UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

FACULTAD DE LETRAS Y CIENCIAS HUMANAS

E.A.P. DE FILOSOFÍA

Una interpretación algebraica de la lógica proposicional y de sus implicancias en fórmulas predicativas cerradas con cuantificadores

TESIS

Para obtener el Título Profesional de Licenciado en Filosofía

AUTOR

Miguel Angel Merma Mora

Lima – Perú

2016

A Joan, por su apoyo en los momentos cruciales

“Aun las estructuras formales pueden reagruparse de maneras más económicas y racionales”

MARIO BUNGE

AGRADECIMIENTOS

Estoy agradecido con el Dr. Óscar García Zárate y con el Dr. Marino Llanos Villajuan, quienes fueron mis profesores de Lógica I y Lógica II respectivamente, durante mi formación en el pregrado de Filosofía. A ellos les debo mi interés inicial en la lógica matemática.

Posteriormente, ya en el nivel del posgrado, asistí al curso de Lógica de Primer Orden a cargo del Dr. Luis Piscoya Hermoza y entré en contacto con su obra, de la cual aprendí que la lógica constituye un poderoso instrumento de análisis epistemológico y que además fue desarrollada por necesidades fundamentalmente matemáticas. Esta importante lección y el enfoque conceptual de la lógica que aprendí en el posgrado, encaminaron mi investigación hacia una interpretación algebraica de la lógica.

Estoy profundamente agradecido con el Dr. Luis Piscoya Hermoza por todo lo aprendido en sus clases y en las conversaciones que sostuvimos con motivo de mi tesis. Ha sido un enorme privilegio contar con él como asesor de tesis y como principal alentador para la culminación de mi investigación.

ÍNDICE DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

El fracaso del proyecto logicista marcó el fin de una empresa añorada por numerosos filósofos y matemáticos: reducir la matemática a la lógica. Sin embargo, este proyecto fallido dejó algunas lecciones importantes; una de ellas estriba en la aceptación de que los límites entre la lógica y la matemática no están tan claros como parecían y que existe una suerte de continuidad entre ambas disciplinas. Hay una buena cantidad de trabajos que, siguiendo la dirección del proyecto logicista, formulan interpretaciones lógicas de la matemática pero hay pocos que siguen el camino inverso. Esta investigación pretende establecer la posibilidad de interpretar en términos matemáticos, específicamente algebraicos, ciertos fragmentos de la lógica de primer orden.

Los estudios de lógica en nuestra escuela han seguido, mayoritariamente, la tradición de Frege y Russell, por lo cual no hay muchos trabajos que se inscriban en la tradición algebrista de la lógica inaugurada por George Boole y desarrollada, entre otros, por Löwenheim, Schröder y Adolf Lindenbaum. Esta investigación pertenece al universo de esta segunda tradición.

Se sostendrá que es viable una interpretación algebraica de la lógica proposicional y de sus implicancias en las fórmulas predicativas haciendo uso de un sistema posicional binario construible sobre la base de definiciones adecuadas.

Se puede interpretar algebraicamente la lógica proposicional por medio de la definición de dos operadores; la negación y la disyunción. Tales operadores de la lógica proposicional conectan variables proposicionales, las cuales poseen valores de verdad. En la interpretación algebraica que se propone, la negación y la disyunción se interpretan como operaciones algebraicas entre variables numéricas bivalentes que pueden asumir el 0 o el 1 en lugar de la verdad (V) y la falsedad (F) respectivamente. La negación de **p** tendría la forma de la diferencia **(1 – p)** y la disyunción de dos variables proposicionales tendría la forma del producto de dos variables numéricas bivalentes.

Sobre la base de lo anterior, es posible interpretar algebraicamente las fórmulas predicativas cerradas con cuantificadores por medio de la definición básica del cuantificador existencial. En lógica predicativa, este cuantificador supone una cadena infinita de disyunciones de constantes individuales que tienen una determinada propiedad. Considerando que en nuestra interpretación la disyunción guarda correspondencia con el producto, tenemos que un cuantificador existencial es interpretable como una cadena infinita de factores, lo que puede expresarse abreviadamente empleando el concepto matemático de productoria denotado por el símbolo $\prod$. La interpretación algebraica del cuantificador universal también es posible, puesto que este cuantificador supone una cadena infinita de conjunciones de constantes individuales que tienen una determinada propiedad. En la interpretación algebraica que se propone es necesario aplicar la identidad de De Morgan a un número potencialmente infinito de conjunciones para poder expresar el cuantificador universal en términos de una productoria.

La presente investigación se circunscribe principalmente en el ámbito de la filosofía de la lógica y del metaanálisis lógico, en la medida en que se efectúa una exploración metalógica.

El método empleado aplica procedimientos hipotético-deductivos al análisis del lenguaje formal de la lógica proposicional estándar. Esta metodología permite caracterizar aspectos sintácticos y semánticos de la lógica proposicional al dotarla de una interpretación no estándar de tipo algebraico.

La interpretación algebraica efectuada permite proponer un método decisorio formulado en términos algebraicos para fórmulas predicativas monádicas de primer orden con identidad. De este modo, se le da continuidad a la investigación sobre los métodos decisorios, formulados ahora algebraicamente, puesto que así se tiene la ventaja de extender la decisión sobre las afirmaciones matemáticas.

La presente investigación se vio alentada por la necesidad de realizar estudios interdisciplinarios o de frontera entre la lógica moderna y las matemáticas. Se ha dado un pequeño paso en este proyecto que otros investigadores pueden continuar.

CAPÍTULO I

LA INTERPRETACIÓN ALGEBRAICA DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

Empezaremos estableciendo una correspondencia entre la tabla de verdad de la negación de una proposición **p** y la tabla numérica de la expresión algebraica **(1 – p)**, siempre que **p** solo pueda asumir los valores 0 o 1. Asimismo, se establecerá la correspondencia entre la tabla de verdad de la proposición compuesta $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q})$ y la tabla numérica de la expresión algebraica **pq**, considerando siempre que **p** y **q** solo pueden asumir los valores 0 o 1.[1]

Sobre la base de la interpretación algebraica de estos dos operadores lógicos fundamentales se puede interpretar algebraicamente cualquier otro operador lógico en términos algebraicos.

I.1. LOS OPERADORES LÓGICOS COMO EXPRESIONES ALGEBRAICAS

En esta sección desarrollaremos la representación algebraica de los operadores lógicos y emplearemos la negación y la disyunción inclusiva como los puntos de partida de nuestro sistema. Para tal fin, estableceremos la correspondencia entre la verdad y el 0 y, por otra parte, entre la falsedad y el 1.[2]

LA NEGACIÓN: $\neg p \equiv (1 - p)$

p	¬p
V	F
F	V

p	$(1-p)$	$(1-p)$
0	$1-0$	1
1	$1-1$	0

[1] La expresión algebraica **pq** debe entenderse como el producto de **p** por **q**.
[2] Empleamos esta correspondencia como figura en el texto *Lógica general* de Luis Piscoya Hermoza (2007: 199).

Si le asignamos el valor 0 a la proposición **p**, entonces su negación adopta el valor 1 y si la proposición **p** asume el valor 1, su negación adopta el valor 0. De esto se desprende que la proposición **¬p** equivale, en la interpretación algebraica, a **(1 – p)**, pues 1 – 0 = 1 y 1 – 1 = 0.

LA DISYUNCIÓN INCLUSIVA: (p∨q) ≡ pq

p	q	p ∨ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	pq	pq
0	0	0x0	0
0	1	0x1	0
1	0	1x0	0
1	1	1x1	1

En el primer arreglo del cuadro de la derecha tenemos que ambas variables numéricas asumen el 0 como valor y que, en ese caso, el producto de **p** y **q** arroja 0. En el segundo arreglo tenemos que cuando **p** asume el valor 0 y **q** asume el valor 1, el producto también arroja 0. En el tercer arreglo tenemos que cuando **p** asume el valor 1 y **q** asume el valor 0, el producto nuevamente arroja 0. Finalmente, en el cuarto arreglo tenemos que cuando **p** y **q** asumen el valor 1, el producto esta vez arroja 1. De esto se desprende que la proposición compuesta **p∨q** equivale en la interpretación algebraica que proponemos al producto **pq**, pues 0 x 0 = 0, 0 x 1 = 0, 1 x 0 = 0 y 1 x 1 = 1.

Con estas dos correspondencias básicas podemos interpretar algebraicamente los demás operadores de la lógica proposicional. El procedimiento consiste en expresar los demás operadores en términos de disyunciones y negaciones.

LA CONJUNCIÓN: $(p \wedge q) \equiv (p + q - pq)$

1. $p \wedge q$
2. $\neg(\neg p \vee \neg q)$ De Morgan en 1
3. $1-(1-p)(1-q)$ Interpret. algebraica en 2
4. $1-(1-q-p+pq)$ Multiplicación de factores en 3
5. $1-1+q+p-pq$ Introducción del signo negativo en 4
6. $p+q-pq$ Diferencia y conmutatividad de la suma en 5

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p+q-pq$	$p+q-pq$
0	0	0+0−(0x0)	0
0	1	0+1−(0x1)	1
1	0	1+0−(1x0)	1
1	1	1+1−(1x1)	1

EL CONDICIONAL: $(p \to q) \equiv (1-p)q$

1. $p \to q$
2. $\neg p \vee q$ Definición de condicional en 1
3. $(1-p)q$ Interpret. algebraica en 2

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$(1-p)q$	$(1-p)q$
0	0	(1−0)0	0
0	1	(1−0)1	1
1	0	(1−1)0	0
1	1	(1−1)1	0

EL BICONDICIONAL: $(p \leftrightarrow q) \equiv (p + q - 2pq)$

En este caso, necesitamos emplear algunas propiedades adicionales del lenguaje algebraico que estamos desarrollando. Como las variables numéricas **p**, **q**, **r**, **s**,… solo pueden asumir los valores numéricos 0 o 1, tenemos que, sin importar cuál de esos valores asuma una variable numérica, siempre se cumple que[3]:

$p^2 = p$	$q^2 = q$	$r^2 = r$	$s^2 = s$	….
$p^3 = p$	$q^3 = q$	$r^3 = r$	$s^3 = s$	….
$p^4 = p$	$q^4 = q$	$r^4 = r$	$s^4 = s$	….
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Utilizaremos estas propiedades adicionales para pasar de la línea 7 a la línea 8 del siguiente desarrollo:

1. $p \leftrightarrow q$
2. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ — Definición de bicondicional en 1
3. $\neg[\neg(p \rightarrow q) \vee \neg(q \rightarrow p)]$ — De Morgan en 2
4. $1 - [1 - (1 - p)q][1 - (1 - q)p]$ — Interpret. algebraica en 3
5. $1 - [1 - (q - pq)][1 - (p - qp)]$ — Distrib. del producto en 4
6. $1 - (1 - q + pq)(1 - p + pq)$ — Introduc. del signo negativo en 5
7. $1 - (1 - p + pq - q + pq - pq^2 + pq - p^2q + p^2q^2)$ — Multiplicación de factores en 6
8. $1 - (1 - p + pq - q + pq - pq + pq - pq + pq)$ — Propiedades adicionales en 7
9. $1 - (1 - p + pq - q + pq)$ — Diferencia en 8

[3] Esto se justifica en virtud de que tanto el cero como el uno elevados a cualquier potencia siguen siendo el mismo número.

10. $1 - 1 + p - pq + q - pq$ Introduc. del signo negativo en 9

11. $p + q - 2pq$ Diferencia y conmutatividad de la suma en 10

p	q	p ↔ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

p	q	$p + q - 2pq$	$p + q - 2pq$
0	0	0+0−2(0x0)	0
0	1	0+1−2(0x1)	1
1	0	1+0−2(1x0)	1
1	1	1+1−2(1x1)	0

LA DISYUNCIÓN EXCLUSIVA: $(p \nleftrightarrow q) \equiv 1 - (p + q - 2pq)$

1. $p \nleftrightarrow q$
2. $\neg(p \leftrightarrow q)$ Definición de bicondicional en 1
3. $1 - (p + q - 2pq)$ Interpret. algebraica en 2

p	q	p ↮ q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$1 - (p + q - 2pq)$	$1 - (p + q - 2pq)$
0	0	1−[0+0−2(0x0)]	1
0	1	1−[0+1−2(0x1)]	0
1	0	1−[1+0−2(1x0)]	0
1	1	1−[1+1−2(1x1)]	1

EL OPERADOR DE NICOD: $(p \,/\, q) \equiv (1 - p)(1 - q)$

1. $p \,/\, q$
2. $\neg(p \wedge q)$ Definición del operador de Nicod en 1
3. $\neg p \vee \neg q$ De Morgan en 2
4. $(1 - p)(1 - q)$ Interpret. algebraica en 3

p	q	p / q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

p	q	$(1-p)(1-q)$	$(1-p)(1-q)$
0	0	$(1-0)(1-0)$	1
0	1	$(1-0)(1-1)$	0
1	0	$(1-1)(1-0)$	0
1	1	$(1-1)(1-1)$	0

EL OPERADOR DAGA: $(p \downarrow q) \equiv (1-pq)$

1. $p \downarrow q$
2. $\neg(p \vee q)$ Definición del operador Daga en 1
3. $(1-pq)$ Interpret. algebraica en 2

p	q	$p \downarrow q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

p	Q	$(1-pq)$	$(1-pq)$
0	0	$1-(0x0)$	1
0	1	$1-(0x1)$	1
1	0	$1-(1x0)$	1
1	1	$1-(1x1)$	0

En resumen, establecemos la representación algebraica de los operadores de la lógica proposicional en el cuadro que sigue a estas líneas. Debemos considerar que la columna de la izquierda presenta los operadores de la lógica proposicional, mientras que la columna de la derecha tiene las respectivas interpretaciones algebraicas.

OPERADORES DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL	EXPRESIONES ALGEBRAICAS EQUIVALENTES
$\neg\mathbf{p}$	$(\mathbf{1}-\mathbf{p})$
$\mathbf{p}\vee\mathbf{q}$	$\mathbf{pq}$
$\mathbf{p}\wedge\mathbf{q}$	$(\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{pq})$
$\mathbf{p}\rightarrow\mathbf{q}$	$(\mathbf{1}-\mathbf{p})\mathbf{q}$
$\mathbf{p}\leftrightarrow\mathbf{q}$	$(\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{2pq})$
$\mathbf{p}\nleftrightarrow\mathbf{q}$	$\mathbf{1}-(\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{2pq})$
$\mathbf{p}\,/\,\mathbf{q}$	$(\mathbf{1}-\mathbf{p})(\mathbf{1}-\mathbf{q})$
$\mathbf{p}\downarrow\mathbf{q}$	$(\mathbf{1}-\mathbf{pq})$

La interpretación algebraica que desarrollamos en esta investigación resulta ser un álgebra de Boole y, con mayor especificidad, un álgebra de Lindenbaum cuyo sistema es de la forma $<\mathcal{L}/equiv, \sqcup, \sqcap, \complement, \mathbf{0}, \mathbf{1}>$, donde $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$ son los individuos, $\sqcup$ y $\sqcap$ son operaciones binarias y $\complement$ es una operación unaria.[4] En nuestra interpretación, $\sqcup$ es la conjunción, $\sqcap$ es la disyunción inclusiva y $\complement$ es la negación, debido a que asociamos la verdad con el 0 y la falsedad con el 1. Nuestro sistema ha expandido el número de operadores binarios de dos a siete sobre la base de las operaciones binarias $\sqcup$ y $\sqcap$, sin embargo, sigue siendo un álgebra de Lindenbaum y por consiguiente un álgebra de Boole, ya que cumple los axiomas que debe satisfacer todo álgebra de Boole[5]:

$x\sqcup y = y\sqcup x$	$x\sqcap y = y\sqcap x$	$x\sqcup \complement x = 1$	$x\sqcap \complement x = 0$
$x\sqcup(y\sqcup z) = (x\sqcup y)\sqcup z$	$x\sqcap (y\sqcap z) = (x\sqcap y)\sqcap z$	$x\sqcup 0 = x$	$x\sqcap 1 = x$
$x\sqcup(y\sqcap z) = (x\sqcup y)\sqcap(x\sqcup z)$	$x\sqcap(y\sqcup z) = (x\sqcap y)\sqcup(x\sqcap z)$		

[4] El álgebra de Lindenbaum figura como una de las entradas del *Diccionario de lógica y filosofía de la ciencia* de Jesús Mosterín y Roberto Torretti (2010: 32).

[5] Véase los axiomas que satisface todo álgebra de Boole en el *Diccionario de lógica y filosofía de la ciencia* de Jesús Mosterín y Roberto Torretti (2010: 29-30).

I.2. EL CONDICIONAL REPRESENTADO COMO PRODUCTO

Empezaremos con la representación algebraica de la fórmula condicional $p \rightarrow q$ que tiene la estructura básica de un producto de la forma $(1-p)q$.

1. $p \rightarrow q$
2. $\neg p \vee q$ — Definición de condicional en 1
3. $(1-p)q$ — Interpret. algebraica en 2

Si consideramos la fórmula condicional $(p \wedge q) \rightarrow r$, cuyo antecedente tiene dos variables proposicionales unidas por la conjunción, entonces la representación algebraica correspondiente tendría la estructura básica de un producto de la forma $(1-p)(1-q)r$.

1. $(p \wedge q) \rightarrow r$
2. $\neg(p \wedge q) \vee r$ — Definición de condicional en 1
3. $(\neg p \vee \neg q) \vee r$ — De Morgan en 2
4. $\neg p \vee \neg q \vee r$ — Asociatividad en 3
5. $(1-p)(1-q)r$ — Interpret. algebraica en 4

Si consideramos la fórmula condicional $(p \wedge q \wedge r) \rightarrow s$ cuyo antecedente tiene tres variables proposicionales unidas por la conjunción, entonces la representación algebraica correspondiente tendría la estructura básica de un producto de la forma $(1-p)(1-q)(1-r)s$.

1. $(p \wedge q \wedge r) \rightarrow s$
2. $\neg(p \wedge q \wedge r) \vee s$ — Definición de condicional en 1
3. $(\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \vee s$ — De Morgan en 2
4. $\neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee s$ — Asociatividad en 3
5. $(1-p)(1-q)(1-r)s$ — Interpret. algebraica en 4

Consideremos ahora, de manera intuitiva, la fórmula condicional $(p \wedge q \wedge r \wedge s \wedge \ldots \wedge x \wedge \ldots) \rightarrow z$, cuyo antecedente tiene un número potencialmente infinito de variables proposicionales unidas por la conjunción. Con estas condiciones, la representación algebraica correspondiente tendría la estructura básica de un producto de la forma $(1-p)(1-q)(1-r)(1-s) \ldots (1-x) \ldots z$, el cual ostentaría a su vez un número también potencialmente infinito de factores. Cabe considerar que solo el factor **z** no tendría forma de sustracción.

1. $(p \wedge q \wedge r \wedge s \wedge \ldots \wedge x \wedge \ldots) \rightarrow z$
2. $\neg(p \wedge q \wedge r \wedge s \wedge \ldots \wedge x \wedge \ldots) \vee z$ — Definición de condicional en 1[6]
3. $(\neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee \neg s \vee \ldots \vee \neg x \vee \ldots) \vee z$ — De Morgan en 2[7]
4. $\neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee \neg s \vee \ldots \vee \neg x \vee \ldots \vee z$ — Asociatividad en 3
5. $(1-p)(1-q)(1-r)(1-s) \ldots (1-x) \ldots z$ — Interpret. algebraica en 4

[6] En esta línea es necesario aplicar inductivamente la definición del condicional de manera análoga al uso inductivo de la equivalencia de De Morgan que figura en el texto *Tópicos en epistemología* de Luis Piscoya Hermoza (2009: 114).

[7] En esta línea aplicaremos inductivamente la equivalencia de De Morgan un número potencialmente infinito de veces. Este procedimiento está permitido y lo tomamos del texto *Tópicos en epistemología* de Luis Piscoya Hermoza (2009: 114).

I.3. LA REDUCCIÓN DE TAUTOLOGÍAS, CONTRADICCIONES Y CONTINGENCIAS

En la interpretación algebraica que hemos desarrollado, las tautologías pueden expresarse como fórmulas algebraicas reductibles a cero. Esta reducción es posible, puesto que la verdad está asociada con el cero como una de las bases de nuestra interpretación y si una fórmula de lógica proposicional es verdadera en todos los arreglos posibles, entonces es igual a cero en todos los arreglos de nuestra interpretación algebraica.[8]

En el caso de las contradicciones, tendremos expresiones algebraicas reductibles a uno. Esta reducción es posible, puesto que la falsedad está asociada con el uno como una de las bases de nuestra interpretación y si una fórmula es falsa en todos los arreglos posibles, entonces es igual a uno en todos los arreglos de nuestra interpretación algebraica.[9]

Finalmente, las fórmulas contingentes no se reducen ni a cero ni a uno. Esta clase de esquemas se reducen a expresiones algebraicas de menor extensión que tienen por lo menos un cero y por lo menos un uno entre sus arreglos.

[8] Cualquier fórmula del tipo $A \vee \neg A$ es igual a cero en nuestra interpretación algebraica. Intuitivamente podemos afirmar que las tautologías no dicen nada significativo, de ahí que su valor sea 0.

[9] Las fórmulas del tipo $A \wedge \neg A$ son iguales a uno en nuestra interpretación algebraica. Intuitivamente podemos afirmar que las contradicciones lo dicen todo, o permiten decirlo todo, puesto que de una contradicción se sigue cualquier afirmación. Esta capacidad de decirlo todo se representa con el 1.

I.3.1. TAUTOLOGÍAS

MODUS PONENS: $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$

p	q	[(p → q) ∧ p] → q
0	0	0 0 0 0 0 0 0
0	1	0 1 1 1 0 0 1
1	0	1 0 0 1 1 0 0
1	1	1 0 1 1 1 0 1

1. $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$
2. $\neg[(p \rightarrow q) \wedge p] \vee q$ — Definición de condicional en 1
3. $[\neg(p \rightarrow q) \vee \neg p] \vee q$ — De Morgan en 2
4. $\neg(p \rightarrow q) \vee \neg p \vee q$ — Asociatividad en 3
5. $\mathbf{[1-(1-p)q](1-p)q}$ — Interpret. algebraica en 4
6. $(1-p)q-(1-p)^2q^2$ — Distribución del producto en 5
7. $q-pq-(1^2-2p+p^2)\,q^2$ — Distribución del producto y binomio al cuadrado en 6
8. $q-pq-(1-2p+p)\,q^2$ — Propiedades adicionales en 7
9. $q-pq-(1-p)\,q^2$ — Diferencia en 8
10. $q-pq-(q^2-pq^2)$ — Distribución del producto en 9
11. $q-pq-(q-pq)$ — Propiedades adicionales en 10
12. $q-pq-q+pq$ — Introducción del signo negativo en 11
13. 0 — Diferencia en 12

En el desarrollo anterior puede apreciarse que la línea cinco tiene la forma $(1-A)A$. Esta fórmula de nuestra interpretación algebraica equivale a la fórmula $\neg A \vee A$ de lógica proposicional, lo cual significa que ya en la línea cinco sabemos que la fórmula inicial $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$ es reductible a cero, pues equivale a la tautología $\neg A \vee A$. Desde la línea seis hasta la trece tenemos el desarrollo algebraico que reduce la fórmula inicial a cero.

MODUS TOLLENS: $[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$

P	q	$[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$
0	0	0 0 0 1 1 0 0 1 0
0	1	0 1 1 1 0 1 0 1 0
1	0	1 0 0 1 1 0 0 0 1
1	1	1 0 1 0 0 1 0 0 1

1. $[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$
2. $\neg[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \vee \neg p$ — Definición de condicional en 1
3. $[\neg(p \rightarrow q) \vee q] \vee \neg p$ — De Morgan en 2
4. $\neg(p \rightarrow q) \vee q \vee \neg p$ — Asociatividad en 3
5. $\neg(p \rightarrow q) \vee \neg p \vee q$ — Conmutatividad en 4
6. $[\mathbf{1-(1-p)q}](\mathbf{1-p})\mathbf{q}$ — Interpret. algebraica en 5
7. $(1-p)q-(1-p)^2q^2$ — Distribución del producto en 6
8. $q-pq-(1^2-2p+p^2)\, q^2$ — Distribución del producto y binomio al cuadrado en 7
9. $q-pq-(1-2p+p)\, q^2$ — Propiedades adicionales en 8
10. $q-pq-(1-p)\, q^2$ — Diferencia en 9

11. $q - pq - (q^2 - pq^2)$ Distribución del producto en 10

12. $q - pq - (q - pq)$ Propiedades adicionales en 11

13. $q - pq - q + pq$ Introducción del signo negativo en 12

14. 0 Diferencia en 13

En el desarrollo anterior puede apreciarse que la línea seis tiene la forma $(1-A)A$. Esta fórmula de nuestra interpretación algebraica equivale a la fórmula $\neg A \vee A$ de lógica proposicional, lo cual significa que ya en la línea seis sabemos que la fórmula inicial $[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$ es reductible a cero, pues equivale a la tautología $\neg A \vee A$. Desde la línea siete hasta la catorce tenemos el desarrollo algebraico que reduce la fórmula inicial a cero. Adicionalmente, se aprecia que el Modus Ponens y el Modus Tollens tienen la misma forma algebraica: $[1-(1-p)q](1-p)q$.

SILOGISMO HIPOTÉTICO: $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

p	q	r	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$
0	0	0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0	0	1	0 0 0 1 0 1 1 0 0 1 1
0	1	0	0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0
0	1	1	0 1 1 1 1 0 1 0 0 1 1
1	0	0	1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0
1	0	1	1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 1
1	1	0	1 0 1 0 1 0 0 0 1 0 0
1	1	1	1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1

1.	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$	
2.	$\neg[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \vee (p \rightarrow r)$	Definición de condicional en 1
3.	$[\neg(p \rightarrow q) \vee \neg(q \rightarrow r)] \vee (p \rightarrow r)$	De Morgan en 2
4.	$\neg(p \rightarrow q) \vee \neg(q \rightarrow r) \vee (p \rightarrow r)$	Asociatividad en 3
5.	$[1-(1-p)q][1-(1-q)r]\ (1-p)r$	Interpret. algebraica en 4
6.	$[1-(1-p)q][1-(1-q)r]r(1-p)$	Conmutatividad en 5
7.	$[1-(1-p)q][r-(1-q)r^2](1-p)$	Distribución del producto en 6
8.	$[1-(1-p)q][r-(1-q)r](1-p)$	Propiedades adicionales en 7
9.	$[1-(1-p)q][r-(r-rq)](1-p)$	Distribución del producto en 8
10.	$[1-(1-p)q][r-r+rq](1-p)$	Introducción del signo negativo en 9
11.	$[1-(1-p)q]rq(1-p)$	Diferencia en 10
12.	$\mathbf{[1-(1-p)q](1-p)qr}$	Conmutatividad en 11
13.	0	Reducción a cero en 12

En el desarrollo anterior puede apreciarse que la línea doce tiene la forma (1−A)A multiplicado por el factor **r**. La fórmula (1−A)A de nuestra interpretación algebraica equivale a la fórmula ¬A∨A y por lo tanto es reductible a cero y el cero multiplicado por cualquier número sigue siendo cero. Esto significa que ya en la línea doce sabemos que la fórmula inicial $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ es reductible a cero, pues equivale a la tautología ¬A∨A.

También puede apreciarse que, en nuestra interpretación algebraica, el Silogismo Hipotético es un múltiplo del Modus Ponens. Este último se representa algebraicamente como $[1-(1-p)q](1-p)q$, mientras que el Silogismo Hipotético se representa algebraicamente como $[1-(1-p)q](1-p)q\mathbf{r}$. Como dato interesante resulta que **r**, el factor adicional del Silogismo Hipotético expresado algebraicamente, es la tercera variable proposicional que no figura en el Modus Ponens.

DILEMA CONSTRUCTIVO: $[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r)] \rightarrow (q \vee s)$

p	q	r	s	$\{[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \wedge (p \vee r)\} \rightarrow (q \vee s)$[10]
0	0	0	0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0	0	0	1	0 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1
0	0	1	0	0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0
0	0	1	1	0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1
0	1	0	0	0 1 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0
0	1	0	1	0 1 1 1 0 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1
0	1	1	0	0 1 1 1 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0
0	1	1	1	0 1 1 1 1 0 1 1 0 0 1 0 1 1 1
1	0	0	0	1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0
1	0	0	1	1 0 0 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 1
1	0	1	0	1 0 0 0 1 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0
1	0	1	1	1 0 0 0 1 0 1 1 1 1 1 0 0 0 1
1	1	0	0	1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0
1	1	0	1	1 0 1 1 0 1 1 1 1 0 0 0 1 1 1
1	1	1	0	1 0 1 0 1 0 0 1 1 1 1 0 1 0 0
1	1	1	1	1 0 1 0 1 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1

[10] Hemos introducido los signos de agrupación [ ] y { } en la fórmula del Dilema Constructivo para poder completar los datos del cuadro adecuadamente.

1. $[(p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (p \vee r)] \to (q \vee s)$

2. $\neg[(p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (p \vee r)] \vee (q \vee s)$ — Definición de condicional en 1

3. $[\neg(p \to q) \vee \neg(r \to s) \vee \neg(p \vee r)] \vee (q \vee s)$ — De Morgan en 2

4. $\neg(p \to q) \vee \neg(r \to s) \vee \neg(p \vee r) \vee (q \vee s)$ — Asociatividad en 3

5. $[1-(1-p)q][1-(1-r)s]\ (1-pr)qs$ — Interpret. algebraica en 4

6. $[1-(1-p)q][1-(1-r)s]s(1-pr)q$ — Conmutatividad en 5

7. $[1-(1-p)q][s-(1-r)s^2](1-pr)q$ — Distribución del producto en 6

8. $[1-(1-p)q][s-(1-r)s](1-pr)q$ — Propiedades adicionales en 7

9. $[1-(1-p)q][s-(s-rs)](1-pr)q$ — Distribución del producto en 8

10. $[1-(1-p)q][s-s+rs](1-pr)q$ — Introducción del signo negativo en 9

11. $[1-(1-p)q]rs(1-pr)q$ — Diferencia en 10

12. $[1-(1-p)q]r(1-pr)qs$ — Conmutatividad en 11

13. $[1-(1-p)q](r-pr^2)qs$ — Distribución del producto en 12

14. $[1-(1-p)q](r-pr)qs$ — Propiedades adicionales en 13

15. $[1-(1-p)q]r(1-p)qs$ — Factorización de variable en 14

16. $\mathbf{[1-(1-p)q](1-p)qrs}$ — Conmutatividad en 15

17. 0 — Reducción a cero en 16

En el desarrollo anterior puede apreciarse que la línea dieciséis tiene la forma $(1-A)A$ multiplicado por el factor **rs**. La fórmula $(1-A)A$ de nuestra interpretación algebraica equivale, como ya sabemos, a la fórmula $\neg A \vee A$ de lógica proposicional y, por lo tanto, es reductible a cero y el cero multiplicado por cualquier número sigue siendo cero. Esto significa que ya en la línea dieciséis sabemos que la fórmula inicial $[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r)] \rightarrow (q \vee s)$ es reductible a cero, pues equivale a la tautología $\neg A \vee A$.

También se aprecia que, en nuestra interpretación algebraica, el Dilema Constructivo es un múltiplo del Modus Ponens. Este último se representa algebraicamente como $[1-(1-p)q](1-p)q$ mientras que el Dilema Constructivo es de la forma $[1-(1-p)q](1-p)q\mathbf{rs}$. Resulta que **r** y **s**, los factores adicionales del Dilema Constructivo expresado algebraicamente, son la tercera y la cuarta variable proposicional que no figuran en el Modus Ponens.

DILEMA DESTRUCTIVO: $[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (\neg q \vee \neg s)] \rightarrow (\neg p \vee \neg r)$

p	q	r	s	$\{[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \wedge (\neg q \vee \neg s)\} \rightarrow (\neg p \vee \neg r)$[11]
0	0	0	0	0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1
0	0	0	1	0 0 0 1 0 1 1 1 1 0 0 0 1 1 1
0	0	1	0	0 0 0 0 1 0 0 1 1 1 1 0 1 0 0
0	0	1	1	0 0 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 1 0 0
0	1	0	0	0 1 1 1 0 0 0 1 0 0 1 0 1 1 1
0	1	0	1	0 1 1 1 0 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1
0	1	1	0	0 1 1 1 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0
0	1	1	1	0 1 1 1 1 0 1 1 0 0 0 0 1 0 0
1	0	0	0	1 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 1
1	0	0	1	1 0 0 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 1
1	0	1	0	1 0 0 0 1 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0
1	0	1	1	1 0 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0
1	1	0	0	1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1
1	1	0	1	1 0 1 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1
1	1	1	0	1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0
1	1	1	1	1 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0

1. $[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (\neg q \vee \neg s)] \rightarrow (\neg p \vee \neg r)$
2. $\neg[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (\neg q \vee \neg s)] \vee (\neg p \vee \neg r)$ — Definición de condicional en 1
3. $[\neg(p \rightarrow q) \vee \neg(r \rightarrow s) \vee \neg(\neg q \vee \neg s)] \vee (\neg p \vee \neg r)$ — De Morgan en 2

[11] Hemos introducido los signos de agrupación [ ] y { } en la fórmula del Dilema Destructivo para poder completar los datos del cuadro adecuadamente.

4. $\neg(p \to q) \lor \neg(r \to s) \lor \neg(\neg q \lor \neg s) \lor (\neg p \lor \neg r)$ Asociatividad en 3

5. $[1-(1-p)q][1-(1-r)s][1-(1-q)(1-s)](1-p)(1-r)$ Interp. algebr. en 4

6. $[1-(1-p)q][1-(1-r)s](1-r)[1-(1-q)(1-s)](1-p)$ Conmutatividad en 5

7. $[1-(1-p)q][(1-r)-(1-r)^2 s][1-(1-q)(1-s)](1-p)$ Distrib. del prod. en 6

8. $[1-(1-p)q][(1-r)-(1-r)s][1-(1-q)(1-s)](1-p)$ Propied. adic. en 7

9. $[1-(1-p)q](1-r)(1-s)[1-(1-q)(1-s)](1-p)$ Fact. de variab. en 8

10. $[1-(1-p)q](1-r)[(1-s)-(1-q)(1-s)^2](1-p)$ Distrib. del prod. en 9

11. $[1-(1-p)q](1-r)[(1-s)-(1-q)(1-s)](1-p)$ Propied. adic. en 10

12. $[1-(1-p)q](1-r)(1-s)[1-(1-q)](1-p)$ Fact. de variab. en 11

13. $[1-(1-p)q](1-r)(1-s)(1-1+q)(1-p)$ Int. del signo neg. 12

14. $[1-(1-p)q](1-r)(1-s)q(1-p)$ Diferencia en 13

15. $[\mathbf{1}-(\mathbf{1}-\mathbf{p})\mathbf{q}](\mathbf{1}-\mathbf{p})\mathbf{q}(\mathbf{1}-\mathbf{r})(\mathbf{1}-\mathbf{s})$ Conmutatividad en 14

16. 0 Reducc. a cero en 15

En el desarrollo anterior puede apreciarse que la línea quince tiene la forma (1−A)A multiplicado por el factor $(\mathbf{1}-\mathbf{r})(\mathbf{1}-\mathbf{s})$. La fórmula (1−A)A de nuestra interpretación algebraica equivale a la fórmula ¬A∨A de lógica proposicional y, por lo tanto, es reductible a cero y el cero multiplicado por cualquier número sigue siendo cero. Esto significa que ya en la línea quince sabemos que la fórmula inicial $[(p \to q) \land (r \to s) \land (\neg q \lor \neg s)] \to (\neg p \lor \neg r)$ es reductible a cero, pues equivale a la tautología ¬A∨A.

También se aprecia que, en nuestra interpretación algebraica, el Dilema Destructivo es un múltiplo del Modus Ponens. Este último se representa algebraicamente como $[1-(1-p)q](1-p)q$ mientras que el Dilema Destructivo es de la forma $[1-(1-p)q](1-p)q(\mathbf{1}-\mathbf{r})(\mathbf{1}-\mathbf{s})$.

Resulta que $(\mathbf{1}-\mathbf{r})$ y $(\mathbf{1}-\mathbf{s})$, los factores adicionales del Dilema Destructivo, son las negaciones de la tercera y la cuarta variable proposicional que no figuran como tales en el Modus Ponens.

I.3.2. CONTRADICCIONES

1.	$p\wedge\neg p$[12]	
2.	$\neg(\neg p\vee p)$	De Morgan en 1
3.	$1-(\mathbf{1}-\mathbf{p})\mathbf{p}$[13]	Interpretación algebraica en 2
4.	$1-(p-p^2)$	Distribución del producto en 3
5.	$1-(p-p)$	Propiedad adicional en 4
6.	$1-0$	Diferencia en 5
7.	1	Diferencia en 6

1.	$(\neg p\vee q)\wedge(p\wedge\neg q)$[14]	
2.	$(\neg p\vee q)\wedge\neg(\neg p\vee q)$	De Morgan en 1
3.	$\neg[\neg(\neg p\vee q)\vee(\neg p\vee q)]$	De Morgan en 2
4.	$1-[\mathbf{1}-(\mathbf{1}-\mathbf{p})\mathbf{q}]\,(\mathbf{1}-\mathbf{p})\mathbf{q}$[15]	Interpretación algebraica en 3
5.	$1-[(1-p)q-(1-p)^2q^2]$	Distribución del producto en 4

[12] Esta es claramente una fórmula contradictoria, pues afirma y niega la misma proposición.
[13] Las fórmulas algebraicas del tipo $(\mathbf{1}-\mathbf{A})\mathbf{A}$ son iguales a cero.
[14] Esta fórmula es contradictoria, ya que equivale a afirmar y negar la proposición condicional $(p\rightarrow q)$.
[15] A la derecha del operador de sustracción de mayor jerarquía hay una fórmula del tipo $(\mathbf{1}-\mathbf{A})\mathbf{A}$.

6. $1-[(1-p)q-(1^2-2p+p^2)q^2]$ Binom. al cuadr. en 5

7. $1-[(1-p)q-(1-2p+p)q]$ Prop. adicionales en 6

8. $1-[q-pq-(q-2pq+pq)]$ Distrib. del prod. en 7

9. $1-[q-pq-q+2pq-pq]$ Intr. del signo neg. 8

10. $1-[q-q-pq-pq+2pq]$ Conmutatividad en 9

11. $1-[-2pq+2pq]$ Diferencia en 10

12. $1-0$ Diferencia en 11

13. 1 Diferencia en 12

1. $[(p\wedge q)\vee r]\wedge[(\neg p\vee\neg q)\wedge\neg r]$[16]

2. $[\neg(\neg p\vee\neg q)\vee r]\wedge\neg[\neg(\neg p\vee\neg q)\vee r]$ De Morgan en 1

3. $\neg\{\neg[\neg(\neg p\vee\neg q)\vee r]\vee[\neg(\neg p\vee\neg q)\vee r]\}$ De Morgan en 2

4. $1-\{\mathbf{1}-[\mathbf{1}-(\mathbf{1}-\mathbf{p})(\mathbf{1}-\mathbf{q})]\mathbf{r}\}[\mathbf{1}-(\mathbf{1}-\mathbf{p})(\mathbf{1}-\mathbf{q})]\mathbf{r}$[17] Interpr. algebr. en 3

5. $1-\{[1-(1-p)(1-q)]r-[1-(1-p)(1-q)]^2r^2\}$ Distrib. del prod. en 4

6. $1-\{[1-(1-q-p+pq)]r-[1-(1-q-p+pq)]^2r^2\}$ Prod. de binom. en 5

7. $1-\{[1-1+q+p-pq]r-[1-1+q+p-pq]^2r^2\}$ Intr. del signo neg. 6

8. $1-\{[p+q-pq]r-[p+q-pq]^2r^2\}$ Dif. y conmut. en 7

9. $1-\{[p+q-pq]r-[(p+q)-pq]^2r^2\}$ Asociatividad en 8

10. $1-\{[p+q-pq]r-[(p+q)^2-2(p+q)pq+p^2q^2]r^2\}$ Bin. al cuadr. en 9

11. $1-\{[p+q-pq]r-[p^2+2pq+q^2-2(p+q)pq+p^2q^2]r^2\}$ Bin. al cuadr. en 10

12. $1-\{[p+q-pq]r-[p+2pq+q-2(p+q)pq+pq]r\}$ Prop. adic. en 11

[16] Esta fórmula es contradictoria, pues equivale a afirmar y negar la fórmula $[(p\wedge q)\vee r]$.
[17] A la derecha del operador de sustracción de mayor jerarquía hay una fórmula del tipo $(\mathbf{1}-\mathbf{A})\mathbf{A}$.

13. $1 - \{[p + q - pq]r - [p + 2pq + q - 2(p^2q + pq^2) + pq]r\}$ Distr. del prod. en 12

14. $1 - \{[p + q - pq]r - [p + 2pq + q - 2(pq + pq) + pq]r\}$ Prop. adic. en 13

15. $1 - \{[p + q - pq]r - [p + 2pq + q - 2(2pq) + pq]r\}$ Suma en 14

16. $1 - \{[p + q - pq]r - [p + 2pq + q - 4pq + pq]r\}$ Producto en 15

17. $1 - \{[p + q - pq]r - [p + q - 4pq + 2pq + pq]r\}$ Conmutatividad en 16

18. $1 - \{[p + q - pq]r - [p + q - pq]r\}$ Diferencia en 17

19. $1 - 0$ Diferencia en 18

20. 1 Diferencia en 19

I.3.3. CONTINGENCIAS

1. $[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$[18]

2. $\neg[(p \rightarrow q) \wedge q] \vee p$ Def. de condic. en 1

3. $[\neg(p \rightarrow q) \vee \neg q] \vee p$ De Morgan en 2

4. $[\neg(\neg p \vee q) \vee \neg q] \vee p$ Def. de condic. en 3

5. $\neg(\neg p \vee q) \vee \neg q \vee p$ Asociatividad en 4

6. $[1 - (1 - p)q]\ (1 - q)p$ Interpr. algebr. en 5

7. $[(1 - q)p - (1 - p)q(1 - q)p]$ Distr. del prod. en 6

8. $[(1 - q)p - (1 - p)p(1 - q)q]$ Conmutatividad en 7

9. $[(1 - q)p - (p - p^2)\ (q - q^2)]$ Distr. del prod. en 8

10. $[(1 - q)p - (p - p)\ (q - q)]$ Prop. adic. en 9

11. $[(1 - q)p - (0)(0)]$ Diferencia en 10

12. $(1 - q)p$ Diferencia en 11

[18] Esta fórmula de lógica proposicional tiene una matriz contingente idéntica a la matriz de la fórmula $(q \rightarrow p)$, la cual interpretada algebraicamente es la fórmula $(1 - q)p$ que figura en la línea 12.

CAPÍTULO II

LA INTERPRETACIÓN ALGEBRAICA DE FÓRMULAS PREDICATIVAS MONÁDICAS DE PRIMER ORDEN

La interpretación algebraica de la lógica proposicional hace posible, por extensión, la representación algebraica de fórmulas predicativas monádicas de primer orden cerradas con cuantificadores. Para esta representación es indispensable la definición básica del cuantificador existencial en términos algebraicos.

II.1. LA RELACIÓN ENTRE LOS CUANTIFICADORES Y LA PRODUCTORIA

Considerando que el cuantificador existencial supone una cadena potencialmente infinita de disyunciones de constantes individuales que tienen una determinada propiedad y que la disyunción guarda correspondencia con el producto, podemos representar algebraicamente el cuantificador existencial como una cadena potencialmente infinita de factores, lo que puede expresarse abreviadamente empleando el concepto matemático de productoria denotado por el símbolo $\prod$. Tenemos como resultado que una fórmula predicativa monádica P(x) cerrada con el cuantificador existencial, puede representarse algebraicamente como una productoria de objetos de la forma $P(a_i)$, donde **i** tiene un recorrido que va desde el 1 hasta el infinito. Para que la productoria sea igual a cero, basta que un solo valor de **i** haga que la fórmula $P(a_i)$ sea igual a cero.

1. $(\exists_x)P(x) \equiv P(a_1) \vee P(a_2) \vee P(a_3) \vee \ldots \vee P(a_n) \vee P(a_{n+1})\ldots$ [19]
2. $(\exists_x)P(x) \equiv P(a_1)P(a_2)P(a_3)\ldots P(a_n)P(a_{n+1})\ldots$ Interpretación algebraica en 1
3. $(\exists_x)\mathbf{P(x)} \equiv \prod_{i=1}^{\infty} \mathbf{P(a_i)}$ [20] Productoria en 2

[19] Empleamos esta equivalencia tal como figura en el texto *Lógica general* de Luis Piscoya Hermoza (2007: 268-269).

La representación algebraica de una fórmula predicativa monádica de primer orden cerrada con el cuantificador universal es posible en virtud del intercambio de cuantificadores, el cual permite expresar el cuantificador universal en términos del cuantificador existencial ya definido previamente en nuestra investigación como una productoria. También es posible considerar que el cuantificador universal supone una cadena potencialmente infinita de conjunciones de constantes individuales que tienen una determinada propiedad, y que se puede aplicar la equivalencia de De Morgan a fórmulas con un número potencialmente infinito de conjunciones. De este modo, se puede representar algebraicamente una fórmula predicativa monádica P(x) cerrada con el cuantificador universal como la unidad menos una productoria de objetos de la forma $1 - P(a_i)$, donde **i** tiene un recorrido que va desde el 1 hasta el infinito. Para que la diferencia entre la unidad y la productoria sea igual a uno, basta que un solo valor de **i** haga que la fórmula $P(a_i)$ sea igual a uno.

1. $(\forall_x)P(x) \equiv P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge P(a_3) \wedge \ldots \wedge P(a_n) \wedge P(a_{n+1})\ldots$[21]
2. $(\forall_x)P(x) \equiv \neg[\neg P(a_1) \vee \neg P(a_2) \vee \neg P(a_3) \vee \ldots \ldots \vee \neg P(a_n) \vee \neg P(a_{n+1}) \ldots]$ De Morgan en 1
3. $(\forall_x)P(x) \equiv 1 - [1 - P(a_1)][1 - P(a_2)][1 - P(a_3)] \ldots [1 - P(a_n)][1 - P(a_{n+1})] \ldots$ Interpr. algebr. en 2
4. $(\forall_x)\mathbf{P(x) \equiv 1 - \prod_{i=1}^{\infty}[1 - P(a_i)]}$ [22] Productoria en 3

II.2. LA INTERPRETACIÓN ALGEBRAICA DEL CUADRO DE BOECIO

Con las definiciones establecidas en la sección anterior procederemos a interpretar algebraicamente las cuatro proposiciones del cuadro de Boecio. Para este

---

[20] Si el lenguaje predicativo se refiere al mundo empírico, se puede verificar en la experiencia un enunciado predicativo cuantificado existencialmente. En la interpretación algebraica, basta que un solo valor de **i** haga que $P(a_i)$ sea igual a cero, para que la fórmula $\prod_{i=1}^{\infty} P(a_i)$ sea también igual a cero.

[21] Tomamos esta equivalencia del texto *Lógica general* de Luis Piscoya Hermoza (2007: 268-269).

[22] Si el lenguaje predicativo se refiere al mundo empírico, se puede falsar en la experiencia un enunciado predicativo cuantificado universalmente. En la interpretación algebraica, basta que un solo valor de **i** haga que $P(a_i)$ sea igual a uno, para que la fórmula $1 - \prod_{i=1}^{\infty}[1 - P(a_i)]$ sea también igual a uno.

propósito, emplearemos como punto de partida las versiones predicativas cuantificadas de las proposiciones A, E, I y O.

A:	$(\forall_x)[P(x) \rightarrow Q(x)]$	E:	$(\forall_x)[P(x) \rightarrow \neg Q(x)]$
I:	$(\exists_x)[P(x) \wedge Q(x)]$	O:	$(\exists_x)[P(x) \wedge \neg Q(x)]$

II.2.1. PROPOSICIÓN (A) DEL CUADRO DE BOECIO

1.	$(\forall_\mathbf{x})[\mathbf{P(x)} \rightarrow \mathbf{Q(x)}]$	Proposición de tipo A
2.	$(\forall_x)[\, \neg P(x) \vee Q(x)]$	Definición de condicional en 1
3.	$(\forall_x)(1 - P(x))Q(x)$	Interpretación algebraica en 2
4.	$(\forall_x)\ (Q(x) - P(x)Q(x))$	Distribución del producto en 3
5.	$1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\ 1 - (Q(a_i) - P(a_i)Q(a_i))]$	Definición del cuantificador universal en 4
6.	$\mathbf{1} - \prod_{\boldsymbol{i=1}}^{\infty}[\ \mathbf{1} - \mathbf{Q(a_i)} + \mathbf{P(a_i)Q(a_i)}]$	Introducción del signo negativo en 5

II.2.2. PROPOSICIÓN (E) DEL CUADRO DE BOECIO

1.	$(\forall_\mathbf{x})[\mathbf{P(x)} \rightarrow \neg\mathbf{Q(x)}]$	Proposición de tipo E
2.	$(\forall_x)[\neg P(x) \vee \neg Q(x)]$	Definición de condicional en 1
3.	$(\forall_x)[1 - P(x)][1 - Q(x)]$	Interpretación algebraica en 2
4.	$(\forall_x)\ [1 - Q(x) - P(x)\ + P(x)Q(x)]$	Producto de binomios en 3
5.	$1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\ 1 - (1 - Q(a_i) - P(a_i) + P(a_i)Q(a_i))\ ]$	Definición del cuantificador universal en 4
6.	$1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\ 1 - 1 + Q(a_i) + P(a_i) - P(a_i)Q(a_i)\ ]$	Introducción del signo negativo en 5
7.	$1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\ Q(a_i) + P(a_i) - P(a_i)Q(a_i)\ ]$	Diferencia en 6
8.	$\mathbf{1} - \prod_{\boldsymbol{i=1}}^{\infty}[\ \mathbf{P(a_i)} + \mathbf{Q(a_i)} - \mathbf{P(a_i)Q(a_i)}]$	Conmutatividad en 7

II.2.3. PROPOSICIÓN (I) DEL CUADRO DE BOECIO

1.	$(\exists_x)[\mathbf{P(x)} \wedge \mathbf{Q(x)}]$	Proposición de tipo I
2.	$(\exists_x)\neg[\neg P(x) \vee \neg Q(x)]$	De Morgan en 1
3.	$(\exists_x)[1 - (1 - P(x))(1 - Q(x))]$	Interpretación algebraica en 2
4.	$(\exists_x)[1 - (1 - Q(x) - P(x) + P(x)Q(x))]$	Producto de binomios en 3
5.	$(\exists_x)[1 - 1 + Q(x) + P(x) - P(x)Q(x)]$	Introducción del signo negativo en 4
6.	$(\exists_x)[Q(x) + P(x) - P(x)Q(x)]$	Diferencia en 5
7.	$(\exists_x)[P(x) + Q(x) - P(x)Q(x)]$	Conmutatividad en 6
8.	$\prod_{i=1}^{\infty} [\mathbf{P(a_i) + Q(a_i) - P(a_i)Q(a_i)}]$	Definición del cuantificador existencial en 7

II.2.4. PROPOSICIÓN (O) DEL CUADRO DE BOECIO

1.	$(\exists_x)[\mathbf{P(x)} \wedge \neg\mathbf{Q(x)}]$	Proposición de tipo O
2.	$(\exists_x)\neg[\neg P(x) \vee Q(x)]$	De Morgan en 1
3.	$(\exists_x)[1 - (1 - P(x))Q(x)]$	Interpretación algebraica en 2
4.	$(\exists_x)[1 - (Q(x) - P(x)Q(x))]$	Distribución del producto en 3
5.	$(\exists_x)[1 - Q(x) + P(x)Q(x)]$	Introducción del signo negativo en 4
6.	$\prod_{i=1}^{\infty} [\mathbf{1 - Q(a_i) + P(a_i)Q(a_i)}]$	Definición del cuantificador existencial en 5

PROPOSICIONES DEL CUADRO DE BOECIO	**EXPRESIONES ALGEBRAICAS EQUIVALENTES**
A: $(\forall_x)[\mathbf{P(x) \rightarrow Q(x)}]$	**A:** $\mathbf{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[1 - Q(a_i) + P(a_i)Q(a_i)]}$
E: $(\forall_x)[\mathbf{P(x) \rightarrow \neg Q(x)}]$	**E:** $\mathbf{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[P(a_i) + Q(a_i) - P(a_i)Q(a_i)]}$
I: $(\exists_x)[\mathbf{P(x) \wedge Q(x)}]$	**I:** $\mathbf{\prod_{i=1}^{\infty}[P(a_i) + Q(a_i) - P(a_i)Q(a_i)]}$
O: $(\exists_x)[\mathbf{P(x) \wedge \neg Q(x)}]$	**O:** $\mathbf{\prod_{i=1}^{\infty}[1 - Q(a_i) + P(a_i)Q(a_i)]}$

II.3. LA PRUEBA DE VALIDEZ DE FÓRMULAS PREDICATIVAS MONÁDICAS DE PRIMER ORDEN MEDIANTE MÉTODOS ALGEBRAICOS

En esta sección mostraremos la posibilidad de establecer una prueba de validez en términos algorítmicos para fórmulas predicativas monádicas de primer orden mediante métodos algebraicos que consisten fundamentalmente en reducir la fórmula a cero. Si la fórmula es reductible a cero, habremos probado que se trata de una fórmula predicativa monádica lógicamente válida.

Empezaremos con el célebre razonamiento que concluye la mortalidad de Sócrates tomando como premisas su humanidad y la afirmación de que todo hombre es mortal.

H(x) : x tiene la propiedad de ser hombre

M(x) : x tiene la propiedad de ser mortal

a_1 equivale al nombre Sócrates

1.	$[(\forall_x)(H(x) \rightarrow M(x)) \wedge H(a_1)] \rightarrow M(a_1)$	
2.	$\neg[(\forall_x)(H(x) \rightarrow M(x)) \wedge H(a_1)] \vee M(a_1)$	Definición de condicional en 1
3.	$[\neg(\forall_x)(H(x) \rightarrow M(x)) \vee \neg H(a_1)] \vee M(a_1)$	De Morgan en 2
4.	$[(\exists_x)\neg(H(x) \rightarrow M(x)) \vee \neg H(a_1)] \vee M(a_1)$	Intercambio de cuantificad. en 3
5.	$(\exists_x)\neg(H(x) \rightarrow M(x)) \vee \neg H(a_1) \vee M(a_1)$	Asociatividad en 4
6.	$(\exists_x)\neg(\neg H(x) \vee M(x)) \vee \neg H(a_1) \vee M(a_1)$	Definición de condicional en 5
7.	$(\exists_x)[1 - (1 - H(x))M(x)](1 - H(a_1))M(a_1)$	Interpretación algebraica en 6
8.	$\prod_{i=1}^{\infty} [\mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{H}(\mathbf{a}_i))\mathbf{M}(\mathbf{a}_i)](1 - H(a_1))M(a_1)$	Definic. del cuantific. exist. en 7

9. $[\mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{H}(\mathbf{a}_1))\mathbf{M}(\mathbf{a}_1)][\mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{H}(\mathbf{a}_2))\mathbf{M}(\mathbf{a}_2)][\mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{H}(\mathbf{a}_3))\mathbf{M}(\mathbf{a}_3)]\ldots$

$\ldots (1 - H(a_1))M(a_1)$ Desarrollo de la productoria en 8

10. $[\mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{H}(\mathbf{a}_1))\mathbf{M}(\mathbf{a}_1)](1 - H(a_1))M(a_1)[\mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{H}(\mathbf{a}_2))\mathbf{M}(\mathbf{a}_2)]$

$[\mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{H}(\mathbf{a}_3))\mathbf{M}(\mathbf{a}_3)]\ldots$ Conmutatividad en 9

11. 0 Reducción a cero en 10

En el desarrollo anterior puede apreciarse que la línea diez tiene un factor de la forma $(1-A)A$. Esta fórmula de nuestra interpretación algebraica equivale a la fórmula $\neg A \vee A$ de lógica proposicional, lo cual significa que ya en la línea diez sabemos que la fórmula inicial $[(\forall_x)(H(x) \rightarrow M(x)) \wedge H(a_1)] \rightarrow M(a_1)$ es reductible a cero, pues equivale a la tautología $\neg A \vee A$. Al reducir la fórmula a cero, probamos algebraicamente que se trata de una fórmula lógicamente válida.

A continuación, probaremos por métodos algebraicos la validez del siguiente razonamiento:

1. $[(\forall_x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (\forall_x)(Q(x) \rightarrow R(x))] \rightarrow (\forall_x)(P(x) \rightarrow R(x))$
2. $\neg[(\forall_x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (\forall_x)(Q(x) \rightarrow R(x))] \vee (\forall_x)(P(x) \rightarrow R(x))$ Def. de condic. en 1
3. $[\neg(\forall_x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \vee \neg(\forall_x)(Q(x) \rightarrow R(x))] \vee (\forall_x)(P(x) \rightarrow R(x))$ De Morgan en 2
4. $\neg(\forall_x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \vee \neg(\forall_x)(Q(x) \rightarrow R(x)) \vee (\forall_x)(P(x) \rightarrow R(x))$ Asociatividad en 3
5. $(\exists_x)\neg(P(x) \rightarrow Q(x)) \vee (\exists_x)\neg(Q(x) \rightarrow R(x)) \vee (\forall_x)(P(x) \rightarrow R(x))$ Inter. de cuantif. en 4
6. $(\exists_x)\neg(\neg P(x) \vee Q(x)) \vee (\exists_x)\neg(\neg Q(x) \vee R(x)) \vee (\forall_x)(P(x) \rightarrow R(x))$ Def. de condic. en 5
7. $(\exists_x)[1 - (1 - P(x))Q(x)]\ (\exists_x)[1 - (1 - Q(x))R(x)]\ (\forall_x)(P(x) \rightarrow R(x))$ Interpr. algebr. en 6
8. $(\exists_x)[1 - (Q(x) - P(x)Q(x))](\exists_x)[1 - (R(x) - Q(x)R(x))](\forall_x)(P(x) \rightarrow R(x))$ Distrib. del prod. en 7
9. $(\exists_x)[1 - Q(x) + P(x)Q(x)](\exists_x)[1 - R(x) + Q(x)R(x)](\forall_x)(P(x) \rightarrow R(x))$ Intr. signo neg. en 8

10. $\prod_{i=1}^{\infty}[\ 1 - Q(a_i) + P(a_i)Q(a_i)] \prod_{i=1}^{\infty}[\ 1 - R(a_i) + Q(a_i)R(a_i)]$

$(\forall_x)(P(x) \rightarrow R(x))$ Def. de cuantif. existencial en 9

11. $\prod_{i=1}^{\infty}[\ 1 - Q(a_i) + P(a_i)Q(a_i)] \prod_{i=1}^{\infty}[\ 1 - R(a_i) + Q(a_i)R(a_i)]$

$\{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\ 1 - R(a_i) + P(a_i)R(a_i)]\}$ Equivalencia algebraica en 10[23]

12. $\prod_{i=1}^{\infty}[\ 1 - Q(a_i) + P(a_i)Q(a_i)][1 - R(a_i) + Q(a_i)R(a_i)]$

$\{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\ 1 - R(a_i) + P(a_i)R(a_i)]\}$ Propiedad de Π en 11[24]

13. $\prod_{i=1}^{\infty}[\ 1 - R(a_i) + Q(a_i)R(a_i) - Q(a_i) + Q(a_i)R(a_i) - Q(a_i)^2R(a_i)$

$+P(a_i)Q(a_i) - P(a_i)Q(a_i)R(a_i) + P(a_i)Q(a_i)^2R(a_i)]$

$\{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\ 1 - R(a_i) + P(a_i)R(a_i)]\}$ Producto de trinomios en 12

14. $\prod_{i=1}^{\infty}[\ 1 - R(a_i) + Q(a_i)R(a_i) - Q(a_i) + Q(a_i)R(a_i) - Q(a_i)R(a_i)$

$+P(a_i)Q(a_i) - P(a_i)Q(a_i)R(a_i) + P(a_i)Q(a_i)R(a_i)]$

$\{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\ 1 - R(a_i) + P(a_i)R(a_i)]\}$ Propiedades adicionales en 13

15. $\prod_{i=1}^{\infty}[\ 1 - R(a_i) - Q(a_i) + Q(a_i)R(a_i) + P(a_i)Q(a_i)]$

$\{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\ 1 - R(a_i) + P(a_i)R(a_i)]\}$ Diferencia en 14

16. $\prod_{i=1}^{\infty}[\ 1 - R(a_i) - Q(a_i) + Q(a_i)R(a_i) + P(a_i)Q(a_i)] -$

$\prod_{i=1}^{\infty}[\ 1 - R(a_i) - Q(a_i) + Q(a_i)R(a_i) + P(a_i)Q(a_i)] \prod_{i=1}^{\infty}[\ 1 - R(a_i)$

$+P(a_i)R(a_i)]$ Distrib. del producto en 15

17. $\prod_{i=1}^{\infty}[\ 1 - R(a_i) - Q(a_i) + Q(a_i)R(a_i) + P(a_i)Q(a_i)] -$

$\prod_{i=1}^{\infty}[\ 1 - R(a_i) - Q(a_i) + Q(a_i)R(a_i) + P(a_i)Q(a_i)][1 - R(a_i) +$

$P(a_i)R(a_i)]$ Propiedad de Π en 16[25]

---

[23] En esta línea utilizamos el equivalente algebraico de una proposición de tipo A del cuadro de Boecio. Nos remitimos a la página 33 de esta tesis.

[24] Usamos la propiedad de la productoria (Π), la cual sostiene que $\prod_{i=1}^{\infty}[\ A_i] \prod_{i=1}^{\infty}[\ B_i] = \prod_{i=1}^{\infty}[\ A_iB_i]$

[25] Usamos la propiedad de la productoria (Π), la cual sostiene que $\prod_{i=1}^{\infty}[\ A_i] \prod_{i=1}^{\infty}[\ B_i] = \prod_{i=1}^{\infty}[\ A_iB_i]$

18. $\prod_{i=1}^{\infty}[\ 1 - R(a_i) - Q(a_i) + Q(a_i)R(a_i) + P(a_i)Q(a_i)] -$

$\prod_{i=1}^{\infty}[\ 1 - R(a_i) + P(a_i)R(a_i)$

$- R(a_i) + R(a_i)^2 - P(a_i)R(a_i)^2$

$-Q(a_i) + Q(a_i)R(a_i) - P(a_i)Q(a_i)R(a_i)$

$+Q(a_i)R(a_i) - Q(a_i)R(a_i)^2 + P(a_i)Q(a_i)R(a_i)^2$

$+P(a_i)Q(a_i) - P(a_i)Q(a_i)R(a_i) + P(a_i)^2Q(a_i)R(a_i)\ ]$ Producto de polinomios en 17

19. $\prod_{i=1}^{\infty}[\ 1 - R(a_i) - Q(a_i) + Q(a_i)R(a_i) + P(a_i)Q(a_i)] -$

$\prod_{i=1}^{\infty}[\ 1 - R(a_i) + P(a_i)R(a_i)$

$- R(a_i) + R(a_i) - P(a_i)R(a_i)$

$-Q(a_i) + Q(a_i)R(a_i) - P(a_i)Q(a_i)R(a_i)$

$+Q(a_i)R(a_i) - Q(a_i)R(a_i) + P(a_i)Q(a_i)R(a_i)$

$+P(a_i)Q(a_i) - P(a_i)Q(a_i)R(a_i) + P(a_i)Q(a_i)R(a_i)\ ]$ Propiedades adicionales en 18

20. $\prod_{i=1}^{\infty}[\ 1 - R(a_i) - Q(a_i) + Q(a_i)R(a_i) + P(a_i)Q(a_i)] -$

$\prod_{i=1}^{\infty}[\ 1 - R(a_i) - Q(a_i) + Q(a_i)R(a_i) + P(a_i)Q(a_i)\ ]$ Diferencia en 19

21. 0 Diferencia en 20

Como último ejemplo de la posibilidad de probar la validez de una fórmula predicativa monádica mediante métodos algebraicos, abordaremos la proposición de lógica de primer orden que representa al Principio de Inducción Matemática (PIM). Se trata de la fórmula $[\ P(1) \wedge (\forall_x)(P(x) \rightarrow P(x+1))\ ] \rightarrow (\forall_x)P(x)$. [26]

1. $[\ P(1) \wedge (\forall_x)(P(x) \rightarrow P(x+1))\ ] \rightarrow (\forall_x)P(x)$

2. $\neg[\ P(1) \wedge (\forall_x)(P(x) \rightarrow P(x+1))\ ] \vee (\forall_x)P(x)$ Def. de condic. en 1

3. $[\ \neg P(1) \vee \neg(\forall_x)(P(x) \rightarrow P(x+1))\ ] \vee (\forall_x)P(x)$ De Morgan en 2

[26] Se hizo un cambio de variable al consecuente de la fórmula condicional que figura en el texto *Tópicos en epistemología* de Luis Piscoya Hermoza (2009: 122).

4. $\neg P(1) \vee \neg(\forall_x)(P(x) \rightarrow P(x+1)) \vee (\forall_x)P(x)$ Asociatividad en 3

5. $\neg P(1) \vee (\exists_x)\neg(P(x) \rightarrow P(x+1)) \vee \neg(\exists_x)\neg P(x)$ Inter. de cuantif. en 4

6. $\neg P(1) \vee (\exists_x)\neg(\neg P(x) \vee P(x+1)) \vee \neg(\exists_x)\neg P(x)$ Def. de condic. en 5

7. $[1 - P(1)]\ (\exists_x)[1 - (1 - P(x))\, P(x+1)]\ [1 - (\exists_x)(1 - P(x))]$ Interpr. algebr. en 6

8. $[1 - P(1)]\ (\exists_x)[1 - (P(x+1) - P(x)P(x+1))]$

$[1 - (\exists_x)(1 - P(x))]$ Distrib. del prod. en 7

9. $[1 - P(1)]\ (\exists_x)[1 - P(x+1) + P(x)P(x+1)]$

$[1 - (\exists_x)(1 - P(x))\ ]$ Intr. signo neg. en 8

10. $[1 - P(1)]\ \prod_{i=1}^{\infty}[\ 1 - P(i+1) + P(\ i\ )P(i+1)]$

$\{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\ 1 - P(\ i\ )\ ]\ \}$ Def. de cuant. exist. 9

11. $[1 - P(1)]\ [1 - P(1+1) + P(\ 1\ )P(1+1)]$

$[1 - P(2+1) + P(\ 2\ )P(2+1)][1 - P(3+1) + P(\ 3\ )P(3+1)] \ldots$

$\{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\ 1 - P(\ i\ )\ ]\ \}$ Desarr. productor. 10

12. $[\mathbf{1} - \mathbf{P}(\mathbf{1})][1 - P(2) + P(\ 1\ )P(2)]$

$[1 - P(3) + P(\ 2\ )P(3)][1 - P(4) + P(\ 3\ )P(4)] \ldots$

$\{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\ 1 - P(\ i\ )\ ]\ \}$ Suma en 11[27]

13. $[1 - P(2) + P(\ 1\ )P(2) - P(1) + P(\ 1\ )P(2) - P(\ 1\ )^2P(2)]$

$[1 - P(3) + P(\ 2\ )P(3)][1 - P(4) + P(\ 3\ )P(4)] \ldots$

$\{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\ 1 - P(\ i\ )\ ]\ \}$ Prod. de polinom. 12

14. $[1 - P(2) + P(\ 1\ )P(2) - P(1) + P(\ 1\ )P(2) - P(\ 1\ )P(2)]$

$[1 - P(3) + P(\ 2\ )P(3)][1 - P(4) + P(\ 3\ )P(4)] \ldots$

$\{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\ 1 - P(\ i\ )\ ]\ \}$ Prop. adicionales 13

[27] El primer factor de esta línea es $[1 - P(1)]$.

15. $[1 - \mathrm{P}(2) + \mathrm{P}(1)\mathrm{P}(2) - \mathrm{P}(1)][1 - \mathrm{P}(3) + \mathrm{P}(2)\mathrm{P}(3)]$

$[1 - \mathrm{P}(4) + \mathrm{P}(3)\mathrm{P}(4)] \ldots \{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[1 - \mathrm{P}(\mathrm{i})]\}$ Diferencia en 14

16. $[\mathbf{1 - P(1) - P(2) + P(1)P(2)}][1 - \mathrm{P}(3) + \mathrm{P}(2)\mathrm{P}(3)]$

$[1 - \mathrm{P}(4) + \mathrm{P}(3)\mathrm{P}(4)] \ldots \{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[1 - \mathrm{P}(\mathrm{i})]\}$ Conmutatividad 15[28]

17. $[1 - \mathrm{P}(3) + \mathrm{P}(2)\mathrm{P}(3) - \mathrm{P}(1) + \mathrm{P}(1)\mathrm{P}(3) - \mathrm{P}(1)\mathrm{P}(2)\mathrm{P}(3) - \mathrm{P}(2) +$

$\mathrm{P}(2)\mathrm{P}(3) - \mathrm{P}(2)^2\mathrm{P}(3) + \mathrm{P}(1)\mathrm{P}(2) - \mathrm{P}(1)\mathrm{P}(2)\mathrm{P}(3) + \mathrm{P}(1)\mathrm{P}(2)^2\mathrm{P}(3)]$

$[1 - \mathrm{P}(4) + \mathrm{P}(3)\mathrm{P}(4)] \ldots \{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[1 - \mathrm{P}(\mathrm{i})]\}$ Prod. de polinom. 16

18. $[1 - \mathrm{P}(3) + \mathrm{P}(2)\mathrm{P}(3) - \mathrm{P}(1) + \mathrm{P}(1)\mathrm{P}(3) - \mathrm{P}(1)\mathrm{P}(2)\mathrm{P}(3) - \mathrm{P}(2) +$

$\mathrm{P}(2)\mathrm{P}(3) - \mathrm{P}(2)\mathrm{P}(3) + \mathrm{P}(1)\mathrm{P}(2) - \mathrm{P}(1)\mathrm{P}(2)\mathrm{P}(3) + \mathrm{P}(1)\mathrm{P}(2)\mathrm{P}(3)]$

$[1 - \mathrm{P}(4) + \mathrm{P}(3)\mathrm{P}(4)] \ldots \{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[1 - \mathrm{P}(\mathrm{i})]\}$ Prop. adicionales 17

19. $[1 - \mathrm{P}(3) - \mathrm{P}(1) + \mathrm{P}(1)\mathrm{P}(3) - \mathrm{P}(1)\mathrm{P}(2)\mathrm{P}(3) - \mathrm{P}(2) + \mathrm{P}(2)\mathrm{P}(3) +$

$\mathrm{P}(1)\mathrm{P}(2)][1 - \mathrm{P}(4) + \mathrm{P}(3)\mathrm{P}(4)] \ldots \{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[1 - \mathrm{P}(\mathrm{i})]\}$ Diferencia en 18

20. $[\mathbf{1 - P(1) - P(2) - P(3) + P(1)P(2) + P(2)P(3) + P(1)P(3) -}$

$\mathbf{P(1)P(2)P(3)}][1 - \mathrm{P}(4) + \mathrm{P}(3)\mathrm{P}(4)] \ldots$

$\{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[1 - \mathrm{P}(\mathrm{i})]\}$ Conmutatividad 19[29]

21. $\prod_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{\infty}}[\mathbf{1 - P(i)}]\{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[1 - \mathrm{P}(\mathrm{i})]\}$ Productoria en 20[30]

22. $\{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[1 - \mathrm{P}(\mathrm{i})]\}\prod_{i=1}^{\infty}[1 - \mathrm{P}(\mathrm{i})]$ Conmutatividad en 21

23. 0 Reducc. a cero 22[31]

---

[28] El primer factor de esta línea equivale a $[1 - \mathrm{P}(1)][1 - \mathrm{P}(2)]$.

[29] El primer factor de esta línea equivale a $[1 - \mathrm{P}(1)][1 - \mathrm{P}(2)][1 - \mathrm{P}(3)]$.

[30] La fórmula $\prod_{i=1}^{\infty}[1 - \mathrm{P}(\mathrm{i})]$ sustituye a $[1 - \mathrm{P}(1)][1 - \mathrm{P}(2)][1 - \mathrm{P}(3)] \ldots [1 - \mathrm{P}(\mathrm{n})][1 - \mathrm{P}(\mathrm{n}+1)] \ldots$ Esta última se obtiene inductivamente considerando las referencias 27, 28 y 29.

[31] La línea veintiuno se establece inductivamente. Sin embargo, la prueba no supone petición de principio, ya que la fórmula original de la línea uno no es el Principio de Inducción Matemática (PIM) sino la fórmula metalingüística que representa al PIM.

Se aprecia que la línea veintidós tiene la forma $(1-A)A$. Esta fórmula de nuestra interpretación algebraica equivale a la fórmula $\neg A \vee A$ de lógica proposicional. Por tanto, la fórmula inicial $[\ P(1) \wedge (\forall_x)(P(x) \rightarrow P(x+1))\ ] \rightarrow (\forall_x)P(x)$ es reductible a cero y resulta una fórmula lógicamente válida.

CAPÍTULO III

LA DECISIÓN ALGEBRAICA DE FÓRMULAS PREDICATIVAS MONÁDICAS DE PRIMER ORDEN CON IDENTIDAD

En el capítulo anterior establecimos la posibilidad de representar y de decidir algebraicamente sobre fórmulas predicativas monádicas de primer orden. Aunque las fórmulas predicativas poliádicas de primer orden también se pueden representar algebraicamente, no pueden decidirse algorítmicamente en términos algebraicos. No obstante, sí es posible la decisión en el caso de la lógica de predicados monádicos de primer orden con identidad.[32] Para exponer la manera en que es posible la decisión de la lógica de predicados monádicos de primer orden con identidad, se necesita establecer primero las condiciones que permiten representar algebraicamente una fórmula predicativa diádica de primer orden. Después de efectuar dicha representación, veremos la posibilidad de decidir sobre cierta clase especial de fórmulas predicativas diádicas de primer orden.[33]

III.1. LA REPRESENTACIÓN ALGEBRAICA DE LAS FORMAS NORMALES PRENEX

Hay ocho maneras de cerrar una función proposicional tal como P(x,y)[34].

I. $(\forall_x)(\forall_y)P(x,y)$ III. $(\exists_x)(\exists_y)P(x,y)$ V. $(\forall_x)(\exists_y)P(x,y)$ VII. $(\forall_y)(\exists_x)P(x,y)$

II. $(\forall_y)(\forall_x)P(x,y)$ IV. $(\exists_y)(\exists_x)P(x,y)$ VI. $(\exists_y)(\forall_x)P(x,y)$ VIII. $(\exists_x)(\forall_y)P(x,y)$

[32] Hemos tomado la lógica de predicados monádicos de primer orden con identidad como un segmento de la lógica de predicados de primer orden con identidad que figura en el texto *Introducción a la lógica simbólica* de Patrick Suppes (1974: 147).

[33] La identidad es una relación diádica con características especiales como la simetría y la transitividad según señala el texto *Introducción a la lógica simbólica* de Patrick Suppes (1974: 142).

[34] Tomamos esta información del texto *Lógica general* de Luis Piscoya Hermoza (2007: 264).

Cuando los cuantificadores antepuestos a una fórmula son todos universales o todos existenciales, el orden en que aparecen los cuantificadores es irrelevante. Por lo tanto, las dos primeras fórmulas son lógicamente equivalentes, al igual que la tercera y la cuarta. Si una fórmula exhibe todos los cuantificadores adelante, sin importar el orden en que se encuentren, entonces se dice que está en forma normal prenex. Las ocho fórmulas expuestas líneas arriba están en forma normal prenex.[35]

Empezaremos representando algebraicamente la fórmula número III, que resulta equivalente a la fórmula número IV.

1. $(\exists_x)(\exists_y)$ **P(x,y)**

2. $(\exists_y) P(a_1,y) \vee (\exists_y) P(a_2,y) \vee (\exists_y) P(a_3,y) \vee \ldots \ldots \vee (\exists_y) P(a_n,y) \vee (\exists_y) P(a_{n+1},y)\ldots$

Desarrollo del cuantificador que afecta a "x" en 1

3. $P(a_1,b_1) \vee P(a_1,b_2) \vee P(a_1,b_3) \vee \ldots \ldots \vee P(a_1,b_n) \vee P(a_1,b_{n+1}) \vee \ldots$

$\vee\ P(a_2,b_1) \vee P(a_2,b_2) \vee P(a_2,b_3) \vee \ldots \vee P(a_2,b_n) \vee P(a_2,b_{n+1}) \vee \ldots$

$\vee\ P(a_3,b_1) \vee P(a_3,b_2) \vee P(a_3,b_3) \vee \ldots \vee P(a_3,b_n) \vee P(a_3,b_{n+1}) \vee \ldots \ldots$

$\vee\ P(a_n,b_1) \vee P(a_n,b_2) \vee P(a_n,b_3) \vee \ldots \vee P(a_n,b_n) \vee P(a_n,b_{n+1}) \vee \ldots$

$\vee\ P(a_{n+1},b_1) \vee P(a_{n+1},b_2) \vee P(a_{n+1},b_3) \vee \ldots \vee P(a_{n+1},b_n) \vee P(a_{n+1},b_{n+1}) \vee \ldots$

Desarrollo del cuantificador que afecta a "y" en 2

4. $P(a_1,b_1)P(a_1,b_2)P(a_1,b_3)\ldots P(a_1,b_n)P(a_1,b_{n+1})\ldots$

$P(a_2,b_1)P(a_2,b_2)P(a_2,b_3)\ldots P(a_2,b_n)P(a_2,b_{n+1})\ldots$

$P(a_3,b_1)P(a_3,b_2)P(a_3,b_3)\ldots P(a_3,b_n)P(a_3,b_{n+1})\ldots\ldots$

$P(a_n,b_1)P(a_n,b_2)P(a_n,b_3)\ldots P(a_n,b_n)P(a_n,b_{n+1})\ldots$

$P(a_{n+1},b_1)P(a_{n+1},b_2)P(a_{n+1},b_3)\ldots P(a_{n+1},b_n)P(a_{n+1},b_{n+1})\ldots\ldots$ Interpretación algebraica en 3

5. $\prod_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\infty} \mathbf{P(a_i, b_j)}$ Productoria en 4

[35] Tomado del texto *Lógica general* de Luis Piscoya Hermoza (2007: 265).

Como la fórmula $(\exists_x)(\exists_y)P(x,y)$ equivale lógicamente a la fórmula $(\exists_y)(\exists_x)P(x,y)$ entonces tenemos que ambas fórmulas se representan algebraicamente como $\prod_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty} P(a_i\,,b_j)$.

Procederemos a representar algebraicamente la fórmula número I, la cual resulta equivalente a la fórmula número II.

1. $(\forall_x)(\forall_y)\mathbf{P(x,y)}$

2. $(\forall_y)P(a_1,y)\wedge(\forall_y)P(a_2,y)\wedge(\forall_y)P(a_3,y)\wedge \ldots\ldots \wedge(\forall_y)P(a_n,y)\wedge(\forall_y)P(a_{n+1},y)\ldots$

Desarrollo del cuantificador que afecta a "x" en 1

3. $P(a_1,b_1)\wedge P(a_1,b_2)\wedge P(a_1,b_3)\wedge \ldots\ldots \wedge P(a_1,b_n)\wedge P(a_1,b_{n+1})\wedge \ldots$

$\wedge\ P(a_2,b_1)\wedge P(a_2,b_2)\wedge P(a_2,b_3)\wedge \ldots \wedge P(a_2,b_n)\wedge P(a_2,b_{n+1})\wedge \ldots$

$\wedge\ P(a_3,b_1)\wedge P(a_3,b_2)\wedge P(a_3,b_3)\wedge \ldots \wedge P(a_3,b_n)\wedge P(a_3,b_{n+1})\wedge \ldots\ldots$

$\wedge\ P(a_n,b_1)\wedge P(a_n,b_2)\wedge P(a_n,b_3)\wedge \ldots \wedge P(a_n,b_n)\wedge P(a_n,b_{n+1})\wedge \ldots$

$\wedge\ P(a_{n+1},b_1)\wedge P(a_{n+1},b_2)\wedge P(a_{n+1},b_3)\wedge \ldots \wedge P(a_{n+1},b_n)\wedge P(a_{n+1},b_{n+1})\wedge \ldots$

Desarrollo del cuantificador que afecta a "y" en 2

4. $\neg[\neg P(a_1,b_1)\vee\neg P(a_1,b_2)\vee\neg P(a_1,b_3)\vee \ldots\ldots \vee\neg P(a_1,b_n)\vee\neg P(a_1,b_{n+1})\vee \ldots$

$\vee\ \neg P(a_2,b_1)\vee\neg P(a_2,b_2)\vee\neg P(a_2,b_3)\vee \ldots \vee\neg P(a_2,b_n)\vee\neg P(a_2,b_{n+1})\vee \ldots$

$\vee\ \neg P(a_3,b_1)\vee\neg P(a_3,b_2)\vee\neg P(a_3,b_3)\vee \ldots \vee\neg P(a_3,b_n)\vee\neg P(a_3,b_{n+1})\vee \ldots\ldots$

$\vee\ \neg P(a_n,b_1)\vee\neg P(a_n,b_2)\vee\neg P(a_n,b_3)\vee \ldots \vee\neg P(a_n,b_n)\vee\neg P(a_n,b_{n+1})\vee \ldots$

$\vee\ \neg P(a_{n+1},b_1)\vee\neg P(a_{n+1},b_2)\vee\neg P(a_{n+1},b_3)\vee \ldots \vee\neg P(a_{n+1},b_n)\vee\neg P(a_{n+1},b_{n+1})\vee \ldots]$

De Morgan en 3

5. $1 - [(1 - P(a_1,b_1))(1 - P(a_1,b_2))(1 - P(a_1,b_3)) \ldots \ldots (1 - P(a_1,b_n))(1 - P(a_1,b_{n+1}))\ldots$

$(1 - P(a_2,b_1))(1 - P(a_2,b_2))(1 - P(a_2,b_3))\ldots (1 - P(a_2,b_n))(1 - P(a_2,b_{n+1}))\ldots$

$(1 - P(a_3,b_1))(1 - P(a_3,b_2))(1 - P(a_3,b_3))\ldots (1 - P(a_3,b_n))(1 - P(a_3,b_{n+1}))\ldots \ldots$

$(1 - P(a_n,b_1))(1 - P(a_n,b_2))(1 - P(a_n,b_3))\ldots (1 - P(a_n,b_n))(1 - P(a_n,b_{n+1}))\ldots$

$(1 - P(a_{n+1},b_1))(1 - P(a_{n+1},b_2))(1 - P(a_{n+1},b_3))\ldots (1 - P(a_{n+1},b_n))(1 - P(a_{n+1},b_{n+1}))\ldots]$

Interpretación algebraica en 4

6. $\mathbf{1 - \prod_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\infty}[\ 1 - P(a_i, b_j)]}$ Productoria en 5

Como la fórmula $(\forall_x)(\forall_y)P(x,y)$ equivale lógicamente a la fórmula $(\forall_y)(\forall_x)P(x,y)$ entonces tenemos que ambas fórmulas se representan algebraicamente como $1 - \prod_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\infty}[\ 1 - P(a_i, b_j)]$.

A continuación, representaremos algebraicamente la fórmula número V.

1. $(\forall_x)(\exists_y)\mathbf{P(x,y)}$
2. $\neg\neg(\forall_x)(\exists_y)P(x,y)$ Doble negación en 1
3. $\neg(\exists_x)\ \neg(\exists_y)P(x,y)$ Intercambio de cuantificadores en 2
4. $\mathbf{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[\ 1 - \prod_{j=1}^{\infty} P(a_i , b_j)\ ]}$ Productoria en 3

Ahora representaremos algebraicamente la fórmula número VI.

1. $(\exists_y)(\forall_x)\mathbf{P(x,y)}$
2. $\neg\neg(\exists_y)(\forall_x)P(x,y)$ Doble negación en 1
3. $\neg(\forall_y)\ \neg(\forall_x)P(x,y)$ Intercambio de cuantificadores en 2
4. $(\exists_y)\ \neg\neg(\forall_x)P(x,y)$ Intercambio de cuantificadores en 3
5. $(\exists_y)\ \neg(\exists_x)\neg P(x,y)$ Intercambio de cuantificadores en 4
6. $\mathbf{\prod_{j=1}^{\infty}\ [1 - \prod_{i=1}^{\infty}\ (1 - P(a_i, b_j))\ ]}$ Productoria en 5

La representación algebraica de la fórmula número VII es como sigue.

1. $(\forall_y)(\exists_x)\mathbf{P(x,y)}$
2. $\neg\neg(\forall_y)(\exists_x)P(x,y)$ — Doble negación en 1
3. $\neg(\exists_y)\neg(\exists_x)P(x,y)$ — Intercambio de cuantificadores en 2
4. $\mathbf{1 - \prod_{j=1}^{\infty} [1 - \prod_{i=1}^{\infty} P(a_i , b_j)]}$ — Productoria en 3

Finalmente, representaremos algebraicamente la fórmula número VIII.

1. $(\exists_x)(\forall_y)\mathbf{P(x,y)}$
2. $\neg\neg(\exists_x)(\forall_y)P(x,y)$ — Doble negación en 1
3. $\neg(\forall_x)\neg(\forall_y)P(x,y)$ — Intercambio de cuantificadores en 2
4. $\neg(\forall_x)(\exists_y)\neg P(x,y)$ — Intercambio de cuantificadores en 3
5. $(\exists_x)\neg(\exists_y)\neg P(x,y)$ — Intercambio de cuantificadores en 4
6. $\mathbf{\prod_{i=1}^{\infty} [1 - \prod_{j=1}^{\infty} (1 - P(a_i, b_j))]}$ — Productoria en 5

Recapitulando, ofrecemos el siguiente cuadro con las ocho formas normales prenex que corresponden al cierre de una función proposicional diádica y sus respectivas equivalencias algebraicas.

FORMAS NORMALES PRENEX	EQUIVALENTES ALGEBRAICOS
I. $(\forall_x)(\forall_y)\mathbf{P(x,y)}$	$\mathbf{1 - \prod_{i=1, j=1}^{\infty}[1 - P(a_i, b_j)]}$
II. $(\forall_y)(\forall_x)\mathbf{P(x,y)}$	$\mathbf{1 - \prod_{i=1, j=1}^{\infty}[1 - P(a_i, b_j)]}$
III. $(\exists_x)(\exists_y)\mathbf{P(x,y)}$	$\mathbf{\prod_{i=1, j=1}^{\infty} P(a_i , b_j)}$
IV. $(\exists_y)(\exists_x)\mathbf{P(x,y)}$	$\mathbf{\prod_{i=1, j=1}^{\infty} P(a_i , b_j)}$
V. $(\forall_x)(\exists_y)\mathbf{P(x,y)}$	$\mathbf{1 - \prod_{i=1}^{\infty}[1 - \prod_{j=1}^{\infty} P(a_i , b_j)]}$
VI. $(\exists_y)(\forall_x)\mathbf{P(x,y)}$	$\mathbf{\prod_{j=1}^{\infty} [1 - \prod_{i=1}^{\infty} (1 - P(a_i, b_j))]}$
VII. $(\forall_y)(\exists_x)\mathbf{P(x,y)}$	$\mathbf{1 - \prod_{j=1}^{\infty} [1 - \prod_{i=1}^{\infty} P(a_i , b_j)]}$
VIII. $(\exists_x)(\forall_y)\mathbf{P(x,y)}$	$\mathbf{\prod_{i=1}^{\infty} [1 - \prod_{j=1}^{\infty} (1 - P(a_i, b_j))]}$

III.2. LA PRUEBA DE VALIDEZ DE FÓRMULAS PREDICATIVAS MONÁDICAS DE PRIMER ORDEN CON IDENTIDAD MEDIANTE MÉTODOS ALGEBRAICOS

En esta última sección mostraremos la posibilidad de establecer una prueba de validez para fórmulas predicativas monádicas de primer orden con identidad mediante métodos algebraicos que consisten fundamentalmente en reducir la fórmula a cero. Si la fórmula es reductible a cero, habremos probado que se trata de una fórmula predicativa monádica con identidad lógicamente válida.

Como señalamos al inicio de este capítulo, la identidad es una relación diádica especial que se distingue por ser simétrica y transitiva. Asimismo, el empleo de la identidad se restringirá en nuestra prueba a objetos matemáticos. Necesitamos un dominio específico para poder trabajar adecuadamente con la identidad, ese dominio será el conjunto de los números naturales, cuyo primer elemento será el uno.

Cuando tratamos con una relación diádica cualquiera, cerrada por medio de cuantificadores tales como la fórmula $(\exists_x)(\exists_y)P(x,y)$ podríamos estar refiriéndonos a diversos objetos tales como personas, partículas, animales, números, etc. Naturalmente, la referencia a una u otra clase de objetos depende de la interpretación que se lleve a cabo. En nuestra interpretación algebraica el equivalente de la fórmula anterior es la fórmula $\prod_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\infty} P(a_i\,, b_j)$.

Esta fórmula, cuando solo sabemos que P es un predicado diádico, también puede referirse a múltiples objetos. Sin embargo, tratándose de la identidad vamos a restringir nuestro universo del discurso a objetos matemáticos, y entre ellos, aludiremos al conjunto de los números naturales que empiezan por el uno.

Empecemos probando la validez de la fórmula $(\exists_x)(\exists_y)(\mathbf{x}=\mathbf{y})$ que tomando como dominio de interpretación el conjunto de los números naturales significa que hay al menos un número natural que es idéntico a por lo menos un número natural.

1. $(\exists_x)(\exists_y)(\mathbf{x}=\mathbf{y})$

2. $\prod_{\substack{i=1\\ j=1}}^{\infty} (\mathrm{i} = \mathrm{j})$ Prenex algebraico en 1

3. $(1 = 1)(1 = 2)(1 = 3)\ldots(1 = n)(1 = n + 1)\ldots$

   $(2 = 1)(2 = 2)(2 = 3)\ldots(2 = n)(2 = n + 1)\ldots$

   $(3 = 1)(3 = 2)(3 = 3)\ldots(3 = n)(3 = n + 1)\ldots\ldots$

   $(n = 1)(n = 2)(n = 3)\ldots(n = \mathrm{n})(n = \mathrm{n} + 1)\ldots$ Desarr. de la productoria en 2 [36]

4. 0 Reducción a cero en 3 [37]

Examinemos ahora la fórmula $(\forall_x)(\exists_y)(\mathbf{x}=\mathbf{y})$ que de acuerdo con nuestro dominio de interpretación restringido por la identidad significa que todo número natural es idéntico a por lo menos un número natural.

1. $(\forall_x)(\exists_y)(\mathbf{x}=\mathbf{y})$

2. $1-\prod_{i=1}^{\infty}[\,1-\prod_{j=1}^{\infty}(\mathrm{i}=\mathrm{j})\,]$ Prenex algebraico en 1

3. $1-[\,1-\prod_{j=1}^{\infty}(1=\mathrm{j})\,][\,1-\prod_{j=1}^{\infty}(2=\mathrm{j})\,][\,1-\prod_{j=1}^{\infty}(3=\mathrm{j})\,]\ldots$

   $\ldots[\,1-\prod_{j=1}^{\infty}(n=\mathrm{j})\,][\,1-\prod_{j=1}^{\infty}(n+1=\mathrm{j})\,]\ldots$ Desarr. de la product. "i" en 2

[36] La línea 3 es una cadena potencialmente infinita de factores y resulta que aquellos factores ubicados en la diagonal tienen como valor asignado el cero, ya que son afirmaciones verdaderas y en nuestra interpretación algebraica la verdad se asocia con el cero.

[37] Para que la línea 4 sea igual a cero, basta con examinar el primer factor que afirma que el uno es idéntico al uno. Este primer factor igual a cero garantiza que toda la cadena de factores sea igual a cero.

4. $1 - [\, 1 - (1 = 1)(1 = 2)(1 = 3) \ldots \ldots (1 = n)(1 = n + 1) \ldots \,]$

$[\, 1 - (2 = 1)(2 = 2)(2 = 3) \ldots \ldots (2 = n)(2 = n + 1) \ldots \,]$

$[\, 1 - (3 = 1)(3 = 2)(3 = 3) \ldots \ldots (3 = n)(3 = n + 1) \ldots \,] \ldots \ldots$

$[\, 1 - (n = 1)(n = 2)(n = 3) \ldots \ldots (n = n)(n = n + 1) \ldots \,]$

$[\, 1 - (n + 1 = 1)(n + 1 = 2)(n + 1 = 3) \ldots \ldots (n + 1 = n)(n + 1 = n + 1) \ldots \,] \ldots$

Desarr. de la product. “j” en 3

5. $1 - [\, 1 - 0 \,]\, [\, 1 - 0 \,][\, 1 - 0 \,] \ldots \ldots [\, 1 - 0 \,][\, 1 - 0 \,] \ldots$ Multiplicación por cero en 4 [38]

6. $1 - [\, 1 \,]\, [\, 1 \,][\, 1 \,] \ldots \ldots [\, 1 \,][\, 1 \,] \ldots$ Diferencia en 5

7. $1 - 1$ Multiplicación por uno en 6

8. 0 Diferencia en 7

Hemos logrado probar por métodos algebraicos que la fórmula predicativa monádica de primer orden con identidad $(\forall_x)(\exists_y)(\mathbf{x = y})$ es lógicamente válida, ya que es reductible a cero.

[38] En la línea 4 se aprecia un uno menos un producto de corchetes [ ] potencialmente infinito. El sustraendo de cada corchete tiene siempre un factor que resulta cero por ser una afirmación verdadera.

CONCLUSIONES

1. Es posible formular una interpretación algebraica de la lógica proposicional que use, convencionalmente, el 0 y el 1 en lugar de la verdad y la falsedad respectivamente. Se puede extender la interpretación algebraica de la lógica proposicional hasta la lógica de predicados con la posibilidad de representar algebraicamente cualquier fórmula bien formada. Esta extensión es posible sobre la base de la correspondencia entre la disyunción y el producto.

2. Si bien puede representarse algebraicamente cualquier fórmula bien formada, la decisión algorítmica solo es posible para fórmulas predicativas monádicas con identidad, entendiendo la identidad como un predicado diádico con propiedades muy específicas que permiten su decisión.

3. Haber extendido la decisión hasta las fórmulas predicativas monádicas de primer orden con identidad permite adentrarse en un terreno más afín con las matemáticas. Con la interpretación algebraica propuesta en esta tesis, podemos decidir sobre algunas afirmaciones matemáticas que involucran la noción de identidad.

4. La interpretación algebraica propuesta prueba pedagógicamente que se puede convertir un lenguaje cualitativo, que emplea valores de verdad, en un lenguaje de medida, que emplea ceros y unos. Queda claro que los predicados cualitativo y métrico no son propiedades de los fenómenos estudiados sino que son propiedades del lenguaje con que se describe tales fenómenos. La materia prima de esta investigación, a saber, la lógica proposicional, ha sido descrita

usualmente en términos cualitativos, mientras que la interpretación que presenta esta tesis aborda la misma entidad pero como una estructura algebraica.

5. La interpretación algebraica que se defiende en esta tesis constituye un algebra de la lógica proposicional o álgebra de Lindenbaum y, consecuentemente, un álgebra de Boole. Debido a su naturaleza de estructura algebraica favorece la algoritmización y emplea propiedades inductivas que son muy útiles cuando se trata de decidir la validez de algunas fórmulas.

6. El lenguaje métrico desarrollado en esta tesis pierde algunas características propias del lenguaje cualitativo convencional pero también muestra propiedades que no eran apreciables con el uso de este último.

BIBLIOGRAFÍA

Ackermann, W. (1968). *Solvable cases of the decision problem*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company.

Ayer, A. (1971). *Lenguaje, verdad y lógica*. Barcelona: Ediciones Martínez Roca.

Bernays, P. (1926). Axiomatische Untersuchung des Aussagen-Kalkuls der 'Principia Mathematica'. *Mathematische Zeitschrift, 25,* 305-20.

Boole, G. (1847) *The Mathematical Analysis of Logic, Being an Essay Towards a Calculus of Deductive Reasoning*. Cambridge: Macmillan, Barclay & Macmillan.

Boole, G. (1848) The Calculus of Logic. *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, 3, 183-98.

Boole, G. (1958) *An Investigation of the Laws of Thought on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*. New York: Dover Publications.

Bunge, M. (2008). *Semántica I: Sentido y referencia*. Barcelona: Editorial Gedisa.

Cassini, A. (2006). *El juego de los principios: una introducción al método axiomático*. Buenos Aires: AZ ediciones.

Copi, I. M. (1979/1994). *Lógica simbólica* (12ª reimpresión). México DF: Compañía editorial continental

González, P. M. (2006). *Platón y la Academia de Atenas*. Madrid: NIVOLA libros y ediciones.

Hilbert, D., y Bernays, P. (2011). *Foundations of Mathematics I*. London: College publications.

Katz, J. (1971). *Filosofía del lenguaje*. Barcelona: Ediciones Martínez Roca.

Mendelson, E. (1963). *Introduction to mathematical logic.* Princeton, New Jersey: D. van Nostrand Company, INC.

Mosterín, J. (2003). *Conceptos y teorías en la ciencia*. Madrid: Alianza Editorial.

Mosterín, J. y Torretti, R. (2010). *Diccionario de lógica y filosofía de la ciencia.* Madrid: Alianza Editorial.

Piscoya, L. (2007). *Lógica general* (3ª ed.). Lima: Fondo editorial Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

Piscoya, L. (2009). *Tópicos en epistemología* (2ª ed.). Lima: Fondo editorial de la UIGV.

Quine, W. V. O. (1998). *Filosofía de la lógica*. Madrid: Alianza Editorial.

Suppes, P. (1970). *A probabilistic theory of causality*. Amsterdam: North-Holland publishing Company.

Suppes, P. (1974). *Introducción a la lógica simbólica*. México DF: Compañía editorial continental.

Suppes, P. (1988). *Estudios de filosofía y metodología de la ciencia*. Madrid: Alianza Universidad.

Wittgenstein, L. (2002). *Tractatus logico-philosophicus*. Madrid: Alianza Editorial.