representações pictóricas que o significado parte-todo admite, facilita a apreensão e compreensão do conceito de número racional, nomeadamente no 1.º ciclo, onde se estabelece o primeiro contacto com este conceito.

Sendo os números racionais, nomeadamente as frações e os números decimais, um dos temas curriculares mais exigentes para as crianças, não se afigura adequado tomar o seu início pelo significado de medida, pelos equívocos e erros sistemáticos que a investigação tem mostrado. A reta numérica é uma ferramenta matemática útil, que oferece suporte ao trabalho com as frações e os números decimais, mas é necessário um trabalho prévio para que o uso da reta seja o mais eficaz e produtivo possível.

Desta forma, com esta unidade de ensino, pretendo levar os alunos a trabalhar a adição de frações e números decimais, na reta numérica por justaposição de segmentos de reta, dentro do significado medida, começando pelo significado parte-todo, centrando a aprendizagem em representações como a barra e a reta numérica, mas atribuindo especial ênfase à representação pictórica. Assim, pretendo com esta unidade de ensino:

i. Que os alunos relacionem as diferentes representações de número racional, nomeadamente entre frações, números decimais, representações pictóricas, barra numérica, reta numérica e representação verbal.
ii. Que os alunos compreendam o significado da representação simbólica de fração (numerador e denominador) nos significados parte-todo e medida.
iii. Que os alunos aprendam a usar a reta numérica para adicionar frações e números decimais por justaposição retilínea.

Tarefas

Até há bem poucos anos, a Matemática era encarada como um corpo de conhecimentos abstrato no qual, em termos de aprendizagem, sobressaía a prática e o uso de conceitos e procedimentos. As dificuldades sentidas pelos alunos, na aprendizagem da matemática, têm levado a investigação a centrar-se numa forma de aprendizagem suportada pela compreensão. O NCTM (1980), com a *Agenda para a Ação,* define como elemento principal para aprendizagem da Matemática a resolução de problemas. Posteriormente, o NCTM (1991) com um novo documento, apresenta objetivos para a aprendizagem da matemática, sendo um deles a realização de tarefas matemáticas desafiantes. O NCTM (2000) defende que um currículo de matemática eficiente deve preparar os alunos para a continuação de estudos, assim como, para a resolução de problemas que possam surgir no dia a dia. A aprendizagem da matemática deve ser desafiante o suficiente para que os alunos, com compreensão, progridam nos diferentes temas propostos pelos programas de matemática. De acordo com Bishop e Goffree (1986) são as tarefas que dão oportunidade aos alunos de se envolverem na criação e reflexão, da sua própria Matemática.

A fim de orientar os alunos numa aprendizagem centrada na compreensão, os diferentes tipos de tarefas matemáticas, desempenham um importante papel para que seja alcançado esse objetivo. Desta forma, são determinantes nas oportunidades de aprendizagem que oferecem aos alunos (Ponte, 2005). As tarefas podem ser enquadradas em diferentes formas consoante o objetivo do professor. De acordo com Ponte (2005), elas podem ter um nível de desafio reduzido ou elevado, e um grau aberto ou fechado (ver figura 6).

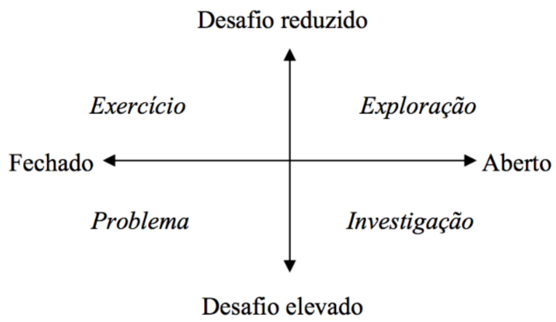


Figura 6 - Natureza das tarefas.

O tipo de tarefas deve estar relacionado com o ano de escolaridade dos alunos. Não faz sentido, atribuir ênfase apenas a tarefas centradas em exercícios. É importante que os alunos explorem e investiguem de forma a rentabilizar o seu espírito curioso e criativo. Assim, podem desenvolver o gosto e interesse por aprender Matemática. No desenvolvimento da unidade de ensino optei por desenvolver tarefas que se enquadram na natureza de *Exploração,* onde o desafio proposto não é muito elevado, mas onde os alunos terão de raciocinar para encontrar a solução das questões.

Freudenthal (1991) propõe uma alternativa para a construção do conhecimento matemático que consiste em criar oportunidades para os alunos reinventarem a Matemática. Para este autor, a Matemática deve ser experienciada em tarefas e situações concretas que representem a realidade dos alunos. Muitas vezes, um aluno é capaz de usar os seus conhecimentos em determinadas tarefas, mas não é capaz de transferir o mesmo conhecimento para situações da vida real. Daí, a importância de se trabalhar com os alunos diferentes tipos de tarefas.

De acordo com Skovsmose (2000), as tarefas podem ser inseridas num contexto de realidade, semi-realidade ou apenas matemático. As tarefas de semi-realidade ou realidade desempenham um papel importante, pois permitem ao aluno atribuir sentido e significado ao seu trabalho. Nos números racionais, por exemplo, importa trabalhar os diversos significados inseridos em contextos que façam sentido para o aluno. É importante que as tarefas desenvolvidas não sejam artificiais devendo o professor ter a sensibilidade de saber quando e como devem ser utilizadas (Ponte & Quaresma, 2012). Outra ferramenta que ajuda a desenvolver uma aprendizagem mais ampla são as sequências de tarefas, proporcionando uma aprendizagem progressiva baseada em diferentes experiências (Llinhares & Sánchez, 1997). Note-se, porém, que as tarefas são ferramentas essenciais no ensino da Matemática, mas não valem por si só. O modo com os alunos as resolvem e o modo com o professor as explora é que as torna ferramentas de aprendizagem (Monteiro & Pinto, 2005).

A unidade de ensino, a realizar no 3.º ano, está estruturada para oito aulas. O seu objetivo é levar os alunos a compreender a adição de frações e de números decimais por justaposição retilínea de segmentos de reta usando a reta numérica, tendo como ponto de partida as representações pictóricas. Previamente, é destinada uma aula à avaliação diagnóstica, onde espero verificar que conhecimentos revelam os alunos sobre frações e números decimais. A primeira, segunda e terceira aulas, são destinadas à adição de frações com o mesmo denominador e com denominadores diferentes utilizando representações pictóricas e a barra numérica. A quarta, quinta, sexta e sétima aulas são destinadas à adição de números decimais utilizando o modelo retangular e a reta numérica. Na quarta aula, que é a primeira acerca de números decimais, é realizada uma tarefa de consolidação sobre a adição de frações. Na oitava e última aula é realizada uma avaliação final para aferir as aprendizagens dos alunos, assim como, para verificar que dúvidas permanecem.

Nas questões das tarefas que vou realizar com os alunos distingo três tipos de contextos: (i) realidade, onde as questões dizem respeito a situações próximas da realidade dos alunos; (ii) semi-realidade, onde as questões, embora não correspondendo a situações reais (pois são inventadas), referem-se a situações que poderiam corresponder a um acontecimento real; (iii) matemáticos, onde se pretende que os alunos apliquem e pratiquem procedimentos (Skovsmose, 2000). As tarefas enquadram-se em duas naturezas diferentes: (i) exercícios, para que os alunos relembrem ou pratiquem alguns conceitos importantes e (ii) explorações, onde os alunos devem refletir sobre os desafios apresentados tentando encontrar a solução mais adequada. As questões das tarefas da unidade de ensino seguem uma sequência, com o objetivo de levar os alunos a compreender, de forma progressiva, os temas trabalhados.

Dinâmica da aula

A dinâmica das aulas da unidade de ensino pode depender de vários fatores. A abordagem e envolvimento dos alunos face à aprendizagem da Matemática, assim como às tarefas propostas, podem constituir aspetos relevantes. As tarefas apresentadas, assim como a atividade desenvolvida pelos alunos durante a sua realização também podem influenciar o decorrer das aulas, pois o nível de empenho de acordo com a natureza das questões pode variar de aluno para aluno. O papel do professor é essencial, pois dele depende o modo como os alunos direcionam as suas aprendizagens (Ponte, 2005). Ainda segundo Ponte (2005) o trabalho em sala de aula fica bastante enriquecido com propostas de trabalho promovam maior autonomia dos alunos, com momentos de trabalho em grupo e que proporcionem discussões coletivas e o consequente desenvolvimento da comunicação. A comunicação na sala de aula desempenha um papel desafiante tanto ao professor como aos alunos. O princípio de uma comunicação dialógica centrada no questionamento, desafiando os alunos a partilhar os seus raciocínios, permite o envolvimento e a responsabilização de todos para uma participação mais ativa no seio do grupo contribuindo desta forma para as aprendizagens e o sucesso de todos. A exposição e partilha de diferentes descobertas, gerando momentos de discussão, constituem oportunidades fundamentais para negociação de significados e construção de novo conhecimento (Ponte, 2005).

As aulas são dinamizadas de acordo com os seguintes momentos: (i) inicialmente são introduzidos os objetivos da aula. É importante que os alunos tomem conhecimento do rumo que a aula vai tomar como forma de tomarem conhecimento das competências a desenvolver, (ii) seguidamente é entregue e lida a tarefa. As dúvidas que surgirem podem ser esclarecidas neste momento; (iii os alunos realizam a tarefa a pares; (iv) discussão coletiva da tarefa onde cada aluno pode contribuir com as suas resoluções e síntese final. As contribuições dos alunos são o fio condutor para dinamizar discussões que conduzam à compreensão, consolidação e apropriação dos temas trabalhados.

Avaliação diagnóstica

A avaliação diagnóstica (Anexo 11) foi desenvolvida com o objetivo de conhecer os conhecimentos dos alunos face aos tópicos a trabalhar durante a unidade de ensino e desta forma estruturar as tarefas de acordo com os conhecimentos dos alunos. O teste diagnóstico era composto por seis tarefas que abrangiam questões com frações com o mesmo denominador e com denominadores diferentes, números decimais e, no final, alguns problemas envolvendo frações e números decimais.

A primeira tarefa tinha como objetivo verificar o conhecimento dos alunos relativamente às frações no significado de parte–todo, assim como da representação verbal que fazem das frações. Os alunos pintaram corretamente as três frações nas representações pictóricas apresentadas. A leitura das frações foi diversificada apenas na segunda representação, onde surgiram as seguintes leituras: "dois sobre dois", "duas metades" ou até "uma unidade". De qualquer das formas, foi possível verificar que conseguem identificar frações de uma unidade numa representação pictórica.

A segunda tarefa era composta por três questões. Na primeira questão pretendia avaliar se os alunos conseguiam identificar a metade em três representações pictóricas distintas. Todos os alunos identificaram corretamente as figuras que correspondiam à metade. Verificando assim que conseguem identificar a metade como a unidade dividida em duas partes iguais mas também como três partes em seis, não consecutivas. Na segunda questão pretendia avaliar se os alunos conseguiam identificar as frações representadas em quatro figuras. Era solicitado, especificamente, que escrevessem na forma de fração. Os alunos não apresentaram dúvidas. Relativamente à última figura, dois alunos escreveram “1”, identificando assim a unidade. A terceira questão pretendia avaliar se os alunos eram capazes de representar frações enunciadas em linguagem verbal em representações pictóricas de unidades discretas. Os alunos inicialmente não conseguiram perceber como podiam representar as frações nas unidades discretas. Assim, foi necessário fazer uma breve discussão coletiva para ajudar os alunos a interpretarem a unidade. Após a discussão a maioria dos alunos conseguiu resolver corretamente a questão.

Para a resolução da terceira tarefa os alunos tinham uma representação pictórica com Barras de Cuisenaire. Era pedido que os alunos relacionassem o tamanho das barras entre si, indicando a fração correspondente. Os alunos não compreenderam o enunciado. Foi necessário reler novamente a questão e discutir com os alunos o que era solicitado. Após este momento a maioria dos alunos conseguiu resolver esta tarefa.

A quarta tarefa era composta por duas questões. A primeira pretendia que os alunos representassem alguns números decimais numa reta numérica orientada onde já existiam alguns pontos de referência. Os alunos revelaram alguma dificuldade inicial na representação dos números na reta, por não compreenderem a própria reta. Após uma breve discussão, a maioria dos alunos conseguiu resolver este exercício, sem apresentar dúvidas. Apenas um aluno trocou a ordem de dois números decimais na reta. A segunda questão pretendia que os alunos indicassem a unidade na reta numérica, dada a metade dessa reta. Esta questão teve de ser discutida com a turma pois não estavam a compreender o seu objetivo. Ainda assim, durante a resolução, alguns alunos ainda solicitaram a minha ajuda.

A quinta tarefa era composta por cinco questões. A primeira pretendia que os alunos comparassem pares de frações com o mesmo denominador e com denominadores diferentes. Mais de metade dos alunos errou a comparação de frações com denominadores diferentes. Tiveram bastante dificuldade em compreender a parte que representava cada uma das frações. Foi necessário discutir este aspeto com os alunos a fim visualizarem e compreenderem que parte da unidade representava cada fração, conseguindo desta forma comparar com mais facilidade as frações. A segunda questão pretendia verificar que conhecimento tinham os alunos acerca de frações equivalentes. De uma forma geral quase todos os alunos conseguiram resolver esta questão reconhecendo que as frações metade e dois quartos são equivalentes. A terceira questão avaliava o conhecimento dos alunos face aos números decimais, em que tinham de efetuar a comparação de diferentes pares de números decimais envolvendo décimas e centésimas. Os alunos apresentaram dificuldade na resolução desta questão, apenas um aluno conseguiu resolver corretamente a segunda comparação. Durante a discussão ficou visível a dificuldade dos alunos relativamente à compreensão do valor de posição de numeração decimal. A questão 4 pedia aos alunos para ordenar, por ordem crescente, cinco frações com denominadores diferentes (três frações com denominador 10 e duas com denominador 5). Apenas dois alunos conseguiram resolver corretamente esta questão. Mais uma vez, foi clara a dificuldade em comparar frações com diferentes denominadores. Por fim, na questão 5, os alunos deviam ordenar cinco números decimais com duas ou três casas decimais. Apenas um aluno resolveu corretamente esta questão, confirmando-se a dificuldade dos alunos na compreensão dos números decimais.

A sexta tarefa era composta por três problemas inseridos num contexto de semi-realidade. Os dois primeiros pretendiam verificar o conhecimento dos alunos sobre a escrita de frações e a sua adição e subtração, mas de uma forma intuitiva. Os alunos não revelaram muita dificuldade na resolução do primeiro problema, cometendo erros pontuais. Em relação ao segundo problema apenas dois alunos escreveram a resposta correta. Os restantes alunos não responderam e justificaram dizendo que não compreendiam o enunciado. O terceiro problema pretendia verificar o conhecimento dos alunos acerca do significado parte todo. Apenas um aluno o realizou corretamente. Os restantes alunos tiveram dificuldade em compreender que o denominador "100" representava a totalidade das páginas.

No final do teste podemos verificar que as dúvidas e erros dos alunos se centram nos seguintes temas: (i) comparação e ordenação de frações com denominadores diferentes, (ii), identificação da unidade a partir de uma fração e (iii) comparação e ordenação de números decimais (dificuldade em compreenderem o valor de posição do sistema de numeração decimal).

Planificação da unidade de ensino

Orientações gerais: A unidade de ensino foi concebida de acordo com as orientações curriculares em vigor seguindo dessa forma o Programa e Metas Curriculares (2013). Optei por trabalhar com os alunos o conteúdo *Números racionais não negativos,* abordando os seguintes temas: (i) adição de frações com o mesmo denominador e com denominadores diferentes, (ii) relação entre número decimal e fração decimal e (iii) adição de números decimais. Ainda de acordo com o que é indicado no Programa e Metas Curriculares (2013), as frações são introduzidas geometricamente a partir da decomposição de um segmento de reta em segmentos de igual comprimento e desde logo utilizadas para exprimir medidas de diferentes grandezas, fixadas unidades.

Visto estas orientações indicarem que os alunos devem utilizar a reta numérica para adicionar frações e números decimais, é meu objetivo desenvolver e realizar uma sequência de tarefas que permita levar os alunos à compreensão e aprendizagem deste tema. As tarefas da unidade de ensino foram por mim desenvolvidas, baseadas na minha experiência enquanto professor, por ter algum conhecimento acerca das dificuldades sentidas pelos alunos e também pela informação recolhida junto da revisão da literatura. Para além do Programa e Metas Curriculares (2013) suportei-me num documento de referência para o ensino e aprendizagem da Matemática, o NCTM (2000). Para o estudo dos números racionais, este documento define as seguintes prioridades para o 3º ano, dando continuidade ao trabalho realizado em anos anteriores:

- A aquisição do sentido do número;
- A compreensão do sistema de posição de numeração decimal;
- A introdução à adição de frações deve decorrer inicialmente da compreensão do significado de parte-todo;
- A compreensão da equivalência de frações;
- Compreender a relação entre fração decimal e número decimal.

O NCTM (2000) indica ainda que a aprendizagem destes conceitos deve ser orientada por representações, modelos e estratégias, desenvolvidas pelos alunos, como suporte para aprendizagem dos números racionais.

As questões das tarefas que vou usar incluem contextos da semi-realidade, da realidade, e puramente matemático, com o objetivo de por em prática os conceitos aprendidos. As representações (pictórica, barra numérica, reta numérica, fração e decimal) desempenham nas tarefas um papel importante pois são a base para aprendizagem e compreensão dos temas.

A unidade de ensino é concretizada ao longo de nove aulas, três relacionadas com a adição de frações, quatro relacionadas com a adição de números decimais e uma aula destinada à avaliação final. Cada aula tem a duração de aproximadamente sessenta minutos. Antes da elaboração da unidade de ensino é realizado um teste de diagnóstico à turma a fim de verificar os conhecimentos que os alunos já tinham e que podiam ser considerados na sua elaboração.

A realização do teste diagnóstico é o primeiro momento de contacto com a turma. É composto por seis tarefas, a realizar autonomamente pelos alunos. Sendo um indicador das dificuldades dos alunos os seus resultados são considerados para a elaboração das tarefas da unidade de ensino. As primeiras cinco tarefas pretendem avaliar o conhecimento dos alunos sobre frações envolvendo grandezas contínuas e grandezas discretas, e também avaliar conhecimento dos alunos sobre os números decimais. As questões apresentam contextos matemáticos, em situações de identificação, ordenação e comparação. A sexta tarefa é composta por três problemas que se enquadram num contexto de semi-realidade. São utilizadas representações pictóricas, verbais e a reta numérica.

Aula 1

Tema/conteúdo: Adição de números racionais representados por frações com o mesmo denominador e com denominadores diferentes. O propósito geral da tarefa é levar os alunos a adicionar frações com o mesmo denominador recorrendo à representação pictórica e à barra numérica.

A primeira aula é centrada na adição de frações. Tem como objetivo a utilização da representação pictórica, e posteriormente da barra numérica, para efetuar a adição de frações com o mesmo denominador e com denominadores diferentes, inseridas numa situação de grandezas contínuas. A tarefa, proposta nesta aula (Anexo 12), é composta por duas questões. A primeira envolve o trabalho com a adição de frações com o mesmo denominador, suportado pela representação pictórica. A segunda questão envolve o trabalho com a barra numérica e a adição de frações com denominadores diferentes. É esperado que os alunos tirem conclusões e desenvolvam conjeturas relativamente à adição de frações com o mesmo denominador, compreendendo, através da representação pictórica, que na adição de frações com o mesmo denominador, o denominador da fração da soma não se altera. Relativamente à segunda questão, o objetivo é que os alunos compreendam a adição de frações com denominadores diferentes, utilizando como representação a barra numérica. A utilização da barra numérica e a representação das frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ por justaposição pretendem que, de uma forma simples e visual, os alunos consigam conjeturar *que quando se adicionam frações com diferentes denominadores, em que um é múltiplo é dou outro, a soma vai ter o maior denominador das frações apresentadas nas parcelas*.

Aula 2

Tema/conteúdo: Adição de números racionais representados por frações com o mesmo denominador e com denominadores diferentes. *O propósito geral da tarefa* e levar os alunos a adicionar frações com o mesmo denominador e com denominadores diferentes recorrendo à barra numérica.

A atividade a realizar na segunda aula (Anexo 13) é centrada na adição de frações com denominadores diferentes. A aula tem início com uma revisão da aula anterior a fim de relembrar a adição de frações com denominadores diferentes. A tarefa a propor é composta por duas questões. Na primeira questão pretendo que os alunos verifiquem que uma barra numérica com a medida de uma unidade não é suficiente para adicionar as três frações indicadas, sendo necessário acrescentar uma nova unidade, dado que a soma é uma fração imprópria. Como o enunciado da questão faz referência a um salame de chocolate, este contexto pode ser uma boa ajuda para que os alunos compreendam que, ao acrescentar uma nova barra numérica, estão, dentro do contexto da questão, a acrescentar um novo salame de chocolate. Esta questão apresenta um desafio para os alunos referente à divisão da barra numérica em partes iguais, onde os alunos, para além das frações $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{4}$, têm de representar a fração $\frac{6}{8}$ tendo assim de efetuar a divisão da barra numérica em oito segmentos com o mesmo tamanho. É uma boa oportunidade para discutir com os alunos a forma de dividir a barra numérica em partes iguais partindo de outras marcações já efetuadas, tirando partido do facto dos denominadores serem múltiplos entre si. Na segunda questão os alunos têm a representação da barra numérica para os ajudar na descoberta da solução. O objetivo é que os alunos conjeturem que numa adição de frações unitárias *o número de vezes que é necessário adicionar uma fração unitária, para obter a unidade, é igual ao valor do denominador dessa fração unitária.* Neste caso, são quatro amigos em que cada um come $\frac{1}{4}$ de uma torta de laranja. Os alunos devem verificar que foi comida a torta na totalidade. É esperado, no final desta aula, que os alunos já se sintam mais confiantes na utilização da representação da barra numérica para adicionar frações com o mesmo denominador e com denominadores diferentes.

Aula 3

Tema/conteúdo: Adição de números racionais representados por frações com denominadores diferentes. O propósito geral da tarefa é que os alunos consigam resolver problemas, envolvendo a adição de frações, recorrendo à barra numérica e à reta numérica.

A terceira aula tem início com uma revisão da aula anterior reforçando a adição de frações com diferentes denominadores, assim como as frações impróprias. O objetivo desta aula é que os alunos consigam utilizar a representação pictórica ou a barra numérica para os auxiliar na resolução de problemas que envolvam frações. A tarefa desta aula (Anexo 14) é composta por quatro questões, cada uma representando um problema inserido num contexto de semi-realidade, para que os alunos possam associar os contextos matemáticos dos tópicos trabalhados a um contexto próximo da realidade. As quatro questões pretendem fazer a revisão dos tópicos trabalhados nas sessões anteriores, englobando a adição de frações com o mesmo denominador e com denominadores diferentes, sendo que a adição de frações poder ter como resultado uma fração própria ou uma fração imprópria. Relativamente à primeira questão, é esperado que recorram à representação pictórica para adicionar as partes indicadas no enunciado. Em relação ao segundo problema os alunos devem verificar que a fração $\frac{4}{4}$ representa a totalidade do livro referido no contexto problema. É importante que compreendam o significado das frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{4}$, representando partes lidas do livro. O terceiro problema é semelhante ao segundo só que envolve a adição de frações com denominadores diferentes. Devido ao trabalho realizado anteriormente, é esperado nesta questão que os alunos utilizem a barra numérica para adicionar as frações. Para responder à alínea 3.1 os alunos têm de efetuar a comparação entre frações com denominadores diferentes. O quarto problema levanta novamente outro desafio, os alunos podem manifestar dificuldade na divisão da barra numérica em nove partes iguais para representar a fração $\frac{3}{9}$.

Aula 4

Tema/conteúdo: Adição de números representados na forma de dízima. O propósito geral da tarefa é levar os alunos a relacionar frações decimais com números decimais.

A quarta aula é a primeira dedicada aos números decimais. Tem início com uma revisão dos tópicos trabalhados nas sessões anteriores sobre frações. A tarefa a propor nesta aula (Anexo 15) tem como objetivo estabelecer a ligação entre as frações decimais e os números decimais. A tarefa é composta por três questões. A primeira questão insere-se numa situação de semi-realidade, recorrendo a uma representação pictórica. O enunciado faz referência a um bolo dividido em dez partes iguais e pede aos alunos para escreverem a fração correspondente a uma fatia. O mesmo se verifica na alínea seguinte para um bolo idêntico, mas cortado em cem fatias. É importante discutir esta questão em grande grupo pois é a partir da representação das duas frações decimais que vou introduzir, a representação decimal, a décima e a centésima parte da unidade. Pelo trabalho realizado nas sessões anteriores é esperado que os alunos consigam escrever corretamente as frações correspondentes a cada fatia do bolo. As questões dois e três utilizam o modelo retangular como representação. Na questão dois os alunos devem relacionar três figuras diferentes tendo como base o modelo retangular e que consigam estabelecer essa relação usando a noção de décima e centésima partes da unidade. É esperado que os alunos apresentem, nas suas respostas, diferentes conclusões, assim como, representem de diferentes formas a relação entre as representações. Esta questão é importante para discutir, e consolidar, a décima e a centésima parte da unidade. Na terceira questão os alunos têm três representações do modelo retangular para escrever a respetiva fração e número decimal. A primeira figura apresenta uma unidade dividida em dez partes iguais no modelo retangular e está totalmente pintada. A segunda figura apresenta duas unidades estando cada uma dividida em dez partes iguais e está pintada mais do que uma unidade. Por fim, na terceira também é apresentada apenas uma unidade estão pintadas oito décimas. Uma das dificuldades esperadas é que os alunos escrevam a fração $\frac{18}{20}$ na segunda figura. É importante reforçar a importância do denominador, referindo o número de partes em que se deve dividir cada unidade. Assim como, é importante discutir com os alunos o significado de unidade.

Aula 5

Tema/conteúdo: Adição de números representados na forma de dízima. O propósito geral da tarefa é que os alunos consigam representar e adicionar números decimais.

Na quinta aula é realizado o jogo do *Decimat.* No início desta aula é discutido com os alunos a décima e a centésima parte da unidade a fim de os recordar principalmente do valor posicional no sistema de numeração decimal. Esta aula tem dois objetivos principais, primeiro consolidar a compreensão do valor de posição dos números decimais e depois introduzir a adição de números decimais. O *Decimat* (Anexo 16) é um jogo com base no modelo retangular, onde os alunos têm a possibilidade de dividir, pintar e visualizar as suas representações. O jogo deve ser realizado a pares. Cada aluno tem um *Decimat* onde, à vez, e após o lançamento do dado, deve pintar e registar os números dos dados. Podem sair nos dados valores com décimas, centésimas e milésimas. Ganha o jogo o primeiro que pintar a totalidade do *Decimat*. Uma das dificuldades que pode surgir diz respeito à adição dos números decimais. Para que não cometam erros é necessário que tenham bem interiorizado o sistema de posição do sistema de numeração decimal. É uma boa oportunidade para discutir este tema com a turma. No final da aula é distribuído a cada aluno alguns exercícios de consolidação com *Decimats,* para que os alunos registem as frações decimais e os números decimais correspondentes.

Aula 6

Tema/conteúdo: Adição de números representados na forma de dízima. O propósito geral da tarefa é que os alunos compreendam e relacionem o modelo retangular com a reta numérica. Que consigam adicionar números decimais por justaposição retilínea.

A sexta aula é destinada ao trabalho com duas representações: o modelo retangular, já conhecido dos alunos, e a reta numérica. Esta tarefa (Anexo 17) tem como objetivo levar os alunos a relacionar fração decimal e o número decimal correspondente com base na mesma representação, que neste caso é o modelo retangular, A tarefa desta aula é constituída por três questões. Na primeira os alunos têm de pintar os números fracionários e decimais nos modelos retangulares apresentados. É esperado que verifiquem, enquanto vão pintando, a equivalência entre as várias representações. Na segunda questão os alunos têm três expressões numéricas para adicionar números decimais recorrendo ao modelo retangular. Em duas expressões pede-se para adicionarem números em que as parcelas têm diferente número de casas decimais e a terceira expressão envolve transporte. Para resolverem corretamente esta questão os alunos devem ter interiorizado o valor de posição do sistema de numeração decimal. Se não tiverem compreendido bem a diferença entre a décima parte e a centésima parte da unidade podem ainda revelar dificuldade na representação dos números apresentados. Durante a discussão é importante rever com os alunos o valor de posição do sistema de numeração decimal. Na terceira questão os alunos têm três expressões numéricas para representar e adicionar recorrendo à reta numérica. Antes da resolução desta questão irei fazer uma introdução à reta numérica, relacionando-a com a barra numérica, para que os alunos compreendam o que representam as marcações na reta, distinguindo entre décimas e centésimas. Tal como no modelo retangular da questão anterior é esperado que os alunos revelem dificuldade, como a representação errada dos números decimais das expressões numéricas, confundindo, por exemplo, as décimas com as centésimas. Assim como, pode surgir dificuldade na compreensão e utilização da própria reta numérica.

Aula 7

Tema/conteúdo: Adição de números representados na forma de dízima. O propósito geral da tarefa é fazer uma revisão das aprendizagens efetuadas sobre a adição de números decimais.

A sétima aula é a última destinada à adição de números decimais. A tarefa a propor nesta aula tem três questões (Anexo 18). O objetivo desta aula é fazer uma revisão, e consolidar, os temas tratados sobre números decimais. A primeira questão pretende que os alunos escrevam e adicionem números decimais numa tabela ordenada por ordens. Esta questão permite verificar, e rever, se o sistema de posição dos números decimais foi apropriado pelos alunos. Os alunos podem apresentar dificuldade na representação dos números na tabela, pois não é muito intuitiva. A segunda e a terceira questões são problemas nos quais os alunos devem usar as aprendizagens adquiridas acerca dos números decimais. O primeiro problema insere-se num contexto de semi-realidade e o segundo num contexto de realidade. Para encontrarem a resolução dos problemas os alunos deverem utilizar a adição de números decimais. A resolução do primeiro problema é relativamente simples onde os alunos devem adicionar os números apresentados. Relativamente ao segundo problema, por se inserir num contexto de realidade, esperado que os alunos não apresentem dúvidas. O espaço destinado à resolução dos problemas encontra-se vazio, dando liberdade aos alunos para utilizarem a representação com que se sentem mais seguros.

Aulas previstas: 9 aulas.		
Tarefas	Objetivos	Tempo
Teste Diagnóstico	Representação, identificação, comparação e ordenação de frações e números decimais.	60m
Tarefa 1	Adição de frações com denominadores iguais e diferentes.	45m
Tarefa 2	Adição de frações com denominadores diferentes.	45m
Tarefa 3	Adição de frações com denominadores diferentes.	45m
Tarefa 4	Frações decimais. Introdução aos números decimais.	45m
Tarefa 5	Adição de números decimais. Jogo do *Decimat.*	45m
Tarefa 6	Adição de números decimais.	45m
Tarefa 7	Adição de números decimais por justaposição retilínea.	45m
Avaliação Final	Adição de frações e de números decimais.	60m

Quadro 1 - Planificação da unidade de ensino.

Avaliação dos alunos

A oitava aula é destinada a avaliação final. É entregue aos alunos um teste de avaliação para aferir os conhecimentos adquiridos (ver tarefa 19). É uma forma de verificar as aprendizagens dos alunos assim como as dúvidas e erros que ainda permanecem. Os alunos devem realizar esta tarefa de avaliação autónoma e individualmente. Irei circular pela sala a fim de apoiar os alunos em eventuais dúvidas de interpretação dos enunciados ou das tarefas. As questões da tarefa de avaliação percorrem todos os temas trabalhados na unidade de ensino: adição de frações com o mesmo denominador e com denominadores diferentes, numa situação de grandezas discretas e contínuas, e adição de números decimais por justaposição retilínea. No teste são utilizadas as representações estudadas ao longo da unidade de ensino, como a pictórica, a barra numérica, a reta numérica, a fração e o numeral decimal.

A avaliação dos alunos é essencialmente formativa, visando consolidar as aprendizagens ao longo da unidade de ensino. Os momentos de discussão precedidos da realização das tarefas constituem oportunidades de *feedback* para os alunos, acerca dos seus raciocínios e descobertas, que são partilhadas ao grupo durante os momentos de discussão. Durante a realização das tarefas, o trabalho escrito e o acompanhamento individual dos alunos são momentos que permitem verificar a evolução das aprendizagens assim como ir colmatando dúvidas que vão surgindo. Os registos escritos dos alunos e o acompanhamento individual constituem um elemento essencial para posterior análise pois vão permitir compreender com mais pormenor as dúvidas e os erros dos alunos.

Capítulo IV

Metodologia de Investigação

Este capítulo apresenta as opções metodológicas gerais desta investigação que se insere no paradigma interpretativo numa abordagem qualitativa, procurando compreender e interpretar o processo de aprendizagem dos alunos dos números racionais. O estudo é realizado numa turma de 3.º ano do 1.º ciclo do Ensino Básico, no ambiente de sala de aula onde assumo o papel de observador participante. Tento, desta forma, compreender o "como" e os "porquês" das questões definidas dentro dos objetivos do estudo. Como instrumentos de recolha de dados, para posterior análise, utilizo a gravação áudio e vídeo, assim como notas de campo e os registos escritos dos alunos.

Opções metodológicas gerais

Uma investigação qualitativa e interpretativa. O objetivo final é a compreensão do significado de uma experiência. A investigação qualitativa assume que o mundo não é algo objetivo e que existem múltiplas realidades. Mais do que os factos, são as conceções das pessoas que constituem a base da perceção. Isto contrasta com a investigação quantitativa que parte do pressuposto que podemos observar, conhecer e medir o mundo que nos rodeia ficando a saber exatamente como ele é. As investigações qualitativas envolvem *trabalho de campo*. Há que ir ter fisicamente com as pessoas, a situação ou local ou a instituição, para que a observação dos comportamentos seja feita no seu contexto natural. Em contraste com a investigação quantitativa que pretende encontrar dados que comprovem ou refutem uma teoria, a investigação qualitativa espera chegar a teorias que permitam compreender o fenómeno em causa, a partir dos dados recolhidos.

Bogdan e Biklen (1994) definem algumas caraterísticas de uma investigação qualitativa pelas quais guiei a minha metodologia investigação. A recolha e análise de dados é o processo pelo qual se organizam transcrições de entrevistas, notas de campo e outros materiais que foram sendo recolhidos com o objetivo de chegar a uma compreensão desses mesmos materiais.

Numa investigação qualitativa, o investigador não reduz a narrativa a números ou símbolos numéricos, mas tenta analisar os dados respeitando a forma em que estes foram registados ou transcritos. A própria narrativa deve seguir um rigor minucioso. Além disso, é indutiva, considerando que é impossível identificar todas as variáveis antecipadamente, apresentando os resultados de forma qualitativa (Merriam, 1988). Não visa a confirmação de hipóteses previamente formadas. As conclusões e significados vão emergindo da progressiva análise dos dados.

Esta investigação assume-se como sendo experimental, pois procuro fazer uma descrição e explicação das aprendizagens dos alunos. Nestas condições, não pretendo manipular os comportamentos dos alunos, procurando compreendê-los tal como elas se apresentam no contexto do estudo. O objetivo é analisar acontecimentos ou fenómenos (Merriam, 1988).

Uma investigação sobre a minha prática profissional. Uma investigação tem como objetivo alargar a base de conhecimento (Merriam, 1988), constituindo também um processo privilegiado de construção de conhecimento (Ponte, 2002). Ao longo da minha prática fui-me apercebendo de algumas situações problemáticas associadas à aprendizagem dos números racionais. Daí, ter optado por realizar esta investigação, de forma a compreender e encontrar uma solução mais vantajosa para as questões que propus. De acordo com Ponte (2002), a atividade investigativa sobre a prática profissional constitui um elemento importante na identidade profissional dos professores.

Uma experiência de ensino. Optei por realizar uma experiência de ensino com o objetivo de levar os alunos a compreender a adição de frações e de números decimais, partido de diferentes representações. A Unidade de Ensino e as respetivas tarefas foram desenvolvidas por mim, enquanto investigador, com base em revisão de literatura. A aplicação da Unidade de Ensino segue o modelo da abordagem exploratória, a qual será dividida em três momentos (i) apresentação dos objetivos da aula e da tarefa, (ii) realização da tarefa pelos alunos e (iii) discussão coletiva das resoluções dos alunos.

Observação participante. Esses dados são recolhidos por mim, enquanto observador participante e instrumento principal da recolha de dados, sendo o ambiente natural a sala de aula o local de contexto da ação. Sendo uma abordagem qualitativa, as ações dos alunos apenas serão melhor compreendidas quando observadas no seu ambiente natural de ocorrência.

Estudo de caso. Esta investigação insere-se na modalidade de estudo de caso (Merriam, 1988), por envolver o estudo de um fenómeno específico ou de um grupo, sendo o caso uma turma do 3.º ano. Tem como objetivo compreender o "como" e os "porquês" dessa entidade (Ponte, 2006). Um estudo de caso qualitativo, caracteriza-se por uma descrição e análise intensiva e holística de uma entidade, fenómeno ou unidade social. Os estudos de caso são particularistas, descritivos e heurísticos, e baseiam-se no raciocínio indutivo. Dentro das suas caraterísticas podemos afirmar que este estudo é *particularista*, porque se debruça no estudo de um caso específico, pois pretendo focar a minha atenção na forma como este grupo em particular aprende a adição de números racionais. É *descritivo* no sentido em que o produto final do estudo será uma descrição. É *heurístico* porque pretendo ajudar esclarecer a compreensão do fenómeno em estudo, ajudando a alargar a conhecimento, neste caso, sobre a aprendizagem dos números racionais. É *indutivo* porque as generalizações, conceitos ou hipóteses emergem da análise sistemática dos dados. Os estudos de caso qualitativos caraterizam-se pela descoberta de novas compreensões, relações e conceitos, e não pela verificação de hipóteses pré-determinadas. De acordo com Ponte (2006), um estudo de caso pode funcionar como um exemplo pela "negativa", ou melhor um *contra-exemplo,* negando aquilo que era dado como certo, ou pode ser um exemplo pela "positiva" tentando mostrar como funciona uma determinada realidade bem sucedida. Um estudo de caso pode ainda ter um alcance mais alargado permitindo gerar novas teorias e novas questões para futuras investigações, não pretendendo encontrar soluções para todos os problemas educativos mas sim acrescentar aos poucos novos elementos que enriquecem o conhecimento que se tem acerca dos fenómenos educativos.

Participantes

A turma objeto de estudo. Este estudo é realizado num colégio particular, inglês, no concelho de Cascais do distrito de Lisboa. Tem um currículo bilingue que abrange o 1.º, 2.º e 3.º ciclos e um currículo inglês que engloba toda a escolaridade, iniciando na *Reception* (pré-primária) até culminar no *I.B.* (12.º ano*).* O colégio encontra-se inserido num meio urbano onde a realidade familiar dos alunos pertence a um nível socioeconómico alto. O 1.º ciclo, onde decorre a investigação, tem uma turma de cada ano, sendo todas as turmas compostas por cerca de 15 alunos.

A experiência de ensino foi aplicada numa turma do 3.º ano do currículo oficial português, constituída por 12 alunos, nove raparigas e três rapazes, com oito anos de idade. É uma turma heterogénea onde os alunos estão habituados a trabalhar individualmente, concentrados nas tarefas que lhes são propostas pela professora da turma. Quatro alunos têm um Plano Educativo Individual. Seis alunos apresentam um aproveitamento satisfatório enquanto a restante turma, de um modo geral, revela um bom aproveitamento.

Alunos entrevistados. Para a realização das entrevistas, escolhi três alunos. Tomei esta opção pois achei que seria uma forma de aprofundar os conhecimentos relativamente às questões do estudo. Os três alunos escolhidos apresentam caraterísticas diferentes. Maria é uma aluna com um bom nível de desempenho na disciplina de Matemática, empenhada e participativa. Dá bons contributos para as discussões coletivas e gosta de apoiar os colegas. Daniel é também um aluno com um bom nível de desempenho, mas mais reservado. Está atento ao desenvolvimento da aula e só intervém quando tem alguma dúvida. Eduardo é um aluno que tem revelado algumas dificuldades na aprendizagem a matemática. Desconcentra-se com alguma facilidade. No entanto, durante as tarefas realizadas ao longo das sessões, esteve atento e procurou participar nas discussões. Optei por estes três alunos porque, pelas caraterísticas apresentadas ao longo da investigação, me pareceram que poderiam expressar, de forma oral e escrita, ao longo das entrevistas, as suas dúvidas e aprendizagens de forma mais clara.

Pedidos de autorização. No início de cada ano letivo é solicitado aos Encarregados de Educação autorização para que a imagem dos educandos, no formato de fotografia, vídeo e voz, possa ser divulgada em várias publicações editadas pelo colégio em vários formatos e redes sociais, assim como a participar em eventos e projetos de investigação. Desta forma, depois de verificadas todas as autorizações, e com o consentimento da direção, verifiquei que era possível avançar com a recolha de dados na turma selecionada.

Recolha de dados

A aplicação da unidade de ensino foi precedida pela realização de um teste diagnóstico com o objetivo de aferir os conhecimentos dos alunos acerca dos números racionais.

Durante a realização Unidade de Ensino a recolha de dados teve por base três instrumentos. Em primeiro lugar, a recolha foi feita através de gravações áudio e vídeo, para posterior transcrição e análise. Desta forma consigo analisar e compreender, de uma forma mais rigorosa, as intervenções dos alunos, pois há sempre detalhes que podem representar dados de análise importantes. Em segundo lugar, as notas de campo e o diário de bordo constituem um resumo importante do sucedido nas aulas, ajudando a clarificar e a organizar os principais acontecimentos. Em terceiro lugar, os registos escritos dos alunos representam uma recolha documental importante por fazer parte da experiência de ensino. Esta recolha representa uma visão geral do progresso geral da turma e das aprendizagens realizadas, mas também é um indicador do progresso de cada aluno. Desta forma consigo analisar e compreender, com pormenor, através dos registos efetuados pelos alunos, as estratégias, erros e dificuldades. Não menos importante é o papel do investigador. Ele é o *instrumento principal* para a recolha de dados e respetiva análise, sendo sensível ao contexto e capaz de adaptar as técnicas que usa às circunstâncias.

No final da Unidade de Ensino foram realizadas entrevistas com o objetivo de tentar compreender, com maior profundidade, os erros e as dificuldades dos alunos. De acordo com Bogdan e Biklen (1994) os entrevistadores devem ser pacientes encarnando o papel de detetives, reunindo partes de conversas, histórias pessoais e experiências numa tentativa de compreender a perspetiva pessoal do sujeito. As entrevistas foram realizadas individualmente aos alunos selecionados, na sala de aula, após a hora de almoço, num momento em que as salas se encontram sem a presença de alunos. O intervalo da hora do almoço foi o único tempo que consegui acordar com os alunos para a realização das entrevistas porque não poderiam permanecer no final do dia letivo no colégio porque tinham atividades extracurriculares,. As entrevistas foram realizadas num ambiente calmo durante cerca de 30 a 40 minutos onde os alunos resolveram e explicaram as resoluções das tarefas que haviam feito no teste final.

No final da Unidade de Ensino foram realizadas entrevistas com o objetivo de tentar compreender, com maior profundidade, os erros e as dificuldades dos alunos. De acordo com Bogdan e Biklen (1994) os entrevistadores devem ser pacientes encarnando o papel de detetives, reunindo partes de conversas, histórias pessoais e experiências numa tentativa de compreender a perspetiva pessoal do sujeito. As entrevistas foram realizadas individualmente aos alunos selecionados, na sala de aula, após a hora de almoço, num momento em que as salas se encontram sem a presença de alunos. Devido ao horário escolar e dos alunos entrevistados, e porque não poderiam permanecer no final do dia letivo porque tinham atividades extracurriculares, o intervalo da hora do almoço foi o único tempo que consegui acordar com eles para a realização das entrevistas. As entrevistas foram realizadas num ambiente calmo tendo durado entre 30 a 40 minutos tendo os alunos colaborado nas questões apresentadas.

Análise de dados

A análise dos dados assume uma natureza descritiva e interpretativa sendo feita de forma indutiva. Numa primeira fase de análise, depois da recolha dos dados, foi efetuada uma leitura atenta dos registos recolhidos. Posteriormente foi realizado o registo descritivo dos significados atribuídos, tendo por base as questões do estudo inicialmente formuladas e o quadro concetual. Essa análise surge de transcrições de gravações áudio e vídeo, notas de campo, diário de bordo, entrevistas e registos dos alunos Tendo em conta a revisão da literatura e os objetivos do estudo considerei as seguintes categorias de análise: (i) dificuldades e erros revelados pelos alunos quando utilizam as diferentes representações de números racionais (pictórica, fração, número decimal, barra numérica e reta numérica) e (ii) dificuldades e estratégias dos alunos na adição de frações e de números decimais.

Fases do estudo

A investigação coincide, em grande medida, com ano letivo. Ao longo do 1.º período foi dada prioridade à revisão de literatura assim como à elaboração da Unidade de Ensino. A aplicação da Unidade, recolha e análise de dados foi realizada no 2.º período. Neste mesmo período teve também início a produção do documento escrito, que se conclui já depois do fim do 3.º período. O estudo foi desenvolvido em várias fases como é possível verificar no seguinte quadro:

Calendarização	2014/15									
	Sep-14	Oct-14	Nov-14	Dec-14	Jan-15	Feb-15	Mar-15	Apr-15	May-15	Jun/15 -	Aug-15
Revisão da literatura	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
Conceção de instrumentos e da Unidade de Ensino			✗	✗	✗						
Recolha de Dados					✗	✗					
Análise dos Dados						✗	✗	✗			
Produção / divulgação							✗	✗	✗	✗	✗

Quadro 2 - Calendarização da unidade de ensino.

Capítulo V

Aplicação da Unidade de Ensino

1ª Aula - Adição de frações

A primeira aula tinha como objetivo levar os alunos a compreender a adição de frações com o mesmo denominador tendo como base a representação pictórica, transitando depois para reta numérica, como é indicado nas metas curriculares. Antes de utilizar a reta numérica utilizei a barra numérica, para apoiar a posterior compreensão da reta numérica. Centrando as questões num contexto de semi-realidade, as tarefas propostas tinham uma sequência que visava levar os alunos a percorrer um caminho com base na compreensão dos temas trabalhados.

A tarefa (Anexo 12) é composta por duas questões, tendo a primeira duas alíneas e a segunda três alíneas. A primeira questão pretendia que os alunos pintassem num painel as frações indicadas. Desta forma poderiam visualizar a relação entre a representação pictórica e a fração. Pretendia que compreendessem que a adição de frações com o mesmo denominador apenas se reflete no numerador pois, como poderiam confirmar no painel, o denominador mantém-se inalterado por se referir ao número de partes em que a unidade está dividia. Já a segunda questão integra uma nova representação, a barra numérica. Cada uma das três alíneas pretendia que os alunos representassem frações nesta barra. A terceira alínea visava a adição das frações com diferentes denominadores, representadas nas duas alíneas anteriores, através da barra numérica.

Antes de os alunos darem início à resolução da tarefa fiz uma breve explicação sobre a barra numérica. Mostrei o modelo retangular e a reta numérica separados tendo depois unido as duas representações a fim de os alunos observarem que a barra numérica representa a combinação destas duas representações. Pedi então a Andreia para vir ao quadro representar a fração $\frac{1}{2}$, o que elaez sem dificuldade tendo pintado metade do retângulo. Questionei-o então sobre o que representava aquela fração na barra numérica. Contudo, o aMaria não foi capaz de responder. Questionei a turma:

> Professor: Quem quer ajudar o Daniel? Temos um segmento que começa no zero e acaba no um, o que representa este ponto, o que nos indica este ponto? De acordo com o que o Daniel pintou como é que podemos marcar agora na reta? Ana?
>
> Ana: É metade... Está pintada metade.

Desenhei o segmento para que todos pudessem verificar a metade representada no segmento de reta.

Neste momento comecei a aperceber-me da dinâmica da turma. Notei que os alunos facilmente perdem a atenção e a concentração. Assim que pedi a Teresa para vir ao quadro apresentar aos colegas a resolução da primeira questão, verifiquei que apenas um aluno estava a prestar atenção. Os restantes começaram a falar com o colega do lado, ou a fazer desenhos em folhas de papel. Avancei com a aula pensando que teria de solicitar mais a colaboração dos alunos a fim de os manter mais focados. Isto foi uma das razões que me levou a fazer a discussão questão a questão. Pedi-lhes que realizassem a tarefa em pares mas os alunos não foram capazes de o fazer. Voltei a frisar que poderiam trabalhar em pares, discutindo as ideias e resoluções que iam fazendo mas os alunos trabalharam sempre de forma individual. Catarina e Andreia ainda iniciaram a resolução em conjunto mas acabaram por trabalhar de forma individual.

Na primeira questão, todos os alunos pintaram corretamente as frações pedidas. Teresa dividiu dois hexágonos em metades, tendo pintado, em cada um deles, uma metade (figura 7).

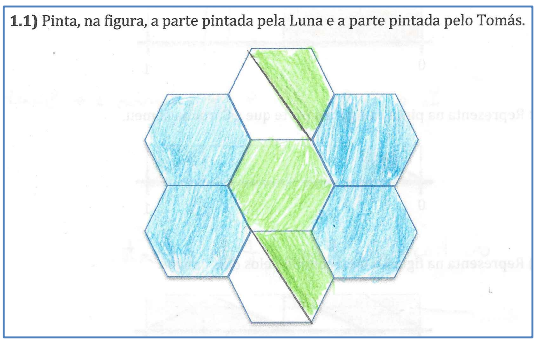


Figura 7– Representação de Teresa

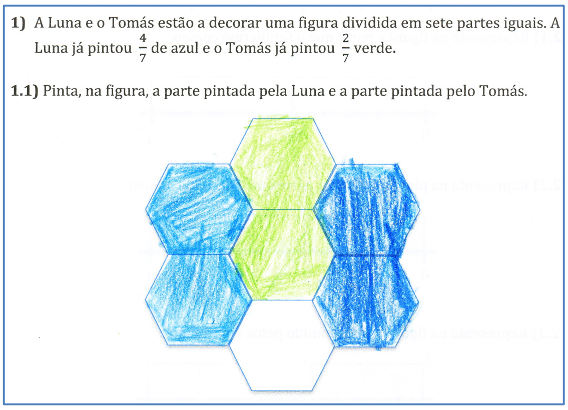
Na discussão, pedi a Teresa para apresentar a sua resolução aos colegas. Pedi-lhes depois para comentarem o que achavam daquela resolução:

Professor: Acham bem o que a Teresa fez?

Nádia: Sim porque aquelas duas (metades do hexágono) fazem um.

Enquanto Teresa falava, alguns colegas complementaram o que dizia mostrando que compreenderam que as duas metades, quando unidas, fariam um hexágono completo.

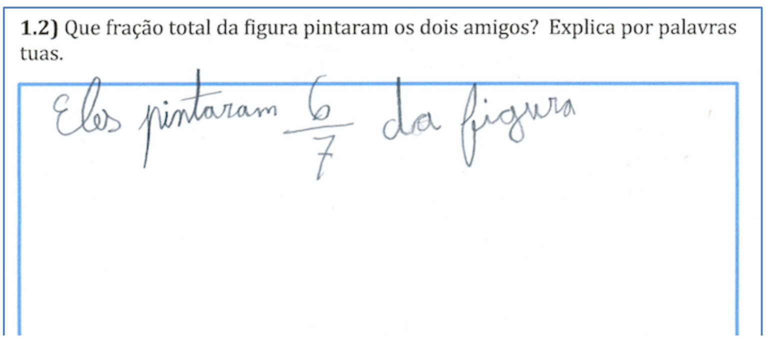
Os restantes alunos pintaram as frações representadas preenchendo a totalidade dos hexágonos, como é o caso de Luísa (ver figura 8).


1) A Luna e o Tomás estão a decorar uma figura dividida em sete partes iguais. A Luna já pintou $\frac{4}{7}$ de azul e o Tomás já pintou $\frac{2}{7}$ verde.

1.1) Pinta, na figura, a parte pintada pela Luna e a parte pintada pelo Tomás.

Figura 8– Representação de Luísa.

Na alínea 1.2, cinco alunos escreveram $\frac{6}{7}$, não justificando a sua resposta (Ver figura 9).


1.2) Que fração total da figura pintaram os dois amigos? Explica por palavras tuas.

Eles pintaram $\frac{6}{7}$ da figura

Quando questionei os alunos acerca da resposta, referiram que se tinham guiado pelo painel da alínea 1.1. Na discussão, procurei mostrar-lhes como é que a representação na alínea 1.1 se poderia traduzir numa regra.

Professor: Temos as frações, como é que as podemos adicionar?

Catarina: Normalmente...

Procurei esclarecer o "normalmente" de Catarina representando a expressão no quadro ($\frac{2}{7}+\frac{4}{7}=$). Pedi aos alunos para olharem novamente para o painel da alínea 1.1 e perguntei de que forma é que podíamos adicionar as duas frações, pedindo-lhes que comparassem aquele painel e a fração que escreveram representando o total. Teve lugar o seguinte diálogo:

Professor: Reparem na representação e no resultado, o que é que obtemos?

Alunos: Seis sétimos.

Professor: Então e quem é que consegue descobrir alguma relação entre o resultado e a adição das frações?

(silêncio)

Professor: Reparem no numerador. Ana, como é que ele aparece?

Ana: Seis são as partes que pintámos.

Apontando para o quadro, Ana consegue relacionar o numerador da soma com as seis partes pintadas no painel.

Professor: Certo... E olhando aqui para adição como é que aparece o seis?

Ana: Somando os dois numeradores.

Professor: Muito bem, Ana! E então o denominador, o é que podemos reparar?

Neste momento, praticamente toda a turma estava ou a conversar com o colega do lado ou a fazer desenhos numa folha, pelo que solicitei ajuda a outro aluno:

> Professor: Sérgio, queres dar uma ajuda à Ana? Olha lá para os denominadores?
>
> Sérgio: Podemos somar...
>
> Professor: De certeza? Lembras-te o que representa o denominador de uma fração?
>
> Andreia: (interveio sem ser solicitada) É o número de partes em que dividimos e o numerador é quantas pintamos.

Andreia, com esta intervenção, mostrou saber o que representa o denominador e o numerador de uma fração, tendo mais dois colegas reforçado o seu comentário:

> Professor: Boa Andreia! Certo Sérgio? Então Andreia a que conclusão é que podemos chegar em relação à adição dos denominadores?
>
> Andreia: (silencio)
>
> Professor: Ana, consegues ajudar a Andreia?
>
> Ana: O denominador fica igual.
>
> Professor: E porquê?
>
> Ana: Porque são todas as partes do painel.
>
> Professor: E isso significa que se mantêm iguais, ou seja o número de partes em que estava dividido o painel mantém-se igual, não se altera, fica sempre 7!

Ana conseguiu verificar que o denominador não se alterava pois representava todos os hexágonos do painel.

Iniciei a resolução da questão 2. Pedi aos alunos para fazerem as três alíneas e informei que faríamos a discussão no fim. Fui circulando pela sala pois os pedidos de ajuda eram muitos. Quando me apercebi que quase todos os alunos tinham terminado a tarefa fiz uma breve discussão pedindo a sua intervenção. Do meu apoio enquanto resolviam a tarefa, assim como da discussão, pude verificar alguns aspetos que me despertaram a atenção. Assim, apercebi-me que os alunos sentiram dificuldade na divisão da barra numérica. Contudo, representaram a metade com facilidade (Ver figura 10):

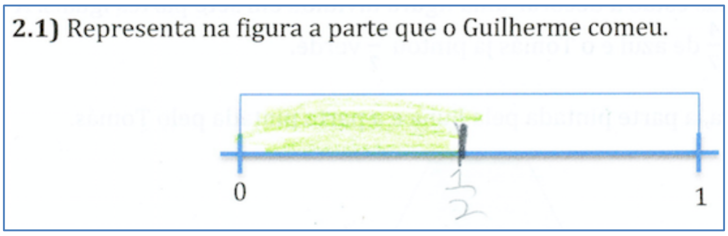


Figura 10– Representação de Teresa.

Um dos alunos pintou a "segunda" metade da barra numérica. Este facto levou a que relembrasse aos alunos que uma barra numérica pode ser vista como a junção de duas representações: um "retângulo", que podemos pintar, e uma reta numérica (Ver figura 11):

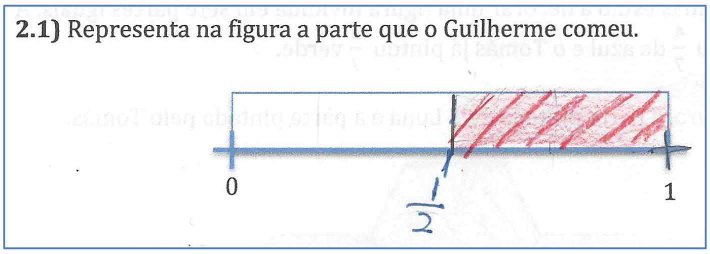


Figura 11– Representação de Alexandra.

Professor: Reparem como a Alexandra pintou a metade. O que é que vos parece? Quem acha que está bem põe o braço no ar. (Seis alunos levantaram o braço). Quem acha que está mal? (Três alunos levantam o braço). Luísa, porque é que achas que está bem?

Luísa: Porque está pintada metade.

Professor: Catarina, porque é que está mal?

Catarina: Porque devia ter pintado do outro lado.

Professor: E porquê?

Daniel: (intervém sem ser solicitado) Porque a linha vai de zero a um e devia ter começado no zero.

Com este comentário, Daniel mostrou ter compreendido que o segmento de reta tem uma orientação. Porque o objetivo da tarefa era a adição de frações, voltei a frisar que a reta numérica tem uma escala ordenada, que naquele caso vai de 0 a 1, e que essa ordem deve ser respeitada.

Na representação da quarta parte na barra numérica os alunos revelaram mais dificuldade, tendo sete representado um quarto sem fazer a divisão da barra numérica (ver figura 12)

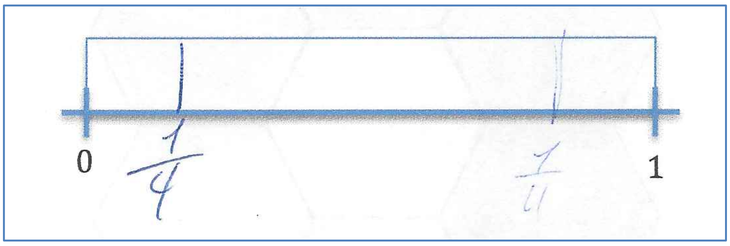


Figura 12– Representação de Daniel.

Foi ainda possível verificar que dois alunos efetuaram a divisão da barra numérica em quatro partes, não assinalando o segmento que corresponde a fração $\frac{1}{4}$. Não verificaram se que as partes estavam iguais (ver figura 13).

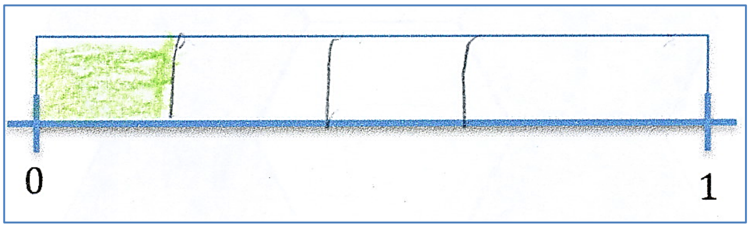


Figura 13– Representação de Luísa.

Eduardo dividiu a barra numérica, assinalando a divisão da barra correspondente a um quarto, sem sentir necessidade de pintar. Inclusive fez a divisão quase equitativa das partes (ver figura 14).

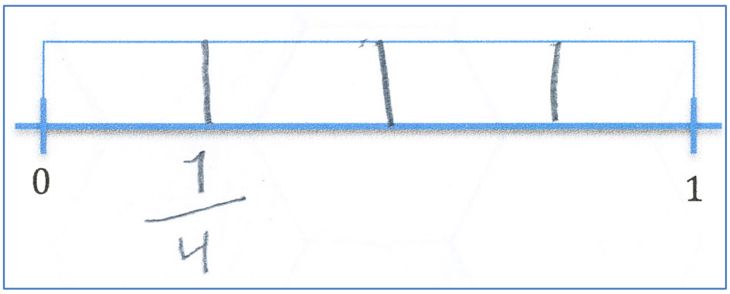


Figura 14– Representação de Eduardo.

Teresa, mais uma vez, dividiu bem e representou bem a quarta parte, tendo, no entanto, pintado duas metades em quartos separados. Guardei esta representação para depois da resolução do exercício 2.3 a fim de levar os alunos a verificar que é mais fácil adicionar as partes se estiverem totalmente pintadas e de forma contínua (ver figura 15).

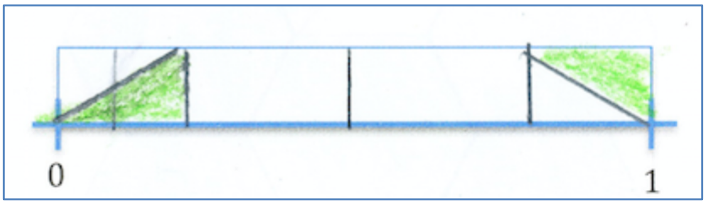


Figura 15– Representação de Teresa.

A divisão da barra numérica em partes iguais foi um dos aspetos em que foquei especial atenção na discussão, pois os alunos não estavam a prestar atenção a esse aspeto. Fiz notar que a quarta parte é metade da metade. Este ponto correu bem pois uma aluna, Ana, colaborou fazendo uma boa intervenção e conseguindo mostrar como obter a quarta parte:

> Professor: Se dividir a barra ao meio o que é que temos?
>
> Ana: Metade.
>
> Professor: Então e a partir daqui como é que posso conseguir as quatro partes?
>
> Ana: Podemos dividir cada uma (das metades) ao meio.
>
> Professor: Boa, então quem é que me diz o que é que a quarta parte é em relação à metade?
>
> Ana: É metade da metade.
>
> Catarina: Ha! Então é só dividir cada uma delas ao meio!

Ana deu um bom contributo na discussão levando os colegas a compreenderem que bastava dividir cada metade em duas partes para conseguir as quatro partes iguais.

Na alínea 2.3, que pretendia a adição das duas frações unitárias (um meio com um quarto) pude verificar os seguintes registos por parte dos alunos: (i) Adição dos numeradores e dos denominadores (ver figura 16), (ii) Adição correta de ambas as partes mas sem efetuarem a divisão da unidade (ver figura 17); (iii) Resolução correta da questão, com divisão cuidadosa da barra numérica (ver figura 18).

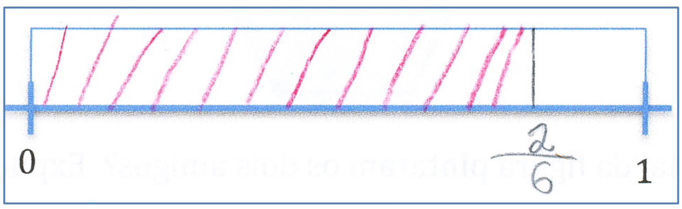


Figura 16– Representação de Teresa.

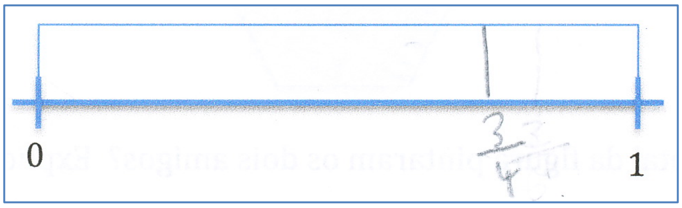


Figura 17– Representação de Eduardo.

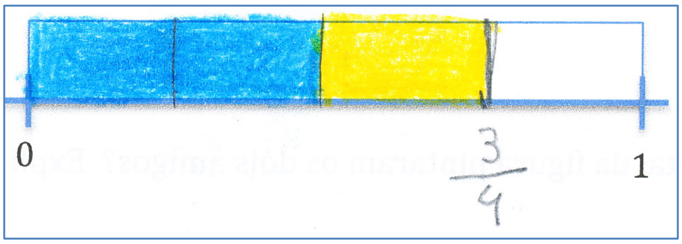


Figura 18– Representação de Nádia.

Na discussão, pude perceber como os alunos chegaram ao resultado três quartos sem efetuarem a divisão em quatro partes da barra numérica:

Professor: Eduardo, como é que conseguiste chegar ao valor três quartos sem teres dividido a barra numérica?

Eduardo: Porque vi nas outras barras.

Professor: Como é que foi isso?

Eduardo: Então... Na primeira tinha metade e na outra dois quartos, se juntar a segunda à primeira fica três quartos.

Eduardo conseguiu visualizar, através da representação nas barras numéricas das questões anteriores, que a adição das duas barras numéricas ia ter como resultado três quartos:

Professor: Porque é que o denominador é quatro e não dois? Onde é que estão essas três das quatro partes?

Eduardo: Tinha de ser porque o quatro é mais pequeno e tive de dividir também a metade.

Professor: Qual metade?

Eduardo: A primeira.

Professor: Só?

Eduardo: Não, as duas.

Professor: Então com quantos quartos é que ficaste?

Eduardo: Com quatro.

À minha questão sobre o porquê do denominador ser quatro e não dois, Eduardo respondeu que "...tinha de ser porque o quatro é mais pequeno e tive de dividir também a metade." Eduardo compreendeu que para que adicionarem frações com denominadores deferentes, neste caso, múltiplos um do outro, o denominador da soma é aquele representa menor valor.

É possível verificar que os alunos apoiaram-se na representação pictórica para adicionar frações. Esta representação apresenta a grande vantagem de permitir visualizar, de forma clara, as partes pintadas correspondentes às frações. A barra numérica foi uma boa ajuda na adição de frações, pois os alunos conseguiram adicionar facilmente as frações pintando-as na barra, ou seja, transformando-as numa representação pictórica. O facto de conseguirem visualizar uma imagem, com cores, ajudou-os a compreender a adição de frações com o mesmo denominador. Para adicionar frações com denominadores diferentes, os alunos voltaram a apoiar-se na barra numérica.

Para concluir a aula, e para atender às dificuldades que surgiram durante a realização da tarefa, desenhei as barras numéricas no quadro e pedi a um aluno para vir representar um meio e depois a outro para vir representar um quarto. Questionei, mais uma vez, se o denominador seria dois ou quatro. Aqui, a turma dividiu-se entre um valor e outro. Ana insistiu que teria de ser quatro pois, tal como Eduardo já tinha referido anteriormente, "foram as partes em que dividimos e o dois não dá, porque comemos três partes". Maria percebeu que o denominador "dois" não iria permitir representar o total de partes de tarte comidas, pois seria necessário dividir uma metade em duas partes. Apresentei ainda uma animação onde os alunos puderam visualizar a justaposição retilínea dos segmentos que representavam a adição das duas frações da questão 2.

Foi possível verificar que, para os alunos realizarem a adição de frações com o mesmo denominador, a representação pictórica foi a que os ajudou a compreender melhor esta operação. Tanto a imagem do painel como as barras numéricas, na qual tinham de representar as frações indicadas, ajudaram-nos a relacionar a representação pictórica com a representação fracionária, pois quando escrevi no quadro a expressão numérica que representava a adição das partes pintadas (questão 1 da Tarefa 1) o painel ajudou os alunos a visualizar e a relacionar a expressão numérica com as partes pintadas. Para a adição de frações com diferentes denominadores a barra numérica também foi uma representação que ajudou os alunos a compreender este novo conceito, ajudando-os a visualizar que só se podem adicionar frações da unidade quando esta está dividida em partes iguais. Esta representação foi um bom apoio para a compreensão da adição de frações porque os alunos tiveram a possibilidade de visualizar as partes que estavam a ser adicionas.

Durante a realização da tarefa, foi possível aperceber-me de algumas dúvidas dos alunos. Relativamente à adição de frações com o mesmo denominador estes compreenderam bem a razão pela qual não se adicionam os denominadores, pois pelo painel conseguiam ver as partes pintadas assim como o total de partes em que estava dividida unidade. Em relação à adição com diferentes denominadores os alunos já apresentaram mais dúvidas. Uma delas diz respeito à divisão da barra numérica, em que os alunos fizerem uma divisão adequada para representar um meio mas tiveram dificuldade em dividir a barra para representar um quarto, pois não a conseguiram dividir em quatro partes iguais. Relativamente à representação de um meio, Maria pintou a segunda metade da barra. Isso permitiu levar os alunos a compreender que, para se adicionar frações por justaposição, é importante seguir a graduação da reta. Quando os alunos tiveram de adicionar as frações um meio e um quarto (alínea 2.3 da Tarefa 1) houve quem adicionasse os numeradores e os denominadores, mas houve também quem tivesse apresentado o resultado correto. Na discussão foi possível verificar como é que esses alunos chegaram ao resultado correto, recorrendo às barras numéricas que representavam cada uma das frações isoladamente para desta forma conseguirem visualizar a justaposição das duas frações. Desta forma ajudaram alguns dos restantes colegas a compreender porque é que não se adicionam os denominadores, mas penso que este é um aspeto que ainda não ficou totalmente claro para todos os alunos.

É possível verificar, pelos comentários dos alunos, que a barra numérica os ajudou a visualizar as frações, assim como a adicioná-las, representando um bom suporte para a aprendizagem da adição de frações. Durante as discussões os alunos reportavam-se com frequência “às partes pintadas”.

A minha perceção da dinâmica da turma levou-me a repensar e a ajustar a Unidade de Ensino, fazendo tarefas mais estruturadas a fim de rentabilizar as discussões, assim como o tempo de concentração de alunos. Estes trabalharam relativamente bem de forma individual, mas durante as discussões manifestaram dificuldade em expressar os seus raciocínios e dúvidas. A divisão da barra numérica, a representação de frações e a adição de frações, de uma forma geral, foi um objetivo alcançado. A adição de frações com denominadores diferentes pela justaposição retilínea é um aspeto que ainda tem de ser melhor consolidado na turma.

2ª Aula - Adição de frações.

Para a segunda aula construi uma apresentação em *PowerPoint* para apoiar a discussão da tarefa. O objetivo era otimizar o tempo de aula focando a atenção dos alunos, assim como rentabilizar o tempo de discussão de forma a que os alunos consolidassem aprendizagens.

Esta segunda tarefa tinha com objetivo levar os alunos a compreender a adição de frações com diferentes denominadores recorrendo à barra numérica(ver anexo 13), sendo composta por duas questões, tendo a primeira quatro alíneas.

Dei início à aula com uma breve revisão da aula anterior tendo os alunos participado, discutindo as resoluções. Seguidamente apresentei a "Tarefa 2".

Mais uma vez, os alunos tinham de recorrer à barra numérica para representar as três frações indicadas na questão, que neste caso já não eram unitárias, como aconteceu na Tarefa 1. Pela dinâmica da aula anterior, decidi atribuir tempo (5m) para realizarem as primeiras três alíneas, ao que a maioria dos alunos respondeu bem. Fui circulando pela sala e tirando as dúvidas que iam surgindo.

Relativamente às resoluções do primeiro exercício, na alínea 1.1, três alunos dividiram a barra numérica em quatro partes, pintando duas, e assinalando corretamente os dois quartos. (ver figura19)

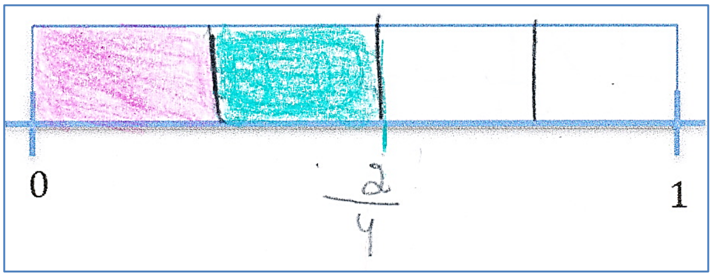


Figura 19– Representação da fração dois quartos.

Cinco alunos dividiram a barra numérica nas quatro partes, pintaram duas, mas não assinalaram a fração correspondente. (ver figura 20)

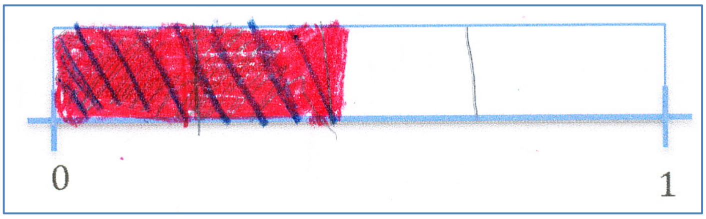


Figura 20– Representação da fração dois quartos.

Fiz uma discussão sobre a divisão da barra, assim como a representação da fração na barra numérica. Dois alunos apresentaram as suas resoluções ao grupo tendo os alunos compreendido a representação da fração.

Dois alunos dividiram a barra numérica apenas em duas partes tendo pintado metade da figura e representado a fração dois quartos (ver imagem 21).

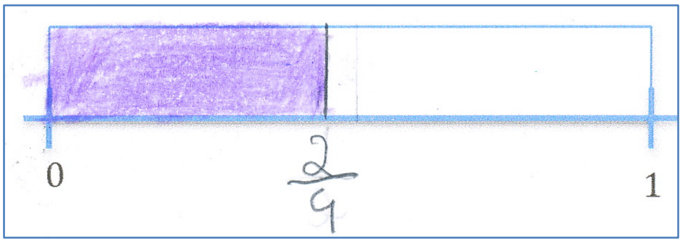


Figura 21– Representação da fração dois quartos.

Esta situação levantou uma discussão interessante. Fiz um *scan* e projetei a imagem para que todos pudessem ver claramente a resolução de Catarina:

Professor: Vamos lá olhar para a representação da Catarina. Alguém vê alguma coisa de estranho em relação às outras resoluções?

Andreia: Ela só dividiu em duas partes.

Professor: E então? É que a Catarina fez bem ou fez mal?

Andreia: Eu acho que fez bem porque está igual às outras.

Andreia percebeu que, embora a barra estivesse dividida em duas partes, os dois quartos representavam a mesma porção da barra numérica que os colegas anteriores tinham pintado.

Professor: Mas então vamos lá olhar para a fração. Que valor temos no denominador? Sérgio?

Sérgio: Quatro.

Professor: E o que é que isso significa?

Sérgio: Que temos de dividir em quatro partes.

Professor: E então em quantas partes é que Catarina dividiu a barra numérica?

Sérgio: Ela dividiu em duas.

Professor: Então? É que afinal representou bem ou mal a fração?

Neste momento a Ana colocou, confiante, o braço no ar:

Professor: Diz Ana...

Ana: É a mesma coisa, o que a Catarina pintou foi um meio, que é a mesma coisa que dois quartos.

Ana relembrou a equivalência de frações. Apercebeu-se que, embora as frações fossem diferentes, representavam a mesma parte pintada da unidade. Aproveitei para reforçar este aspeto referindo que, embora Catarina não tenha representado dois quartos, mas sim um meio, ambas as frações representavam a mesma parte da unidade:

Professor: Catarina, és capaz de nos dizer porque é que estas frações são iguais, ou seja, representam a mesma partes da unidade?

Catarina: Porque é metade.

Professor: Muito bem, então um meio representa metade e dois quartos também representa metade. Então olhando apenas para a fração, como é que podemos ver que é uma fração que representa metade de uma unidade? Olhem lá com atenção para as frações..

Os alunos ficaram em silêncio. Não estavam a perceber a pergunta. Pedi-lhes para olharem para pensarem novamente no que representa o denominador e o denominador. Ana colocou o braço no ar:

Ana: Acho que já sei, quando pintamos, pintamos sempre metade...

Professor: É isso... queres explicar melhor?

Ana: Na primeira fração (um meio) está dividida em duas partes e pintamos uma, na segunda fração (dois quartos) está dividida em quatro partes e pintamos duas. É sempre metade que pintamos.

Professor: Boa! Ou seja, o numerador é o quê em relação ao denominador?

Ana: É metade.

Professor: E então isso significa que a fração nos indica o quê?

Ana: Que temos de pintar sempre metade da unidade.

Ana observou que, se o numerador é metade do denominador, a fração representa metade da unidade. Encontrou uma generalização para frações equivalentes a $\frac{1}{2}$, mostrando compreender quando é que uma fração representa metade da unidade.

Na alínea 1.2 era pedido aos alunos que representassem uma nova fração: três quartos. Foi possível verificar que os alunos foram mais cuidadosos na divisão da barra numérica, dividindo-a de forma equitativa.

Dois alunos ainda representaram a fração por estimativa, sem efetuar a divisão da barra numérica. Durante a resolução, questionei Daniel como é que descobriu que aquela parte que pintou representava os três quartos ele respondeu que "...é mais que metade." Embora não tivesse representado com precisão, tinha a noção que a fração representava uma parte maior que metade da unidade (ver figura22).

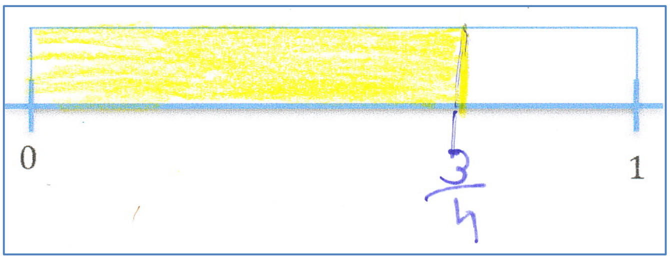


Figura 22- Representação de Daniel.

Seis alunos dividiram a barra numérica nas quatro partes, mas não representaram a fração. (ver figura 23).

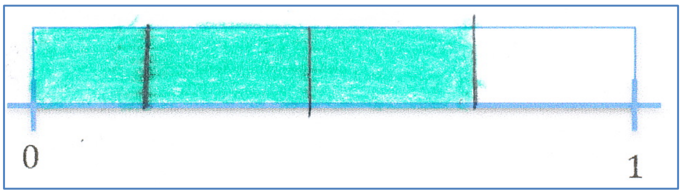


Figura 23– Representação da fração três quartos.

Cinco alunos dividiram a barra numérica, pintando a parte correspondente à fração, assim como escreveram a fração correspondente à parte pintada. (ver figura 24).

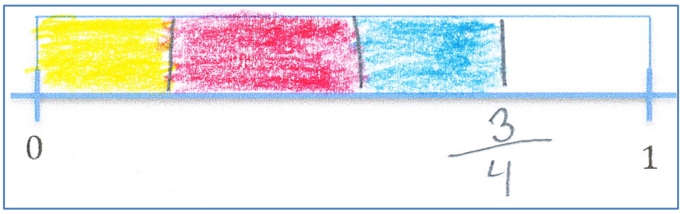


Figura 24– Representação da fração três quartos.

A alínea 1.3 representou para os alunos um novo desafio, pois tinham de representar seis oitavos na barra numérica. Mais uma vez, a divisão da barra numérica representava um aspeto que os alunos não estavam a conseguir ultrapassar. Para os ajudar, relembrei o processo utilizado para dividir a barra numérica em quatro partes, apresentando no *PowerPoint* uma animação em que podiam ver a divisão da barra numérica, à medida que ia solicitando a intervenção dos alunos, iam visualizando a divisão da barra primeiro na metade, depois em quartos e finalmente em oitavos. Tal como tinha sido discutido anteriormente, os alunos compreenderam que estávamos a dividir a barra em múltiplos de dois, partindo inicialmente da metade. Após esta revisão, seis alunos conseguiram dividir a barra numérica com mais facilidade. (Ver imagem 25).

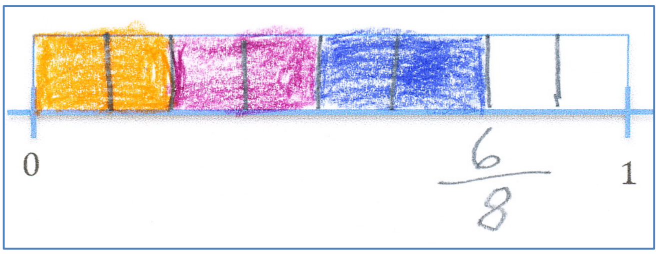


Figura 25– Representação da fração seis oitavos.

Ainda assim, dois alunos escreveram por aproximação a fração seis oitavos. (Ver imagem 26 e 27)

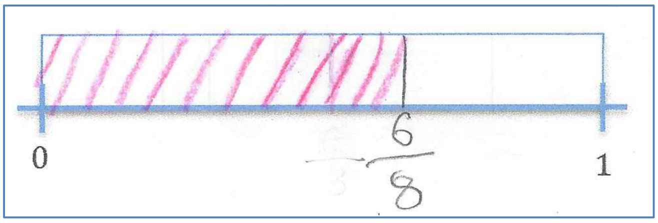


Figura 26– Representação da fração seis oitavos.

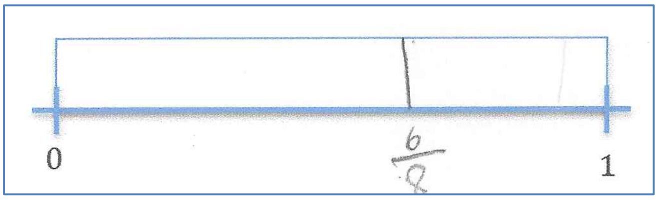


Figura 27– Representação da fração seis oitavos.

Na alínea 1.4, era pedido que os alunos adicionassem as três frações. Enquanto circulava pela sala apercebi-me que estavam com dificuldade em justapor as três frações na barra numérica. Ao apoiar Catarina, ela referiu que não iam caber todas numa barra numérica. Dois alunos aperceberam-se que, ao adicionar dois quartos com três quartos iria passar a unidade representada, a barra representada não iria ser suficiente e ainda faltava representar uma terceira fração. Luísa representou as frações todas na mesma unidade, referindo que "...tenho de pintar os numeradores e por isso tenho de dividir a barra" (ver imagem 28).

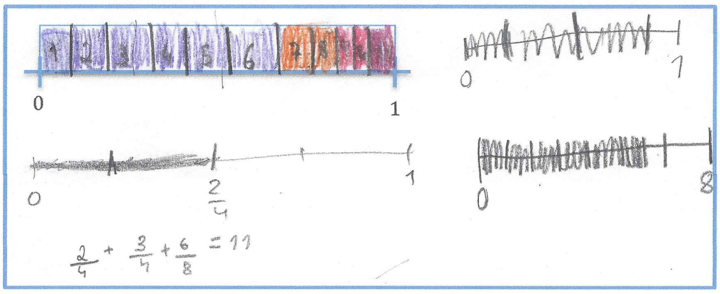


Figura 28 – Representação de Luísa.

Este comentário revela que o significado de fração enquanto parte todo não está compreendido. Durante a discussão, questionei os alunos acerca da resolução de Luísa, sobre o que se poderia então fazer para resolver essa questão:

> Professor: Reparem na resolução da Luísa, o que é que vos parece? É que não há aqui nada de estranho?
>
> Alexandra: Ela dividiu uma barra em muitas partes?

Professor: Certo...e isso que dizer o quê? Andreia?

Andreia: Ela está dividida em muitas partes e não podia.

Professor: E o que é que isso quer dizer? Ana?

Ana: O denominador da fração é oito e ela não podia dividir em onze partes.

Ana deu um bom contributo à turma pois percebeu que, tendo uma das frações o denominador oito, a barra numérica nunca poderia ser dividida em onze partes.

Professor: E porquê oito? Também temos as frações dois quartos e e três quartos. Porque é que não dividimos a barra em quatro partes?

Ana: Para depois para juntarmos as partes todas também temos de dividir essas frações (dois quartos e três quartos) em partes mais pequenas para ficaram iguais a oito.

Ana percebeu que se não dividisse a barra no denominador mais pequeno, que era referente à fração seis oitavos, não ia conseguir adicionar as três frações. E como já tínhamos verificado em questões anteriores, só é possível adicionar frações quando o denominador é igual.

Para os ajudar, apresentei um *slide* que mostrava as três representações separadas. Perguntei se, visto termos de adicionar as três frações, não havia ali nada de estranho:

Professor: Catarina, quando fui ao pé de ti tirar algumas dúvidas, lembras-te o que disseste acerca de não conseguirmos juntar todas as frações numa só barra numérica?

Catarina: Sim, disse que não ia caber tudo numa.

Professor: Muito bem, então vamos lá usar a cabeça, se não cabe tudo numa, o que é que vamos ter de fazer para podermos adicionar todas as frações? Ana?

Ana: Vamos ter de adicionar mais partes?

Professor: Onde? Mas que partes são essas? Então para juntar essas partes das outras frações o que é que preciso de juntar a esta barra?

Ana: Juntar outra barra?

Noutro *slide*, mostrei as duas barras numéricas juntas (Ver imagem 29).

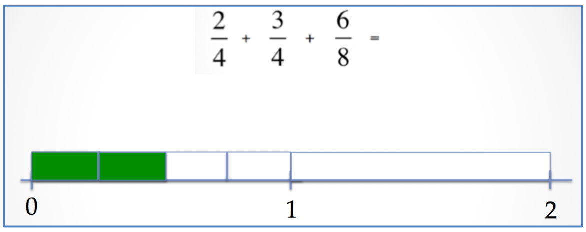


Figura 29– Slide que representa a adição das frações.

Seguidamente questionei os alunos acerca do número de partes em que teríamos de dividir a barra numérica:

Professor: Luísa, agora já temos as duas barras numéricas juntas e já podemos representar todas as frações. Então e agora em quantas partes vou dividir esta barra numérica? Olha com atenção para as frações.

Luísa: Vou ter de dividir em quatro, porque tem de ser oito. Divido a primeira em quatro e segunda em quatro.

Este comentário de Luísa foi interessante para ela a unidade passaram a ser as duas barra numéricas juntas. Foi importante discutir com a turma este comentário de Luísa.

Professor: Ouviram o que disse a Luísa? Estão de acordo? Eduardo?

Eduardo: Eu acho que devemos só dividir uma (barra numérica) em oito partes...

Professor: ...só uma?

Eduardo: Não, cada uma das barras.

Professor: E porquê?

Eduardo: Porque foi a primeira... e depois o professor juntou outra igual à primeira...elas são iguais.

Este comentário revela que Eduardo teve a noção que a primeira barra representava a unidade à qual, posteriormente, se juntou uma segunda unidade. E como tal, cada uma delas teria de ser dividida em oito partes. Aproveitei para reforçar que o denominador se refere ao número de partes em que se divide cada unidade.

Depois deste apoio, pedi aos alunos para tentarem fazer novamente a alínea, o que fizeram com mais facilidade. Relativamente ao numerador, os alunos não apresentaram dificuldades, tendo contado as partes pintadas que eram 16 (ver imagem 30).

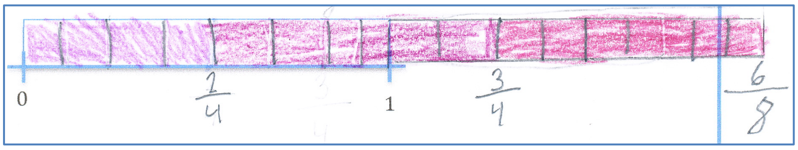


Figura 30– Representação de Ana. Adição das frações na barra numérica.

No final puderam verificar que ficaram duas unidades pintadas, tendo chegado à conclusão que as amigas comeram dois salames completos.

A questão 2 foi resolvida sem grande dificuldade e sem os alunos solicitarem frequentemente a minha ajuda. A dúvida que surgiu foi, mais uma vez, em relação à divisão da reta numérica. Dois alunos dividiram a reta em cinco partes, porque fizeram quatro marcações e, quando representaram as frações de cada segmento, assinalaram de duas formas: (i) cada um dos segmentos com $\frac{1}{4}$, não correspondendo à soma total dos segmentos, embora se compreenda que o aquilo que aluno quis mostrar é que cada segmento representa um quarto da unidade ou (ii) assinalaram a última marcação como correspondendo aos $\frac{4}{4}$, que na realidade seriam quatro quintos (ver imagem 31 e 32) .

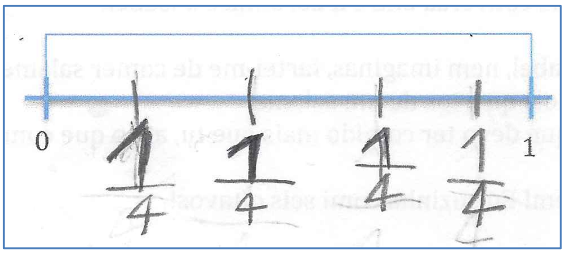


Figura 31 – Representação de Eduardo.

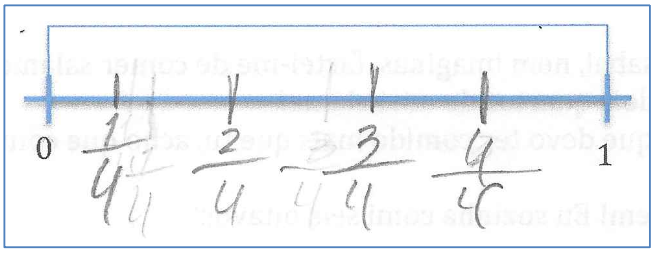


Figura 32– Representação de Nádia.

Três alunos representaram a adição das quatro partes recorrendo à multiplicação. Desta forma, generalizaram os conhecimentos adquiridos nos números naturais compreendendo que os podiam aplicar nos números racionais. A adição repetida de um número pode ser transformada numa multiplicação (ver imagem 33).

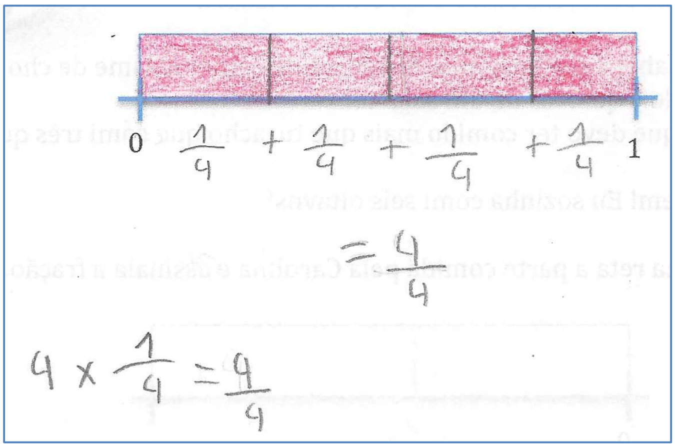


Figura 33– Generalização sobre a adição de frações.

Professor: Os vossos colegas fizeram uma coisa engraçada, já viram a operação que escreveram?

Teresa: Fizeram uma multiplicação.

Professor: Boa Teresa, mas não era suposto adicionar?

Teresa: Sim, mas é a mesma coisa porque está lá quatro vezes um quarto.

Teresa mostrou aos colegas que a utilização da multiplicação também solucionava o exercício 2.

Esta segunda aula correu um pouco melhor que a primeira, estando os alunos mais atentos. A construção do *PowerPoint* foi uma boa solução pois ajudou na compreensão de alguns conceitos.

Como foi possível verificar, os alunos recorreram com frequência à representação da barra numérica para adicionar frações. Nesta tarefa, foi dada mais ênfase à adição de frações com denominadores diferentes. Durante a discussão das questões utilizava a representação fracionária, escrevendo a expressão numérica, para que os alunos fossem relacionando as duas representações, recorrendo os alunos com frequência à barra numérica para visualizar as partes que tinham de adicionar. A linguagem utilizada pelos alunos é também indiciação de que a representação da barra numérica foi aquela que lhes deu mais segurança, referindo-se os alunos às "partes pintadas" e "as partes divididas na barra"

Os erros mais comuns foram novamente a divisão da barra numérica, apresentando os alunos dificuldade em conseguir dividi-la em partes iguais. Tiveram de ser orientados para que descobrissem de que forma se poderia dividir a barra em oito partes iguais. Outra dúvida que surgiu com frequência, enquanto acompanhava individualmente os alunos, foi na adição por justaposição, em que os alunos, após representarem a primeira fração na barra, para representar a segunda, questionavam se teriam de dividir apenas a parte que ainda sobrava para representar a segunda fração.

A barra numérica contribuiu para que os alunos pudessem compreender a adição de frações com denominadores diferentes. Para que conseguissem compreender a divisão da barra numérica nas oito partes, que a questão 1.4 (ver tarefa 2) pedia, foi importante para os alunos visualizarem com cores diferentes a representação da justaposição de cada uma das frações.

Foi interessante verificar algumas descobertas dos alunos, como a generalização sobre frações equivalentes a um meio, pois é um factor importante para a compreensão das frações. A utilização da multiplicação nos números racionais foi outra descoberta interessante, tendo os alunos chegado à generalização de que a adição sucessiva de frações também pode ser representada por uma multiplicação, tal como acontece com os números naturais.

Pelos resultados alcançados e pelos comentários dos alunos durante a discussão, penso que o objetivo previsto foi alcançado, tendo os alunos compreendido um dos pontos chave desta aula, que implicava que compreendessem a adição de frações com denominadores diferentes. No entanto, ainda permanecem algumas dúvidas relacionadas com a barra numérica que deverão ser alvo de uma revisão mais cuidada.

3ª Aula - Adição de frações.

Esta aula tinha como objetivo a resolução de problemas envolvendo a adição de frações com o mesmo denominador e com denominadores diferentes. A realização da Tarefa 3 (ver anexo 14), prevista para esta aula, era composta por quatro questões.

Embora os alunos pudessem utilizar diferentes representações, era meu objetivo que utilizassem a barra numérica. Porque, tal como é indicado nas Metas Curriculares para o 3º ano, os alunos devem ser capazes de adicionar frações na reta numérica, e a barra numérica é um bom elemento de ligação à reta numérica.

Iniciei esta aula com uma breve discussão sobre a aula anterior. Centrei-me em dois aspetos que me pareceram ser os mais importantes: a divisão da barra numérica e a necessidade de juntar uma segunda unidade quando a adição de frações assim o exige. Pela discussão e pela análise dos resultados dos alunos, estes foram os pontos que me pareceram que ficaram menos consolidados da segunda aula.

Para a realização da tarefa 3, defini tempos para que os alunos fossem resolvendo as questões. A discussão aconteceu questão a questão. Pedi também aos alunos que tentassem utilizar a barra numérica na resolução das questões e, se possível, que representassem também a expressão numérica correspondente.

A primeira questão levantou dificuldade relativamente à interpretação, tendo apenas dois alunos feito a sua interpretação correta. A dúvida surgiu quando o texto referia, "...dois amigos comeram uma torta inteira...", tendo a maioria dos alunos compreendido que cada um tinha comido uma torta inteira. Apercebi-me disto quando circulava pela sala e apoiava os alunos. Para resolver o problema seis alunos recorreram à representação pictórica, como se pode ver, por exemplo, no caso de Andreia. (ver figura 34)

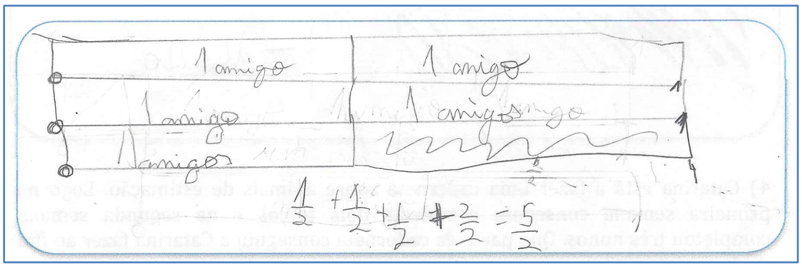


Figura 34 – Resolução de Andreia.

Andreia optou por representar três barras numéricas sobrepostas (ver figura 34).

Professor: Que engraçado, és capaz de me explicar o que desenhaste?

Andreia: São as tortas que comeram...

Professor:...mas dá para perceber que desenhaste três barras numéricas!

Andreia: Tentei desenhar as barras. Aqui estão as três metades que cada um comeu (apontando para a primeira e para a terceira barra). Estes (primeira barra) deu uma torta inteira. Aqui (barra do meio) são as duas metades que cada um comeu.

Andreia conseguiu chegar à solução utilizando a representação da barra numérica. Conseguiu representar e explicar o que representava cada metade na barra numérica. Pelo último comentário de Andreia, é possível verificar que duas metades originaram uma unidade inteira, contudo não consegui representar topo a topo.

No final, pedi a Andreia para apresentar a sua resolução à turma. Discutimos a sua representação pois era possível visualizar as três barras representado as tortas que cada um comeu.

Alexandra utilizou a barra numérica e a representação pictórica (ver imagem 35).

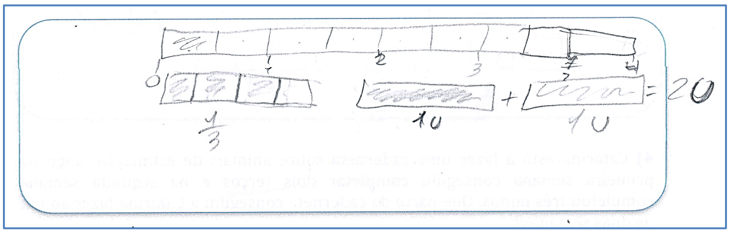


Figura 35– Resolução Alexandra.

Alexandra perdeu-se na sua estratégia. Iniciou bem a representação da barra numérica mas sentiu depois necessidade de passar para a representação pictórica (ver figura 35)

> Professor: Alexandra, começaste por desenhar bem a barra numérica, porque é que não acabaste?
>
> Alexandra: Porque assim vejo melhor os tortas.
>
> Professor: Mas porque é que pintaste este pedaço da barra(um terço)?
>
> Alexandra: É uma torta...e aqui está mais outra e aqui outra (apontando já para a representação pictórica)
>
> Professor: E estas duas?
>
> Alexandra: São as duas tortas que cada um meninos comeu.

Alexandra conseguiu representar e explicar bem o que tinha desenhado, e que, de acordo com a sua interpretação, estaria correto, pois representou as duas tortas completas que foram comidas, mas não conseguiu concluir pois faltava ainda uma metade de torta. Quando Alexandra escreveu $\frac{1}{3}$ estava a referir-se a uma das três tortas inteiras que desenhou, não conseguindo compreender que apenas tinha sido comida mais metade de uma torta. Para Alexandra, a representação pictórica desempenhou um papel importante na resolução desta questão.

Catarina recorreu à representação da barra numérica e, tal como Andreia, recorreu também à representação simbólica matemática, tendo escrito a expressão numérica (ver figura 36).

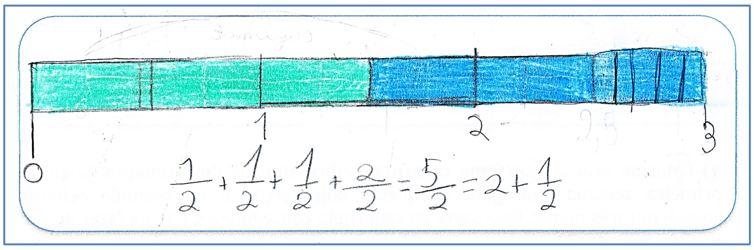


Figura 36– Resolução de Catarina para a questão 1.

Pela expressão numérica que Catarina escreveu, é possível verificar que conseguiu compreender através da representação fracionária e da barra numérica, que foram pintadas duas unidades completas, representando isso na expressão numérica, $2+\frac{1}{2}$.

Os restantes tentaram utilizar a barra numérica, mas sem sucesso, pois tiveram, novamente, dificuldade em compreender que era necessário adicionar uma nova unidade para se poder adicionar todas as frações.

Sérgio: Professor, não estou a perceber...

Professor: Então, Sérgio, como é que podes representar as tortas? Podes fazer desenhos ou a barra numérica...

Sérgio: Não estou a perceber... Como é que a barra dá se há mais tortas para desenhar?

Sérgio, tal como outros alunos, não estava a conseguir representar o problema na barra numérica. Desenhou as tortas e representou a barra numérica com a graduação de 0 a 1. Representou bem as duas metades comidas por cada um, pintando as metades, mas depois não conseguiu juntar a terceira metade.

Ana recorreu exclusivamente à representação pictórica para chegar à solução (ver figura 37).

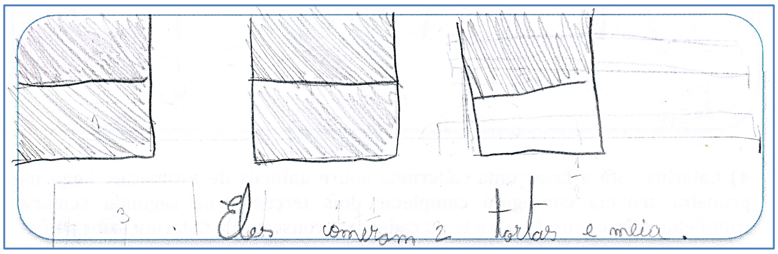


Figura 37– Resolução de Ana para a questão 1.

Professor: Ana o que representam esses desenhos?

Ana: São as tortas que cada um comeu.

Professor: És capaz de me explicar isso? Porque é que tens aí três quadrados divididos ao meio?

Ana: Este (o primeiro do lado esquerdo) são duas metades, que cada um dos amigos comeu. Aqui (quadrado da direita)é a torta que faltava para outro amigo, aqui no meio é a torta inteira que os dois últimos amigos comeram.

Ana interpretou bem a questão, tendo compreendido que houve uma torta que foi dividida por dois amigos. A sua solução para a questão estava correta. Enquanto dialogava com Ana, apercebi-me que tinha tentado inicialmente utilizar a barra numérica para resolver a questão. Era possível verificar porque estava mal apagado.

Professor: Ana, dá para ver aqui que tentaste representar a barra numérica. Porque é que apagaste?

Ana: Não consegui...eram muitas metades para desenhar e mais uma inteira e não estava perceber bem. E com os desenhos foi mais fácil.

Professor: Mas o que é que não percebeste?

Ana: Porque desenhei a barra e depois quando comecei a pintar as tortas a barra não chegava. Ainda desenhei mais mas tive medo de estar mal...

Ana conseguiu chegar à solução da questão mas não pela barra numérica. A representação pictórica deu-lhe mais segurança na resolução da questão.

Eduardo utilizou uma representação curiosa tendo utilizado símbolos. De início não foi fácil compreender os desenhos que tinha feito (ver imagem 38).

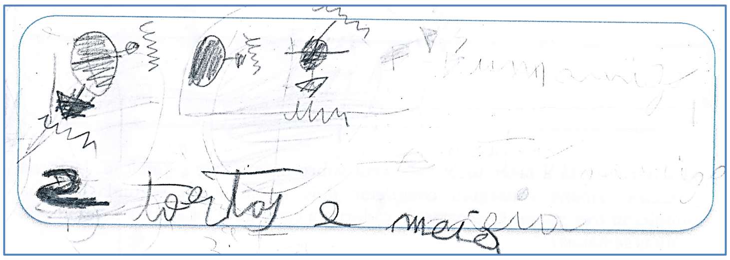


Figura 38– Resolução de Eduardo para a questão 1.

Professor: Que engraçado...que imagens são essas que tens ai?

Eduardo: Sim...São as tortas que eles comeram.

Professor: As tortas, como?

Eduardo: Estes (primeira imagem da esquerda) são os dois amigos que comeram cada um meia torta e aqui no meio está a meia torta do outro amigo. Depois aqui (imagem do lado esquerdo) é a torta que comeram os dois amigos.

Eduardo compreendeu bem a questão. Representou e explicou corretamente a sua resolução. Tal com Ana, também tinha dado inicio à resolução da questão recorrendo à barra numérica, mas como tinha varias frações para representar acabou por desistir.

Os alunos realizaram a segunda questão sem grande dificuldade, tendo recorrido à barra numérica para encontrar a solução. Cinco alunos representaram a barra e também a respetiva expressão numérica (ver imagem 39).

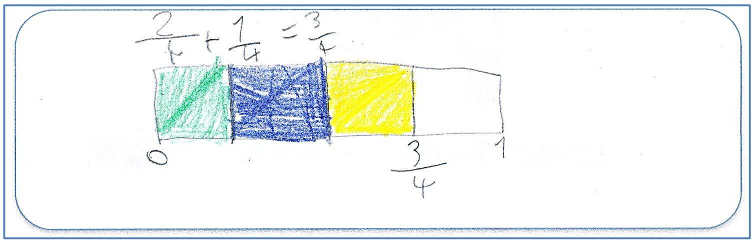


Figura 39– Resolução de Nádia para a questão 2.

Os alunos solicitaram menos apoio na resolução desta questão revelando que já se sentiam mais confortáveis na utilização da barra para adicionar frações com o mesmo denominador. No entanto, cinco alunos ainda fizeram uma divisão irregular da barra numérica. Curiosamente, uma dúvida que surgiu foi que alguns alunos pensavam que era para indicar na resposta o número de páginas lidas.

Daniel: Mas quantas páginas tem o livro?

Professor: Quantas páginas tem o livro?

Daniel: Sim, temos de saber quantas páginas tem o livro?

Professor: Mas para que precisas de saber o número de páginas do livro? Daniel lê lá novamente a pergunta do problema.

Daniel: “Que parte do livro já leu o David?”

Professor: Então...onde é que fala em páginas? O problema pergunta o quê?

Daniel: ...pergunta a parte do livro...Ah! Agora percebo!

Reforcei que o objetivo da questão era descobrir a parte do livro que tinha sido lida, e não o número de páginas. Aproveitei para falar sobre o significado da palavra "fração", enquanto parte ou porção de um todo. Foi interessante ouvir Daniel dizer, "´Ah! Agora percebo..." mostrando que tinha compreendido o porquê de se atribuir o nome de "fração" à representação fracionária.

A questão 3 difere das duas anteriores pelo facto de ser necessário adicionar duas frações com denominadores diferentes: um quarto e quatro oitavos. Com um contexto semelhante à questão 2, os alunos compreenderam que tinham de representar a fração lida, e não o número de páginas lidas.

Todos os alunos recorreram à representação da barra numérica para encontrar a solução da questão (ver figura 40).

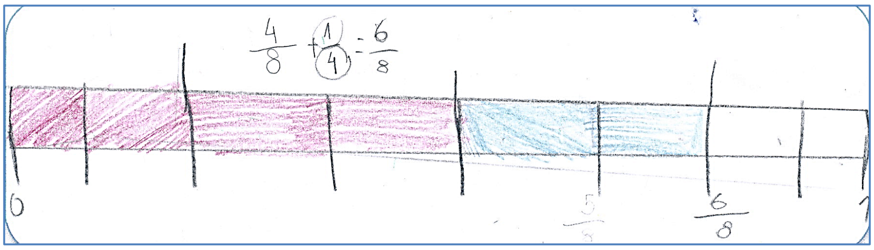


Figura 40 – Representação de Ana para a resolução da questão 3.

Pelo exemplo da figura 40 é possível observar que Ana conseguiu representar corretamente ambas as frações, tendo também escrito a expressão numérica correspondente. Antes de iniciar a questão, solicitou a minha ajuda para confirmar que primeiro teria de dividir a barra numérica em quatro partes e posteriormente em oito. Ana, quando representou a expressão numérica, escreveu primeiro a fração com o denominador maior seguida da fração com o denominador menor:

Ana: Professor, já fiz a barra e já dividi, mas então qual marco primeiro na barra?

Professor: Então Ana, pensa lá...lembra-te do que falámos nas outras aulas sobre a adição de frações com denominadores diferentes, o que é que representa o denominador?

Ana: Sim...Então vou representar primeiro um quarto e depois a outra, como são menos partes é mais fácil dividir.

Professor: E depois?

Ana: Depois, é mais fácil porque já está dividida em quatro partes e é mais fácil dividir em oito.

Ana compreendeu que a fração com o denominador menor era aquela pela qual devia iniciar a divisão da barra numérica, pois apenas necessitava de dividir a barra em quatro partes. E partindo desta divisão seria mais fácil representar a fração quatro oitavos.

Alexandra tentou representar a barra numérica, não a terminou e acabou por ficar incompleta. (ver imagem 41).

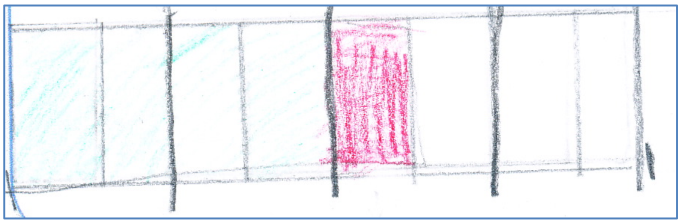


Figura 41– Representação de Alexandra para a resolução da questão 3.

Professor: Alexandra és capaz de me explicar o que estás fazer?

Alexandra: Sim, estou a pintar as frações.

Professor: E és capaz de me explicar o teu desenho?

Alexandra: Dividi em oito partes, assim posso pintar os quatro oitavos. Depois dividi em quatro para poder pintar um quarto.

Alexandra dividiu bem a unidade, representando de forma correta os denominadores. No entanto, teve dificuldade em representar a fração um quarto embora tivesse representado bem a fração quatro oitavos. Em parte, isto deveu-se ao facto de ter dividido inicialmente a unidade em oito partes. Pois, se tivesse dividido primeiro em quatro possivelmente já não teria cometido este erro. Acabei por orientar Alexandra a fim de a levar a compreender que tinha pintado um oitavo e não um quarto.

Professor: Muito bem, mas olha lá é que pintaste mesmo um quarto da imagem?

Alexandra: Sim...está aqui um quarto...

Professor: Mas olha lá com atenção, este pequeno retângulo que pintaste, é um de quantos iguais?

Alexandra: ...de oito?

Professor: Certo, é um de oito! Então, em fração podemos dizer que é...?

Alexandra: Um oitavo?

Dois alunos representaram, na barra numérica, primeiro a fração quatro oitavos e só depois a fração um quarto. Durante a discussão desta questão aproveitei para reforçar com a turma que a adição de frações, tal com acontece com os números naturais, é uma operação comutativa. E que era indiferente representar primeiro a fração quatro oitavo ou a fração um quarto.

Teresa sentiu dificuldade na representação das frações. Dividiu incorretamente a barra numérica em sete partes tendo pintado um sétimo, que deveria ser um oitavo, tendo posteriormente pintado a restante barra numérica. (ver figura 42)

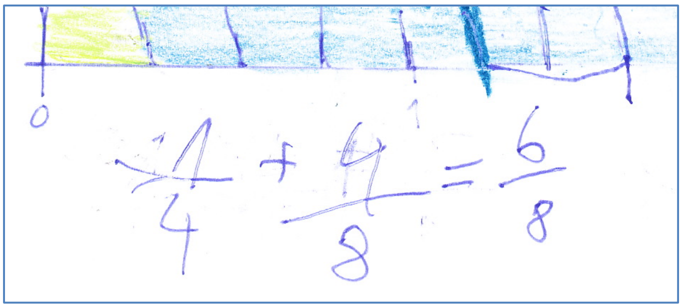


Figura 42– Representação de Teresa para a resolução da questão 3.

Professor: Teresa, és capaz de me explicar o que fizeste?

Teresa: Sim, são as frações. Adicionei as frações.

Professor: Então e com é que começaste? Qual foi a fração que representaste primeiro?

Teresa: Foi um quarto.

Professor: A amarelo?

Teresea Sim.

Professor: Então mas em quantas partes é que dividiste a barra numérica?

Teresa: Dividi em oito.

Professor: Então vamos lá contar...

Neste momento pude verificar que Teresa contou não os espaços mas sim as marcações da barra, tendo começado no zero. Ajudei Teresa a compreender que contamos os espaços entre as marcações. Ao contar, verificou que tinha dividido a barra em sete partes.

Teresa: Pois é, está dividida só em sete partes.
Professor: Porque é que dizes só?
Teresa: Porque deviam ser oito.
Professor: Como sabes que deviam ser oito partes?
Teresa: Porque está aqui. (aponta para o denominador da fração)

Teresa mostrou compreender que devia ter dividido a barra em oito partes iguais, pois o denominador assim o indicava. Ajudei Teresa na resolução da questão levando-a a compreender a relação entre os denominadores das duas frações e de que forma é que se deveria dividir corretamente a barra numérica.

É possível verificar que os alunos apresentaram ainda dificuldade na representação das frações na barra numérica, assim como na divisão da barra numérica, não tendo ainda consolidado a adição de frações com denominadores diferentes.

A alínea 3.1 não foi fácil pois os alunos tinham de verificar que a parte pintada nas duas barras numéricas era igual. Para isso, as suas representações teriam de apresentar algum rigor. Nesta questão, os alunos, recorreram à representação da barra numérica. Desenharam duas barras numéricas separadas e representaram as frações em cada uma.

Eduardo utilizou o comprimento do quadrado para desenhar as duas barras numéricas, tendo efetuado corretamente a sua divisão. Desta forma conseguiu verificar que os dois alunos tinham lido a mesma parte do livro. (ver figura 43)

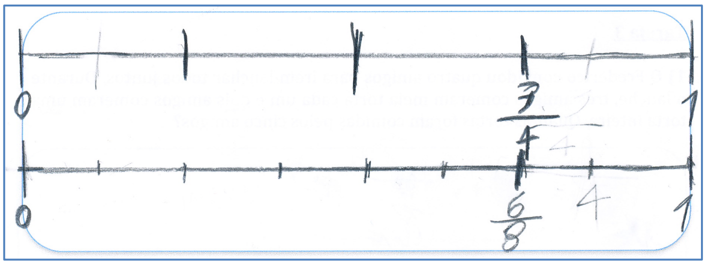


Figura 43- Representação de Eduardo para a resolução da alínea 3.1

Ana utilizou uma estratégia semelhante à de Eduardo, conseguindo assim uma referencia para a representação igual das duas barras numéricas (ver figura 44)

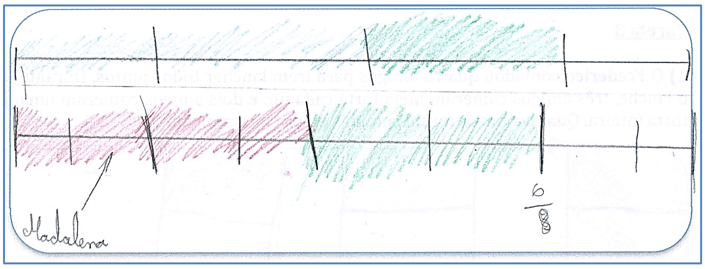


Figura 44 – Representação de Ana para a resolução da alínea 3.1

Alexandra, embora não tivesse desenhado as barras numéricas com a mesma altura, efetuou corretamente a sua divisão, conseguindo chegar à solução da questão, verificando que ambos leram a mesma parte do livro (ver figura 45)

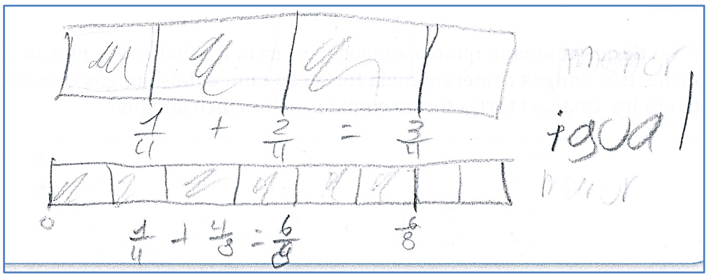


Figura 45– Representação de Alexandra para a resolução da alínea 3.1.

Os alunos que tiveram dificuldade em chegar à solução foi porque não representaram as barras numéricas com o mesmo comprimento. O problema que se levantou foi que a divisão não estava rigorosa e por isso tiveram dificuldade em visualizar a equivalência (ver figura 46).

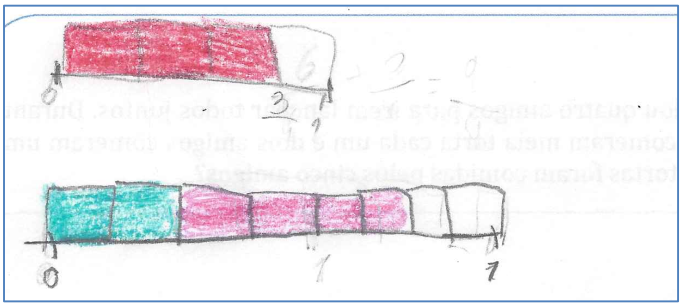


Figura 46– Representação de Maria para a resolução da alínea 3.1.

Maria: Elas não leram o mesmo...

Professor: Então porquê? Como é que viste isso?

Maria: Porque não são iguais.

Professor: O que é que não são iguais?

Maria: As duas barras.

Professor: Mas olha lá, os livros que eles leram eram diferentes?

Maria: Não, eram iguais

Professor: Então...mas fizeste as tuas barras diferentes...o que é deveria representar cada uma das tuas barras numéricas?

Maria: Pois...deviam ser os livros e assim deviam ser do mesmo tamanho.

Este discussão mostrou que Maria, embora tenha representado as duas barras numéricas, não conseguiu compreender que ambos os amigos tinham lido a mesma parte do livro. Isto aconteceu por não ter desenhado as barras numéricas com o mesmo tamanho, não tendo assim forma de comparar as duas frações. No final do diálogo é possível verificar que compreendeu que, para comparar a parte lida dos dois livros, as suas duas unidades deveriam ser iguais.

Andreia dividiu corretamente as duas barras numéricas tendo representado as frações. Identificou cada uma das barras com os nomes dos respetivos leitores, associando assim a barra numérica ao leitores. (ver figura 47)

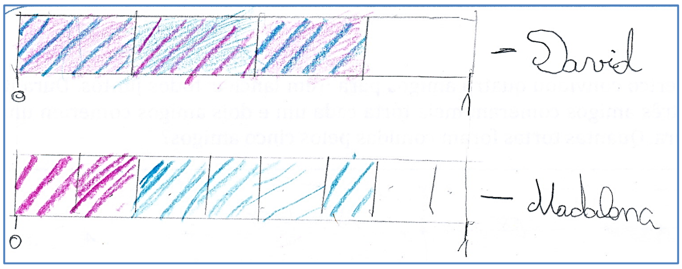


Figura 47– Representação de Andreia para a resolução da alínea 3.1

Durante a discussão desta questão, aproveitei para recordar com os alunos a equivalência de frações. Foi um exercício interessante pois, de uma forma natural, os alunos que mostraram mais dificuldades perceberam a equivalência de frações.

A questão 4 levantava a mesma dificuldade relativamente à divisão da unidade, apresentando um desafio maior porque tinham de representar a fração três nonos. Durante a resolução, e enquanto apoiava os alunos, pude aperceber-me que estavam com dificuldade na divisão da barra numérica em nove partes iguais, fazendo representações muito irregulares. Pedi-lhes para fazerem uma pausa e mostrei-lhes no quadro a divisão da barra numérica em três partes. À semelhança do que já tinha feito, perguntei-lhes de que forma, a partir da divisão já efetuada, é que poderíamos obter as nove partes.

> Professor: Vamos lá recordar o que já fizemos anteriormente Está aqui a barra numérica dividida em três partes. Vamos lá pensar, como é a que podemos dividir em nove partes a partir destas (divisões)? Sérgio?
>
> Sérgio: ...não sei...
>
> Professor: Então vamos lá relembrar como fizemos para dividir em quatro partes e em oito...

Como estavam com dificuldade em visualizar, recorri à divisão em quartos e depois em oitavos.

> Professor: Então agora já são capazes de olhar para aqui e perceber como é que podemos encontrar as nove partes iguais...
>
> Ana: Já sei, podemos dividir cada uma dessas partes em três, assim ficam nove.

Ana compreendeu que bastava dividir cada terço em três partes para obtermos a barra numérica dividida em nove partes iguais.

Seguiu-se o seguinte diálogo:

> Daniel: O nove está na tabuada do três.
>
> Professor: Boa Daniel, pois está! E o que é que isso significa, como é que isso nos pode ajudar na divisão da barra numérica?

Daniel: Porque podemos primeiro dividir em três e com o três podemos dividir em nove porque está na mesma tabuada.

Professor: Pois é, isso significa que o nove é múltiplo de três.

E acabei por fazer uma discussão semelhante para a metade e para a quarta parte. Desta forma, os alunos já foram capazes de continuar a questão.

Sete alunos fizeram a divisão da barra numérica e pintaram as frações correspondentes. No entanto, embora lhes tivesse solicitado que escrevessem as frações na barra numérica, a fim de identificar as partes, não o conseguiram fazer pois estavam demasiados focados na divisão das partes que tinham de pintar.

Andreia e Catarina representaram as frações de forma diferente, tendo Catarina pintado em primeiro lugar a fração três nonos (ver figuras 48 e 49).

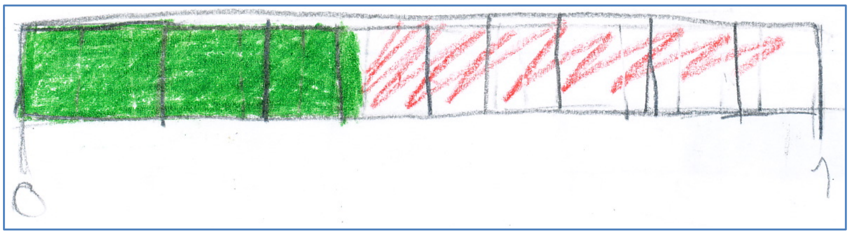


Figura 48– Representação de Catarina para a resolução da questão 4.

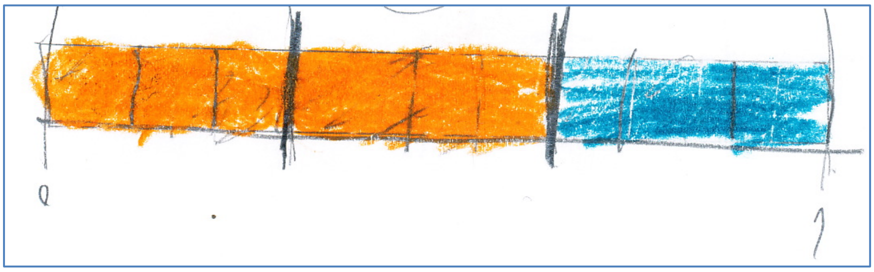


Figura 49– Representação de Andreia para a resolução da questão 4.

Catarina preferiu dividir logo a barra numérica toda e depois pintar as frações correspondentes.

Professor: Catarina, o que é isso que pintaste de verde?

Catarina: Professor, é a fração três nonos.

Professor: E a vermelho?

Catarina: É a outra fração, dois terços.

Professor: Porque é que pintaste primeiro a fração três nonos?

Catarina: Porque assim dividi já tudo e depois é mais fácil pintar.

Professor: E qual foi o resultado que descobriste?

Catarina: Foi nove nonos.

Durante a discussão pedi a Catarina para vir mostrar a sua resolução à turma:

Professor: Conseguem ver como é que a Catarina resolveu? Catarina, que parte da caderneta é que ficou completa?

Catarina: nove nonos?

Professor: Nove nonos...o que esta fração me diz...

Alexandra: Que é a barra toda, que ela fez a caderneta toda.

Alexandra verificou que uma fração em que o numerador é igual ao denominador representa uma unidade.

Professor: Muito bem! Andreia chega aqui, mostra lá aos teus colegas como é que fizeste? O que é que podemos ver?

Eduardo: Que pintaram a mesma parte, está igual.

Professor: É que pintaram igual? Vejam lá com atenção.

Nádia: ...Não! Elas pintaram de maneira diferente...

Professor: Diferente como?

Nádia: Andreia pintou primeiro a fração maior e a Catarina não.

Professor: Boa, bem visto! Trocaram a ordem das parcelas. Então é que podemos concluir alguma coisa, o que é que podemos verificar?

Nádia: O resultado é igual, é como nas contas de somar também é assim.

Nádia tinha acabado de partilhar com a turma a propriedade comutativa da adição, tendo os alunos verificado que, tal como acontece nos números inteiros, a ordem em que se adicionam as parcelas é indiferente pois o resultado não se altera. Exemplifiquei no quadro uma adição com números inteiros para que pudessem verificar, e confirmar, a afirmação de Nádia. Desta forma generalizou esta propriedade para a adição de frações. Nádia conseguiu verificar isso durante a apresentação das resoluções de Catarina e Andreia.

A barra numérica representou uma ferramenta muito importante para que os alunos conseguissem adicionar frações. Desta forma compreenderam, porque conseguiram visualizar, a adição de frações com diferentes denominadores. Para a resolução da primeira questão vários alunos ainda recorreram à representação pictórica.

Nesta aula, ainda foi possível observar algumas dúvidas relativamente à utilização da barra numérica. Embora os alunos já se sintam mais seguros na sua utilização, ainda pude verificar, por exemplo, divisões irregulares da barra. Um aluno fez um erro bastante comum quando se trabalha com a reta numérica, em vez de contar os espaços entre as marcações, acabou por contar as próprias marcações, resultando em divisões erradas. Devido a isto apresentavam posteriormente dificuldade na resolução das questões, pois não conseguiam representar convenientemente as frações. Quatro alunos apresentaram duas estratégias diferentes para superar esta dificuldade: (i) utilizaram como referência, para desenhar o comprimento da barra, os limites do retângulo que tinham disponível para resolver o exercício e (ii) recorreram a uma régua para efetuar a divisão em partes iguais. Na segunda questão alguns alunos pensaram que era para apresentar a resposta em número de páginas, não compreendendo que era para representar apenas a parte lida do livro. Este foi um raciocínio natural por parte dos alunos, sendo o contexto um livro seria natural que pensassem na quantidade de páginas lidas. Outra dúvida surgiu na questão 3.1 em que tinham de representar duas barras numéricas e depois compará-las, compreendendo que não podiam comparar unidades diferentes. Era importante que desenhassem as barras do mesmo tamanho, pois doutra forma não conseguiriam visualizar que, embora estivessem divididas num número de partes diferente, a parte pintada era igual nas duas barras, representando assim a mesma fração da unidade. Os alunos poderiam então visualizar as duas frações equivalentes. Na questão 4 as dificuldades prenderam-se com a divisão da barra numérica onde era solicitado que a dividissem em nove partes iguais. Relembrei a divisão em quartos a partir da metade, o que os ajudou a compreender como é que poderiam dividir a barra numérica nas nove partes iguais.

Foi possível verificar mais segurança por parte dos alunos na utilização da barra numérica. Alguns, inclusive, já arriscam escrever a expressão numérica junto da barra numérica correspondente. A possibilidade de visualização é o que mais estimula os alunos pois por varias vezes se referem "às partes pintadas". Ainda assim, optei por manter a utilização da barra numérica para adicionar frações, em vez de progredir para a reta numérica, pois pelas intervenções dos alunos verifiquei que o trabalho com a barra numérica não estava suficientemente consolidado. Seria arriscado efetuar a adição de frações na reta numérica sem os alunos compreenderem bem a adição de frações na barra numérica.

Foi ainda possível verificar que conseguiram efetuar mais uma generalização, desta vez referente à propriedade comutativa da adição de números naturais, generalizando-a para a adição de frações. Isto só foi possível graças à representação de duas alunas, em que Andreia trocou a ordem das frações quando as representou na barra numérica. Os alunos puderam assim verificar que se pode aplicar a propriedade comutativa à adição de frações com diferentes denominadores.

4ª Aula - Adição de números decimais.

Dei inicio a esta aula com uma Tarefa de Consolidação sobre a adição de frações. Fiz uma tarefa composta apenas por uma questão com seis adições de frações para representar na barra numérica, em que três tinham como resultado números maiores que a unidade e as outras três representavam números menores ou iguais à unidade. Duas frações tinham denominadores iguais e as outras quatro tinham denominadores diferentes. Dei dez minutos para resolverem a tarefa. Trabalharam com atenção e levantaram muitas dúvidas. Dois alunos manifestaram dúvidas relativamente à divisão da barra numérica nas expressões que envolviam a adição de frações com denominadores diferentes. Optei por não colocar denominadores com valores muito altos para lhes dar mais confiança na utilização da barra numérica. Foi possível verificar que os alunos trabalharam com mais autonomia tendo conseguido realizar as adições propostas, sem cometer erros mesmo as que envolviam a adição de frações com denominadores diferentes.

O segundo momento da aula tinha como objetivo fazer uma introdução aos números decimais a partir das frações decimais. Apresentei uma tarefa composta por três questões (ver anexo15). A primeira tinha duas alíneas e a segunda uma alínea. O objetivo desta tarefa era levar os alunos a relacionar as frações decimais e os números decimais, assim como rever o significado de número decimal. A primeira questão era composta por um texto em que os alunos tinham apenas de preencher os espaços em branco. Pretendia relacionar a representação fracionária com a representação decimal. Para isso os alunos visualizavam um bolo dividido em dez partes. Era solicitado que escrevessem o que representava cada uma dessas partes, primeiro em fração e depois em número decimal. Pelas características da turma, optei por trabalhar apenas décimas e centésimas, com o objetivo de consolidarem bem estes conceitos. Os alunos resolveram bem a primeira questão, tendo inclusive apresentado corretamente a representação 0,1 e 0,01, como uma décima e uma centésima respetivamente. (ver figuras 50 e 51)

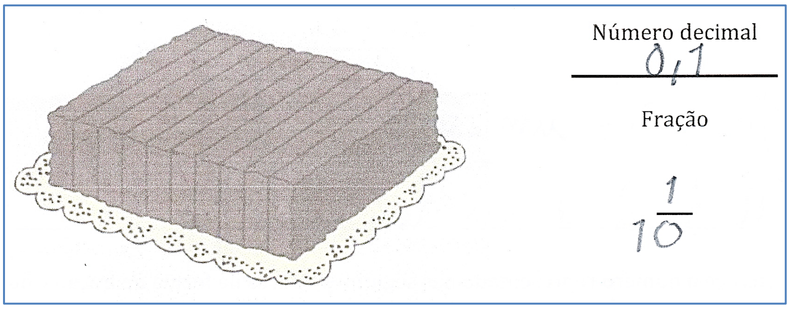


Figura 50– Representação de Luísa para a resolução da questão 1.1.

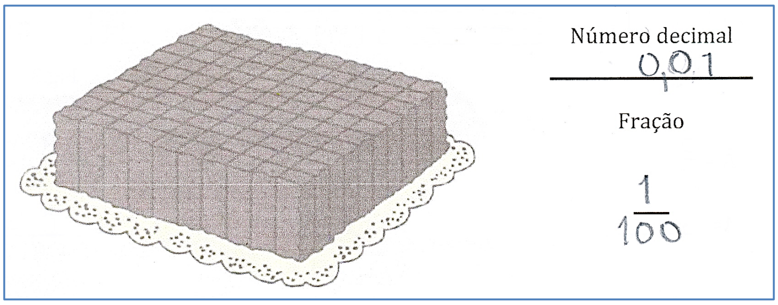


Figura 51– Representação de Luísa para a resolução da questão 1.2.

A segunda questão levantou algumas dúvidas. Era pedido que relacionassem as décimas e centésimas numa representação pictórica. Havia uma primeira figura, representando um quadrado dividido em cem partes iguais, uma segunda figura representando um retângulo dividido em dez quadrados iguais, figura essa que representava uma décima da primeira figura, e por fim uma terceira figura que representava a imagem de um quadrado que seria uma centésima parte da primeira figura. (ver anexo 16)

Antes de iniciarem a resolução fizemos novamente uma revisão sobre o significado do numerador e do denominador. Os alunos eram livres de utilizar as representações que achassem mais convenientes para responder à questão.

Quando deram início à resolução desta questão, reparei que vários alunos começaram a contar o número de quadrados da figura 1, não tendo a perceção de que seriam cem. Isto representou um entrave à resolução da questão pois não conseguiam avançar. Quando me apercebi disto fiz uma pequena discussão para perceberem que não é necessário contar os quadrados.

Professor: Tomem lá atenção, parem lá de contar os quadradinhos. Pensem lá, sem contar, quantos quadradinhos é que vos parece que estão aí?

Sérgio: ...eu acho que são cem.

Professor: Boa! Então e agora como é que posso confirmar isso sem os contar um a um? Alguém se recorda como se faz?

Daniel: Acho que sei...podemos multiplicar os quadrados de baixo pelos do lado.

Professor: É isso mesmo! Ouviram? Quantos quadrados tenho numa fila?

Daniel: Há dez.

Professor: Então e quantas filas é que temos?

Daniel: Também há dez.

Professor: Então, Sérgio, eu estou a repetir dez vezes um conjunto de quantos quadradinhos?

Sérgio: De dez.

Professor: Muito bem, Sérgio, então como é que fica a multiplicação?

Sérgio: É dez vezes dez...que dá cem!

Esta discussão foi apoiada pela imagem que estava a ser projetada, a fim de os alunos irem visualizando os passos que o Daniel e o Sérgio iam partilhando. Foi importante rever com a turma este conceito, pois é útil quando falar com os alunos sobre a milésima.

Assim, foi possível verificar três representações diferentes: (i) fracionária, (ii)pictórica, (iii) verbal e (iv) decimal (ver figuras 52, 53, 54 e 55).

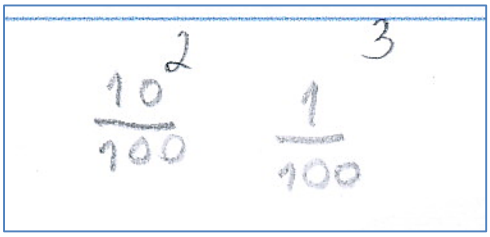


Figura 52– Representação em fração de Eduardo para a resolução da questão 2.

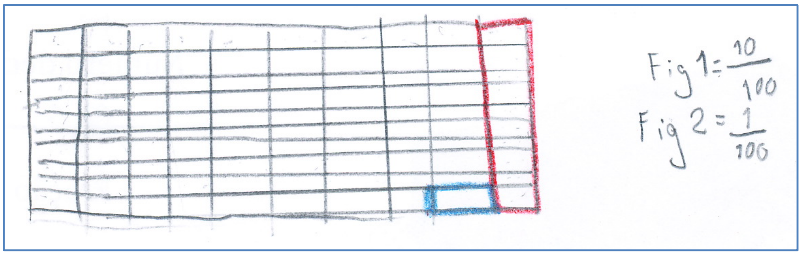


Figura 53– Representação pictórica e fracionária de Ana para a resolução da questão 2.

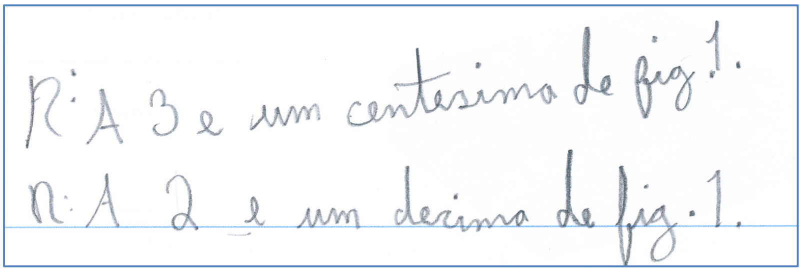


Figura 54– Representação verbal de Andreia para a resolução da questão 2.

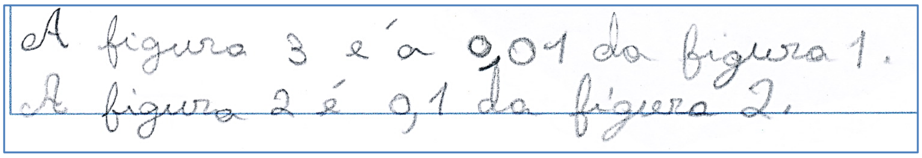


Figura 55– Representação decimal de Catarina para a resolução da questão 2.

Foi possível verificar que os alunos recorreram a diferentes representações para responder à questão. Pedi-lhes para apresentarem as suas resoluções aos colegas e fiz a discussão com o objetivo de os levar compreender que é possível responder de várias formas a uma mesma questão.

Professor: Vamos lá olhar com atenção para as respostas dos vossos colegas. Como é que fez a Catarina?

Alexandra: Escreveu com palavras.

Professor: Só?

Alexandra: E também com números.

Professor: Mas que tipo de números?

Daniel: São números decimais.

Os alunos verificaram que Catarina recorreu à representação decimal para dar a sua resposta.

Professor: E então aqui a resposta da Ana? Luísa?

Luísa: Ela utilizou os quadrados, desenhou os quadrados. E também as frações

Professor: Muito bem Luísa, então a Ana fez primeiro um desenho, fez os quadrados para a ajudar na resposta. E também escreveu as frações.

Desta vez Luísa partilhou com a turma a utilização da representação pictórica e fracionária de Ana. Ana suportou-se na representação pictórica para depois escrever as frações.

Professor: Então e a Andreia?

Andreia: Eu fiz só com palavras. Não escrevi números.

Professor: Muito bem, então como podem ver também podemos responder apenas com palavras.

Daniel: Então mas não é preciso escrever os números?

Professor: Alguém quer responder ao Daniel?

Nádia: Ó Daniel, ela não escreveu números escreveu palavras mas é a mesma coisa!

Os alunos puderam verificar que para responder a uma questão nem sempre é necessário recorrer a números, e que por vezes também se podem utilizar palavras.

Professor: Então e a representação do Eduardo? Que vos parece?

Maria: São frações, a Ana também fez assim mas também fez os quadrados...

Professor: Então agora pergunto: os vossos colegas responderam todos da mesma forma?

Aqui os alunos dividiram-se entre "sim" e "não".

Professor: Então, Nádia queres explicar o teu "não"?

Nádia: É assim: eles responderam igual mas escreveram de maneira diferente.

Professor: Queres explicar isso melhor à turma?

Nádia: A resposta deles é a mesma, a resposta está bem em todos, mas eles escreveram e desenharam de maneiras diferentes.

Nádia verificou que podemos recorrer a diferentes representações para responder a uma questão, e que neste caso foram quatro representações diferentes.

Aproveitei duas representações, a de Ana e a de Andreia, para levantar uma nova discussão. Neste caso relativamente à figura dois (ver figuras 48 e 49).

Professor: Há aqui um pormenor que acho que vocês não repararam...já viram como é que as vossas colegas relacionaram a figura dois com a figura um? Ana o que é que escreveste?

Ana: Eu escrevei que eram dez de cem.

Professor: Muito bem, dez centésimos. E tu, Andreia?

Andreia: Eu não, eu escrevi que era um décimo.

Professor: Interessante...então é que apenas uma das respostas está correta? Ou é que estão as duas?

Teresa: Eu fiz como a Ana. A Ana tem bem por que são dez de cem.

Os alunos não conseguiram de imediato visualizar que as duas frações eram equivalentes representando a mesma parte da unidade. Mais alguns alunos apoiaram o comentário de Teresa, não conseguindo visualizar a fração um décimo. Projetei as duas figuras e continuei a discussão. Interessava-me que os alunos compreendessem que as duas frações (um décimo e dez centésimos) estavam corretas, pois são equivalentes.

Professor: Olhem lá para aqui com atenção. [...] Todos concordam que esta figura tem dez quadrados dos cem. Certo? Dizemos então que é um centésimo desta. Mas vamos lá pensar de que forma é que pode ser um décimo?

Eudardo: Acho que já sei, se dividir o quadrado grande, a primeira imagem, em dez partes eu posso desenhar dez barras iguais a essas lá dentro.

Professor: É isso! Queres vir ao quadro desenhar? Compreenderam?

Eduardo foi um dos alunos que tinha referido que a fração um décimo não estaria correta. Ao observar com atenção apercebeu-se que podíamos dividir a figura 1 em dez partes iguais. Desta forma, a figura 2 seria um décimo da figura 1. E ao desenhar no quadro todos puderam ver a fração. Houve ainda um outro comentário:

Ana: Mas isso é como na barra numérica, esse quadrado está dividido em cem quadradinhos mas eu posso dividi-lo como quiser.

Professor: Muito bem Ana! Ouviram. Também fizemos isto na barra numérica

Ana: É o denominador que divide o quadrado grande e aí foi em dez partes.

Ana, porque na aula anterior tinha representado, na barra numérica, primeiro uma fração menor (dois nonos) e depois uma maior, (um terço), conseguiu visualizar com mais facilidade os dez décimos na figura 1. O último comentário foi importante porque mostrou à turma que, independentemente do número de partes em que se encontra dividida a unidade, a prioridade deve ser atribuída ao denominador da fração que queremos representar. Este é um aspeto que os alunos têm mostrado alguma dificuldade em consolidar.

Em relação à terceira questão, esta pretendia que, a partir de uma representação pictórica, os alunos conseguissem escrever a respetiva fração e número decimal e que conseguissem relacionar as duas representações. A primeira figura apresentava um quadrado dividido em dez partes iguais em que estavam pintadas cinco. Os alunos não apresentaram dificuldade em escrever, tanto em fração como em número decimal a parte pintada. Houve cinco alunos que escreveram $\frac{1}{2}$, tendo os restantes escrito $\frac{5}{10}$. O número decimal foi escrito de forma igual por todos (ver figuras 56 e 57)

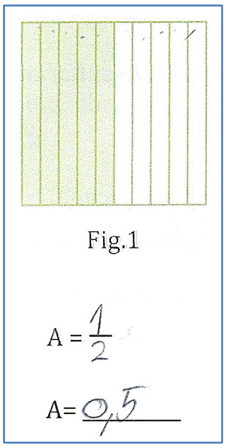


Figura 56– Resposta de Daniel à questão 3.

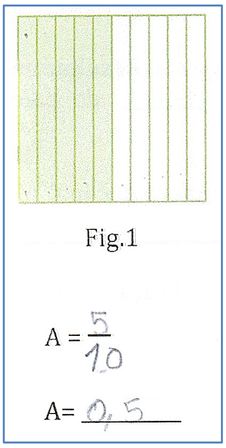


Figura 57– Resposta de Nádia à questão 3

Professor: Já viram que escreveram a fração um meio e houve quem escrevesse cinco décimos. Estão as duas representações corretas ou só apenas uma?

Eduardo: Eu acho que estão as duas bem.

Teresa: Eu acho que não, só os cinco décimos é que estão bem...Ah!...Mas a metade também...

Teresa, enquanto fazia o seu comentário apercebeu-se que estava também pintada metade da figura 1.

Professor: Então Teresa? Parece-me que descobriste qualquer coisa...

Teresa: Sim está pintada metade da figura.

Professor: Pois está, então e o que é que podemos concluir em relação às duas frações?

Eduardo: Elas são equivalentes...

Professor...boa!

Eduardo: ...porque cada barra é um de dez, estão cinco pintadas, por isso é que é cinco décimos, mas também está pintada metade da figura por isso podemos escrever um meio.

Eduardo completou a intervenção de Teresa lembrando em que as duas frações representavam a mesma parte da unidade. Ainda aproveitámos para discutir e relembrar as frações equivalentes. Aproveitei, como sempre, para falar da importância do denominador, pois é o número representado que indica em quantas partes se divide a unidade. Relativamente à escrita do número decimal os alunos não revelaram dúvidas. As dúvidas surgiram, ou melhor, os alunos nem foram capazes de responder, quando os questionei acerca da existência de uma vírgula no meio do número.

Professor: Eduardo, há pouco disseste, e muito bem, que este quadrado está dividido em cinco barras iguais, em cinco partes iguais, quantas é que estão pintadas? Sérgio?

Sérgio: Estão cinco.

Professor: Muito bem, agora eu pergunto, o que é a minha unidade?

Sérgio: É o quadrado todo.

Professor: Muito bem, e está pintada a unidade toda?

Sérgio: Não, só estão pintadas cinco partes.

Professores: Então se não está pintada a unidade toda onde é que isso aparece aqui no número? (0,5)

Catarina: É o zero...?

Este passo foi importante, porque a turma não tinha a noção de que a vírgula separava a parte inteira da parte decimal. Ou melhor eles já conheciam os termos "parte inteira" e "parte decimal" mas não sabiam o que isso representava concretamente. Fiz a mesma discussão para o algarismo cinco (0,5). Os alunos ficaram a perceber porque é que existe aquela separação.

Professor: Então e o cinco? Ana, o que é que te parece?

Ana: São as cinco barras pintadas?

Professor: É isso mesmo. Então vamos lá pensar, porque é que o cinco aparece à direita da vírgula e o zero à esquerda?

Ana: Acho que já sei, o zero é porque não está tudo pintado, não está pintada a unidade toda, e o cinco é porque estão as cinco partes pintadas.

Professor: Certo, então que conclusão é que posso tirar para todos os números que apresentam vírgulas? Quando vejo um número com vírgulas o que eu posso pensar logo em relação aos números que aparecem à direita da vírgula e os que aparecem à esquerda da vírgula?

Ana: Quando está tudo pintado aparece à esquerda, quando está uma parte da unidade sem estar a unidade toda pintada aparece à direita.

Desta forma Ana compreendeu o significado da vírgula num número decimal. Discutimos ainda acerca da leitura dos números cinco décimas (0,5) e cinco décimos ($\frac{5}{10}$), para que os alunos pudessem compreender que representam as mesma parte da unidade, sendo inclusive as leituras semelhantes.

A figura dois apresentava duas unidades em que cada uma estava dividida em dez partes iguais. Apresentava uma unidade inteira pintada mais oito décimas de outra. Nesta questão, houve sete alunos que representaram a fração $\frac{18}{20}$, o que mostra ainda as dúvidas que existem em relação à representação de frações impróprias. Relativamente à escrita do número decimal, um aluno escreveu 1,18; todos os restantes alunos escreveram 1,8 (ver figura 58).

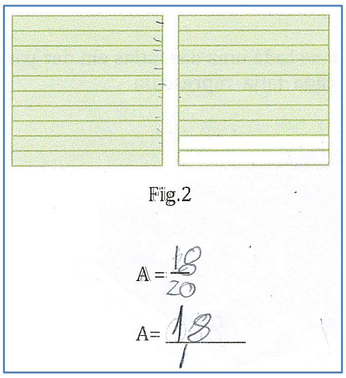


Figura 58– Representação de Maria. Resolução da questão 3.

A discussão desta figura foi importante para que os alunos compreendessem a importância da identificação da unidade. Guiei os alunos para que conseguissem perceber o que era a unidade. Para isso, mostrei novamente a primeira questão onde estava representado o bolo. Perguntei-lhes, naquele caso, o que era a unidade, ao que os alunos prontamente responderam que era o bolo inteiro. De seguida estabeleci a relação entre as duas representações.

Professor: Então já conseguimos perceber o que é a unidade, que o denominador nos indica em quantas partes está dividida cada unidade. Então cada um destes dois quadrados podemos imaginar que é o quê?

Nádia: Um bolo!

Professor: Muito bem, então cada quadrado, ou cada bolo, está dividido em quantas partes?

Nádia: Em dez.

Professor: Muito bem, então se cada unidade está dividida em dez partes, o que é que vamos escrever no denominador da fração?

Nádia: Dez.

Professor: Exatamente, e no numerador?

Nádia: Dez?

Nádia acompanhou bem a discussão acerca do denominador mas teve dificuldade em compreender que o numerador dizia respeito à totalidade das partes pintadas, e não apenas a uma das unidades.

Professor: Nádia, se imaginarmos bolos, quantas fatias, por exemplo, é que já foram comidas?

Nádia: Foram dezoito.

Professor: É isso mesmo, dezoito fatias. Então vem lá escrever a fração correta.

Nádia já foi capaz de escrever corretamente a fração $\frac{18}{10}$. Quando Nádia escreveu a fração ouviu-se um “Ah!” geral. Mostraram assim que, quase na generalidade, ainda não tinham compreendido que o numerador apenas se refere à divisão de cada uma das unidades, caso haja mais do que uma. Voltei a relacionar a representação em fração com a representação decimal fazendo uma discussão semelhante à realizada para a primeira figura. Desta vez apresentei uma animação mais simples para consolidar bem a utilização da vírgula apresentando um unidade dividida em dez partes e representando em cada parte 0,1. Pedi a Eduardo para vir ao quadro adicionar as dez centésimas. Ao que chegou ao resultado 1,0.

Professor - Eduardo, és capaz de me ler esse resultado? Quem ajuda o Eduardo? Andreia...

Andreia - São 10...

Professor- Dez quê Andreia? Olha, pensa com calma, repara na figura do quadro. Pintámos 10 quê?

Andreia - Dez décimas?

Professor - Exatamente, Andreia! Então Eduardo e agora, tal como disse a Andreia, dez décimas todas juntas faz o quê?

Eduardo - Uma unidade?

Discutimos a representação 1,0 como sendo uma unidade ou dez décimas. Voltei a fazer referência ao significado do 1 (unidade) e do 8 (décimas) relacionando-a também com a representação $\frac{18}{10}$.

Em relação à última figura, que estava dividida em cem partes, os alunos foram capazes de representar sem grande dificuldade a fração. As dúvidas surgiram, mais uma vez, na representação decimal. Apenas três alunos escreveram corretamente a parte pintada que correspondia a 0,29. Um aluno escreveu 0,029 e os restantes 2,9 (ver figura 59).

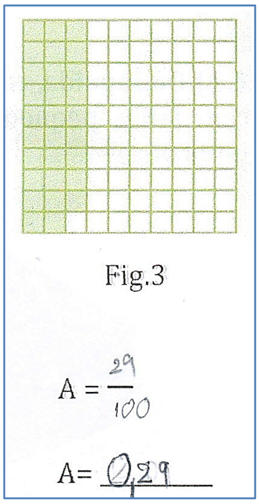


Figura 59– Representação de Maria, relativamente à questão 3.

Voltei a projetar uma animação, desta vez para fazer referência às centésimas, para que os alunos pudessem visualizar claramente o seu significado.

Voltei à figura dividida em cem partes iguais e, começando pelas unidades, fomos verificando que parte estava pintada.

> Professor - Temos uma unidade inteira pintada, Maria?
>
> Maria - Não.
>
> Professor -Quem se lembra em quantas partes podemos dividir a unidade... em quantas é que dividimos há pouco a unidade?
>
> Daniel - Em dez.
>
> Professor - Muito bem, e cada uma dessas partes chamava-se?
>
> Alexandra - Décima.
>
> Professor - Boa, então Alexandra, quantas décimas completas tenho pintadas?
>
> Alexandra - Três.
>
> Andreia - Não, são só duas. A última não está completa.
>
> Professor - É isso mesmo, consegues ver Alexandra? Só temos duas décimas completamente pintadas.

E representei no quadro 0,2. Desta forma os alunos iriam acompanhado a formação do número decimal, compreendendo também o valor de posição de cada algarismo.

> Professor - Então e como é que agora posso representar a parte que falta?
>
> Nádia - Estão nove pintadas.
>
> Professor - Nove quê?
>
> Nádia - Nove quadradinhos desses.
>
> Professor - É isso, então e o que é cada um destes quadradinhos em relação à unidade toda, como é que lhes chamamos.
>
> Eduardo - São centésimas.
>
> Professor - Então quantas centésimas temos pintadas, Nádia?
>
> Nádia - Temos nove.
>
> Professor - Então quer dizer que temos então zero unidades, duas décimas completas e nove centésimas.

Pelas intervenções dos alunos, percebi que compreenderam a representação dos números decimais, assim como o valor de posição das décimas e das centésimas.

No entanto, não ficou totalmente consolidado. Centrei parte da discussão na relação entre os números decimais e as frações decimais, pois é uma parte importante que os alunos compreendam a relação entre as duas representações.

Esta aula teve como tema central realizar uma revisão aos números decimais relacionando-os com as frações decimais. Na resolução da segunda questão foi possível verificar diferentes representações por parte dos alunos: (i) pictórica, (ii) fracionária, (iii) verbal e (iv) decimal. Esta variedade de representações permitiu uma discussão interessante, pois os alunos perceberam que é possível fazer referência a um mesmo número através de diferentes representações. Ao longo da tarefa a representação pictórica esteve sempre presente servindo de suporte para a compreensão de outras representações como a fracionária e a decimal.

Um erro, ou dúvida, inicial dizia respeito à representação decimal, em que os alunos conheciam alguma terminologia associada, como "parte inteira" e "parte decimal", mas não sabiam bem o que isso representava. Outra dúvida importante, que surgiu nesta aula, foi relativamente às frações impróprias, as quais representam uma parte maior que a unidade. Foi possível verificar um erro comum que surge quando os alunos tomam contacto inicial com este tipo de fração escrevendo no denominador o total de partes divididas, relativamente ao total de unidades, e não o número de partes em que se encontra dividida cada uma das unidades.

5ª Aula - Adição de números decimais - Jogo do *Decimat.*

Esta aula tinha como objetivo desenvolver um jogo relacionado com números decimais: o *Decimat*. Este jogo tem como finalidade ajudar os alunos a compreender o sistema de numeração decimal, assim como a adição de números decimais. O *Decimat* é baseado numa representação retangular a qual se encontra dividida em dez partes iguais, representando as décimas. Por sua vez as décimas podem ser divididas em dez partes, representado as centésimas e por sua vez uma das centésimas pode dividir-se em dez partes, representando desta forma as milésimas (ver figuras 60 e 61).

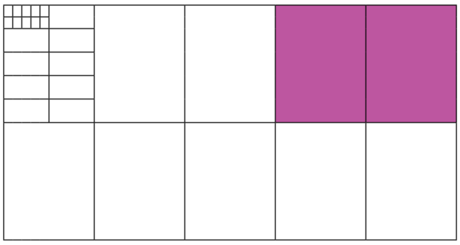


Figura 61– Decimat. Representação de 0,2.

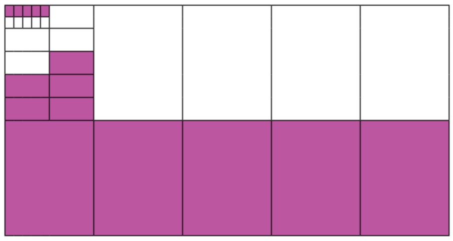


Figura 60– Decimat. Representação de 0,555.

Comecei a aula com uma breve revisão da aula anterior sobre os números decimais e as frações decimais. Ao que os alunos, de uma forma geral, responderam bem às questões colocadas.

Apresentei então o *Decimat.* Comecei pela forma mais simples, em que tinha apenas um retângulo vazio. Referi que aquele retângulo, tal como aconteceu nos bolos da tarefa 4, poderia representar uma unidade. Relembrei com os alunos o significado de unidade, como podendo referir-se a um qualquer objeto (unidades contínuas) ou conjunto de objetos (unidades discretas). Foi importante recordar este aspeto com os alunos porque muitas vezes não têm essa noção, sendo o conceito de unidade associado muitas vezes apenas ao modelo retangular. E senti isso mesmo quando peguei numa caneta e lhes perguntei quantas unidades tinha. Fizeram algum silêncio. Voltei a referir que uma unidade pode ser um qualquer objeto. Já responderam que tinha uma unidade. A compreensão do que representa a unidade é muito importante para depois se compreender com mais facilidade as restantes divisões da unidade como a décima, a centésima e a milésima. Voltámos então novamente ao *Decimat* e ao perguntar o que representava o retângulo já foram capazes de dizer que era uma unidade. Dividi o *Decimat* em dez partes e questionei os alunos sobre o que representava cada uma daquelas partes relativamente ao retângulo todo, ou seja, em relação à unidade. Os alunos responderam corretamente que era uma décima. Seguidamente, dividi cada décima em dez partes iguais. Surgiu o seguinte diálogo.

Professor - Então e agora o que é que temos? Alguém é capaz de responder? Braços no ar...

Ana - Está dividido em dez partes...

Professor- E estas partes são todas iguais?

Ana - Sim

Professor - Boa...então podemos dizer que cada uma destas partes é o quê da unidade? Teresa...

(Silêncio na turma)

Teresa- Cada uma das partes é...

Professor - Vamos lá pensar, se dividir também cada uma destas dez décimas em dez partes iguais, ao todo com quantas partes destas pequenas vou ficar?

Reparei que os alunos, de forma intuitiva, não conseguiram chegar ao valor cem. Pois não estavam a conseguir visualizar todo o *Decimat* em cem partes iguais, tarefa que logicamente não é fácil para eles.

Professor - Teresa, vamos contar. Dez mais dez?

Teresa - Vinte.

Professor - Mais dez?

(até chegarmos aos cem.)

Professor - Então agora já perceberam que esta unidade está dividida em quantas destas partes pequenas? Daniel?

Daniel - Em cem.

Professor - Isso mesmo, então que dizer que podemos chamar a cada uma destas partes...?

Daniel – Centésimas!

Enquanto fazia a discussão com os alunos fui escrevendo os números no quadro de forma de ir recordando o valor de posição do sistema de numeração decimal. Assim, os alunos poderiam ir relacionando os números com as imagens dos *Djcvilhena3recimats.* Quando passei para as milésimas o problema manteve-se. Apresentei inicialmente uma centésima dividida em dez partes e perguntei se alguém, à semelhança da centésima, era capaz de descobrir em quantas partes estava dividida a unidade. Os alunos, intuitivamente, também não conseguiram chegar às mil partes iguais, dando respostas como duzentas, ou quinhentas partes. Para os levar a compreender, apliquei o mesmo processo que utilizei para a centésima, conseguindo assim os alunos compreender a milésima parte da unidade.

Para avaliar a compreensão dos alunos e dinamizar um pouco mais a aula dividi a turma em dois grupos e fiz um pequeno jogo: apresentei alguns *Decimats* e fui perguntando qual era a equipa capaz de descobrir o valor que o *Decimat* representava, assim pude verificar que, de uma forma geral, os alunos compreenderam o conceito do *Decimat*. Após esta revisão passámos para o jogo do *Decimat,* propriamente dito. Chamei dois alunos para fazer uma simulação, seguindo as instruções do jogo. Os alunos agruparam-se em pares, entreguei a folha com o jogo, os dados e deram início ao jogo. Como é natural, as dúvidas foram surgindo à medida que os alunos iam jogando.

Uma dúvida geral que surgiu foi acerca da coluna onde os alunos tinham de ir adicionando os números decimais, sendo que, como erro recorrente, os alunos estavam a adicionar os valores absolutos dos números da parte decimal (ver figura 62).

O que sai nos dados?		**O que está pintado no total?**
Fração	**Decimal**	**Decimal**
2/10	0,2	0,2
4/1000	0,004	0,006
6/10	0,6	0,0012
6/100	0,06	
2/100	0,02	

Figura 62– Jogo do Decimat de Catarina. Adição de números decimais.

Professor: Catarina, és capaz de me explicar como é que estás a fazer o total pintado?

Catarina: Sim, então quando sai no dado em escrevo aqui (0,2) e depois a seguir saíram quatro (0,004) e escrevi...

Professor: Quatro quê?

Catarina Quatro...milésimas?

Professor: Sim, continua...

Catarina: Então, saíram quatro e depois juntei aos dois de antes e deu seis (0,006)

É possível verificar que Catarina ainda não tem interiorizado o valor de posição dos números decimais, pois estava a somar os valores absolutos dos números decimais que iam saindo nos dados. No entanto, estava a pintar corretamente no *Decimat* esses mesmos números. (ver figura 63).

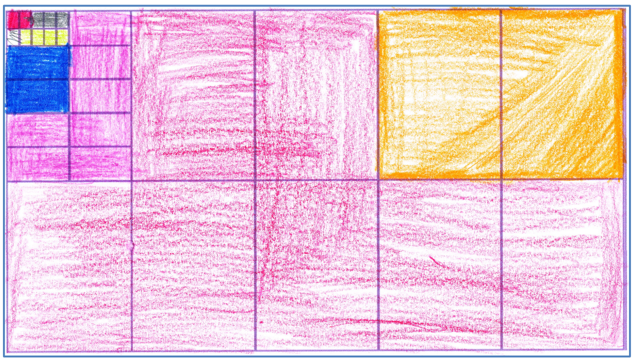


Figura 63– Jogo do Decimat de Catarina.

Embora Andreia estivesse a pintar corretamente o *Decimat* cometeu o mesmo erro que Catarina (ver figura 64)

O que sai nos dados?		O que está pintado no total?
Fração	Decimal	Decimal
1/1000	0,001	0,001
3/1000	0,003	0,004
1/10	0,3	0,007
5/100	0,05	0,0012
2/1000	0,002	0,0014
3/10	0,3	0,0017
1/100	0,01	0,0018

Figura 64– Jogo do Decimat de Andreia. Adição de números decimais.

Ao questionar Andreia para saber de que forma é que estava a obter aqueles resultados, na coluna de registo do total, a sua resposta foi semelhante à de Catarina, acrescentado o seguinte:

Professor: ...e como é que estás a obter estes resultados (total)?

Andreia: Como o primeiro a sair foram as...milésimas(0,001)?

Professor: Sim...

Andreia: Às frações que saem nos dados vou juntando sempre a este...(0,001).

Andreia estava a somar o valor absoluto que saía nos dados ao valor registado anteriormente. Como o primeiro número decimal que saiu foi uma milésima, os restantes valores, Andreia manteve os restantes como milésimas.

Daniel e Carla cometeram um novo erro, relativamente à adição de números decimais, como é possível ver no quadro de registo de Daniel (ver figura 65).

O que sai nos dados?		O que está pintado no total?
Fração	Decimal	Decimal
6/1000	0,006	0,006
2/10	0,2	0,26
5/10	0,5	0,265
5/100	0,05	0,2654
3/100	0,03	0,26543
2/10	0,2	0,265432
3/1000	0,003	0,2654323
2/100	0,02	0,26543232
1/1000	0,001	0,265432321

Figura 65– Jogo do Decimat de Daniel representando a adição de números decimais.

Daniel, que também estava a pintar corretamente o *Decimat*, foi adicionando, os valores absolutos dos dados, à direita do número decimal anterior, desta forma o número de algarismos estava a crescer de linha para linha.

Professor: Então Daniel, como é que estás a adicionar os números dos teus dados?

Daniel: Estou a juntar ao que estava antes...

Professor: Mas não te parece que esses números estão a ficar um pouco estranhos...

Daniel: Sim, já tinha reparado, estão a crescer muito...

Professor: Então o que é que te parece que não estás a fazer bem?

Daniel: Acho que não os estou a juntar bem...

Daniel apercebeu-se que não estava a adicionar corretamente os números decimais e que estavam a ficar demasiado grandes. No entanto, quando lhe pedi para tentar fazer o algoritmo numa folha à parte não foi capaz de alinhar os números de acordo com o valor de posição correto.

O jogo do Decimat foi uma atividade que gerou algumas dúvidas nos alunos, nomeadamente no que respeitou à adição dos números decimais.

Para concluir esta aula, entreguei uma tarefa com cinco *Decimats* (ver anexo 16) para que os alunos escrevessem o número decimal e a fração decimal correspondente. Os alunos conseguiram representar bem as partes pintadas na representação facionária mas surgiram algumas dúvidas na representação decimal, nomeadamente em relação às décimas e às centésimas.

O jogo do *Decimat* funcionou bem, no sentido em que ajudou os alunos a compreender melhor a décima parte e a centésima parte da unidade. Optei por não centrar tanto esta tarefa na milésima parte porque achei mais importante que consolidassem bem a décima e a centésima. Relativamente à parte do jogo em que deveriam adicionar os números decimais teria mais efeito se fosse realizada logo no início da aula seguinte, porque assim o grupo estaria mais focado nas regras.

Nesta aula era previsto que, a partir do jogo do *Decimat,* os alunos fizessem uma introdução à adição de números decimais*.* Os alunos compreenderam a organização do Decimat assim como a representação fracionária das partes pintadas. A representação decimal levantou mais algumas dúvidas. Relativamente à décima parte do Decimat os alunos visualizaram com facilidade tendo-o conseguido dividir nas dez parte iguais e associado cada uma das partes a 0,1. O facto de ter pedido a um aluno para ir ao quadro adicionar dez décimas foi importante, porque assim compreenderam o porquê da existência da vírgula nos números decimais, facto que ainda não tinham totalmente interiorizado. A centésima parte teve de ser melhor discutida com os alunos, pois era importante compreender que ao dividir, numa unidade, cada décima em dez partes iguais iria obter as centésimas, e que cada uma dessas partes iria representar uma centésima do *Decimat*. Para isso foi necessário fazer a representação no quadro e a contagem com os alunos. Assim, ao visualizarem todas as divisões (0,01) no *Decimat* conseguiram compreender o que representava uma centésima parte do *Decimat*. Para a milésima parte tivemos de fazer a mesma discussão que fizemos para a centésima. O fato de os alunos conseguirem visualizar as divisões do Decimat, facilita que, posteriormente, consigam representar com mais facilidade os respetivos números decimais.

O jogo do *Decimat* correu bem tendo os alunos conseguido pintar, e representar as frações que iam saindo nos dados. A representação decimal levantou mais dúvidas não tendo os alunos conseguido efetuar as adições. Durante as discussões foi possível verificar duas situações: (i) a mais comum, adicionavam o valor absoluto do número decimal que saia nos dados, ignorando o seu valor de posição, adicionando-o ao número decimal anterior, ou (ii) ignorando também o valor de posição dos números que saiam nos dados, iam-nos acrescentado à direita do número decimal que tinham escrito anteriormente. Claro que, a determinada altura, se aperceberam que os números decimais estavam a crescer desproporcionadamente. Após a discussão coletiva foi possível verificar que os alunos não conseguiram associar a representação pictórica, a qual iam fazendo corretamente, à representação decimal.

O Jogo do *Decimat* ajudou os alunos a compreender o que representa a numeração decimal relativamente à unidade Os alunos conseguiram associar as partes pintadas no *Decimat* à representação verbal dos números decimais, no entanto, inicialmente apresentaram dificuldade na escrita dos números decimais, não conseguindo escrever corretamente os números com as casas decimais corretas. Uma outra dificuldade que permaneceu foi a da adição dos números decimais, pois não compreenderam ainda o valor de posição.

6ª Aula - Adição de números decimais

Esta aula tinha como objetivo introduzir a adição de números decimais na reta numérica. A tarefa era composta por três questões, em que os alunos iam progredido da representação pictórica para a reta numérica (ver anexo 17)

Na primeira questão, quase a título de revisão da aula anterior, os alunos tinham de pintar os números decimais e as frações decimais representadas. Perguntei o que representavam os quadrados, ao que mais alunos já foram capazes de responder o que representava uma unidade. Assim como, para cada uma das cem partes em que se encontrava dividida da unidade os alunos conseguiram referir que representava uma centésima. Prevendo dúvidas, pedi aos alunos que quando pintassem as unidades o fizessem sempre da mesma forma, ou seja, se começassem da direita deveriam pintar os restantes quadrados iniciando também pela direita. O meu objetivo era que os alunos descobrissem, que tanto os números decimais como as frações decimais, representavam a mesma parte pintada da unidade, relacionando e compreendendo assim as duas representações (ver figura 66).

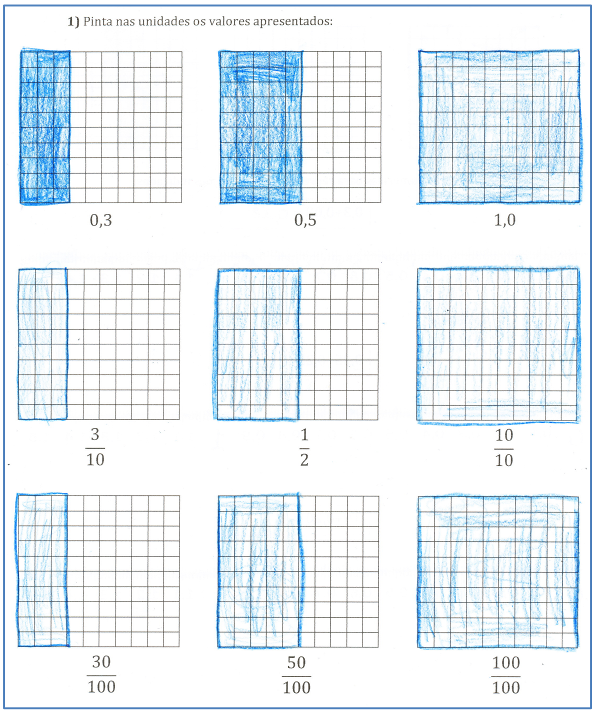


Figura 66– Resolução de Catarina para da questão 1.

Daniel: Professor, eles estão a ficar todos iguais.

Professor: Pois é Daniel, bem observado e o que é que isso significa?

Daniel: Que as partes que estamos a pintar nas unidades são iguais.

Professor: Mas os números que tinham de pintar eram iguais? Catarina?

Catarina: Sim...não...eles são diferentes porque uns são frações e outros números decimais mas quando pintamos, a parte pintada fica igual.

Catarina verificou que, embora as representações fossem diferentes, (decimal e fracionária) existia uma relação entre elas. Ao pintar os alunos aperceberam-se disso compreendendo melhor a relação entre as duas representações. Na discussão falámos sobre a relação entre a representação decimal e a representação fracionária. Na terceira fila de "unidades", onde os alunos deveriam pintar a unidade toda, questionei-os acerca da representação decimal 1,0.

Professor - Porque é que está ali aquele um? O que é que representa? Luísa?

Luísa - Representa uma...

Professor - Olha para o que tu pintaste, o que é que pintaste?

Luísa - Pintei tudo!

Professor - Então...isso quer dizer que pintaste o quê? Quem sabe, braços no ar!

Luísa - O quadrado todo.

Professor - Isso mesmo, ou seja, como já vimos, esse quadrado representa o quê? Lembras-te?

Luísa - Uma unidade?

Luísa compreendeu que tinha pintado a unidade embora o número estivesse representado na forma decimal. Continuei a com a discussão pois queria que os alunos relembrassem porque é que existe a vírgula no número decimal.

Professor - Isso mesmo, boa! Uma unidade completa! Então porque é que aparece ali aquela vírgula e o zero?

Nádia: O "um" é a unidade toda e o zero...não é nada...

Professor: Mas nada quê? Reparem que está à direita da vírgula. Pensem lá...

Alexandra: Zero quadradinhos daqueles pequenos.

Professor: Vá, é isso, já estamos mais perto, e estes quadradinhos são menores ou maiores que a unidade?

Ana: São menores por isso é que aparecem à direita da vírgula.

Este momento de discussão foi importante para relembrar à turma que a vírgula existe para separar a parte inteira da parte decimal. Projetei a imagem porque queria voltar à questão dos "quadradinhos", era importante que os alunos distinguissem as décimas das centésimas, porque verifiquei que, enquanto os apoiava na realização da tarefa, ainda não sentiam segurança na distinção entre as décimas e as centésimas. Para os alunos foi difícil abstraírem-se do facto de aquela unidade estar dividida em cem partes iguais, não conseguindo visualizar a mesma unidade dividida apenas em dez partes iguais.

Professor: Vamos lá lembrar, recordam-se na aula anterior quando falámos das frações decimais e dos números decimais...

Eduardo: Sim, elas podiam ser a mesma parte pintada da unidade.

Professor: Boa Eduardo é isso mesmo... Então e pensem lá, a palavra "decimal", que palavra é que vos faz lembrar?

Alexandra: Décimas?

Professor: Sim, isso mesmo, então e "décima" também pode derivar de uma outra palavra...

Alexandra: Dez?

Professor: Boa é isso mesmo, então isso quer dizer que, inicialmente, eu posso pegar aqui na minha unidade e dividi-la em quantas partes?

Eduardo: Em dez!

Professo: Isso, estamos no caminho certo, vamos ver (animação com a unidade dividida em dez partes iguais) então como são menor que a minha unidade toda eu vou chamar...?

Eduardo: Décimas!

Esta discussão foi muito importante para que os alunos compreendessem que, embora aquela unidade estivesse dividida em cem partes iguais, também era possível dividi-la em décimas, agrupando dez centésimas. Prolonguei mais um pouco a discussão centrando-a depois na representação decimal do número.

Professor: Então agora já conseguimos todos visualizar as décimas. Então vamos lá a ver, temos uma unidade toda pintada? (Tinha projetado a mesma unidade da tarefa mas apenas com uma décima pintada)

Andreia: Não.

Professor: Boa, então o que é que vou escrever à esquerda da vírgula?

Andreia: Um zero?

Professor: Isso mesmo, o que é que representa este zero?

Andreia: que a unidade não está toda pintada, só um bocado da unidade.

Andreia conseguiu verificar que a unidade não estava pintada e como tal à esquerda da vírgula deveria vir escrito o zero. Logo de seguida, Ana intervém da seguinte forma.

Ana: Então à direita da vírgula deve estar o "um"...

Professor: É isso Ana. E porquê um?

Ana: Porque só está pintada uma das dez partes

Professor: Ou seja está pintada uma quê da unidade?

Ana: Uma décima.

Esta discussão foi importante para relembrar e consolidar a representação decimal pois, na aula anterior, os alunos levantaram dúvidas relativamente ao jogo do *Decimat,* conseguindo escrever as frações decimais mas revelando dúvidas relativamente à escrita dos números decimais. Para os alunos, imaginar e visualizar as décimas foi uma tarefa quase impossível. Daí ter feito esta discussão. Não foi fácil compreender que cada conjunto de dez centésimas formava uma décima, relativamente à unidade. pelo que a representação pictórica desempenhou um papel importante na compreensão. Esta discussão serviu de ponto de partida para a questão dois.

Na segunda questão os alunos tinham de adicionar números decimais recorrendo à representação pictórica. A questão tinha três expressões numéricas, sobre adição de números decimais, sendo que a terceira envolvia transporte. Os alunos conseguiram pintar bem as duas adições que não envolviam transporte como é possível ver na seguinte imagem (ver figuras 67 e 68).

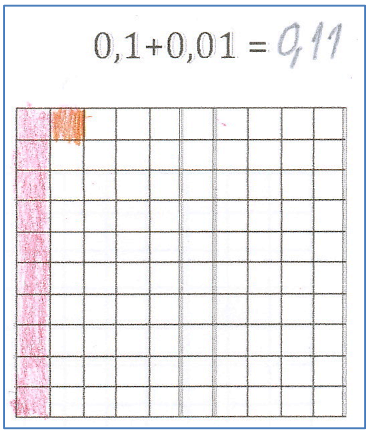


Figura 67– Representação de Catarina para a adição de frações sem transporte.

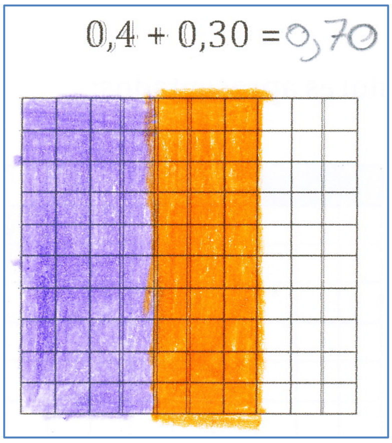


Figura 68– Representação de Andreia para a adição de frações sem transporte.

De uma forma geral os alunos compreenderam bem a diferença entre as décimas e as centésimas. A questão 3 foi importante por ajudou a consolidar esta diferença.

A adição com transporte já levantou mais algumas dúvidas. No entanto, e de uma forma geral, os alunos conseguiram representar corretamente a adição (ver figura 69)

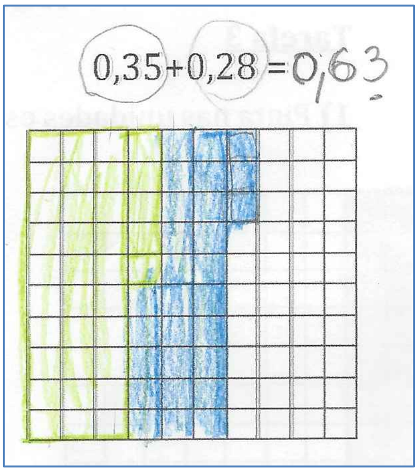


Figura 69- Representação de Catarina para a adição de números decimais com transporte.

Professor – Catarina, és capaz de me explicar como fizeste essa adição?

Catarina - Pintei as trinta e cinco centésimas, depois como sobrava isto, que são cinco (centésimas) pintei todo, que são cinco (centésimas) das oito centésimas, não pintei mais porque pintei as duas décimas e depois pintei as que faltavam que eram três centésimas. E ao todo pintei sessenta e três centésimas.

Catarina, conseguiu resolver a adição assim como pintar corretamente na unidade as duas parcelas da adição. Verificou que havia uma dezena que ficava completa sobrando três centésimas, que pintou no final. Desta forma, através representação pictórica, Catarina conseguiu realizar e compreender a adição de números decimais com transporte. Outros dois alunos pintaram da mesma forma e utilizaram a mesma estratégia para esta questão.

Maria pintou de forma diferente mas conseguiu chegar ao resultado correto. (ver figura 70)

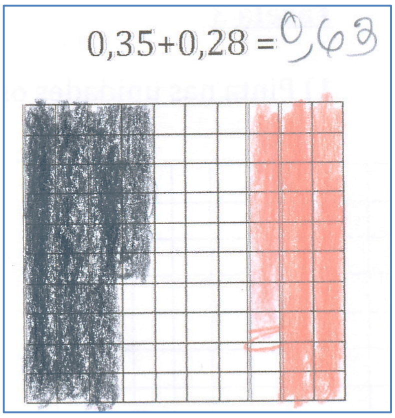


Figura 70- Representação de Maria para a adição de números decimais com transporte.

> Professor – Maria pintaste isso separado...queres-me explicar como chegaste a este resultado?
>
> Maria – Foi fácil, pintei as trinta e cinco centésimas e depois aqui pintei as vinte e oito.
>
> Professor – Mas como descobriste este resultado de sessenta e três centésimas.
>
> Maria – Aqui estão as trinta e cinco centésimas e depois contei aqui as vinte centésimas. Como sobravam estas oito, se juntar cinco aqui...professor aqui está mal está uma (centésima) a mais... então mas se juntar aqui, dá uma décima, assim faz seis décimas e depois sobram três (centésimas).

Embora Maria tenha pintado de forma diferente também conseguiu explicar o transporte, com raciocínio semelhante ao de Catarina.

As dúvidas que surgiram nesta questão, diziam respeito à falta de segurança de alguns alunos na distinção entre as décimas e as centésimas (ver figura 71)

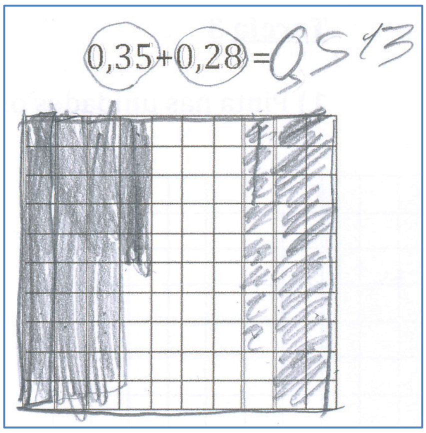


Figura 71- Representação de Eduardo para a adição de números decimais com transporte.

Professor - Eduardo és capaz de me explicar este resultado?

Eduardo – Sim, pintei aqui as trinta e cinco...centésimas, e depois pintei aqui as vinte e oito centésimas. Então, o cinco são as cinco...décimas?

Professor – Sim Eduardo...

Eduardo – E depois vi que se tirar daqui cinco...cinco centésimas e as juntar neste espaço faz uma...décima. Por isso escrevi aqui o um. E depois ainda sobram três...centésimas, por isso é que está aqui o três.

Eduardo explicou bem o seu erro não se apercebendo que o resultado não fazia sentido, não conseguiu perceber que devia juntar a décima que obteve às décimas que já tinha. Ele ainda não percebe o sistema de numeração posicional.

Embora os alunos tenham conseguido pintar as duas parcelas da adição raciocinando corretamente tiveram, no entanto, dificuldade em escrever o número que representava a soma.

Ao iniciar a terceira questão perguntei se já tinham alguma vez trabalhado com a reta numérica, ao que os alunos responderam que sim. Nesta questão, tal como na anterior, tinham três expressões numéricas sobre adição com números decimais, em que duas envolviam transporte. O meu objetivo era que os alunos utilizassem a reta numérica para resolver as adições por justaposição retilínea de segmentos de reta tal, tal como é indicado nas metas curriculares.

Assim que os alunos deram início à resolução as dúvidas começaram a surgir e, de uma forma geral, era a mesma. Não estavam a compreender a divisão apresentada na reta numérica, não conseguindo distinguir quais as marcas que representavam as décimas ou as centésimas. Fiz uma discussão em grupo para levar os alunos a compreender o que representava cada uma das marcações

> Professor – Ana, onde é que está a unidade representada na reta numérica?
>
> Ana – É aí, do zero até ao um.
>
> Professor – Muito bem, então esta unidade que começa no zero e vai até ao um tem aqui estas marcações, como é que se lê cada uma destas (0,1)?
>
> Nádia – É uma...centésima?
>
> Professor – É...Teresa?
>
> Teresa - Eu acho que sim, isso são centésimas...

Continuei a discussão para tentar esclarecer a diferença entre as décimas e as centésimas. Para isso apresentei uma animação para que os alunos pudessem visualizar a relação. Para isso, voltei a apresentar o quadrado, utilizado na tarefa 6, e fui relacionando com a reta numérica. Comecei pelas décimas relacionando a divisão em dez partes do modelo retangular com a reta numérica, para que os alunos compreendessem que uma décima no quadrado e na reta numérica representam o mesmo.

> Professor – Nádia, então vamos lá ver se percebemos, em quantas partes é que dividiste a unidade, este quadrado?
>
> Nádia – Em dez.
>
> Professor – Muito bem, então se está dividida em dez partes cada uma das partes dizemos que é...
>
> Nádia – Uma décima...
>
> Daniel – É uma de dez partes.
>
> Professor – É isso mesmo! Alexandra, agora vamos olhar para reta, em quantas partes está dividida?
>
> Alexandra - Em dez, como no quadrado.
>
> Professor – Boa, é isso mesmo, então, cada uma destas partes aqui marcadas...
>
> Daniel - ...também é uma de dez.

Professor – Boa é isso! Então, Alexandra, também podemos dizer que cada uma destas partes é uma...?

Alexandra – É uma décima!

Esta discussão foi importante porque os alunos conseguiram visualizar a relação entre o modelo retangular e a reta numérica. Fiz a mesma discussão para a centésima parte da unidade. De uma forma geral os alunos conseguiram compreender a representação das décimas e das centésimas na reta numérica, facilitando desta forma a resolução da primeira expressão numérica (ver figura 72).

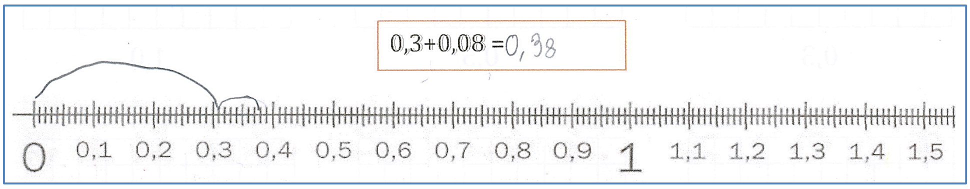


Figura 72- Representação de Catarina para a resolução da primeira expressão numérica da questão 3.

Luísa representou as três décimas saltando de décima em décima (ver figura 73).

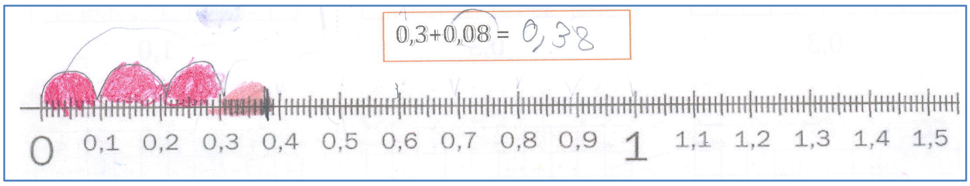


Figura 73- Representação de Luísa para a resolução da primeira expressão numérica da questão 3.

Professor – Luísa, que saltinhos são estes?

Luísa – Então, com isto são décimas (divisão na reta) e tenho que pintar três... saltei três décimas... uma, duas e três. E depois aqui juntei as oito...centésimas.

Professor – Então o total são quê? Como é que lês este resultado?

Luísa – São trinta e oito...centésimas.

Pela explicação de Luísa, foi possível verificar que compreendeu como estavam representadas as décimas e as centésimas na reta numérica, chegando ao resultado correto.

A segunda expressão envolvia transporte. Ainda surgiram algumas dívidas pontuais, em que os alunos questionavam sobre o que representavam as décimas e as centésimas (ver figura 74).

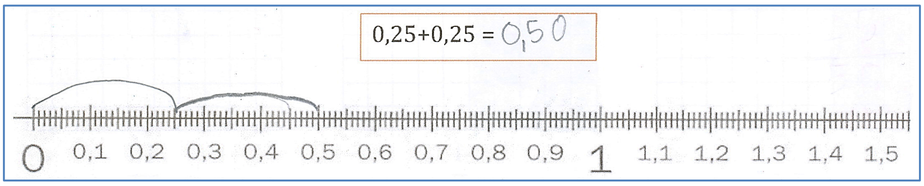


Figura 74- Representação de Luísa para a resolução da primeira expressão numérica da questão 3.

Professor – Maria como é que fizeste essa adição?

Maria – Primeiro fiz os vinte e cinco...

Professor - ...como?

Maria – Fiz...então...vinte e cinco...contei, aqui são dez (décimas) mais dez (décimas) e depois mais estes cinco (centésimas).

Professor – Certo...e este salto aqui a seguir?

Maria – É a mesma coisa, só que fiz ao contrário. Contei primeiro as cinco (centésimas) e depois as dez (centésimas) mais dez(centésimas) para dar os vinte (centésimas).

Maria conseguiu adicionar corretamente as duas parcelas. Quando juntou a segunda parcela, ao adicionar primeiro as cinco centésimas e depois as duas décimas revela que compreendeu os números decimais, porque compreendeu que se juntasse as cinco décimas da primeira parcela com as cinco décimas da segunda parcela isso iria dar uma décima.

Fiz uma discussão coletiva para que compreendessem, e visualizassem, que as cinco centésimas da primeira parcela mais as cinco centésimas da segunda parcela davam origem a uma décima. Era importante discutir este aspeto com os alunos pois desta forma compreenderão melhor o transporte quando realizarem o algoritmo formal.

A terceira expressão numérica envolvia também transporte, mas a soma era um número maior que a unidade (ver figura 75).

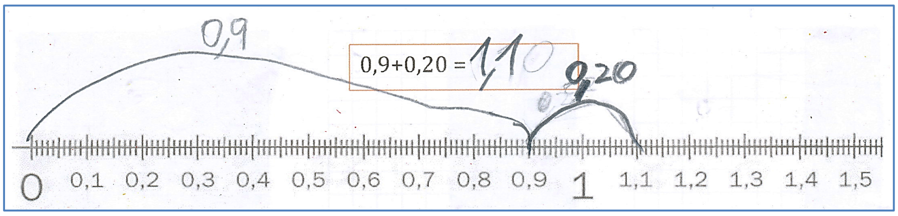


Figura 75 - Representação de Eduardo para a resolução da terceira expressão numérica da questão 3.

Professor – Eduardo explicas-me o que fizeste?

Eduardo – Sim, primeiro fiz este salto grande porque são nove décimas e depois fiz mais vinte centésimas e foi parar aqui.

Professor – E como é que se lê este resultado.

Eduardo – Uma décima e uma centésima?

Esta resposta de Eduardo foi comum a mais alguns alunos que conseguiram efetuar corretamente as marcações, mas não conseguiram interpretar os resultados obtidos, apresentando dificuldade na leitura do número que representa a soma.

Professor – Eduardo, lembras-te há umas aulas atrás quando falámos sobre a vírgula nos números decimais?

Eduardo – Acho que me lembro, a vírgula separava a parte das unidades da parte das décimas?

Professor - Sim, era isso, então afinal como é que se lê o número? Olha aqui para reta numérica. Já viste que até aqui temo uma unidade...

Eduardo – Uma unidade e uma décima?

Eduardo conseguiu ler o número corretamente. Mas a utilização da vírgula nos números decimais é um aspeto que ainda não estava consolidado.

Daniel escreveu o resultado acrescentando o zero das centésimas (ver figura 76)

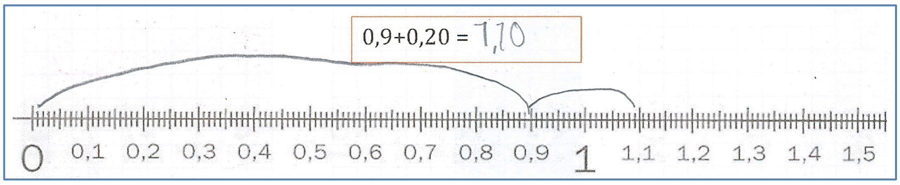


Figura 76- Representação de Daniel para a resolução da terceira expressão numérica da questão 3.

Professor – Daniel que zero é este? De onde é que apareceu?

Daniel – Então vem daqui, porque aqui estão dez centésimas.

Professor - És capaz de me ler este resultado?

Daniel – Sim, é uma unidade e dez décimas.

De uma forma geral os alunos não revelaram dificuldade na representação da expressão numérica na reta, tendo escrito corretamente a soma, assim como a sua leitura.

Ao longo desta tarefa foi possível verificar o progresso dos alunos relativamente à compreensão do sistema de numeração decimal. Esta tarefa introduziu a adição de números decimais na reta numérica. Embora os alunos já tivessem trabalhado com a reta esta foi a primeira vez que o fizeram com números decimais.

A tarefa teve início com uma questão em que o objetivo era levar os alunos a relacionar os números decimais com frações decimais. Na segunda questão, os alunos tinham de representar pictoricamente as adições, que envolviam números decimais, e determinar o resultado. As operações deveriam ser efetuadas com recurso às figuras representadas por quadrados e em que cada um se encontrava dividido em cem partes iguais. Esta introdução foi importante para ajudar os alunos a distinguir entre unidade, décima e centésima, aspeto em que os alunos sentiram dificuldade. Tive de fazer algumas discussões com o grupo a fim de os levar a compreender a diferença entre décima parte e centésima parte da unidade, pois confundiam os termos com frequência. A adição de números decimais na reta numérica foi facilitada pelos exercícios iniciais. Ainda surgiram algumas dúvidas relativamente à divisão da reta, em que os alunos não eram capazes de compreender que as divisões mais pequenas representavam as centésimas e as maiores e mais espaçadas representavam as décimas. Foi novamente necessário efetuar uma discussão com o grupo, desta vez para relacionar a representação pictórica, das duas primeiras questões e a reta numérica. Este passo foi importante porque desta forma os alunos foram capazes de relacionar as duas representações fazendo a ponte entre uma e outra sempre que tinham dúvidas. Ainda assim, os alunos levantaram dúvidas relativamente à reta numérica, pois não conseguiram compreender de imediato as divisões na reta.

7ª Aula - Adição de números decimais

A última aula tinha como objetivo a representação formal da adição de números decimais, assim como a resolução de problemas envolvendo os números decimais. A tarefa que pedi aos alunos para realizar era composta por três questões. A primeira questão tinha uma tabela onde os alunos deveriam escrever os números, respeitando a ordem de posição, e efetuar uma adição. A segunda e a terceira questões eram problemas em que o primeiro envolvia dinheiro e o segundo medidas de comprimento (ver anexo 18).

Os alunos manifestaram muitas dúvidas na primeira questão. Não estavam a compreender a tabela. Não conseguiam escrever os números alinhados segundo as respetivas ordens, porque não estavam a associar cada algarismo do número à ordem correspondente. Não percebiam de que forma é que poderiam escrever e adicionar os números decimais naquela tabela. Fiz uma discussão para rever as ordens de um número recordando a parte inteira e a parte decimal. Após esta revisão efetuaram corretamente a adição, escrevendo cada número debaixo da ordem correta (ver figura 77).

	Parte inteira				Parte decimal		
	C	D	U		d	c	m
+			0	,	3		
			0	,	0	8	
			0	,	3	8	

Figura 77- Representação de Alexandra para a resolução da primeira expressão numérica da questão 1.

Os alunos resolveram as restantes adições com facilidade pois efetuaram o transporte como se tratasse de uma adição de números inteiros.

Os alunos resolveram a segunda questão com facilidade, não levantando dúvidas relativamente à escrita dos números. Adicionaram os valores respeitando o valor de posição de cada algarismo (ver figura 78).

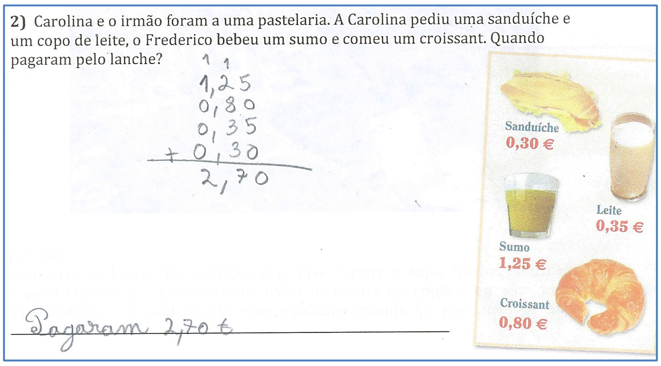


Figura 78- Representação de Catarina para a resolução da questão 2.

A facilidade com que resolveram esta questão, contrapondo com o que se passou na primeira questão em que não estavam a ser capazes de escrever cada número na tabela, respeitando o valor de posição, confirma que estão pouco habituados a refletir e procurar compreender os procedimentos que efetuam.

A terceira questão, requeria que os alunos calculassem o perímetro de uma figura. Apenas dois alunos perguntaram porque é que havia números que tinham três casas à direita da vírgula, referindo-se às milésimas. Fiz uma discussão recorrendo ao *Decimat.* Na discussão, mostrei aos alunos alguns *Decimats* com milésimas pintadas.

Professor – Lembram-se quando fizemos o jogo do *Decimat?* Quando dividimos um Decimat em dez partes? Olhem aqui...cada uma destas partes é...?

Alexandra – Uma décima!

Professor - Boa, e agora dividi novamente uma décima também em dez partes, se fizer o mesmo a todas as décimas cada uma destas partes é...?

Sérgio – ...uma milésima?

Professor – É? Todos concordam?

Neste momento a turma fez silêncio. Era clara a insegurança relativamente à diferença entre milésimas e centésimas.

Professor – ...se dividir cada uma destas décimas também em dez partes, ao todo vou ficar com quantas destas (centésimas) partes?

Daniel – Com cem!

Professor - Isso! Então a cada uma destas eu posso chamar...?

Nádia – Centésimas!

Mostrei então cada décima do *Decimat* dividida em dez partes para que os alunos pudessem visualizar as centésimas.

Professor – Então agora vamos lá pensar, se dividir cada uma destas centésimas novamente em dez partes, ao todo quantas partes vou ter?

Daniel – Mil partes, agora é que uma milésima!

Apresentei uma animação para que os alunos pudessem ver todo o *Decimat* dividido em mil partes. Para concluir fiz mais uma vez uma revisão sobre décimas, centésimas e milésimas. Imprimi e entreguei aos alunos uma tarefa semelhante à tarefa 2 realizada na aula número cinco, onde os alunos fizeram o jogo do *Decimat*, para que pudessem consolidar estes conceitos.

Através dos *Decimats* os alunos compreenderam a milésima parte da unidade, conseguindo desta forma dar continuidade à resolução do problema. Mais uma vez, não revelaram dificuldade na realização do algoritmo (ver figura 79)

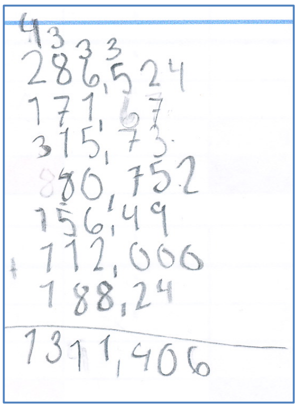


Figura 79- Representação de Alexandra para a resolução da questão 3.

Nesta tarefa surgiram duas questões que levantaram algumas dúvidas aos alunos. A primeira em que tinham de adicionar números decimais numa tabela e outra onde tinham de adicionar números decimais com casas até às milésimas. Relativamente à tabela a dificuldade dos alunos surgiu porque não conseguiram compreender o significado da tabela. Mesmo colocando a vírgula na tabela os alunos não conseguiram compreender como é que se ordenavam os números. Foi necessário fazer uma revisão das diferentes ordens dos números. A segunda questão foi resolvida com facilidade. Os alunos escreveram e resolveram o algoritmo da adição com números decimais sem dificuldade. Relativamente à terceira questão as dúvidas surgiram porque apareceram números que envolviam milésimas. Foi necessário fazer uma revisão dos *Decimats*, para que os alunos visualizassem a diferença entre décimas, centésimas e milésimas.

A representação pictórica continuou a desempenhar um papel importante na compreensão dos números decimais. Ao recorrer novamente aos *Decimats* foi possível mostrar aos alunos a relação entre as diferentes ordens dos números decimais.

8ª Aula - Avaliação final

Para a avaliação final realizei uma tarefa com seis questões. As três primeiras envolviam a adição de frações e os três últimas a adição de números decimais. Esta tarefa tinha como objetivo avaliar as aprendizagens realizadas pelos alunos durante a Unidade de Ensino (ver anexo 18).

Combinei com os alunos que teriam quarenta minutos para realizar autonomamente as tarefas. Responderam bem ao solicitado estando concentrados durante a sua realização. Pontualmente, fizeram perguntas acerca das questões.

A primeira questão não levantou dúvidas pois dizia respeito a adição de frações com o mesmo denominador, numa situação de grandezas discretas. Os alunos tinham uma representação pictórica para os auxiliar na resolução. Pintaram corretamente as duas frações indicadas no enunciado ($\frac{3}{12} + \frac{6}{12}$) fazendo a adição na imagem, chegando ao resultado correto, como é possível ver no seguinte exemplo (ver figura 80).

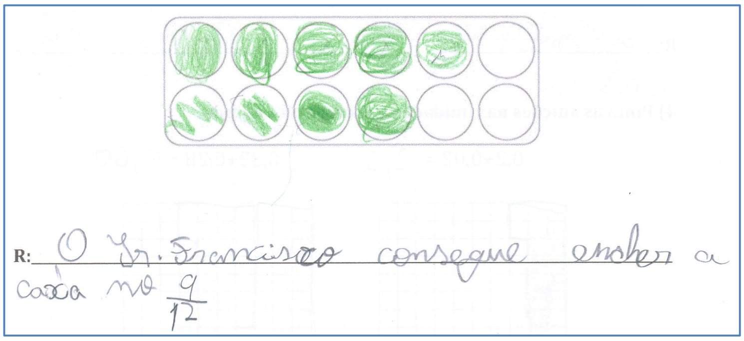


Figura 80- Representação de Andreia para a resolução da questão 1.

A segunda questão era semelhante à primeira onde os alunos deveriam adicionar duas frações como mesmo denominador, Nesta, tinham uma barra numérica para adicionar as frações, numa situação de grandeza contínua. Os alunos resolveram esta questão com mais segurança fazendo-o de forma correta, tendo alguns alunos escrito a expressão numérica correspondente, como é possível ver no exemplo (ver figura.81)

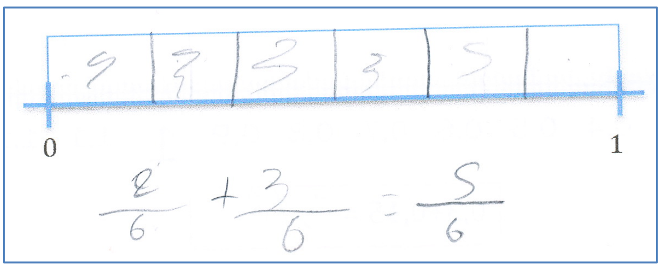


Figura 81- Representação de Alexandra para a resolução da questão 2.

Ainda se verificaram duas dificuldades, por parte de dois alunos: a divisão da barra numérica em partes iguais e a adição dos denominadores (ver figura 82).

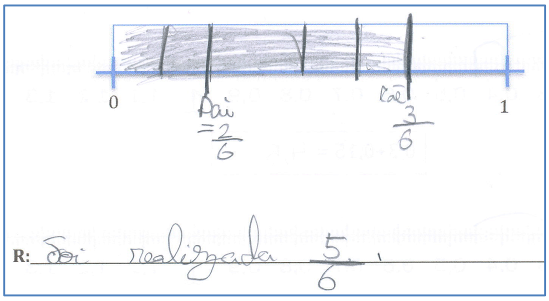


Figura 82- Representação de Maria para a resolução da questão 2.

A terceira questão envolvia a adição de frações com diferentes denominadores. Este tipo de questão levantou s dúvidas nas tarefas anteriores, em que os alunos não foram capazes de: (i) dividir a barra em partes iguais e (ii) representar a segunda fração que envolvia um denominador diferente da primeira. Para apoiar os alunos na resolução desta questão optei por colocar as marcações na barra numérica, com o objetivo de facilitar a marcação, por parte dos alunos, da fração com maior denominador. Desta forma, os alunos conseguiram resolver a questão com mais facilidade. Verifiquei, mais uma vez, tal como nas tarefas anteriores, que os alunos representam em primeiro lugar a fração com o denominador maior. Embora a maioria dos alunos resolvesse corretamente a questão, Eduardo voltou a cometer o erro de adicionar os denominadores das frações. Questionei-o acerca do erro que cometeu (ver figura 83).

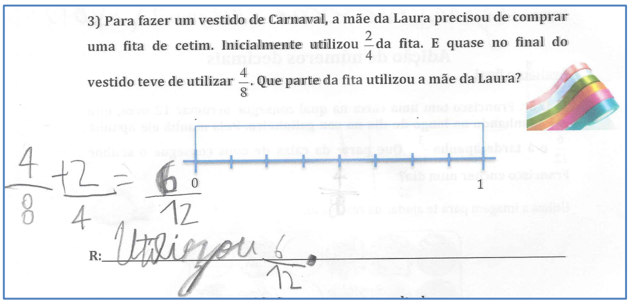


Figura 83- Representação de Eduardo para a resolução da questão 3.

Professor – Eduardo como é que resolveste isso?

Eduardo – Então, adicionei aqui os numeradores, deu seis, e os denominadores, que deu doze...

Professor – E viste isso aqui na barra numérica?

Eduardo – Sim os numeradores nós juntamos sempre, porque é assim quando se somam duas frações (adição), e os denominadores vi aqui que já estão oito partes, que são estas (denominador da segunda fração) e como na barra já estão as oito partes e ainda faltam estas quatro (denominador da primeira fração) é necessário então juntar mais quatro noutra barra, que vai dar doze...

É notória a confusão que Eduardo fez relativamente à adição de frações com diferentes denominadores. Quando refere que tem de juntar outra barra numérica estava a referir-se às frações impróprias, o que não é o caso.

A questão quatro pretendia que os alunos adicionassem números decimais, envolvendo décimas e centésimas, recorrendo à representação pictórica. Como este foi um tema trabalhado recentemente os alunos não tiveram dificuldade em resolver, e representar, as duas adições. Ainda assim, metade dos alunos que compõem a turma resolveram corretamente a primeira adição. A segunda adição foi resolvida de forma correta por todos os alunos, como se pode ver no seguinte exemplo (ver figura 84).

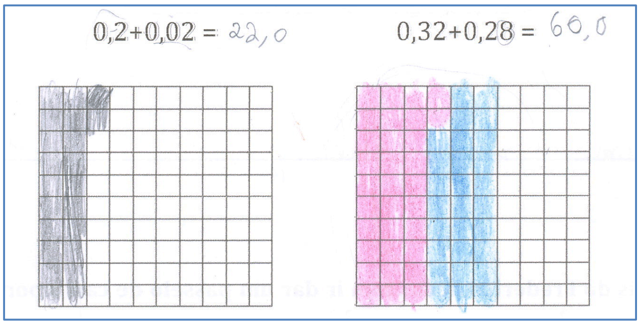


Figura 84- Representação de Maria para a resolução da questão 4.

Na questão seis, os alunos tinham de adicionar números decimais, mas desta vez teriam de recorrer à representação da reta numérica. Apenas quatro dos doze alunos da turma realizaram corretamente a questão. Os restantes cometeram os seguintes erros: (i) representaram bem a adição por justaposição retilínea mas adicionaram os valores de cada número decimal sem ter em conta o seu valor posicional ou (ii) representaram erradamente os números decimais na reta (ver figura 85).

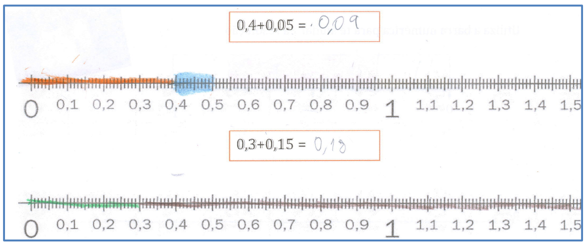


Figura 85- Representação de Maria para a resolução da questão 5.

Quando questionei alguns dos alunos acerca do resultado que estavam a apresentar, a resposta era semelhante: "...cinco mais quatro dá nove..." e "...quinze mais três dá dezoito". A leitura que faziam dos números decimais também não era correta. Verifica-se a dificuldade dos alunos em compreender o sistema de posição dos números decimais.

A sexta questão apresentava um problema, cuja solução seria resolvida com a adição de dois números decimais. Indiquei aos alunos que poderiam utilizar qualquer uma das representações trabalhadas durante a Unidade de Ensino, com o objetivo de verificar com qual se sentiriam mais confortáveis. Os alunos optaram por utilizar o algoritmo da adição (ver figura 86).

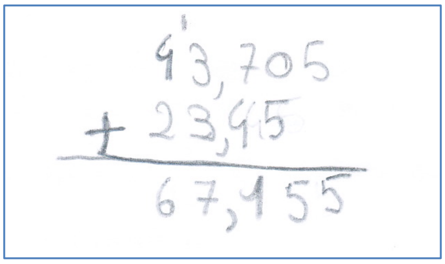


Figura 86- Representação de Luísa para a resolução da questão 6.

Esta última tarefa tinha como objetivo fazer uma revisão geral de todos os temas trabalhados na Unidade de Ensino, de verificar as aprendizagens dos alunos, assim como os erros e as dúvidas que ainda prevaleciam.

Pelas resoluções dos alunos, foi possível verificar que a adição de frações com o mesmo denominador , a partir da representação pictórica, foi aquela que menos dúvidas lhes apresentou, facilitando a compreensão deste tema. Por ser uma representação em que a imagem, associada ao enunciado das questões, pretende reproduzir de forma realista o contexto do enunciado, a sua visualização e compreensão por parte dos alunos torna-se intuitiva.

A utilização da barra numérica, não sendo tão intuitiva como a representação pictórica, pretende estabelecer uma relação entre o modelo retangular e a reta numérica, permitindo que aos poucos os alunos se vão apropriando de um raciocínio matemático mais abstrato, simplificando também as resoluções das questões. A adição de frações como mesmo denominador e com denominadores diferentes, recorrendo à representação da barra numérica foi compreendida pelos alunos, ganhando os mesmos segurança na sua utilização. No entanto, ainda subsistiu uma dificuldade relativamente à sua utilização no que diz respeito à divisão em partes iguais.

Relativamente aos números decimais, este foi um tema que os alunos tiveram dificuldade em compreender. Seria necessário mais tempo para desenvolver tarefas relacionadas com as dificuldades manifestadas pelos alunos, a fim de os ajudar a superar essas mesmas dificuldades. A utilização da representação pictórica, mais concretamente o modelo retangular ajudou os alunos a compreender o sistema de posição dos números decimais. A turma conseguiu adicionar a expressão numérica em que ambas as parcelas tinham com o mesmo número de casas decimais. A dificuldade surgiu quando tiveram de adicionar números decimais mas em que a primeira parcela envolvia décimas e a segunda parcela envolvia centésimas, adicionando assim os valores ignorando o sistema de posição dos números decimais.

A reta numérica, na sua utilização para adicionar números decimais, foi a representação que maior dificuldade revelou aos alunos. Tal como no modelo retangular, os alunos tiveram dificuldade em adicionar os números decimais recorrendo à reta numérica, essencialmente por dois motivos: a falta de consolidação do sistema de posição dos números decimais e a compreensão da utilização da reta numérica, em que os alunos tiveram dificuldade em compreender quais a as marcações que representam as décimas e quais as que representam as centésimas.

É possível verificar pelo desempenho dos alunos nesta avaliação final que, das representações trabalhadas com os alunos, a pictórica foi aquela que favoreceu mais a compreensão da adição de frações e de números decimais.

Reflexão sobre a aplicação da Unidade de Ensino

Esta Unidade de Ensino foi desenvolvida com o objetivo de levar os alunos a compreender a adição de frações e de números decimais, assim como, avaliar os erros e as dificuldades mais comuns sentidas pelos alunos quando trabalham estes temas. O novo Programa e Metas Curriculares de Matemática, implementado em 2013, veio introduzir no 1º ciclo novos conceitos relacionados com as frações, nomeadamente no 3º ano, como a adição de frações e de números decimais por justaposição retilínea. Pela minha experiência, estes temas requerem tempo para que se realizem tarefas, e as respetivas discussões, para conduzir os alunos à compreensão e consolidação dos temas trabalhados. A reta numérica poderá constituir uma boa ferramenta de trabalho para os alunos mas, pela sua complexidade, é importante que se recorra previamente a outras representações, como a pictórica ou a barra numérica. Sendo importante que os alunos consigam trabalhar com as várias representações, desde os primeiros anos, que se deve dar a possibilidade aos alunos de utilizarem as suas próprias representações, sendo uma forma de apresentarem a sua visão da matemática. O professor deverá guiar os alunos a fim de ir construindo um caminho entre as descobertas dos alunos e os conceitos matemáticos previstos nos Programas Curriculares.

As dúvidas e erros apresentados pelos alunos durante a realização das tarefas da Unidade de Ensino variaram consoante a representação utilizada, sendo a pictórica aquela que menos dificuldade apresentou. A adição de frações com o mesmo denominador e com denominadores diferentes foi realizada com recurso à representação pictórica e à barra numérica. O aspeto visual e intuitivo destas representações ajudou a maioria dos alunos a compreender a adição de frações, sendo, no final da Unidade de Ensino, capazes de utilizar a barra numérica, de forma autónoma, para adicionar frações com o mesmo denominador e com diferentes denominadores. Relativamente à utilização da barra numérica, os erros que surgiram relacionaram-se, inicialmente, com a representação e adição de frações em que os alunos não eram capazes de (i) dividir a barra numérica em partes iguais, especialmente com frações que apresentavam denominadores menores que metade, em que os alunos faziam a marcação da frações por aproximação, com alguma falta de rigor, e (ii) tiveram dificuldade em adicionar as frações por justaposição retilínea, no sentido em que não eram capazes de marcar a segunda fração da expressão numérica, pois não conseguiam compreender como fazer a marcação do denominador dessa segunda fração, tendo os alunos de considerar novamente toda a barra numérica e não apenas a parte restante, como se verificou.

Após algumas discussões, os alunos começaram a utilizar esta representação com mais facilidade, para adicionar frações com denominadores diferentes. Pelo fato de terem a possibilidade de pintar as marcações das frações na barra numérica, facilitou a compreensão deste tema, sendo foi possível verificar pelos comentários dos alunos, referindo por várias vezes "...as partes pintadas...".

Para a adição de números decimais foi utilizada a representação pictórica e posteriormente a reta numérica, tal como é indicado nas Metas Curriculares. Esta representação levou a que tivessem de ser realizadas várias discussões, porque os alunos revelaram dificuldade na sua compreensão. Houve dois aspetos principais que tiveram de ser discutidos com os alunos, (i) o sistema de posição de numeração decimal e (ii) a adição de números decimais por justaposição retilínea utilizando a reta numérica, atribuindo especial atenção à estrutura desta representação.

A adição de números decimais foi introduzida com recurso ao modelo retangular. Este, tem a vantagem de permitir que os alunos visualizem as décimas e as centésimas. O recurso ao jogo do *Decimat* também ajudou os alunos a compreender a o que representam a décima, a centésima e a milésima parte da unidade. As discussões realizadas, assim como o jogo do *Decimat* que os alunos fizeram a pares, permitiu que praticassem a escrita dos números decimais. Ao longo do jogo, e durante as respetivas discussões acerca de dúvidas que iam surgindo, foi possível verificar que os alunos apresentavam dificuldade em compreender o valor de posição dos números decimais, revelando dificuldade na sua escrita. Consequentemente, surgiram dúvidas na adição. Após várias discussões, a maioria dos alunos compreendeu a adição de números decimais em que ambas as parcelas tinham o mesmo número de casas mas, poucos alunos foram capazes de compreender a adição com parcelas com diferentes casas decimais. Foi realizada uma discussão importante referente a uma questão em que os alunos tinham de escrever uma adição de dois números decimais numa tabela organizada com várias colunas, em que cada uma representava uma ordem. Durante esta discussão, verifiquei que os alunos não compreendiam o significado da vírgula. Por várias vezes, durante o trabalho com a reta numérica, tive de voltar a utilizar o modelo retangular, para estabelecer uma ligação entre a representação pictórica e a reta numérica, desta forma os alunos conseguiriam relacionar as décimas e as centésimas nas duas representações.

No final da Unidade de Ensino, a maioria dos alunos conseguiu representar as adições por justaposição retilínea, mas continuaram com dificuldade em escrever a soma resultante da adição desses números corretamente, especialmente quando a mesma expressão numérica envolvia décimas e centésimas, revelando desta forma que a reta numérica não é a representação mais intuitiva para que os alunos possam adicionar números decimais. Pelas discussões realizadas foi possível verificar que este tema ainda deixou dúvidas nos alunos. A adição de números decimais por justaposição retilínea é um tema que requer bastante tempo para que os alunos se apropriem dos conceitos e procedimentos necessários à sua compreensão.

Os alunos da turma compreenderam a adição de frações com o mesmo denominador e com denominadores diferentes, sendo capazes de utilizar as diferentes representações estudadas. Mas a maioria ainda ficou com dúvidas relativamente à adição de números decimais, apresentando erros e dúvidas quando necessitam de adicionar números decimais na reta numérica.

As representações (pictórica, verbal, barra numérica e reta numérica) desempenharam um papel importante na aprendizagem dos temas trabalhados na Unidade de Ensino. Na aprendizagem das frações e dos números decimais a utilização do modelo retangular poderá ser uma boa ferramenta para se dar início à aprendizagem deste tema. A utilização do *Decimat* representou uma ferramenta útil para que os alunos conseguissem distinguir entre décimas e centésimas. Assim como, a utilização da barra numérica permitiu fazer uma ligação entre o modelo retangular e a reta numérica. A representação de frações na barra numérica ajudou os alunos a compreender a regra para a adição de frações, tanto com o mesmo denominador como com denominadores diferentes porque ao terem a possibilidade de pintar e de visualizar o número de partes em que ficava dividida a barra numérica os alunos compreendiam que denominador utilizar na soma.

Podemos concluir, pela aplicação e análise das tarefas da Unidade de Ensino, que as representações que os alunos utilizaram foram um bom suporte para a aprendizagem da adição de frações e de números decimais, nomeadamente a representação pictórica, pois foi a mais intuitiva e visual. A barra numérica representou também uma boa ferramenta de aprendizagem desde que relacionada com a representação pictórica, ajudando os alunos a compreender a adição de frações com o mesmo denominador e com denominadores diferentes. A utilização da reta numérica foi a representação em que os alunos revelaram mais dúvidas, cometendo erros na sua utilização. Não sendo uma ferramenta tão intuitiva, requer uma boa compreensão do sistema de posição dos números decimais para que se possa utilizar de modo eficaz.

A aplicação da Unidade de Ensino, de uma forma geral, decorreu bem. A maioria dos alunos efetuaram aprendizagens alcançando os objetivos previstos.

Entrevistas

Com o objetivo de verificar, e compreender, as dúvidas dos alunos relativamente às frações e números decimais, realizei entrevistas a três alunos: Maria, Daniel e Eduardo.

A primeira entrevista foi realizada a Maria. Esta aluna revelou-se muito competente compreendendo com facilidade os temas trabalhados. Colaborou muito bem nas aulas realizando as tarefas propostas com empenho. A segunda entrevista foi realizada a Daniel, um aluno empenhado e concentrado, mas que revelou dificuldades na compreensão de alguns temas trabalhados. A terceira, e última entrevista, foi realizada a Eduardo, um aluno que também colaborou bem durante a aplicação da Unidade de Ensino, mas que revelou dificuldade compreensão em alguns temas.

A tarefa aplicada aos alunos foi a mesma realizada para a avaliação final, pois pretendia compreender melhor as dúvidas e os erros dos alunos relativamente aos temas trabalhados durante a Unidade de Ensino.

A primeira questão pedia que os alunos adicionassem duas frações com o mesmo denominador, recorrendo a uma representação pictórica, numa situação de grandeza discreta. Esta questão foi realizada sem dificuldade. Os alunos leram com atenção o enunciado tendo o cuidado de contar os espaços necessários para arrumar os ovos, a fim de verificar se coincidiam com o denominador das frações apresentadas. Os três alunos resolveram da mesma forma, pintaram primeiro a fração $\frac{3}{12}$ e depois a fração $\frac{6}{12}$, como se pode ver no seguinte exemplo (ver figura.87):

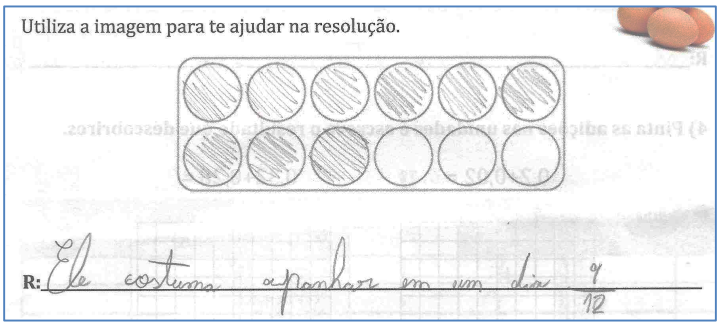


Figura 87- Representação de Maria para a resolução da questão 2.

Na segunda questão os alunos deveriam adicionar duas frações com o mesmo denominador utilizando a barra numérica. Foi realizada corretamente por Maria e Eduardo, mas Daniel cometeu o erro de, ao dividir a barra numérica, contar as marcações e não os espaços (ver figura 88).

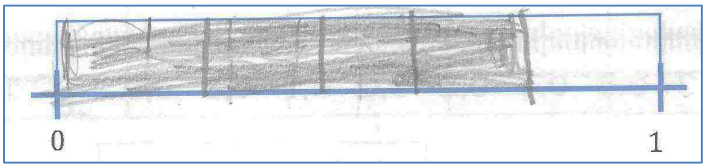


Figura 88- Representação de Daniel para a resolução da questão 2.

Quando Daniel estava a resolver a questão dois, a certa altura começou a apresentar incerteza pois não estava a conseguir dar continuidade à resolução, apercebendo-se que algo não estava bem. Dividiu corretamente a barra numérica mas apagou de seguida o registo que tinha feito porque se apercebeu que não tinha dividido a barra numérica em partes iguais. Quando tentou dividir novamente a barra, desenhou um primeiro espaço central e depois dividiu o espaço restante do lado esquerdo e do lado direito em duas partes, ficando a barra numérica dividida apenas em cinco partes e não em seis, como seria correto.

Professor – Daniel, és capaz de me explicar o que fizeste?

Daniel – Sim, nos aprendemos que quando há muitas partes para dividir começamos pelo meio e eu dividi primeiro no meio. E depois fiz as outras.

Professor – Daniel, mas conta lá em quantas partes está dividida?

Daniel – Uma, duas... (contou até seis).

Daniel contou as marcações na barra e não os segmentos.

Maria e Eduardo resolveram a questão 2 sem dificuldade e sem apresentarem dúvidas. Foram cuidadosos na divisão da barra numérica assim como na marcação e adição das duas frações. (Ver figuras.89 e 90)

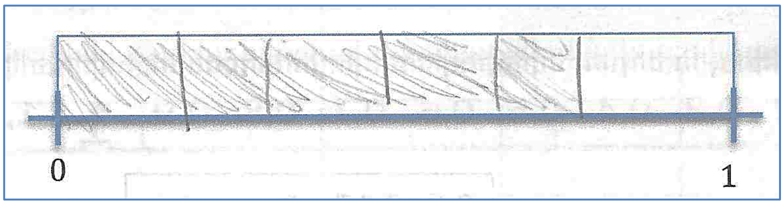


Figura 89- Representação de Maria para a resolução da questão 2.

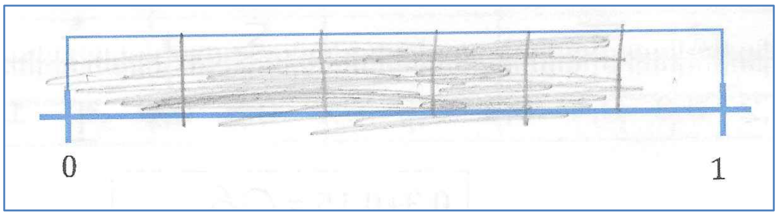


Figura 90- Representação de Eduardo para a resolução da questão 2.

A questão 3 solicitava aos alunos que adicionassem duas frações com denominadores diferentes. Como uma das dificuldades, observadas durante as aulas da Unidade de Ensino, dizia respeito à divisão da barra numérica em partes iguais, a barra numérica desta questão já se encontrava dividia em oito partes iguais, correspondendo ao denominador da fração com maior denominador. Os alunos aproveitaram as marcações para dividir a barra numérica com mais facilidade.

Os três alunos também resolveram esta questão com facilidade. Desta vez, Daniel já fez a divisão da barra numérica corretamente, chegando ao resultado correto (ver figura 91)

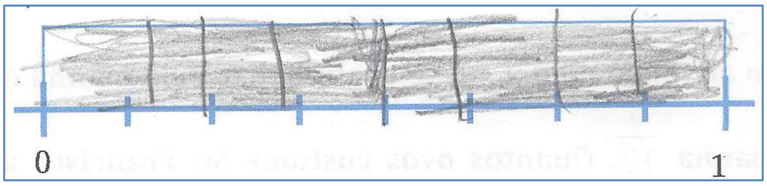


Figura 91- Representação de Daniel para a resolução da questão 3.

Os três alunos não revelaram dificuldade na marcação das duas frações com diferentes denominadores. Daniel e Eduardo marcaram primeiro a fração $\frac{4}{8}$ e só depois a fração $\frac{2}{4}$, justificando que, como já o tinham feito anteriormente, "... é mais fácil dividir primeiro nas partes todas...".

Maria, seguiu o texto do problema marcando as frações à medida que o ia lendo. Maria, ao contrário de Daniel e Eduardo, não dividiu a barra numérica recorrendo apenas as marcações que já se encontravam na reta. (ver figura 92).

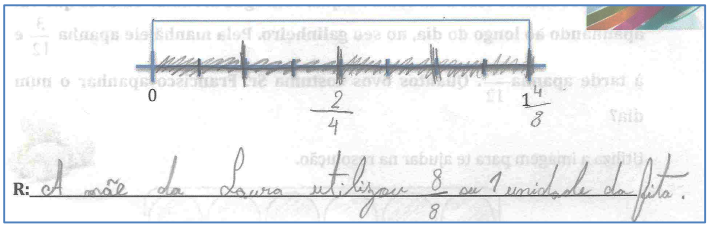


Figura 92- Representação de Maria para a resolução da questão 3.

Maria foi também quem deu a resposta mais completa, associando os $\frac{8}{8}$ à unidade.

Na questão 4 os alunos teriam de adicionar números decimais. Tinham duas expressões numéricas e deveriam utilizar os quadrados divididos em cem partes iguais para representar os números decimais e verificar as adições. A segunda adição envolvia transporte.

Maria começou por pintar primeiro as 0,02 e só depois as 0,2.

Professor – Maria, porque é que pintaste primeiro as duas centésimas?

Maria – Porque o quadrado está dividido em cem partes e assim é mais fácil pintar primeiro as duas centésimas e depois faço as duas décimas.

Pelo comentário de Maria é possível verificar que, ao contrário do sucedido nas tarefas anteriores em que os alunos tiveram dificuldade em ver que o quadrado se encontrava dividido em cem partes iguais, representou os dois números decimais, pintando-os no quadrado, e escrevendo corretamente a soma. Pedi a Maria para ler o resultado fazendo a leitura das vinte e duas centésimas corretamente. Verificou-se para a segunda adição a mesma situação (ver figura 93)

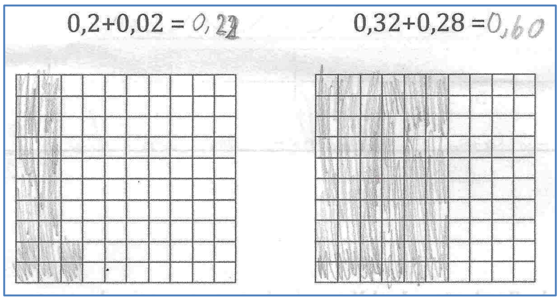


Figura 93- Representação de Maria para a resolução da questão 4.

David não resolveu corretamente a primeira adição, não conseguindo pintar nem adicionar os números decimais (ver figura 94)

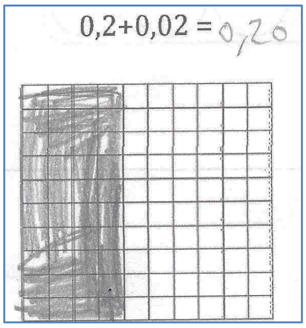


Figura 94- Representação de Daniel para a resolução da questão 4.

Questionei Daniel acerca da resolução que tinha apresentado:

Professor – Como é pintaste o quadrado e fizeste a adição?

Daniel – Como está dividido em cem partes eu pintei primeiro estas duas (0,02) e depois estas duas (0,2).

Professor – Olha lá Daniel, em quantas partes está dividida esta unidade?

Daniel – Em cem?

Professo – Certo, e como chamamos a cada uma destas (centésimas)?

Daniel – São centésimas, porque são cem.

Professor – Boa, é isso mesmo, então como é que se lê este número (0,02)?

Neste momento Daniel ficou um pouco reticente relativamente à resposta a dar. Acabando por responder corretamente, duas centésimas. Continuei a discussão para verificar que leitura faria das duas décimas:

Professor – Então e este (0,2)?

Daniel – Esse é parecido...são duas décimas?

Professor – És capaz de me mostrar aqui na imagem como é que pintaste estes dois números decimais, como é que chegaste a este resultado (0,20)?

Daniel – Pintei aqui primeiro este número (0,2)...e depois este (0,02)...há pois não está bem...pintei a mais...só devia só ter pintado dois quadradinhos...

Pela discussão foi possível verificar que Daniel se apercebeu que tinha errado a leitura das duas centésimas. Na sua resolução inicial tinha pintado quatro décimas, como sendo o resultado de duas décimas mais duas décimas.

Daniel conseguiu resolver a segunda adição, escrevendo corretamente o resultado, mas errou a representação dos números decimais no quadrado. Escreveu primeiro a soma e só depois pintou os números decimais. Esperei que resolvesse o exercício até ao final antes de o questionar acerca das resoluções (ver figura 95).

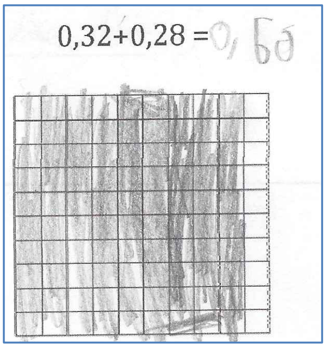


Figura 95 - Representação de Daniel para a resolução da questão 4.

Professor – Como é que chegaste a esse resultado?

Daniel - Fiz de cabeça, trinta e dois mais vinte e oito dá sessenta...

Professor – Sessenta quê?

Daniel – ...centésimas?

Professor – Então e és capaz de me explicar porque é que pintaste dessa forma?

Daniel - ...porque...pintei três (décimas) mais dois (décimas) e depois mais dois (décimas) ...e...não está bem...estão pintados quadrados a mais.

Daniel verificou que, como os números decimais eram parecidos pois tinham as mesmas casas decimais, conseguiu calcular mentalmente a soma, escrevendo o resultado correto. No entanto, não conseguiu pintar os números decimais na unidade apresentada. Durante a discussão apercebeu-se do seu erro. Foi possível verificar também a insegurança com que abordou a leitura dos números decimais, revelando que o sistema de posição da do sistema de numeração decimal ainda não esta consolidado.

Eduardo, para a primeira adição, apresentou uma resolução errada, semelhante à de Daniel (Ver figura 96).

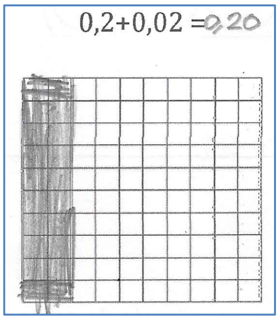


Figura 96- Representação de Eduardo para a resolução da questão 4.

Eduardo não conseguiu pintar corretamente os números decimais, assim como, apresentou um resultado errado.

Professor – Eduardo explica-me lá como é que fizeste esta adição?

Eduardo - ...fiz dois mais dois...que pintei aqui...espere mas são diferentes...Este são duas décimas e este duas centésimas?

Eduardo apercebeu-se, durante a discussão, que os números eram diferentes, fazendo depois a sua leitura correta. Dá assim a entender que se precipitou durante a resolução do exercício, o que revela também falta de segurança na leitura dos números decimais.

Eduardo resolveu corretamente a segunda adição, prestando mais atenção aos números, à sua leitura e representação. Foi interessante verificar que, tal como Daniel, efetuou em primeiro lugar, e mentalmente, a adição dos números decimais, escrevendo corretamente a soma.

Tanto com Daniel como com Eduardo, no final da discussão desta questão, voltei a fazer uma revisão sobre a décima e a centésima parte da unidade.

Na questão 5 os alunos tinham duas expressões numéricas com números decimais para adicionar com recurso à reta numérica.

Maria representou corretamente os números decimais nas retas numéricas, ao mesmo tempo que ia verbalizando a leitura dos números decimais. Quando escreveu o resultado, fê-lo erradamente embora tivesse verbalizado corretamente a sua leitura (ver figura 97).

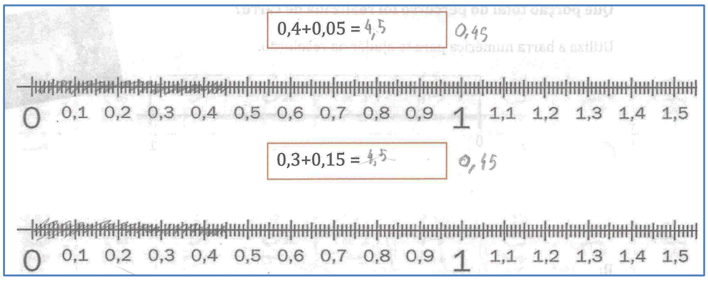


Figura 97- Representação de Maria para a resolução da questão 5.

Maria – Quatro décimas mais...cinco centésimas...vai dar...

Professor – Maria, como é que escreveste este resultado, pode ler?

Maria – São quatro décimas e cinco centésimas.

Professor – Olha lá com atenção, lembras-te qual era a função da vírgula?

Maria - Lembro, separava as unidades das décimas.

Professor- E então? Olha lá para a reta, temos uma unidade completa?

Maria – Não...Ah, já sei...

Maria percebeu o erro que tinha feito, escrevendo de seguida o número decimal correto correspondente à soma.

Eduardo não conseguiu representar corretamente os números decimais na reta numérica, como também não conseguiu efetuar a soma. Cometeu o mesmo erro nas duas expressões numéricas (ver figura 98).

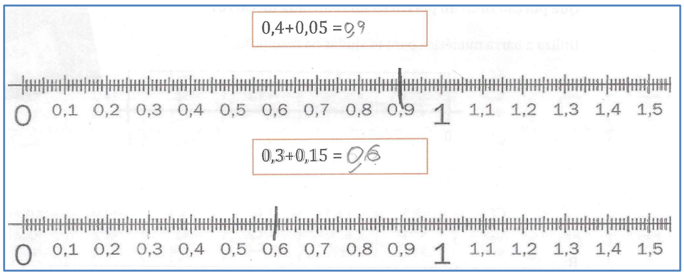


Figura 98- Representação de Eduardo para a resolução da questão 5.

Professor – Eduardo, explica-me lá como é que resolveste o exercício.

Eduardo – Neste (primeira expressão) fiz quatro mais cinco e marquei aqui na reta, que dá nove. E aqui (segunda expressão) fiz três mais quinze, que dá aqui seis.

Eduardo ainda não compreendeu o sistema de posição dos números decimais. Representou corretamente o primeiro número decimal na reta numérica, de ambas as expressões. A segunda parcela, da primeira expressão (0,05), Eduardo registou na reta como sendo cinco décimas, daí ter escrito o resultado nove décimas. A segunda parcela da segunda expressão Eduardo registou na reta contando cada décima como cinco centésimas, verbalizando da seguinte forma: "...cinco, dez, quinze". Fazendo um erro de correspondência entre as décimas e as centésimas. E, sem pensar na adição e nos valores dos números decimais, registou o valor resultante da justaposição retilínea. Tive de discutir, novamente, com Eduardo, o que representavam a décima parte e a centésima parte da unidade.

Daniel efetuou a primeira expressão cometendo o mesmo erro de Eduardo, registando na reta numérica os valores como sendo décimas. Relativamente à segunda expressão Daniel representou bem a primeira parcela mas errou a representação da segunda, cometendo um erro semelhante ao de Eduardo (ver figura 99).

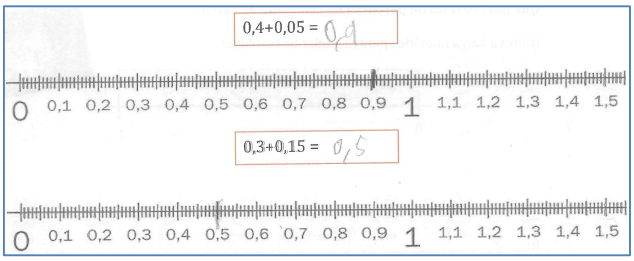


Figura 99- Representação de Daniel para a resolução da questão 5.

É possível verificar, pela resolução da questão 5 que a leitura dos números decimais não está consolidada, no sentido em que os alunos ainda não compreendem o sistema de posição de numeração decimal. Os erros apresentados dizem essencialmente respeito à leitura e compreensão do valor de posição.

A questão 6 apresentava um exercício, relativamente simples, em que os alunos deveriam adicionar dois números decimais. Os três alunos resolveram com facilidade, e sem hesitar esta questão. Escreveram corretamente os números decimais, respeitando o valor de posição e chegando ao resultado correto da soma, como é possível ver no seguinte exemplo (ver figura100)

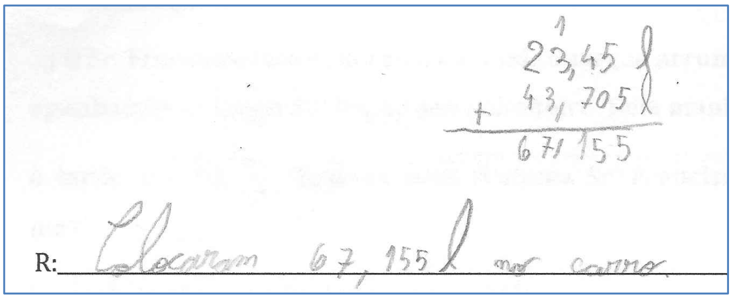


Figura 100- Representação de Maria para a resolução da questão 6.

Os três alunos escreveram os números decimais da mesma forma, representando primeiro a vírgula, seguida da parte inteira e só depois a parte decimal.

A sétima e última questão, pedia aos alunos que representassem nas tabelas as adições da questão 5 e da questão 6. Maria e Daniel resolveram a questão sem levantar dúvidas. Eduardo ficou parado alguns segundos, concentrado, a olhar para as tabelas, até pedir ajuda.

Eduardo – Professor, não estou a perceber.

Professor – Então Eduardo, tens de escrever na tabela os números decimais e depois adicionar.

Eduardo – Mas como? Já não me lembro...

Professor – Olha aqui, está aqui a vírgula que está a separar esta parte desta, lembras-te o que significam estas letras?

Eduardo –É décimas e centésimas? E aqui as unidades, já fizemos isso noutra ficha...

Foi necessário discutir com Eduardo alguns dos elementos da tabela. Acabou por se recordar que já tinha sido realizado este exercício na sétima aula.

Pela análise das entrevistas, é possível verificar que o desempenho dos alunos não foi consistente. Maria, revelou mais facilidade na realização da tarefa apresentando também menos erros, enquanto que Eduardo e Daniel cometeram mais erros e apresentaram mais dúvidas.

As entrevistas permitiram verificar, com mais pormenor, os conhecimentos adquiridos, assim como, os erros e as dúvidas de três alunos da turma, face aos temas trabalhados durante a Unidade de Ensino. Estes três alunos, Maria, David e Eduardo, apresentam níveis de desempenho e de compreensão diferentes.

Pela análise das entrevistas, é possível confirmar que a aprendizagem da adição de frações, com o mesmo denominador e com denominadores diferentes, com recurso à representação pictórica numa situação de grandeza discreta, e à barra numérica numa situação de grandeza contínua, foi apropriada pelos alunos.

A compreensão da adição de números decimais foi um tema que representou um maior desafio aos alunos. Foram utilizadas as representações pictórica com recurso ao modelo retangular, e reta numérica por justaposição retilínea. Uma dúvida que se manteve diz respeito ao sistema de posição dos números de decimais, apresentando os alunos dificuldade em compreender este conceito. Esta situação verificou-se na questão cinco, pelas dúvidas e erros apresentados pelos alunos, em que tinham de adicionar números decimais com recurso ao modelo retangular. Ainda assim, apresentaram mais facilidade na expressão numérica em quem ambas as parcelas apresentavam o mesmo número de casas decimais, conseguindo, neste caso, adicionar corretamente as duas parcelas. Quando a expressão numérica apresentava parcelas com números com diferentes casas decimais, os alunos revelaram dificuldade na sua resolução, inclusive a sua representação no modelo retangular. A adição de números decimais por justaposição retilínea também representou um desafio aos alunos. Maria, sendo uma aluna competente, apresentou dificuldade quando teve de adicionar os números decimais por justaposição retilínea, assim como Daniel e Eduardo. Este tema teve de ser discutido com mais profundidade com Eduardo e Daniel, a fim de os recordar do que tinha sido trabalhado durante a Unidade de Ensino. Após esta discussão, os alunos recordavam-se e realizavam as questões mais facilidade. Isto indica que é necessário tempo para que os alunos consolidem as aprendizagens assim como realizem tarefas, com alguma regularidade, que os ajudem a compreender este tema. No entanto, a adição números decimais através da utilização do algoritmo formal foi realizada sem dificuldade, pois já tinha sido introduzido pela professora da turma.

A adição de frações e de números decimais por justaposição retilínea é um tema que requer tempo para que os alunos se apropriem das ferramentas necessárias a sua compreensão. E, pelas duvidas apresentadas, podemos concluir que é importante trabalhar com maior profundidade os seguintes temas, (i) compreensão da representação fracionária, (ii) compreensão do sistema de posição de numeração decimal, (iii) compreensão da reta numérica enquanto recurso para a adição de frações de números decimais. Sem os alunos interiorizarem bem estes conceitos é difícil que possam recorrer à utilização da reta numérica, sem cometer erros, para efetuar a adição de frações e de números decimais.

Capítulo VI

Conclusão

Síntese do Estudo

A aprendizagem dos números racionais representa uma das áreas da Matemática mais exigentes, especialmente para os alunos mais novos. Ao desenvolver este estudo procurei mostrar como é possível promover a aprendizagem da adição de números racionais, centrando o processo de aprendizagem na compreensão. As investigações realizadas sobre este tema sugerem que a aprendizagem dos números racionais seja realizada de forma a que os alunos utilizem as diferentes representações e significados de número racional de forma flexível.

Ao elaborar este estudo, procurei compreender de que forma o trabalho com as diferentes representações (número decimal, fração, barra numérica e reta numérica) e significados (parte todo e medida) promove a compreensão e aprendizagem da adição de números racionais. O quadro teórico deste estudo engloba os seguintes temas: (i) aprendizagem dos números racionais (ii) representações de números racional, (iii) significados e (iv) ensino e aprendizagem da adição de frações e de números decimais.

Desenvolvi uma unidade de ensino que, para além de procurar dar respostas às minhas questões do estudo, promovesse nos alunos a compreensão sobre a adição de números racionais, seguindo as orientações do Programa e Metas Curriculares (2013), do NCTM (2000) e a restante revisão de literatura efetuada acerca dos números racionais. Este estudo decorreu durante o ano letivo de

2014/2015, tendo como participantes os alunos de uma turma do 3.º ano. Segui uma abordagem de investigação qualitativa, inserida no paradigma interpretativo. Desta turma selecionei três alunos aos quais realizei entrevistas com o objetivo de efetuar uma análise mais aprofundada. As principais fontes de dados foram as tarefas realizadas pelos alunos e as entrevistas. Também recolhi dados através de gravações áudio e vídeo das aulas e das entrevistas, notas de campo e do diário de bordo.

Conclusões do estudo

As conclusões centram-se especificamente nas questões do estudo, fazendo referência (i) às representações que usam os alunos para adicionar números racionais (pictórica, fração, decimal, barra ou reta numérica), (ii) aos erros mais comuns dos alunos na adição de números racionais quando usam diferentes representações (pictórica, fração, decimal, barra ou reta numérica, linguagem verbal), e (iii) aos fatores que contribuem para a compreensão dos alunos da adição de números racionais nas representações de fração e numeral decimal nos significados de parte-todo e medida.

Antes da unidade de ensino realizei um teste diagnóstico com o objetivo de verificar que conceções tinham os alunos acerca dos números racionais assim como das diferentes representações. Pelos registos dos alunos foi possível verificar que utilizaram de forma confortável a representação verbal para indicar representações pictóricas fazendo leituras como "dois sobre dois", "duas metades" ou até "uma unidade", para o significado de parte-todo. Relativamente a unidades discretas e contínuas, os alunos apresentaram dificuldade na identificação de frações em unidades discretas. Revelaram também dificuldade na questão que envolvia as barras de Cuisenaire, relativa ao significado de medida, não compreendendo que relação estabelecer entre as barras. A representação de números decimais na reta numérica também apresentou dificuldade pois os alunos não compreenderam a reta. Após uma discussão sobre os valores apresentados, a maioria dos alunos conseguiu resolver a questão. O mesmo aconteceu na questão seguinte em que os alunos não conseguiram construir a unidade a partir de uma parte dada, sendo necessário fazer a sua discussão. A comparação de frações com numeradores e denominadores diferentes também foi alvo de dificuldade e erros por parte dos alunos, assim como a comparação de números decimais em que apenas um aluno realizou corretamente esta questão.

No final do teste podemos verificar que as dúvidas e erros dos alunos se centram nos seguintes temas: (i) comparação de frações com denominadores diferentes, (ii), identificação da unidade a partir de uma fração, e (iii) compreensão do valor de posição do sistema de numeração decimal. Os alunos conseguem identificar frações unitárias a partir de uma representação pictórica, mas apresentam dificuldade na sua comparação, sendo um indicador que ainda não compreendem o significado do numerador e denominador da fração. A construção da unidade é outra área na qual os alunos apresentaram dificuldade, não conseguindo elaborar o todo, dada uma parte.

Representações

Na elaboração da unidade de ensino dei especial atenção à utilização de diferentes representações como suporte para compreensão e aprendizagem dos números racionais. Na primeira aula foi trabalhada a adição de frações com denominadores iguais e a adição com denominadores diferentes. As representações utilizadas foram a pictórica, barra numérica e fração. Estas facilitaram a compreensão, quando os alunos necessitavam de adicionar frações. As intervenções dos alunos mostraram que a componente visual foi muito importante para conseguirem relacionar a representação pictórica com a representação fracionária, facilitando a compreensão do significado das frações apresentadas. A barra numérica também facilitou a compreensão da adição de frações com denominadores diferentes tendo os alunos concluído que só se podem adicionar frações quando a unidade se encontra dividida em partes iguais. A referência frequente às "partes pintadas" mostra bem a importância que a barra numérica teve para os alunos.

Na segunda e terceira aulas propus aos alunos que adicionassem frações com diferentes denominadores. Utilizaram, progressivamente, a barra numérica com mais segurança para representar frações, chegando alguns alunos a escrever a respetiva expressão numérica junto à barra. Esta representação foi uma ferramenta muito útil pois permitiu que os alunos compreendessem com alguma facilidade a adição de frações com diferentes denominadores por justaposição retilínea. Nestas aulas, a partir das discussões, os alunos chegaram à generalização das frações equivalente a um meio, à extensão da multiplicação para os números racionais, enquanto adição sucessiva de frações e à propriedade comutativa da adição. Ainda na terceira aula que envolvia a resolução de problemas, foi interessante verificar as diferentes representações que os alunos utilizaram para encontrar a solução. A maioria utilizou a barra numérica, mas ainda houve alguns alunos que utilizaram a representação pictórica.

A quarta aula e seguintes envolviam o trabalho com números decimais. A quarta aula fez a introdução aos números decimais a partir das frações decimais e de representações pictóricas. O facto de haver um bolo serviu de referência para os alunos compreenderem uma décima e uma centésima parte da unidade. Esta aula foi importante no sentido em que é possível fazer referência a um mesmo número a partir de diferentes representações.

Na sexta aula os alunos realizaram o jogo do *Decimat*, com o objetivo de iniciarem a adição de números decimais. A representação retangular do decimat ajudou os alunos a compreender a representação da décima, embora a centésima e a milésima tivesse revelado mais dúvidas. Durante a realização do jogo os alunos registavam e pintavam corretamente os números que iam saindo nos dados, relacionando a representação verbal com a representação em fração e com a representação decimal. O objetivo da sexta aula era a utilização da reta numérica para efetuar a adição de números decimais por justaposição retilínea. Os alunos revelaram compreender a adição na reta numérica com o mesmo número de casas decimais. Foi também facilitadora da compreensão do sistema de posição de numeração decimal, no sentido em que, tal como se verificou nos *Decimats,* a componente visual desempenhou um papel importante na aprendizagem nestas idades.

A sétima e última aulas visava a adição formal de números decimais, recorrendo ao algoritmo. Os alunos, pelos conhecimentos que traziam da adição de números inteiros não revelaram dúvidas na realização do algoritmo, tendo realizado a maioria das questões da tarefa desta aula com facilidade. No entanto, não conseguiram escrever a expressão numérica numa tabela ordenada pelo sistema de posição de numeração decimal. Após discutir este aspeto com os alunos os alunos compreenderam o que representava a tabela assim como a ordem indicada em cada coluna.

A oitava aula foi destinada à avaliação final. Neste teste foi possível verificar as aprendizagens realizadas assim como algumas dúvidas que ainda permaneciam. A adição de frações com o mesmo denominador, a partir da representação pictórica não revelou dúvidas, mostrando que os alunos compreenderam e já se sentiam confortáveis na adição de frações, tanto com o mesmo denominador como com denominadores diferentes, sendo que estas últimas foram trabalhadas com recurso à barra numérica. A barra numérica foi a representação que melhor serviu os alunos em termos de facilitador da compreensão de conceitos, pois representa uma transição entre o modelo retangular e a reta numérica. A aprendizagem e compreensão dos números decimais não foi tão intuitiva como as frações. O sistema de posição de numeração decimal é uma área que requeria mais tempo para consolidar convenientemente. No entanto, os alunos compreenderam a relação entre fração decimal e número decimal.

Foi possível verificar também que os alunos começaram a utilizar a barra numérica, por iniciativa própria, para resolver algumas questões durante as aulas da unidade de ensino. A barra numérica permitiu ainda que os alunos chegassem a algumas generalizações interessantes como a generalização das frações equivalentes a um meio. A barra numérica, pela sua simplicidade, e como continuidade das representações pictóricas enquadradas num contexto de realidade e semi-realidade, mostrou ser um instrumento útil para promover a aprendizagem de números racionais.

Erros e dificuldades

Os erros e dificuldades sentidos pelos alunos são essencialmente de dois tipos: (i) dificuldade na utilização e representação gráfica de algumas representações e (ii) dificuldade na compreensão do sistema de posição de numeração decimal.

Na primeira aula, com a introdução da adição de frações com denominadores diferentes foi possível verificar um erro que se manifestou ainda na segunda aula, que dizia respeito à divisão da barra numérica em partes iguais. Este será um aspeto no qual terei de focar mais atenção quando utilizar novamente a barra numérica na aprendizagem dos números racionais. A utilização de âncoras poderá ser um bom recurso para que os alunos aprendam a estimar, e a localizar, frações na barra numérica, com mais rigor. Ainda na primeira aula, alguns alunos apresentaram dificuldade na compreensão do significado do numerador e do denominador da fração. Este é outro aspeto que os alunos devem consolidar antes de se introduzir a adição de frações e de números decimais.

Na segunda aula surgiu um novo erro relativamente à divisão da barra numérica, em que um aluno, após fazer a divisão da barra, contou as marcações e não os segmentos, acabando por errar o resultado. No entanto, durante a discussão apercebeu-se do erro que tinha cometido. As frações impróprias, também trabalhadas nesta aula, foi outro conceito que os alunos tiveram dificuldade em compreender. Os alunos ainda não tinham interiorizado que o denominador se refere ao número de partes em que se encontra dividida uma unidade e não ao total de partes de todas as unidades, no caso das frações impróprias.

A tarefa da terceira aula foi destinada à resolução de problemas inseridos num contexto de semi-realidade. Os alunos estiveram mais autónomos na utilização da barra numérica, mas ainda assim solicitaram ajuda para representar as frações.
No início da quarta aula, onde foi introduzida a adição de números decimais, foi apresentado um bolo representando o modelo retangular. Os alunos apresentaram dificuldade em compreender a centésima parte da unidade, pois alguns começaram por contar cada uma das fatias em que se encontrava o bolo, não tendo a noção de que seriam cem. As aulas relativas aos números decimais levantaram mais discussões pois os alunos apresentaram mais dificuldades. De salientar que a

compreensão do sistema de posição de numeração decimal é uma área importante que deverá estar consolidada antes de se avançar a para adição de números decimais, pois só assim os alunos podem compreender os procedimentos em vez de os mecanizar. Foi interessante verificar que os alunos não sabiam porque é que os números decimais tinham uma vírgula, embora já conhecessem os termos *parte inteira* e *parte decimal.*

A quinta aula, sobre o jogo com o *Decimats,* registou bastantes dúvidas não tendo o jogo corrido da melhor forma. Os alunos tiveram dificuldade em visualizar a centésima parte e a milésima parte da unidade. Foi necessário fazer várias discussões sobre a divisão do *Decimat* para que pudessem visualizar a unidade dividida em dez partes e, por sua vez, cada uma das dez partes dividida noutras dez perfazendo cada uma, uma centésima, até os alunos compreenderem de facto a sua representação. Optei por não insistir muito na milésima parte para garantir que consolidavam a décima parte e a centésima parte.

Pelas entrevistas, foi possível compreender com mais pormenor algumas dificuldades e erros dos alunos, nomeadamente relativamente à compreensão do sistema de posição de numeração decimal, onde os alunos não foram capazes de explicar porque é que aquela representação utiliza uma vírgula. Assim como apresentaram dúvidas na adição de números decimais em que as parcelas tinham diferentes números de casas decimais. Alguns conceitos mais elaborados como as frações impróprias e a milésima parte da unidade requerem um trabalho mais profundo e com mais tempo para que os alunos os compreendam, o que depois pode facilitar a realização de operações com números racionais.

Fatores que contribuem para aprendizagem

As primeiras aulas da unidade de ensino permitiram verificar que os alunos utilizam com facilidade as representações pictóricas para expressar as suas resoluções. Durante as discussões, a referência às "partes pintadas" era frequente quando os alunos queriam expressar as suas ideias. A primeira aula foi aquela que menos dificuldade apresentou, pois o contexto de semi-realidade em que se enquadrava a tarefa facilitou a compreensão da adição de frações com o mesmo denominador.

A adição de frações foi introduzida desde a primeira tarefa. Os alunos utilizaram a representação pictórica num contexto de semi-realidade. Nesta aula adicionaram frações próprias com o mesmo denominador e adicionaram frações unitárias com denominadores diferentes, numa situação envolvendo uma grandeza continua. A utilização do "painel de azulejo" facilitou a compreensão da adição e frações, no qual os alunos deveriam pintar as frações indicadas e indicar o total pintado. Este painel ajudou os alunos a compreender o significado do numerador e do denominador, dentro do significado de parte-todo. A adição de frações com denominadores diferentes já representou um desafio maior pois tinham de adicionar as frações com diferentes denominadores utilizando a barra numérica. Após algumas discussões sobre a representação de frações na barra os alunos começaram a ser mais cuidadosos na sua divisão assim como na representação das frações.

Na segunda aula foram introduzidas as frações impróprias numa questão que pedia aos alunos para adicionarem duas frações próprias com o mesmo denominador. O objetivo era levar os alunos a descobrir que era necessário juntar outra unidade à apresentada, para que fosse possível adicionar as duas frações. Foi na discussão, e após alguma orientação na divisão da barra numérica e na representação da primeira fração, que os alunos conseguiram descobrir que era necessário "juntar mais partes àquela barra", como referiram. Ainda nesta tarefa, relativamente à ultima questão, os alunos deveriam descobrir que, numa fração unitária, o número de vezes que se repete o valor do denominador é igual à unidade. Foi interessante verificar que três alunos representaram a expressão correspondente com uma multiplicação, conseguindo desta forma generalizar a multiplicação dos números naturais para os números racionais. Mais uma vez, a barra numérica, utilizada num contexto de semi-realidade, contribuiu para a aprendizagem da adição de frações com denominadores diferentes por justaposição retilínea. Na terceira aula foi realizada uma tarefa que envolvia a resolução de problemas para que os alunos utilizassem a reta numérica para encontrar a solução dos mesmos. De facto, os alunos acabaram por utilizar a barra numérica de forma flexível para chegar à solução dos problemas. Foi interessante verificar que uma aluna utilizou uma régua graduada para conseguir dividir a barra em partes iguais. Nesta aula, pela utilização da barra numérica, os alunos conseguiram generalizar a propriedade comutativa da adição de números naturais para a adição de frações.

A transição para os números decimais foi realizada na quarta aula, a partir das frações decimais, com recurso ao modelo retangular. A representação decimal não levantou dúvidas. Como já foi referido, a questão em que os alunos apresentaram mais dúvidas foi a compreensão do sistema de posição de numeração decimal, fazendo confusão entre décimas e centésimas. O recurso ao modelo retangular ajudou a clarificar este conceito, sendo o contexto familiar facilitador da compreensão dos alunos.

A realização do jogo do *Decimat*, desenvolvido na quinta aula, não surtiu o objetivo desejado, que era o de ajudar os alunos a compreender a adição de decimais, pois um dos erros por eles cometidos refere-se ao valor de posição dos números. No entanto, o *Decimat* ajudou a consolidar a compreensão do sistema de posição de numeração decimal, ficando os alunos a compreender melhor a diferença entre décimas e centésimas. Teria sido mais eficiente ter repartido a aula do jogo do *Decimat* em duas, uma para a escrita de números decimais e outra apenas para a adição.

Na sexta aula, a adição de números decimais foi realizada com recurso ao modelo retangular. Esta representação facilitou bastante a compreensão do sistema de posição dos números decimais assim como a sua adição. Ainda assim, este tema foi alvo de algumas discussões prolongadas pois não se revelou de fácil compreensão. A adição de números decimais na reta numérica foi mais problemática no sentido em que os alunos revelaram dificuldade em relacionar os números decimais com a divisão da própria reta. Ao contrário do modelo retangular, onde os alunos conseguiam visualizar as cem partes equitativas, na reta numérica já tiveram mais dificuldade, pois, pelas discussões efetuadas foi possível perceber que revelaram dificuldade em compreender as divisões da reta.

Na sétima aula os alunos tinham de resolver problemas que envolviam a adição de números decimais. Foi possível verificar que, por já estarem habituados e por uma questão de segurança, recorreram ao algoritmo formal para efetuar a adição de números decimais.

É possível concluir que as representações mais eficazes que promoveram a aprendizagem da adição de números decimais foram o modelo retangular e a barra numérica. O contexto de semi-realidade também facilitou a compreensão dos temas trabalhados. A reta numérica, por não ser tão intuitiva, foi uma representação que os alunos tiveram dificuldade em utilizar para adicionar números decimais por justaposição retilínea, confundindo com alguma frequência as marcações que representavam décimas e centésimas.

Reflexão final

No final da realização deste trabalho reconheço que a maioria dos alunos interpreta de forma correta a representação de fração, conseguindo compreender a adição de frações com recurso à barra numérica. A utilização de diferentes representações, nomeadamente a pictórica num contexto de semi-realidade, permitiram desenvolver a compreensão da adição de frações. A representação decimal de números racionais, assim como a utilização da representação da reta numérica para adicionar números decimais foi um tema que os alunos apresentaram dificuldade em compreender.

As dúvidas que me têm surgindo ao longo destes anos, enquanto professor de 1.º ciclo, guiaram esta experiencia de ensino com o objetivo de procurar dar resposta às questões que orientaram este estudo. A realização desta investigação constitui por isso um momento importante na minha carreira profissional. Todo o processo do estudo permitiu que compreendesse os passos de uma investigação, desde a formulação das questões, a construção e realização da unidade de ensino, a seleção dos textos para o quadro teórico, até à recolha e análise dos dados. As leituras que fiz para a construção do quadro teórico deram-me uma visão mais ampla e aprofundada sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais, tanto do ponto de vista científico como do ponto de vista didático. A análise dos dados foi o momento mais rico da investigação, onde, de uma forma atenta e detalhada, pude ir percebendo as dificuldades e aprendizagens realizadas pelos alunos. A dinâmica da turma foi um desafio que se impôs no início da unidade de ensino, levando a que tivesse de restruturar algumas das aulas com o objetivo de rentabilizar as aprendizagens, pois o tempo disponível (cerca de 45 minutos) teria de ser otimizado. Não foi tarefa fácil pois as discussões são momentos que requerem tempo e envolvência por parte dos alunos, com o propósito de os guiar, de acordo com as suas intervenções, aos objetivos propostos para cada aula.

No que diz respeito à dinâmica da aula, os alunos tiveram dificuldade em trabalhar a pares. Possivelmente pelas rotinas habituais da turma, os alunos, de uma forma natural, trabalharam sempre de forma individual, ainda que em todas as aulas lhes tivesse indicado que poderiam trabalhar a pares. Se o tivessem feito, teriam certamente realizado um trabalho mais interessante envolvendo-se nas questões das tarefas.

Não foi fácil desempenhar o duplo papel de investigador e de professor. Durante as sessões, o meu foco foi desenvolver discussões que me levassem a compreender as dificuldades dos alunos, mas, por outro lado, teria de garantir as suas aprendizagens. Sendo os números racionais um tema tão complexo e que tantas dúvidas coloca aos alunos, foi necessário, por vezes, apoiá-los individualmente, em detrimento de promover discussões em coletivo. O meu objetivo enquanto professor e investigador foi sempre o de promover e desenvolver o raciocínio dos alunos, questionando as dúvidas apresentadas durante as discussões, guiando-os para a solução correta. Efetivamente, quando estimulados com tarefas e discussões adequadas, os alunos conseguem efetuar justificações e generalizações bastante pertinentes, fruto de uma reflexão conjunta.

Verifico que a aprendizagem dos números racionais exige tempo. Tempo para dar a oportunidade aos alunos para refletir sobre os temas e as aprendizagens que vão realizando. Neste sentido, penso que este foi um aspeto menos conseguido. Seria necessário mais tempo para realizar tarefas e discussões que ajudassem os alunos a consolidar melhor a adição de números racionais por justaposição retilínea.

As limitações que se verificam nesta investigação poderão ser desenvolvidas num próximo estudo sobre os números racionais. Seria interessante estudar com mais profundidade as representações dos alunos delineando uma unidade de ensino que abordasse também a subtração de frações e de números decimais, com um foco especial na barra numérica para se trabalhar a subtração de frações.

Neste momento final de reflexão questiono-me sobre os passos dados no desenvolvimento desta investigação. Se recomeçasse, certamente teria realizado alguns passos de forma diferente. Teria privilegiado, a revisão de literatura ao longo de todo o estudo, e não apenas no início, pois foquei-me demasiado na análise de dados. Penso também que seria importante separar mais o papel de professor e de investigador. Desempenhando apenas o papel de investigador é possível observar com mais detalhe situações que, enquanto professor, me podem escapar.

Esta investigação representou um contributo importante para a minha formação enquanto professor do 1.º ciclo. No final deste estudo sinto-me mais confortável no trabalho com representações e números racionais. Do ponto de vista didático, o estudo permitiu-me verificar quais as dificuldades que impedem a compreensão e aprendizagem da adição de frações e de números decimais. Certamente que, numa próxima abordagem a este tema o farei com maior confiança e segurança, propondo e conduzindo a realização de tarefas que promovam a aprendizagem dos números racionais.

Referências

Barnett-Clarke, C., Fisher, W., Marks, R. & Ross, S. (2010). Developing essential understanding of rational numbers for teaching Mathematics in grades 3-5. Reston, VA: NCTM.

Behr, M., & Post, T. (1992). Teaching rational number and decimal concepts. In T. Post (Ed.), Teaching mathematics in grades K-8: Research-based methods (2nd ed.) (pp. 201-248). Boston, MA: Allyn & Bacon.

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver E. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of mathematics concepts and processes (pp. 91-125). New York, NY: Academic Press.

Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), Perspectives on mathematics education (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel,

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). Investigação qualitativa em educação: Introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora.

Bright, G., Behr, M., Post, T. & Wachsmuth, I. (1988). Identifying fractions on number lines. Journal for Research in Mathematics Education, 19(3), 215-232.

Brocardo, J. (2010). Trabalhar os números racionais numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número. Educação Matemática, 109, 19-22. Lisboa: APM.

Bruner, J. (1999). *Para uma teoria da educação*. Lisboa: Relógio d'Água.

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understanding of fractions. Educational Studies in Mathematics, 64, 293-316.

Clarke, D., M., Roche, A., & Mitchell, A. (2008). Ten practical, research-based tips for making fractions come alive (and make sense) in the middle years. Mathematics Teaching in the Middle School, 13(7), 373–380.

Cramer, K., Behr, M., Post T., Lesh, R. (1997). Rational Number Project: Fraction Lessons for the Middle Grades - Level 1, Kendall/Hunt Publishing Co., Dubuque Iowa. Retirado em 1 de agosto de 2015 de http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/rnp1-09.html

Cruz, M. S., & Spinillo, A. G. (2004). Resolvendo adição de frações através do simbolismo matemático e através de âncoras. Quadrante, 13(2), 3-29.

Freudenthal, H. (1991). Revisiting mathematics education. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Godino, J. D., Ruiz, F., Roa, R., Cid, E., Batanero, C., & Font, V. (2004). Didáctica de la matemática para maestros. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidade de Granada. Retirado em 5 de Novembro de 2009 de http://www.ugr.es/~jgodino/fprofesores.htm

Goldin, G. A. (2003). Representation in school mathematics: A unifying research perspective. In J. Kilpatrick, W. G Martin & D. Schifter (Eds.), A research companion to principles and standards for school mathematics (pp. 275-285). Reston, VA: NCTM.

Goldin, G. A., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. Cuoco (Ed.), The roles of representation in school mathematics (pp. 1-22). Reston, VA: NCTM.

Gravemeijer, K. (1994). Developing realistic mathematics education. Utrecht, The Netherlands: CD-B Press.

Gravemeijer, K.P.E. (1997). 'Mediating between concrete and abstract'. In T. Nunes and P. Bryant (eds.), Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective (pp. 315–343). Lawrence Erlbaum, Hove, Sussex, United Kingdom.

Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. Mathematical Thinking and Learning, 6(2), 105–128.

Gravemeijer, K. P. E. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In L. Santos, A. P. Canavarro, & J. Brocardo (Eds.), Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas (pp. 83-101). Lisboa: APM.

Gray, E. & Doritou, M. (2008). The number line: Ambiguity and interpretation. In O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepúlveda (Eds.), Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 97-104). Morelia, México.

Hannula, M. S. (2003). Locating fractions on a number line. In N A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.). Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (Vol. 3, pp. 3-24). Honolulu, HI: PME.

Izsák, A., Tillema, E., & Tunç-Pekkan, T. (2008). Teaching and learning fraction addition on number lines. Journal for Research in Mathematics Education, 39(1), 33-62.

Keijzer, R. (2003). Teaching formal mathematics in primary education – fraction learning as mathematising process. Freudenthal Institute. Utrecht.

Kieran, Y. (1980). The rational number construct- Its elements and mechanisms. In T. Kieran (Ed.) Recent research in number learning (pp. 125-143). Columbos, OH: ERIC/SMEAC.

Kieran, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades (pp. 162-181). Reston, VA: NCTM.

Lamon, S., J. (1993). Ratio and proportion: Children's cognitive and metacognitive process. In T.P. Carpenter, E. Fennema and T.A. Romberg (eds.), Rational Numbers: An Integration of Research (pp. 131–156). Lawrence Erlbaum Associates, New Jersey.

Lamon, S. (2002). Part-whole comparisons with unitizing. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), Making sense of fractions, ratios, and proportions (pp. 79-86). Reston, VA: NCTM.

Lamon, S., J., (2007). Rational Numbers and Proportional Reasoning. Toward a theoretical framework for research. In F. K. Lester (Jr. Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age Publishing, NCTM.

Llinhares, S., & Sánchez. (1997). Fracciones: la relación parte-todo. Madrid. Síntesis.

Mailley, E., & Moyer, P. (2004). Inchworm and a Half: Developing Fraction and Measurement Concepts Using Mathematical Representations. Teaching Children Mathematics, 10 (5), 244-252.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. For the Learning of Mathematics, 12(3), 2-8 e 44.

Ministério da Educação e Ciência. (2013). Programa e metas curriculares Matemática: Ensino básico. Lisboa: Direção Geral de Educação.

Middleton, J. A., van den Heuvel-Panhuizen, M. & Shew, J. A. (1998). Using bar representations as a model for connecting concepts of rational number. Mathematics Teaching in the Middle School, 3(4), 302–311.

Mitchell, A., & Horne, M. (2008). Fraction number line tasks and additivity concept of length measurement. In M. Goos, R. Brown, & K. Makar (Eds.), Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, 353–360

Monteiro, M. C., & Pinto, H. (2005). A aprendizagem dos números racionais. Quadrante, 14(1), 89-108.

Moss, J. (2005). Pipes, tubes, and beakers: rational-number system new approaches to teaching the rational number system. National Academy of Sciences. Obtido em 10 de maio de 2008, de http://books.nap.edu/catalog/10126.htm

Moss, J., & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. Journal for Research in Mathematics Education, 30, 122-147

NCTM (1980). An agenda for action: Recommendations for school mathematics for the 1908's. Reston, VA: NCTM.

NCTM (1991). Professional standards for teaching mathematics. Reston, VA: NCTM.

NCTM (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.

Oppenheimer, L., & Hunting, R. P. (1999). Relating fractions & decimals. Mathematics Teaching in The Middle School, 4(5), 318-321.

Pirie, S., & kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it? Educational Studies in Mathematics, 26, 165-190.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org), Reflectir e investigar sobre a prática profissional (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. Bolema, 25, 105-132.

Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2012). O papel do contexto nas tarefas matemáticas. Interacções, 22 (8), 196-216.

Quaresma, M. (2010). Ordenação e comparação de números racionais em diferentes representações: uma experiência de ensino (Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa).

Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), Investigar para aprender Matemática (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. Bolema, 14, 66-91.

Sweeney, E., & Quinn, R. (2000). Concentration: Connecting fractions, decimals and percents. Mathematics Teaching in the Middle School, 5 (5), 324-328.

Silvestre A. (2015). A Matemática nos Primeiros Anos de Escolaridade em Singapura: Reflexão. Educação Matemática, 132, 19-22.

Streeflenad, L. (1982) Subtracting fractions with different denominators. Educational Studies in Mathematics 13, 233-255.

Streefland, L. (1993). Fractions. A Realistic Approach. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), Rational Numbers: An Integration for Reasearch (pp. 289-325),Hillsdale, NJ: Laurence Erlbaum Associates.

Valério, N. (2005). Papel das representações na construção da compreensão matemática dos alunos do 1.º ciclo. Quadrante, 14(1), 37-65.

van den Heuvel-Panhuizen, M. & Shew, J. A. (1998). Using bar representations as a model for connecting concepts of rational number. Mathematics Teaching in the Middle School, 3(4), 302–311.

van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in Realistic Mathematics Education: an example from longitudinal trajectory on percentage. Educational Studies in Mathematics, 54(1), 9-35.

Ventura, H., (2013). A aprendizagem dos números racionais através das conexões entre as suas representações: uma experiência de ensino no 2.º ciclo do ensino básico. (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa)

Webb, D., Boswinkel, N., & Dekker, T. (2008). Beneath the tip of the iceberg: Using representations to student understanding. Mathematics Teaching in the Middle School, 14(2), 110-113.

Anexos

Anexo 1 - Esquema da unidade de ensino

Tópico	Objetivos/Capacidades a desenvolver	Representações	Significado	Tarefa
Adição com frações	- Adicionar frações com o mesmo denominador e com denominadores diferentes, tendo como base uma representação pictórica e a barra numérica	Pictórica Fração Barra numérica	Parte-todo	Tarefa 1
	- Adicionar frações, recorrendo à barra numérica, por justaposição retilínea. - Compreender que, para se adicionar frações com denominadores diferentes, é necessário substituir as frações por outras equivalentes com o mesmo denominador. - Realizar a adição de frações utilizando o algoritmo.	Barra numérica Fração Verbal	Medida	Tarefa 2
	- Resolução de problemas.	Pictórica Barra numérica Fração Verbal	Parte-todo Medida	Tarefa 3
Adição com decimais	- Representar frações decimais como dízimas.	Pictórica Fração Número decimal	Parte-todo	Tarefa 1
	- Representar frações decimais como dízimas.	Pictórica Fração Número decimal	Parte-todo	Tarefa 2
	- Adicionar números racionais representados na forma de dízima utilizando a representação pictórica. - Adicionar números racionais representados na forma de dízima utilizando a reta numérica. - Adicionar números racionais representados na forma de dízima utilizando o algoritmo formal.	Pictórica Número decimal Reta numérica	Parte-todo Medida	Tarefa 3
	- Efetuar o algoritmo formal da adição de números decimais. - Resolução de problemas.	Pictórica Número decimal Reta numérica Fração	Parte-todo Medida	Tarefa 4

Anexo 2 – Planificação da primeira aula

Adição de Frações - 1º aula

1. Aspetos gerais

1. Objetivo de aprendizagem: Utilização da representação pictórica, e posteriormente da reta numérica, para efetuar a adição de frações.
2. Estratégia geral: Proposta da "Tarefa 1", composta por duas questões com várias alíneas.
3. Estrutura da aula: Apresentação do objetivo da aula; resolução das questões em pares seguida da discussão coletiva (a resolução por parte dos alunos assim como a respetiva discussão será efetuada questão a questão); síntese final.
4. Recursos a usar: ficha de trabalho, *cTouch Board*.

2. Desenvolvimento da aula

Tarefas e atividades de Aprendizagem	Duração Esperada	Atividade dos alunos e possíveis dificuldades	Respostas do professor e aspetos a ter em atenção	Objetivos e avaliação
1. Introdução	3m	▪ Responder a algumas questões acerca das frações.	▪ Introdução ao objetivo da aula. ▪ Levantamento de questões acerca do numerador e do denominador de uma fração.	▪ Mostrar compreensão relativamente ao significado de fração enquanto parte-todo, compreendendo o que representa o numerador e o denominador da fração.
2. Resolução da questão 1(em pares) e discussão.	10 min (5m + 5m)	▪ Leitura do enunciado. Levantamento e esclarecimento de dúvidas acerca da questão 1 e 1.1.	▪ Levantar a questão acerca de diferentes modos de pintar a unidade.	▪ Pintar corretamente as frações indicadas.
3. Resolução da questão 1.2 (em pares) e discussão.	10 min (5m + 5m)	▪ Adicionar as frações apenas por contagem. ▪ É esperado que respondam "6 partes" ou "6/7" ou apenas "6".	▪ Guiar os alunos para a representação correta da fração.	▪ Compreender a resposta 6/7
4. Resolução da questão 2.1 (em pares) e discussão.	10 min (5m + 5m)	▪ Os alunos podem pintar metade do modelo retangular ou apenas fazer a marcação na reta.	▪ Associar e mostrar aos alunos as duas representações na dupla reta numérica.	▪ Compreender a relação entre o modelo retangular e a reta numérica.
5. Resolução da questão 2.2 (em pares) e discussão.	10 min (5m + 5m)	▪ Os alunos podem pintar metade do modelo retangular ou apenas fazer a marcação da metade na reta.	▪ Associar e mostrar aos alunos as duas representações na dupla reta numérica.	▪ Compreender a relação entre o modelo retangular e a reta numérica.
6. Resolução da questão 2.3(em pares) e discussão.	10 min (5m + 5m)	▪ Poderão surgir dúvidas relativamente à representação da das duas frações na mesma reta.	▪ Relacionar ½ e ¼, sendo ¼ metade da metade. ▪ Qual será o total comido? ▪ Qual será o denominador a utilizar? Meios ou quartos? Porquê?	▪ Compreender a adição de frações com diferentes denominadores na reta numérica.

Anexo 3 – Planificação da segunda aula

Adição de Frações - 2º aula

1. Aspetos gerais

1. Objetivo de aprendizagem: Utilização da reta numérica para adicionar frações.
2. Estratégia geral: Proposta da "Tarefa 2", composta duas questões em que primeira questão contém quatro alíneas.
3. Estrutura da aula: Apresentação do objetivo da aula; resolução das questões em pares seguida da discussão coletiva (a resolução por parte dos alunos assim como a respetiva discussão será efetuada questão a questão); síntese final.
4. Recursos a usar: ficha de trabalho, *cTouch Board*.

2. Desenvolvimento da aula

Tarefas e atividades de Aprendizagem	**Duração Esperada**	**Atividade dos alunos e possíveis dificuldades**	**Respostas do professor e aspetos a ter em atenção**	**Objetivos e avaliação**
1. Introdução	3m	▪ Rever algumas questões da última tarefa acerca da adição com denominadores diferentes.	▪ Introdução ao objetivo da aula. ▪ Levantamento de questões acerca do numerador e do denominador de uma fração.	▪ Mostrar compreensão relativamente ao significado de fração enquanto parte-todo, compreendendo o que representa o numerador e o denominador da fração.
2. Resolução da questão 1.1 (em pares) e discussão.	10 min (5m + 5m)	▪ Leitura do enunciado. Levantamento e esclarecimento de dúvidas.	▪ Representação da fração. Relevar o facto de estarmos a desenhar um segmento de reta que corresponde à fração total da unidade.	▪ Pintar corretamente as frações indicadas.
3. Resolução da questão 1.2 (em pares) e discussão.	10 min (5m + 5m)	▪ Leitura do enunciado. Levantamento e esclarecimento de dúvidas.	▪ Representação da fração. Relevar o facto de estarmos a desenhar um segmento de reta que corresponde à fração total da unidade.	▪ Pintar corretamente as frações indicadas.
3. Resolução da questão 1.3 (em pares) e discussão.	10 min (5m + 5m)	▪ Leitura do enunciado. Levantamento e esclarecimento de dúvidas.	▪ Representação da fração. Relevar o facto de estarmos a desenhar um segmento de reta que corresponde à fração total da unidade.	▪ Pintar corretamente as frações indicadas.
3. Resolução da questão 1.4 (em pares) e discussão.	10 min (5m + 5m)	▪ Leitura do enunciado. Levantamento e esclarecimento de dúvidas. ▪ Os alunos poderão tentar representar tudo dentro da mesma reta (unidade).	▪ Guiar os alunos para a representação correta da fração. ▪ Salientar que a divisão se refere a uma unidade e deve ser igual.	▪ Compreender que a adição de frações poderá representar uma parte maior que uma unidade.
3. Resolução da questão 2 (em pares) e discussão.	10 min (5m + 5m)	▪ Representação das várias frações seguidas. ▪ Poderá haver dificuldade me associar a fração ao número de crianças.	▪ Quantas vezes repetimos ¼? ▪ Numa fração unitária o número de vezes em que se repete o valor do denominador é igual à unidade.	▪ Compreender que a adição de frações pode dar um valor maior que a unidade. ▪

Anexo 4 – Planificação da terceira aula

Adição de Frações - 3º aula

1. Aspetos gerais

1. Objetivo de aprendizagem: Resolução de problemas. Utilizar as diferentes representações para auxiliar na resolução de problemas.
2. Estratégia geral: Proposta da "tarefa 3", composta quatro questões.
3. Estrutura da aula: Apresentação do objetivo da aula; resolução das questões em pares seguida da discussão coletiva (a resolução por parte dos alunos assim como a respetiva discussão será efetuada questão a questão); síntese final.
4. Recursos a usar: ficha de trabalho, *cTouch Board*.

2. Desenvolvimento da aula

Tarefas e atividades de Aprendizagem	**Duração Esperada**	**Atividade dos alunos e possíveis dificuldades**	**Respostas do professor e aspetos a ter em atenção**	**Objetivos e avaliação**
1. Introdução	3m	▪ Rever algumas questões da última tarefa acerca da adição de frações. ▪ Falar sobre as frações impróprias.	▪ Introdução ao objetivo da aula. ▪ Salientar que os alunos podem utilizar diferentes representações, pondo ênfase na reta numérica.	▪ Mostrar compreensão relativamente às frações impróprias.
2. Resolução da questão 1(em pares) e discussão.	10 min (5m + 5m)	▪ Leitura do enunciado. Levantamento e esclarecimento de dúvidas. ▪ A representação mais comum será desenhar as tortas. É esperado que desenhem também a reta numérica	▪ Representação e resolução do problema na reta numérica. ▪ Utilizar a dupla reta numérica para relacionar as representação pictórica com a reta numérica.	▪ Resolução correta do problema.
3. Resolução da questão 2(em pares) e discussão.	10 min (5m + 5m)	▪ Leitura do enunciado. Levantamento e esclarecimento de dúvidas. ▪ Os alunos poderão perguntar quantas páginas tem o livro.	▪ Representação e resolução do problema na reta numérica. ▪ Será importante reforçar que se está a falar de partes do livro, independentemente do número de páginas.	▪ Resolução correta do problema.
3. Resolução da questão 3(em pares) e discussão.	10 min (5m + 5m)	▪ Leitura do enunciado. Levantamento e esclarecimento de dúvidas. ▪ Representação de duas retas numéricas para representar as frações e posteriormente uma terceira que representa a adição.	▪ Representação e resolução do problemas na reta numérica. ▪ Relembrar qual é o denominador que devemos utilizar como referencia para adicionar as frações (frações equivalentes).	▪ Resolução correta do problema.
3. Resolução da questão 3.1 (em pares) e discussão.	10 min (5m + 5m)	▪ Leitura do enunciado. Levantamento e esclarecimento de dúvidas. ▪ Comparação de frações com diferentes denominadores.	▪ Representação e resolução do problemas na reta numérica.	▪ Compreender que a adição de frações poderá representar uma parte maior que uma unidade.
3. Resolução da questão 4 (em pares) e discussão.	10 min (5m + 5m)	▪ Semelhante ao exercício anterior. A soma das frações tem como resultado a unidade.	▪ Representação e resolução do problemas na reta numérica.	▪ Compreender que a adição de frações pode dar um valor igual à unidade.

Anexo 5 – Planificação da quarta aula

Adição de números decimais - 4º aula

1. Aspetos gerais

1. Objetivo de aprendizagem: Utilizar a representação pictórica para identificar frações decimais.
2. Estratégia geral: Proposta da "Tarefa 4", composta três questões com várias alíneas.
3. Estrutura da aula: Apresentação do objetivo da aula; resolução das questões em pares seguida da discussão coletiva (a resolução por parte dos alunos assim como a respetiva discussão será efetuada questão a questão); síntese final.
4. Recursos a usar: ficha de trabalho, *cTouch Board*.

2. Desenvolvimento da aula

Tarefas e atividades de Aprendizagem	**Duração Esperada**	**Atividade dos alunos e possíveis dificuldades**	**Respostas do professor e aspetos a ter em atenção**	**Objetivos e avaliação**
1. Introdução.	5m	▪ Pequena revisão sobre as frações que foram trabalhadas.	▪ Introdução ao objetivo da aula.	▪ Mostrar compreensão relativamente às frações.
2. Resolução da questão 1.1(em pares) e discussão.	4 min (2m + 2m)	▪ Este exercício não deverá levantar grandes dúvidas. Os alunos apenas têm de seguir as indicações. ▪ Poderão surgir algumas dúvidas na interpretação.	▪ Será importante explicar o enunciado do problema.	▪ Resolução correta do exercício.
3. Resolução da questão 1.2(em pares) e discussão.	4 min (2m + 2m)	▪ Este exercício não deverá levantar grandes dúvidas. Os alunos apenas têm de seguir as indicações.	▪ Explicar o que são frações decimais. ▪ Relação entre fração decimal e número decimal.	▪ Mostrar compreensão em relação à identificação das frações decimais.
3. Resolução da questão 2.1(em pares) e discussão.	10 min (5m + 5m)	▪ A figura 2 representa 10/100 ou 1/10 da figura 1.	▪ Reforçar que a unidade é representada pelos 10 quadradinhos da figura 2.	▪ Mostrar compreensão em relação à identificação das frações decimais.
3. Resolução da questão 3 (em pares) e discussão.	10 min (5m + 5m)	▪ Na figura 1 poderão responder ½. ▪ Na figura 2 os alunos poderão responder 18/20.	▪ Reforçar a ideia da divisão da unidade, salientando que que esse valor é representado pelo denominador.	▪ Compreender as diferentes representações das frações decimais.

Anexo 6 – Planificação da quinta aula

Adição de números decimais - 5º aula

1. Aspetos gerais

1. Objetivo de aprendizagem: Utilizar a representação pictórica para identificar frações decimais.
2. Estratégia geral: Jogo do *Decimat.* Ficha com a tarefa de trabalho com a Tarefa 5.
3. Estrutura da aula: Apresentação do objetivo da aula; Explicação e exemplificação do jogo do *Decimat.* Resolução da ficha de trabalho. Síntese final.
4. Recursos a usar: Jogo do *Decimat*, ficha de trabalho, *cTouch Board*.

2. Desenvolvimento da aula

Tarefas e atividades de Aprendizagem	**Duração Esperada**	**Atividade dos alunos e possíveis dificuldades**	**Respostas do professor e aspetos a ter em atenção**	**Objetivos e avaliação**
1. Introdução.	5m	▪ Dúvidas sobre o jogo.	▪ Revisão sobre as frações decimais e os números decimais. ▪ Explicação das regras e funcionamento do jogo. ▪ Ter atenção à representação das décimas, centésimas e milésimas no *Decimat.*	▪ Mostrar compreensão relativamente ao funcionamento do jogo.
2. Jogo do *Decimat*(em pares) e discussão.	30 min? (20m + 10m)	▪ Dúvidas na representação dos números decimais.	▪ Exemplificar casos que possam surgir, como ter de dividir uma nova unidade para completar um número.	▪ Mostrar compreensão relativamente ao funcionamento do jogo.
3. Resolução da Tarefa 2(em pares) e discussão.	10 min (5m + 5m)	Dúvidas na representação dos números decimais.	▪ Explicar o que são frações decimais. ▪ Relação entre fração decimal e número decimal.	▪ Mostrar compreensão em relação à identificação, leitura e escrita dos números decimais.

Anexo 7 – Planificação da sexta aula

Adição de números decimais - 6º aula

1. Aspetos gerais

    1. Objetivo de aprendizagem: relacionar a representação de fração decimal e de número decimal. Representar e adicionar números decimais com recurso à representação pictórica e à reta numérica.
    2. Estratégia geral: Realização de uma ficha de trabalho com a Tarefa 6, composta por três exercícios.
    3. Estrutura da aula: Apresentação do objetivo da aula; resolução das questões em pares seguida da discussão coletiva (a resolução por parte dos alunos assim como a respetiva discussão será efetuada questão a questão); síntese final.
    4. Recursos a usar: Ficha de trabalho, cTouch *Board*.

2. Desenvolvimento da aula

Tarefas e atividades de Aprendizagem	**Duração Esperada**	**Atividade dos alunos e possíveis dificuldades**	**Respostas do professor e aspetos a ter em atenção**	**Objetivos e avaliação**
1. Introdução.	5m	▪ Dúvidas relativamente à escrita de números decimais.	▪ Revisão sobre o que foi aprendido através do jogo *Decimat*.	▪ Mostrar compreensão relativamente ao funcionamento do jogo.
2. Resolução do exercício 1 (em pares) e discussão .	10 min (5m + 5m)	▪ Poderão representar 0,3 pintando apenas três quadrados, assim como em 1,0 poderão pintar dez quadrados.	▪ Relembrar o jogo *Decimat* assim como as divisões associadas (décima, centésima e milésima).	▪ Compreender a relação entre o número decimal apresentado e a parte pintada na unidade.
3. Resolução do exercício 2 (em pares) e discussão ..	10 min (5m + 5m)	▪ Dúvidas na representação dos números decimais.	▪ Rever as frações decimais. ▪ Relação entre fração decimal e número decimal.	▪ Mostrar compreensão em relação à identificação, leitura e escrita dos número decimais.
Resolução do exercício 3 (em pares) e discussão .	10 min (5m + 5m)	▪ Confusão na representação das décimas e das centésimas.	▪ Explicar a divisão da reta numérica.	▪ Compreender a representação e adição de números na reta numérica.

Anexo 8 – Planificação da sétima aula

Adição de números decimais - 7º aula

1. Aspetos gerais

1. Objetivo de aprendizagem: Adição de números decimais utilizando o algoritmo formal. Resolução de problemas
2. Estratégia geral: Realização de uma ficha de trabalho com a Tarefa 7, composta por três exercícios.
3. Estrutura da aula: Apresentação do objetivo da aula; resolução das questões em pares seguida da discussão coletiva (a resolução por parte dos alunos assim como a respetiva discussão será efetuada questão a questão); síntese final.
4. Recursos a usar: Ficha de trabalho, *cTouch Board*.

2. Desenvolvimento da aula:

Tarefas e atividades de Aprendizagem	Duração Esperada	Atividade dos alunos e possíveis dificuldades	Respostas do professor e aspetos a ter em atenção	Objetivos e avaliação
1. Introdução.	5m	▪ Dúvidas relativamente à escrita de números decimais.	▪ Revisão sobre a leitura e escrita de números decimais.	▪ Mostrar compreensão relativamente aos números decimais.
2. Resolução do exercício 1 (em pares) e discussão .	10 min (5m + 5m)	▪ Representar incorretamente os números decimais na tabela.	▪ Relembrar a diferença entre, por exemplo:0,3; 0,30 e 0,03 utilizando a representação pictórica. ▪ Relembrar como eram efetuadas as adições no *Decimat.*	▪ Adicionar corretamente os números decimais.
3. Resolução do exercício 2 (em pares) e discussão ..	10 min (5m + 5m)	▪ Dúvidas na representação dos números decimais.	▪ Rever as frações decimais. ▪ Relação entre fração decimal e número decimal.	▪ Mostrar compreensão em relação à identificação, leitura e escrita dos número decimais.
Resolução do exercício 3 (em pares) e discussão .	10 min (5m + 5m)	▪ Dificuldade na interpretação do exercício.	▪ Explicar as unidades de medida de comprimento e	▪ Compreender a representação e adição de números.

Anexo 9 - Tabela de objetivos do teste diagnóstico

	Tarefa 1	Tarefa 2				Tarefa 3			Tarefa 4	
Questão	1	1	2	3.1	3.2	1.1	1.2	1.3	1	2
Objetivo	Pintar e escrever a parte representada em fração.	Identificar a metade	Identificar partes da unidade	Pintar parte de uma unidade discreta	Pintar parte de uma unidade discreta	Identificar e relacionar partes da unidade	Identificar e relacionar partes da unidade	Identificar e relacionar partes da unidade	Representar números decimais na reta numérica.	Identificar a unidade a partir de uma parte dada
Representação	Frações, pictórica, verbal	Pictórica, verbal	Pictórica, fração	Pictórica, verbal	Pictórica, verbal	Pictórica, verbal	Pictórica, verbal	Pictórica, verbal	Número decimal, reta numérica	Fração, reta numérica
Significado	Parte todo	Parte todo	Parte todo	Parte todo	Parte todo	Parte todo, medida	Parte todo, medida	Parte todo, medida	Parte todo	Parte todo
Grandeza	Continua	Continua	Continua	Discreta	Discreta	Continua	Continua	Continua	Continua	Continua
Tipo de tarefa	Exercício	Exercício	Exercício	Exercício	Exercício	Exercício	Exercício	Exercício	Exercício	Exercício

Tarefa 5					Tarefa 6					
1	2	3	4	5	1.1	1.2	1.3	1.4	2	3
Comparação de frações.	Comparação de frações.	Comparação de números decimais.	Ordenação de frações	Ordenação de números decimais	Escrever na forma de fração parte de uma unidade.	Escrever na forma de fração parte de uma unidade.	Escrever na forma de fração parte de uma unidade.	Identificar a unidade.	Operações com frações. (intuitivo)	Operaçõe com frações. (intuitivo)
Fração	Verbal	Número decimal	Fração	Número decimal	Fração, pictórica, verbal	Fração, pictórica, verbal	Fração, pictórica, verbal	Fração, pictórica, verbal	Fração, pictórica, verbal	Fração.
Parte todo	Parte todo	Parte todo	Parte todo	Parte todo	parte todo	parte todo	parte todo	parte todo	parte todo	parte tod
Continua	Continua	Continua	Continua	Continua	Discreta	Discreta	Discreta	Discreta	Discreta	Continua
Exercício	Problema	Exercício	Exercício	Exercício	Exercício	Exercício	Exercício	Exercício	Problema	Problema

Anexo 10 – Resultados do teste diagnóstico

Teste Diagnóstico																							
07/01/2015	Tarefa 1						Tarefa 2									Tarefa 3			Tarefa 4				
	1						1			2				3		1			1				2
	Fig. 1		Fig 2		Fig 3		Fig A	Fig B	Fig C	Fig A	Fig B	Fig C	Fig D	3.1	3.2	1.1	1.2	1.3	"0,5"	"0,75"	"1,25"	"1,5"	
	Rep. Pict.	Escrita	Rep. Pict.	Escrita	Rep. Pict.	Escrita																	
Catarina	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Maria	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Andreia	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Joana	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
Sérgio	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Luísa	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Eduardo	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Alexandra	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
Teresa	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
Daniel	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Ana	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Nádia	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Resultados corretos	**12**	**11**	**12**	**5**	**12**	**10**	**11**	**11**	**11**	**12**	**12**	**12**	**12**	**12**	**11**	**12**	**12**	**12**	**12**	**12**	**12**	**12**	**10**

Tarefa 5									Tarefa 6						Total
1			2	3			4	5	1				2	3	38
Comp. 1	Comp. 2	Comp. 3		Comp. 1	Comp. 2	Comp. 3			1.1	1.2	1.3	1.4			
1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	**32**
1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	**31**
1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	**30**
1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	**29**
0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	**24**
1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	**34**
1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	**30**
1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	**31**
1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	**28**
1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	**32**
1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	**34**
1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	**26**
11	**8**	**7**	**11**	**11**	**1**	**7**	**2**	**1**	**10**	**11**	**9**	**9**	**2**	**1**	**30**

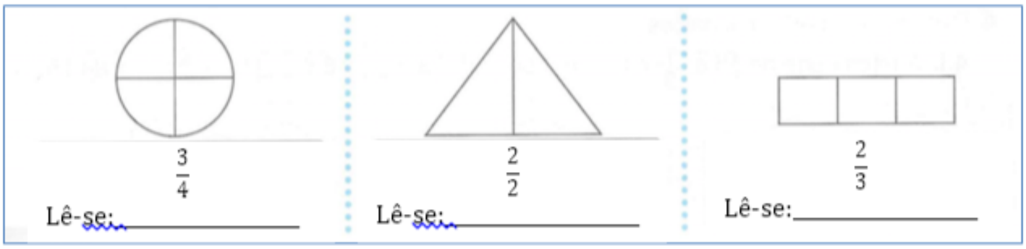
Anexo 11 - Teste diagnóstico

Nome:____ Data:____________

Teste Diagnóstico – Números Fracionários

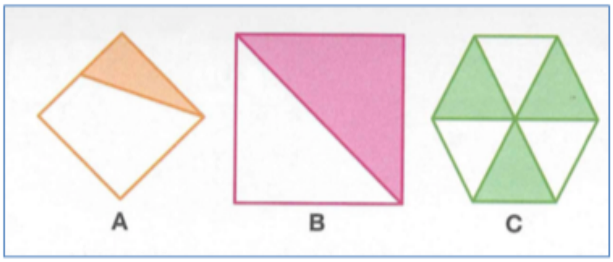
Tarefa 1

1) Pinta em cada figura a parte representada pela fração e completa com a leitura da fração.

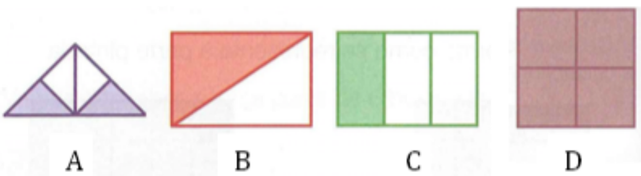


Tarefa 2

1) Quais das figuras representadas corresponde à metade? Rodeia a letra.



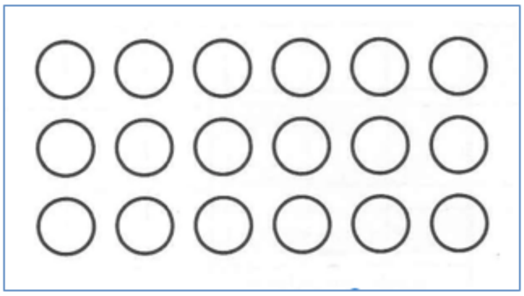
2) Como podes representar, na forma de fração, a parte pintada de cada figura?



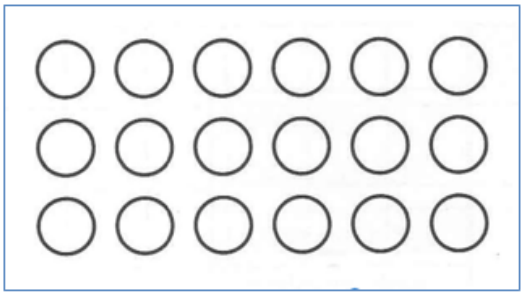
A: ☐ B: ☐ C: ☐ D: ☐

3) Observa as seguintes figuras.

3.1) Pinta metade dos berlindes.

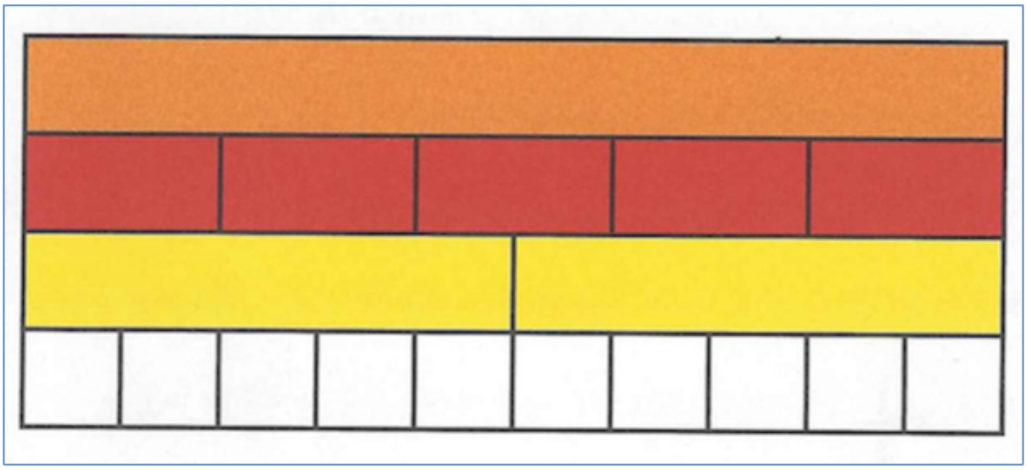


3.2) Pinta um terço dos berlindes.



Tarefa 3

1) Observa as relações que se podem estabelecer entre as barras coloridas e responde às questões:



1.1) Qual é a cor da barra em que cada parte corresponde à metade da barra laranja?

____

1.2) Qual é a cor da barra que corresponde à quinta parte da barra laranja?

____

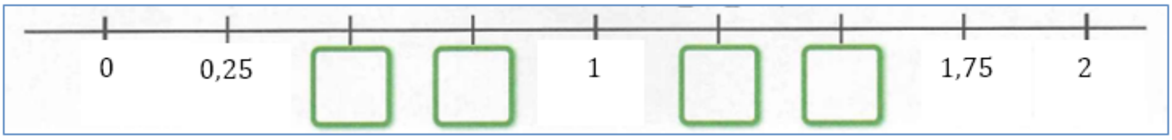
1.3) Qual é a cor da barra que corresponde à décima parte da barra laranja?

____

Tarefa 4

1) Representa na reta numérica os seguintes valores:

0,75 0,50 1,50 1,25



2) Se o segmento apresentado na reta representa metade assinala, aproximadamente, a unidade.

$\frac{1}{2}$

Tarefa 5

1) Compara as frações utilizando os sinais de >, < ou =.

$\frac{2}{3}$ ☐ $\frac{1}{3}$ $\frac{3}{5}$ ☐ $\frac{6}{10}$ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{1}{6}$

2) O Pai Natal trouxe à Estrela e à Lua um chocolate igual para cada uma. Observa o diálogo entre as duas irmãs e responde à pergunta:

Lua – "Eu já comi metade do meu chocolate!"
Estrela - " Eu já comi dois quartos do meu, já comi mais que tu!"

Será que a Estrela tem razão na afirmação que fez?

____

3) Compara os números decimais utilizando os sinais de >, < ou =.

0,5 ☐ 0,8   0,10 ☐ 0,1   1,0 ☐ 0,10

4) Ordena as seguintes frações por ordem crescente:

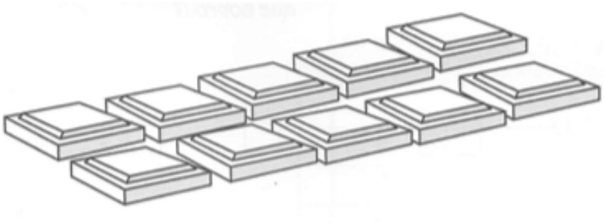
$\frac{4}{10}$ $\frac{6}{10}$ $\frac{5}{5}$ $\frac{7}{10}$ $\frac{6}{5}$	___ < ___ < ___ < ___ < ___

5) Ordena os seguintes números decimais por ordem crescente:

1,0 1,25 0,3 0,35 0,9	___ < ___ < ___ < ___ < ___

Tarefa 6

1) De um chocolate dividido em dez quadradinhos, ontem comi três quadradinhos e hoje comi mais cinco quadradinhos.



1.1) Escreve, em fração, a parte que comi ontem:_________________

1.2) Escreve a fração correspondente ao que comi hoje:__________________

1.3) Escreve a fração que representa a parte que sobrou:________________________

1.4) Que fração representa a totalidade do chocolate: ________________________

2) Vão ser distribuídas 6 revistas por 3 crianças. Lê o diálogo:

Quem receberá menos revistas? Quantas serão? ____

3) Lê o problema e responde à questão.

Durante três dias, o Osvaldo leu um livro com 100 páginas. No primeiro dia leu até à página 25. No segundo dia leu mais $\frac{37}{100}$ do livro. E, no terceiro dia, o Osvaldo leu o restante. Em que dia o Osvaldo leu a maior parte do livro? Escreve a resposta também na forma decimal.

Bom trabalho!

Anexo 12 – Tarefa 1

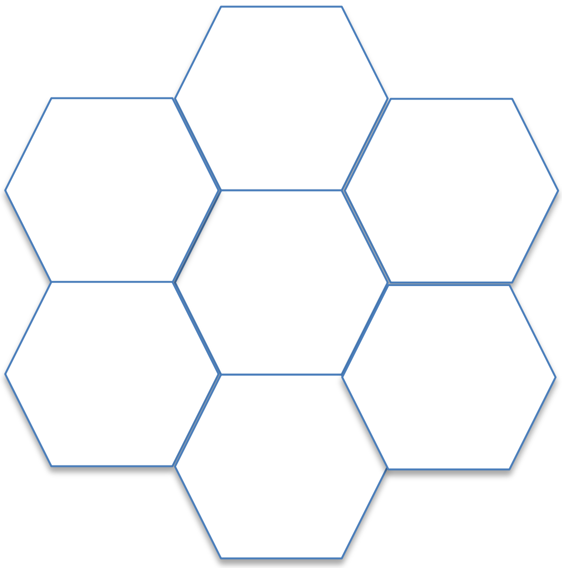
Nome:____ Data:____________

Adição de frações

Tarefa 1

1) A Luna e o Tomás estão a decorar uma figura dividida em sete partes iguais. A Luna já pintou $\frac{4}{7}$ de azul e o Tomás já pintou $\frac{2}{7}$ verde.

1.1) Pinta, na figura, a parte pintada pela Luna e a parte pintada pelo Tomás.



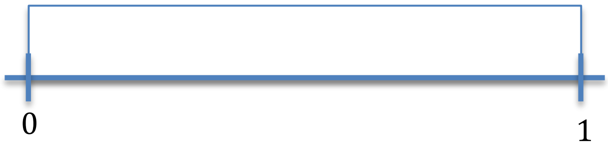
1.2) Que fração total da figura pintaram os dois amigos? Explica por palavras tuas.

2) O Guilherme e a Carolina, que estavam numa festa de aniversário, conversavam um com o outro:

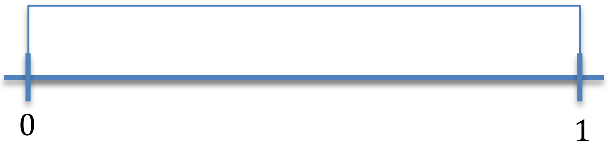
- Aquela torta estava deliciosa, já comi metade dela! - Comentou o Guilherme.

- Eu também acho, pois eu cá já comi $\frac{1}{4}$ da tarte! – Respondeu a Carolina.

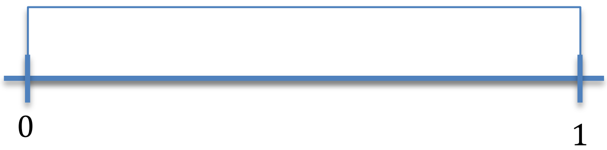
2.1) Representa na figura a parte que o Guilherme comeu.



2.2) Representa na figura a parte que a Carolina comeu.



2.3) Representa na figura o total comido pelos dois amigos.



Anexo 13 – Tarefa 2

Nome:____ Data:______________

Adição de frações

<u>**Tarefa 2**</u>

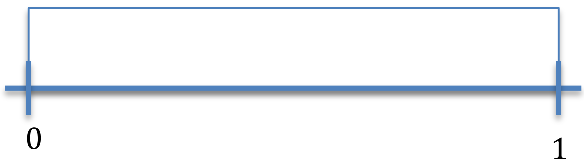
2) Repara agora na conversa entre a Carolina e a Isabel.

Carolina - Bem Isabel, nem imaginas, fartei-me de comer salame de chocolate, devo ter comido dois quartos de um salame!

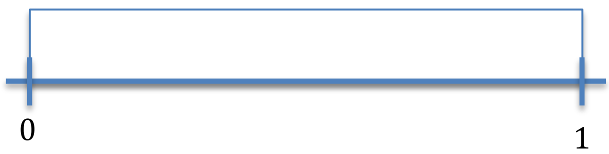
Isabel - Só! Olha que devo ter comido mais que tu, acho que comi três quartos dele!

Luna- Nem pensem! Eu, sozinha, comi seis oitavos!

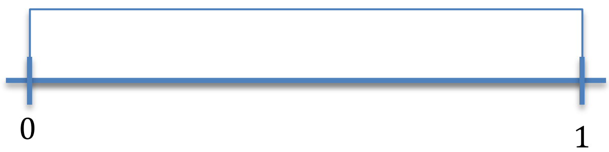
1.1) Representa na reta a parte comida pela Carolina e assinala a fração.



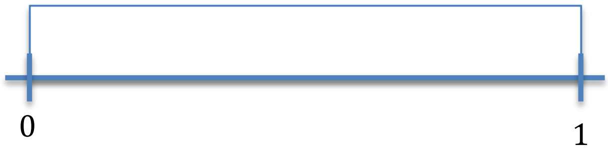
1.2) Representa na reta a parte comida pela Isabel e assinala a fração.



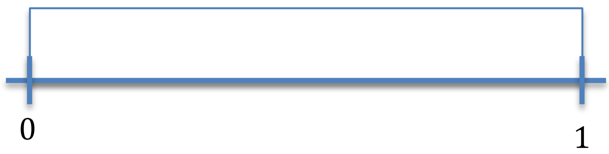
1.3) Representa na reta a parte comida pela Luna e assinala a fração.



1.4) Consegues encontrar uma forma de verificar que parte comeram as três amigas juntas?



2) O Guilherme, o David, o Tomás e o Pedro comeram cada um, um quarto de uma torta de laranja. Qual foi a totalidade de torta comida pelos amigos? Utiliza reta para te ajudar a descobrir.



Anexo 14 – Tarefa 3

Nome:____ Data:_____________

Adição de frações

Tarefa 3

1) O Frederico convidou quatro amigos para irem lanchar todos juntos. Durante o lanche, três amigos comeram meia torta cada um e dois amigos comeram uma torta inteira. Quantas tortas foram comidas pelos cinco amigos?

2) O David está a ler um livro muito interessante. No primeiro dia leu $\frac{1}{4}$ e no segundo dia leu $\frac{2}{4}$. Que parte do livro já leu o David?

3) A Madalena, que também está a ler o mesmo livro do David, leu no primeiro dia $\frac{1}{4}$ e no segundo $\frac{4}{8}$. Que parte do livro já leu a Madalena?

3.1) Qual dos dois amigos já leu uma parte maior do livro?

4) Catarina está a fazer uma caderneta sobre animais de estimação. Logo na primeira semana conseguiu completar dois terços e na segunda semana completou três nonos. Que parte da caderneta conseguiu a Catarina fazer ao fim de duas semanas?

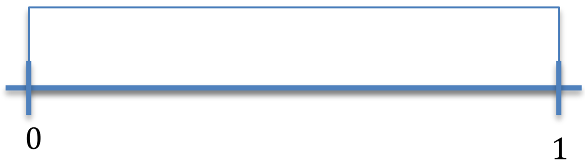
Anexo 15 – Tarefa de consolidação

Nome:____ Data:__________

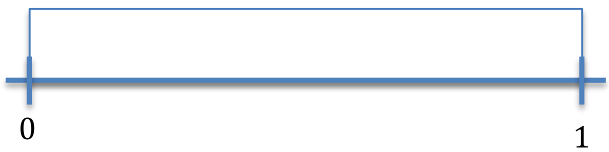
Adição de frações

3) Representa na barra numérica as adições indicadas. Escreve o resultado.

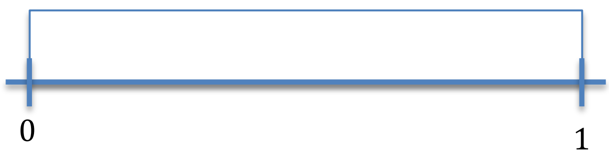
$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} =$$



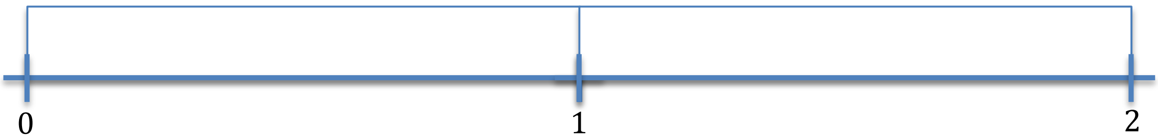
$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} =$$



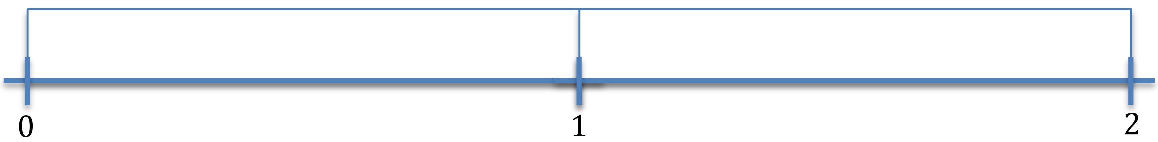
$$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} =$$



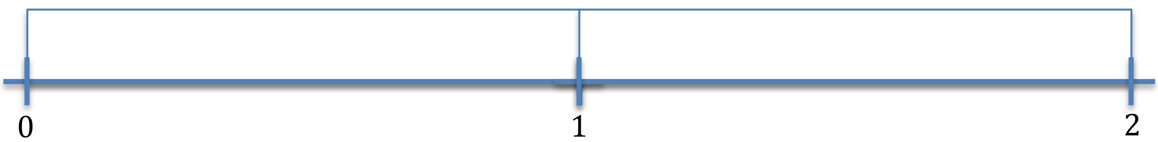
$$\frac{4}{4} + \frac{1}{2} =$$



$$\frac{2}{3} + \frac{2}{3} =$$



$$\frac{3}{2} + \frac{2}{4} =$$



Anexo 16 – Tarefa 4

Nome:____ Data:____________

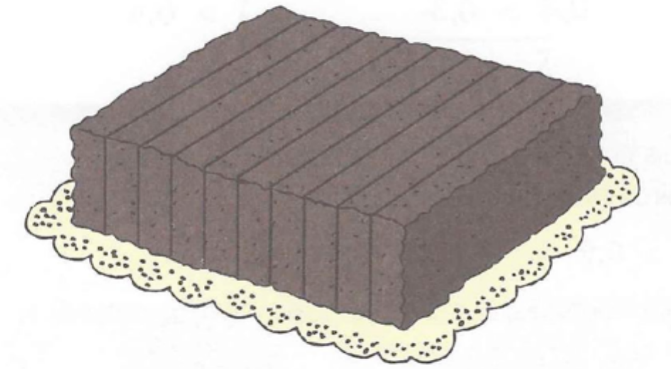
Adição de números decimais

<u>Tarefa 4</u>

1) No Colégio houve uma grande festa de final de ano relacionada com as diferentes *Houses.* Os pais trouxeram um bolo para repartir por todos os participantes.

Observa como foi dividido o bolo e completa:

1.1) Começou por se cortar o bolo em ________fatias iguais. Cada fatia corresponde a ____________________________ do bolo inteiro.

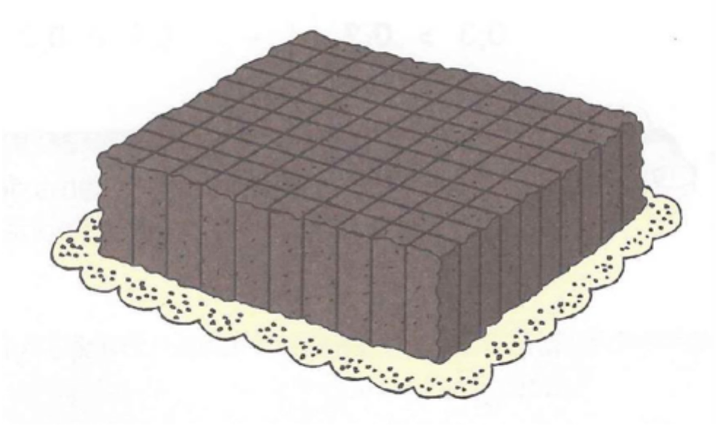


Número decimal

____

Fração

1.2) De seguida, cortou-se cada uma das fatias em dez partes iguais. Resultaram cem fatias pequenas, cada fatia representa ___________________________ do bolo inteiro.



Número decimal

____

Fração

2) Repara na seguinte imagem e responde às questões:

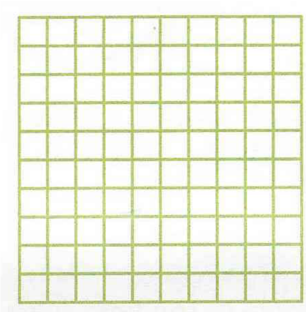


Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

2.1) A figura 2 que parte é da figura 1? E a figura 3 corresponde a que parte da figura 1? Podes responder utilizando palavras, desenhos ou outra forma.

3) Escreve o número representado nas seguintes figuras na forma de fração e de número decimal.

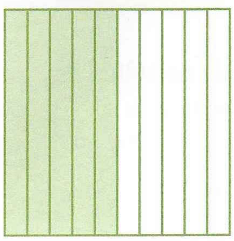


Fig.1

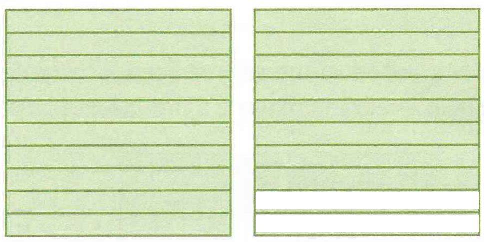


Fig.2

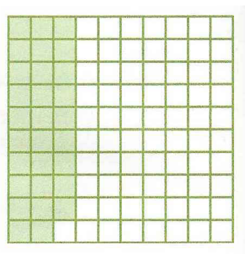


Fig.3

$A = \frac{\square}{\square}$

$A = \frac{\square}{\square}$

$A = \frac{\square}{\square}$

Anexo 17 – Tarefa 5

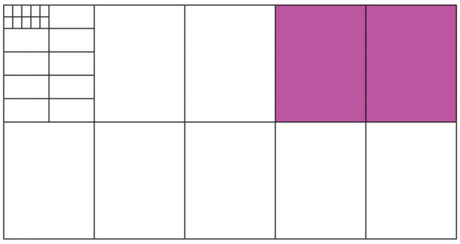
Nome:____ Data:__________

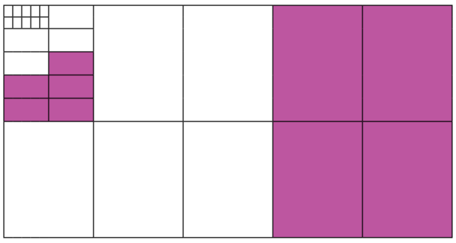
Adição de números decimais

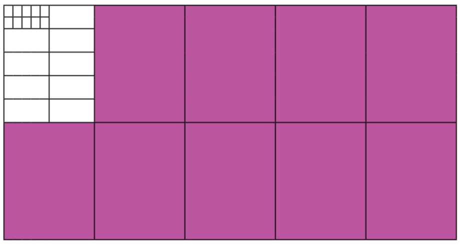
<u>Tarefa 5</u>

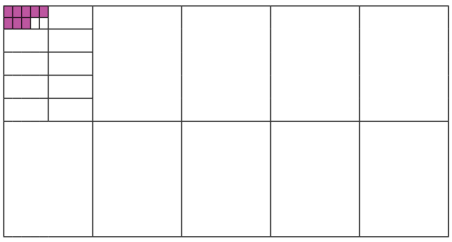
- Jogo do Decimat -

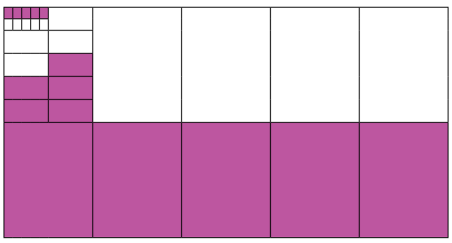
1) Depois de teres jogado com os teus colegas ao *Decimat,* será que consegues identificar a que número decimal corresponde cada uma das imagens?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

Número decimal:

A) ____________

B) ____________

C) ____________

D) ____________

E) ____________

Fração decimal:

A) ____________

B) ____________

C) ____________

D) ____________

E) ____________

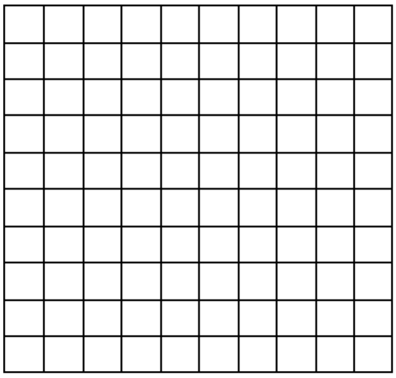
Anexo 18 – Tarefa 6

Nome:____ Data:___________

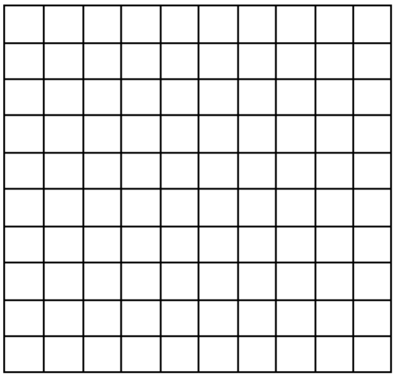
Adição de números decimais

<u>Tarefa 6</u>

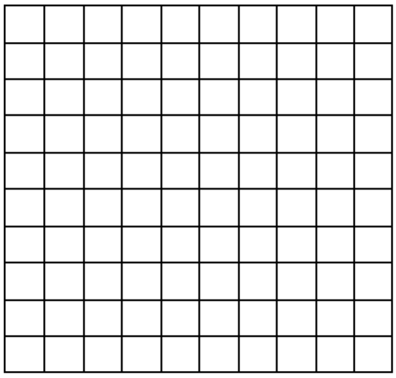
1) Pinta nas unidades os valores apresentados:



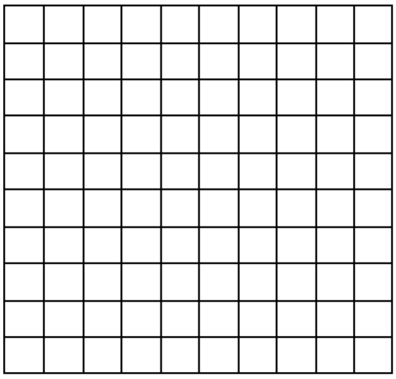
0,3



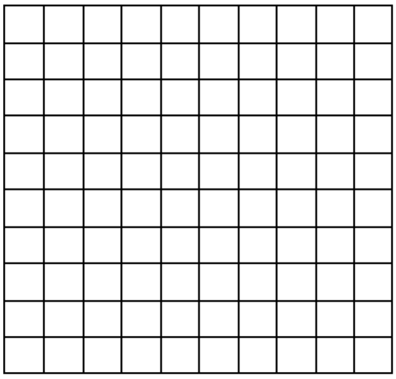
0,5



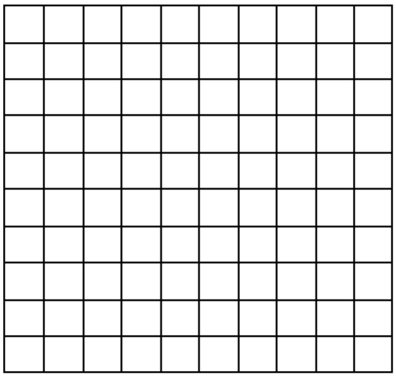
1,0



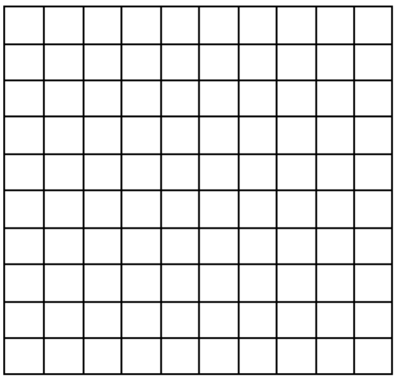
$\frac{3}{10}$



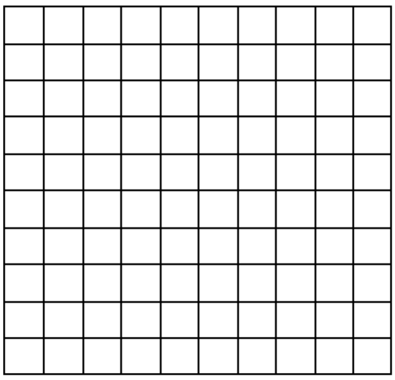
$\frac{1}{2}$



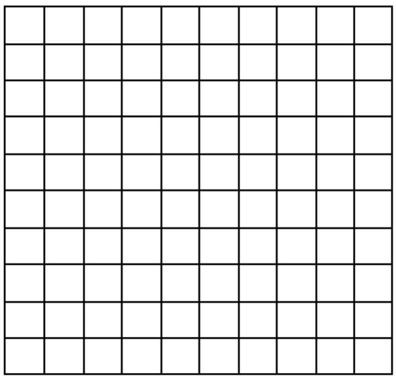
$\frac{10}{10}$



$\frac{30}{100}$



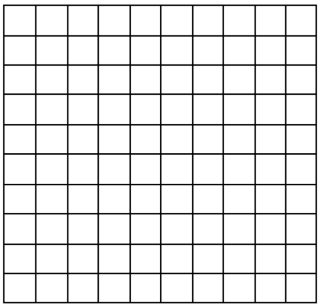
$\frac{50}{100}$



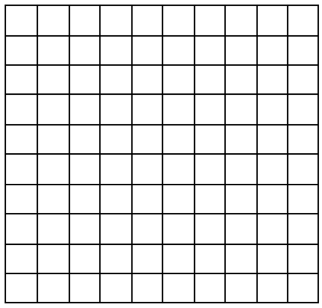
$\frac{100}{100}$

2) Utilizando as unidades representadas, pinta as seguintes adições de números decimais e descobre o resultado.

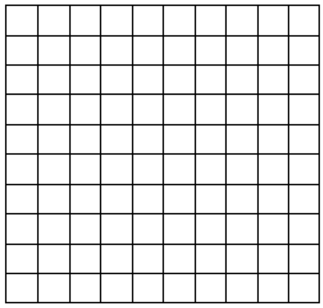
0,1+0,01 =



0,4 + 0,30 =

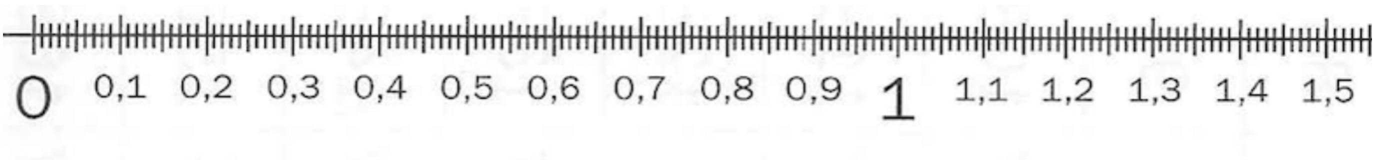


0,35+0,28 =

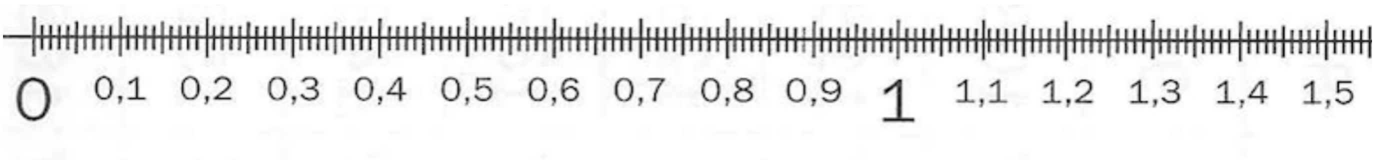


3) Utiliza as retas numéricas para representares as adições indicadas.

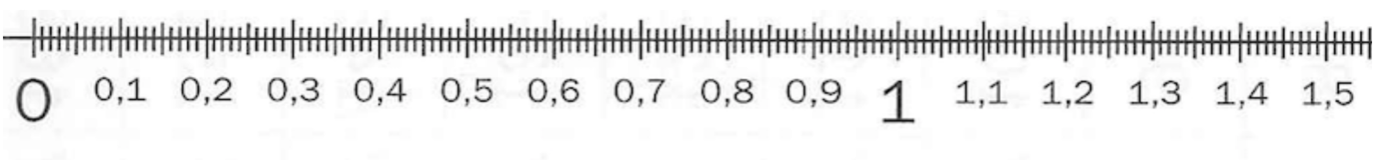
0,3+0,08 =



0,25+0,25 =



0,9+0,20 =



Anexo 19 – Tarefa 7

Nome:____ Data:__________

Adição de números decimais

Tarefa 7

1) Escreve as adições da questão 3, da Tarefa 6, nas tabelas. Tem o cuidado de escrever os valores debaixo da ordem correta.

Parte inteira				Parte decimal		
C	D	U		d	c	m
			,			
			,			
			,			

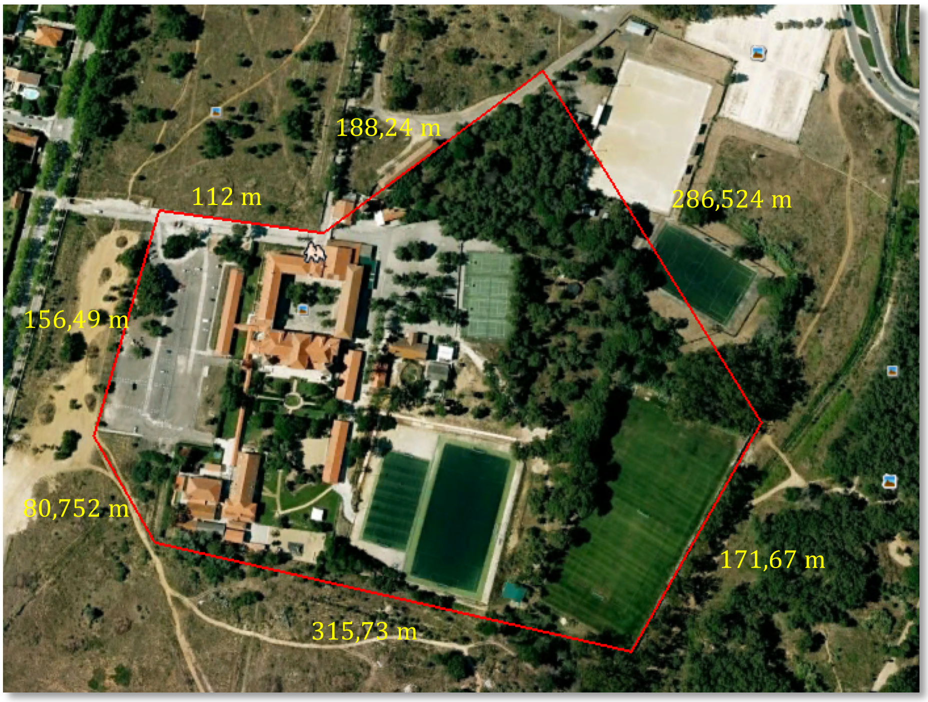
Parte inteira				Parte decimal		
C	D	U		d	c	m
			,			
			,			
			,			

Parte inteira				Parte decimal		
C	D	U		d	c	m
			,			
			,			
			,			

2) Carolina e o irmão foram a uma pastelaria. A Carolina pediu uma sanduíche e um copo de leite, o Frederico bebeu um sumo e comeu um croissant. Quanto pagaram pelo lanche?

____

3) A seguinte imagem mostra uma fotografia satélite da área ocupada pela escola. A linha vermelha marca os limites da escola, ou seja, o seu perímetro. A partir das medidas indicadas calcula o valor do perímetro da escola.



Anexo 20 – Avaliação final

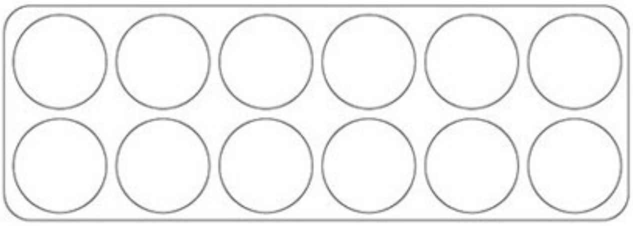
Nome:____ Data:___________

Adição de números decimais

<u>Avaliação final</u>

1) O Sr. Francisco tem uma caixa na qual consegue arrumar 12 ovos que vai apanhando ao longo do dia, no seu galinheiro. Pela manhã ele apanha $\frac{3}{12}$ e à tarde apanha $\frac{6}{12}$. Quantos ovos costuma o Sr. Francisco apanhar o num dia?

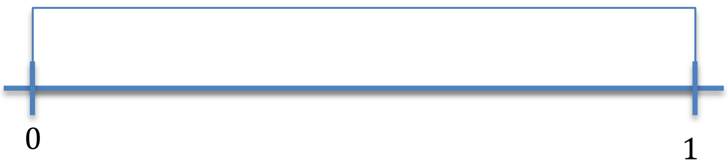
Utiliza a imagem para te ajudar na resolução.



R:____

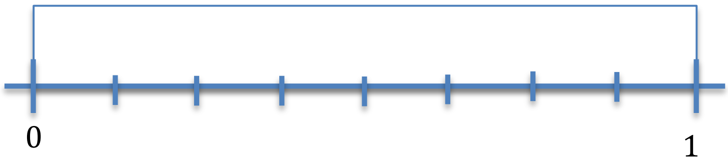
2) Os pais do Frederico decidiram ir dar um passeio de carro por Sintra. O pai conduziu $\frac{2}{6}$ e mãe conduziu $\frac{3}{6}$ do percurso. O restante fizeram a pé. Que porção total do percurso foi realizada de carro?

Utiliza a barra numérica para te ajudar na resolução.



R:____

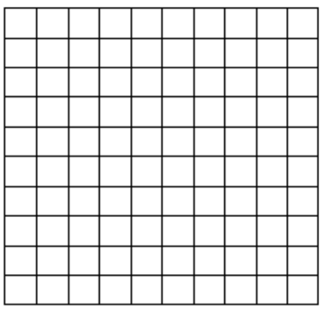
3) Para fazer um vestido de Carnaval, a mãe da Laura precisou de comprar uma fita de cetim. Inicialmente utilizou $\frac{2}{4}$ da fita. E quase no final do vestido teve de utilizar $\frac{4}{8}$. Que parte da fita utilizou a mãe da Laura?

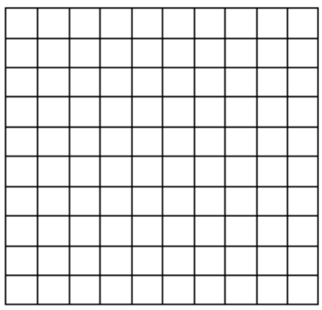


R:____

4) Pinta as adições nas unidades e escreve o resultado que descobrires.

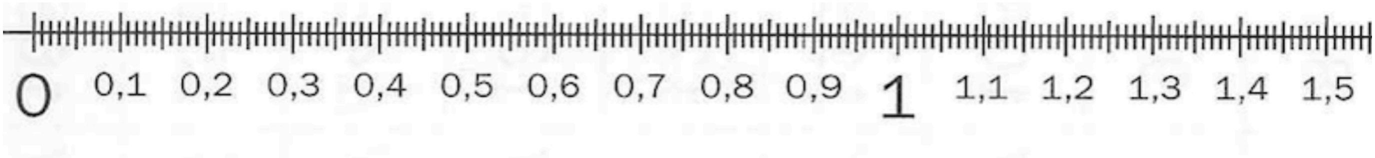
$0{,}2+0{,}02 =$ $0{,}32+0{,}28 =$



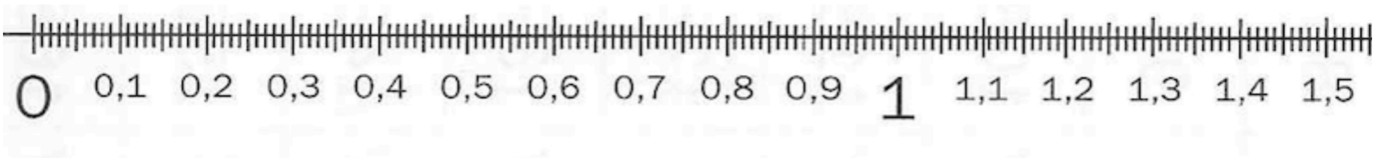


5) Utiliza as retas numéricas para adicionares as seguintes expressões.

0,4+0,05 =



0,3+0,15 =



6) Os pais do Frederico, quando deram o seu passeio por Sintra, param de manhã numa bomba de gasolina e abasteceram o tanque do carro com 23,45 L, e da parte da tarde encheram com 43,705 L. Que quantidade de combustível colocaram no carro durante o passeio?

R:____

7) **Utiliza as tabelas para realizares as operações das questões 5 e 6.**

Parte inteira				Parte decimal		
C	D	U		d	c	m
			,			
			,			
			,			

Parte inteira				Parte decimal		
C	D	U		d	c	m
			,			
			,			
			,			

Parte inteira				Parte decimal		
C	D	U		d	c	m
			,			
			,			
			,			

Anexo 21 – Guião do diário de bordo

Guião - Diário de Bordo

- Aula:
- Data:
- Tarefas:
- Tempo previsto/Tempo gasto:

Antes da aula
Expetativas do professor:

Durante a Aula
Introdução da tarefa
Instruções:
Reações dos alunos:
Desenvolvimento da tarefa
Atitudes do professor / Questões colocadas / Reações obtidas
Questões específicas colocadas pelos alunos
Dificuldades e comentários dos alunos
Atitudes dos alunos no desenvolvimento da tarefa / Estratégias utilizadas
Discussão Geral
Intervenções dos alunos / Gestão do professor
Principais conclusões / Aspetos novos
O que se salientou relativamente aos alunos entrevistados neste estudo
Outros aspetos a destacar / Episódios marcantes decorridos na sala de aula

Após a Aula
Aspetos bem conseguidos
Aspetos que podem ser melhorados
Papel do professor / investigador
Reflexos na investigação.