

**UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS**

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

E.A.P. DE COMPUTACIÓN CIENTÍFICA

**Modelo matemático de la dinámica de transmisión sexual  
del VIH/SIDA en una población heterosexual activa en el  
Perú**

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Neisser Pino Romero

ASESORA

Roxana López Cruz

Lima – Perú

2013

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>8</b>
<b>2. Situación Problemática del VIH/SIDA en el Perú</b>	<b>10</b>
2.1. Graficas del VIH/SIDA . . . . .	12
2.2. Respuesta al VIH/SIDA . . . . .	14
<b>3. El fenómeno epidemiológico y el modelamiento matemático</b>	<b>16</b>
3.1. La concepción de la epidemiología matemática . . . . .	17
<b>4. Modelos Matemáticos Básicos del VIH/SIDA</b>	<b>19</b>
4.1. El VIH/SIDA y los Modelos Matemáticos . . . . .	19
4.1.1. Planteamiento Matemático . . . . .	19
4.1.2. Bases Teóricas . . . . .	20
4.1.3. Objetivos del Modelo . . . . .	20
4.2. Antecedentes del Modelo Matemático . . . . .	20
4.2.1. Modelos Epidemiológicos de Dinámica de transmisión en Individuos . . . . .	21
4.2.2. Modelos Epidemiológicos de Dinámica Celular . . . . .	22
4.3. Modelo Matemático Estadístico . . . . .	22
4.3.1. Ecuación del Modelo Matemático . . . . .	23
4.4. Modelo Matemático S-I del VIH/SIDA . . . . .	23
4.5. Modelo Matemático Epidemiológico del VIH/SIDA . . . . .	24
4.5.1. Consideraciones Iniciales del Modelo . . . . .	24
4.5.2. Poblaciones, Variables y Tasas del Modelo . . . . .	26
4.6. Modelo Matemático Epidemiológico sin Control . . . . .	27
4.6.1. Consideraciones Matemáticas . . . . .	28
4.6.2. Dinámicas Matemáticas . . . . .	28
4.6.3. Modelo Matemático Epidemiológico . . . . .	29
4.6.4. Existencia y Unicidad . . . . .	29
4.6.5. Estado de Equilibrio del Modelo . . . . .	33
4.6.6. Matriz de la Próxima Generación . . . . .	35
4.6.7. Análisis de las Simulaciones Computacionales . . . . .	53

<b>5. Modelo Matemático Epidemiológico con Estrategia de Control</b>	<b>60</b>
5.1. Modelo Matemático . . . . .	62
5.1.1. Existencia y Unicidad . . . . .	63
5.2. Estado de Equilibrio del Modelo . . . . .	66
5.2.1. Puntos Críticos . . . . .	67
5.2.2. Matriz de la Siguiete Generación . . . . .	69
5.3. Análisis de las Simulaciones Computacionales . . . . .	74
5.3.1. Tasas de Ingreso a la Población Sexualmente Activa . . . . .	75
5.3.2. Tasas de Contagio por personas infectadas . . . . .	77
5.3.3. Tasas de Mortalidad por la enfermedad . . . . .	79
5.4. Modelo Estrategia de Control ( $w(t)$ función ) . . . . .	82
5.5. Comparación de los Modelos de Estrategia de Control $w(t)$ . . . . .	84
<b>6. Simulación Computacional</b>	<b>86</b>
6.1. Método de Runge-Kutta de Cuarto Orden para Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias . . . . .	86
6.2. Algoritmo de Runge-Kutta de Cuarto Orden para Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias . . . . .	89
6.3. Interfaz Gráfica (GUIDE MATLAB) . . . . .	90
6.3.1. GUIDE Modelo Sin Control . . . . .	90
6.3.2. GUIDE Modelo con Estrategia de Control . . . . .	91
6.3.3. Comparación de Ambos Modelos . . . . .	91
<b>7. CONCLUSIONES</b>	<b>93</b>
7.1. Conclusiones Finales . . . . .	95
7.2. Comentario . . . . .	97
Bibliografía . . . . .	98

Modelo Matemático de la Dinámica de Transmisión  
Sexual del VIH/SIDA en una Población Heterosexual  
Activa en el Perú

por

Neisser Pino Romero

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de  
Ciencias Matemáticas, de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos,  
como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de  
Licenciado en Computación Científica.

Aprobada por:

.....  
Dr. Raúl Moisés Izaguirre Maguña  
Presidente

.....  
Dr. Jorge Odon Alarcón Villaverde  
Miembro

.....  
Dra. Roxana López Cruz  
Miembro Asesor

Lima - Perú  
Octubre - 2013

# AGRADECIMIENTOS

*Desearía agradecer en especial a Dios por el día a día que me permite vivir, y poder realizar las metas que me voy trazando de acuerdo a su Divina Providencia.*

*A la Iglesia Católica por la formación Integral que me brinda y me ayuda a seguir adelante.*

*A mis padres por el cariño, y que siempre me están apoyando en todo lo necesario para seguir caminando, a mi tía abuela por todo su cariño y apoyo, a toda mi familia por su apoyo incondicional y cariño sobretodo en los momentos difíciles.*

*A mi hermana mayor por sus consejos cuando tengo dudas de continuar, cuando todo parece complicado, cuando necesito volver a la realidad y seguir adelante con el día a día.*

*También deseo agradecer a una persona muy importante en mi vida, que me ha apoyado durante de mi formación académica, a mis amigos, mis amigas, especialmente de la universidad; gracias de verdad, muchas gracias.*

*A cada uno de mis profesores de la facultad por los consejos y las guías en los cursos, los temas, las dudas académicas. Muchas gracias a cada uno de mis profesores.*

**Es Bueno saber la historia, para no criticar con excesiva facilidad el pasado y pensar que los que vivimos en el presente tenemos toda la razón y el pasado sólo era tiniebla y oscuridad.**

# FICHA CATALOGRÁFICA

PINO ROMERO, NEISSER

Modelo Matemático de la Dinámica de Transmisión Sexual del VIH/SIDA en una Población Heterosexual Activa en el Perú. (Lima) 2013.  
U.N.M.S.M. Licenciado en Computación Científica. 2013.  
TESIS. Universidad Nacional Mayor de San Marcos.  
Facultad de Ciencias Matemáticas.  
Computación Científica.  
I. UNMSM/FdeCM II. Título (Serie)

# RESUMEN

## Modelo Matemático de la Dinámica de Transmisión Sexual del VIH/SIDA en una Población Heterosexual Activa en el Perú

**NEISSER PINO ROMERO**

Octubre - 2013

Orientador : Dra. Roxana López Cruz  
Título Obtenido : Licenciado en Computación Científica

Se presenta un modelo que explica la dinámica de transmisión de la enfermedad del Síndrome de Inmunodeficiencia Adquirida (SIDA) entre parejas heterosexuales activas. Se incluyen los supuestos, las variables, el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que representará al modelo, el análisis cualitativo y la sensibilidad del modelo con su respectiva estabilidad local, y una estrategia de control. Se implementará computacionalmente el modelo para un entendimiento dinámico del mismo mediante una interfaz gráfica.

**Palabras Clave:** SIDA  
VIH  
Epidemia  
Infección  
Estrategia de control,  
Sistema dinámico

# ABSTRACT

## Mathematical Model of Dynamics of Sexual Transmission of HIV / AIDS in an Active Heterosexual Population in Peru

NEISSER PINO ROMERO

Octubre - 2013

We present a model that explains the dynamics of transmission of the disease Acquired Immune Deficiency Syndrome (AIDS ) among heterosexually active couples . They include assumptions , hypotheses , variables , the system of ordinary differential equations representing the model, the qualitative analysis and the sensitivity of the model with their respective local stability , and a control strategy . Model is computationally implemented for a dynamic understanding of it through a graphical interface .

**Keywords:** AIDS  
HIV  
Epidemic  
Infection  
Control strategy  
Dynamic system



# Capítulo 1

## Introducción

Una de las enfermedades que actualmente está causando una gran preocupación en la salud pública, en el cuidado personal sobre todo, es el VIH/SIDA. El cual en los últimos años ha tenido un gran crecimiento pero a la vez tiene una gran dedicación en los estudios para intentar frenar esta epidemia que ocurre en todo el mundo. La enfermedad tiene varias dinámicas para contraerse, una de ellas en gran medida es por el acto sexual, ya sea heterosexual como homosexual, en otros casos por inyectables infectados, en la gestación madre-hijo, etc. [1].

Por esta gran preocupación se ha creado a través del tiempo varias instituciones para la comunicación, prevención, investigación, tratamiento entre las cuales una de ellas es el ONUSIDA, la cual constantemente presenta información actualizada en todo el mundo debido a las relaciones públicas que mantiene y sobre todo que la enfermedad del VIH/SIDA es una preocupación global que afecta a toda la humanidad. En 2012, alrededor de 186 países mandaron sus informes respectivos con relación a la enfermedad, lo que permite un mejor análisis de la situación actual de la enfermedad en los diferentes países y como se va desarrollando la dinámica de transmisión en sus diferentes formas. Con respecto a estos informes, se ha podido apreciar que ha habido un índice de descenso en los casos reportados, que los medios de transmisión van cambiando dependiendo la sociedad y el país donde se reside, por otro lado, también se va considerando nuevas estrategias de control o mejor dicho, maneras de optimizar las estrategias dependiendo los individuos de la sociedad donde se convive. [2].

También hay que comprender muy en especial el comportamiento de la enfermedad dentro de América Latina, que tiene diferencias con América del Norte, Europa, Asia. Aunque la enfermedad sea la misma y los medios de transmisión también, algo que diferenciara bastante serán las costumbres, comportamientos sociales que tenga cada una, con lo cual los medios de transmisión tendrán un impacto diferente, es decir, un medio de transmisión tendrá un mayor índice que otro en un lugar, pero en otro lugar podría ser al revés; estas consideraciones son importantes para tener una perspectiva epidemiológica correcta al momento

de generar estrategias de control. [3].

Por esto, América Latina y el Caribe tiene grandes oportunidades de evitar la propagación de la enfermedad debido que se encuentra en situaciones sociales que en las otras regiones; para lo cual el Estado tiene que evaluar medios y relaciones para conocer la situación epidemiológica de la enfermedad tanto en su propio país y de sus países cercanos debido que la globalización y las relaciones entre naciones es aún más necesaria para tener una visión mucho más general de la evolución de la dinámica de transmisión de la enfermedad y de las consecuencias que genera a la sociedad. También hay que considerar que actualmente el inicio de la vida sexual es mucho más temprana que años anteriores, esto genera que los individuos estén mucho más propensos a contraer el virus, cabe recordar el cual no tiene una cura total, y con respecto al VIH/SIDA lo más indicado es no tener individuos infectados, aunque se tengan medios para ir contrarrestando la enfermedad mediante medicamentos. [4].

Uno de los países que compone América Latina y el Caribe, es Perú. Perú con respecto al enfermedad del VIH/SIDA ha tenido una gran crecimiento con respecto su transmisión, el cual se da más por vía sexual (97%), actualmente no se sufre grandes consecuencias en cuanto a la población debido que se mantiene baja su tasa de portadores a nivel nacional, pero se tiene preocupación por las ciudades de Lima y Callao el cual tiene el mayor índice de contagio y de portadores.

Debido a esta problemática de la enfermedad VIH/SIDA, el Perú necesita tener información y medios para poder contrarrestar la propagación de la enfermedad, actualmente se cuenta con modelos para tener la noción de cómo se va desarrollando la dinámica de transmisión, estos modelos permiten tener respuesta a corto plazo para la toma de decisiones y tener una adecuada perspectiva de su evolución, pero la pregunta que se puede generar ante estas respuestas sería *¿Qué pasaría a un largo plazo si no realizo ningún cambio en las estrategias que se decidió?*, por lo cual sería necesario tener un conocimiento de modelos que permitan tener ideas de cómo se podría comportar la enfermedad a largo plazo. Para lo cual se presentara un modelo matemático que permite ver la evolución de la dinámica de transmisión de la enfermedad a través del tiempo. [5].

## Capítulo 2

# Situación Problemática del VIH/SIDA en el Perú

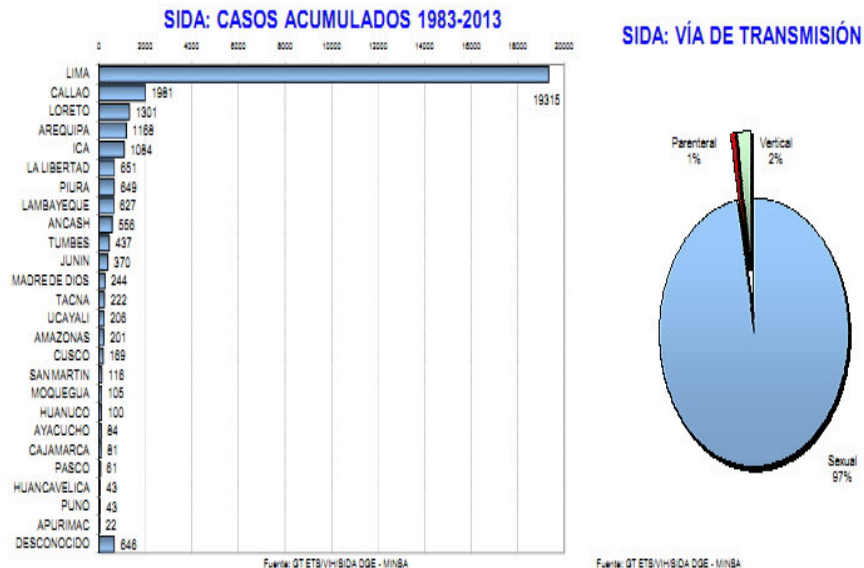
La situación problemática que se vive en el Perú con respecto al VIH/SIDA es un tema complicado debido a las consecuencias que conlleva afrontar a las personas que conviven con la enfermedad; esta enfermedad es una de las más globales que existen en el mundo y que afecta en un nivel casi integral a la sociedad de los países en la condición que estén. La diferencia de los países del mundo es la perspectiva que tienen de la enfermedad y cómo se intenta contrarrestarla debido que hasta la actualidad no existe una cura total para la enfermedad, solamente medicamentos antivirales que intentan controlar el avance de la enfermedad. Esta enfermedad no solamente afecta a las personas, a las familias, sino a la sociedad misma en su perspectiva de persona en sí misma más que como individuo, pues no solamente afecta en el sentido económico, sino también en un sentido antropológico social por la concepción que se tiene de la enfermedad en el país. Ahora el Perú afronta una gran crisis de identidad sexual para realizar un adecuado estudio debido que la mayor parte de la transmisión de la enfermedad se suscita a través de relaciones homosexuales y bisexuales, es decir, la tendencia hace unos 30 años era que había más hombres contagiados que las mujeres debido a una vida sexual desordenada o libertina, ahora por la constante liberaridad sexual, y el aumento de individuos tanto de bisexuales y "gays" ha aumentado la población de infectadas con la enfermedad. [6,7].

"La epidemia de VIH en el Perú permanece sobretodo concentrada en Hombrs que tienen Sexo con Hombres (HSH). Casi todos los estudios serológicos disponibles muestran una prevalencia de 5 % o más en HSH, mientras que en casi todas las otras poblaciones ésta es menor a 1 %, incluyendo los estudios en trabajadoras sexuales femeninas (TSF). La transmisión continúa siendo sexual en la casi total ausencia de uso de drogas intravenosas, y afecta predominantemente a hombres. Las fuentes de información en conducta sexual y marcadores de ETS

en la última década son numerosas, probablemente como resultado de la continua generación de datos sobre VIH/ITS en el MINSA, la implementación regular de las ENDES por el Instituto Nacional de Estadística e Informática (INEI), y la existencia de investigadores locales trabajando en temas relativos a VIH con grupos de investigación internacionales. Sin embargo, no toda esta información ha sido adecuadamente procesada o interpretada, y menos aún, aprovechada para la formulación de políticas y estrategias de intervención". [8,9].

De todos los casos notificados de SIDA desde el año 1983 a la fecha, el 80 % pertenece al sexo masculino y el 20 % al sexo femenino. La mayoría de casos de SIDA se concentra entre jóvenes y adultos jóvenes en edad reproductiva (20 y 35 años). Se ha estimado que entre 11400-20200 jóvenes (15-34 años) viven con VIH, pero solamente el 55 % de ellos cuentan con el acceso al conocimiento, información y educación sobre el VIH y cómo protegerse ante el riesgo de contraer la enfermedad. La prevalencia de VIH llega a 10.8% en el grupo de hombres que tienen sexo con otros hombres. Últimamente se ha realizado un estudio en el Perú por propuesta de la ONUSIDA, en el cual se estimó que en el año 2010 se reportaron 4,346 nuevos casos de infección por VIH, informó el director de la DGE. [10].

Como ya se había mencionado en el Perú, el principal medio de transmisión del VIH/SIDA es mediante la vía sexual (97 %); por lo cual el trabajo se centrará en este medio únicamente, no se tendrá en cuenta los otros medios, esto se confirma con el siguiente gráfico.



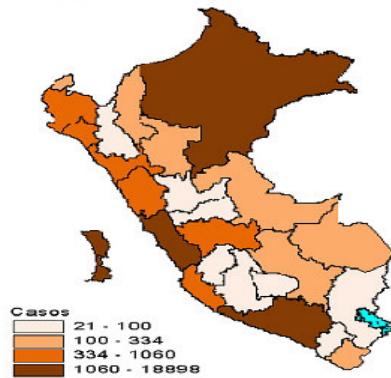
"La Epidemia de VIH/SIDA en el Perú se encuentra en el nivel de "epidemia concentrada", en base a los estudios de la prevalencia de VIH en gestantes, de 0,23% y en hombres que tienen sexo con otros hombres (HSH), de 12,4% y la incidencia de VIH de 3,1% en Lima/Callao, de acuerdo a los resultados de la Vigilancia Epidemiológica Centinela realizada en el año 2011. Con el apoyo financiero de la Sexta Ronda del Fondo Mundial, CAREPERU, la Asociación Civil Impacta, la Dirección General de Epidemiología y la Estrategia Sanitaria de Prevención y Control de ETS, VIH/SIDA del Ministerio de Salud". [6].

## 2.1. Graficas del VIH/SIDA

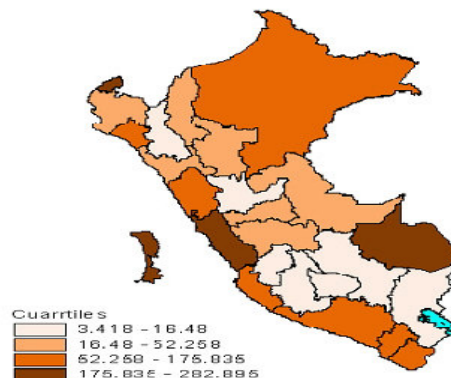
El primer caso de SIDA en el Perú fue reportado en 1983, y desde entonces ha tenido un dramático ascenso hasta la fecha, con un acumulado de 8071 casos de SIDA a noviembre de 1998. Cifra que dista largamente de la realidad porque hay notificaciones registradas y además el sistema de registros no funciona adecuadamente, de modo que es probable que el número real de casos sea 3 a 5 veces mayor que el virtualmente registrado. Situación que aparece con mayor magnitud en las regiones de provincia y en las zonas marginales de la gran Lima. [6,9,10].

### PERÚ: NOTIFICACION DE CASOS DE SIDA 1983 - 2012

Casos acumulados 1983 - 2012



Incidencia acumulada 1983 - 2012



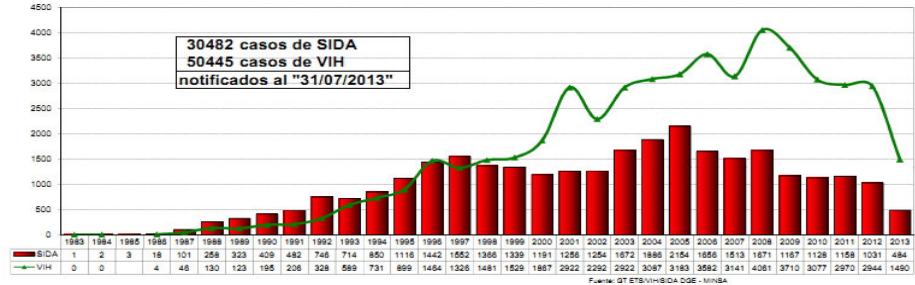


Situación del VIH/SIDA en el Perú \*  
Boletín Epidemiológico Mensual  
Julio 2013



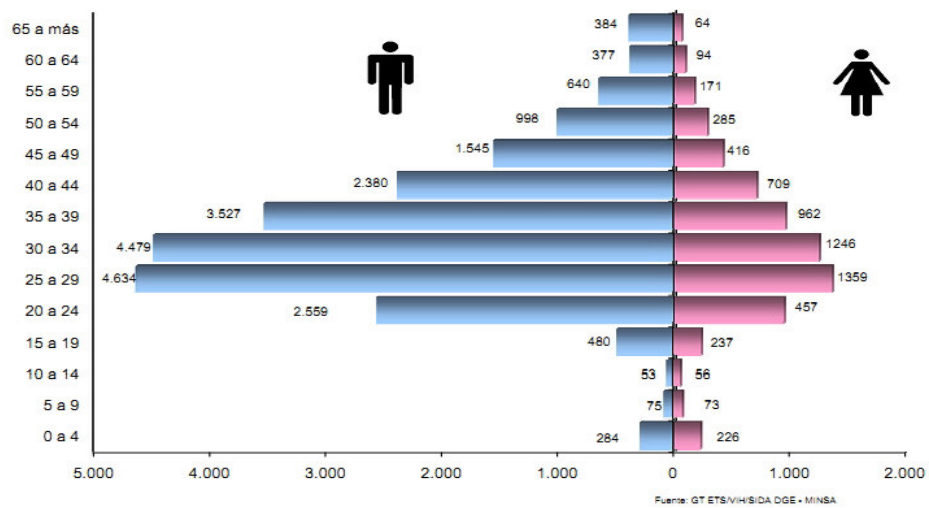
\* Notificaciones de 25 DISAs

CASOS DE SIDA SEGÚN AÑO DE DIAGNÓSTICO  
PERU, 1983-2013



Casos de SIDA acumulados por Edad y Sexo

SIDA: DISTRIBUCIÓN POR EDAD Y SEXO  
PERU, 1983-2013



Teniendo en cuenta los datos recopilados con anterioridad, vemos puntos de referencia importantes para un adecuado análisis para un modelo matemático que pueda representar la dinámica de la enfermedad que sucede en el Perú con respecto al VIH/SIDA.

Por lo cual, se puede concluir parcialmente: [6]

- Perú es un país de epidemia concentrada en hombres que tienen sexo con hombres, personas trans, trabajadores y trabajadoras sexuales.
- En el Perú fue reportado en 1983, y desde entonces ha tenido un dramático ascenso hasta la fecha, en el Perú existen 45037 personas infectadas con VIH y 28064 casos de SIDA. Ocupando el tercer lugar entre los países de Sudamérica.

Sin embargo, según el modelo de estimaciones desarrollado por OMS y ONUSIDA, existen aproximadamente 76000 personas viviendo con VIH/SIDA en el Perú.

- La mayoría de los casos proceden de las ciudades y departamentos con mayor concentración urbana de la costa y selva peruanas. Lima y Callao concentran el 73 % de los casos registrados.
- La prevalencia de VIH llega a 10.8 % en el grupo de hombres que tienen sexo con otros hombres (HSH). La población transexual es la más afectada (diferentes estudios estiman una prevalencia de VIH del 32 %). Las trabajadoras sexuales y sus clientes son también grupos afectados por la epidemia.
- La forma de transmisión predominante es la transmisión sexual, pues un 97 % de los casos registrados se infectaron por vía sexual.
- En el año 1986, por cada mujer con la infección había nueve varones infectados, situación que en los años subsiguientes varió significativamente. Actualmente, la razón de infecciones mujer:hombre se mantiene estable en el rango de una mujer infectada por cada tres varones con la infección.

## 2.2. Respuesta al VIH/SIDA

En el año 2006, el Perú diseñó y consensuó el Plan Estratégico Multisectorial de Prevención y Control de las E.T.S., sobre todo el VIH/SIDA 2007-2011 (PEM). Este Plan Estratégico fue diseñado en un trabajo conjunto por el Ministerio de Salud y la Coordinadora Nacional Multisectorial en Salud-CONAMUSA, con la participación de diversos sectores del Estado, de la sociedad civil y de las personas afectadas por el VIH. Fue aprobado mediante Decreto Supremo. Y la Estrategia Sanitaria Nacional de Prevención y Control

de ITS VIH/SIDA diseña y norma los procesos de organización correspondiente, en el ámbito de su gestión institucional y sectorial para lograr objetivos funcionales relacionados a la cultura de salud, prevención y control de las Infecciones de Transmisión Sexual y VIH/SIDA con un enfoque de equidad, derecho y ejercicio de la ciudadanía. [11]

Cuyos objetivos son: [11].

- Reducir en 50 % el número de nuevos casos del VIH y en 50 % la prevalencia de ITS en poblaciones HSH, TS, PPL .
- Promover la prevención de ETS/VIH, la educación sexual y estilos de vida y conductas sexuales saludables en adolescente y jóvenes.
- Promover un entorno político, social y legal favorable para el abordaje integral del VIH/SIDA y la diversidad sexual desde una perspectiva de derechos humanos y participación de las comunidades con mayores prevalencias (HSH, TS, PPL) y LAS PVVS.
- Asegurar una respuesta multisectorial amplia y articulada para el desarrollo intersectorial e interinstitucional de actividades conjuntas para la prevención y control de las ITS y el VIH/SIDA.
- Fortalecer los sistemas de información y establecer un sistema de monitoreo y evaluación que permitan la toma de decisiones oportuna y la medición de los logros obtenidos.



## Capítulo 3

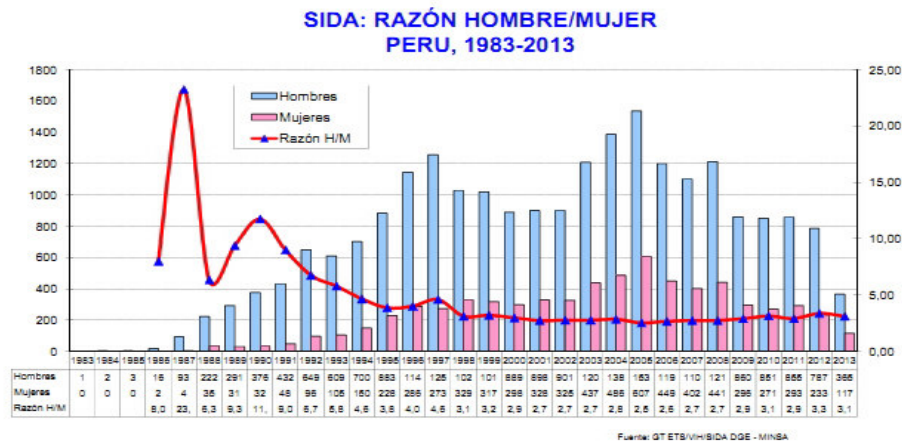
# El fenómeno epidemiológico y el modelamiento matemático

*La epidemiología surgió del estudio de las epidemias de enfermedades infecciosas; de ahí su nombre. Ya en el siglo XX, los estudios epidemiológicos se extendieron a las enfermedades y problemas de salud en general, analizados mediante diversos métodos, entre los cuales los de la demografía y la estadística son especialmente importantes.*

En América Latina y el Caribe, la propagación de la epidemia presenta dinámicas diferentes desde sus inicios. En los países del Caribe se ha propagado por contacto heterosexual, mientras que en la mayoría de países de América Latina, la epidemia afecta primordialmente a grupos específicos de poblaciones: homosexuales, consumidores de droga suministrada por vía intravenosa y a poblaciones vinculadas al comercio sexual, entre otros. [4].

"La epidemia del VIH/SIDA ha ido evolucionando de manera distinta en los países, debido a los diferentes niveles de desarrollo, oportunidades de atención, de diagnóstico, de tratamiento, de prevención y de control de esta enfermedad. El análisis de la Situación de la Epidemia del VIH/SIDA, tiene como objetivo comprender la magnitud y tendencia de esta enfermedad en nuestro país; para apoyar de manera objetiva el proceso de toma de decisiones basadas en evidencia epidemiológica. Aunque los casos de SIDA descienden en los últimos años, los de VIH no lo hacen, manteniendo relativamente estables con cifras cercanas a los 200 casos cada año". Por ende, la preocupación de tener estrategias de mantener y más aún de disminuir los casos es la prioridad de las Organizaciones que se dedican a la Salud, y en especial las que son más propensas al contagio de la enfermedad. [4].

"La Epidemia del VIH/SIDA en el Perú se ha constituido en uno de los más importantes problemas de salud pública en el país, según el reporte Global de ONUSIDA del año 2011, se estima 34 millones [IC 31.6 – 35.2] de personas viviendo con VIH en el mundo y 1.8 millones [IC 1.6 – 1.9] de muertes hasta ese periodo. Según el Boletín Epidemiológico de la Dirección General de Epidemiología del Ministerio de Salud, desde el primer caso reportado en el año 1983 hasta diciembre del 2011, se han reportado 28445 casos de SIDA y 45876 casos de infección por VIH. La principal vía de transmisión es sexual 96 %, madre a hijo 3 % y parenteral 1 %. EL 80 % casos notificados de SIDA son varones. La mediana de la edad de casos de SIDA es de 31 años, entonces es posible que el 50 % de todos los casos se hayan infectado alrededor de los 20 años de edad. La Tasa de incidencia acumulada de SIDA en el país es de 3.7 por 100 000 habitantes. La epidemia afecta principalmente a la población joven pobre, de las ciudades más densamente pobladas de la costa y de la selva. El 71 % de los casos notificados pertenecen al departamento de Lima y el 29 % a resto del país. La tasa de incidencia acumulada de Lima es de 4.90 x 100000 habitantes. Las primeras evidencias de la epidemia en el Perú, mostraban al grupo de hombres que tienen sexo con otros hombres (HSH), como los principales afectados. Esta brecha actualmente se ha reducido, la razón hombre mujer es de 3:1. [4,6,7].



### 3.1. La concepción de la epidemiología matemática

Ahora, teniendo una concepción epidemiológica de la enfermedad del VIH/SIDA que afronta el Perú, como en otros países que sufren de la misma índole; rela-

cionaremos el fenómeno epidemiológico del VIH/SIDA con las matemáticas, especialmente con el Modelamiento matemático, que en la actualidad está siendo muy utilizado para conocer un cierto futuro de la enfermedad a partir del presente y del pasado. La matemática como ciencia formal que ayuda en las diferentes áreas de la investigación, tiene dos maneras de modelar problemas reales entre las cuales están el Modelamiento discreto y el Modelamiento continuo.

El Modelamiento discreto es el más conocido y más utilizado como los modelos estadísticos, el cual permiten tener respuestas inmediatas, casi precisas dentro de un corto plazo el cual ayuda a discernir soluciones y respuestas ante la situación actual de la enfermedad, en nuestro caso el VIH/SIDA, ahora el otro tipo de Modelamiento es el continuo el cual para ser formulado tiene un poco más de detalle por su formalización matemática mediante su estabilidad necesaria pero este modelo permite conocer lo que podría ocurrir a mediano y largo plazo desde el presente que se conoce. Ambos modelos permiten concebir matemáticamente el problema epidemiológico, lo cual comúnmente se conoce como "Epidemiología Matemática". [12,13].

En el presente trabajo se presentará los fundamentos necesarios para la formulación de un modelo matemático epidemiológico aplicado a la predicción de la dinámica de transmisión sexual del VIH/SIDA en el Perú. Esto quiere decir, que se diseñará un Modelo matemático teniendo en cuenta ciertas hipótesis matemáticas para su adecuada formalización matemática, y a la vez que esté contrastado con la realidad que se intenta modelar, para lo cual se considerará condiciones necesarias para que se establezca un Modelo que interpreta el fenómeno epidemiológico del VIH/SIDA, y su impacto en la sociedad expresada en poblaciones no susceptibles, susceptibles e infectadas, y como la interacción de estas poblaciones afecta a la sociedad, pero la cuestión del Modelo no es solamente describir, representar y contrastar con la realidad, sino ver la manera de cómo combatir el crecimiento de contagio de la enfermedad, y en qué medida representa la estrategia de control para un adecuado procedimiento de control de la enfermedad en la medida que sea posible. Para nuestro modelamiento consideraremos solamente el sexo de los individuos (hombre y mujer) y no el género (hombre, mujer, lesbiana, "gay", etc.) [14,15].

Por último, debido que la Matemática en sí misma es una ciencia básica que tiene una formalización matemática en lo general bien abstracta, que en las personas no es tan sencillo que se comprenda; para poder entender cómo funciona el modelo matemático, se implementará computacionalmente el Modelo, para poder apreciar la dinámica que se está modelando, más aún, se diseñará un Interfaz Grafico sencillo de una manera didáctica, interactiva para que el Modelo pueda ser utilizado de una manera bien asequible con una interpretación grafica visual que ayudará a un mejor entendimiento que el Modelo permite mostrar con respecto a la enfermedad del VIH/SIDA. [15].

## Capítulo 4

# Modelos Matemáticos Básicos del VIH/SIDA

### 4.1. El VIH/SIDA y los Modelos Matemáticos

#### 4.1.1. Planteamiento Matemático

Los modelos matemáticos se usan frecuentemente como instrumento para evaluar y analizar diversas actividades de gestión en relación a las enfermedades, y a la respectiva toma de decisiones que conlleva. En relación a los modelos matemáticos relacionados al VIH/SIDA hay una cantidad considerable, pero un punto débil es, que los modelos son enfocados para una dinámica, lo que reflejaría para una población en particular y por consiguiente brindaría las conclusiones para esa población.

El instrumento matemático ha utilizar para el desarrollo del modelo sería un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (E.D.O.) que representará la dinámica continua del comportamiento de la transmisión de la enfermedad, el cual deberá estar verificado y validado, demostrando así la dinámica del modelo matemático de la enfermedad. [9].

En relación a la enfermedad del VIH/SIDA se ha formulado varios modelos matemáticos epidemiológicos, teniendo en cuenta la situación actual de la enfermedad y cómo se va desarrollando en las personas, dentro de los modelos matemáticos hay dos grandes tipos de modelos enfocados hacia la enfermedad: la primera se orienta a la dinámica de transmisión en los individuos, es decir, se toma en cuenta la dinámica que se da entre los individuos y cómo se propaga la enfermedad; la segunda se orienta a la dinámica de transición de la enfermedad a nivel celular, es decir, como el virus VIH entra a las células sanas infectándolas de tal manera que va propagándose la enfermedad. [16,17].

*En el trabajo se orientará a la dinámica de individuos teniendo en cuenta las poblaciones tanto epidemiológicas (susceptibles e infectados) y demográficas (hombres y mujeres).*

#### **4.1.2. Bases Teóricas**

Las bases teóricas que se utilizarán en el presente trabajo, son las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (E.D.O.) como un instrumento matemático adecuado para el modelamiento de la enfermedad debido que estamos suponiendo que la dinámica de la enfermedad es continua, y las funciones que representan el modelo matemático también lo son; teniendo en cuenta también la validez del Modelo, por lo tanto se analizará su estabilidad, con su respectivo análisis cualitativo garantizando lo necesario para una adecuada formulación y aplicación del modelo matemático. El sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias representará dinámicamente la interacción de las poblaciones a través del tiempo que se evaluará expresando la relación directa con la realidad que intentamos modelar matemáticamente, para lo cual las funciones que representan las poblaciones serán específicamente positivas tomando el valor cero (o nulo) siendo interpretado cuando la población está ausente (o extinta).

#### **4.1.3. Objetivos del Modelo**

Con el presente modelo se busca representar la dinámica de la enfermedad en poblaciones heterosexuales activas mediante un modelo matemático epidemiológico para poder analizarlo a través del tiempo.

El valor de los modelos matemáticos epidemiológicos reside en su capacidad de estudiar hipótesis, y de realizar conclusiones objetivas para poder tomar decisiones con base científica, y que se tenga cierto conocimiento previo sobre qué consecuencias tendrían las enfermedades, y qué impacto tendrán las estrategias de control a comparación de un modelo sin control, es decir, que no se interviene de ningún modo.

### **4.2. Antecedentes del Modelo Matemático**

Los antecedentes mencionados con anterioridad infieren que se está frente a un problema social de gran envergadura y de una profunda índole, y cualquier esfuerzo por tratar de entender la dinámica de propagación de la enfermedad unido al análisis de trabajos epidemiológicos que permiten tener cierto control de la misma, sin duda, se redundará en planes estratégicos para la concientización y prevención del contagio del virus, es por este motivo que a continuación se presenta un modelo matemático en E.D.O. correspondiente a magnitudes promedio debido a que las variables estadísticas corresponde a un sistema no lineal acoplado, que permiten analizar el comportamiento de la enfermedad en una población

heterosexualmente activa, teniendo en cuenta los efectos y la sensibilidad de los parámetros que en él intervienen. [18].

Actualmente en todo el mundo, las matemáticas está abarcando los principales problemas mediante modelos matemáticos, pues permite una previsión de diferentes índoles y permiten un análisis adecuado teniendo las hipótesis que se tome al crear el modelo. La enfermedad del VIH/SIDA es una enfermedad que afecta a toda la humanidad, los países toman las medidas respectivas para intentar contrarrestar el crecimiento de la enfermedad, prevenir y evitar el contagio de la misma, etc. Entre muchas, se tendrá en cuenta los siguientes antecedentes debido al enfoque que tienen. En el Perú aún no se tiene un modelo de tipo continuo pero sí estadístico, que refleje la situación actual de la enfermedad, que ayude a tener una mejor concepción de la dinámica que tiene a través del tiempo.

- Modelos Matemáticos sobre el Comportamiento del Virus VIH (2000). [19].
- Modelos Matemáticos del SIDA (2001). [20].
- Un modelo de VIH-SIDA con reinfección. (2002). [21]
- Modelos Epideomológicos de Enfermedades Virales Infecciosas (2011). [12].
- Estimación y Análisis de la Incidencia del VIH en Polbación adulta del Perú: Resultados de la Aplicación del Modelo Matemático MoT (2012). [21].

Por lo cual mencionaremos algunos modelos matemáticos anteriores relacionados con el VIH/SIDA en sus dos enfoques principales:

#### 4.2.1. Modelos Epidemiológicos de Dinámica de transmisión en Individuos

**Modelo SIR del Sida:** El presente modelo presenta una simple dinámica entre la población susceptible (S) y la población infectada (I), y a la vez la población de recuperados (tratados por medicamentos) teniendo en cuenta las personas que fallecen por la enfermedad, y la población total (N). [18].

$$\begin{aligned}S' &= -\alpha SI \\I' &= \alpha SI - \beta I \\R' &= \beta I \\N &= S + I + R\end{aligned}$$

**Modelo del SIDA de Anderson y May:** El modelo presenta la dinámica entre poblaciones susceptibles (X) e infectados con el virus VIH (Y), pero también hace la distinción entre personas que tienen SIDA (A), teniendo en cuenta la población total (N). [21].

$$\begin{aligned}
 X' &= B - \mu X - \lambda c X \\
 Y' &= \lambda c X - (v + \mu) Y \\
 A' &= p v Y - (d + \mu) A \\
 Z' &= (1 - p) v Y - \mu Z \\
 N &= X + Y + Z + A
 \end{aligned}$$

#### 4.2.2. Modelos Epidemiológicos de Dinámica Celular

**Modelo con Incorporación de la Reproducción Viral:** El modelo presenta la dinámica entre las personas que poseen el virus de la enfermedad ( $T^*$ ) y entran en contacto con la población que no tienen el virus (T). [19].

$$\begin{aligned}
 \frac{dT}{dt} &= s + pT \cdot \left(1 - \frac{T}{T_{\text{máx}}}\right) - d_T \cdot T - kVT \\
 \frac{dT^*}{dt} &= kVT - \delta T^* \\
 \frac{dV}{dt} &= N\delta T^* - cV
 \end{aligned}$$

**Modelo con Terapia con drogas:** El modelo considera un control mediante medicamentos para detener el avance del virus y por ende mantener controlada la enfermedad en la medida que se pueda.[19].

$$\begin{aligned}
 \frac{dT}{dt} &= s + pT \cdot \left(1 - \frac{T}{T_{\text{máx}}}\right) - d_T \cdot T - (1 - \eta_{RT})kVT \\
 \frac{dT^*}{dt} &= (1 - \eta_{RT})kVT - \delta T^* \\
 \frac{dV}{dt} &= N\delta T^* - cV
 \end{aligned}$$

#### 4.3. Modelo Matemático Estadístico

Uno de los último modelos matemáticos que se han presentado en La Revista Peruana de Medicina Experimental y Salud Publica, es el MoT, este modelo tiene un enfoque estadístico con un análisis discreto que permite con una adecuada base de datos ver el comportamiento de riesgo a corto plazo, una de las grandes ventajas de los modelos estadísticos, contempla fácilmente varios grupos de riesgo. [22].

### 4.3.1. Ecuación del Modelo Matemático

Los autores del modelo estadístico formularon la siguiente ecuación. [22].

**Donde:**

$$\begin{aligned}
 \blacklozenge \quad \text{Pareja } VIH/ETS+ : & \quad 1 - \{p_i B_{i'} [1 - \beta'_{i'i} ]_{i'i}^\alpha (1 - v)_{i,i'} \\
 \blacklozenge \quad \text{Pareja } VIH+ : & \quad p_{i'} (1 - B_{i'}) [1 - \beta'_{i'i} ]_{i,i'}^\alpha (1 - v)_{i,i'} \\
 \blacklozenge \quad \text{Pareja } VIH- : & \quad (1 - p_{i'}) \}_i^n
 \end{aligned}$$

**Parámetros:**

- $I$  : Incidencia en el grupo  $i$ .
- $S$  : Número de individuos susceptibles en este grupo.
- $p_{i'}$  : Prevalencia del VIH de la pareja.
- $B$  : Prevalencia de ETS de la pareja.
- $\beta$  : Probabilidad de transmisión del VIH.
- $\beta'$  : Probabilidad de transmisión del VIH en presencia de una ETS.
- $\alpha$  : Número de relaciones sexuales por pareja.
- $v$  : Proporción de relaciones sexuales protegidas por uso de condón.
- $n$  : Número de parejas.

$$I_i = S_i [1 - \{p_{i'} B_{i'} [1 - \beta'_{i'i} ]_{i'i}^\alpha (1 - v)_{i,i'} + p_{i'} (1 - B_{i'}) [1 - \beta'_{i'i} ]_{i,i'}^\alpha (1 - v)_{i,i'} + (1 - p_{i'}) \}_i^n]$$

## 4.4. Modelo Matemático S-I del VIH/SIDA

Como se había mencionado antes, los modelos matemáticos epidemiológicos orientados a la enfermedad del VIH/SIDA son variados debido que se toman consideraciones diferentes propias de cada población a estudiar. El país del Perú no tiene un modelo dinámico propio que intente describir la dinámica de la enfermedad del VIH/SIDA, tiene modelos discretos estadísticos propiamente, basados en modelos de otros países que tienen la misma índole. Pero una de los grandes cuestionamientos que existe con respecto a los modelos matemáticos epidemiológicos aplicados a una dinámica es:

*¿Por qué en ciertos países el modelo predice correctamente lo que intenta representar en la medida posible y en otros países no?*

La respuesta al parecer es sencilla, debido que los modelos se diseñan a base de supuestos, y el modelo representará lo que se ha supuesto como hipótesis; los



parámetros y las condiciones son fundamentales pues dan la esencia al modelo, y no todos los países son iguales debido que cada país, cada sociedad tiene una forma de vivir, una idiosincrasia popular, una manera de interactuar, de proyectarse al futuro, una forma de desarrollarse en la misma sociedad, una visión antropológica y una social. Estos detalles marcan las diferencias en un modelo propio para una sociedad en específico debido que las consideraciones que se tienen en la dinámica de las poblaciones del modelo, en este caso las poblaciones epidemiológicas y demográficas. Cabe mencionar que la esencia del modelo es que sea lo más general posible para que se pueda utilizar para los diversos problemas que se pueden suscitar en la sociedad de cualquier país.

Para lo cual, en el presente trabajo se ha basado en un modelo matemático presentado en una revista de salud pública de Colombia en el 2010. El título del trabajo es: "Modelo matemático para la dinámica de transmisión del VIH/SIDA en una población sexualmente activa", siendo sus autores: Mónica J. Mesa Mazo, Juan G. Vergaño Salazar, Claudia E. Sánchez Botero de la Facultad de Ciencias Básicas y Tecnologías, y Aníbal Muñoz Loaiza de la Facultad de Educación; todos de la Universidad del Quindío, Armenia, Colombia. [23].

## 4.5. Modelo Matemático Epidemiológico del VIH/SIDA

Para el presente modelo consideraremos un modelo **SI** que describirá la dinámica de transmisión del VIH/SIDA, es decir, la población se dividirá en susceptibles (individuos que pueden ser infectados, y esto se considerará de esta manera pues la población ya se ha iniciado sexualmente) e infectados (individuos portadores del VIH/SIDA). Se supone que los individuos infectados no se recuperan (debido que actualmente no existe una cura total para la enfermedad) y mueren debido a la enfermedad o de muerte natural, y que la enfermedad se transmite solo vía contacto sexual en parejas heterosexuales; donde  $S$  es la población de susceptibles e  $I$  es la población de infectados como poblaciones epidemiológica, y donde  $H$  es la población total de hombres (no susceptibles, susceptibles e infectados) y  $N$  es la población total de mujeres (no susceptibles, susceptibles e infectadas) como poblaciones demográficas.

Se considerará que, los individuos no susceptibles son los individuos que no han iniciado su vida sexual; los individuos susceptibles son los individuos que han iniciado su vida sexual; y por último, los individuos infectados son los individuos que conviven con la enfermedad VIH/SIDA.

### 4.5.1. Consideraciones Iniciales del Modelo

Las dinámicas de la enfermedad VIH/SIDA ha considerar, serían la entrada de la población no susceptible a ser sexualmente activos tanto hombres como mujeres, que en los últimos años ha ido incrementándose, es decir, la edad en

que se ingresa a ser sexualmente activos es aún más temprana actualmente, aproximadamente 13 años de edad. También hay que considerar que cuando los individuos pasar a ser sexualmente activos se considerarán incluidos de la población susceptible, es decir, son individuos que están expuestos a contraer el virus del VIH tanto hombres como mujeres teniendo en cuenta que el medio de transmisión de la enfermedad es vía sexual en relaciones heterosexuales. Este modelo se centrará en la transmisión sexual debido que tiene un registro del 97 % del contagio a comparación de los otros medios que sus índices son menores que el 4 %. [2,3,4].

Por otro lado hay que tener en cuenta la disminución de la población susceptible por la interacción entre individuos susceptibles con individuos infectados para ambos sexos, también se considerará la tasa de mortalidad natural de los individuos tanto susceptibles como infectados, debido que los individuos infectados pueden fallecer no por la enfermedad del VIH/SIDA sino por algún otro motivo. También hay que considerar la tasa de mortalidad por la enfermedad tanto en la población tanto masculina y femenina debido a su propia resistencia corporal. Como se ha mencionado la disminución de la población de susceptibles por la interacción con la población de infectados, esta cantidad de individuos serían consideradas ahora en la población de infectados. Las tasas de cada interacción serán determinantes para acercar el modelo hacia la realidad. [24].

Consideraremos el crecimiento o el decrecimiento de las poblaciones tanto susceptibles como infectados de manera continua y que se mantiene año a año sin variar en relación a las tasas tomadas en cuenta al inicio del Modelo, es decir, que las tasas no cambian al pasar el tiempo.

Actualmente, las relaciones sexuales se dan tanto heterosexualmente como homosexualmente, y ahora en gran medida el caso de los individuos bisexuales en todo el mundo. La intensidad de estas consideraciones varían de acuerdo a la sociedad en que se estudia la enfermedad del VIH/SIDA. En el caso homosexual (HSH), las relaciones sexuales entre hombres tienen un alto índice de contagio del VIH, por mientras que entre mujeres es mínimo. Como ya se había mencionado en la introducción del trabajo, el modelo considerará el sexo de los individuos, es decir, hombres y mujeres; no se considerará los géneros ya mencionados, este detalle delimitará el modelamiento matemático. *En el presente trabajo no se considerará el caso homosexual ni ningún modo ya sea masculino o femenino, también no se considerará la población que se considera con el género bisexual.* [24].

En el caso heterosexual, las relaciones sexuales provienen de la interacción de hombres con trabajadoras sexuales, por ende, existe un alto riesgo de contagio; es una consecuencia que en la sociedad se incite a la vida sexual activa desde una temprana edad, las mujeres tendrán el eje de la transmisión del virus hacia los hombres debido que ellas son potencialmente las portadoras iniciales, por mientras que el hombre recibirá de las mujeres contagiadas y se relacionara con

más mujeres generando la gran cadena de transmisión del VIH, y finalmente el SIDA. No se buscan culpables de la situación actual, pues no es el objetivo del trabajo sino solamente la descripción objetiva de la Problemática de la enfermedad del VIH/SIDA en su dimensión social. También hay que considerar que en las hipótesis se está considerando individuos que interactúan con otros individuos, no se está considerando la situación social en que se encuentre, es decir, si un hombre está casado (heterosexual, no se considera si es bisexual) y mantiene relaciones con trabajadoras sexuales. Por lo cual ayuda a restringir más el problema para poder analizarlo de una manera sistemática y formal mediante el modelamiento matemático. [23,24].

#### 4.5.2. Poblaciones, Variables y Tasas del Modelo

##### Variables

Las variables que se utilizarán serán enteramente positivas incluyendo el cero, por estar representando una población de individuos.

- $X_h$  : Hombres Susceptibles
- $X_m$  : Mujeres Susceptibles
- $Y_h$  : Hombres Infectados
- $Y_m$  : Mujeres Infectados

##### Población

Las poblaciones serán enteramente positivas incluyendo al cero, por ser una población de individuos.

- $N^*$  : Población Total de Susceptibles e Infectados
- $S$  : Población de Susceptibles
- $I$  : Población de Infectados
- $H_{NS}$  : Población Total de Hombres No Susceptibles
- $M_{NS}$  : Población Total de Mujeres No Susceptibles
- $H^*$  : Población de Hombres Susceptibles e Infectados
- $M^*$  : Población de Mujeres Susceptibles e Infectadas

Donde:

$$\begin{aligned} \otimes \quad N^* &= X_h + X_m + Y_h + Y_m \\ \otimes \quad S &= X_h + X_m \\ \otimes \quad I &= Y_h + Y_m \\ \otimes \quad H^* &= X_h + Y_h \\ \otimes \quad M^* &= X_m + Y_m \end{aligned}$$

### Tasas

Los valores de las tasas (parámetros) utilizadas para el modelo tendrán un valor normalizado por considerarse datos estadísticos, es decir, los valores se encontrarán únicamente entre cero y uno abierto, (  $\langle 0; 1 \rangle$  )

- $\sigma_h$  : Tasa de hombres que entran a la población sexualmente activa.
- $\sigma_m$  : Tasa de mujeres que entran a la población sexualmente activa.
- $\mu$  : Tasa de mortalidad natural
- $\alpha$  : Tasa de mortalidad por VIH/SIDA (hombres)
- $\varepsilon$  : Tasa de mortalidad por VIH/SIDA (mujeres)
- $\beta_m$  : Tasa de infección de hombres por contagio con mujeres infectadas
- $\beta_h$  : Tasa de infección de mujeres por contagio con hombres infectados.

## 4.6. Modelo Matemático Epidemiológico sin Control

El presente Modelo matemático epidemiológico sin control representado por las poblaciones epidemiológicas (suceptibles e infectados) y demográficas (hombres y mujeres), donde no hay ningún tipo de prevención de la enfermedad, es decir, la dinámica de transmisión sexual sigue su ritmo de acuerdo a las tasas que se están tomando en cuenta sin ninguna intervención alguna. Para lo cual se presentará las dinámicas que consideraremos para el modelo, el modelo propiamente dicho nace de las dinámicas consideradas. [23]

Como el Modelo Epidemiológico es en esencia un Sistema de E.D.O., luego se tendrá que garantizar, que existe y es unica la solución que posee el sistema, por lo cual demostraremos mediante bases teóricas matemáticas. Después brindaremos las condiciones necesarias para garantizar una estabilidad local del Sistema, o de nuestro Modelo Matemático Epidemiológico. [25].

### 4.6.1. Consideraciones Matemáticas

Como se está considerando poblaciones de susceptibles e infectados tanto para hombres como para mujeres, estas poblaciones serán representadas como funciones continuas.

Sean  $X_h, X_m, Y_h, Y_m \in C^1$ , es decir,  $X_h, X_m, Y_h, Y_m : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  continuas en todo el dominio  $\mathbb{R}_0^+$ . Y como las funciones  $X_h, X_m, Y_h, Y_m$  son continuas, también las operaciones elementales entre ellas también es continua. Y también los parámetros  $\sigma_h, \sigma_m, \mu, \alpha, \varepsilon, \beta_m, \beta_h \in ]0, 1[ \subset \mathbb{R}^+$  con lo cual la interacción con las funciones siguen manteniéndose continuas. La diferenciabilidad de las funciones es de vital importancia para una adecuada existencia y unicidad del sistema de E.D.O. lo cual ya se ha considerado. [24,25,26].

### 4.6.2. Dinámicas Matemáticas

Las dinámicas que se tendrán en cuenta en el modelo son la esencia del modelo debido que intervienen la interacción entre variables que representarán los supuestos ya mencionados.

- $\sigma_h H_{NS}$  : Fracción de hombres de la población no susceptible que pasan a ser sexualmente activos.
- $\sigma_m M_{NS}$  : Fracción de mujeres no susceptible de la población que pasan a ser sexualmente activas.
- $-\mu X_h$  : Fracción de individuos hombres susceptibles que mueren de manera natural.
- $-\mu X_m$  : Fracción de individuos mujeres susceptibles que mueren de manera natural.
- $-\mu Y_h$  : Fracción de individuos hombres infectados que mueren de manera natural.
- $-\mu Y_m$  : Fracción de individuos mujeres infectadas que mueren de manera natural.
- $-\alpha Y_h$  : Fracción de individuos hombres infectados que mueren por la enfermedad.
- $-\varepsilon Y_m$  : Fracción de individuos mujeres infectadas que mueren por la enfermedad.

- $\beta_m Y_m X_h$  : Fracción de hombres que pasan de ser susceptibles y llegan al estado infeccioso.
- $\beta_h Y_h X_m$  : Fracción de mujeres que pasan de ser susceptibles y llegan al estado infeccioso.

### 4.6.3. Modelo Matemático Epidemiológico

Teniendo en cuenta las dinámicas mostradas anteriormente, formularemos nuestro modelo de la siguiente manera:

$$\left\{ \begin{array}{l} X'_h = \sigma_h H_{NS} - \beta_m Y_m X_h - \mu X_h \\ Y'_h = \beta_m Y_m X_h - \alpha Y_h - \mu Y_h \\ X'_m = \sigma_m M_{NS} - \beta_h Y_h X_m - \mu X_m \\ Y'_m = \beta_h Y_h X_m - \varepsilon Y_m - \mu Y_m \\ X_h(0) = X_o^h \geq 0 \\ Y_h(0) = Y_o^h \geq 0 \\ X_m(0) = X_o^m \geq 0 \\ Y_m(0) = Y_o^m \geq 0 \end{array} \right. \quad (4.1)$$

donde:  $0 < \alpha, \beta_m, \beta_h, \varepsilon, \mu < 1$  ;  $0 < \sigma_m < 1$  ;  $0 < \sigma_h < 1$

### 4.6.4. Existencia y Unicidad

Para garantizar la Existencia y Unicidad del Sistema de E.D.O. (4.1) se utilizará un lema y un teorema de la Teoría Matemática de las E.DO. [25].

**LEMA 4.1 :** Sea  $F : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n$  ,  $F(X) = (F_1(X), F_2(X), \dots, F_n(X))$  con  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  son continuas y existen  $\frac{\partial F_i}{\partial x_k}$  continuas en  $\mathbb{R}_+^n$   $\forall j, k = \overline{1, n}$ . Entonces,  $F$  localmente lipschitz continua en  $\mathbb{R}_+^n$ .

Sea  $F : \mathbb{R}_+^4 \rightarrow \mathbb{R}_+^4$   $F(X) = (F_1(X), F_2(X), F_3(X), F_4(X))$  con  $X = (X_h, Y_h, X_m, Y_m)$  donde  $X_h, Y_h, X_m, Y_m$  son funciones continuas positivas. Además,

$$\left. \begin{array}{l} F_1(X) = \sigma_h H_{NS} - \beta_m Y_m X_h - \mu X_h \\ F_2(X) = \beta_m Y_m X_h - \alpha Y_h - \mu Y_h \\ F_3(X) = \sigma_m M_{NS} - \beta_h Y_h X_m - \mu X_m \\ F_4(X) = \beta_h Y_h X_m - \varepsilon Y_m - \mu Y_m \end{array} \right\} \text{funciones continuas.}$$

Ahora se procederá a analizar las derivadas parciales de cada función:

$$F_i(X_h, Y_h, X_m, Y_m) \quad \forall i = \overline{1, 4}$$

- Sea  $F_1(X_h, Y_h, X_m, Y_m) = \sigma_h H_{NS} - \beta_m Y_m X_h - \mu X_h$

$$\frac{\partial F_1}{\partial X_h} = -\beta_m Y_m \quad \frac{\partial F_1}{\partial Y_h} = 0 \quad \frac{\partial F_1}{\partial X_m} = 0 \quad \frac{\partial F_1}{\partial Y_m} = -\beta_m X_h$$

donde:  $\frac{\partial F_1}{\partial X_h}, \frac{\partial F_1}{\partial Y_h}, \frac{\partial F_1}{\partial X_m}, \frac{\partial F_1}{\partial Y_m}$  son continuas.

- Sea  $F_2(X_h, Y_h, X_m, Y_m) = \beta_m Y_m X_h - \alpha Y_h - \mu Y_h$

$$\frac{\partial F_2}{\partial X_h} = \beta_m Y_m \quad \frac{\partial F_2}{\partial Y_h} = -(\alpha + \mu) \quad \frac{\partial F_2}{\partial X_m} = 0 \quad \frac{\partial F_2}{\partial Y_m} = \beta_m X_h$$

donde:  $\frac{\partial F_2}{\partial X_h}, \frac{\partial F_2}{\partial Y_h}, \frac{\partial F_2}{\partial X_m}, \frac{\partial F_2}{\partial Y_m}$  son continuas.

- Sea  $F_3(X_h, Y_h, X_m, Y_m) = \sigma_m M_{NS} - \beta_h Y_h X_m - \mu X_m$

$$\frac{\partial F_3}{\partial X_h} = 0 \quad \frac{\partial F_3}{\partial Y_h} = -\beta_h X_m \quad \frac{\partial F_3}{\partial X_m} = -\beta_h Y_h - \mu \quad \frac{\partial F_3}{\partial Y_m} = 0$$

donde:  $\frac{\partial F_3}{\partial X_h}, \frac{\partial F_3}{\partial Y_h}, \frac{\partial F_3}{\partial X_m}, \frac{\partial F_3}{\partial Y_m}$  son continuas.

- Sea  $F_4(X_h, Y_h, X_m, Y_m) = \beta_h Y_h X_m - \varepsilon Y_m - \mu Y_m$

$$\frac{\partial F_4}{\partial X_h} = 0 \quad \frac{\partial F_4}{\partial Y_h} = \beta_h X_m \quad \frac{\partial F_4}{\partial X_m} = \beta_h Y_h \quad \frac{\partial F_4}{\partial Y_m} = -(\varepsilon + \mu)$$

donde:  $\frac{\partial F_4}{\partial X_h}, \frac{\partial F_4}{\partial Y_h}, \frac{\partial F_4}{\partial X_m}, \frac{\partial F_4}{\partial Y_m}$  son continuas.

$\therefore$   $F$  localmente lipschitz continua en  $\mathbb{R}_+^4$ .

**TEOREMA 4.1 :** Sea  $F : \mathbb{R}_+^4 \rightarrow \mathbb{R}_+^4$  localmente lipschitz continua para cada  $j = \overline{1, 4}$  y satisface  $F_j(X) \geq 0$  para cualquier  $x \in \mathbb{R}_+^4$ ,  $x_j = 0$ . Entonces para cada  $x_o \in \mathbb{R}_+^4$ , existe una única solución de  $X' = F(X)$  con  $X(0) = X_o$  en  $\mathbb{R}_+^4$  donde está definida en algún intervalo  $(0, b]$  con  $b \in (0, \infty]$ . [25].

En primer lugar, se va a mostrar que satisface la condición del teorema.

- Sea  $F_1(X_h, Y_h, X_m, Y_m) = \sigma_h H_{NS} - \beta_m Y_m X_h - \mu X_h$   
sea  $X_h = 0, Y_h > 0, X_m > 0, Y_m > 0$

luego  $F_1(X_h, Y_h, X_m, Y_m) = \sigma_h H_{NS} > 0$

- Sea  $F_2(X_h, Y_h, X_m, Y_m) = \beta_m Y_m X_h - \alpha Y_h - \mu Y_h$   
sea  $X_h > 0, Y_h = 0, X_m > 0, Y_m > 0$

luego  $F_2(X_h, Y_h, X_m, Y_m) = \beta_m Y_m X_h > 0$

- Sea  $F_3(X_h, Y_h, X_m, Y_m) = \sigma_m M_{NS} - \beta_h Y_h X_m - \mu X_m$   
sea  $X_h > 0, Y_h > 0, X_m = 0, Y_m > 0$

luego  $F_3(X_h, Y_h, X_m, Y_m) = \sigma_m M_{NS} > 0$

- Sea  $F_4(X_h, Y_h, X_m, Y_m) = \beta_h Y_h X_m - \varepsilon Y_m - \mu Y_m$   
sea  $X_h > 0, Y_h > 0, X_m > 0, Y_m = 0$

luego  $F_4(X_h, Y_h, X_m, Y_m) = \beta_h Y_h X_m > 0$

$\therefore F_j(X_h, Y_h, X_m, Y_m) > 0 \quad \forall j = \overline{1, 4}$

$$\text{Si } b < \infty \implies \sup_{0 \leq t \leq b} \sum_{j=1}^4 x_j(t) = \infty$$

Bastará probar lo siguiente para satisfacer el teorema.

Sea  $I = (0, b]$  con  $b \in (0, \infty]$

Si  $b < \infty$  entonces,  $\sup_{0 \leq t \leq b} \{X_h + Y_h + X_m + Y_m\} = \infty$

Supongamos,  $b < \infty$  y sea  $N = X_h + Y_h + X_m + Y_m$

$$\begin{aligned} N' &= \sigma_h H_{NS} - \mu X_h - \alpha Y_h - \mu Y_h + \sigma_m M_{NS} - \mu X_m - \varepsilon Y_m - \mu Y_m \\ N' &= (\sigma_h H_{NS} + \sigma_m M_{NS}) - (\mu X_h + \alpha Y_h + \mu Y_h + \mu X_m + \varepsilon Y_m + \mu Y_m) \\ N' &= (\sigma_h H_{NS} + \sigma_m M_{NS}) - (\mu X_h + \mu Y_h + \mu X_m + \mu Y_m) - \alpha Y_h - \varepsilon Y_m \\ N' &= (\sigma_h H_{NS} + \sigma_m M_{NS}) - \mu N - \alpha Y_h - \varepsilon Y_m \\ N' &= (\sigma_h H_{NS} + \sigma_m M_{NS}) - \mu N - \alpha Y_h - \varepsilon Y_m \leq (\sigma_h H_T + \sigma_m M_T) - \mu N \end{aligned}$$

donde :  $\rho = \sigma_h H_{NS} + \sigma_m M_{NS} \in \mathbb{R}^+$

$$N' \leq \rho - \mu N$$



integramos la expresión

$$\int N' \leq \int \rho - \int \mu N$$

luego, 
$$N(t) - N_o \leq \rho t - \int_0^t \mu N(s) ds$$

así, 
$$N(t) \leq \rho t + N_o - \int_0^t \mu N(s) ds$$

Por el lema de Gronwall

$$N(t) \leq (\rho t + N_o) \cdot e^{-\mu t}$$

luego, 
$$N(t) \leq \frac{N_o}{e^{\mu t}} + \frac{\rho t}{e^{\mu t}}$$

se puede deducir,

(i)  $e^{\mu t} \geq 1$  luego,  $\frac{N_o}{e^{\mu t}} \leq N_o$

(ii)  $\frac{\rho t}{e^{\mu t}} \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$

es decir, 
$$N(t) \leq (\rho t + N_o) \cdot e^{-\mu t} \quad \forall t \in [0, b)$$

Sea 
$$g(t) = \rho t + N_o \leq M \quad \forall t \in [0, b)$$

como  $b < +\infty \rightarrow g(t) \leq M \quad \forall t \in [0, b)$

luego, 
$$N(t) \leq M \quad \text{para algún } M > 0$$

$$\sup\{X_h + Y_h + X_m + Y_m\} \leq M \quad \forall t \in [0, b)$$

de aquí, 
$$\sup\{X_h + Y_h + X_m + Y_m\} < +\infty \quad (\Rightarrow \Leftarrow)$$

$\therefore b = \infty$

**Por el teorema enunciado, el sistema (4.1) tiene solución y es única, y además están definidas en  $[0, \infty)$**

#### 4.6.5. Estado de Equilibrio del Modelo

Para garantizar la estabilidad del modelo matemático, en primer lugar se hallará los puntos críticos del Modelo matemático, representado por un sistema de ecuaciones igualados a cero. [27,28].

##### Puntos Críticos

Sea el sistema de E.D.O.

$$\begin{cases} \sigma_h H_{NS} - \beta_m Y_m X_h - \mu X_h & = 0 \\ \beta_m Y_m X_h - \alpha Y_h - \mu Y_h & = 0 \\ \sigma_m M_{NS} - \beta_h Y_h X_m - \mu X_m & = 0 \\ \beta_h Y_h X_m - \varepsilon Y_m - \mu Y_m & = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Desarrollando el sistema (4.2) obtenemos los siguientes puntos criticos.

$$* \quad X_h = \frac{\sigma_h H_{NS}}{\mu} \quad ; \quad Y_h = 0 \quad ; \quad X_m = \frac{\sigma_m M_{NS}}{\mu} \quad ; \quad Y_m = 0$$

donde:  $X_h \neq 0$  ,  $X_m \neq 0$  y además son positivos no nulos.

$$* \quad \begin{aligned} X_h &= \frac{\sigma_h \beta_h (\varepsilon + \mu) H_{NS} + \mu (\alpha + \mu) (\varepsilon + \mu)}{\beta_h (\sigma_m \beta_m M_{NS} + \mu (\varepsilon + \mu))} & Y_h &= \frac{\sigma_m \beta_m \sigma_h \beta_h M_{NS} H_{NS} - \mu^2 (\alpha + \mu) (\varepsilon + \mu)}{\beta_h (\alpha + \mu) (\sigma_m \beta_m M_{NS} + \mu (\varepsilon + \mu))} \\ X_m &= \frac{(\alpha + \mu) (\sigma_m \beta_m M_{NS} + \mu (\varepsilon + \mu))}{\beta_m (\sigma_h \beta_h H_{NS} + \mu (\alpha + \mu))} & Y_m &= \frac{\sigma_m \beta_m \sigma_h \beta_h M_{NS} H_{NS} - \mu^2 (\alpha + \mu) (\varepsilon + \mu)}{\sigma_h \beta_h (\varepsilon + \mu) H_{NS} + \mu (\alpha + \mu) (\varepsilon + \mu)} \end{aligned}$$

Sea la siguiente consideración:

$$\begin{aligned} U_1 &= \sigma_h \beta_h (\varepsilon + \mu) H_{NS} + \mu (\alpha + \mu) (\varepsilon + \mu) > 0 \\ U_2 &= \sigma_m \beta_m \sigma_h \beta_h M_{NS} H_{NS} - \mu^2 (\alpha + \mu) (\varepsilon + \mu) \\ U_3 &= \sigma_m \beta_m M_{NS} + \mu (\varepsilon + \mu) > 0 \\ U_4 &= \sigma_h \beta_h H_{NS} + \mu (\alpha + \mu) > 0 \end{aligned}$$

luego, los puntos críticos serán:

$$\bar{z}_1 = \left( \frac{\sigma_h H_{NS}}{\mu}; 0; \frac{\sigma_m M_{NS}}{\mu}; 0 \right) \quad (4.3)$$

$$\bar{z}_2 = \left( \frac{U_1}{\beta_h U_3}; \frac{U_2}{\beta_h (\alpha + \mu) U_3}; \frac{(\alpha + \mu) U_3}{\beta_m U_4}; \frac{U_2}{U_1} \right) \quad (4.4)$$

Para garantizar la existencia adecuada al modelo matemático propuesto; los puntos críticos tienen que ser necesariamente no negativos, debido a las condiciones epidemiológicas.

En primer lugar, el punto crítico  $\bar{z}_1 > 0$  (*trivial*)

En segundo lugar, el punto crítico  $\bar{z}_2$  tiene que ser no negativo. Para lo cual se debe cumplir:  $U_2 > 0$

Sean las Tasas de Supervivencia:

- \*  $R_S^H = \frac{\sigma_h H_{NS}}{\mu}$  : Tasa de Supervivencia de Susceptibles Hombres.
- \*  $R_S^M = \frac{\sigma_m M_{NS}}{\mu}$  : Tasa de Supervivencia de Susceptibles Mujeres.
- \*  $R_I^H = \frac{\beta_h}{\alpha + \mu}$  : Tasa de Supervivencia de Infectados Hombres.
- \*  $R_I^M = \frac{\beta_m}{\varepsilon + \mu}$  : Tasa de Supervivencia de Infectadas Mujeres.

**TEOREMA 4.2:** *Sea el Sistema (4.2), y también sean sus puntos críticos expresados en (4.3), (4.4).*

1. *La expresión (4.3) no tiene restricción alguna. (trivial)*
2. *Si  $R_S^H \cdot R_I^H \cdot R_S^M \cdot R_I^M > 0$ , entonces la expresión (4.4) estará bien definida epidemiológicamente.*

**Prueba de (2).**

Sea

$$\begin{aligned} U_2 &= \sigma_m \beta_m \sigma_h \beta_h M_{NS} H_{NS} - \mu^2 (\alpha + \mu) (\varepsilon + \mu) \\ U_3 &= \sigma_m \beta_m M_{NS} + \mu (\varepsilon + \mu) > 0 \\ U_4 &= \sigma_h \beta_h H_{NS} + \mu (\alpha + \mu) > 0 \end{aligned}$$

$$\text{Analizaremos } U_2 = (\sigma_m \beta_m M_{NS}) (\sigma_h \beta_h H_{NS}) - (\mu (\alpha + \mu)) (\mu (\varepsilon + \mu))$$

Despejando adecuadamente  $U_2$  :

$$U_2 = (\sigma_m \beta_m M_{NS}) (\sigma_h \beta_h H_{NS}) - (\mu (\alpha + \mu)) (\mu (\varepsilon + \mu)) > 0$$

$$\text{luego, } (\sigma_m \beta_m M_{NS}) (\sigma_h \beta_h H_{NS}) > (\mu (\alpha + \mu)) (\mu (\varepsilon + \mu))$$

de aquí,

$$\frac{(\sigma_m \beta_m M_{NS})(\sigma_h \beta_h H_{NS})}{(\mu(\alpha+\mu))(\mu(\varepsilon+\mu))} > 1$$

luego,

$$\left(\frac{\sigma_m M_{NS}}{\mu}\right) \left(\frac{\sigma_h H_{NS}}{\mu}\right) \left(\frac{\beta_m}{\varepsilon+\mu}\right) \left(\frac{\beta_h}{\alpha+\mu}\right) > 1$$

Por consiguiente,

$$R_S^H \cdot R_I^H \cdot R_S^M \cdot R_I^M > 1 \quad (4.5)$$

De (4.5) se garantiza que el  $U_2$  siempre es no negativo, por lo cual estaría bien definido epidemiológicamente.

#### 4.6.6. Matriz de la Próxima Generación

La estabilidad de un sistema es la labor importante en el análisis cualitativo del mismo, puede ser una estabilidad global o una local. En los cursos de pregrado, se aprende a buscar la estabilidad local por el método de Routh-Hurwitz como primera opción de análisis, luego para una estabilidad global se acostumbra a realizar el criterio de Lyapunov. Ambos métodos tienen condiciones para poder ser utilizadas y brinden la estabilidad deseada, lo cual en muchos de los casos no es tan sencillo de satisfacer las condiciones necesarias. [27,28].

Por otro lado, cuando se modela enfermedades infecciosas como es el VIH/SIDA, el método de “La Matriz de la Próxima Generación”, permite la estabilidad local de un Sistema teniendo como fundamento matemático el Algebra Lineal, este método no se enseña en los estudios de pregrado debido a sus particularidades y que no tiene mucho tiempo de haber sido presentado. [29].

#### Método de Routh-Hurwitz

El método de Routh-Hurwitz tiene consideraciones para la estabilidad local que necesita cumplirse para garantizar la estabilidad buscada; pero en muchas ocasiones asegurar estas consideraciones es bien complicada por lo cual, no siempre se puede utilizar el método. [27].

En primer lugar, el Jacobiano del Sistema (4.1).

$$J = \begin{bmatrix} -\beta_m Y_m - \mu & 0 & 0 & -\beta_m X_h \\ \beta_m Y_m & \alpha - \mu & 0 & \beta_m X_h \\ 0 & -\beta_h X_m & -\beta_h Y_h - \mu & 0 \\ 0 & \beta_h X_m & \beta_h Y_h & -\varepsilon - \mu \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

luego, se hallará el polinomio característico.

$$\begin{vmatrix} -\beta_m Y_m - \mu - \lambda & 0 & 0 & -\beta_m X_h \\ \beta_m Y_m & \alpha - \mu - \lambda & 0 & \beta_m X_h \\ 0 & -\beta_h X_m & -\beta_h Y_h - \mu - \lambda & 0 \\ 0 & \beta_h X_m & \beta_h Y_h & -\varepsilon - \mu - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (4.7)$$

entonces,

$$p(\lambda) = \begin{cases} \lambda^4 + (\beta_h Y_h + \beta_m Y_m + \alpha + \varepsilon + 4\mu)\lambda^3 + (\beta_h \beta_m Y_h Y_m \\ + \beta_m (3\mu + \varepsilon)Y_m + \beta_h (3\mu + \varepsilon + \alpha)Y_h - \beta_h \beta_m X_h X_m \\ + 6\mu^2 + 3\varepsilon\mu + 3\alpha\mu + \alpha\varepsilon)\lambda^2 + (\beta_h (2\alpha\mu + 2\mu\varepsilon + \alpha\mu \\ + 3\mu^2)Y_h + \beta_m (2\alpha\mu + 2\mu\varepsilon + \alpha\mu + 3\mu^2)Y_m + \\ \beta_h \beta_m (\alpha + 2\mu + \varepsilon)Y_h Y_m + (2\alpha\mu\varepsilon + 4\mu^3 + 3\mu^2\varepsilon + 3\alpha\mu^2) \\ - 2\mu\beta_h \beta_m X_h X_m)\lambda + \beta_h (\alpha\mu\varepsilon + \mu^2\varepsilon + \alpha\mu^2 + \mu^3)Y_h + \\ \beta_m (\alpha\mu\varepsilon + \mu^2\varepsilon + \alpha\mu^2 + \mu^3)Y_m + \beta_h \beta_m (\alpha\mu + \mu^2 + \alpha\varepsilon \\ + \mu\varepsilon)Y_h Y_m + (\alpha\mu^3 + \mu^4 + \mu^2\varepsilon + \alpha\varepsilon\mu^2) - \mu^2\beta_h \beta_m X_h X_m \end{cases} \quad (4.8)$$

Simplificando la expresión (4.11) con variables auxiliares.

$$\begin{aligned} A &= \alpha + \varepsilon + 4\mu &> 0 \\ B &= 6\mu^2 + 3\varepsilon\mu + 3\alpha\mu + \alpha\varepsilon &> 0 \\ C &= \beta_h (3\mu + \varepsilon + \alpha) &> 0 \\ D &= \beta_m (3\mu + \varepsilon) &> 0 \\ E &= 2\alpha\mu\varepsilon + 4\mu^3 + 3\mu^2\varepsilon + 3\alpha\mu^2 &> 0 \\ F &= 2\alpha\mu + 2\mu\varepsilon + \alpha\mu + 3\mu^2 &> 0 \\ G &= \alpha\mu^3 + \mu^4 + \mu^2\varepsilon + \alpha\varepsilon\mu^2 &> 0 \\ I &= \beta_h \beta_m (2\mu + \varepsilon + \alpha) &> 0 \\ J &= \alpha\mu\varepsilon + \mu^2\varepsilon + \alpha\mu^2 + \mu^3 &> 0 \\ L &= \beta_h \beta_m (\alpha\mu + \mu^2 + \alpha\varepsilon + \mu\varepsilon) &> 0 \end{aligned}$$

entonces, la expresión (4.11) quedaría así,

$$p(\lambda) = \begin{cases} \lambda^4 + (\beta_h Y_h + \beta_m Y_m + A)\lambda^3 + (\beta_h \beta_m Y_h Y_m \\ + D \cdot Y_m + C \cdot Y_h - \beta_h \beta_m X_h X_m + B)\lambda^2 \\ + (\beta_h F \cdot Y_h + \beta_m F \cdot Y_m + I \cdot Y_h Y_m \\ + E - 2\mu \beta_h \beta_m X_h X_m)\lambda + \beta_h J \cdot Y_h \\ + \beta_m J \cdot Y_m + L \cdot Y_h Y_m + G - \mu^2 \beta_h \beta_m X_h X_m \end{cases} \quad (4.9)$$

luego, denotaremos de la siguiente manera:

$$a_1 = \beta_h Y_h + \beta_m Y_m + A$$

$$a_2 = \beta_h \beta_m Y_h Y_m + D \cdot Y_m + C \cdot Y_h - \beta_h \beta_m X_h X_m + B$$

$$a_3 = \beta_h F \cdot Y_h + \beta_m F \cdot Y_m + I \cdot Y_h Y_m + E - 2\mu \beta_h \beta_m X_h X_m$$

$$a_4 = \beta_h J \cdot Y_h + \beta_m J \cdot Y_m + L \cdot Y_h Y_m + G - \mu^2 \beta_h \beta_m X_h X_m$$

luego, hay que garantizar  $a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$ ; *condición suficiente para garantizar el requerimiento del método de Routh-Hurwitz.*

Ahora, se continuará con las determinantes para la estabilidad según el método de Routh-Hurwitz.

$$A_1 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}$$

luego, si  $A_1; A_2 > 0$ , entonces el sistema (4.1) es estable localmente.

Este método es sencillo de aplicar, el detalle es garantizar las condiciones requeridas. Lo cual no es fácil de mostrar, por lo cual en ciertos sistemas no ayuda analizarlo con este método. Por este motivo se utilizará otro método para buscar garantizar la estabilidad del sistema al menos localmente.

### Introducción a la Matriz de la Próxima Generación (NGM)

El número básico de reproducción  $\mathfrak{R}_o$ , es sin duda la cantidad más importante en la epidemiología de enfermedades infecciosas. Es una de las cantidades estimadas con mayor urgencia para enfermedades infecciosas emergentes en situaciones de brote, y su valor proporciona una visión en el diseño de las intervenciones de control de infecciones establecidas. Desde un punto de vista teórico  $\mathfrak{R}_o$  juega un papel vital en el análisis de modelos de las enfermedades infecciosas. [23]. El número básico de reproducción,  $\mathfrak{R}_o$ , se define como el número esperado de infecciones secundarias producidas por un caso índice en una población

completamente susceptible. Este número es una medida del potencial de propagación de la enfermedad dentro de una población epidemiológica. Si  $\mathfrak{R}_o < 1$ , entonces algunos individuos infectados introducidos en una población completamente susceptible será, en promedio, la cual interactuarán entre sí pero la enfermedad no se propagará. Si, por el contrario,  $\mathfrak{R}_o > 1$ , entonces el número de individuos infectados aumentará con cada generación y la enfermedad se extenderá. [29,30].

Se ha demostrado que  $\mathfrak{R}_o$  se caracteriza matemáticamente con respecto a la transmisión de la infección como un "*proceso demográfico*", donde la producción de descendencia no es visto como dar a luz en el sentido demográfico, pero como causantes de una nueva infección a través de la transmisión (que se referirá a esto como un "*nacimiento epidemiológico*"). En una forma natural esto conduce a la visualización del proceso de infección en términos de "*generaciones de individuos infectados*" consecutivos, en completa analogía a las generaciones demográficas. Teniendo en cuenta que el número de reproducción básica es un parámetro de umbral para la invasión de un organismo de la enfermedad en una población completamente susceptible; una vez que la enfermedad ha comenzado a extenderse, condiciones que favorecen la propagación va a cambiar y  $\mathfrak{R}_o$  ya no puede ser una buena medida de la transmisión de enfermedades. Sin embargo, actualmente en muchos de los modelos de transmisión de enfermedades, la prevalencia máxima de huéspedes infectados y el tamaño final de la epidemia está aumentando las funciones de  $\mathfrak{R}_o$ , por lo que es una medida útil de para conocer la posible propagación de la enfermedad.

Esta matriz, usualmente denotado por  $K$ , se llama *la Matriz de la Próxima Generación* ( Next Generation Matrix - **NGM** ), que se introdujo en Diekmann et al (1990), quien propone definir  $\mathfrak{R}_o$  como el valor propio dominante de la matriz  $K$ . En particular, se explica cómo se puede determinar  $\mathfrak{R}_o$  por primera descomposición de la matriz como  $T + \Sigma$ , donde  $T$  es la parte de transmisión, que describe la producción de nuevas infecciones, y  $\Sigma$  es la parte de transición, que describe los cambios en Estado (incluyendo la eliminación por muerte o por la adquisición de la inmunidad). [30,31].

- Dar una definición matemática de  $\mathfrak{R}_o$  dentro de los modelos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.
- Mostrar la conexión entre  $\mathfrak{R}_o$  y la estabilidad asintótica local y global de un modelo de E.D.O.

### Definiciones Previas

**Definición (Valor Propio)** Sea  $A$  una matriz cuadrada, un número real  $\lambda$ , se dice que es un valor propio de  $A$  si existe un vector, diferente del vector cero,  $v$  tal que:  $Av = \lambda v$ . Es decir, es un vector que al transformarlo mediante la multiplicación por  $A$ , el vector resultante mantiene su dirección, posiblemente su longitud. El vector  $v$  se llama Vector Propio asociado al valor propio  $\lambda$ .

**Definición (Espectro)** Se denomina *espectro* de la matriz  $A$ ,  $\Lambda(A)$ , al conjunto de los valores propio de  $A$ , es decir,  $\Lambda(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(A - \lambda I) = 0\}$ .

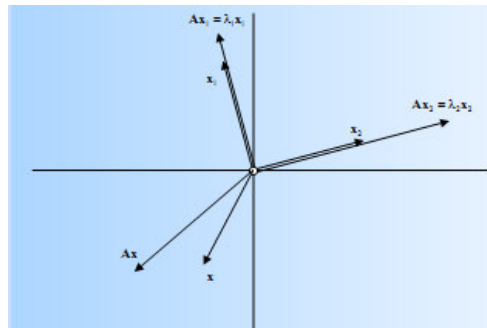
**Definición (Radio Espectral)** Se denomina *radio espectral*,  $\rho(A)$ , de una matriz  $A$  de orden 'n', al valor máximo de los módulos de los valores propios de la matriz.

$$\rho(A) = \left\{ \max_{\lambda_i \in \Lambda(A)} |\lambda_i| \right\}$$

El radio espectral de una matriz es el radio de mayor circunferencia del plano complejo centrado en el origen que contiene a todos los valores propios de la matriz. [32,33,34].

**Interpretación Geométrica** Al aplicarle a *cualquier vector* en la *dirección* de alguno de los *vectores propios* de  $A$  la transformación que representa  $A$ , ese vector se dilata o se contrae por un *factor* que determina el correspondiente *valor propio*.

- Los vectores propios se transforman sin cambiar de dirección.
- El valor propio  $\lambda$  determina el cambio de longitud.



### Formulación del Método NGM

En esta parte del estudio de la estabilidad del sistema se enfocará en los modelos de compartimentos para la transmisión de una enfermedad epidemiológica. Los individuos se caracterizan por una variable única, de estado discreto y se clasifican en compartimentos basados en un estado. Un compartimento se llama un compartimento de la enfermedad si los individuos se infectan en el mismo. Hay que tener en cuenta que este uso del término 'enfermedad' es más amplia que la definición clínica, e incluye etapas asintomáticas de la infección, así como sintomático. Supongamos que hay  $n$  compartimentos de la enfermedad y  $m$



compartimentos no patológicos, y dejar que  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $y \in \mathbb{R}^m$  serán las subpoblaciones en cada uno de estos compartimentos. Además, se denotará con  $F_i$  la tasa de infecciones secundarias que aumentan el compartimento de la enfermedad  $i^{th}$ , y  $V_i$ , la tasa de progresión de la enfermedad, la muerte y la disminución de la recuperación del compartimento  $i^{th}$ . El modelo de la enfermedad se puede escribir de la siguiente forma:

$$x'_i = F_i(x, y) - V_i(x, y) \quad , \quad i = \overline{1, n} \quad (\text{I-a})$$

$$y'_j = g_j(x, y) \quad , \quad j = \overline{1, m} \quad (\text{I-b})$$

Donde ' denotará la diferenciación con respecto al tiempo. Se tendrá en cuenta que la descomposición de la dinámica de  $F$  y  $V$ , y la designación de los compartimentos como infectados o no infectados pueden no ser únicos; diferentes descomposiciones corresponden a diferentes interpretaciones epidemiológicas del modelo. La derivación del número de reproducción básica se basa en la linealización del Modelo en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias sobre un equilibrio libre de enfermedad. Los siguientes supuestos se hacen para garantizar la existencia de este equilibrio y para garantizar que el modelo está bien planteado.

### Hipótesis

1. Asumimos  $F_i(0, y) = 0$  y  $V_i(0, y) = 0$  para todo  $y > 0$  y  $i = \overline{1, n}$ . Todas las nuevas infecciones son infecciones secundarias derivadas de huéspedes infectados, no hay inmigración de individuos en los compartimentos de enfermedades.
2. Asumimos  $F_i(x, y) \geq 0$  para todo  $x, y > 0$  y  $i = \overline{1, n}$ . la función  $F$  representa nuevas infecciones y no puede ser negativo.
3. Asumimos  $V_i(x, y) \leq 0$  cuando  $x_i = 0$  y  $i = \overline{1, n}$ . Para cada componente,  $V_i$  representa una salida neta del compartimento  $i$  y debe ser negativa cuando el compartimento está vacío.
4. Asumimos  $\sum_{i=1}^n V_i(x, y) \geq 0$  para todo  $x, y$  no negativo. Esta suma representa la salida total de todos los compartimentos infectados. Los términos en el modelo conduce a aumentos en  $\sum_{i=1}^n x_i$  y se supone que representan las infecciones secundarias y por lo tanto pertenecen a  $F$ .
5. Asumimos que el sistema de libre de enfermedad  $y' = g(0, y)$  tiene un único equilibrio que es asintóticamente estable. Es decir, todas las soluciones con las condiciones iniciales de la forma  $(0, y)$  se acercan a un punto  $(0, y_o)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Nos referimos a este punto como el equilibrio libre de la enfermedad.

Por la hipótesis (1) asegura que el conjunto libre de la enfermedad, que consiste en todos los puntos de la forma  $(0, y)$ , es invariante. Es decir, cualquier solución sin los individuos infectados en algún momento en el tiempo será libre de infección para todos los tiempos. Esto a su vez asegura que el equilibrio libre de la enfermedad es también un equilibrio del sistema completo.

Supongamos que un solo individuo infectado se introduce en una población originalmente libre de enfermedad. La capacidad inicial de la enfermedad que se propague a través de la población se podrá determinar por una prueba de la linealización de (I-a) sobre el equilibrio libre de enfermedad  $(0, y_o)$ . Con el uso de la hipótesis (1), se podrá demostrar que

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(0, y_o) = \frac{\partial V_i}{\partial y_j}(0, y_o) = 0$$

Para cada par  $(i, j)$ , esto implica que las ecuaciones linealizadas para los compartimentos de la enfermedad,  $x$ , se desacoplan de las ecuaciones restantes y se pueden escribir como

$$x' = (F - V)x \tag{II}$$

Donde  $F$  y  $V$  son las matrices  $n \times n$  con entradas

$$F = \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(0, y_o) \quad \text{y} \quad V = \frac{\partial V_i}{\partial y_j}(0, y_o)$$

Usando la hipótesis (5), la estabilidad lineal del sistema (I) está completamente determinada por la estabilidad lineal de  $(F - V)$  en (II).

El número de infecciones secundarias producidas por un solo individuo infectado puede ser expresado como el producto de la duración prevista del periodo de infección, y la tasa se produce en las infecciones secundarias. Para el modelo general con  $n$  compartimentos de la enfermedad, éstos se calculan para cada compartimento de un caso índice hipotético. La hora prevista del caso índice pasa en cada compartimento está dada por la integral  $\int_0^\infty \phi(t, x_o) dt$ , donde  $\phi(t, x_o)$  es la solución de (II), con  $F = 0$  (sin infecciones secundarias) y las condiciones iniciales no negativos,  $x_o$ , lo que representa y el caso índice de infección:

$$x' = -Vx, \quad x(0) = x_o \tag{III}$$

En efecto, esta solución muestra el camino del caso índice a través de los compartimentos de la enfermedad de la exposición inicial a través de la muerte o la recuperación con la  $i$ -ésima componente de  $\phi(t, x_o)$  interpretada como la probabilidad de que el caso índice (introducido en el tiempo  $t = 0$ ) es en estado de la enfermedad que en el momento  $t$ . La solución de (III) es  $\phi(\mathbf{t}, \mathbf{x}_o) = \mathbf{x}_o \cdot \mathbf{e}^{-Vt}$ , donde la exponencial de una matriz se define por la serie de Taylor,

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots + \frac{A^k}{k!} + \dots$$

Esta serie converge para todo  $t$ . Por lo tanto  $\phi(\mathbf{t}, \mathbf{x}_o) = \mathbf{x}_o \cdot \mathbf{V}^{-1}$  y la entrada  $(i, j)$  de la matriz  $\mathbf{V}^{-1}$  se puede interpretar como la hora prevista de un individuo se introdujo inicialmente en la enfermedad compartimento  $j$  pasa en el compartimiento enfermedad  $i$ .

La entrada  $(i, j)$  de la matriz  $F$  es la tasa de infecciones secundarias se producen en el compartimiento  $i$  por un caso índice en el compartimento  $j$ . Por lo tanto, el número esperado de infecciones secundarias producidas por el caso índice viene dado por,

$$\int_0^{\infty} F \cdot e^{-Vt} x_o dt = FV^{-1}x_o$$

Como expresa Diekmann y Heesterbeek [31], la matriz  $\mathbf{K} = \mathbf{FV}^{-1}$  se conoce como el **NGM** para el sistema en el equilibrio libre de enfermedad. La entrada  $(i, j)$  de  $K$  es el número esperado de infecciones secundarias en el compartimento  $i$  producido por los individuos inicialmente en el compartimento  $j$ , suponiendo, por supuesto, que el entorno de ver por el individuo permanece homogénea durante la duración de su infección.

La matriz de la próxima generación (**NGM**),  $K = FV^{-1}$ , es no negativo, y por lo tanto tiene un valor propio no negativo,  $\mathfrak{R}_o = \rho(FV^{-1})$ , de tal manera que no hay otros valores propios de  $K$  con módulo mayor que  $\mathfrak{R}_o$ , y hay un autovector no negativo  $w$  asociado con  $\mathfrak{R}_o$ . Este vector propio es en cierto sentido la distribución de los individuos infectados que produce el mayor número,  $\mathfrak{R}_o$ , de infecciones secundarias por generación. Por lo tanto,  $\mathfrak{R}_o$  y los  $w$  vector propio asociado definir adecuadamente un infectivo "típico" y el número básico de reproducción pueden ser rigurosamente definidas como el radio espectral de la matriz de próxima generación,  $K$ . el radio espectral de una matriz  $K$ , denotado  $\rho(K)$ , es el máximo de los módulos de los valores propios de  $K$ . Si  $K$  es irreducible, a continuación,  $\mathfrak{R}_o$  es un simple valor propio de  $K$  reducible, que es a menudo el caso para la enfermedad con múltiples cepas, entonces  $K$  puede tener varios vectores propios correspondientes reales positivos para la reproducción números para cada cepa competir de la enfermedad.

### Pasos para hallar "NGM"

Ahora introduciremos los conceptos principales del enfoque de la Matriz de la próxima generación: el **NGM** con gran dominio, la **NGM** y con pequeño dominio. Los tres pueden ser derivadas por el álgebra lineal simple de los elementos básicos  $T$  y  $\Sigma$ , o también mediante el uso de la interpretación epidemiológica de la **NGM**. En esta sección ofrecemos algoritmos para la construcción de estas matrices mediante la formalización de los pasos. Nos muestran que en general  $K$ ,  $K_L$  y  $K_S$  tienen el mismo valor propio dominante.

### El "NGM" con gran dominio

El **NGM** con gran dominio,  $K_L$ , es siempre la matriz con la más alta dimensión. Nuestro punto de partida es el sistema E.D.O. que describe la producción de nuevos casos y los cambios en los estados infectados. Asumimos que este conjunto de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias expresada como el subsistema de la infección, y se ha escrito en forma linealizada. Los pasos son los siguientes:

(i) Descomponer la matriz jacobiana ( $J$ ) de la infección como subsistema de  $\mathbf{T} + \Sigma$ , donde  $T$  es la matriz de transmisión, y  $\Sigma$  la matriz de transición.

\*  $T$  contiene las entradas correspondientes a los eventos de transmisión, donde se produce un nacimiento epidemiológico (contagio).

\*  $\Sigma$  contiene las entradas correspondientes a todos los demás cambios de estado (incluida la muerte).

(ii) Calcular el **NGM** con gran dominio como  $K_L = -T\Sigma^{-1}$

(iii) Si  $K_L$  es una matriz de  $2 \times 2$  se puede utilizar la siguiente formula:

$$\mathfrak{R}_o = \frac{1}{2} \left[ \text{traza}(K_L) + \sqrt{\text{traza}(K_L)^2 - 4 \det(K_L)} \right]$$

### El "NGM"(Next Generation Matrix)

El **NGM**,  $K$ , tiene la gran ventaja de que tiene una buena interpretación biológica rigurosa, y que excluye información irrelevante. Por lo general es de menor dimensión que  $K_L$ . De todos los estados infectados utilizados para  $K$ , seleccionamos sólo a una persona infectada que puede estar inmediatamente después de haberse infectado. Los llamamos los estados-en-infección, y  $K$  reflejaría la restricción del análisis a los estados-en-infección.

A continuación, sin embargo, presentamos dos Algoritmos de álgebra lineal que permiten la programación. El segundo algoritmo utiliza el cálculo de toda la

matriz  $\Sigma^{-1}$ , y es la más fácil cuando se utiliza software matemático para programar el proceso. El primer algoritmo utiliza la interpretación y la demostración que uno no tiene todos los elementos de  $\Sigma^{-1}$  para calcular  $K$  epidemiológico, algunos elementos se multiplicarán por elementos de  $T$  que son cero y por lo tanto no contribuyen. De hecho, el segundo algoritmo es una versión similar que el primero.

### Primer Algoritmo

- (i) Identificar la matriz de transmisión  $T$ , y la matriz de transición  $\Sigma$ .
- (ii) Identificar los estados-en-infección. El estado  $j$  es un estado-en-infección si y sólo si hay al menos un elemento distinto de cero en la fila  $j$  –ésima de la matriz  $T$ .
- (iii) Identificar los estados-en-contagiosidad.  $l$  estado es un estado-de-la infecciosidad si y sólo si hay al menos un elemento distinto de cero en la columna  $l$  –ésima de  $T$ .
- (iv) Calcular una matriz auxiliar  $A$  que tiene elementos  $A_{lj} = -(\Sigma^{-1})_{lj}$  para todas las combinaciones  $lj$  donde  $j$  es un estado-en-infección y  $l$  es un estado-de-la infecciosidad, y para el cual todos los demás elementos son iguales a cero.
- (v) Define  $K_{ij} = (TA)_{ij}$  para todas las combinaciones con  $i$  y  $j$  ambos estados-en-infección.

### Segundo Algoritmo

- (i) Determinar si el número de estados-en-infección es menor que la dimensión del subsistema de infección.
  - \* Si  $T$  no tiene filas que consisten enteramente de ceros, entonces  $K = K_L$
  - \* Si  $T$  tiene una o más filas que consisten enteramente de ceros, entonces  $K \neq K_L$  y proceder de la siguiente manera.
- (ii) Identificar la matriz  $E$  auxiliar de la siguiente manera:
  - \*La matriz  $E$  tiene el mismo número de filas como  $T$ .
  - \* No es una columna de  $\Sigma$  para cada fila no nula de  $T$ , y por lo tanto, para cada fila no nula de  $T$ , y por lo tanto, para cada estado-en-infección. Que la columna de  $\Sigma$  tiene un uno en la fila que corresponde a la fila no-cero de  $T$  y ceros en el resto.

(iii) Calcular el **NGM**,  $K = -ET\Sigma^{-1}E$

Por definición, el número de reproducción básica es el valor propio más grande de la **NGM**,  $\mathfrak{R}_0 = \rho(K)$ . Ahora demostrar que la **NGM**, y el **NGM** con amplio dominio tienen los mismos valores propios distintos de cero. Sea  $v$  un vector propio de  $K$  con el correspondiente valor propio  $\lambda$ . continuación  $Kv = -E'T\Sigma^{-1}Ev = \lambda v$ . multiplicar esta identidad por  $E$  conseguiremos  $-EE'T\Sigma^{-1}Ev = \lambda v$ . pero  $EE'T = T$ , de modo  $Ev$  es un vector propio de  $K_L$  con el correspondiente valor propio  $\lambda$ , y los valores propios distintos de cero de  $K$  y  $K_L$  son la misma.

### El "NGM" con pequeño dominio

El **NGM** con un pequeño dominio,  $K_S$ , tiene la dimensión más baja de los tres tipos de **NGM** discutidos. En muchos casos, sin embargo, será igual a  $K$ . si  $\det(K) = 0$ , el **NGM** con dominio pequeño es diferente de  $K$ . esto sin duda ser el caso si hay menos estados-en-infección. De hecho, en ese caso, tiene perfecto sentido para definir una matriz con elementos  $K_S$ ,  $K_S = -T\Sigma^{-1}$  tanto con  $i$  y  $j$  restringido a los estados-de-infecciosidad. Simplemente significa que nos enfocamos nuestra contabilidad en las personas que han entrado en los descendientes epidemiológicas entrantes, en promedio, los diversos estados de la infecciosidad. En otras palabras, nos basamos la contabilidad en no nacer, pero en la última fase de la "vida epidemiológica", donde el individuo comienza a reproducirse.

El algoritmo es el siguiente:

(i) Calcular la matriz  $K$ .

(ii) Determinar si  $\det(K) = 0$

\* Si  $\det(K) \neq 0$ , entonces hay una mayor reducción es posible y  $K_S = K$

\* Si  $\det(K) = 0$  proceda de la siguiente manera.

(iii) Definir una matriz  $R$ , cuyas filas son los vectores linealmente independiente que abarcan las filas de  $T$ , y una matriz de  $C$ , cuyas columnas son vectores linealmente independiente que abarcan las columnas de  $T$ . escala de las matrices para que  $T = CR$ .

(iv) Calcular el **NGM** con un pequeño dominio,  $K_S = -R\Sigma^{-1}C$

(v) Si  $K_S$  es una matriz de  $2 \times 2$  se puede utilizar la siguiente formula:

$$\mathfrak{R}_o = \frac{1}{2} \left[ \text{traza}(K_S) + \sqrt{\text{traza}(K_S)^2 - 4 \det(K_S)} \right]$$

Como observación lateral que ahora explicamos que se puede derivar de  $K_S$ ,  $K$  en forma más o menos igual que nosotros derivamos  $K$  de  $K_L$ . Al derivar  $K_S$ , consideramos los estados-en-infección "puros" y representamos estos en las columnas de E. Un punto de vista más general considera los estados-en-infección "mixto", en la que nos referimos a una distribución de probabilidad para el estado en la infección representada por una columna con elementos no negativos que suman uno. Que ahora mostrar que el **NGM** con pequeño dominio y el **NGM** con gran dominio tiene los mismos valores propios distintos de cero. Sea  $v$  un autovector de  $K_S$  con su correspondiente valor propio  $\lambda$ . A continuación  $K_S v = -R \Sigma^{-1} C v = \lambda v$ . Multiplicar esta identidad por  $C$  para conseguir  $-C R \Sigma^{-1} C v = \lambda C v$ . pero  $C R = T$ , de modo  $C v$  es un vector propio de  $K_L$  con el correspondiente valor propio  $\lambda$ . como las matrices  $K, K_L, K_S$  tienen el mismo rango, que han establecido que tienen el mismo espectro distinto de cero y por lo tanto el mismo valor propio dominante.

El proceso de reducción esbozado anteriormente a menudo conduce a una fórmula explícita para  $\mathfrak{R}_o$  ó, al menos, a un problema de valor propio con la dimensión más bajo posible. Esta es una de las razones por las que los investigadores calculan  $\mathfrak{R}_o$  y no la tasa intrínseca de crecimiento natural  $r$ , que serviría de otra forma igual de bien para caracterizar el potencial de propagación inicial. En general, no existe una relación explícita entre el valor de  $\mathfrak{R}_o$ , y el valor de  $r$  en el sentido de que, por ejemplo, las infecciones con un alto  $\mathfrak{R}_o$  no llevan automáticamente al aumento exponencial de incidencia rápida. Sin embargo, la magnitud de  $\mathfrak{R}_o$  revela el signo de  $r$ , porque se cumple lo siguiente:  $\mathfrak{R}_o > 1$  si y sólo si,  $r > 0$ , y  $\mathfrak{R}_o = 1$  si y sólo si  $r = 0$  ( y por lo tanto, uno también tiene  $\mathfrak{R}_o < 1$  si y sólo si  $r < 0$ ). Es este signo equivalencia que valida el uso del enfoque basado en la generación de para caracterizar  $\mathfrak{R}_o$  y por lo tanto, la teoría de la **NGM**. Esta relación con la restablece que  $\mathfrak{R}_o > 1$  implica la inestabilidad de la infección sin el estado de equilibrio del sistema E.D.O.s y  $\mathfrak{R}_o < 1$  implica estabilidad. Esto es útil porque, en un entorno modelo, a menudo es posible derivar una fórmula para  $\mathfrak{R}_o$ , mientras que  $r$  es sólo define de forma implícita. [28,29,30,31].

*Se deduce que la tasa de reproducción ( $\mathfrak{R}_o$ ) de la enfermedad como valor propio dominante o radio espectral de la matriz de siguiente generación,  $K$  en una vecindad de estado libre de la infección.*

## Desarrollo de la "NGM"

Como la expresión (4.1) es un sistema no lineal de E.D.O.

$$\begin{cases} X'_h &= \sigma_h H_T - \beta_m Y_m X_h - \mu X_h \\ Y'_h &= \beta_m Y_m X_h - \alpha Y_h - \mu Y_h \\ X'_m &= \sigma_m M_T - \beta_h Y_h X_m - \mu X_m \\ Y'_m &= \beta_h Y_h X_m - \varepsilon Y_m - \mu Y_m \end{cases} \quad (3.1)$$

En primer lugar se va a linealizar el sistema (4.1).  
Para lo cual, el Jacobiano del Sistema sería :

Sea  $X = X_h, Y_h, X_m, Y_m$

$$J(X) = \begin{bmatrix} -\beta_m Y_m - \mu & 0 & 0 & -\beta_m X_h \\ \beta_m Y_m & -\alpha - \mu & 0 & \beta_m X_h \\ 0 & -\beta_h X_m & -\beta_h Y_h - \mu & 0 \\ 0 & \beta_h X_m & \beta_h Y_h & -\varepsilon - \mu \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Mediante el Método de la Matriz de la Siguiente Generación, la matriz Jacobiana se expresará de la siguiente manera.

$$J = \begin{bmatrix} -\beta_m Y_m & 0 & 0 & -\beta_m X_h \\ \beta_m Y_m & 0 & 0 & \beta_m X_h \\ 0 & -\beta_h X_m & -\beta_h Y_h - \mu & 0 \\ 0 & \beta_h X_m & \beta_h Y_h & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha - \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon - \mu \end{bmatrix}$$

luego,

Sea

- $T$  : Matriz de Transmisión (Contagio)
- $\Sigma$  : Matriz de Transición (Mortalidad)

$$T = \begin{bmatrix} -\beta_m Y_m & 0 & 0 & -\beta_m X_h \\ \beta_m Y_m & 0 & 0 & \beta_m X_h \\ 0 & -\beta_h X_m & -\beta_h Y_h & 0 \\ 0 & \beta_h X_m & \beta_h Y_h & 0 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$



$$\Sigma = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha - \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon - \mu \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

de aquí,

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha+\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon+\mu} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

luego,  $K = T \cdot \Sigma^{-1}$

$$K = \begin{bmatrix} -\frac{\beta_m Y_m}{\mu} & 0 & 0 & -\frac{\beta_m X_h}{\varepsilon+\mu} \\ \frac{\beta_m Y_m}{\mu} & 0 & 0 & \frac{\beta_m X_h}{\varepsilon+\mu} \\ 0 & -\frac{\beta_h X_m}{\alpha+\mu} & -\frac{\beta_h Y_h}{\mu} & 0 \\ 0 & \frac{\beta_h X_m}{\alpha+\mu} & \frac{\beta_h Y_h}{\mu} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

- $|K| = 0$
- $Rango(K) = 2$
- $Traza(K) = -\left(\frac{\beta_m Y_m}{\mu} + \frac{\beta_h Y_h}{\mu}\right) < 0$

Como  $|K| = 0$ , no se podrá analizar mediante **NGM** con dominio grande, sino se reformulará mediante **NGM** con dominio pequeño.

De la siguiente manera:

Sea

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$R = \begin{bmatrix} \beta_m Y_m & 0 & 0 & \beta_m X_h \\ 0 & \beta_h X_m & \beta_h Y_h & 0 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

luego,  $T = C \cdot R$  (condición necesaria)

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_m Y_m & 0 & 0 & \beta_m X_h \\ 0 & \beta_h X_m & \beta_h Y_h & 0 \end{bmatrix}$$

luego,

$$T = \begin{bmatrix} -\beta_m Y_m & 0 & 0 & -\beta_m X_h \\ \beta_m Y_m & 0 & 0 & \beta_m X_h \\ 0 & -\beta_h X_m & -\beta_h Y_h & 0 \\ 0 & \beta_h X_m & \beta_h Y_h & 0 \end{bmatrix}$$

así,  $K_S = -R \cdot \Sigma^{-1} \cdot C$

$$K_S = - \begin{bmatrix} \beta_m Y_m & 0 & 0 & \beta_m X_h \\ 0 & \beta_h X_m & \beta_h Y_h & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha+\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon+\mu} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

luego,

$$K_S = \begin{bmatrix} -\frac{\beta_m Y_m}{\mu} & \frac{\beta_m X_h}{\varepsilon+\mu} \\ \frac{\beta_h X_m}{\alpha+\mu} & -\frac{\beta_h Y_h}{\mu} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

- $\text{traza}(K_S) = -\frac{\beta_m Y_m}{\mu} - \frac{\beta_h Y_h}{\mu} = -\left(\frac{\beta_m Y_m + \beta_h Y_h}{\mu}\right) < 0$
- $\det(K_S) = \frac{\beta_m \beta_h Y_m Y_h}{\mu^2} - \frac{\beta_m \beta_h X_m X_h}{(\varepsilon+\mu)(\alpha+\mu)}$

Para que, el método de la Matriz de la Próxima Generación (**NGM**) pueda brindar la estabilidad local del Modelo deberá garantizarse que  $|K_S| \neq 0$ , en caso que,  $|K_S| = 0$  no se podría utilizar el presente método, y se tendría que buscar otro método para lograr la estabilidad local.

Para lo cual, cuando se evalúa en los puntos críticos deberá resultar la determinante no nula. Cuando es el primer punto crítico (Punto libre de infección)

es fácil ver que es no negativa. Por otro lado, cuando se evalúa en el segundo punto crítico (Punto Endémico) es cuando hay que garantizar que sea no nulo.

**TEOREMA 4.4 :** Si  $\frac{U_2^2}{\mu^2} \neq \frac{U_4 U_3}{\beta_m}$ , entonces  $|K_S| \neq 0$ .

**Demostración**

$$\text{Sea } \det(K_S) = \frac{\beta_m \beta_h Y_m Y_h}{\mu^2} - \frac{\beta_m \beta_h X_m X_h}{(\varepsilon + \mu)(\alpha + \mu)}$$

$$\text{luego, } |K_S| = \frac{\beta_m \beta_h U_2^2}{\mu^2 \beta_h (\alpha + \mu)(\varepsilon + \mu) U_3 U_4} - \frac{\beta_m \beta_h (\varepsilon + \mu) U_4 U_3}{\beta_m \beta_h (\varepsilon + \mu)(\alpha + \mu) U_4 U_3}$$

$$\text{luego, } |K_S| = \left( \frac{\beta_m}{(\alpha + \mu)(\varepsilon + \mu) U_3 U_4} \right) \left( \frac{U_2^2}{\mu^2} - \frac{U_4 U_3}{\beta_m} \right)$$

Por consiguiente,

$$\frac{U_2^2}{\mu^2} \neq \frac{U_4 U_3}{\beta_m} \quad (4.18)$$

Con la condición (4.18) garantizaremos la determinante no nula de  $K_S$ .

Como  $K_S \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  se puede utilizar la fórmula:

$$\Re_o = \frac{1}{2} \left[ \text{traza}(K_S) + \sqrt{\text{traza}(K_S)^2 - 4 \det(K_S)} \right]$$

luego,

$$\Re_o = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\left( \frac{\beta_m Y_m + \beta_h Y_h}{\mu} \right)^2 - 4 \left( \frac{\beta_m \beta_h Y_m Y_h}{\mu^2} - \frac{\beta_m \beta_h X_m X_h}{(\varepsilon + \mu)(\alpha + \mu)} \right)} - \left( \frac{\beta_m Y_m + \beta_h Y_h}{\mu} \right) \right]$$

Analizando para los puntos críticos.

$$\blacksquare \bar{z}_1 = \left( \frac{\sigma_h H_{NS}}{\mu}; 0; \frac{\sigma_m M_{NS}}{\mu}; 0 \right)$$

$$\mathfrak{R}_o = \frac{1}{2} \sqrt{4 \frac{\beta_m \beta_h X_m X_h}{(\varepsilon + \mu)(\alpha + \mu)}} = \sqrt{\frac{\beta_m \beta_h X_m X_h}{(\varepsilon + \mu)(\alpha + \mu)}} > 0$$

luego,

$$\mathfrak{R}_o = \sqrt{\frac{\beta_m \beta_h \sigma_h H_{NS} \sigma_m M_{NS}}{\mu^2 (\varepsilon + \mu)(\alpha + \mu)}} = \sqrt{R_S^H \cdot R_I^H \cdot R_S^M \cdot R_I^M}$$

**TEOREMA 4.5 :** Sea  $R_S^H, R_S^M, R_I^H, R_I^M > 0$

1. Si  $R_S^H \cdot R_S^M \cdot R_I^H \cdot R_I^M < 1$ , entonces  $\mathfrak{R}_o < 1$  y por ende el Sistema es Estable localmente.
2. Si  $R_S^H \cdot R_S^M \cdot R_I^H \cdot R_I^M > 1$ , entonces  $\mathfrak{R}_o > 1$  y por ende el Sistema es Inestable localmente.

**Interpretación:**

Si se puede condicionar la interacción de las tasas de supervivencias tanto de susceptibles como infectados al entrar en contacto con las poblaciones no susceptibles de tal manera que el número de Reproducción,  $\mathfrak{R}_o$ , sea menor que uno esto implicará que el Modelo Matemático Epidemiológico sea estable localmente, y así la infección de la enfermedad sea controlable y no se propague sin poder controlarla. En cambio, cuando  $\mathfrak{R}_o$ , sea mayor que uno esto implicará que el Modelo Matemático Epidemiológico sea inestable localmente, y así la infección de la enfermedad se propagará de tal manera que no se pueda controlar, sobre todo que este Modelo no tiene ninguna estrategia de control.

$$\blacksquare \quad \bar{z}_2 = \left( \frac{U_1}{\beta_h U_3}; \frac{U_2}{\beta_h (\alpha + \mu) U_3}; \frac{(\alpha + \mu) U_3}{\beta_m U_4}; \frac{U_2}{U_1} \right)$$

$$\mathfrak{R}_o = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\frac{1}{\mu^2} \left( \frac{\beta_m U_2}{U_1} + \frac{U_2}{(\alpha + \mu) U_3} \right)^2 - 4 \left( \frac{\beta_m}{(\alpha + \mu)(\varepsilon + \mu) U_3 U_4} \right) \left( \frac{U_2^2}{\mu^2} - \frac{U_4 U_3}{\beta_m} \right) - \frac{1}{\mu} \left( \frac{\beta_m U_2}{U_1} + \frac{U_2}{(\alpha + \mu) U_3} \right)} \right]$$

$$\mathfrak{R}_o = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\frac{1}{\mu^2} \left( \frac{\beta_m U_2}{U_1} + \frac{U_2}{(\alpha + \mu) U_3} \right)^2 + 4 \left( \frac{\beta_m}{(\alpha + \mu)(\varepsilon + \mu) U_3 U_4} \right) \left( \frac{U_4 U_3}{\beta_m} - \frac{U_2^2}{\mu^2} \right) - \frac{1}{\mu} \left( \frac{\beta_m U_2}{U_1} + \frac{U_2}{(\alpha + \mu) U_3} \right)} \right]$$

como se ha garantizado que  $|K_S| \neq 0$ , entonces se tendrá que buscar que  $\mathfrak{R}_o < 1$  para la estabilidad local del Sistema.

**TEOREMA 4.6 :** Sea  $U_2, U_3, U_4 > 0$

Si  $0 < \left( \frac{\beta_m}{(\alpha+\mu)(\varepsilon+\mu)U_3U_4} \right) \left( \frac{U_4U_3}{\beta_m} - \frac{U_2^2}{\mu^2} \right) < \frac{1}{4}$ , entonces  $\mathfrak{R}_o < 1$  y por ende el Sistema es Estable localmente.

**Demostación**

Si  $0 < \left( \frac{\beta_m}{(\alpha+\mu)(\varepsilon+\mu)U_3U_4} \right) \left( \frac{U_4U_3}{\beta_m} - \frac{U_2^2}{\mu^2} \right) < \frac{1}{4}$  y, a la vez,  $\frac{U_4U_3}{\beta_m} > \frac{U_2^2}{\mu^2}$

con estas dos condiciones,  $0 < 4 \left( \frac{\beta_m}{(\alpha+\mu)(\varepsilon+\mu)U_3U_4} \right) \left( \frac{U_4U_3}{\beta_m} - \frac{U_2^2}{\mu^2} \right) < 1$

$$\begin{aligned} \text{luego, } \quad & \frac{1}{\mu^2} \left( \frac{\beta_m U_2}{U_1} + \frac{U_2}{(\alpha+\mu)U_3} \right)^2 + 4 \left( \frac{\beta_m}{(\alpha+\mu)(\varepsilon+\mu)U_3U_4} \right) \left( \frac{U_4U_3}{\beta_m} - \frac{U_2^2}{\mu^2} \right) \\ & < 1 + \frac{1}{\mu^2} \left( \frac{\beta_m U_2}{U_1} + \frac{U_2}{(\alpha+\mu)U_3} \right) \end{aligned}$$

de aquí,

Sea

$$\sqrt{\frac{1}{\mu^2} \left( \frac{\beta_m U_2}{U_1} + \frac{U_2}{(\alpha+\mu)U_3} \right)^2 + 4 \left( \frac{\beta_m}{(\alpha+\mu)(\varepsilon+\mu)U_3U_4} \right) \left( \frac{U_4U_3}{\beta_m} - \frac{U_2^2}{\mu^2} \right)} < \sqrt{1 + \frac{1}{\mu^2} \left( \frac{\beta_m U_2}{U_1} + \frac{U_2}{(\alpha+\mu)U_3} \right)^2}$$

luego sumamos la expresión,  $-\frac{1}{\mu} \left( \frac{\beta_m U_2}{U_1} + \frac{U_2}{(\alpha+\mu)U_3} \right)$

$$\text{así, } \quad \mathfrak{R}_o < \sqrt{1 + \frac{1}{\mu^2} \left( \frac{\beta_m U_2}{U_1} + \frac{U_2}{(\alpha+\mu)U_3} \right)^2} - \frac{1}{\mu} \left( \frac{\beta_m U_2}{U_1} + \frac{U_2}{(\alpha+\mu)U_3} \right) < 1$$

Por consiguiente,  $\mathfrak{R}_o < 1$

**Interpretación:** De aquí, concluimos que  $\mathfrak{R}_o < 1$ , lo cual el Sistema sería estable en el punto crítico  $\bar{z}_2$ , debido que el teorema 3.6 hará cumplir la condición para poder garantizar la estabilidad local. Las expresiones  $U_2, U_3, U_4$  contendrán la esencia de la dinámica que interactúan las poblaciones susceptibles e infectadas, donde el crecimiento de lo susceptibles es mayor que los infectados, manteniendo la estabilidad de la propagación de la enfermedad.

*En conclusión, las condiciones poblaciones expresadas en el Teorema 4.3 y mediante el Teorema 4.5 y el Teorema 4.6 se podrá garantizar la estabilidad local del Modelo Matemático Epidemiológico sin Control para la dinámica de transmisión del VIH/SIDA, lo cual permitirá poder conocer como puede variar la dinámica de transmisión en las cuatro poblaciones consideradas en el Modelo, y así observar el comportamiento de las mismas de acuerdo a los parámetros ingresados pertenecientes al Modelo y tomados de la realidad que pertenece a la índole que se intenta modelar matemáticamente.*

### 4.6.7. Análisis de las Simulaciones Computacionales

Las simulaciones computacionales del Modelo Matemático, permiten poder ver el comportamiento que tiene el modelo en un tiempo determinado, para lo cual se apoyará en el cálculo numérico, como se había mencionado el Modelo Matemático en esencia es un Sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, mediante los Métodos Numéricos se podrá aproximar la solución que tiene el Sistema para saber cuál es su representación grafica generada por los parámetros que se introduce. Dependiendo de los parámetros que se introduzca permitirá ver cómo se comporta la solución. [35,36].

Teniendo en cuenta este detalle, se procederá a simular computacionalmente el Modelo, variando los parámetros respectivos para su respectiva comparación, y a la vez con mucho más detalle su interpretación matemática y epidemiológica del Modelo Matemático.

El Modelo Matemático tiene tres partes fundamentales:

- Tasas de Ingreso a la Población sexualmente activa
- Tasas de Contagio por personas infectadas
- Tasas de Mortalidad por la enfermedad

#### Tasas de Ingreso a la Población Sexualmente Activa

En esta sección se analizará las variantes de las Simulaciones Computacionales, al variar las tasas de Ingreso a las poblaciones Sexualmente Activas, para así poder describir cómo afecta en el comportamiento de las poblaciones tanto de susceptibles como de infectados. Esto permitirá las diferencias que surgen en cada simulación al variar las tasas, y permitirá percibir los cambios que afectan al Modelo, y por ende, brindará interpretar matemáticamente y epidemiológicamente el Modelo.

Para cual mostraremos cuatro simulaciones que permitirán realizar las comparaciones ante las tasas modificadas.

$$\begin{array}{ll} M_{NS} & = 5000 & H_{NS} & = 5000 \\ X_h & = 800 & X_m & = 700 \\ Y_h & = 30 & Y_m & = 25 \\ \beta_h & = 0,04 & \beta_m & = 0,04 \\ \alpha & = 0,04 & \varepsilon & = 0,04 \\ \mu & = 0,022 & & \end{array}$$

Fig. 1      $\sigma_h = 0,045$       $\sigma_m = 0,045$       $\Re_o^1 = 0,33$       $\Re_o^2 = 0,18$

Fig. 2	$\sigma_h = 0,060$	$\sigma_m = 0,060$	$\mathfrak{R}_o^1 = 0,44$	$\mathfrak{R}_o^2 = 0,07$
Fig. 3	$\sigma_h = 0,080$	$\sigma_m = 0,080$	$\mathfrak{R}_o^1 = 0,59$	$\mathfrak{R}_o^2 = 0,09$
Fig. 4	$\sigma_h = 0,100$	$\sigma_m = 0,100$	$\mathfrak{R}_o^1 = 0,73$	$\mathfrak{R}_o^2 = 0,23$

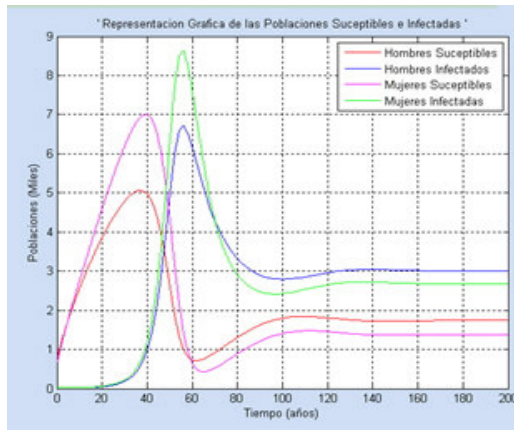


Fig. 1  $\sigma_h, \sigma_m = 0,045$

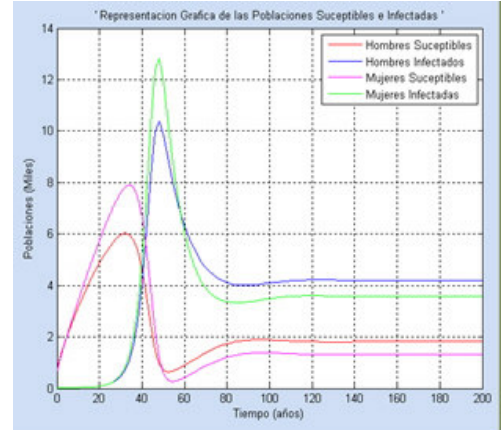


Fig. 2  $\sigma_h, \sigma_m = 0,060$

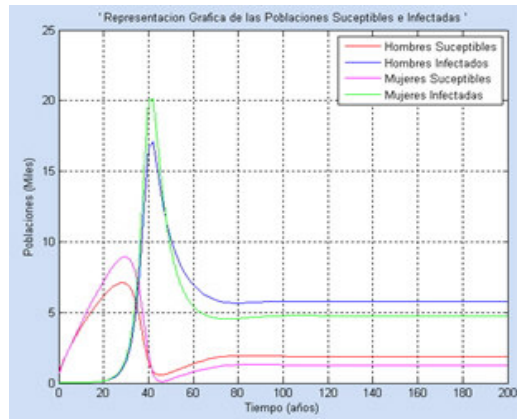


Fig. 3  $\sigma_h, \sigma_m = 0,080$

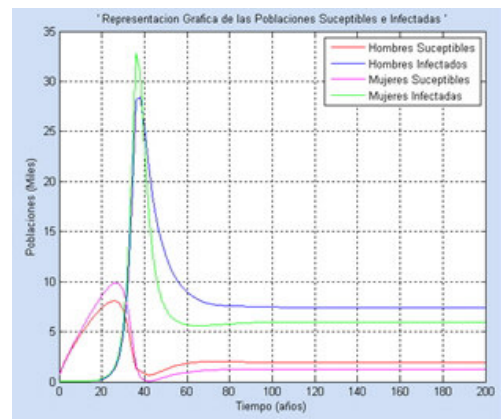


Fig. 4  $\sigma_h, \sigma_m = 0,100$

## INTERPRETACIÓN

En esta parte de las simulaciones computacionales se mantendrán constantes las tasas de contagio y de mortalidad por enfermedad, al variar las tasas de Ingreso a la Población sexualmente activa, se ha comenzado con una tasa de  $\sigma_h, \sigma_m = 0,045 = 4,5\%$  anual, esto quiere decir que el 4,5% de la población no susceptible entra a la Población sexualmente activa; esto presenta que la

población de infectados tenga un “pico alto” en su crecimiento entre los 40 y 60 años, después decrece hasta estabilizarse, también ocurre que la población susceptible tiene un crecimiento hasta los 40 años y luego comienza a decaer hasta estabilizarse pero siempre está por debajo de la población de infectados; esto quiere decir, que la población de infectados se estabiliza al mismo tiempo que la población de susceptibles mas la población de infectados es mayor a la población de susceptibles.

Del mismo modo, al variar, perturbar la tasas  $\sigma_h, \sigma_m = 6\%$ ,  $\sigma_h, \sigma_m = 8\%$ ,  $\sigma_h, \sigma_m = 10\%$ , respectivamente se puede apreciar que el comportamiento es similar al primero, con la diferencia que a mayor tasa de ingreso a la población sexualmente activa, permite que haya más posibilidad de contagio con las personas infectadas por la enfermedad del VIH/SIDA.

Con respecto al comportamiento matemático de las graficas, se puede notar que hay una semejanza bien definida que solamente varia en la posición de las graficas, dependiendo de la variación de las tasas de ingreso, como se había mencionado, a mayor tasa de ingreso hay menor población susceptible y hay una predominancia de la población infectada, las cuales llegan a estabilizarse a los 80 años aproximadamente iniciado el estudio del comportamiento de la enfermedad del VIH/SIDA.

### Tasas de Contagio por personas infectadas

En esta parte analizaremos las variantes de las Simulaciones Computacionales al variar las tasas de contagio por personas infectadas, para así poder describir cómo afecta en el comportamiento de las poblaciones tanto de susceptibles como de infectados.

Para cual mostraremos cuatro simulaciones que permitirán realizar las comparaciones ante las tasas modificadas.

$$\begin{array}{ll}
 M_{NS} & = 5000 & H_{NS} & = 5000 \\
 X_h & = 800 & X_m & = 700 \\
 Y_h & = 30 & Y_m & = 25 \\
 \sigma_h & = 0,05 & \sigma_m & = 0,05 \\
 \alpha & = 0,04 & \varepsilon & = 0,04 \\
 \mu & = 0,022 & & 
 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
 \text{Fig. 1} & \beta_h = 0,020 & \beta_m = 0,020 & \mathfrak{R}_o^1 = 0,18 & \mathfrak{R}_o^2 = 0,32 \\
 \text{Fig. 2} & \beta_h = 0,040 & \beta_m = 0,040 & \mathfrak{R}_o^1 = 0,37 & \mathfrak{R}_o^2 = 0,14 \\
 \text{Fig. 3} & \beta_h = 0,065 & \beta_m = 0,065 & \mathfrak{R}_o^1 = 0,59 & \mathfrak{R}_o^2 = 0,09 \\
 \text{Fig. 4} & \beta_h = 0,100 & \beta_m = 0,100 & \mathfrak{R}_o^1 = 0,91 & \mathfrak{R}_o^2 = 0,39
 \end{array}$$



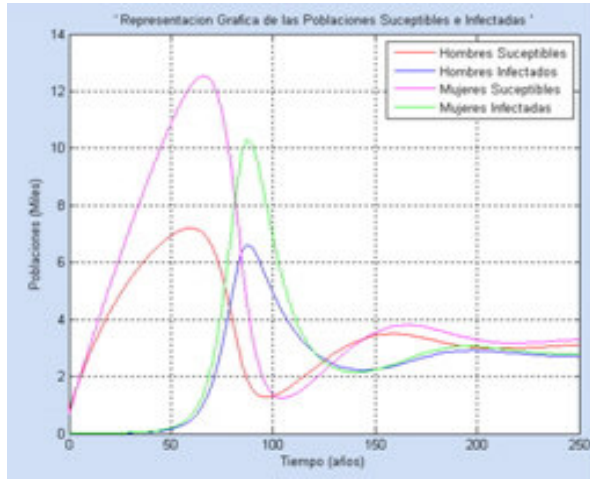


Fig. 1  $\beta_h, \beta_m = 0,020$

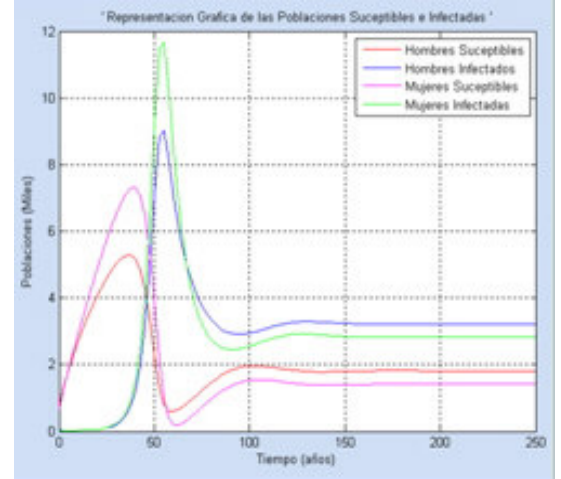


Fig. 2  $\beta_h, \beta_m = 0,040$

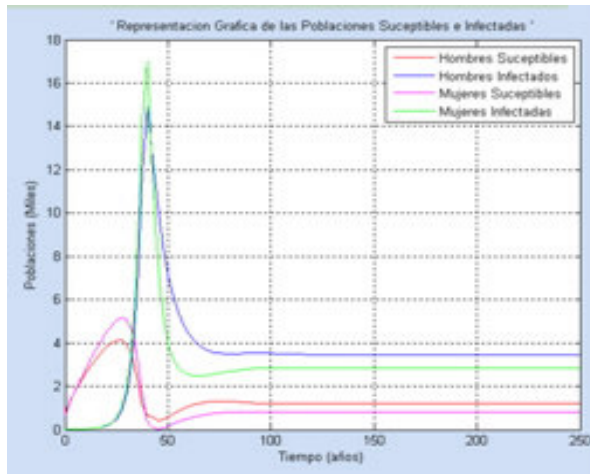


Fig. 3  $\beta_h, \beta_m = 0,065$

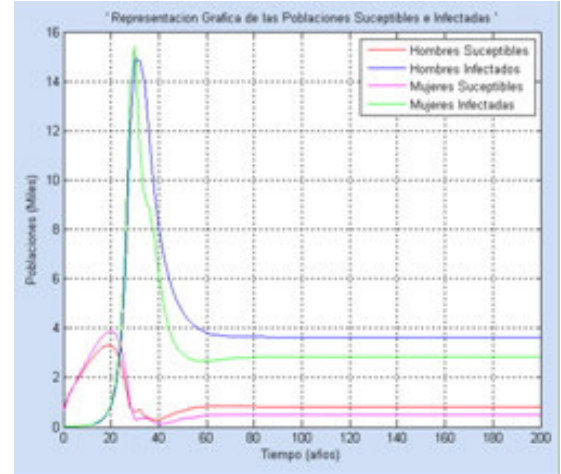


Fig. 4  $\beta_h, \beta_m = 0,100$

## INTERPRETACIÓN

En esta sección se mantienen constantes las tasas de Ingreso a la Población sexualmente activa y de mortalidad por enfermedad, al variar las tasas de contagio con personas infectadas, se ha comenzado con una tasa de  $\beta_h, \beta_m = 0,020 = 2\%$  anual, esto quiere decir que el 2% de la población susceptible entra en contacto con personas infectadas y contraen la enfermedad, así pasando de la población susceptible a la infectada; esto presenta que la población de infectados tenga un “pico alto” en su crecimiento entre los 20 y 40 años, después decrece hasta estabilizarse, también ocurre que la población susceptible tiene un crecimiento hasta los 100 años y luego comienza a decaer hasta estabilizarse

pero siempre está por debajo de la población de infectados; esto quiere decir, que la población de infectados se estabiliza al mismo tiempo que la población de susceptibles mas la población de infectados es mayor a la población de susceptibles.

Del mismo modo, al cambiar la tasas  $\beta_h, \beta_m = 4\%$ ,  $\beta_h, \beta_m = 6,5\%$ ,  $\beta_h, \beta_m = 10\%$ , respectivamente se puede apreciar que el comportamiento es similar al primero, con la diferencia que a mayor tasa de contagio por personas infectadas, permite que haya más posibilidad de interacción con las personas susceptibles y así contraer la enfermedad del VIH/SIDA.

Con respecto al comportamiento matemático de las graficas, se puede notar que hay una semejanza bien definida que solamente varia en la posición de las graficas, dependiendo de la variación de las tasas de contagio, como se había mencionado, a mayor tasa de contagio hay menor población susceptible y hay una predominancia de la población infectada, las cuales llegan a estabilizarse a los 100 años aproximadamente iniciado el estudio del comportamiento de la enfermedad del VIH/SIDA.

### Tasas de Mortalidad por la enfermedad

En este sección analizaremos las variantes de las Simulaciones Computacionales al variar las tasas de mortalidad por la enfermedad, para poder describir como afecta en el comportamiento de las poblaciones tanto de susceptibles como de infectados.

Para cual mostraremos cuatro simulaciones que permitirán realizar las comparaciones ante las tasas modificadas.

$$\begin{array}{ll}
 M_{NS} & = 5000 & H_{NS} & = 5000 \\
 X_h & = 800 & X_m & = 700 \\
 Y_h & = 30 & Y_m & = 25 \\
 \sigma_h & = 0,05 & \sigma_m & = 0,05 \\
 \beta_h & = 0,035 & \beta_m & = 0,035 \\
 \mu & = 0,024 & & 
 \end{array}$$

Fig. 1	$\alpha = 0,06$	$\varepsilon = 0,06$	$\mathfrak{R}_o^1 = 0,69$	$\mathfrak{R}_o^2 = 0,18$
Fig. 2	$\alpha = 0,07$	$\varepsilon = 0,07$	$\mathfrak{R}_o^1 = 0,62$	$\mathfrak{R}_o^2 = 0,12$
Fig. 3	$\alpha = 0,08$	$\varepsilon = 0,08$	$\mathfrak{R}_o^1 = 0,56$	$\mathfrak{R}_o^2 = 0,06$
Fig. 4	$\alpha = 0,10$	$\varepsilon = 0,10$	$\mathfrak{R}_o^1 = 0,47$	$\mathfrak{R}_o^2 = 0,05$

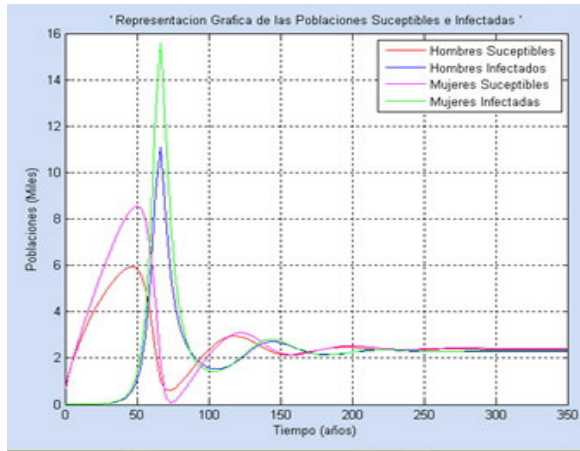


Fig. 1  $\alpha, \varepsilon = 0,06$

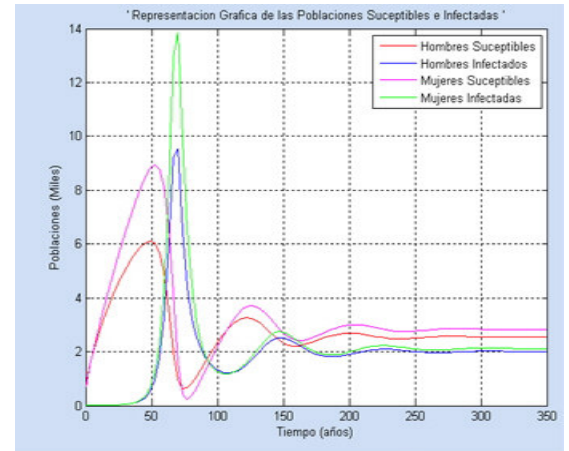


Fig. 2  $\alpha, \varepsilon = 0,07$

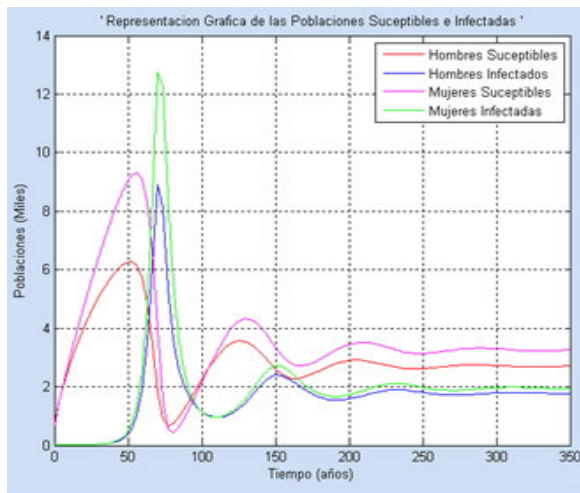


Fig. 3  $\alpha, \varepsilon = 0,08$

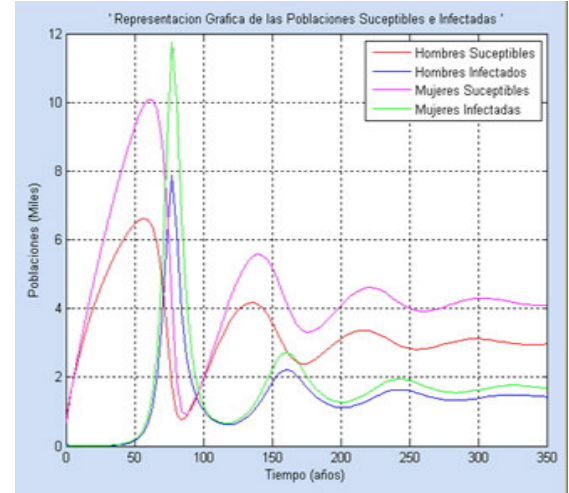


Fig. 4  $\alpha, \varepsilon = 0,10$

## INTERPRETACIÓN

En esta sección se mantendrán constantes las tasas de Ingreso a la Población sexualmente activa y las tasas de contagio por personas infectadas, al variar las tasas de mortalidad por la enfermedad; se ha comenzado con una tasa de  $\alpha, \varepsilon = 0,06 = 6\%$  anual, esto quiere decir que el 6% tanto de la población infectada tanto hombres como mujeres, así falleciendo los individuos que contraen la enfermedad del VIH/SIDA; esto presenta que la población de infectados tenga un “pico alto” en su crecimiento entre los 60 y 80 años, después decrece

hasta estabilizarse, también sucede que la población susceptible tiene un crecimiento hasta los 120 años y luego comienza a decaer hasta estabilizarse pero la población susceptible está por encima ligeramente de la población de los infectados; esto quiere decir, que la población de infectados se estabiliza al mismo tiempo que la población de susceptibles mas la población de susceptibles es mayor a la población de infectados, y esto se debe que cuando mueren las personas infectadas, ya no pueden seguir interactuando con las personas susceptibles.

Del mismo modo, al cambiar la tasas  $\alpha, \varepsilon = 7\%$ ,  $\alpha, \varepsilon = 8\%$ ,  $\alpha, \varepsilon = 10\%$ , respectivamente se puede apreciar que el comportamiento es similar al primero, con la diferencia que a mayor tasa de mortalidad por la enfermedad; permite que las personas infectadas tenga menos posibilidad de interacción con las personas susceptibles y así contraer la enfermedad del VIH/SIDA.

Con respecto al comportamiento matemático de las graficas, se puede notar que hay una semejanza bien definida que solamente varia en la posición de las graficas, dependiendo de la variación de las tasas de mortalidad por la enfermedad, como se había mencionado, a mayor tasa de contagio hay menor población de infectados y hay una predominancia de la población susceptible, las cuales llegan a estabilizarse a los 120 años aproximadamente iniciado el estudio del comportamiento de la enfermedad del VIH/SIDA.

## CONCLUSIÓN

*Después de haber analizado las tasas fundamentales del modelo matemático, se puede apreciar la importancia de ciertas tasas para poder mantener controlada la enfermedad en la medida que fuera posible, la manera de contrarrestar el crecimiento desmedido de la enfermedad en las poblaciones susceptibles; en verdad, las tasas de ingreso a la población sexualmente activa y las tasas de contagio por personas infectadas por la enfermedad generan una gran propagación de la enfermedad debido que la interacción con la población susceptible es inevitable; por mientras que las tasas de mortalidad por la enfermedad brindan un cierto control de la dinámica de transmisión, pero la idea no es que la tasa de mortalidad por la enfermedad sea alta para que se puedan mantener estable la población susceptible, sino que las tasas de ingreso y de contagio sean menores cada año para evitar que la población de infectados siga creciendo sin medida y la población de susceptibles disminuya, pues después de contraer la enfermedad no hay posibilidad de recuperación, solamente de control de la enfermedad en la medida que se pueda controlar con los medicamentos adecuados. En realidad, el modelo presenta la continuidad del comportamiento de la dinámica de la enfermedad por mientras que se mantenga las condiciones iniciales y de los parámetros, lo cual al variar dentro de un tiempo determinado permitiría modificar el comportamiento de la enfermedad indicando los signos para la toma de decisiones y la noción que se tiene de la enfermedad en cuanto al conocimiento del desarrollo de la enfermedad. [37].*

## Capítulo 5

# Modelo Matemático Epidemiológico con Estrategia de Control

Se ha mostrado el modelo epidemiológico sin control representado por las poblaciones epidemiológicas (suceptibles e infectados) y las poblaciones demográficas (hombres y mujeres), donde no hay ningún tipo de prevención con respecto a la propagación de la enfermedad, es necesario ver una manera, un medio, una estrategia de Control para intentar disminuir la población epidemiológica de infectados en la manera que sea posible; para lo cual se formulará una teoría de control aplicada hacia la dinámica de la enfermedad, es decir, métodos naturales y no naturales. [39].

La estrategia de control más común que se utiliza son los talleres de planificación familiar, eventos, campañas, sobre todo el reparto de condones (preservativos masculinos), esto es debido que el preservativo masculino sirve para protegerse de las E.T.S., en especial el VIH/SIDA, y a la vez también evitar los embarazos no deseados; en cambio la mujer no se protege para no contraer el virus de la enfermedad; lo que la mujer está preocupada de evitar es de tener un embarazo no deseado, es decir, se protege mediante píldoras, inyectables, etc. para no quedar embarazada, pero no tiene una conciencia adecuada para escoger un método adecuado para protegerse de contraer una ETS, en este caso el VIH/SIDA. También cabe mencionar que existe un condón femenino, pero en el Perú no se utiliza mucho ni se tiene un conocimiento adecuado para su uso correcto; por otra parte, la interacción entre el condón masculino y el femenino no fomenta una buena protección simultaneamente. Por estos motivos, no se considerará una estrategia de control para las mujeres. [39,40,41].

Entre los métodos que posee el hombre para evitar el contagio de las E.T.S. son los naturales y los no naturales.

- Métodos Naturales: La abstinencia

La abstinencia significa no practicar sexo. La abstinencia puede ser identificada de diferentes formas:

a) La abstinencia periódica: la pareja se abstiene de practicar sexo durante los días fértiles de la mujer. Este procedimiento es conocido también método basado en la predicción de fertilidad. Esta práctica no es abstinencia.

b) La abstinencia continua es la definición más atinada. Es no tener contacto ni conductas sexuales con la pareja. Esta es la única manera de evitar embarazos y contagio de enfermedades de transmisión sexual.

Este método de anticoncepción puede ser fácil de elegir pues es gratis, es el único que garantiza evitar un embarazo, también previene la adquisición de enfermedades sexuales; pero es el más difícil de cumplir por lo que es muy recomendable que siempre tengas un plan alternativo por si de pronto te encuentras en la situación de que estés a punto de practicar sexo (los condones, como se discute a continuación, son la manera más fácil y segura de estar preparado). [42,43,44].

- Métodos no naturales: Utilización de preservativos (condones)

Este método es uno de los más prácticos. Se coloca en el pene y bien utilizado evita embarazos y el contagio de enfermedades de transmisión sexual. Se puede usar tanto para el sexo vaginal, anal y oral. Además de que son fáciles de conseguir, no son caros (en centros de salud son gratis). Si son usados correctamente, tienen una eficacia de 98 %. Si su empleo no es el adecuado su efectividad baja a un 82 %. Lo que puedes hacer para mejorar la eficacia es comprarlos con espermicida o comprar un espermicida y aplicarlo al condón. Otra recomendación es usar el condón y retirar el pene de la vagina antes de la eyaculación. [45,456,47,48].

Por ende, el modelo matemático orientará una estrategia de control hacia los hombres y no hacia a las mujeres, debido a las consideraciones ya mencionadas. Las consideraciones para el Modelo con estrategia con control, serán las mismas que el Modelo anterior con la diferencia que se añadirá el coeficiente de protección aplicado en los hombres. [49].

## 5.1. Modelo Matemático

Para lo cual se considerará el mismo modelo sin control con la implementación de una estrategia de control, por lo cual el modelo matemático se definirá de la siguiente manera:

$$\left\{ \begin{array}{l} X'_h = \sigma_h H_{NS} - w(t)\beta_m Y_m X_h - \mu X_h \\ Y'_h = w(t)\beta_m Y_m X_h - \alpha Y_h - \mu Y_h \\ X'_m = \sigma_m M_{NS} - \beta_h Y_h X_m - \mu X_m \\ Y'_m = \beta_h Y_h X_m - \varepsilon Y_m - \mu Y_m \\ X_h(0) = X_o^h \geq 0 \\ Y_h(0) = Y_o^h \geq 0 \\ X_m(0) = X_o^m \geq 0 \\ Y_m(0) = Y_o^m \geq 0 \end{array} \right.$$

La estrategia de control estará representada por una función continua, con lo cual se intentará disminuir la dinámica de transmisión de la enfermedad. Esta función tendrá que satisfacer condiciones epidemiológicas que permitan una adecuada percepción del problema, y por ende, que pueda brindar una respuesta lo más acertada posible. Las consideraciones que se tendrán en la estrategia serán las siguientes: cuando  $w(t)$  sea una *constante* y cuando  $w(t)$  sea una *función continua*.

**Se realizará un análisis cualitativo cuando  $w(t)$  es constante y un análisis mediante simulación computacional cuando  $w(t)$  es una función continua.**

### MODELO CON ESTRATEGIA DE CONTROL ( $w(t)$ constante )

El coeficiente de protección ( $r$ ) será un dato estadístico el cual determinará el índice de protección que se tiene, este coeficiente estará entre  $\langle 0, 1 \rangle$  debido que intentará prevenir el contagio pero también se tendrá en cuenta que no será un 100 %, debido que los métodos naturales y no naturales no tienen un 100 % de protección. Los métodos naturales serían la abstinencia y tener una sola pareja sexual, por mientras que el método no natural sería el uso de condones (protección 90 %-95 %). Por comodidad se utilizará el valor  $w$ , pues en sí, la estrategia de control será de la siguiente manera:  $w = 1 - r$ .

Esto mostrará que cuando no haya una estrategia de control  $r = 0$ , el valor de  $w = 1$ ; brindando el primer modelo, el Modelo sin control.

$$\left\{ \begin{array}{l} X'_h = \sigma_h H_{NS} - w\beta_m Y_m X_h - \mu X_h \\ Y'_h = w\beta_m Y_m X_h - \alpha Y_h - \mu Y_h \\ X'_m = \sigma_m M_{NS} - \beta_h Y_h X_m - \mu X_m \\ Y'_m = \beta_h Y_h X_m - \varepsilon Y_m - \mu Y_m \\ X_h(0) = X_o^h \geq 0 \\ Y_h(0) = Y_o^h \geq 0 \\ X_m(0) = X_o^m \geq 0 \\ Y_m(0) = Y_o^m \geq 0 \end{array} \right. \quad (5.1)$$

donde:  $0 < \alpha, \beta_m, \beta_h, \varepsilon, \mu < 1$  ;  $0 < \sigma_m < 1$  ;  $0 < \sigma_h < 1$   
 $0 < w \leq 1$

### 5.1.1. Existencia y Unicidad

Para garantizar la Existencia y Unicidad del Sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (5.1) utilizaremos un lema y un teorema de la Teoría Matemática de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

**LEMA 5.1:** Sea  $F : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n$  ,  $F(X) = (F_1(X), F_2(X), \dots, F_n(X))$   
con  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  son continuas y existen  $\frac{\partial F_j}{\partial x_k}$  continuas en  $\mathbb{R}_+^n$   
 $\forall j, k = \overline{1, n}$ . Entonces,  $F$  localmente lipschitz continua en  $\mathbb{R}_+^n$ . [25]

Sea  $F : \mathbb{R}_+^4 \rightarrow \mathbb{R}_+^4$   $F(X) = (F_1(X), F_2(X), F_3(X), F_4(X))$   
con  $X = (X_h, Y_h, X_m, Y_m)$  donde  $X_h, Y_h, X_m, Y_m$  son funciones continuas positivas. Además,

$$\left. \begin{array}{l} F_1(X) = \sigma_h H_{NS} - w\beta_m Y_m X_h - \mu X_h \\ F_2(X) = w\beta_m Y_m X_h - \alpha Y_h - \mu Y_h \\ F_3(X) = \sigma_m M_{NS} - \beta_h Y_h X_m - \mu X_m \\ F_4(X) = \beta_h Y_h X_m - \varepsilon Y_m - \mu Y_m \end{array} \right\} \text{funciones continuas.}$$

Ahora se procederá a analizar las derivadas parciales de cada función:

$$F_i(X_h, Y_h, X_m, Y_m) \quad \forall i = \overline{1, 4}$$

- Sea  $F_1(X_h, Y_h, X_m, Y_m) = \sigma_h H_{NS} - w\beta_m Y_m X_h - \mu X_h$

$$\frac{\partial F_1}{\partial X_h} = -w\beta_m Y_m \quad \frac{\partial F_1}{\partial Y_h} = 0 \quad \frac{\partial F_1}{\partial X_m} = 0 \quad \frac{\partial F_1}{\partial Y_m} = -w\beta_m X_h$$



donde:  $\frac{\partial F_1}{\partial X_h}, \frac{\partial F_1}{\partial Y_h}, \frac{\partial F_1}{\partial X_m}, \frac{\partial F_1}{\partial Y_m}$  son continuas.

• Sea  $F_2(X_h, Y_h, X_m, Y_m) = w\beta_m Y_m X_h - \alpha Y_h - \mu Y_h$

$$\frac{\partial F_2}{\partial X_h} = w\beta_m Y_m \quad \frac{\partial F_2}{\partial Y_h} = -(\alpha + \mu) \quad \frac{\partial F_2}{\partial X_m} = 0 \quad \frac{\partial F_2}{\partial Y_m} = w\beta_m X_h$$

donde:  $\frac{\partial F_2}{\partial X_h}, \frac{\partial F_2}{\partial Y_h}, \frac{\partial F_2}{\partial X_m}, \frac{\partial F_2}{\partial Y_m}$  son continuas.

• Sea  $F_3(X_h, Y_h, X_m, Y_m) = \sigma_m M_{NS} - \beta_h Y_h X_m - \mu X_m$

$$\frac{\partial F_3}{\partial X_h} = 0 \quad \frac{\partial F_3}{\partial Y_h} = -\beta_h X_m \quad \frac{\partial F_3}{\partial X_m} = -\beta_h Y_h - \mu \quad \frac{\partial F_3}{\partial Y_m} = 0$$

donde:  $\frac{\partial F_3}{\partial X_h}, \frac{\partial F_3}{\partial Y_h}, \frac{\partial F_3}{\partial X_m}, \frac{\partial F_3}{\partial Y_m}$  son continuas.

• Sea  $F_4(X_h, Y_h, X_m, Y_m) = \beta_h Y_h X_m - \varepsilon Y_m - \mu Y_m$

$$\frac{\partial F_4}{\partial X_h} = 0 \quad \frac{\partial F_4}{\partial Y_h} = \beta_h X_m \quad \frac{\partial F_4}{\partial X_m} = \beta_h Y_h \quad \frac{\partial F_4}{\partial Y_m} = -(\varepsilon + \mu)$$

donde:  $\frac{\partial F_4}{\partial X_h}, \frac{\partial F_4}{\partial Y_h}, \frac{\partial F_4}{\partial X_m}, \frac{\partial F_4}{\partial Y_m}$  son continuas.

∴  $F$  localmente lipschitz continua en  $\mathbb{R}_+^4$ .

**TEOREMA 5.1:** Sea  $F : \mathbb{R}_+^4 \rightarrow \mathbb{R}_+^4$  localmente lipschitz continua para cada  $j = \overline{1, 4}$  y satisface  $F_j(X) \geq 0$  para cualquier  $x \in \mathbb{R}_+^n$ ,  $x_j = 0$ . Entonces para cada  $x_o \in \mathbb{R}_+^4$ , existe una única solución de  $X' = F(X)$  con  $X(0) = X_o$  en  $\mathbb{R}_+^4$  donde está definida en algún intervalo  $(0, b]$  con  $b \in (0, \infty]$ . [25].

En primer lugar, se va ha mostrar que satisface la condición del teorema.

• Sea  $F_1(X_h, Y_h, X_m, Y_m) = \sigma_h H_{NS} - w\beta_m Y_m X_h - \mu X_h$   
 sea  $X_h = 0, Y_h > 0, X_m > 0, Y_m > 0$

luego  $F_1(X_h, Y_h, X_m, Y_m) = \sigma_h H_{NS} > 0$

• Sea  $F_2(X_h, Y_h, X_m, Y_m) = w\beta_m Y_m X_h - \alpha Y_h - \mu Y_h$   
 sea  $X_h > 0, Y_h = 0, X_m > 0, Y_m > 0$

*luego*  $F_2(X_h, Y_h, X_m, Y_m) = w\beta_m Y_m X_h > 0$

- Sea  $F_3(X_h, Y_h, X_m, Y_m) = \sigma_m M_{NS} - \beta_h Y_h X_m - \mu X_m$   
sea  $X_h > 0, Y_h > 0, X_m = 0, Y_m > 0$

*luego*  $F_3(X_h, Y_h, X_m, Y_m) = \sigma_m M_{NS} > 0$

- Sea  $F_4(X_h, Y_h, X_m, Y_m) = \beta_h Y_h X_m - \varepsilon Y_m - \mu Y_m$   
sea  $X_h > 0, Y_h > 0, X_m > 0, Y_m = 0$

*luego*  $F_4(X_h, Y_h, X_m, Y_m) = \beta_h Y_h X_m > 0$

$\therefore F_j(X_h, Y_h, X_m, Y_m) > 0 \quad \forall j = \overline{1, 4}$

Bastará probar lo siguiente para satisfacer el teorema.

*Si*  $b < \infty \implies \sup_{0 \leq t \leq b} \sum_{j=1}^4 x_j(t) = \infty$

Sea  $I = (0, b]$  con  $b \in (0, \infty]$

*Si*  $b < \infty$  entonces  $\sup_{0 \leq t \leq b} \{X_h + Y_h + X_m + Y_m\} = \infty$

Supongamos,  $b < \infty$  y sea  $N = X_h + Y_h + X_m + Y_m$

$$\begin{aligned} N' &= \sigma_h H_{NS} - \mu X_h - \alpha Y_h - \mu Y_h + \sigma_m M_{NS} - \mu X_m - \varepsilon Y_m - \mu Y_m \\ N' &= (\sigma_h H_{NS} + \sigma_m M_{NS}) - (\mu X_h + \alpha Y_h + \mu Y_h + \mu X_m + \varepsilon Y_m + \mu Y_m) \\ N' &= (\sigma_h H_{NS} + \sigma_m M_{NS}) - (\mu X_h + \mu Y_h + \mu X_m + \mu Y_m) - \alpha Y_h - \varepsilon Y_m \\ N' &= (\sigma_h H_{NS} + \sigma_m M_{NS}) - \mu N - \alpha Y_h - \varepsilon Y_m \\ N' &= (\sigma_h H_{NS} + \sigma_m M_{NS}) - \mu N - \alpha Y_h - \varepsilon Y_m \leq (\sigma_h H_T + \sigma_m M_T) - \mu N \end{aligned}$$

*donde* :  $\rho = \sigma_h H_{NS} + \sigma_m M_{NS} \in \mathbb{R}^+$

$$N' \leq \rho - \mu N$$

integrando la expresión

$$\int N' \leq \int \rho - \int \mu N$$

luego, 
$$N(t) - N_o \leq \rho t - \int_0^t \mu N(s) ds$$

así, 
$$N(t) \leq \rho t + N_o - \int_0^t \mu N(s) ds$$

Por el lema de Gronwall

$$N(t) \leq (\rho t + N_o) \cdot e^{-\mu t}$$

luego, 
$$N(t) \leq \frac{N_o}{e^{\mu t}} + \frac{\rho t}{e^{\mu t}}$$

se puede deducir,

(i)  $e^{\mu t} \geq 1 \implies \frac{N_o}{e^{\mu t}} \leq N_o$

(ii)  $\frac{\rho t}{e^{\mu t}} \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$

es decir, 
$$N(t) \leq (\rho t + N_o) \cdot e^{-\mu t} \quad \forall t \in [0, b)$$

Sea 
$$g(t) = \rho t + N_o \leq M \quad \forall t \in [0, b)$$

como  $b < +\infty \implies g(t) \leq M \quad \forall t \in [0, b)$

luego, 
$$N(t) \leq M \quad \text{para algún } M > 0$$

$$\sup\{X_h + Y_h + X_m + Y_m\} \leq M \quad \forall t \in [0, b)$$

luego, 
$$\sup\{X_h + Y_h + X_m + Y_m\} < +\infty \quad (\implies \Leftarrow)$$

$\therefore b = \infty$

**Por el teorema enunciado, el sistema (5.1) tiene solución y es única, y además están definidas en  $[0, \infty)$**

## 5.2. Estado de Equilibrio del Modelo

Para garantizar la estabilidad del modelo matemático, en primer lugar se hallará los puntos críticos del Modelo matemático, representado por un sistema de ecuaciones igualados a cero.

### 5.2.1. Puntos Críticos

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

$$\begin{cases} \sigma_h H_{NS} - w\beta_m Y_m X_h - \mu X_h & = 0 \\ w\beta_m Y_m X_h - \alpha Y_h - \mu Y_h & = 0 \\ \sigma_m M_{NS} - \beta_h Y_h X_m - \mu X_m & = 0 \\ \beta_h Y_h X_m - \varepsilon Y_m - \mu Y_m & = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Desarrollando el sistema (5.2) obtenemos los siguientes puntos criticos.

$$* \quad X_h = \frac{\sigma_h H_{NS}}{\mu} \quad ; \quad Y_h = 0 \quad ; \quad X_m = \frac{\sigma_m M_{NS}}{\mu} \quad ; \quad Y_m = 0$$

donde:  $X_h \neq 0$ ,  $X_m \neq 0$  y además son positivos no nulos.

$$* \quad X_h = \frac{\sigma_h \beta_h (\varepsilon + \mu) H_{NS} + \mu (\alpha + \mu) (\varepsilon + \mu)}{\beta_h (w \sigma_m \beta_m M_{NS} + \mu (\varepsilon + \mu))} \quad Y_h = \frac{w \sigma_m \beta_m \sigma_h \beta_h M_{NS} H_{NS} - \mu^2 (\alpha + \mu) (\varepsilon + \mu)}{\beta_h (\alpha + \mu) (w \sigma_m \beta_m M_{NS} + \mu (\varepsilon + \mu))}$$

$$X_m = \frac{w (\alpha + \mu) (\sigma_m \beta_m M_{NS} + \mu (\varepsilon + \mu))}{\beta_m (\sigma_h \beta_h H_{NS} + \mu (\alpha + \mu))} \quad Y_m = \frac{w \sigma_m \beta_m \sigma_h \beta_h M_{NS} H_{NS} - \mu^2 (\alpha + \mu) (\varepsilon + \mu)}{w (\varepsilon + \mu) (\sigma_h \beta_h H_{NS} + \mu (\alpha + \mu))}$$

Sea la siguiente consideración:

$$\begin{aligned} R_1 &= w \sigma_m \beta_m \sigma_h \beta_h M_{NS} H_{NS} - \mu^2 (\alpha + \mu) (\varepsilon + \mu) \\ R_2 &= w \sigma_m \beta_m M_{NS} + \mu (\varepsilon + \mu) > 0 \\ R_3 &= w \sigma_m \beta_m M_{NS} (\alpha + \mu) + \mu (\alpha + \mu) (\varepsilon + \mu) > 0 \\ U_4 &= \sigma_h \beta_h H_{NS} + \mu (\varepsilon + \mu) > 0 \end{aligned}$$

luego los puntos críticos serán:

$$\bar{q}_1 = \left( \frac{\sigma_h H_{NS}}{\mu}; 0; \frac{\sigma_m M_{NS}}{\mu}; 0 \right) \quad (5.3)$$

$$\bar{q}_2 = \left( \frac{(\varepsilon + \mu) U_4}{\beta_h R_2}; \frac{R_1}{\beta_h R_3}; \frac{R_3}{\beta_m U_4}; \frac{R_1}{w (\varepsilon + \mu) U_4} \right) \quad (5.4)$$

Para garantizar la existencia adecuada al modelo matemático propuesto; los puntos críticos tienen que ser necesariamente no negativos.

En primer lugar, el punto crítico  $\bar{q}_1 > 0$  (*trivial*)

En segundo lugar, el punto crítico  $\bar{q}_2$  tiene que ser no negativo. Para lo cual se debe cumplir:  $R_1 > 0$

**TEOREMA 5.2:** Sea el Sistema (5.2), y también sean sus puntos críticos expresados en (5.3), (5.4).

1. La expresión (5.3) no tiene restricción alguna. (trivial)
2. Si  $w \cdot R_S^H \cdot R_I^H \cdot R_S^M \cdot R_I^M > 1$ , entonces la expresión (5.4) estará bien definida epidemiológicamente.

**Prueba de (2).**

Sea

$$\begin{aligned} R_1 &= w\sigma_m\beta_m\sigma_h\beta_hM_{NS}H_{NS} - \mu^2(\alpha + \mu)(\varepsilon + \mu) \\ R_2 &= w\sigma_m\beta_mM_{NS} + \mu(\varepsilon + \mu) > 0 \\ R_3 &= w\sigma_m\beta_mM_{NS}(\alpha + \mu) + \mu(\alpha + \mu)(\varepsilon + \mu) > 0 \\ U_4 &= \sigma_h\beta_hH_{NS} + \mu(\varepsilon + \mu) > 0 \end{aligned}$$

Analizaremos  $R_1 = w\sigma_m\beta_m\sigma_h\beta_hM_{NS}H_{NS} - \mu^2(\alpha + \mu)(\varepsilon + \mu)$

Despejando adecuadamente  $R_1$  :

$$R_1 = w\sigma_m\beta_m\sigma_h\beta_hM_{NS}H_{NS} - \mu^2(\alpha + \mu)(\varepsilon + \mu) > 0$$

$$\text{luego, } w\sigma_m\beta_m\sigma_h\beta_hM_{NS}H_{NS} > \mu^2(\alpha + \mu)(\varepsilon + \mu)$$

de aquí,

$$\frac{w(\sigma_m\beta_mM_{NS})(\sigma_h\beta_hH_{NS})}{(\mu(\alpha + \mu))(\mu(\varepsilon + \mu))} > 1$$

luego,

$$w \left( \frac{\sigma_m M_{NS}}{\mu} \right) \left( \frac{\sigma_h H_{NS}}{\mu} \right) \left( \frac{\beta_m}{\varepsilon + \mu} \right) \left( \frac{\beta_h}{\alpha + \mu} \right) > 1$$

Por consiguiente,

$$w \cdot R_S^H \cdot R_I^H \cdot R_S^M \cdot R_I^M > 1 \tag{5.5}$$

De (4.4) se garantiza que el  $R_1$  siempre es no negativo, por lo cual estaría bien definido epidemiológicamente.

De esta manera, las expresiones (5.3), (5.4) que representan los puntos críticos del Sistema (5.2) son no negativos, lo cual epidemiológicamente es correcto debido que no hay valores negativos en una Población de personas.

### 5.2.2. Matriz de la Siguiete Generación

Del mismo que se ha realizado la Matriz de la Siguiete Generación para el Modelo Matemático Sin Control, se desarrollará para el Modelo Matemático con Estrategia de Control.

Como la expresión (5.1) es un sistema no lineal de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, en primer lugar se va a linealizar el sistema. Para lo cual el Jacobiano del Sistema sería:

Sea  $X = X_h, Y_h, X_m, Y_m$

$$J(X) = \begin{bmatrix} -w\beta_m Y_m - \mu & 0 & 0 & -w\beta_m X_h \\ w\beta_m Y_m & -\alpha - \mu & 0 & w\beta_m X_h \\ 0 & -\beta_h X_m & -\beta_h Y_h - \mu & 0 \\ 0 & \beta_h X_m & \beta_h Y_h & -\varepsilon - \mu \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Mediante el Método de la Matriz de la Siguiete Generación, la matriz Jacobiana se expresará de la siguiente manera.

$$J = \begin{bmatrix} -w\beta_m Y_m & 0 & 0 & -w\beta_m X_h \\ w\beta_m Y_m & 0 & 0 & w\beta_m X_h \\ 0 & -\beta_h X_m & -\beta_h Y_h - \mu & 0 \\ 0 & \beta_h X_m & \beta_h Y_h & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha - \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon - \mu \end{bmatrix}$$

luego,

Sea

$$T = \begin{bmatrix} -w\beta_m Y_m & 0 & 0 & -w\beta_m X_h \\ w\beta_m Y_m & 0 & 0 & w\beta_m X_h \\ 0 & -\beta_h X_m & -\beta_h Y_h & 0 \\ 0 & \beta_h X_m & \beta_h Y_h & 0 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha - \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon - \mu \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

de aquí,

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha+\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon+\mu} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

luego,  $G = T \cdot \Sigma^{-1}$

$$K = \begin{bmatrix} -\frac{w\beta_m Y_m}{\mu} & 0 & 0 & -\frac{w\beta_m X_h}{\varepsilon+\mu} \\ \frac{w\beta_m Y_m}{\mu} & 0 & 0 & \frac{w\beta_m X_h}{\varepsilon+\mu} \\ 0 & -\frac{\beta_h X_m}{\alpha+\mu} & -\frac{\beta_h Y_h}{\mu} & 0 \\ 0 & \frac{\beta_h X_m}{\alpha+\mu} & \frac{\beta_h Y_h}{\mu} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

- $|K| = 0$
- $Rango(K) = 2$
- $Traza(K) = -\left(\frac{w\beta_m Y_m}{\mu} + \frac{\beta_h Y_h}{\mu}\right) < 0$

Como  $|K| = 0$ , no se podrá analizar mediante NGM con dominio grande, sino se reformulará mediante NGM con dominio pequeño de la siguiente manera:

Sea

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

$$R = \begin{bmatrix} w\beta_m Y_m & 0 & 0 & w\beta_m X_h \\ 0 & \beta_h X_m & \beta_h Y_h & 0 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

luego,  $T = C \cdot R$  (condición necesaria)

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w\beta_m Y_m & 0 & 0 & w\beta_m X_h \\ 0 & \beta_h X_m & \beta_h Y_h & 0 \end{bmatrix}$$

luego,

$$T = \begin{bmatrix} -w\beta_m Y_m & 0 & 0 & -w\beta_m X_h \\ w\beta_m Y_m & 0 & 0 & w\beta_m X_h \\ 0 & -\beta_h X_m & -\beta_h Y_h & 0 \\ 0 & \beta_h X_m & \beta_h Y_h & 0 \end{bmatrix}$$

así,  $K_S = -R \cdot \Sigma^{-1} \cdot C$

$$K_S = - \begin{bmatrix} w\beta_m Y_m & 0 & 0 & w\beta_m X_h \\ 0 & \beta_h X_m & \beta_h Y_h & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha+\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon+\mu} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

luego,

$$K_S = \begin{bmatrix} -\frac{w\beta_m Y_m}{\mu} & \frac{w\beta_m X_h}{\varepsilon+\mu} \\ \frac{\beta_h X_m}{\alpha+\mu} & -\frac{\beta_h Y_h}{\mu} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

- $\text{traza}(K_S) = -\frac{w\beta_m Y_m}{\mu} - \frac{\beta_h Y_h}{\mu} = -\left(\frac{w\beta_m Y_m + \beta_h Y_h}{\mu}\right) < 0$
- $\det(K_S) = \frac{w\beta_m \beta_h Y_m Y_h}{\mu^2} - \frac{w\beta_m \beta_h X_m X_h}{(\varepsilon+\mu)(\alpha+\mu)}$

Del mismo modo que se realizó para el Modelo sin control, también se realizará para el Modelo con estrategia de control lo cual se buscará garantizar que  $|K_S| \neq 0$ , en caso que,  $|K_S| = 0$  no se podría utilizar el presente método, y se tendría que buscar otro método para lograr la estabilidad local.

Para lo cual, cuando se evalúa en los puntos críticos deberá resultar la determinante no nula. Cuando es el primer punto crítico (Punto libre de infección) es fácil ver que es no negativa. Por otro lado, cuando se evalúa en el segundo punto crítico (Punto Endémico) es cuando hay que garantizar que sea no nulo.

**TEOREMA 5.3 :** Si  $\frac{R_1^2}{\mu^2 w U_4} \neq \frac{(\varepsilon+\mu)(\alpha+\mu) U_4^2}{\beta_h \beta_m R_2}$ , entonces  $|K_S| \neq 0$ .

#### Demostración

Sea  $\det(K_S) = \frac{w\beta_m \beta_h Y_m Y_h}{\mu^2} - \frac{w\beta_m \beta_h X_m X_h}{(\varepsilon+\mu)(\alpha+\mu)}$



luego,  $|K_S| = \frac{w\beta_m\beta_h R_1^2}{w\mu^2(\alpha+\mu)(\varepsilon+\mu)U_4^2} - \frac{w\beta_m\beta_h(\varepsilon+\mu)U_4 R_3}{(\varepsilon+\mu)(\alpha+\mu)\beta_h\beta_m U_4 R_2}$

luego,  $|K_S| = \left( \frac{w\beta_m\beta_h}{(\alpha+\mu)(\varepsilon+\mu)U_4} \right) \left( \frac{R_1^2}{\mu^2 w U_4} - \frac{(\varepsilon+\mu)(\alpha+\mu)U_4^2}{\beta_h\beta_m R_2} \right)$

Por consiguiente,

$$\frac{R_1^2}{\mu^2 w U_4} \neq \frac{(\varepsilon + \mu)(\alpha + \mu)U_4^2}{\beta_h\beta_m R_2} \quad (5.14)$$

Con la condición (5.14) garantizaremos la determinante no nula de  $K_S$ .

así,  $\Re_o = \frac{1}{2} \left[ \text{traza}(K_S) + \sqrt{\text{traza}(K_S)^2 - 4 \det(K_S)} \right]$

$$\Re_o = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\left( \frac{w\beta_m Y_m + \beta_h Y_h}{\mu} \right)^2 - 4 \left( \frac{w\beta_m\beta_h Y_m Y_h}{\mu^2} - \frac{w\beta_m\beta_h X_m X_h}{(\varepsilon+\mu)(\alpha+\mu)} \right)} - \left( \frac{w\beta_m Y_m + \beta_h Y_h}{\mu} \right) \right]$$

Analizando para los puntos críticos.

■  $\bar{q}_1 = \left( \frac{\sigma_h H_{NS}}{\mu}; 0; \frac{\sigma_m M_{NS}}{\mu}; 0 \right)$

$$\Re_o = \sqrt{\frac{w\beta_m\beta_h\sigma_h H_{NS}\sigma_m M_{NS}}{\mu^2(\varepsilon+\mu)(\alpha+\mu)}} = \sqrt{w \left( \frac{\sigma_h H_{NS}}{\mu} \right) \left( \frac{\sigma_m M_{NS}}{\mu} \right) \left( \frac{\beta_m}{\varepsilon+\mu} \right) \left( \frac{\beta_h}{\alpha+\mu} \right)}$$

luego,  $\Re_o = \sqrt{w \cdot R_S^H \cdot R_S^M \cdot R_I^H \cdot R_I^M}$

**TEOREMA 5.4 :** Sea  $w, R_S^H, R_S^M, R_I^H, R_I^M > 0$

1. Si  $w \cdot R_S^H \cdot R_S^M \cdot R_I^H \cdot R_I^M < 1$ , entonces  $\Re_o < 1$  y por ende el Sistema es Estable localmente.
2. Si  $w \cdot R_S^H \cdot R_S^M \cdot R_I^H \cdot R_I^M > 1$ , entonces  $\Re_o > 1$  y por ende el Sistema es Inestable localmente.

### Interpretación:

Si se puede condicionar la interacción de las tasas de supervivencias tanto de susceptibles como infectados al entrar en contacto con las poblaciones no susceptibles conjuntamente con el coeficiente de protección que representa la estrategia de control que intenta disminuir el contagio de susceptibles al entrar en contacto con los infectados, de tal manera que el número de Reproducción,  $\mathfrak{R}_o$ , sea menor que uno esto implicará que el Modelo Matemático Epidemiológico sea estable localmente, y así la infección de la enfermedad sea controlable y no se propague sin poder controlarla. En cambio, cuando  $\mathfrak{R}_o$ , sea menor que uno esto implicará que el Modelo Matemático Epidemiológico sea inestable localmente, y así la infección de la enfermedad se propagará de tal manera que no se pueda controlar, sobre todo que este Modelo no tiene ninguna estrategia de control.

$$\blacksquare \bar{q}_2 = \left( \frac{(\varepsilon+\mu)U_4}{\beta_h R_2}, \frac{R_1}{\beta_h R_3}, \frac{R_3}{\beta_m U_4}, \frac{R_1}{w(\varepsilon+\mu)U_4} \right)$$

$$\mathfrak{R}_o = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\mu^2} \left( \frac{(\alpha+\mu)wR_2}{U_4} + \frac{R_1}{(\alpha+\mu)R_2} \right)^2 + \frac{4w\beta_m\beta_h}{(\alpha+\mu)(\varepsilon+\mu)U_4} \left( \frac{(\varepsilon+\mu)(\alpha+\mu)U_4^2}{\beta_h\beta_m R_2} - \frac{R_1^2}{\mu^2 w U_4} \right) - \frac{1}{2\mu} \left( \frac{(\alpha+\mu)wR_2}{U_4} + \frac{R_1}{(\alpha+\mu)R_2} \right)}$$

como se ha garantizado que  $|K_S| \neq 0$ , entonces se tendrá que buscar que  $\mathfrak{R}_o < 1$  para la estabilidad local del Sistema.

**TEOREMA 5.6 :** Sea  $R_1, R_2, R_3, U_4 > 0$

Si  $0 < \frac{w\beta_m\beta_h}{(\alpha+\mu)(\varepsilon+\mu)U_4} \left( \frac{(\varepsilon+\mu)(\alpha+\mu)U_4^2}{\beta_h\beta_m R_2} - \frac{R_1^2}{\mu^2 w U_4} \right) < \frac{1}{4}$ , entonces  $\mathfrak{R}_o < 1$  y, por ende el Sistema es Estable localmente.

### Demostración

$$\text{Si } 0 < \frac{w\beta_m\beta_h}{(\alpha+\mu)(\varepsilon+\mu)U_4} \left( \frac{(\varepsilon+\mu)(\alpha+\mu)U_4^2}{\beta_h\beta_m R_2} - \frac{R_1^2}{\mu^2 w U_4} \right) < \frac{1}{4} \text{ y,}$$

$$\text{a la vez, } \frac{(\varepsilon+\mu)(\alpha+\mu)U_4^2}{\beta_h\beta_m R_2} > \frac{R_1^2}{\mu^2 w U_4} \text{ con estas dos condiciones,}$$

$$0 < 4 \frac{w\beta_m\beta_h}{(\alpha+\mu)(\varepsilon+\mu)U_4} \left( \frac{(\varepsilon+\mu)(\alpha+\mu)U_4^2}{\beta_h\beta_m R_2} - \frac{R_1^2}{\mu^2 w U_4} \right) < 1$$

$$\text{luego, } \frac{1}{\mu^2} \left( \frac{(\alpha+\mu)wR_2}{U_4} + \frac{R_1}{(\alpha+\mu)R_2} \right)^2 + 4 \frac{w\beta_m\beta_h}{(\alpha+\mu)(\varepsilon+\mu)U_4} \left( \frac{(\varepsilon+\mu)(\alpha+\mu)U_4^2}{\beta_h\beta_m R_2} - \frac{R_1^2}{\mu^2 w U_4} \right)$$

$$< 1 + \frac{1}{\mu^2} \left( \frac{(\alpha+\mu)wR_2}{U_4} + \frac{R_1}{(\alpha+\mu)R_2} \right)$$

de aquí,

$$\begin{aligned} \text{Sea } & \sqrt{\frac{1}{\mu^2} \left( \frac{(\alpha+\mu)wR_2}{U_4} + \frac{R_1}{(\alpha+\mu)R_2} \right)^2 + 4 \frac{w\beta_m\beta_h}{(\alpha+\mu)(\varepsilon+\mu)U_4} \left( \frac{(\varepsilon+\mu)(\alpha+\mu)U_4^2}{\beta_h\beta_mR_2} - \frac{R_1^2}{\mu^2wU_4} \right)} \\ & < \sqrt{1 + \frac{1}{\mu^2} \left( \frac{(\alpha+\mu)wR_2}{U_4} + \frac{R_1}{(\alpha+\mu)R_2} \right)^2} \end{aligned}$$

luego sumamos la expresión,  $-\frac{1}{\mu} \left( \frac{(\alpha+\mu)wR_2}{U_4} + \frac{R_1}{(\alpha+\mu)R_2} \right)$

así,

$$\mathfrak{R}_o < \sqrt{1 + \frac{1}{\mu^2} \left( \frac{(\alpha+\mu)wR_2}{U_4} + \frac{R_1}{(\alpha+\mu)R_2} \right)^2} - \frac{1}{\mu} \left( \frac{(\alpha+\mu)wR_2}{U_4} + \frac{R_1}{(\alpha+\mu)R_2} \right) < 1$$

Por consiguiente,  $\mathfrak{R}_o < 1$

**Interpretación:** De aquí, concluimos que  $\mathfrak{R}_o < 1$ , lo cual el Sistema sería estable en el punto crítico  $\overline{q_2}$ , debido que el Teorema 5.5 hará cumplir la condición para poder garantizar la estabilidad local. Las expresiones  $R_1, R_2, R_3, U_4$  contendrán la esencia de la dinámica que interactúan las poblaciones susceptibles e infectadas, donde el crecimiento de lo susceptibles es mayor que los infectados, manteniendo la estabilidad de la propagación de la enfermedad.

*En conclusión, las condiciones poblaciones expresadas en el Teorema 4.5 y el Teorema 4.6 para el Modelo sin control, y mediante el Teorema 5.5 y el Teorema 5.6 se podrá garantizar la estabilidad local del Modelo Matemático Epidemiológico con Estrategia de Control para la dinámica de transmisión del VIH/SIDA, lo cual permitirá poder conocer como puede variar la dinámica de transmisión en las cuatro poblaciones consideradas en el Modelo, y así observar el comportamiento de las mismas de acuerdo a los parámetros ingresados pertenecientes al Modelo y tomados de la realidad que pertenece a la índole que se intenta modelar matemáticamente incluido el coeficiente de protección que ayudará a disminuir el contagio en la medida que se tome las respectivas estrategias de Control. [48].*

### 5.3. Análisis de las Simulaciones Computacionales

Las simulaciones computacionales del Modelo Matemático, nos permiten poder ver el comportamiento que tiene el modelo en un tiempo determinado, para lo cual se apoyará en el cálculo numérico, como se había mencionado el

Modelo Matemático en esencia es un Sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, por lo cual por los Métodos Numéricos se podrá aproximar la solución que tiene el Sistema para saber cuál es su representación grafica generada por los parámetros que se introduce. Dependiendo de los parámetros que se introduzca permitirá ver cómo se comporta la solución, igual que en el Modelo Sin Control, analizaremos las Simulaciones para el Modelo con Estrategia de Control. Se tomará  $w = 0,50 = 50\%$  como probabilidad de protección en los hombres, mediante esta estrategia de control tanto métodos naturales (abstinencia) como métodos no naturales (preservativos masculinos), cuanto más sea el coeficiente que represente la protección que se tiene, mucho mejor para evitar el contagio de la enfermedad. Como se había mencionado el coeficiente de protección es un dato estadístico probabilístico constante.

A pesar de este detalle, es un inicio para un estudio mucho más elaborado de protección; los métodos no naturales que utilizan los hombres siempre ha sido el uso de preservativos (condones), siendo el único medio para protegerse del contagio de la enfermedad del VIH/SIDA.

Teniendo en cuenta este detalle, se procederá a simular computacionalmente el Modelo, variando los parámetros respectivos para su respectiva comparación, y a la vez con mucho más detalle su interpretación matemática y epidemiológica del Modelo Matemático.

El Modelo Matemático tiene tres partes fundamentales:

- Tasas de Ingreso a la Población sexualmente activa
- Tasas de Contagio por personas infectadas
- Tasas de Mortalidad por la enfermedad

### **5.3.1. Tasas de Ingreso a la Población Sexualmente Activa**

En esta sección se analizará las variantes de las Simulaciones Computacionales, al variar las tasas de Ingreso a las poblaciones Sexualmente Activas, para poder describir como afecta en el comportamiento de las poblaciones tanto de susceptibles como de infectados. Esto permitirá las diferencias que surgen en cada simulación al variar las tasas, y permitirá percibir los cambios que afectan al Modelo, y por ende, brindará interpretar matemáticamente y epidemiológicamente el Modelo.

Para cual mostraremos cuatro simulaciones que permitirán realizar las comparaciones ante las tasas modificadas.

$$\begin{array}{ll}
M_{NS} = 5000 & H_{NS} = 5000 \\
X_h = 800 & X_m = 700 \\
Y_h = 30 & Y_m = 25 \\
\beta_h = 0,04 & \beta_m = 0,04 \\
\alpha = 0,04 & \varepsilon = 0,04 \\
\mu = 0,022 & w = 0,50
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
\text{Fig. 1} & \sigma_h = 0,045 & \sigma_m = 0,045 & \mathcal{R}_o^1 = 0,23 \quad \mathcal{R}_o^2 = 0,21 \\
\text{Fig. 2} & \sigma_h = 0,060 & \sigma_m = 0,060 & \mathcal{R}_o^1 = 0,31 \quad \mathcal{R}_o^2 = 0,12 \\
\text{Fig. 3} & \sigma_h = 0,080 & \sigma_m = 0,080 & \mathcal{R}_o^1 = 0,42 \quad \mathcal{R}_o^2 = 0,02 \\
\text{Fig. 4} & \sigma_h = 0,100 & \sigma_m = 0,100 & \mathcal{R}_o^1 = 0,52 \quad \mathcal{R}_o^2 = 0,05
\end{array}$$

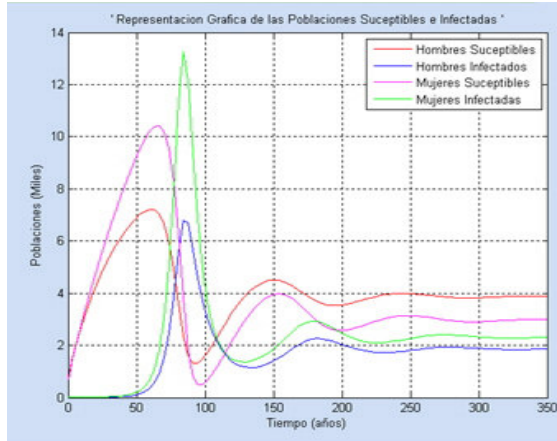


Fig. 1  $\sigma_h, \sigma_m = 0,045$

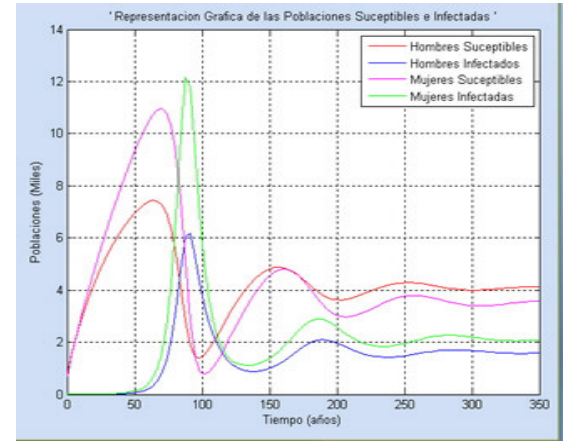


Fig. 2  $\sigma_h, \sigma_m = 0,060$

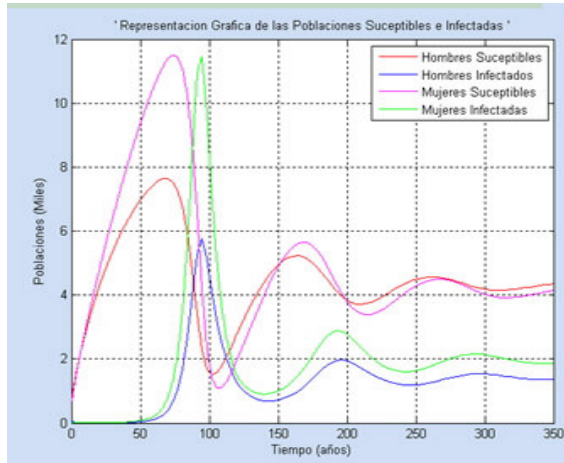


Fig. 3  $\sigma_h, \sigma_m = 0,080$

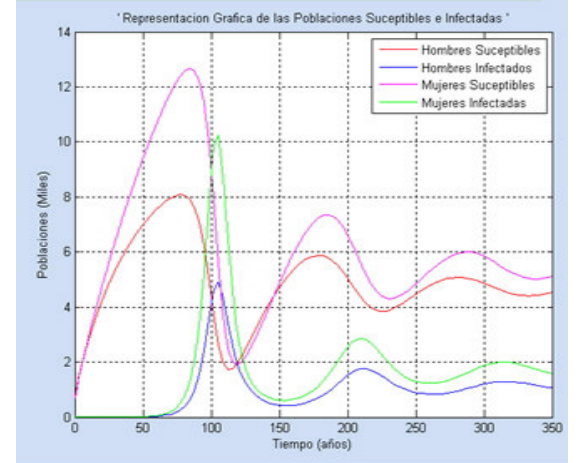


Fig. 4  $\sigma_h, \sigma_m = 0,100$

## INTERPRETACIÓN

En esta sección se mantienen constantes las tasas de contagio y de mortalidad por enfermedad, al variar las tasas de Ingreso a la Población sexualmente activa, se ha comenzado con una tasa de  $\sigma_h, \sigma_m = 0,045 = 4,5\%$  anual, esto quiere decir que el 4,5% de la población no susceptible entra a la Población sexualmente activa; esto presenta que la población de infectados tenga un “pico alto” en su crecimiento entre los 60 y 100 años, después decrece hasta estabilizarse, también ocurre que la población susceptible tiene un crecimiento hasta los 40 años y luego comienza a decaer hasta estabilizarse pero siempre está por debajo de la población de infectados; esto quiere decir, que la población de infectados se estabiliza al mismo tiempo que la población de susceptibles mas la población de infectados es mayor a la población de susceptibles.

Del mismo modo, al cambiar las tasas  $\sigma_h, \sigma_m = 6\%$ ,  $\sigma_h, \sigma_m = 8\%$ ,  $\sigma_h, \sigma_m = 10\%$ , respectivamente se puede apreciar que el comportamiento es similar al primero, con la diferencia que a mayor tasa de ingreso a la población sexualmente activa, permite que haya más posibilidad de contagio con las personas infectadas por la enfermedad del VIH/SIDA.

Con respecto al comportamiento matemático de las graficas, se puede notar que hay una semejanza bien definida que solamente varia en la posición de las graficas, dependiendo de la variación de las tasas de ingreso, como se había mencionado, a mayor tasa de ingreso hay menor población susceptible y hay una predominancia de la población infectada, las cuales llegan a estabilizarse a los 150 años aproximadamente iniciado el estudio del comportamiento de la enfermedad del VIH/SIDA.

### 5.3.2. Tasas de Contagio por personas infectadas

En esta sección analizaremos las variantes de las Simulaciones Computacionales al variar las tasas de contagio por personas

infectadas, para poder describir como afecta en el comportamiento de las poblaciones tanto de susceptibles como de infectados.

Para cual mostraremos cuatro simulaciones que permitirán realizar las comparaciones ante las tasas modificadas.

$M_{NS}$	=	5000	$H_{NS}$	=	5000
$X_h$	=	800	$X_m$	=	700
$Y_h$	=	30	$Y_m$	=	25
$\sigma_h$	=	0,05	$\sigma_m$	=	0,05
$\alpha$	=	0,04	$\varepsilon$	=	0,04
$\mu$	=	0,024	$w$	=	0,50

Fig. 1	$\beta_h = 0,020$	$\beta_m = 0,020$	$\mathcal{R}_o^1 = 0,13$	$\mathcal{R}_o^2 = 0,30$
Fig. 2	$\beta_h = 0,040$	$\beta_m = 0,040$	$\mathcal{R}_o^1 = 0,26$	$\mathcal{R}_o^2 = 0,18$
Fig. 3	$\beta_h = 0,065$	$\beta_m = 0,065$	$\mathcal{R}_o^1 = 0,42$	$\mathcal{R}_o^2 = 0,02$
Fig. 4	$\beta_h = 0,100$	$\beta_m = 0,100$	$\mathcal{R}_o^1 = 0,65$	$\mathcal{R}_o^2 = 0,01$

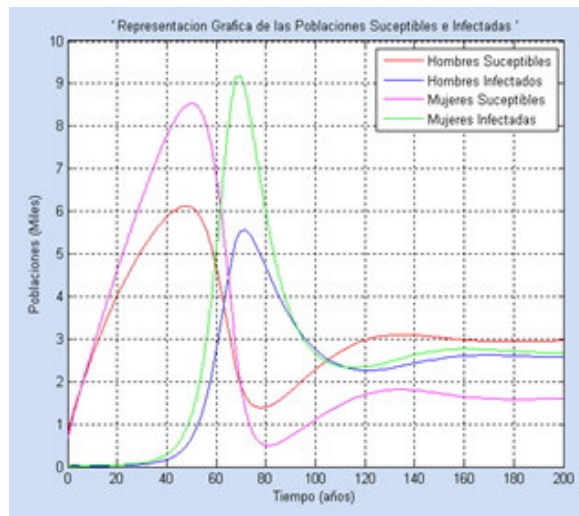


Fig. 1  $\beta_h, \beta_m = 0,020$

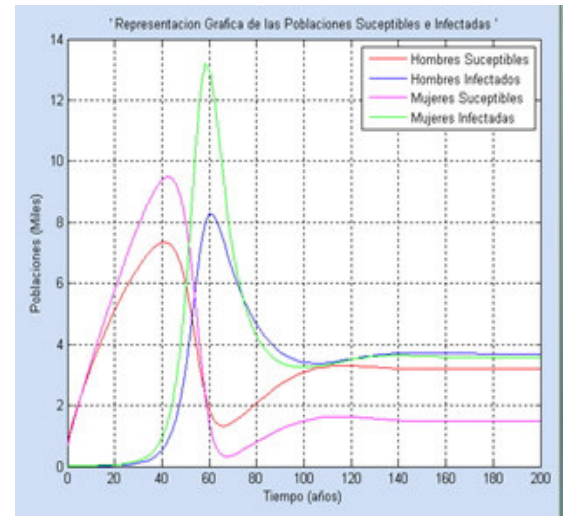


Fig. 2  $\beta_h, \beta_m = 0,040$

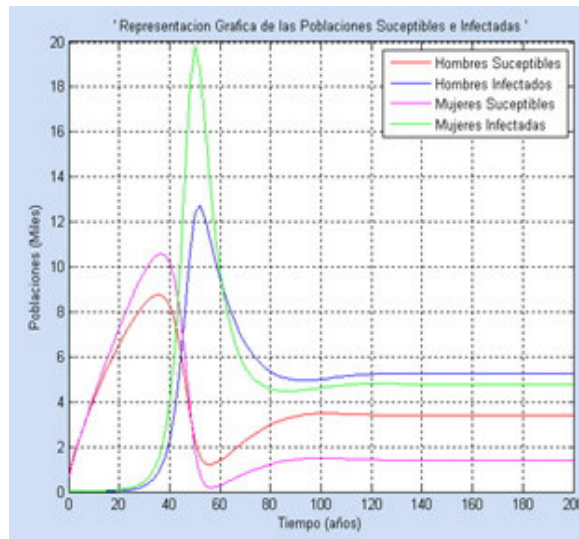


Fig. 3  $\beta_h, \beta_m = 0,065$

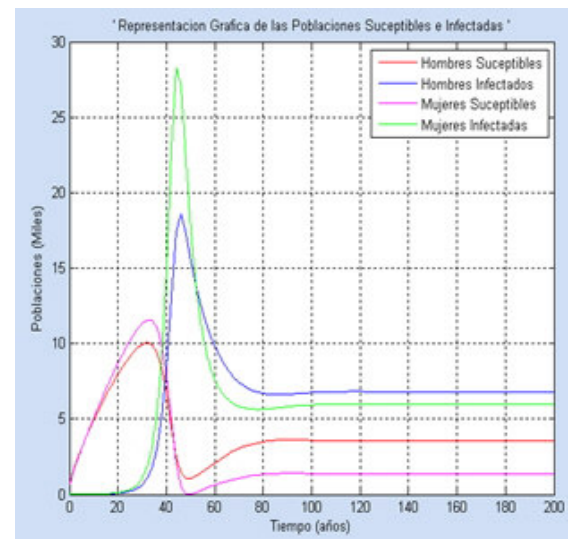


Fig. 4  $\beta_h, \beta_m = 0,100$

## INTERPRETACIÓN

En esta sección se mantienen constantes las tasas de Ingreso a la Población sexualmente activa y de mortalidad por enfermedad, al variar las tasas de contagio con personas infectadas, se ha comenzado con una tasa de  $\beta_h, \beta_m = 0,020 = 2\%$  anual, esto quiere decir que el 2% de la población susceptible entra en contacto con personas infectadas y contraen la enfermedad, así pasando de la población susceptible a la infectada; esto presenta que la población de infectados tenga un “pico alto” en su crecimiento entre los 50 y 90 años, después decrece hasta estabilizarse, también ocurre que la población susceptible tiene un crecimiento hasta los 100 años y luego comienza a decaer hasta estabilizarse pero siempre está por debajo de la población de infectados; esto quiere decir, que la población de infectados se estabiliza al mismo tiempo que la población de susceptibles mas la población de infectados es mayor a la población de susceptibles.

Del mismo modo, al cambiar la tasas  $\beta_h, \beta_m = 4\%$ ,  $\beta_h, \beta_m = 6,5\%$ ,  $\beta_h, \beta_m = 10\%$ , respectivamente se puede apreciar que el comportamiento es similar al primero, con la diferencia que a mayor tasa de contagio por personas infectadas, permite que haya más posibilidad de interacción con las personas susceptibles y así contraer la enfermedad del VIH/SIDA.

Con respecto al comportamiento matemático de las graficas, se puede notar que hay una semejanza bien definida que solamente varia en la posición de las graficas, dependiendo de la variación de las tasas de contagio, como se había mencionado, a mayor tasa de contagio hay menor población susceptible y hay una predominancia de la población infectada, las cuales llegan a estabilizarse a los 110 años aproximadamente iniciado el estudio del comportamiento de la enfermedad del VIH/SIDA.

### 5.3.3. Tasas de Mortalidad por la enfermedad

En esta sección analizaremos las variantes de las Simulaciones Computacionales al variar las tasas de mortalidad por la enfermedad, para poder describir como afecta en el comportamiento de las poblaciones tanto de susceptibles como de infectados.

Para cual mostraremos cuatro simulaciones que permitirán realizar las comparaciones ante las tasas modificadas.

$$\begin{array}{ll} M_{NS} & = 5000 & H_{NS} & = 5000 \\ X_h & = 800 & X_m & = 700 \\ Y_h & = 30 & Y_m & = 25 \\ \sigma_h & = 0,05 & \sigma_m & = 0,05 \\ \beta_h & = 0,035 & \beta_m & = 0,035 \\ \mu & = 0,022 & w & = 0,50 \end{array}$$



Fig. 1	$\alpha = 0,06$	$\varepsilon = 0,06$	$\mathcal{R}_o^1 = 0,17$	$\mathcal{R}_o^2 = 0,03$
Fig. 2	$\alpha = 0,07$	$\varepsilon = 0,07$	$\mathcal{R}_o^1 = 0,15$	$\mathcal{R}_o^2 = 0,12$
Fig. 3	$\alpha = 0,08$	$\varepsilon = 0,08$	$\mathcal{R}_o^1 = 0,14$	$\mathcal{R}_o^2 = 0,29$
Fig. 4	$\alpha = 0,10$	$\varepsilon = 0,10$	$\mathcal{R}_o^1 = 0,12$	$\mathcal{R}_o^2 = 0,55$

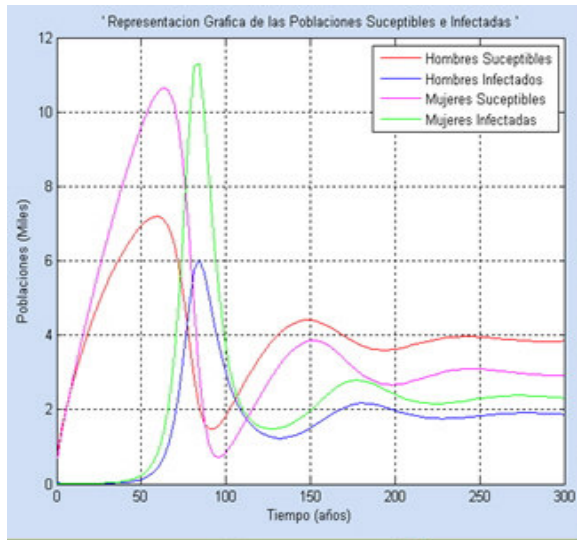


Fig. 1  $\alpha, \varepsilon = 0,06$

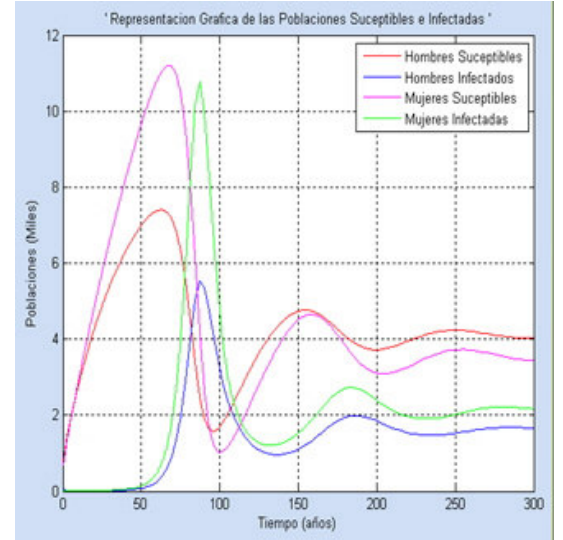


Fig. 2  $\alpha, \varepsilon = 0,07$

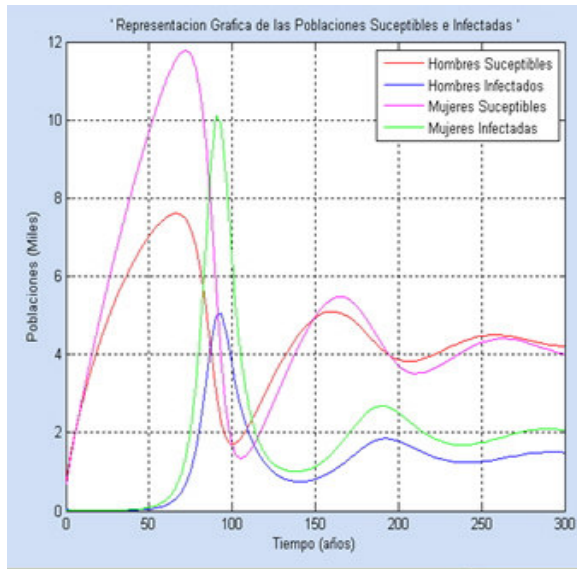


Fig. 3  $\alpha, \varepsilon = 0,08$

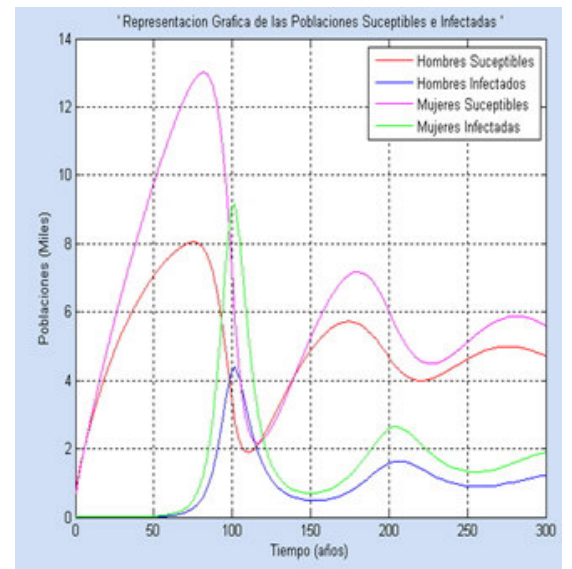


Fig. 4  $\alpha, \varepsilon = 0,10$

## INTERPRETACIÓN

En esta sección se mantienen constantes las tasas de Ingreso a la Población sexualmente activa y las tasas de contagio por personas infectadas, al variar las tasas de mortalidad por la enfermedad; se ha comenzado con una tasa de  $\alpha, \varepsilon = 0,06 = 6\%$  anual, esto quiere decir que el 6% tanto de la población infectada tanto hombres como mujeres, así falleciendo los individuos que contraen la enfermedad del VIH/SIDA; esto presenta que la población de infectados tenga un “pico alto” en su crecimiento entre los 70 y 110 años, después empieza a decrecer hasta estabilizarse, también ocurre que la población susceptible tiene un crecimiento hasta los 120 años y luego comienza a decaer hasta estabilizarse pero la población susceptible está por encima ligeramente de la población de los infectados; esto quiere decir, que la población de infectados se estabiliza al mismo tiempo que la población de susceptibles mas la población de susceptibles es mayor a la población de infectados, y esto se debe que cuando mueren las personas infectadas, ya no pueden seguir interactuando con las personas susceptibles.

Del mismo modo, al cambiar la tasas  $\alpha, \varepsilon = 7\%$ ,  $\alpha, \varepsilon = 8\%$ ,  $\alpha, \varepsilon = 10\%$ , respectivamente se puede apreciar que el comportamiento es similar al primero, con la diferencia que a mayor tasa de mortalidad por la enfermedad; permite que las personas infectadas tenga menos posibilidad de interacción con las personas susceptibles y así contraer la enfermedad del VIH/SIDA.

Con respecto al comportamiento matemático de las graficas, se puede notar que hay una semejanza bien definida que solamente varia en la posición de las graficas, dependiendo de la variación de las tasas de mortalidad por la enfermedad, como se había mencionado, a mayor tasa de contagio hay menor población de infectados y hay una predominancia de la población susceptible, las cuales llegan a estabilizarse a los 150 años aproximadamente iniciado el estudio del comportamiento de la enfermedad del VIH/SIDA.

*Después de haber analizado las tasas fundamentales del modelo matemático con estrategia de control, se puede apreciar la importancia de ciertas tasas para poder mantener controlada la enfermedad en la medida que fuera posible, del mismo modo que en el modelo matemático sin control, se ve la estabilidad en las diferentes tasas del modelo; pero hay que tener en cuenta, que con el coeficiente de control, disminuye la población de infectados y se incrementa la de susceptibles tanto para hombres como para mujeres, teniendo un realce la de hombres debido, que a ellos se le está aplicando la protección. [50].*

## 5.4. Modelo Estrategia de Control ( $w(t)$ función )

Ahora se implementará la estrategia de control mediante una función continua,  $w(t)$ , lo que permitirá una mejor aproximación del comportamiento de la estrategia de control. Esta estrategia de control se representará mediante una función senoidal, es decir, cíclica; con esta función que es continua y diferenciable nos permitirá representar altibajos en la efectividad de la estrategia de control, no se toma el caso lineal debido que a lo largo del tiempo sigue creciendo, o una cuadrática debido que su crecimiento es aún más rápido que la lineal considerando un respectivo acotamiento. Para esta estrategia de control se supondrá que se tiene un nivel de protección constante y que a partir de esta prevalencia va creciendo y decreciendo a través del tiempo con lo que significaría que en temporadas hay mucho más protección que en otras temporadas.

Es decir, matemáticamente se mostrará de esta manera la estrategia de control:  $0 < w(t) \leq 1$

$$w(t) = r + v \cdot \text{sen}(t)$$

Donde:

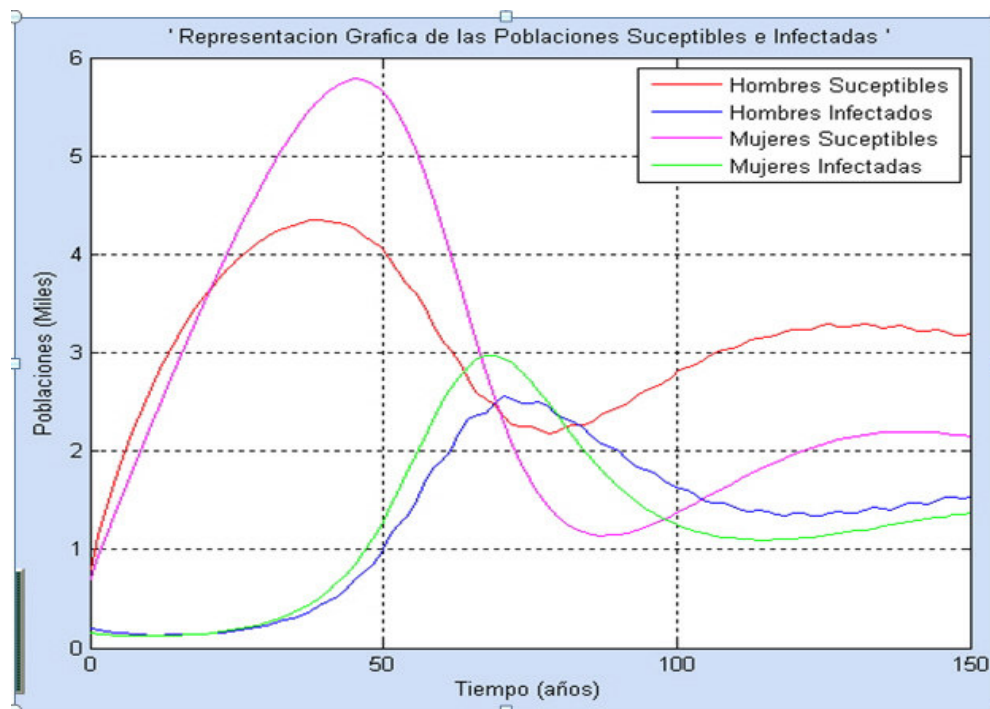
- $r$  : Coeficiente de protección constante.
- $v$  : Coeficiente de protección variable.

$$\left\{ \begin{array}{l} X'_h = \sigma_h H_{NS} - (r + v \cdot \text{sen}(t)) \beta_m Y_m X_h - \mu X_h \\ Y'_h = (r + v \cdot \text{sen}(t)) \beta_m Y_m X_h - \alpha Y_h - \mu Y_h \\ X'_m = \sigma_m M_{NS} - \beta_h Y_h X_m - \mu X_m \\ Y'_m = \beta_h Y_h X_m - \varepsilon Y_m - \mu Y_m \\ X_h(0) = X_o^h \geq 0 \\ Y_h(0) = Y_o^h \geq 0 \\ X_m(0) = X_o^m \geq 0 \\ Y_m(0) = Y_o^m \geq 0 \end{array} \right.$$

donde:  $0 < \alpha, \beta_m, \beta_h, \varepsilon, \mu < 1$  ;  $0 < \sigma_m < 1$  ;  $0 < \sigma_h < 1$   
 $0 \leq r, v < 1 \wedge 0 \leq r + v \leq 1$

A continuación se simulará computacionalmente el modelo matemático con los siguientes datos que permitirá observar el comportamiento de la dinámica de transmisión de la enfermedad. Como se había mencionado no se realizará un análisis cualitativo, solamente un análisis computacional mediante simulación.

$M_{NS}$	=	3500	$H_{NS}$	=	4000
$X_h$	=	800	$X_m$	=	700
$Y_h$	=	200	$Y_m$	=	150
$\sigma_h$	=	0,07	$\sigma_m$	=	0,05
$\beta_h$	=	0,05	$\beta_m$	=	0,035
$\alpha$	=	0,03	$\varepsilon$	=	0,03
$\mu$	=	0,05			
$r$	=	0,50	$v$	=	0,10



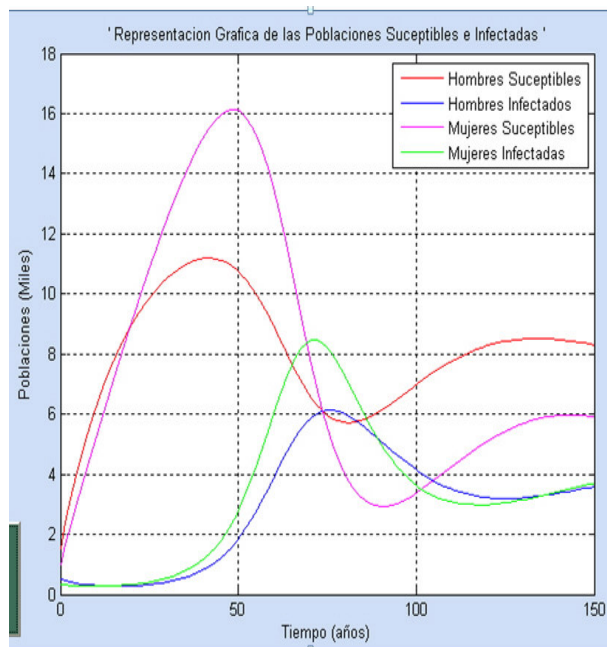
### INTERPRETACIÓN

Como se puede apreciar en la simulación computacional, las poblaciones masculinas tanto de susceptibles como de infectados presentan fluctuaciones con altibajos leves indicado que en ciertas temporadas los hombres susceptibles

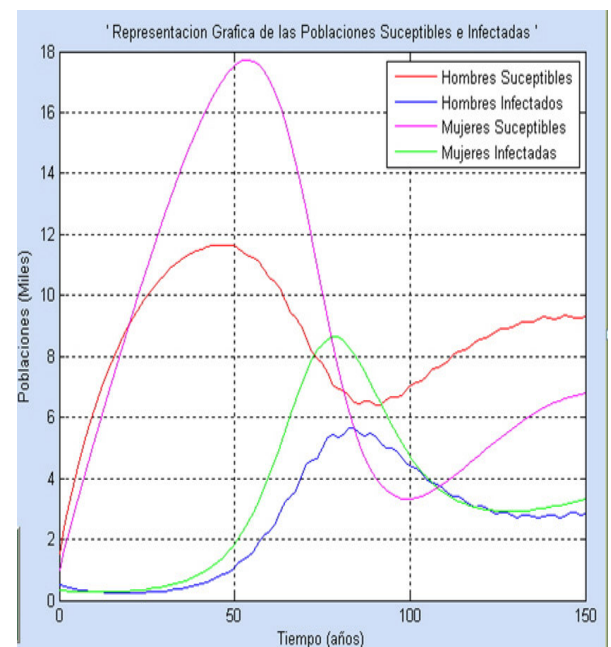
se protegen más que en otras temporadas, esta acción también indica el comportamiento poblacional de las mujeres pues su protección depende directamente de la protección masculina. Actualmente en la sociedad, las estrategias de control siempre se realiza por temporadas, cuando se puede evaluar un alto índice de propagación, esto conduce a aumentar la estrategia de control en la medida que fuera posible para poder tener los resultados más adecuados.

### 5.5. Comparación de los Modelos de Estrategia de Control $w(t)$

$M_{NS}$	=	6000	$H_{NS}$	=	7000
$X_h$	=	1500	$X_m$	=	1000
$Y_h$	=	500	$Y_m$	=	350
$\sigma_h$	=	0,10	$\sigma_m$	=	0,08
$\beta_h$	=	0,02	$\beta_m$	=	0,015
$\alpha$	=	0,03	$\varepsilon$	=	0,03
$\mu$	=	0,05			
$r$	=	0,60	$v$	=	0,10



Estrategia  $w(t)$  constante



Estrategia  $w(t)$  función

## INTERPRETACIÓN

Se ha realizado las respectivas simulaciones mediante las dos variantes de  $w(t)$ , cuando es constante,  $w(t) = r$ , y cuando es una función continua,  $w(t) = r + v \cdot \text{sen}(t)$ , hay que notar que cuando  $v = 0$ , se retorna a la primera variante. Ambas gráficas muestran comportamientos similares a simple vista, pero en verdad, cuando la estrategia de control es una función representa una mejor opción debido que habrá momentos donde la efectividad del método tendrá fuerza por mientras que en momentos descenderá sin quitar fuerza de efectividad, es decir, aunque haya altibajos en el tiempo siempre se mantiene la efectividad de la protección realizada. La diferencia entre ambas gráficas es que en la gráfica de la estrategia de control mediante una función mantiene un nivel más bajo de hombres infectados que cuando es una constante, esto se debe al comportamiento senoidal del método de protección. Después de esta diferencia marcada, que ayuda mucho a la prevención de una posible propagación de la enfermedad se puede ver que cuando es una función se acerca mucho mejor a realidad que presenta el comportamiento de la dinámica de transmisión de la enfermedad.

Los métodos de protección de la enfermedad, como lo es la repartición de preservativos masculinos, y a la vez la información correspondiente para saberlo utilizar con responsabilidad brindan una mejor protección para evitar el contagio de la enfermedad. Este es el objetivo del Modelamiento matemático para poder intentar predecir los mejores momentos donde se puede impulsar mejor las estrategias de control, y así tener mejores resultados para el bienestar de la salud de la población de nuestra sociedad. [41,42,45].

## Capítulo 6

# Simulación Computacional

La simulación computacional permitirá poder encontrar y analizar la solución del modelo matemático de acuerdo a las condiciones iniciales que se introduzca, como el modelo matemático es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, y en muchas ocasiones es complicado hallar la solución analítica de un sistema, recurriremos a los Métodos numéricos para poder encontrar una adecuada solución aproximada que tenga el menor error posible para que pueda considerarse una buena solución.

Entre tantos métodos para hallar una solución numérica, se utilizará el método de aproximación de Runge Kutta para Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de orden cuatro. Y para la programación computacional se implementará en MATLAB, el cual permitirá realizar la codificación del algoritmo del método numérico y a la vez implementar una Interfaz Gráfica para un mejor entendimiento del modelo. [35,36].

### 6.1. Método de Runge-Kutta de Cuarto Orden para Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Sea el sistema de  $m$  ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} &= f(x, u_1, u_2, \dots, u_m) \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} &= f(x, u_1, u_2, \dots, u_m) \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x} &= f(x, u_1, u_2, \dots, u_m) \end{aligned} \tag{6.1}$$

para  $a \leq x \leq b$  con las condiciones iniciales

$$u_1(a) = w_1 ; u_2(a) = w_2 ; u_3(a) = w_3 ; \dots ; u_m(a) = w_m \quad (6.2)$$

El objetivo es conseguir  $m$  funciones  $u_1; u_2; u_3; \dots; u_m$  que satisfagan el sistema de ecuaciones diferenciales y las condiciones iniciales.

El problema de valor inicial

$$y' = f(x, y) \quad , \quad y(a) = y_0 \quad , \quad a \leq x \leq b \quad (6.3)$$

se resuelve utilizando el método de Runge Kutta

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (6.4)$$

donde:

$$\begin{aligned} k_1 &= h \cdot f(x_n, y_n) \\ k_2 &= h \cdot f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 &= h \cdot f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2) \\ k_4 &= h \cdot f(x_n + h, y_n + k_3) \end{aligned}$$

Para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales se generaliza como sigue, formamos una partición regular en el intervalo  $[a, b]$  con  $N$  subintervalos, con puntos  $x_n = a + nh$  donde  $n = 0, 1, \dots, N$  y  $h = \frac{b-a}{N}$

Usamos la notación  $y_{ij}$  para denotar una aproximación a  $u_i(x_j)$  para  $j = 0, 1, \dots, N$  y  $i = 0, 1, \dots, m$ .

Las condiciones iniciales (4.2) se expresan como:

$$y_{1,0}(a) = w_1 ; y_{2,0}(a) = w_2 ; y_{3,0}(a) = w_3 ; \dots ; y_{m,0}(a) = w_m \quad (6.5)$$

Supongamos que calculamos  $y_{1,j} ; y_{2,j} ; y_{3,j} ; \dots ; y_{m,j}$  enseguida obtenemos  $y_{1,j+1} ; y_{2,j+1} ; y_{3,j+1} ; \dots ; y_{m,j+1}$



Para cada  $i = 1, 2, \dots, m$

$$y_{i,j+1} = y_{i,j} + \frac{1}{6}(k_{1,j} + 2k_{2,j} + 2k_{3,j} + k_{4,j})$$

donde:

Para cada  $i = 1, 2, \dots, m$ .

$$k_{1,j} = hf_i(x_j, y_{1,j}, y_{2,j}, \dots, y_{m,j})$$

Para cada  $i = 1, 2, \dots, m$ .

$$k_{2,j} = hf_i(x_j + \frac{1}{2}h, y_{1,j} + \frac{1}{2}k_{1,1}, y_{2,j} + \frac{1}{2}k_{1,2}, \dots, y_{m,j} + \frac{1}{2}k_{1,m})$$

Para cada  $i = 1, 2, \dots, m$ .

$$k_{3,j} = hf_i(x_j + \frac{1}{2}h, y_{1,j} + \frac{1}{2}k_{2,1}, y_{2,j} + \frac{1}{2}k_{2,2}, \dots, y_{m,j} + \frac{1}{2}k_{2,m})$$

Para cada  $i = 1, 2, \dots, m$ .

$$k_{4,j} = hf_i(x_j + h, y_{1,j} + k_{3,1}, y_{2,j} + k_{3,2}, \dots, y_{m,j} + k_{3,m})$$

## 6.2. Algoritmo de Runge-Kutta de Cuarto Orden para Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

*Este algoritmo aproxima la solución del problema de valor inicial*

$$u'_j = f_j(x, u_1, u_2, \dots, u_m) \quad u_j(a) = w_j \quad a \leq x \leq b$$

para  $j = 1, 2, \dots, m$  en  $N + 1$  puntos equidistantes en el intervalo  $[a, b]$ .

**ENTRADA:** Los extremos del intervalo  $a, b$  ( $b > a$ ); número de ecuaciones  $m$ ; número de subintervalos  $N$ ; condiciones iniciales  $w_1, w_2, \dots, w_m$

**SALIDA:** Aproximaciones  $y_j$  a  $u_j(x)$  en los  $N + 1$  valores de  $x$ .

1. Hacer  $h = \frac{b-a}{N}$ ;  $x = a$
2. Para  $j = 1, 2, \dots, m$  hacer  $y_{j,0} = w_j$
3. Para  $i = 0, 1, \dots, N - 1$  hacer pasos del  $a$  al  $b$ 
  - a. Para  $j = 1, 2, \dots, m$  hacer
 
$$k_{1,j} = h f_i(x_j, y_{1,j}, y_{2,j}, \dots, y_{m,j})$$
  - b. Para  $j = 1, 2, \dots, m$  hacer
 
$$k_{2,j} = h f_i(x_j + \frac{1}{2}h, y_{1,j} + \frac{1}{2}k_{1,1}, y_{2,j} + \frac{1}{2}k_{1,2}, \dots, y_{m,j} + \frac{1}{2}k_{1,m})$$
  - c. Para  $j = 1, 2, \dots, m$  hacer
 
$$k_{3,j} = h f_i(x_j + \frac{1}{2}h, y_{1,j} + \frac{1}{2}k_{2,1}, y_{2,j} + \frac{1}{2}k_{2,2}, \dots, y_{m,j} + \frac{1}{2}k_{2,m})$$
  - d. Para  $j = 1, 2, \dots, m$  hacer
 
$$k_{4,j} = h f_i(x_j + h, y_{1,j} + k_{3,1}, y_{2,j} + k_{3,2}, \dots, y_{m,j} + k_{3,m})$$
  - e. Para  $j = 1, 2, \dots, m$  hacer
 
$$y_{i,j+1} = y_{i,j} + \frac{1}{6} (k_{1,j} + 2k_{2,j} + 2k_{3,j} + k_{4,j})$$
  - f. Para  $j = 1, 2, \dots, m$  hacer
 
$$x = a + ih$$
4. Salida  $(x_i, y_{1,j}, \dots, y_{m,j})$
5. PARAR

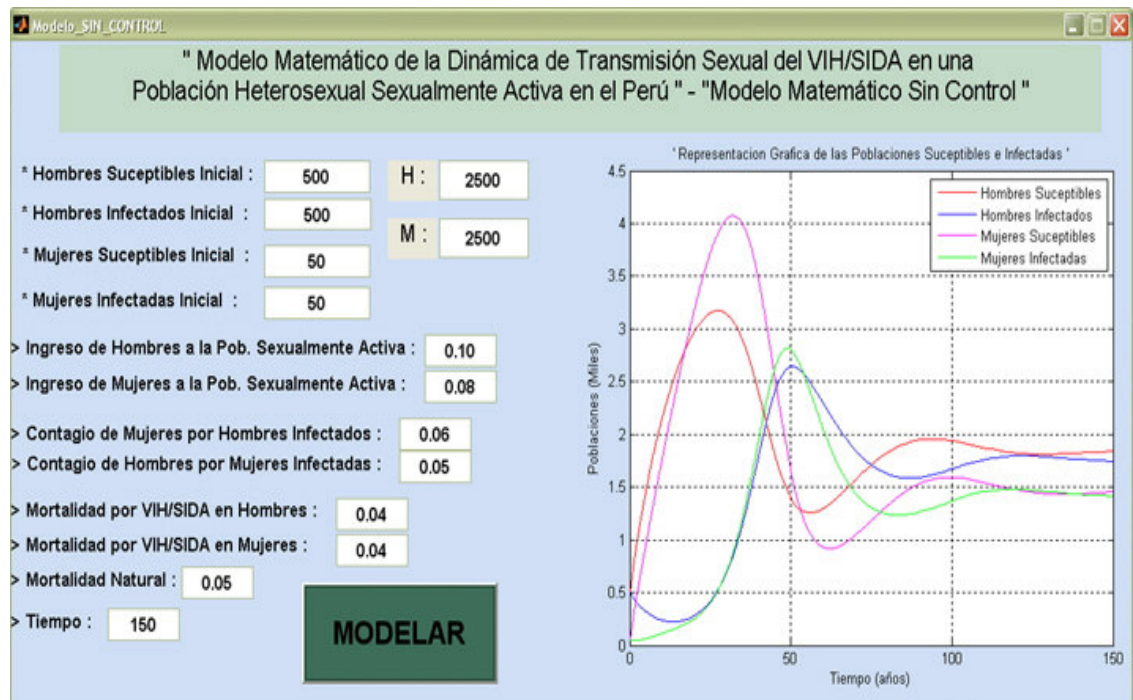
### 6.3. Interfaz Gráfica (GUIDE MATLAB)

Teniendo el algoritmo del Método de Runge Kutta de cuarto orden para Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, procederemos a implementarlo computacionalmente en MATLAB, por lo cual añadiremos una Interfaz Gráfica para una apreciación más sencilla y dinámica del Modelo Matemático con el GUIDE MATLAB.

Presentaremos dos interfaces, debido que uno corresponde al Modelo Matemático Sin Control y el otro corresponde al Modelo Matemático con Estrategia de Control.

#### 6.3.1. GUIDE Modelo Sin Control

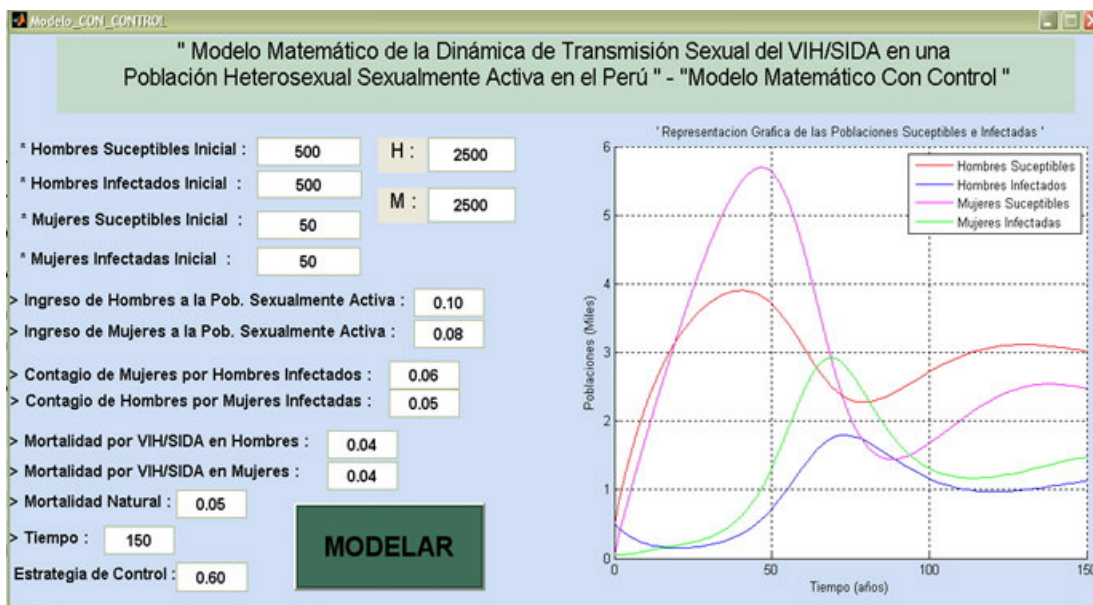
El GUIDE MATLAB, del Modelo Matemático sin Control, permitirá el ingreso sencillo de valores normalizados en los espacios en blanco para poder modelar, y obtener la gráfica resultante de los datos introducidos, permitiendo una adecuada percepción del problema y así, brindando posibles decisiones a tomar.



### 6.3.2. GUIDE Modelo con Estrategia de Control

El GUIDE MATLAB, del Modelo Matemático con Estrategia deControl, permitirá el ingreso sencillo de valores normalizados en los espacios en blanco para poder modelar, y obtener la gráfica resultante de los datos introducidos, permitiendo una adecuada percepción del problema y así, brindando posibles decisiones a tomar.

La presente Interfaz Gráfica con la anterior Interfaz Gráfica son similares, solamente la segunda interfaz contiene un opción para la Estrategia de Control. Cuando esta opción se coloque el valor nulo (cero), la Interfaz gráfica será igual a la primera interfaz gráfica.



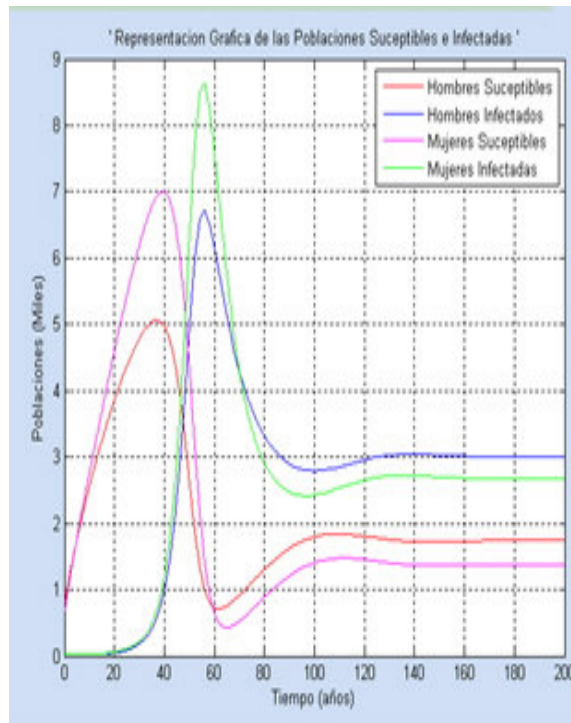
### 6.3.3. Comparación de Ambos Modelos

Ahora se presentará la comparación entre los dos modelos matemáticos, tanto el Modelo Sin Control como el Modelo con Estrategia de Control. Esto permitirá ver como la estrategia de control ayuda a disminuir la población infectada e incrementar la población susceptible a comparación de un modelo donde no hay una manera de contrarrestar la dinámica de contagio.

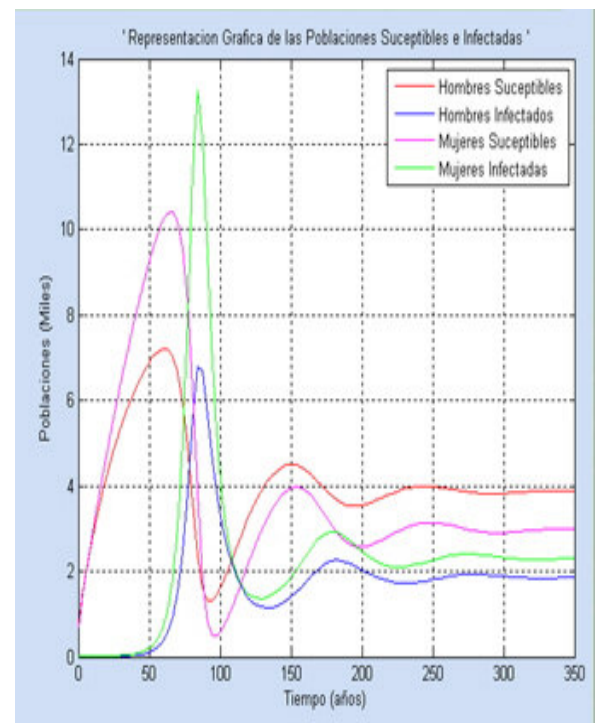
Para lo cual se presentará la representación grafica de los dos Modelos Matemáticos, con los siguientes datos.

$$\begin{array}{ll}
 M_T = 5000 & H_T = 5000 \\
 X_h = 800 & X_m = 700 \\
 Y_h = 30 & Y_m = 25 \\
 \sigma_h = 0,045 & \sigma_m = 0,045 \\
 \beta_h = 0,04 & \beta_m = 0,04 \\
 \alpha = 0,04 & \varepsilon = 0,04 \\
 \mu = 0,022 & w = 0,50
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{Modelo Sin Control : } \mathcal{R}_o^1 = 0,33 & \mathcal{R}_o^2 = 0,18 \\
 \text{Modelo Con Control : } \mathcal{R}_o^1 = 0,17 & \mathcal{R}_o^2 = 0,03
 \end{array}$$



"Modelo Sin Control"



"Modelo con Estrategia de Control"

## Capítulo 7

# CONCLUSIONES

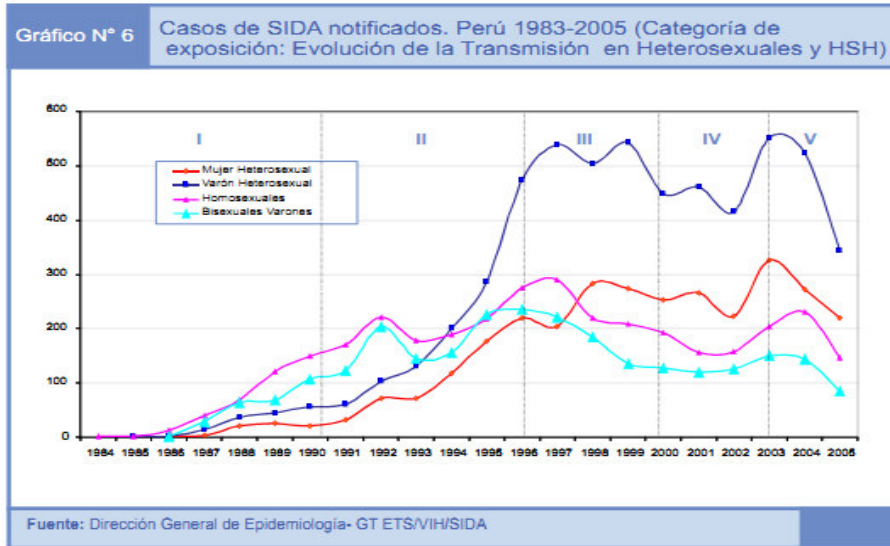
Después de haber analizado los modelos matemáticos epidemiológicos tanto sin control como con estrategia de control, se puede deducir diversas conclusiones con respecto al modelo matemático relacionado con la enfermedad del VIH/SIDA, pero sobre todo como las condiciones que se concluyen del modelo, se asemejan con la realidad de la enfermedad en la sociedad misma dentro de las consideraciones escogidas para crear el modelo matemático. El modelo presentado está comprendido en las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, como se había mencionado todo Modelo Matemático tiene que ser estable como mínimo localmente, y más aun globalmente para que tenga consistencia el Modelo. El Modelo se considera en un tiempo de 300 años para representar la dinámica de la enfermedad en las poblaciones tanto susceptibles como infectadas.

Las consideraciones del Modelo, tiene como esencia las tasas de Ingreso a la Población Sexualmente activa, las tasas de contagio por personas infectadas y las tasas de mortalidad por la enfermedad. Estas tasas brindan las condiciones necesarias para determinar la estabilidad y la buena definición del Modelo Epidemiológico, y la relación que tienen entre sí.

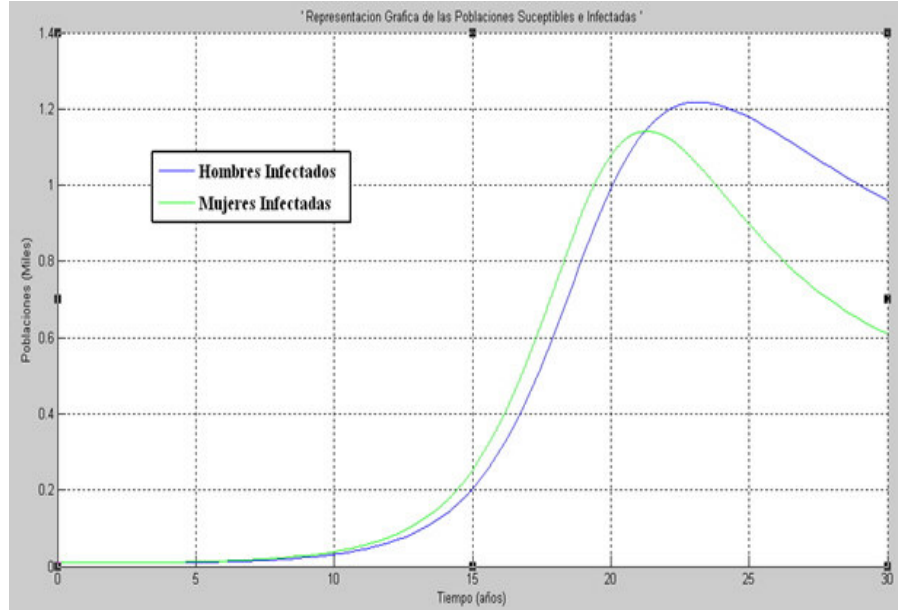
Los dos Modelos Matemáticos presentados permiten ver como se dará la dinámica de transmisión de la enfermedad. El Modelo con Estrategia de Control sería el Modelo utilizado pues tiene una manera de disminuir el contagio cuanto le fuera posible, es decir, cuanto más se emplee métodos de prevención de la enfermedad tanto natural como no natural. De esta manera hay un medio de protección en la sociedad para las personas que son susceptibles a contraer la enfermedad por la vía sexual en contacto heterosexual.

Ahora se presentará el Modelo Matemático para las Poblaciones de Susceptibles e Infectados sin diferencias hombres y mujeres. Y se hará una comparación

con los datos descriptivos del MINSA con respecto a las personas infectadas con el VIH/SIDA.



"Datos Descriptivos"



"Modelo Matemático"

## 7.1. Conclusiones Finales

- La comparación de los datos descriptivos recogidos por la muestra que ha sido elaborada por el MINSA, tiene una referencia similar al Modelo Matemático para dos poblaciones, hombres y mujeres infectados, teniendo en cuenta el análisis de la población infectada (casos con VIH/SIDA). La grafica del Modelo muestra la aproximación a los datos descriptivos indicando como sería el comportamiento para los siguientes años, y notando que a partir de los 30 años la población infectada comienza a decrecer; un detalle muy importante es la diferencia de los datos descriptivos y de un Modelo Matemático en cuanto a sus graficas que representan el comportamiento de las poblaciones infectadas; en el caso de los datos se analiza de las muestras realizadas en cada año, lo cual permite realizar estrategias para el año siguiente y así variar la tasa de protección, las tasas de contagio y de mortalidad también que una debilidad es que después del último año no se puede saber cómo es el comportamiento hasta que se recoja y analice los datos correspondientes; por otro lado, en cuanto al Modelo Matemático su gran fortaleza es la simulación a una cierta cantidad de tiempo que se determina para analizar su comportamiento durante ese tiempo, pero una debilidad es que cuando se utiliza el Modelo es usa condiciones iniciales, es decir, tiene tasas iniciales que se supondrán que se mantendrán constantes durante toda la simulación. Por ende, se puede apreciar las diferencias de las dos graficas mostradas, pero también con una similitud de ambas en cuanto a su comportamiento epidemiológico.
- El Modelo Matemático genérico donde intervienen solamente dos poblaciones (Susceptibles e Infectados) siendo la expresión del Modelo Matemático presentado para cuatro poblaciones (Susceptibles Hombres, Mujeres e Infectados Hombres, Mujeres) muestran un mismo análisis que los datos descriptivos recopilados por el MINSA, con la diferencia de los años que permite ver el comportamiento de la enfermedad a través de los años.
- El Modelo Matemático que se ha presentado tiene un mejor análisis, debido que considera las cuatro poblaciones cada uno con su propio comportamiento epidemiológico, permitiendo una perspectiva más general de la situación de cada población de individuos.
- El Modelo Matemático con Estrategia de Control cuando  $w = 0$ , es el Modelo Matemático Sin Control debido que ha sido una perturbación de este modelo.
- El Modelo Matemático con Estrategia de Control permite una gran disminución en los índices de contagio, así la población susceptible tiende a ser mayor que en el Modelo sin Control, logrando el objetivo principal del presente trabajo.



- Las Tasas de Ingreso a la Población Sexualmente Activa, de Contagio por personas Infectadas y de Mortalidad por la enfermedad es la esencia del Modelo, debido que son las consideraciones fundamentales para que el Modelo represente la dinámica de la enfermedad entre susceptibles e infectados.
- Cuanto más sea la tasa de Ingreso, habrá más probabilidad de que haya contagio con personas infectadas, y a la vez si las tasas de contagio son altas permitirá que la población infectada con la enfermedad sea mayor de la población susceptible y con el tiempo disminuirla considerablemente.
- Cuanta más alta sea la tasa de mortalidad por la enfermedad ayudaría a la estabilidad de la población susceptible, aún si las tasas de ingreso y de contagio son de un nivel medio en las poblaciones susceptibles e infectadas, pero la idea no es que la tasa de mortalidad por la enfermedad sea alta debido que se intenta defender la vida de los individuos.

*En sí, es una de las metas del Modelo intentar predecir la dinámica de la transmisión heterosexual tanto sin control para ver qué sucedería si no se interviene, y como con una estrategia de control, y ver en cuanto se reduce de acuerdo a la tasa de protección hacia los hombres permitiendo que la población susceptible pueda mantenerse en mayor medida que la infectada a través del tiempo que se considere, y así, poder tomar decisiones con respecto a la enfermedad en cuanto a su dinámica y como evitar el contagio en la manera que fuera posible.*

Después de haber brindado las conclusiones del Modelo Matemático, sobre la efectividad de la estrategia de control, sea natural o no natural, en la medida de disminuir el contagio heterosexual de la enfermedad del VIH/SIDA, y teniendo en cuenta ambos métodos, y la significancia que tienen en los individuos para su protección contra las E.T.S., se puede concluir de los métodos lo siguiente:

- La forma más segura de evitar el contagio de una enfermedad de transmisión sexual es abstenerse de tener relaciones sexuales o estar en una relación monógama, a largo plazo, con una pareja que ya se sometió a las pruebas para detectar si tiene una E.T.S. y que usted sepa que no está infectada.
- Para aquellas personas que tienen comportamientos sexuales que las colocan en riesgo de adquirir E.T.S., el uso correcto y constante del condón de látex para hombres puede reducir los riesgos de transmisión de estas enfermedades. Sin embargo, ningún método de protección es 100 % efectivo y el uso del condón no puede garantizar protección absoluta contra las enfermedades de transmisión sexual.

## 7.2. Comentario

Por otro lado, teniendo un alto índice de protección beneficiaria mucho para el evitar el contagio del VIH/SIDA, lo cual analizando dentro del Modelo y la dinámica de transmisión, y la propagación de la misma sería lo más adecuado; pero si analizamos en un horizonte más amplio, visto fuera del Modelo Matemático Epidemiológico; qué significaría tener un alto índice de protección en la estrategia de control en la dinámica de transmisión del VIH/SIDA.

Actualmente el método más utilizado es el no natural, promovido por la sociedad a nivel mundial por su efectividad, sencillez, comodidad, bajo precio, etc. Pero qué es lo sucedería si la protección es casi del 100%; teniendo en cuenta que la reproducción de la especie humana es mediante el acto sexual heterosexual, vista de manera natural, esto tendería que la población disminuya considerablemente debido que no habría natalidad en los peores de los casos; también que el uso de los preservativos también posee efectos secundarios en el hombre lo cual no sería lo indicado para su protección integral, y no solamente en su vida sexual. El método natural aunque sea más efectivo que el no natural, implica un mayor “control personal” en vida sexual activa, lo cual la tendencia en la sociedad no se tiene actualmente. Por lo cual siempre se inclina a los métodos no naturales para evitar el contagio de alguna E.T.S. (en nuestro caso el VIH/SIDA), y la prevención del embarazo no deseado. [50,51].

Finalmente, el estudio de la dinámica de transmisión del VIH/SIDA es un problema muy complejo debido a las interrogantes que uno se puede plantear para construir un modelo matemático, pero cuanto más variables se pueda considerar será mucho mejor el modelo matemático. Las respuestas y sus debidas interpretaciones que permiten el Modelo se consideran a raíz de las preguntas iniciales que uno tiene al formularse; la esencia del modelo contiene la percepción del problema que se intenta modelar, en este caso el VIH/SIDA. Después de deducir las conclusiones epidemiológicas del modelo y que nos permiten tener una mejor perspectiva del problema, también nacen nuevas preguntas e interrogantes, lo cual fomentaría el continuo desarrollo de la investigación, en mi consideración personal a veces las preguntas más amplias como las antropológicas y las sociales ayudan mucho para tener una mejor concepción de los problemas que afectan a la sociedad, y más aún, a la Humanidad; y así, investigar y desarrollar cada vez más Modelos matemáticos mucho más complejos y detallados para los problemas que existen en la actualidad. [52,53,54,55,56,57].

# Bibliografía

- [1] MINISTERIO DE SALUD. *Presentación: Infección de Transmisión Sexual y SIDA*. [citado 24 de setiembre de 2013].  
Disponible: [http://www.minsa.gob.pe/portada/est\\_san/vih.htm](http://www.minsa.gob.pe/portada/est_san/vih.htm)
- [2] ONUSIDA. *Informe de ONUSIDA para el día mundial del SIDA*. UNAIDS 2013. pp.6-11.
- [3] GALA GONZÁLEZ, ÁNGELA, ET AL. *Dinámica de adquisición del VIH en su dimensión social, ambiental y cultural*. Revista Cubana de Medicina Tropical 59.2 (2007): 0-0.
- [4] IZAZOLA LICEA JOSÉ, AVILA FIGUEROA CARLOS, CÁCERES PALACIOS CARLOS, CAMARA BILALI, NUNES ANDRÉ, SAAVEDRA LÓPEZ JORGE, SIERRA MANUEL, VÍQUEZ ABEL. *Situación epidemiológica y económica del SIDA en América Latina y el Caribe*. Fundación Mexicana para la Salud. 1998.
- [5] CUETO, MARCOS. *Culpa y Coraje: Historia de las Políticas sobre el VIH/Sida en el Perú*. Vol. 7. Consorcio de investigación económica y social, 2001.
- [6] MINISTERIO DE SALUD. *Análisis de la Situación Epidemiológica del VIH /SIDA en el Perú*. Ministerio de Salud, 2006. pp. 25-27, 42-47.
- [7] ARÉVALO, MARÍA TERESA VARELA, ISABEL CRISTINA SALAZAR TORRES, AND DIEGO CORREA SÁNCHEZ. *Adherencia al tratamiento en la infección por VIH/SIDA. Consideraciones teóricas y metodológicas para su abordaje*. Acta colombiana de psicología 11.2 (2008):101-13.
- [8] MENDOZA, WALTER, KELIKA KONDA, AND ANDRÉS LESCANO. *Nuevas evidencias para las políticas y programas de salud en VIH/SIDA e infecciones de transmisión sexual en el Perú*. Universidad Peruana Cayetano Heredia, Facultad de Salud Pública y Administración Carlos Vidal Layseca, 2007.
- [9] GRIMBERG, MABEL. *Género y VIH/SIDA. Un análisis de los diferenciales de género en la experiencia de vivir con VIH*. Cuad Med Soc 78.1 (2000): 41-54.

- [10] MINISTERIO DE SALUD, DIRECCIÓN GENERAL DE EPIDEMIOLOGÍA, RED NACIONAL DE EPIDEMIOLOGÍA. *Boletín Epidemiológico: Situación Epidemiológica del VIH /SIDA en el Perú*. Ministerio de Salud, 2012.
- [11] MINISTERIO DE SALUD. *Situación del VIH /SIDA en el Perú*. Ministerio de Salud, 2009.
- [12] PLIEGO PLIEGO, EMILENE. *Modelos Epideomológicos de Enfermedades Virales Infecciosas*. Benémerita Universidad Autónoma de Puebla. 2011.
- [13] MURRAY J.D. *Mathematical Biology I : An Introduction*. Springer. Third edition. vol 17. 2001.
- [14] GARCÍA-SÁNCHEZ, INÉS. "Diferencias de género en el VIH/SIDA." *Gaceta Sanitaria* 18 (2004): 47-54..
- [15] MURRAY J.D. *Mathematical Biology II: Spatial models and medical applications*. Springer. Third edition. vol 18. 2003.
- [16] BARRIOS GINART JORGE, MARRERO SEVERO AYMÉE, BAGUER DÍAZ-ROMAÑACH MARTA, DE ARAZOZA RODRÍGUEZ HÉCTOR. *Estimación de parámetros en modelos epidemiológicos de VIH/SIDA*. *Revista de Matemática, Teoría y aplicaciones* 2010. CIMPA - UCR.
- [17] LIZANA MARCOS. *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Departamento de Matemáticas*. Facultad de Ciencias. Universidad de Los Andes. 2000.
- [18] KUANG YANG. *Basic Properties of Mathematical Population Models*. Department of Mathematics and Statistics, Arizona State University, 2002.
- [19] LÓPEZ CRUZ, ROXANA. *Modelos Matemáticos sobre el Comportamiento del Virus VIH*. *Notas del Instituto de Investigación en Ciencias Matemáticas*. 2000.
- [20] RODRIGUEZ SALINAS, J. J. *Modelos Matemáticos del SIDA*. Universidad Autónoma de Nuevo León. 2001.
- [21] GONZALEZ PA, QUINTERO JR. *Un modelo de VIH-SIDA con reinfección*. *Matemáticas. Enseñanza Universitaria. Revista de la ERM*, 2002.
- [22] JORGE O. ALARCÓN, MÓNICA PUN, CÉSAR GUTIÉRREZ, ÁLVARO WHITTEMBURY, ROMINA TEJADA, LUIS SUÁREZ, GUSTAVO ROSELL, ANNICK BÓRQUEZ, PALOMA CUCHI. *Estimación y Análisis de la Incidencia del VIH en Población adulta del Perú: Resultados de la Aplicación del Modelo Matemático MoT*. *Revista Peruana de Medicina Experimental y Salud Publica* 2012.
- [23] MESA MAZO M, VERGAÑO SALAZAR JUAN, SANCHEZ BOTERO CLAUDIA, MUÑOZ LOAIZA ANIBAL. *Modelo matemático para la dinámica de transmisión del VIH/SIDA en una población sexualmente activa*. Universidad de Quindío, Armenio, Colombia. 2010.

- [24] SIMON VIVIANA, DAVID HO, QUARRAISHA ABDOOL KARIM. *HIV/AIDS epidemiology, pathogenesis, prevention, and treatment*. Division of Infectious Disease, Lancet Infect Dis. University, Cleveland, OH, USA. 2006.
- [25] LÓPEZ CRUZ, ROXANA. *STRUCTURED SI EPIDEMIC MODELS WITH APPLICATIONS TO HIV EPIDEMIC*. Arizona State University. pp. 27-45. 2006.
- [26] ESTRADA B. HERNÁN, MANILLA P. IGNACIO. *Estudio de un Modelo Matemático para la Propagación del SIDA*. Rev. Colombia Ciencias. 19 (72). pp. 107-116. 1994.9
- [27] MONZÓN PABLO. *Notas sobre estabilidad de sistemas dinámicos*. Curso de actualización. 2003.
- [28] IBÁÑEZ SIVERA JAVIER, MARTINEZ VÁSQUEZ JUAN, NICOLÁS GARCÍA JAVIER. *Breve estudio de la Estabilidad y Criterios de Estabilidad en Sistemas Continuos*. ETSII, 2005.
- [29] P. VAN DEN DRIESSCHE, JAMES WATMOUGH. *Further Notes on the Basic Reproduction*. Department of Mathematics and Statistics. Canada.
- [30] CASTILLO CHAVEZ CARLOS, FENGY ZHILAN, HUANGZ WENZHANG. *On the Computacion of  $\mathfrak{R}_o$  and its role on Global Stability*. 2000.
- [31] O. DIEKMANN, J.A.P. HEESTERBEEK, M.G. ROBERTS. *The Construction of next-generation matrices for compartmental epidemic models*. Journal of Royal Soc. Interface 2010.
- [32] DE LA FUENTE O'CONNOR JOSÉ LUIS. *Valores y Vectores Propios*. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales, Universidad Politécnica de Madrid. 2009.
- [33] DOCENTES. *Valores y Vectores Propios*. Departamento de Matemáticas CSI/ITESM.2009.
- [34] GUZMAN NAVARRO RICARDO MIGUEL. *Algebra Lineal*. Universidad de Córdoba, Departamento de Matemáticas. 2003.
- [35] BURDEN L. RICHARD, FAIRES DOUGLAS. *Análisis Numérico*. Ediciones Paraninfo. 2002.
- [36] CHAPRA STEVEN, CANALE RAYMOND. *Numerical Methods for engineers*. Mc Graw Hill. 2006.
- [37] TEBIT DENIS M., ERIC J ARTS. *Tracking a century of global expansion and evolution of HIV to drive understanding and to combat disease*. Division of Infectious Disease, Lancet Infect Dis. University, Cleveland, OH, USA. 2011.

- [38] PADIAN NANCY S., MCCOY SANDRA I, ABDOOL KARIM SALIM S, NINA HASEN, KIM JULIA, BARTOS MICHAEL, KATABIRA ELLY, BERTOZZI STEFANO M., SCHWARTLÄNDER BERNHARD, COHEN MYRON S. *HIV prevention transformed: the new prevention research agenda* . Division of Infectious Disease, Lancet Infect Dis 2011. University, Cleveland, OH, USA.
- [39] BASIL DONOVAN, MICHAEL W ROSS. *Preventing HIV: determinants of sexual behaviour*. Division of Infectious Disease, Lancet Infect Dis. University, Cleveland, OH, USA. 2000.
- [40] REKART MICHAEL L.. *Sex-work harm reduction*. Division of Infectious Disease, Lancet Infect Dis 2005. University, Cleveland, OH, USA.
- [41] GEETA RAO GUPTA, JUSTIN O PARKHURST, JESSICA A OGDEN, PETER AGGLETON, AJAY MAHAL. *Structural approaches to HIV prevention*. Division of Infectious Disease, Lancet Infect Dis 2008. University, Cleveland, OH, USA.
- [42] MINISTERIO DE SALUD. *GUÍA NACIONAL DE CONSEJERÍA EN ITS/VIH Y EL SIDA*. Ministerio de Salud, 2006.
- [43] SITRUK-WARE REGINE, NATH ANITA, MISHELL DANIEL R. *Contraception technology: past, present and future*. ELSEVIER, 2012.
- [44] PADIAN NANCY S., BUVÉ ANNE, BALKUS JENNIFER, SERWADDA DAVID, CATES WARD. *Biomedical interventions to prevent HIV infection: evidence, challenges, and way forward* . Division of Infectious Disease, Lancet Infect Dis 2008. University, Cleveland, OH, USA.
- [45] MINISTERIO DE SALUD, FONDO DE POBLACIÓN DE LAS NACIONES UNIDAS-UNFPA. *PERÚ: Análisis situacional y diagnóstico de necesidades en torno al acceso a condones masculinos y femeninos*. Ministerio de Salud, 2009.
- [46] RICHARD A. CROSBY, Sarah Bounse. *Condom effectiveness : where are we now?*. CSIRO PUBLISHING, Sexual Health , 2012.
- [47] SANDERS STEPHANIE A., YARBER WILLIAM L., KAUFMAN ERIN L. *Condom use errors and problems : a global view*. CSIRO PUBLISHING, Sexual Health, 2012.
- [48] PADIAN NANCY S., BUVÉ ANNE, BALKUS JENNIFER, SERWADDA DAVID, CATES WARD. *Biomedical interventions to prevent HIV infection: evidence, challenges, and way forward* . Division of Infectious Disease, Lancet Infect Dis 2008. University, Cleveland, OH, USA.
- [49] CENTROS PARA EL CONTROL Y LA PREVENCIÓN DE ENFERMEDADES NCHSTP - DIVISIONES PARA LA PREVENCIÓN DE VIH/SIDA. *Condomes de látex para hombres y Enfermedades de Transmisión Sexual*. Institutos Nacionales de Salud (NIH), en colaboración con los Centros para el Control

y la Prevención de Enfermedades (CDC), la Administración de Drogas y Alimentos de EE.UU. (FDA) y la Agencia de los Estados Unidos para el Desarrollo Internacional (USAID), 2000.

- [50] COMITÉ INDEPENDIENTE ANTISIDA. *¿Por qué los preservativos no protegen contra el SIDA?*. Comité Independiente Anti-Sida (CIAS), 2003.
- [51] PABLO VI. *Humanae Vita*. Editorial VATICANO, 1968.
- [52] JUAN PABLO II. *Redemptor hominis*. Editorial VATICANO, 1979.
- [53] JUAN PABLO II. *Evangelium Vitae*. Editorial VATICANO, 1995.
- [54] JUAN PABLO II, VITORIO MESSORI. *Cruzando el umbral de la Esperanza*. Plaza & Janés Editores, S.A. 1994.
- [55] IGLESIA CATÓLICA. *Catecismo de la Iglesia Católica*. Editorial VATICANO, 1993.
- [56] LA FAMILIA, P. C. P. *VADEMECUM* . Editorial VATICANO, 1997.
- [57] LA FAMILIA, P. C. P. *Sexualidad humana: verdad y significado*. Orientaciones educativas en familia, 8. 1996