UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

E.A.P. Computación Científica

DINÁMICA DEL CONTROL BIOLÓGICO BASADO EN UN MODELO DE CADENA ALIMENTICIA CON TRES NIVELES TRÓFICOS

TESIS

Para Optar el Título Profesional de

Licenciado en Computación Científica

AUTOR

Jhelly Reynaluz Pérez Núñez

Lima – Perú

2014

DINÂMICA DEL CONTROL BIOLÓGICO BASADO EN UN MODELO DE CADENA ALIMENTICIA CON TRES NIVELES TRÓFICOS

Jhelly Reynaluz Pérez Núñez

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas, de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Computación Científica.

Aprobada por:

Dr. Renato Mario Benazic Tomé
Presidente

Dr. Luis Enrique Carrillo Díaz
Miembro

Roxana López Cruz, Ph.D.
Miembro Asesor

LIMA - PERÚ
Noviembre - 2014

FICHA CATALOGRÁFICA

PÉREZ NÚÑEZ, JHELLY REYNALUZ

Dinámica del Control Biológico Basado en un Modelo de Cadena Alimenticia con Tres Niveles Tróficos, (lima) 2014.
XII, 132 p., 29.7 cm, (UNMSM, Licenciado, Computación Científica, 2014).
Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Facultad de Ciencias Matemáticas.
1. Computación Científica I. UNMSM/FCM II. Título (Serie).

En matemáticas uno no entiende las cosas, se acostumbra a ellas.

John Von Neuman

Dedicatoria

Esta tesis se la dedico a Dios quién supo guiarme por el buen camino, dándome fuerzas para continuar y no desmayar ante los problemas que se me presentaban, enseñándome a encarar las adversidades y salir adelante.

A mis padres por su apoyo, consejos, compresión, paciencia y amor. Ellos son las joyas más preciosas que tengo en la vida, mi fuerza, mi motivo de superación, mi coraje para conseguir mis objetivos. Gracias por creer en mí y brindarme todo su amor estando siempre a mi lado, los Amo.

A mis hermanos Liz y José, porque este trabajo también es suyo ya que han compartido conmigo el inicio de esta historia, gracias por su cariño, el apoyo incondicional por estar siempre presentes, acompañándome y dándome fuerzas cuando me sentía desfallecer, los amo hermanos estoy muy orgullosa de ustedes.

A tu paciencia y comprensión, preferiste sacrificar tu tiempo para que yo pudiera cumplir con el mío. Por tu bondad y sacrificio me inspiraste a ser mejor para ti, ahora puedo decir que esta tesis lleva mucho de ti, gracias por estar siempre a mi lado.

Agradecimientos

Gracias a esas personas importantes en mi vida, que siempre estuvieron listas para brindarme toda su ayuda, ahora me toca regresar un poquito de todo lo inmenso que me han otorgado. Con todo mi cariño está tesis se las dedico a ustedes: Reyna I. Núñez Segura, Jose S. Pérez Cubas, Liz A. pérez Núñez, Jose C. Pérez núñez, Nilton A. García Hilares, Roxana López Cruz, Ph.D.

A mi familia y amigos que siempre estuvieron ahí conmigo: Nelva núñez, Marino Núñez, Lindaura Segura (Abuelita), Enrique Núñez (Abuelito), Porfirio pérez (Abuelito), Luz Pérez, Andrea Barreto, Mayra Tocto, Margarita Morales, Judith Delgado, Jose Alcalá, Miguel Guerra, Aladino Rabanal, Moisés guerra, Carlos Mendoza. Muchas gracias.

A mi princesa hermosa Luciana Pérez y a mi dos Angeles que desde el cielo me guía mamita Olinda Cubas y Jenny Pérez.

A mis profesores que en este andar por la vida, influyeron con sus lecciones y experiencias en formarme como una persona de bien y preparada para los retos que pone la vida, a todos y cada uno de ellos les dedico cada una de estás páginas de mi tesis.

Con todo mi cariño y mi amor para las personas que hicieron todo en la vida para que yo pudiera lograr mis sueños, por motivarme y darme la mano cuando sentía que el camino se terminaba, a ustedes por siempre mi corazón y mi agradecimiento.

Resumen

DINÁMICA DEL CONTROL BIOLÓGICO BASADO EN UN MODELO DE CADENA ALIMENTICIA CON TRES NIVELES TRÓFICOS

Jhelly Reynaluz Pérez Núñez

Noviembre - 2014

Asesora	:	Roxana López Cruz, Ph.D.
Título Obtenido	:	Licenciado en Computación Científica.

En esta tesis se estudia la dinámica del control biológico mediante un modelo matemático de cadena alimenticia simple de tres niveles tróficos. Este modelo matemático esta basado en un modelo depredador presa con respuesta funcional Holling tipo II razón dependiente, incluyendo un depredador superior para obtener un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias. Para el cual se estudia la existencia y unicidad, invarianza y acotación de las soluciones.

La dinámica del control biológico es estudiada de forma local y asintótica, analizando las condiciones para la coexistencia de las tres especies así como también los escenarios de extinción total y parcial del sistema, de donde vemos cuando tiene o no tiene éxito el control biológico.

Los resultados obtenidos fueron contrastados con sus respectivas simulaciones realizadas en un programa desarrollado en la tesis el cual aproxima las soluciones utilizando el método de Runge - Kutta de cuarto orden.

PALABRAS CLAVE: DEPREDADOR - PRESA.
CADENA ALIMENTICIA.
CONTROL BIOLÓGICO.
ESCENARIOS DE EXTINCIÓN.
ESTABILIDAD ASINTÓTICA.
RUNGE-KUTTA.

Abstract

BIOLOGICAL CONTROL DYNAMIC USING A CHAIN FOOD MODEL WITH THREE TROPHIC LEVELS

Jhelly Reynaluz, Pérez Núñez

November - 2014

Advisor	:	Roxana López Cruz, Ph.D.
Obtained Title	:	Degree in Scientific Computing.

In this work, the dynamics of biological control is studied using a mathematical model of simple food chain of three trophic levels. This mathematical model is based on a predator prey model with Holling type II functional response rate dependent, including a top predator described by a system of three ordinary differential equations. We study the existence and uniqueness, invariance and boundedness of solutions.

We study the local and asymptotical behavior of the system and analize the conditions for the coexistence of the three species. We also analize the different scenarios of the total and partial extinction in the system, checking if the biological control has or not success.

The results were compared with their respective simulations developed for this work, which approximates the solutions using the Runge - Kutta fourth order.

KEYWORDS: PREDATOR - PREY.
FOOD CHAIN.
BIOLOGICAL CONTROL.
SCENARIOS OF EXTINCTION.
ASYMPTOTIC STABILITY.
RUNGE-KUTTA.

Tabla de Contenidos

Resumen vi

Abstract vii

Tabla de Contenidos viii

Lista de Figuras x

1. Preliminares 4
- 1.1. Nociones de análisis matemático . . . 4
  - 1.1.1. Propiedad arquimediana de los números reales . . . 4
  - 1.1.2. Límites y continuidad . . . 4
  - 1.1.3. Límite superior e inferior . . . 5
- 1.2. Ecuaciones diferenciales ordinarias . . . 9
  - 1.2.1. Problemas de valor inicial . . . 9
  - 1.2.2. Existencia y unicidad . . . 10
  - 1.2.3. Sistema de EDO's lineales y no lineales . . . 12
- 1.3. Análisis de estabilidad . . . 15
  - 1.3.1. Criterio de Routh-Hurwitz . . . 15
  - 1.3.2. Estabilidad de sistemas no lineales . . . 18

2. Modelo de cadena alimenticia con tres niveles tróficos **20**
- 2.1. Modelos depredador-presa . . . 20
- 2.2. Planteamiento del modelo de cadena alimenticia con tres niveles tróficos . . . 23

3. Análisis cualitativo de las soluciones **27**
- 3.1. Dominio y extensión del dominio de las F_i . . . 27
- 3.2. Existencia y unicidad de las soluciones . . . 29
- 3.3. Positividad y acotación de las soluciones . . . 30

4. Dinámica del control biológico **34**
- 4.1. Análisis de la estabilidad . . . 34
  - 4.1.1. Existencia de E_c punto crítico interior a Ω . . . 34
  - 4.1.2. Estabilidad local del punto crítico E_c . . . 37
  - 4.1.3. Inestabilidad local del punto crítico E_c . . . 49
- 4.2. Escenarios de extinción . . . 53
- 4.3. Sensibilidad a las condiciones iniciales . . . 74
  - 4.3.1. Singularidades (puntos críticos) . . . 79
  - 4.3.2. Matriz Jacobiana . . . 83
  - 4.3.3. Estabilidad de las singularidades . . . 85

5. Simulaciones **102**
5.1. Método de Runge-Kutta de cuarto orden . . . 103
5.2. Escenarios de extinción . . . 106
5.3. Sensibilidad a las condiciones iniciales . . . 111

6. Conclusiones **119**

A. Códigos en MatLab® **120**
A.1. Interface . . . 120
A.2. Función RK4 . . . 129
A.3. función f . . . 130

Bibliografía **131**

Lista de Figuras

1.1. Función oscilante periódica con algunos puntos de la sucesión (t_n). 8

4.1. Existencia de c_2^* 48
4.2. Región estable para E_c 48
4.3. Rango de los parámetros para los escenarios de extinción 73
4.4. Lado izquierdo $x = y = 0, z \geq 0$, lado derecho $y = z = 0, x \geq 0$. 75
4.5. Región Λ. 75
4.6. Gráfica del $Dom(F)$ 75
4.7. Cambio de coordenadas de (x, y, z) a (u, y, v). 77
4.8. Singularidades en las coordenadas (u, y, v). 82
4.9. Singularidades en las coordenadas (x, y, v). 94

5.1. Desarrollo de la interface de usuario GUIDE - MATLAB R2010a 105
5.2. Codificación de la gráfica de la simulación 105
5.3. Parámetros y condiciones iniciales para simular el Teorema 4.1 106
5.4. Soluciones del sistema (2.11) con los datos de la Figura 5.3 106
5.5. Parámetros y condiciones iniciales para simular el Teorema 4.2 107
5.6. Soluciones del sistema (2.11) con los datos de la Figura 5.5 107
5.7. Parámetros y condiciones iniciales para simular el Teorema 4.3 108
5.8. Soluciones del sistema (2.11) con los datos de la Figura 5.7 108
5.9. Parámetros y condiciones iniciales para simular el 1° caso del Teorema 4.4 . 109
5.10. Soluciones del sistema (2.11) con los datos de la Figura 5.9 109
5.11. Parámetros y condiciones iniciales para simular el 3° caso del Teorema 4.4 . 110
5.12. Soluciones del sistema (2.11) con los datos de la Figura 5.11 110
5.13. Primeros parámetros para mostrar la sensibilidad a las condiciones iniciales 111
5.14. Condiciones iniciales, en (a) coexistencia y en (b) extinción total 111
5.15. Soluciones del sistema (2.11) con condición inicial $(0.34, 0.04, 0.07)$ 111
5.16. Ciclos heteroclinos para el sistema (2.11) vistos en la forma $(x(t), y(t), z(t))$ 112
5.17. Extinción total del sistema (2.11) 112
5.18. Otros parámetros para mostrar la sensibilidad a las condiciones iniciales . . 113
5.19. Condiciones iniciales para la coexistencia 113
5.20. Estabilidad asintótica en $E_c = (0.6692, 0.1326, 0.0146)$ 113
5.21. Estabilidad asintótica en E_c vista en la forma $(x(t), y(t), z(t))$ 114
5.22. Estabilidad asintótica en E_c vista en la forma $(x(t), y(t), 0)$ 114
5.23. Condiciones iniciales para el éxito del control biológico 114
5.24. Éxito del control biológico 115
5.25. Éxito del control biológico vista $(x(t), y(t), z(t))$ 115
5.26. Parámetros para la tri-estabilidad 116
5.27. Condiciones para la estabilidad en $E_c = (0.4877, 0.0259, 0.0085)$ 116
5.28. Estabilidad asintótica en E_c 116
5.29. Estabilidad asintótica en E_c vista $(x(t), y(t), z(t))$ 117
5.30. Estabilidad asintótica en E_c vista $(x(t), y(t), 0)$ 117

5.31. Condiciones para la extinción total 117
5.32. Estabilidad asintótica en E_0 118
5.33. Estabilidad asintótica en E_0 118
5.34. Estabilidad asintótica en E_1 118

Lista de Algoritmos

5.1. RK4 104
5.2. F 104

Introducción

Un controlador biológico es un ser vivo que sirve para combatir de manera natural plagas especificas; por consiguiente se puede utilizar como técnica agrícola alternativa al uso de insecticidas, fungicidas, pesticidas, etc. La importancia del estudio de la dinámica de los controladores biológicos recae en el hecho de que por lo general son de bajos costos y no son nocivos ni para el medio ambiente ni las personas del entorno.

El control biológico es una técnica milenaria que utilizaron culturas como la china en el siglo III. Fue sin embargo, a finales del siglo XIX cuando el control biológico de plagas despertó un gran interés debido al éxito que se consiguió con la introducción de la mariquita (*Rodolia cardinales*) para el control de la cochinilla acanalada (*Icerya purchasi*) realizado en los Estados Unidos entre 1888-1889 por Charles Valentine Riley, salvando así a la floreciente industria de los cítricos de California [14].

Van den Bosch [16] utiliza la expresión "control biológico" con dos acepciones:

I. La introducción de los enemigos naturales por el hombre y el manejo que éste hace de ellos para controlar las plagas, al que llaman *control biológico aplicado.*

II. El control espontáneo en la naturaleza sin la intervención del hombre, que denominan *control biológico natural.*

En este último, el control biológico constituye un fenómeno ecológico en el cual las plantas y los animales los regulan sus enemigos naturales (agentes bióticos de mortalidad) y representa uno de los principales componentes del control natural que mantiene a todas las especies vivientes en un estado de equilibrio con sus ambientes.

Las especies que coexisten, cada una con su propia historia de selección natural, constituyen una comunidad natural. En esta comunidad, el tipo de especies y su abundancia a veces se mantienen constantes de un año al siguiente; pero cuando la comunidad se simplifica con la agricultura, el hábitat cambia drásticamente. Para cada individuo, nuevas condiciones favorables o desfavorables emergen y muchas especies de plantas y animales desaparecen, mientras que otras prevalecen con abundantes recursos y espacio. La ausencia de enemigos naturales y la reducción de la competencia con otras especies explican cómo ciertas especies de insectos se incrementaron en grandes números y se convirtieron en plagas [11].

En el contexto agrícola se denomina plaga a cualquier organismo que a determinado nivel de población o inóculo compite y causa daño económico sobre una especie animal o vegetal en cualquiera de las etapas de establecimiento, desarrollo o producción, o en el manejo posterior que el hombre hace de ella para su beneficio [11].

El control biológico busca invertir esta situación y frenar el crecimiento desmedido de las poblaciones plagas mediante un factor clave de mortalidad; esto es introduciendo depredadores naturales de la plaga y de esta manera se espera influir de forma drástica en la

mortalidad de las especies plaga para evitar daños económicos.

Para hacer el estudio matemático de la dinámica del control biológico utilizaremos algunos estudios clásicos de las dinámicas poblacionales como el modelo de Lotka-Volterra (1926) también conocido como modelo depredador-presa, que describe la interacción entre dos especies, donde una se alimenta de la otra : a la primera llamaremos especie depredador y a la segunda presa, quedando la dinámica de estas dos expresada con el siguiente sistema.

$$\begin{cases} x'(t) &= x(a-by) \\ \\ y'(t) &= y(cx-d) \end{cases}$$

donde $x(t)$ e $y(t)$ representa la densidad poblacional de las presas y depredadores en el instante t respectivamente; a, b, c y d son constantes positivas que definen la naturaleza de la interacción de las dos especies.

En el estudio de la interacción de dichas poblaciones, una de las variables más importantes es la densidad de la presa; y su variación genera diversas respuestas en el depredador, siendo las más importantes la respuesta numérica y la respuesta funcional. La respuesta numérica se refiere a los cambios en la densidad del depredador debido a las variaciones en las tasas de reproducción y/o supervivencia. Mientras que la respuesta funcional se refiere a los cambios en el número de presas consumidas por los depredadores en la unidad de tiempo.

Para la población depredadora es de suma importancia la densidad de la población presa, ya que por sentido común, a mayor cantidad de presas mayor es el consumo por el depredador. La variación de la tasa de consumo del depredador en función de la densidad de la presa (respuesta funcional) es variable y fue clasificada por Holling básicamente en tres tipos de respuestas [7].

Los sistemas depredador-presa con respuesta funcional razón dependiente Holling tipo II, como se muestra a continuación

$$\begin{cases} x'(t) &= rx\left(1-\dfrac{x}{k}\right) - c\dfrac{mxy}{x+ay} &, \quad x(0)>0, \\ \\ y'(t) &= \left(\dfrac{mx}{x+ay} - d\right)y &, \quad y(0)>0. \end{cases}$$

ya han sido estudiados en detalle, como por ejemplo en [8], [9], [3], [18], entre otros. Obteniéndose varios resultados importantes, uno de ellos es debido a la razón dependencia [2], la cual le da al modelo la capacidad de generar la extinción de la presa y por consiguiente el colapso del sistema (dinámica de extinción total) [10]; otra característica es que las dinámicas resultantes pueden depender de los niveles de las poblaciones iniciales.

El modelo para el control biológico que estudiaremos está basado en el modelo depredador-presa razón dependiente Holling tipo II. Esto lo justificamos en base a que una cadena alimenticia de dos niveles tróficos es en realidad un sistema depredador-presa, donde la presa es el primer nivel trófico y el depredador es el segundo nivel trófico. Si a la cadena alimenticia se le adiciona un nuevo nivel trófico, entonces el nuevo modelo sería atractivo para modelar ciertos procesos de control biológico, ya que podemos considerar la presa como una especie planta, el depredador intermedio como una plaga y el depredador superior como el agente controlador biológico; y la extinción simultánea de la plaga y el agente controlador es el sello del éxito del modelo, lo cual es usualmente dependiente de la cantidad

del agente controlador biológico.

La Tesis desarrolla los resultados planteados por Sze-Bi Hsu, Tzy-Wey Hwang e Yang Kuang en [9], además de incorporar otras características y sus respectivas pruebas, como por ejemplo el efecto dominó. También se desarrolló en el programa MatLab, un entorno de simulación para la cadena alimenticia de tres niveles tróficos, con el cual se simularon los resultados obtenidos. La organización de está Tesis es la siguiente:

- Capítulo 1: Preliminares; es un resumen de propiedades de análisis matemático, conceptos y herramientas básicas de ecuaciones diferenciales ordinarias y estabilidad de soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Este capítulo es necesario para el óptimo entendimiento de los resultados y para recopilar herramientas utilizadas en los mismos.

- Capítulo 2: Modelo de cadena alimenticia con tres niveles tróficos; como ya mencionamos antes, el modelo que estudiaremos es una adaptación de un modelo depredador-presa razón dependiente Holling tipo II, al cual se le añade un nuevo nivel trófico; de esta manera tendremos presa, depredador intermedio y depredador superior.

- Capítulo 3: Análisis cualitativo de las soluciones; en este capítulo verificaremos algunas características de la solución del modelo planteado en el capítulo 2, como por ejemplo el dominio de las soluciones, la existencia y unicidad, posibilidad y la acotación.

- Capítulo 4: Dinámica del control biológico; en este capítulo se estudiará la estabilidad e inestabilidad de las soluciones, también veremos diversos escenarios de extinción (extinción total y parcial, notemos que la extinción total se interpretaría como la pérdida total del cultivo mientras que la extinción parcial podría darse como la coexistencia del cultivo con la plaga o el caso óptimo de solo persistencia del cultivo, el cual se entiende como el éxito del control biológico). Otro de los resultados mostrados es la sensibilidad a las condiciones iniciales.

- Capítulo 5: Simulaciones; en este capítulo mostraremos los resultados computacionales obtenidos mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden, para los resultados mas importantes del capítulo 4.

Capítulo 1

Preliminares

El objetivo de este capítulo es proporcionar de manera rápida los fundamentos básicos sobre análisis matemático, ecuaciones diferenciales ordinarias y estabilidad de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias; ya que utilizaremos bastantes de estas herramientas en las demostraciones del presente trabajo.

1.1. Nociones de análisis matemático

Mencionaremos algunas propiedades fundamentales del análisis real y funcional, así como algunas consecuencias de dichos resultados que serán de utilidad en los capítulos posteriores.

1.1.1. Propiedad arquimediana de los números reales

Es fácil notar que el conjunto de los números naturales no está acotado en $\mathbb{R}$. La demostración rigurosa de este hecho es una consecuencia inmediata de la siguiente propiedad fundamental de los números reales.

Teorema 1.1 (Propiedad arquimediana) *Para todo par de elementos $x, y \in \mathbb{R}$, con $x > 0$, existe un número $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$.*

Corolario 1.1 *Sean los números reales $0 < a < b$, existe algún $n \in \mathbb{R}$ tal que $nb < a$.*

Definición 1.1 (Parte entera) *Sea $x \in \mathbb{R}$, existe un único número entero, que denotaremos por $[\![x]\!]$ y que denominaremos parte entera de x, verificando*

$$[\![x]\!] \leq x < [\![x]\!] + 1.$$

1.1.2. Límites y continuidad

Para poder continuar es necesario tener algunos conceptos sobre límite y continuidad de funciones, los cuales se pueden encontrar en [12].

Definición 1.2 (Bola abierta) *Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. La bola abierta de centro x_0 y radio r, denotada por $B(x_0, r)$, es el conjunto de los puntos de R^n que distan de x_0 menos de r. Es decir*

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < r\}.$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.3 (Conjunto Abierto) *Se dice que el conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto en $\mathbb{R}^n$, si para cada $x_0 \in U$ existe un $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subset U$.*

Definición 1.4 (Frontera de un conjunto) *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$, se dice que el punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es punto frontera de U, si toda bola abierta de centro x_0 y radio $r > 0$ contiene puntos dentro y fuera de U. La frontera de U es el conjunto de los puntos frontera de U.*

Definición 1.5 (Límite) *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to R$ una función definida en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$. Sea x_0 un punto de U o bien un punto frontera de U. Se dice que el límite de f cuando x tiende a x_0 es L, lo cual se escribe como*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

si dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in B_\delta(x_0) \cap U \backslash \{x_0\} \quad \Rightarrow \quad f(x) \in B_\varepsilon(L).$$

Definición 1.6 (Continuidad en un punto) *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$ y sea $x_0 \in U$. Se dice que f es una función continua en x_0 si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Si la función f no es continua en x_0, se dice que es discontinua en ese punto.

Definición 1.7 (Continuidad en un abierto) *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$. Se dice que f es continua en U (o simplemente que f es continua) si lo es para todos y cada uno de los puntos $x \in U$.*

Teorema 1.2 *Sean $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones definidas en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$. Si f y g son continuas, entonces*

- *La función $f + g : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ es continua.*
- *La función $fg : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$ es continua.*
- *La función $\dfrac{f}{g} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ es continua en todo punto $x \in U$ tal que $g(x) \neq 0$.*

Es decir la suma y el producto de funciones continuas es una función continua. El cociente también lo es en aquellos puntos en los que no se anula el denominador.

Teorema 1.3 (Teorema de Weierstrass) *Sea una función $f(x)$ continua, definida en un intervalo $[a, b]$. Entonces existen dos puntos x_{max} y x_{min} pertenecientes al intervalo $[a, b]$, donde la función $f(x)$ alcanza valores extremos absolutos (un máximo y un mínimo absoluto), por lo que se cumple:*

$$f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max}) \quad \forall x \in [a, b].$$

1.1.3. Límite superior e inferior

En matemática se define límite superior y límite inferior de una sucesión (x_n), como el mayor y menor límite convergente de las sub sucesiones de (x_n). El límite superior y el límite inferior son un sustituto parcial para el límite, si es que éste no existe.

Formalmente el límite inferior de una sucesión (x_n) se define como:

$$\sup_{n\geq 0} \inf_{k\geq n} x_k = \sup\{\inf\{x_k : k \geq n\} : n \geq 0\}$$

o también:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\inf_{k\geq n} x_k \right)$$

Definición 1.8 *Dada una sucesión (x_n) se definen sus límites superior e inferior de la siguiente forma:*

$$\limsup x_n = \lim_{m\to\infty} \left(\sup_{n\geq m} x_n \right) \ y \ \liminf x_n = \lim_{m\to\infty} \left(\inf_{n\geq m} x_n \right).$$

Si existe el límite inferior y superior de una sucesión (x_n), entonces se cumple:

$$\liminf x_n \leq \limsup x_n.$$

Además, si la sucesión (x_n) es convergente, es decir que existe su límite, entonces se cumple:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \liminf x_n = \limsup x_n.$$

Análogamente, el límite superior y límite inferior para funciones reales se define de la misma manera que para sucesiones, es decir:

$$\limsup f(t) = \lim_{n\to\infty} \left(\sup\{f(t) \ : \ t > n\}\right) \quad \text{y} \quad \liminf f(t) = \lim_{n\to\infty} \left(\inf\{f(t) \ : \ t > n\}\right).$$

Esta noción del límite superior la utilizaremos en conjunto con el teorema del capitulo 2 de [17], para probar la existencia de una sucesión creciente no acotada que se utilizará en demostraciones posteriores.

Teorema 1.4 *Sea U un conjunto no acotado de números reales, $f : U \to \mathbb{R}$ una función y $L \in \mathbb{R}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$.
- *Para toda sucesión (x_n) de puntos de U, creciente y no acotada, se tiene que* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.
- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists K \in \mathbb{R}$ *tal que si* $x \in U \quad y \quad x > K \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Teorema 1.5 (Teorema de Lagrange) *Sea $f : [a, b] \to R$ una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto $\langle a, b\rangle$. Entonces existe al menos un punto c en el intervalo $\langle a, b\rangle$ tal que:*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Este teorema también es conocido como el Teorema del Valor Medio.

Proposición 1.1 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función positiva, acotada y diferenciable tal que no existe $\lim_{t\to\infty} f(t)$, entonces existe una sucesión $(t_n) \subseteq \mathbb{R}$ creciente y no acotada tal que:*

$$f'(t_n) = 0 \quad y \quad \lim_{n\to\infty} f(t_n) = \limsup f(t) > 0.$$

Demostración. Como f es acotada y $\nexists \lim_{t\to\infty} f(t)$ entonces necesariamente f es una función periódica oscilante (como por ejemplo $f(t) = sen(t)$) i.e. $\exists P \in \mathbb{R}$ positivo tal que:

$$f(t+P) = f(t) \ \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Por otro lado, de la positividad y acotación de f tenemos:

$$0 \leq \liminf f(t) \leq \limsup f(t)$$

y como $\nexists \lim_{t\to\infty} f(t)$, concluimos que:

$$\limsup f(t) > 0.$$

Consideremos: $a, b \in \mathbb{R}$, tal que $a < b$, entonces f es continua en $[a, b]$ y derivable en $\langle a, b\rangle$; entonces, por el Teorema del valor medio para derivadas, tenemos que:

$$\exists c \in \langle a, b\rangle \quad \text{tal que} \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Sea $a \in \mathbb{R}$ arbitrario pero fijo, para el cual tomamos los valores $a_1 = a$ y $b_1 = a + P$; entonces, por el Teorema del valor medio tenemos:

$$\exists t_1 \in \langle a_1, b_1\rangle \quad \text{tal que} \quad f'(t_1) = \frac{f(a+P) - f(a)}{a + P - a} = \frac{f(a) - f(a)}{P} = 0.$$

Ahora tomamos $a_2 = a + P$ y $b_2 = a + 2P$, entonces por el Teorema del valor medio, tenemos

$$\exists t_2 \in \langle a_2, b_2\rangle \quad \text{tal que} \quad f'(t_2) = \frac{f(a+2P) - f(a+P)}{a + 2P - (a+P)} = \frac{f(a) - f(a)}{P} = 0.$$

Análogamente para $a_3 = a + 2P$ y $b_3 = a + 3P$, por el Teorema del valor medio, tenemos:

$$\exists t_3 \in \langle a_3, b_3\rangle \quad \text{tal que} \quad f'(t_3) = \frac{f(a+3P) - f(a+2P)}{a + 3P - (a+2P)} = \frac{f(a) - f(a)}{P} = 0.$$

Así en general, $\forall n \in \mathbb{N}$ tenemos $a_n = a + (n-1)P$ y $b_n = a + nP$, para los cuales por el Teorema del valor medio, se cumple:

$$\exists t_n \in \langle a_n, b_n\rangle \quad \text{tal que} \quad f'(t_n) = \frac{f(a+nP) - f(a+(n-1)P)}{a + nP - (a+(n-1)P)} = \frac{f(a) - f(a)}{P} = 0.$$

Notamos que, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_n < \cdots$$

es decir, (t_n) es una sucesión creciente y no acotada en $\mathbb{R}$ tal que:

$$f'(t_n) = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por otra parte, notemos que:

$$\limsup f(t) = \lim_{n\to\infty} \left(\sup\{f(t) \ : \ t > n\}\right).$$

Entones, por el Teorema 1.4 tenemos que para toda sucesión (x_n) creciente y no acotada se cumple:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup\{f(t) \ : \ t > n\}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sup\{f(x_k) \ : \ x_k > n\}\right) = \limsup f(x_n)$$

En particular para (t_n) se cumple:

$$f'(t_n) = 0 \ \ \wedge \ \ \limsup f(x_n) = \limsup f(t).$$

Y así queda probada la proposición. ■

Ejemplo 1.1 *Consideremos la función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(t) = 2 + sen(t)$*; conociendo que* $\nexists \lim_{t\to\infty} f(t)$ *y como* f *es un función no negativa, entonces*

$$0 \leq \liminf f(t) < \limsup f(t)$$

de la definición de f*, notamos que*

$$\limsup f(t) = 3.$$

Considerando la sucesión (x_n) *donde*

$$x_n = \sup\{f(t) \ : \ t \geq n\} = 3$$

$$\limsup f(t) = \lim_{n\to\infty} x_n = 3,$$

ya que por el Teorema 1.4 se cumple que para toda sucesión $(t_n) \subset \mathbb{R}$*, creciente no acotada, se tiene:*

$$\lim_{x\to\infty} f(t_n) = 3.$$

En particular para $t_n = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$*, se cumple* $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$*, es decir* (t_n) *no esta acotada, luego verificamos que:*

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n) = 3 + \lim_{n\to\infty} sen\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 3.$$

Como f *es una función derivable, sabemos*

$$f'(t) = cos(t),$$

de donde tenemos que

$$f'(t_n) = cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 0.$$

A continuación se ilustra la función $f(t) = 2 + sen(t)$ *con algunos puntos de la sucesión* (t_n) *que satisface las condiciones de la Proposición 1.1.*

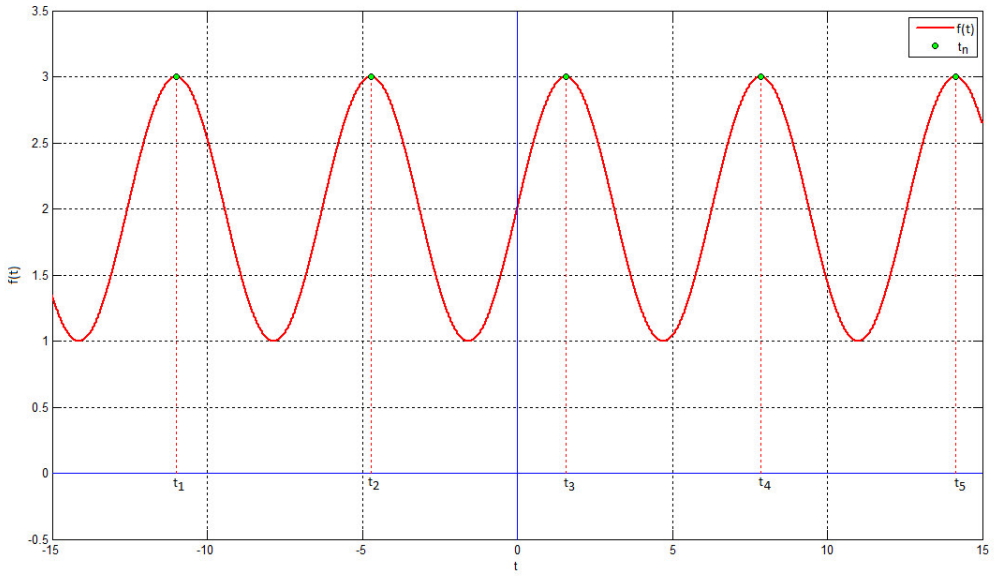


Figura 1.1: Función oscilante periódica con algunos puntos de la sucesión (t_n).

1.2. Ecuaciones diferenciales ordinarias

A continuación veremos algunos resultados sobre ecuaciones diferenciales ordinarias, dichos resultados y sus demostraciones se pueden encontrar en [1].

Una ecuación diferencial es una ecuación que involucra derivadas (o diferenciales) de una función desconocida de una o más variables. Este tipo de ecuaciones aparece en el estudio de numerosos fenómenos físicos y químicos; como por ejemplo en desintegración radioactiva, crecimiento de poblaciones, reacciones químicas, problemas gravitatorios, etc. De modo que recordaremos algunas nociones básicas sobre las ecuaciones diferenciales.

Las ecuaciones diferenciales se pueden clasificar, atendiendo a dos criterios:

I. **Tipo:** Si la función incógnita contiene una única variable independiente, entonces la ecuación se denomina ecuación diferencial ordinaria (EDO). En otro caso, cuando la función incógnita contiene dos o más variables independientes, la ecuación se dice que es una ecuación diferencial en derivadas parciales.

II. **Orden:** Es la derivada de orden más alto que aparece en la ecuación diferencial.

1.2.1. Problemas de valor inicial

Definición 1.9 *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $F : U \to \mathbb{R}^n$ una función.*

I. *Una* **ecuación diferencial ordinaria (EDO)** *autónoma de primer orden asociada a F, es una expresión del tipo*

$$w' = F(w) \tag{1.1}$$

II. *Una solución de la EDO (1.1) es una función diferenciable $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$, donde $J \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo, tal que*

   a) $\varphi(t) \in U$, para todo $t \in J$.
   b) $\varphi'(t) = F(\varphi(t))$, para todo $t \in J$.

Observación 1.1 *Si $F : U \to \mathbb{R}^n$ es continua entonces toda solución φ de la EDO (1.1) es de clase C^1.*

Observación 1.2 *Si consideramos $F = (F_1, F_2, F_3)$ y $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$ entonces*

I. *La EDO (1.1) tendría la forma de un sistema de 3 EDO autónomas, como se muestra a continuación*

$$\begin{cases} x'(t) &= F_1(x(t), y(t), z(t)) \\ y'(t) &= F_2(x(t), y(t), z(t)) \\ z'(t) &= F_3(x(t), y(t), z(t)) \end{cases} \tag{1.2}$$

II. *φ es solución de la EDO (1.2) si y solo si*

   a) $(x(t), y(t), z(t)) \in U$, para todo $t \in J$.
   b) $\varphi'(t) = F(\varphi(t))$, satisface (1.2), para todo $t \in J$.

Definición 1.10 *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $F : U \to \mathbb{R}^n$ una función, $w_0 \in U$ y $t_0 \in \mathbb{R}$.*

I. *El* **Problema de Valor Inicial (PVI)** *o Problema de Cauchy asociado a f, es dado por*

$$\begin{cases} w' & = & F(w) \\ w(t_0) & = & w_0 \end{cases} \tag{1.3}$$

II. *Una solución del PVI (1.3) es una función $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ diferenciable, donde $J \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo, tal que*

a) $t_0 \in J$.
b) $\varphi(t) \in U$, *para todo* $t \in J$.
c) $\varphi'(t) = F(\varphi(t))$, *para todo* $t \in J$.
a) $\varphi(t_0) = w_0$.

Observación 1.3 *Si consideramos $F = (F_1, F_2, F_3)$, $w \in \mathbb{R}^3$ y $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$ entonces*

I. *Para el valor inicial $w_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ cuando $t_0 = 0$, tenemos el PVI asociado a F*

$$\begin{cases} x'(t) & = & F_1(x(t), y(t), z(t)) & , & x(0) = x_0 \\ y'(t) & = & F_2(x(t), y(t), z(t)) & , & y(0) = y_0 \\ z'(t) & = & F_3(x(t), y(t), z(t)) & , & z(0) = z_0 \end{cases} \tag{1.4}$$

II. *Una solución del PVI (1.4) es una función $\varphi : J \to \mathbb{R}^3$ diferenciable en el intervalo $J \subseteq \mathbb{R}$, tal que*

a) $0 \in J$.
b) $\varphi(t) \in U$, *para todo* $t \in J$.
c) $\varphi'(t) = F(\varphi(t))$, *satisface (1.4), para todo* $t \in J$.
a) $\varphi(0) = (x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0)$.

1.2.2. Existencia y unicidad

Primero veamos algunas notaciones previas a los resultados que mencionaremos durante esta sección, recordemos que $B_r(w_0) \in \mathbb{R}^n$ denota la bola abierta centrada en $w_0 \in \mathbb{R}^n$ y de radio $r > 0$, de manera similar tenemos $B_r[w_0] \in \mathbb{R}^n$ el cual denota a la bola cerrada centradas en $w_0 \in \mathbb{R}^n$ y de radio $r > 0$, es decir

$$B_r(w_0) = \{w \in \mathbb{R}^n : \|w - w_0\| < r\} \quad \text{y} \quad B_r[w_0] = \{w \in \mathbb{R}^n : \|w - w_0\| \leq r\}.$$

En el caso de la recta, denotamos respectivamente como el intervalo abierto o intervalo cerrado a

$$I_r(x_0) = \langle x_0 - r, x_0 + r \rangle \quad \text{y} \quad I_r[x_0] = [x_0 - r, x_0 + r].$$

Definición 1.11 *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $F : U \to \mathbb{R}^n$ una función*

I. *Decimos que F es* **Lipschitz** *en U si y solo si existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|F(w_1) - F(w_2)\| \leq C\|w_1 - w_2\| \quad \forall w_1, w_2 \in U$$

II. *Decimos que F es* **localmente Lipschitz** *en U si y solo si para cualquier $w_0 \in U$, existen $b > 0$ tales que $B_b(w_0) \subseteq U$ y la restricción*

$$F|_{B_b(w_0)} : B_b(w_0) \to \mathbb{R}^n$$

es Lipschitz en $B_b(w_0)$.

Definición 1.12 *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $F = (F_1, F_2, \cdots, F_n) : U \to \mathbb{R}^n$ una función. Decimos que F es de* **clase** C^1 *en U si y sólo si, se cumplen las siguientes condiciones*

I. *Para todo $w \in U$, existen las derivadas parciales $\dfrac{\partial F_i}{\partial w_j}(w)$, $\forall 1 \leq i, j \leq n$.*

II. *Para todo $1 \leq i, j \leq n$ las funciones $\dfrac{\partial F_i}{\partial w_j} : U \to \mathbb{R}$ son continuas en U.*

En caso afirmativo, denotamos

$$J(w) = \frac{\partial(F_1, F_2, \cdots, F_n)}{\partial(w_1, w_2, \cdots, w_n)}(w) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial w_1}(w) & \dfrac{\partial F_1}{\partial w_2}(w) & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial w_n}(w) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial w_1}(w) & \dfrac{\partial F_2}{\partial w_2}(w) & \cdots & \dfrac{\partial F_2}{\partial w_n}(w) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial w_1}(w) & \dfrac{\partial F_n}{\partial w_2}(w) & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial w_n}(w) \end{bmatrix}$$

Esto también es conocido como la matriz Jacobiana o Jacobiano de F.

Proposición 1.2 (Cualquier función con derivada acotada es Lipschitz) *Sea X un intervalo y sea $f : X \to R$ una función continua en X, derivable en $int(X)$ y tal que su derivada es acotada. Entonces f es Lipschitz en X.*

Proposición 1.3 *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y F una función de clase C^1 en U. Entonces F es localmente Lipschitz en U.*

Para la existencia y unicidad consideraremos un resultado del Apéndice A de [15].

Teorema 1.6 (Existencia y unicidad) *Sea $F : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n$ localmente lipschitz y para cada $j = 1, 2, \cdots, n$ se satisface*

$$F_j(w) \geq 0 \text{ para cualquier } w \in \mathbb{R}^n_+ \text{ con } w_j = 0.$$

Entonces para cualquier $w_0 \in \mathbb{R}^n_+$, existe una única solución del PVI

$$\begin{cases} w' &= F(w) \\ w(0) &= w_0 \end{cases}$$

con valores en $\mathbb{R}^n_+$, la cual esta definida en algún intervalo $[0, T\rangle$ con $T \in \langle 0, \infty\rangle$. Si $T < \infty$, entonces

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \sum_{j=1}^{n} w_j(t) = \infty.$$

1.2.3. Sistema de EDO's lineales y no lineales

Consideremos el siguiente sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas

$$\begin{cases} w_1' &= F_1(w_1, w_2, \cdots, w_n) \\ w_2' &= F_2(w_1, w_2, \cdots, w_n) \\ &\vdots \\ w_n' &= F_1(w_1, w_2, \cdots, w_n) \end{cases} \tag{1.5}$$

Donde $F_i : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, \cdots, n$.

Si cada una de las funciones F_i para $i = 1, 2, \cdots, n$ son lineales entonces (1.5) es llamado sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, caso contrario sistema de ecuaciones diferenciales no lineales.

Si utilizamos la notación matricial, resulta simple relacionar los sistemas de n ecuaciones diferenciales ordinarias con los resultados previos, para esto consideremos las funciones vectoriales

$$w(t) = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ \vdots \\ w_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad F(w) = \begin{bmatrix} F_1(w) \\ F_2(w) \\ \vdots \\ F_n(w) \end{bmatrix},$$

entonces nuestro sistema (1.5) tendría la siguiente forma

$$w' = F(w)$$

para el cual podemos utilizar todos los resultados previos.

La forma general de un sistema de n EDO autónomas lineales es el siguiente

$$\begin{cases} w_1' &= a_{1,1}w_1 + a_{1,2}w_2 + \cdots + a_{1,n}w_n + b_1 \\ w_2' &= a_{2,1}w_1 + a_{2,2}w_2 + \cdots + a_{2,n}w_n + b_2 \\ &\vdots \\ w_n' &= a_{n,1}w_1 + a_{n,2}w_2 + \cdots + a_{n,n}w_n + b_n \end{cases}$$

Notemos también que el sistema (1.5) es lineal, entonces puede tomar la siguiente forma

$$w' = F(w) = Aw + b$$

donde

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Si $b_i = 0$ para $i = 1, 2, \cdots, n$ entonces el sistema es llamado **homogéneo**, caso contrario **no homogéneo**.

Teorema 1.7 (Existencia y unicidad) *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $t_0 \in \mathbb{R}$, entonces la única solución del PVI*

$$\begin{cases} w' &= Aw \\ w(t_0) &= w_0 \end{cases}$$

esta dada por

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^n \\ & & t & \mapsto & \varphi(t) = e^{(t-t_0)A}x_0. \end{array}$$

Definición 1.13 *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $F : U \to \mathbb{R}^n$ una función, para los cuales tenemos la ecuación diferencial ordinaria*

$$w' = F(w)$$

Entonces $w^* \in \mathbb{R}$ es llamado **punto crítico** *o* **singularidad** *si y sólo si $F(w^*) = 0$.*

A continuación veremos algunos resultados para la linealización de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales. Para ello, sin pérdida de generalidad, consideremos el siguiente sistema autónomo

$$\begin{cases} x' &= F_1(x, y, z) \\ y' &= F_2(x, y, z) \\ z' &= F_3(x, y, z) \end{cases} \tag{1.6}$$

con un punto crítico aislado (x^*, y^*, z^*), es decir

$$\left|\begin{array}{rcl} F_1(x^*, y^*, z^*) &=& 0 \\ F_2(x^*, y^*, z^*) &=& 0 \\ F_3(x^*, y^*, z^*) &=& 0 \end{array}\right.$$

Si $F_1(x, y, z)$, $F_2(x, y, z)$ y $F_3(x, y, z)$ admiten su desarrollo en series Taylor de orden uno alrededor de $w^* = (u^*, v^*, s^*)$, tenemos

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= F_1(w^*) + \tfrac{\partial F_1}{\partial x}(w^*)(x - x^*) + \tfrac{\partial F_1}{\partial y}(w^*)(y - y^*) + \tfrac{\partial F_1}{\partial z}(w^*)(z - z^*) + R_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) &= F_2(w^*) + \tfrac{\partial F_2}{\partial x}(w^*)(x - x^*) + \tfrac{\partial F_2}{\partial y}(w^*)(y - y^*) + \tfrac{\partial F_2}{\partial z}(w^*)(z - z^*) + R_2(x, y, z) \\ F_3(x, y, z) &= F_3(w^*) + \tfrac{\partial F_3}{\partial x}(w^*)(x - x^*) + \tfrac{\partial F_3}{\partial y}(w^*)(y - y^*) + \tfrac{\partial F_3}{\partial z}(w^*)(z - z^*) + R_3(x, y, z) \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= \tfrac{\partial F_1}{\partial x}(w^*)(x - x^*) + \tfrac{\partial F_1}{\partial y}(w^*)(y - y^*) + \tfrac{\partial F_1}{\partial z}(w^*)(z - z^*) + R_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) &= \tfrac{\partial F_2}{\partial x}(w^*)(x - x^*) + \tfrac{\partial F_2}{\partial y}(w^*)(y - y^*) + \tfrac{\partial F_2}{\partial z}(w^*)(z - z^*) + R_2(x, y, z) \\ F_3(x, y, z) &= \tfrac{\partial F_3}{\partial x}(w^*)(x - x^*) + \tfrac{\partial F_3}{\partial y}(w^*)(y - y^*) + \tfrac{\partial F_3}{\partial z}(w^*)(z - z^*) + R_3(x, y, z) \end{aligned}$$

consideremos $u = x - x^*$, $v = y - y^*$ y $s = z - z^*$, entonces

$$\begin{aligned} u' &= x' = F_1(x,y,z) \\ v' &= y' = F_2(x,y,z) \\ s' &= z' = F_3(x,y,z) \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{cases} u' = u\frac{\partial F_1}{\partial x}(w^*) + v\frac{\partial F_1}{\partial y}(w^*) + s\frac{\partial F_1}{\partial z}(w^*) + R_1(x,y,z) \\ v' = u\frac{\partial F_2}{\partial x}(w^*) + v\frac{\partial F_2}{\partial y}(w^*) + s\frac{\partial F_2}{\partial z}(w^*) + R_2(x,y,z) \\ s' = u\frac{\partial F_3}{\partial x}(w^*) + v\frac{\partial F_3}{\partial y}(w^*) + s\frac{\partial F_3}{\partial z}(w^*) + R_3(x,y,z) \end{cases} \tag{1.7}$$

donde las derivada parciales están evaluadas en $w^* = (x^*, y^*, z^*)$ ósea son números y $R_i(x,y,z)$ para $i = 1,2,3$ denota el resto de términos en función de x, y, z. Escribiendo lo anterior en forma matricial, tenemos

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ s' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(w^*) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(w^*) & \frac{\partial F_1}{\partial z}(w^*) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(w^*) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(w^*) & \frac{\partial F_2}{\partial z}(w^*) \\ \frac{\partial F_3}{\partial x}(w^*) & \frac{\partial F_3}{\partial y}(w^*) & \frac{\partial F_3}{\partial z}(w^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1(x,y,z) \\ R_2(x,y,z) \\ R_3(x,y,z) \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

Cuando $|u|, |v|$ y $|s|$ son pequeños, es decir, cuando $(u,v,s) \to (0,0,0)$ podemos despreciar los términos $R_i(x,y,z)$, para $i = 1,2,3$, del sistema (1.8), así conjeturamos que el comportamiento cualitativo del sistema (1.8) cerca al punto crítico (x^*, y^*, z^*) es similar al del sistema lineal asociado

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ s' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(w^*) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(w^*) & \frac{\partial F_1}{\partial z}(w^*) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(w^*) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(w^*) & \frac{\partial F_2}{\partial z}(w^*) \\ \frac{\partial F_3}{\partial x}(w^*) & \frac{\partial F_3}{\partial y}(w^*) & \frac{\partial F_3}{\partial z}(w^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ s \end{bmatrix}, \tag{1.9}$$

donde

$$det\left(J_{w^*}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(w^*) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(w^*) & \frac{\partial F_1}{\partial z}(w^*) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(w^*) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(w^*) & \frac{\partial F_2}{\partial z}(w^*) \\ \frac{\partial F_3}{\partial x}(w^*) & \frac{\partial F_3}{\partial y}(w^*) & \frac{\partial F_3}{\partial z}(w^*) \end{vmatrix} \neq 0$$

es el determinante de la matriz Jacobiana, de la parte lineal, del sistema (1.8). evaluada en el punto crítico w^*.

El proceso anterior de sustituir el sistema no lineal (1.8) por el sistema lineal (1.9) se denomina la linealización del sistema (1.6) en el punto crítico $w^* = (x^*, y^*, z^*)$.

Este procedimiento se puede extender en forma similar a sistemas de n EDO lineales autónomas en cada uno de sus puntos críticos.

1.3. Análisis de estabilidad

En esta sección recordaremos algunos resultados para el análisis de estabilidad de las soluciones constantes de los sistemas de ecuaciones diferenciales.

Definición 1.14 *Para $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, consideremos la EDO*

$$w' = F(w)$$

Para la cual $w^* \in \mathbb{R}^n$ es un punto crítico i.e. $F(w^*) = 0$. Se define

I. *Diremos que w^* es un punto crítico estable si y solo si dado un $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|x(t_0) - w^*\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - w^*\| < \varepsilon$ para todo $t \geq t_0$.*

II. *Diremos que un punto de equilibrio w^* es un punto crítico asintóticamente estable si y solo si w^* es un punto crítico estable y además*

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = w^*.$$

III. *Diremos que un punto de equilibrio w^* es un punto crítico inestable si no es estable.*

Proposición 1.4 *Dado el sistema lineal $w' = Aw$ donde $A \in M_{n\times n}$ y $w \in \mathbb{R}^n$. El punto crítico w^* es estable si todos los autovalores asociados a su matriz Jacobiana son negativas o tienen la parte real negativa.*

1.3.1. Criterio de Routh-Hurwitz

A continuación veremos el criterio de Routh-Hurwitz, el cual es una prueba matemática que se utiliza como condición necesaria y suficiente para la estabilidad de sistemas de EDOs. El criterio de Routh es un algoritmo recursivo eficiente que el matemático inglés Edward John Routh propuso en 1876 para determinar cuando todas las raíces de un polinomio característico, de un sistema lineal, tienen parte real negativa. Independientemente el matemático alemán Adolf Hurwitz propuso en 1895, que los coeficientes del polinomio característico podían disponerse en una matriz cuadrada, llamada matriz de Hurwitz, y mostró que su solución asociada es estable si y sólo si la secuencia de determinantes de sus principales submatrices son positivas. Estos dos procesos son equivalentes.

Ahora veremos unos resultados asociados al criterio de Routh.

Definición 1.15 *Sea el polinomio de variable real*

$$P(t) = a_0t^n + a_1t^{n-1} + a_2t^{n-2} + a_3t^{n-3} + \cdots + a_{n-1}t + +a_n, \quad a_n \neq 0$$

definimos como el esquema de Routh del polinomio $P(t)$, al siguiente arreglo

$$\begin{array}{r|llll} t^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\ t^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\ t^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\ t^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & & & \\ t^2 & d_1 & d_2 & & & \\ t^1 & e_1 & & & & \\ t^0 & f_1 & & & & \end{array}$$

donde

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}, \cdots$$
$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}, \quad c_2 = \frac{b_1 a_4 - a_1 b_3}{b_1}, \cdots$$

y así sucesivamente.

Teorema 1.8 *El número de raíces de un polinomio $P(t)$ de variable real, las cuales están en el semiplano derecho $Re(t) > 0$ es igual al número de cambios de signo en la primera columna del esquema de Routh.*

En vista de este teorema y la proposición 1.4 podemos deducir el siguiente resultado.

Corolario 1.2 (Criterio de Routh) *Para que todas las raíces de un polinomio $P(t)$ tengan parte real negativa, es necesario y suficiente que todos los elementos en la primera columna del esquema de Routh tengan el mismo signo.*

Ejemplo 1.2 *Sea el polinomio*

$$P(t) = t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 4t + 5$$

para el cual tenemos el siguiente esquema de Routh

$$\begin{array}{r|lll} t^4 & 1 & 3 & 5 \\ t^3 & 2 & 4 & \\ t^2 & b_1 & b_2 & \\ t^1 & c_1 & & \\ t^0 & d_1 & & \end{array}$$

donde

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} = \frac{2 \times 3 - 1 \times 4}{2} = 1$$
$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} = \frac{2 \times 5 - 1 \times 0}{2} = 5$$
$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} = \frac{1 \times 4 - 2 \times 5}{1} = -6$$
$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1} = \frac{-6 \times 5 - 5 \times 0}{-5} = 5$$

es decir

$$\begin{array}{c|ccc} t^4 & 1 & 3 & 5 \\ t^3 & 2 & 4 & \\ t^2 & 1 & 5 & \\ t^1 & -6 & & \\ t^0 & 5 & & \end{array}$$

notamos que en el arreglo de Routh aparece dos cambios de signo, por lo tanto el polinomio característico $P(t)$ tiene dos raíces positivas, por ende la solución asociada a $P(t)$ no es estable.

Ahora veremos algunos de los resultados previos al criterio de Hurwitz.

Definición 1.16 *Sea el polinomio*

$$P(t) = a_0 t^n + b_0 t^{n-1} + a_1 t^{n-2} + b_1 t^{n-3} + \cdots, \ \ con \quad a_n \neq 0.$$

Entonces la matriz cuadrada de orden n

$$H = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-2} \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ 0 & 0 & b_0 & \cdots & b_{n-0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{bmatrix}, \quad donde \quad \begin{cases} a_k = 0 \quad si \quad k > \left[\!\left[\dfrac{n}{2} \right]\!\right] \\ b_k = 0 \quad si \quad k > \left[\!\left[\dfrac{n-1}{2} \right]\!\right] \end{cases}$$

es llamada matriz de Hurwitz.

Los determinantes de las submatrices principales de H, son llamados los determinantes de Hurwitz y se denotan

$$\Delta_1 = b_0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & b_0 & b_1 \end{vmatrix}, \cdots$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-2} \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ 0 & 0 & b_0 & \cdots & b_{n-0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{vmatrix}$$

Corolario 1.3 (Criterio de Routh - Hurwitz) *Para que todas las raíces del polinomio*

$$P(t) = a_0 t^n + b_0 t^{n-1} + a_1 t^{n-2} + b_1 t^{n-3} + \cdots, \ \ con \quad a_n \neq 0,$$

tengan parte real negativa, es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones

$$a_0\Delta_1 > 0, \ \ \Delta_2 > 0 \ \ a_0\Delta_3 > 0, \ \ \Delta_4 > 0, \ \ \cdots, \ \ \begin{array}{r} a_0\Delta_n > 0 \quad (\ n\ par\ ) \\ \Delta_n > 0 \quad (\ n\ impar\ ) \end{array}$$

Notemos que si $a_0 > 0$ entonces la condición de el criterio de Routh-Hurwitz se reduce a

$$\Delta_1 > 0, \ \ \Delta_2 > 0 \ \ \Delta_3 > 0, \ \ \Delta_4 > 0, \ \ \cdots, \Delta_n > 0.$$

Observación 1.4 *Si consideramos la notación tradicional*

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_n$$

donde los coeficientes a_i son constantes reales para $i = 1, \cdots, n$. Entonces para $n = 2, 3$ y 4 tenemos las condiciones

$$\begin{array}{rcl} n = 2 & : & a_1 > 0, a_2 > 0 \\ n = 3 & : & a_1 > 0, a_3 > 0, a_1a_2 > a_3 \\ n = 4 & : & a_1 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0, a_1a_2a_3 > a_3^2 + a_1^2a_4 \end{array}$$

bajo las cuales podemos asegurar la estabilidad por el criterio de Routh-Hurwitz.

Para mayor información así como las demostraciones de los resultados mencionados se puede revisar el capítulo 6 de [5].

1.3.2. Estabilidad de sistemas no lineales

Ahora veremos algunos resultados para la estabilidad de puntos críticos de sistemas no lineales, al igual que en la sección anterior sin pérdida de generalidad asumiremos que $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Definición 1.17 *Dado (x^*, y^*, z^*) punto de equilibrio aislado del sistema no lineal*

$$\begin{array}{rcll} x' & = & F_1(x, y, z) & \\ y' & = & F_2(x, y, z) & (1.10) \\ z' & = & F_3(x, y, z) & \end{array}$$

Diremos que el sistema autónomo dado por (1.10) es casi lineal en el punto (x^*, y^*, z^*), si se cumple

I. *La matriz Jacobiana $A = J_{(x^*,y^*,z^*)}$ del sistema (1.10) es regular , es decir tiene determinante no nulo.*

II. *Si las funciones F_i para $i = 1, 2, 3$, admiten un desarrollo de Taylor de orden uno en un entorno del punto crítico (x^*, y^*, z^*), es decir*

$$\begin{array}{rcl} F_1(x,y,z) & = & F_1(x^*,y^*,z^*) + \frac{\partial F_1}{\partial x}(x^*,y^*,z^*)(x-x^*) + \frac{\partial F_1}{\partial y}(x^*,y^*,z^*)(y-y^*) + \frac{\partial F_1}{\partial z}(x^*,y^*,z^*)(z-z^*) + R_1(x,y,z) \\ F_2(x,y,z) & = & F_2(x^*,y^*,z^*) + \frac{\partial F_2}{\partial x}(x^*,y^*,z^*)(x-x^*) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x^*,y^*,z^*)(y-y^*) + \frac{\partial F_2}{\partial z}(x^*,y^*,z^*)(z-z^*) + R_2(x,y,z) \\ F_3(x,y,z) & = & F_3(x^*,y^*,z^*) + \frac{\partial F_3}{\partial x}(x^*,y^*,z^*)(x-x^*) + \frac{\partial F_3}{\partial y}(x^*,y^*,z^*)(y-y^*) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(x^*,y^*,z^*)(z-z^*) + R_3(x,y,z) \end{array}$$

Donde $R_i(x,y,z)$ verifica la condición :

$$\lim_{(x,y,z)\to(x^*,y^*,z^*)} \frac{R_i(x,y,z)}{\sqrt{(x-x^*)^2+(y-y^*)^2+(z-z^*)^2}} = 0$$

Teorema 1.9 (Estabilidad para sistemas no lineales) *Sea (x^*,y^*,z^*) un punto crítico de un sistema casi lineal*

$$\begin{aligned} x' &= F_1(x,y,z) \\ y' &= F_2(x,y,z) \\ z' &= F_3(x,y,z) \end{aligned}$$

Si la matriz Jacobiana $J_{(x^*,y^*,z^*)}$ del sistema en el punto crítico (x^*,y^*,z^*), tiene

- *Autovalores reales negativos o complejos con parte real negativa, entonces el origen es asintóticamente estable para el sistema lineal aproximado y como consecuencia el punto (x^*,y^*,z^*) es asintóticamente estable para el sistema casi lineal.*
- *Autovalores reales y alguno de ellos es positivo o complejos con parte real positiva, entonces el origen es inestable para el sistema lineal aproximado y el punto (x^*,y^*,z^*) es inestable para el sistema casi lineal.*

Observación 1.5 *Si la matriz A tiene autovalores imaginarios puros, entonces el origen es un centro del sistema linealizado. En este caso no sabemos nada sobre la estabilidad del punto crítico (x^*,y^*,z^*). En esta situación el estudio del sistema linealizado no nos determina la estabilidad del punto crítico (x^*,y^*,z^*), y para conseguirlo necesitamos recurrir a la construcción de un funcional de Lyapunov.*

Capítulo 2

Modelo de cadena alimenticia con tres niveles tróficos

En el presente capítulo plantearemos y analizaremos un modelo de cadena alimenticia de tres niveles tróficos con respuesta funcional razón dependiente Holling tipo II y sus aplicaciones al control biológico. Antes de introducir nuestro modelo a estudiar, recordemos un poco sobre los modelos depredador-presa, básicamente el modelo clásico con respuesta funcional dependiente de la presa, y el modelo con respuesta funcional razón dependiente.

2.1. Modelos depredador-presa

El modelo general para la interacción de especies es el siguiente

$$\begin{cases} x'(t) &= xf(x,y) \quad , \quad x(0) > 0 \\ \\ y'(t) &= yg(x,y) \quad , \quad y(0) > 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

donde $x(t)$ es la densidad poblacional de las presas, $y(t)$ es la densidad poblacional de los depredadores en el instante t; y ademas $f(x,y)$ y $g(x,y)$ satisfacen

$$\frac{\partial f}{\partial y} < 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial g}{\partial x} > 0$$

En 1926, Vito Volterra propone un modelo simple para la depredación de una especie por otra, para explicar los niveles oscilatorios de ciertos peces capturados en el mar Adriático. El modelo fue el siguiente

$$\begin{cases} x'(t) &= x(a-by) \quad , \quad x(0) > 0 \\ \\ y'(t) &= y(cx-d) \quad , \quad y(0) > 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

donde a es la tasa de crecimiento intrínseco de la población de presas, b es la tasa de captura de los depredadores o mortalidad de las presas por depredación, c es la tasa de beneficio por depredación (tasa de eficiencia), y d es la tasa de mortalidad natural de los depredadores en ausencia de presas.

Notemos que el modelo (2.2) es un caso particular del modelo (2.1) ya que las funciones

$$f(x,y) = (a-by) \quad \text{y} \quad g(x,y) = (cx-d),$$

cumplen las condiciones

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -b < 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial g}{\partial x} = c > 0.$$

Además el modelo cumple las siguiente suposiciones:

I. En ausencia del depredador, las presas crecen ilimitadamente, es decir

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = a > 0, \quad \text{si} \quad y(t) = 0.$$

II. En ausencia de la presa, los depredadores se extinguen, es decir

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -c < 0, \quad \text{si} \quad x(t) = 0.$$

III. Los depredadores aumentan y las presas disminuyen con una rapidez proporcional al número de encuentros entre depredadores y presas.

El modelo (2.2) es conocido como el modelo Lotka-Volterra, ya que las mismas ecuaciones fueron derivadas por Alfred J. Lotka, de sus estudios sobre procesos químicos oscilantes.

Ahora consideremos un modelo más acorde, un modelo depredador-presa tipo Gause, es decir

$$\begin{cases} x'(t) &= xg(x) - cyp(x) \\ y'(t) &= (p(x) - d)y \end{cases} \tag{2.3}$$

donde $x(t), y(t)$ representan la densidad poblacional de las presas y depredadores respectivamente en instante t; $p(x)$ es la respuesta funcional de la presa y $c, d > 0$ son la razón de conversión y tasa de mortalidad del depredador respectivamente.

Y las funciones g y p satisfacen respectivamente:

- $g(0) > 0$, $g(K) = 0$ para algún $K > 0$ y $(x - K)g(x) < 0 \ \forall x \neq K$.
- $p(0) = 0$ y $p'(x) > 0 \ \forall x \geq 0$.

En el estudio de la interacción de dichas poblaciones, una de las variables más importantes es la densidad de la presa; y su variación genera diversas respuestas en el depredador, siendo las más importantes la respuesta numérica y la respuesta funcional. La respuesta funcional se refiere a la variación de la densidad de presas consumidas por los depredadores por unidad de tiempo. Mientras que la respuesta numérica se refiere al aumento en el tamaño poblacional de los depredadores en función de la cantidad de presas disponibles o de la densidad de las presas. Es decir, es el componente que explica el aumento de la densidad de depredadores a causa del aumento de la densidad de presas. Este cambio en a densidad de las presas sera debido a las variaciones en su tasa de reproducción y/o supervivencia.

Si consideramos

$$p(x) = \frac{mx}{a + x} \ \wedge \ g(x) = r\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

entonces el sistema (2.3) se convierte en

$$\begin{cases} x'(t) &= rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - c\frac{mxy}{a + x} \quad , \quad x(0) > 0 \\ y'(t) &= \left(\frac{mx}{a + x} - d\right)y \qquad\qquad , \quad y(0) > 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

donde r, K, a, c, d, y m son constantes positivas que representan la razón de crecimiento intrínseco de la presa, capacidad de carga, constante de semi saturación,tasa de captura, muerte del depredador y razón de crecimiento máximo del depredador respectivamente.

El modelo (2.4) también es conocido como modelo depredador-presa con respuesta funcional Holling tipo II. Esta respuesta funcional expresa un incremento desacelerado del consumo, a medida que aumentan las presas consumidas, hasta acercarse asintóticamente a la tasa máxima de consumo de los depredadores. El análisis cualitativo de dicho modelo se pueden encontrar en [7].

El modelo (2.4) exhibe la bien conocida "paradoja de enriquecimiento" formulada por Hairston y Rosenzweig en [13] y [6]. A grandes rasgos diríamos que dada una población de depredadores que se alimenta y aprovecha desde un punto de vista alimenticio, de una población de presas puede llegar a su extinción si su principal recurso alimenticio aumenta considerablemente, es decir la abundancia de beneficios conduce indefectiblemente a la extinción.

Desafortunadamente, numerosas observaciones de campo proveen contradicciones a la "paradoja de enriquecimiento". Lo que usualmente observamos en la naturaleza es que el incremento en la densidad de la presa, no desestabiliza el estado estable y tampoco incrementa la amplitud de las oscilaciones en un sistema cíclico.

Una variación de la "paradoja de enriquecimiento" es la llamada "paradoja del control biológico", la cual recientemente está siendo estudiada. De acuerdo al sistema (2.4) no se puede tener una densidad de presas baja y estable. Más aun en la realidad, hay muchos ejemplos de controles biológicos exitosos donde densidad de presa se mantiene por debajo del 2 % de su capacidad de carga. Esto muestra que la "paradoja del control biológico" no es intrínseca a las interacciones depredador-presa. Otra predicción notable del sistema (2.4) es que las especies depredador y presa no se pueden extinguir simultáneamente (extinción mutua). Esto claramente contradice las observaciones clásicas de extinción mutua de protozoarios hechas por Georgii F. Gause, donde *Paramecium* y su depredador *Didinium* se extinguen.

Recientemente se están incrementando las evidencias de que en algunas situaciones, especialmente cuando el depredador tiene que buscar comida (o más aun tiene que compartir o competir por comida), es mejor una teoría depredador-presa basada en la respuesta funcional razón dependiente. Generalmente un modelo depredador-presa razón dependiente toma la siguiente forma

$$\begin{cases} x'(t) &= xf(x) - cyp\,(x/y) &, \quad x(0) > 0 \\ y'(t) &= (p\,(x/y) - d)\,y &, \quad y(0) > 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

Si consideramos

$$p(u) = \frac{mu}{a+u} \quad \wedge \quad g(u) = r\left(1 - \frac{u}{K}\right)$$

entonces el sistema (2.5) se convierte en

$$\begin{cases} x'(t) &= rx\left(1 - \dfrac{x}{K}\right) - c\dfrac{mxy}{x+ay} &, \quad x(0) > 0 \\ y'(t) &= \left(\dfrac{mx}{x+ay} - d\right)y &, \quad y(0) > 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

donde $x(t)$ e $y(t)$ son la densidad poblacional de presas y depredadores en el instante t respectivamente, r es la tasa de crecimiento intrínseco de la presa, K capacidad de carga, c la razón de captura o tasa de conversión, m tasa de crecimiento máximo del depredador, a constante de semi-saturación y d la tasa de muerte del depredador.

El sistema (2.6) es llamado modelo depredador-presa con respuesta funcional razón dependiente Holling tipo II. El cual es estudiado en detalle en [3], [2], [8], [10], [7] y [18] y otros.

Geométricamente, una de las diferencias entre los modelos (2.4) y (2.6) es la forma que toman las isóclinas del depredador y la presa. El análisis del sistema (2.6) hecho por Hsu, Hwang y Kuang [8] muestra que dicho sistema es capaz de producir dinámicas mucho más ricas y realistas. Específicamente, no se producirá la paradoja de control biológico y la paradoja de enriquecimiento. Además permite la extinción mutua como un posible resultado de la interacción depredador-presa.

2.2. Planteamiento del modelo de cadena alimenticia con tres niveles tróficos

Notemos que los modelos depredador-presa, de la sección anterior, pueden ser vistos como cadenas alimenticias de dos niveles tróficos, donde la presa es el primer nivel trófico y el depredador es el segundo nivel trófico.

Modelos matemáticos de muchos procesos de control biológico se relacionan naturalmente con sistemas diferenciales de tres ecuaciones que describen el crecimiento de las plantas (presa), plaga (depredador medio) y el agente controlador (depredador superior) respectivamente. La interacción de estas tres especies comúnmente forma una cadena alimenticia simple. Además si las características descritas anteriormente para el sistema (2.6) se mantuvieran en este nuevo sistema de cadena alimenticia con tres niveles tróficos, entonces nuestro sistema resultante sería atractivo para modelar ciertos procesos de control biológico donde la presa es una especie planta, el depredador intermedio es una plaga y el depredador superior es el agente controlador biológico; y la extinción simultanea de la plaga y el agente controlador es el sello del éxito del modelo de control biológico. Esto nos motiva a estudiar el siguiente modelo simple de cadena alimenticia, razón dependiente, con tres niveles tróficos

$$\begin{cases} x_1'(\tau) &= rx_1\left(1-\dfrac{x_1}{K}\right)-\dfrac{1}{\eta_1}\dfrac{b_1x_1y_1}{a_1y_1+x_1} &, \quad x_1(0)>0 \\ y_1'(\tau) &= \dfrac{b_1x_1y_1}{a_1y_1+x_1}-e_1y_1-\dfrac{1}{\eta_2}\dfrac{b_2y_1z_1}{a_2z_1+y_1} &, \quad y_1(0)>0 \\ z_1'(\tau) &= \dfrac{b_2y_1z_1}{a_2z_1+y_1}-e_2z_1 &, \quad z_1(0)>0 \end{cases} \tag{2.7}$$

donde variables dependientes del tiempo τ, son las siguientes

Variable	Significado	Dimensión
$x_1(\tau)$	Densidad poblacional de las presas	$\frac{presa}{área}$
$y_1(\tau)$	Densidad poblacional del depredador intermedio	$\frac{depredador_i}{área}$
$z_1(\tau)$	Densidad poblacional del depredador superior	$\frac{depredador_s}{área}$

Definición de parámetros

Variable	Significado	Dimensión
r	Tasa de crecimiento intrínseco de la presa	$\frac{1}{t}$
K	Capacidad de carga de la presa	$\frac{presa}{área}$
η_1	Tasa de captura del depredador intermedio	$\frac{depredador_i}{presa}$
η_2	Tasa de captura del depredador superior	$\frac{depredador_s}{depredador_i}$
a_1	Constante de semi saturación del depredador intermedio	$\frac{presa}{depredador_i}$
a_2	Constante de semi saturación del depredador superior	$\frac{depredador_i}{depredador_s}$
b_1	Razón de crecimiento máximo del depredador intermedio	$\frac{1}{t}$
b_2	Razón de crecimiento máximo del depredador superior	$\frac{1}{t}$
e_1	Tasa de muerte del depredador intermedio	$\frac{1}{t}$
e_2	Tasa de muerte del depredador superior	$\frac{1}{t}$

Obsérvese que la relación entre estas tres especies es simple, z_1 se alimenta únicamente de y_1, mientras que y_1 se alimenta únicamente de x_1, y no se considera el reciclaje de nutrientes. Estas relaciones simples producen nuestra llamada cadena alimenticia simple. Una característica diferente de una cadena alimenticia simple es el llamado "efecto dominó", el cual dice: si una especie se extingue, entonces todas las especies de niveles tróficos superiores también lo harán.

Por simplicidad, adimensionalizaremos el sistema (2.7) mediante las siguientes transformaciones

$$\begin{aligned} t &= r\tau \quad \rightarrow \quad dt = r d\tau \\ x &= \frac{x_1}{K} \quad \rightarrow \quad dx = \frac{1}{K} dx_1 \\ y &= \frac{a_1 y_1}{K} \quad \rightarrow \quad dy = \frac{a_1}{K} dy_1 \\ z &= \frac{a_1 a_2 z_1}{K} \quad \rightarrow \quad dz = \frac{a_1 a_2}{K} dz_1 \end{aligned}$$

Entonces de la primera ecuación del sistema (2.7) tenemos

$$\frac{dx_1}{d\tau} = \frac{K\dfrac{dx}{dt}}{r} = Krx\left(1 - \frac{Kx}{K}\right) - \frac{1}{\eta_1}\left(\frac{\dfrac{b_1 xKyK}{a_1}}{\dfrac{a_1 yK}{a_1} + xK}\right)$$

simplificando obtenemos

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) - \frac{b_1}{\eta_1 a_1 r}\left(\frac{xy}{x+y}\right)$$

si añadimos

$$c_1 = \frac{b_1}{\eta_1 a_1 r}$$

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) - \frac{c_1 xy}{x+y}. \tag{2.8}$$

De forma similar, de la segunda ecuación del sistema (2.7) tenemos

$$\frac{dy_1}{d\tau} = \frac{\dfrac{Kdy}{a_1}}{\dfrac{dt}{r}} = \frac{\dfrac{b_1 xKyK}{a_1}}{\dfrac{a_1 yK}{a_1} + xK} - e_1\frac{yK}{a_1} - \frac{1}{\eta_1}\left(\frac{\dfrac{b_2 yKzK}{a_1 a_2 a_1}}{\dfrac{a_2 zK}{a_2 a_1} + \dfrac{yK}{a_1}}\right)$$

al simplificar obtendremos

$$\frac{dy}{dt} = \frac{b_1}{r}\frac{xy}{x+y} - \frac{e_1}{r}y - \frac{b_2}{\eta_2 a_2 r}\frac{yz}{z+y}$$

y si

$$c_2 = \frac{b_2}{\eta_2 a_2 r}, \quad d_1 = \frac{e_1}{r} \text{ y } \quad m_1 = \frac{b_1}{r}$$

se tendrá

$$\frac{dy}{dt} = \frac{m_1 xy}{x+y} - d_1 y - \frac{c_2 yz}{z+y}. \tag{2.9}$$

Finalmente, de la tercera ecuación del sistema (2.7) tenemos

$$\frac{dz_1}{d\tau} = \frac{\dfrac{Kdz}{a_2 a_1}}{\dfrac{dt}{r}} = \frac{\dfrac{b_2 yKzK}{a_1 a_1 a_2}}{\dfrac{a_2 zK}{a_1 a_2} + \dfrac{yK}{a_1}} - \frac{c_2 zK}{a_2 a_1}$$

lo cual implica

$$\frac{dz}{dt} = \frac{b_2}{r}\frac{yz}{z+y} - \frac{e_2}{r}z$$

Consideremos

$$m_2 = \frac{b_2}{r} \quad \text{y} \quad d_2 = \frac{e_2}{r}$$

luego tenemos

$$\frac{dz}{dt} = \frac{m_2 yz}{z+y} - d_2 z. \tag{2.10}$$

Entonces de las ecuaciones (2.8), (2.9) y (2.10) tenemos nuestro modelo de cadena alimenticia con tres niveles tróficos adimensionalizado

$$\begin{cases} x'(t) &= x(1-x) - \dfrac{c_1 xy}{x+y} &, \quad x(0) > 0 \\ y'(t) &= \dfrac{m_1 xy}{x+y} - d_1 y - \dfrac{c_2 yz}{z+y} &, \quad y(0) > 0 \\ z'(t) &= \dfrac{m_2 yz}{z+y} - d_2 z &, \quad z(0) > 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

Capítulo 3

Análisis cualitativo de las soluciones

En este capítulo estudiaremos algunas características cualitativas de las soluciones del sistema (2.11), el cual corresponde a la adimensionalización de nuestro modelo de cadena alimenticia con tres niveles tróficos.

3.1. Dominio y extensión del dominio de las F_i

Del sistema (2.11), consideremos las siguientes funciones

$$F_1(x,y,z) = x(1-x) - \frac{c_1 xy}{x+y} \tag{3.1}$$

$$F_2(x,y,z) = \frac{m_1 xy}{x+y} - d_1 y - \frac{c_2 yz}{z+y} \tag{3.2}$$

$$F_3(x,y,z) = \frac{m_2 yz}{z+y} - d_2 z \tag{3.3}$$

Notamos que las funciones F_i para $i = 1,2,3$ están bien definidas para $x > 0, y > 0$ y $z > 0$.

Es decir, para $i = 1,2,3$ tenemos

$$\begin{array}{rccc} F_i & : & \Omega^\circ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y,z) & \longmapsto & F_i(x,y,z) \end{array}$$

donde

$$\Omega^\circ = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0\right\}.$$

i.e. Ω° es el dominio de las F_i, para cada $i = 1,2,3$.

Notamos que las funciones F_i no están definidas en $(x,y,z) = (0,0,0)$, para $i = 1,2,3$. Pero queremos saber como es su comportamiento cuando $(x,y,z) \to (0,0,0)$.

Proposición 3.1 *Para las funciones F_i con $i = 1,2,3$ definidas por (3.1), (3.2) y (3.3) se cumple*

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} F_i(x,y,z) = 0, \text{ para } i = 1,2,3. \tag{3.4}$$

Demostración. En efecto, para F_1 tenemos

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} F_1(x,y,z) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x(1-x) - \frac{c_1 xy}{x+y} \right)$$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} F_1(x,y,z) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} x(1-x) - \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{c_1 xy}{x+y} \\ &= 0 - c_1 \left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y} \right)\end{aligned}$$

Notemos que $x, y, z \in \Omega^\circ$, por lo tanto se cumple

$$0 < \frac{xy}{x+y} < x$$

luego, por el Teorema del Sandwich concluimos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y} = 0 \tag{3.5}$$

por lo tanto tenemos que

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} F_1(x,y,z) = 0.$$

De forma similar demostraremos los otros límites, así tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} F_2(x,y,z) &= \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left(\frac{m_1 xy}{x+y} - d_1 y - \frac{c_2 yz}{z+y} \right) \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{m_1 xy}{x+y} - \lim_{y\to 0} d_1 y - \lim_{(y,z)\to(0,0)} \frac{c_2 yz}{z+y}\end{aligned}$$

Entonces en vista de (3.5) tenemos

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} F_2(x,y,z) = 0.$$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} F_3(x,y,z) &= \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left(\frac{m_2 yz}{z+y} - d_2 z \right) \\ &= \lim_{(y,z)\to(0,0)} \frac{m_2 yz}{z+y} - \lim_{z\to 0} d_2 z\end{aligned}$$

Análogamente a (3.5) tenemos

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} F_3(x,y,z) = 0.$$

Así tenemos demostrada nuestra proposición. ■

Como consecuencia de la Proposición 3.1, podemos extender el dominio de las funciones F_i para $i = 1, 2, 3$ a

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \right\}. \tag{3.6}$$

De esta manera, en Ω, podemos estudiar diversos escenarios de extinción, lo cual estudiaremos en un capitulo posterior.

3.2. Existencia y unicidad de las soluciones

Para mostrar la existencia y unicidad de las soluciones del sistema (2.11), trabajaremos con las funciones F_i para $i = 1, 2, 3$ definidas por las ecuaciones (3.1), (3.2) y (3.3) las cuales están definidas para en

$$\Omega^\circ = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0\right\}$$

Consideremos $U = \Omega^\circ$, y la función

$$\begin{array}{rccc} F & : & U \subseteq \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (x, y, z) & \longmapsto & F(x, y, z) \end{array}$$

donde

$$F(x, y, z) = (F_1(x(t), y(t), z(t)), F_2(x(t), y(t), z(t)), F_3(x(t), y(t), z(t)))$$

y $w(t) = (x(t), y(t), z(t))$, así tenemos el siguiente PVI asociado a w y F

$$\begin{cases} w' &= F(w) \\ w(0) &= (x(0), y(0), z(0)) \end{cases} \tag{3.7}$$

Con $x(0) > 0$, $y(0) > 0$ y $z(0) > 0$. Notamos que el PVI (3.7) es equivalente a nuestro modelo de cadena alimenticia con tres niveles tróficos definido por el sistema (2.11).

Para la función F notamos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}F_1(x, y, z) &= 1 - 2x - \frac{c_1 y}{x + y} + \frac{c_1 xy}{(x + y)^2} \\ \frac{\partial}{\partial y}F_1(x, y, z) &= -\frac{c_1 x^2}{(x + y)^2} \\ \frac{\partial}{\partial z}F_1(x, y, z) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}F_2(x, y, z) &= \frac{m_1 y^2}{(x + y)^2} \\ \frac{\partial}{\partial y}F_2(x, y, z) &= -d_1 + \frac{m_1 x}{x + y} - \frac{c_2 z}{y + z} - \frac{m_1 xy}{(x + y)^2} + \frac{c_2 yz}{(y + z)^2} \\ \frac{\partial}{\partial z}F_2(x, y, z) &= -\frac{c_2 y^2}{(y + z)^2} \\ \frac{\partial}{\partial x}F_3(x, y, z) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}F_3(x, y, z) &= \frac{m_2 z^2}{(y + z)^2} \\ \frac{\partial}{\partial z}F_3(x, y, z) &= -d_2 + \frac{m_2 y^2}{(y + z)^2} \end{aligned}$$

Es decir para todo $w = (x, y, z) \in U$ existen las derivadas parciales $\dfrac{\partial F_i}{\partial w_j}(w)$ con $1 \leq i, j \leq 3$ las cuales son continuas en U por lo tanto F es de clase C^1 en las variables espaciales (x, y, z)

y por ende localmente lipschitz.

También notamos

- $F_1(0, y_0, z_0) = 0$ para $y_0 > 0$ y $z_0 > 0$.
- $F_2(x_0, 0, z_0) = 0$ para $x_0 > 0$ y $z_0 > 0$.
- $F_3(x_0, y_0, 0) = 0$ para $x_0 > 0$ y $y_0 > 0$.

Luego por el Teorema 1.6 (existencia y unicidad) existe una única solución del PVI (3.7) en algún intervalo $[0, T\rangle$. Adicionalmente si $T < \infty$, entonces

$$\sup_{0 \le t \le T} (x(t) + y(t) + z(t)) = \infty. \tag{3.8}$$

Sea $N(t) = x(t) + y(t) + z(t)$, entonces

$$N'(t) = x'(t) + y'(t) + z'(t)$$

$$N'(t) = x(1-x) - \frac{c_1 xy}{x+y} + \frac{m_1 xy}{x+y} - d_1 y - \frac{c_2 yz}{z+y} + \frac{m_2 yz}{z+y} - d_2 z$$

$$N'(t) \le x(1-x) + \frac{m_1 xy}{x+y} + \frac{m_2 yz}{z+y} \le x + m_1 y + m_2 z$$

si consideramos $\gamma = \text{máx}\{1, m_1, m_2\}$, tenemos

$$N'(t) \le \gamma(x(t) + y(t) + z(t)) = \gamma N(t)$$

por lo tanto

$$N(t) \le N(0)e^{\gamma t} \text{ con } t \in [0, T\rangle,$$

lo que implica

$$x(t) + y(t) + z(t) \le (x(0) + y(0) + z(0))e^{\gamma T}.$$

Lo cual se contradice con (3.8), por lo tanto la única solución del PVI (3.7) esta definida para todo $t \in [0, \infty\rangle$.

3.3. Positividad y acotación de las soluciones

Notemos que el sistema (2.11) es un modelo ecológico-biológico, por ende debe cumplir con ciertas cuestiones biológicas como la positividad de las soluciones y también la acotación de las mismas, ya que no se considera que alguna población crezca indefinidamente.

Lema 3.1 *La región Ω° es invariante por el sistema (2.11). Esto es*

$$\textit{Si } (x(0), y(0), z(0)) \in \Omega^\circ, \textit{ entonces } (x(t), y(t), z(t)) \in \Omega^\circ \textit{ para todo } t \ge 0.$$

Demostración.
Notemos que el sistema (2.11) puede tomar de la siguiente forma

$$\begin{cases} x'(t) &= x\left(1 - x - \dfrac{c_1 y}{x+y}\right) &, \quad x(0) > 0 \\ y'(t) &= y\left(\dfrac{m_1 x}{x+y} - d_1 - \dfrac{c_2 z}{z+y}\right) &, \quad y(0) > 0 \\ z'(t) &= z\left(\dfrac{m_2 y}{z+y} - d_2\right) &, \quad z(0) > 0 \end{cases}$$

y así también, tenemos que

$$(x(0), y(0), z(0)) \in \Omega^{\circ}.$$

Si $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, tenemos

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0)exp\left\{\int_0^t \left(1 - x(s) - \frac{c_1 y(s)}{x(s) + y(s)}\right) ds\right\} > 0 \\ y(t) &= y(0)exp\left\{\int_0^t \left(\frac{m_1 x(s)}{x(s) + y(s)} - d_1 - \frac{c_2 z(s)}{z(s) + y(s)}\right) ds\right\} > 0 \\ z(t) &= z(0)exp\left\{\int_0^t \left(\frac{m_2 y(s)}{z(s) + y(s)} - d_2\right) ds\right\} > 0 \end{aligned}$$

Así tenemos probada la invarianza de Ω° por el sistema (2.11). ■

Lema 3.2 *La soluciones $x(t), y(t)$ y $z(t)$ del sistema (2.11) son acotadas para todo $t \geq 0$.*

Demostración. De la primera ecuación del sistema (2.11), tenemos

$$x'(t) = \underbrace{x(1-x) - \frac{c_1 xy}{x+y}}_{f(x)} \leq \underbrace{x(1-x)}_{g(x)}$$

consideremos los siguientes sistemas

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{x}'(t) &= g(\overline{x}) \\ \overline{x}(0) &= x_0 \end{cases}$$

luego por el teorema de comparación, se cumple que

$$x(t) \leq \overline{x}(t), \quad t \geq 0.$$

Y por propiedad de la ecuación logística, se cumple

$$\lim_{t \to \infty} \overline{x}(t) = 1,$$

así para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $t^* > 0$ tal que

$$x(t) \leq 1 + \varepsilon, \quad t > t^*. \tag{3.9}$$

como x es continua en $[0, t^*]$ por el Teorema 1.3 (Teorema de Weierstrass) existe $t^{\Delta} \in [0, t^*]$ tal que

$$x(t) \leq x(t^{\Delta}) = x_{max} \quad \forall t \in [0, t^*]$$

de lo anterior y (3.9) tenemos

$$x(t) \leq x_{max} + 1 + \varepsilon, \quad t \geq 0. \tag{3.10}$$

Por otro lado, para $s \geq 0$ consideremos

$$\left(\frac{m_1}{c_1} x(s) + y(s) + \frac{c_2}{m_2} z(s)\right)' = \frac{m_1}{c_1} x'(s) + y'(s) + \frac{c_2}{m_2} z'(s)$$

entonces reemplazando x', y' y z' definidos por (2.11), en la igualdad anterior tenemos

$$\left(\frac{m_1}{c_1}x(s)+y(s)+\frac{c_2}{m_2}z(s)\right)' = \frac{m_1}{c_1}x(s)(1-x(s)) - d_1y(s) - \frac{d_2c_2}{m_2}z(s)$$

luego tenemos

$$\left(\frac{m_1}{c_1}x(s)+y(s)+\frac{c_2}{m_2}z(s)\right)' \leq \frac{m_1}{c_1}x(s) - d_1y(s) - \frac{d_2c_2}{m_2}z(s). \tag{3.11}$$

Como también se cumple que

$$d_1 \geq \text{mín}\{d_1,d_2\} \quad \wedge \quad d_2 \geq \text{mín}\{d_1,d_2\}$$

entonces

$$d_1y(s) + \frac{d_2c_2}{m_2}z(s) \geq \text{mín}\{d_1,d_2\}\left(y(s)+\frac{c_2}{m_2}z(s)\right)$$

por lo tanto

$$-d_1y(s) - \frac{d_2c_2}{m_2}z(s) \leq -\,\text{mín}\{d_1,d_2\}\left(y(s)+\frac{c_2}{m_2}z(s)\right)$$

y por (3.11) tenemos

$$\left(\frac{m_1}{c_1}x(s)+y(s)+\frac{c_2}{m_2}z(s)\right)' \leq \underbrace{\frac{m_1}{c_1}x(s) - \text{mín}\{d_1,d_2\}\left(y(s)+\frac{c_2}{m_2}z(s)\right)}_{I}. \tag{3.12}$$

Además notemos que

$$\begin{aligned} I &= \frac{m_1}{c_1}x(s) - \text{mín}\{d_1,d_2\}\left(y(s)+\frac{c_2}{m_2}z(s)\right) \\ &= \frac{m_1}{c_1}x(s) + \text{mín}\{d_1,d_2\}\frac{m_1}{c_1}x(s) - \text{mín}\{d_1,d_2\}\frac{m_1}{c_1}x(s) - \text{mín}\{d_1,d_2\}\left(y(s)+\frac{c_2}{m_2}z(s)\right) \\ &= \frac{m_1}{c_1}x(s)\left(1+\text{mín}\{d_1,d_2\}\right) - \text{mín}\{d_1,d_2\}\left(\frac{m_1}{c_1}x(s)+y(s)+\frac{c_2}{m_2}z(s)\right) \end{aligned}$$

y de (3.10), para $s \geq 0$ tenemos

$$I \leq \frac{m_1}{c_1}(x_{max}+1+\varepsilon)\left(1+\text{mín}\{d_1,d_2\}\right) - \text{mín}\{d_1,d_2\}\left(\frac{m_1}{c_1}x(s)+y(s)+\frac{c_2}{m_2}z(s)\right)$$

denotemos

$$\xi = \frac{m_1}{c_1}(x_{max}+1+\varepsilon)\left(1+\text{mín}\{d_1,d_2\}\right)$$

luego de (3.12) tenemos

$$\left(\frac{m_1}{c_1}x(s)+y(s)+\frac{c_2}{m_2}z(s)\right)' \leq \xi - \text{mín}\{d_1,d_2\}\left(\frac{m_1}{c_1}x(s)+y(s)+\frac{c_2}{m_2}z(s)\right)$$

por comodidad denotemos $\overline{d} = \text{mín}\{d_1,d_2\}$, es decir

$$\left(\frac{m_1}{c_1}x(s)+y(s)+\frac{c_2}{m_2}z(s)\right)' \leq \xi - \overline{d}\left(\frac{m_1}{c_1}x(s)+y(s)+\frac{c_2}{m_2}z(s)\right)$$

$$\left(\frac{m_1}{c_1}x(s)+y(s)+\frac{c_2}{m_2}z(s)\right)' + \overline{d}\left(\frac{m_1}{c_1}x(s)+y(s)+\frac{c_2}{m_2}z(s)\right) \leq \xi$$

multiplicamos por un factor integrante adecuado

$$exp\left\{\overline{d}s\right\}\left[\left(\frac{m_1}{c_1}x(s)+y(s)+\frac{c_2}{m_2}z(s)\right)'+\overline{d}\left(\frac{m_1}{c_1}x(s)+y(s)+\frac{c_2}{m_2}z(s)\right)\right]\leq exp\left\{\overline{d}s\right\}\xi$$

$$\frac{d}{ds}\left[\left(\frac{m_1}{c_1}x(s)+y(s)+\frac{c_2}{m_2}z(s)\right)exp\left\{\overline{d}s\right\}\right]\leq exp\left\{\overline{d}s\right\}\xi$$

integrando de 0 a t

$$\int_0^t d\left[\left(\frac{m_1}{c_1}x(s)+y(s)+\frac{c_2}{m_2}z(s)\right)exp\left\{\overline{d}s\right\}\right]\leq\int_0^t exp\left\{\overline{d}s\right\}\xi ds$$

$$\left(\frac{m_1}{c_1}x(s)+y(s)+\frac{c_2}{m_2}z(s)\right)exp\left\{\overline{d}s\right\}\Big|_0^t\leq\frac{\xi}{\overline{d}}exp\left\{\overline{d}s\right\}\Big|_0^t$$

$$\left(\frac{m_1}{c_1}x(t)+y(t)+\frac{c_2}{m_2}z(t)\right)exp\left\{\overline{d}t\right\}-\underbrace{\left(\frac{m_1}{c_1}x(0)+y(0)+\frac{c_2}{m_2}z(0)\right)}_{K}\leq\frac{\xi}{\overline{d}}exp\left\{\overline{d}t\right\}-\frac{\xi}{\overline{d}}$$

$$\left(\frac{m_1}{c_1}x(t)+y(t)+\frac{c_2}{m_2}z(t)\right)exp\left\{\overline{d}t\right\}-K\frac{\xi}{\overline{d}}exp\left\{\overline{d}t\right\}$$

$$\left(\frac{m_1}{c_1}x(t)+y(t)+\frac{c_2}{m_2}z(t)\right)exp\left\{\overline{d}t\right\}<K+\frac{\xi}{\overline{d}}exp\left\{\overline{d}t\right\}$$

$$\left(\frac{m_1}{c_1}x(t)+y(t)+\frac{c_2}{m_2}z(t)\right)<Kexp\left\{-\overline{d}t\right\}+\frac{\xi}{\overline{d}}$$

y como $t\geq 0$ entonces $exp\left\{-\overline{d}t\right\}\leq 1$, entonces

$$\left(\frac{m_1}{c_1}x(t)+y(t)+\frac{c_2}{m_2}z(t)\right)\leq Kexp\left\{-\overline{d}t\right\}+\frac{\xi}{\overline{d}}\leq K+\frac{\xi}{\overline{d}}$$

es decir

$$\frac{m_1}{c_1}x(t)+y(t)+\frac{c_2}{m_2}z(t)<K+\frac{\xi}{\overline{d}}\quad\forall t\geq 0.$$

de donde, pata $t\geq 0$ tenemos

$$\begin{aligned}x(t) &< \frac{c_1}{m_1}\left(K+\frac{\xi}{\overline{d}}\right)\\ y(t) &< K+\frac{\xi}{\overline{d}}\\ z(t) &< \frac{m_2}{c_2}\left(K+\frac{\xi}{\overline{d}}\right)\end{aligned}$$

denotemos como

$$M_\varepsilon=\text{Máx}\left\{\frac{c_1}{m_1}\left(K+\frac{\xi}{\overline{d}}\right),\ K+\frac{\xi}{\overline{d}},\ \frac{m_2}{c_2}\left(K+\frac{\xi}{\overline{d}}\right)\right\}>0$$

por lo tanto x, y y z están acotados por M_ε. ■

La acotación de las soluciones es una propiedad útil y necesaria en la prueba de algunos resultados de estabilidad. Además también tiene significado biológico ya que también muestra que las especies no aumentan indefinidamente.

Capítulo 4

Dinámica del control biológico

Si asumimos que x es una especie planta, y es una especie plaga y z es una especie usada para controlar a la plaga, podemos estudiar diversos escenarios y condiciones de la dinámica del control biológico. Como por ejemplo veremos las condiciones bajo las cuales las tres especies persisten, o sino también condiciones que llevan a la extinción parcial o total del sistema (2.11).

Como herramienta de control agrícola, obviamente los escenarios que buscamos son los escenarios libres de los depredadores, es decir extinción parcial en el sistema (2.11) ya que buscamos la extinción de la plaga y por el efecto dominó la extinción del agente controlador.

Entre las diversas condiciones y resultados que proveen escenarios donde el control biológico será o no será exitoso. Notemos que el éxito del control biológico esta caracterizado por la extinción del depredador intermedio y superior i.e.

$$\lim_{t\to\infty}(x(t), y(t), z(t)) = (1, 0, 0).$$

4.1. Análisis de la estabilidad

En esta sección solo consideraremos la existencia del punto críticos E_c, el cual definiremos más adelante, así como también analizaremos la estabilidad de dicha solución.

4.1.1. Existencia de E_c punto crítico interior a Ω

Por otro lado consideremos la existencia y unicidad de un punto de equilibrio interior a Ω definido por (3.6), al cual llamaremos E_c; pero esto lo haremos mediante el siguiente lema.

Lema 4.1 *El punto de equilibrio $E_c = (x_c, y_c, z_c)$ del sistema (2.11), interior a Ω, existe y es único si y solamente si se cumplen las siguientes condiciones*

I. $m_2 > d_2$

II. $A > 1$

III. $0 < c_1 < \dfrac{A}{A-1}$

Donde

$$A = \frac{m_1}{\dfrac{c_2(m_2 - d_2)}{m_2} + d_1} \tag{4.1}$$

y E_c esta definido por

$$x_c = \frac{1}{A}\left(c_1 + A(1-c_1)\right), \quad y_c = (A-1)x_c \quad y \quad z_c = \frac{m_2 - d_2}{d_2} y_c.$$

Demostración. Como $E_c = (x_c, y_c, z_c)$ es un punto interior de Ω, por la definición de Ω tenemos que

$$x_c, y_c, z_c > 0$$

Además, como E_c es un punto de equilibrio se cumple que

$$F_i(x_c, y_c, z_c) = 0, \text{ para } i = 1, 2, 3.$$

donde las funciones F_i para $i = 1, 2, 3$ están definidas por (3.1), (3.2) y (3.3). Luego

$$F_3(x_c, y_c, z_c) = z_c \left(\frac{m_2 y_c}{y_c + z_3} - d_2 \right) = 0$$

y como $z_c > 0$, tenemos

$$\frac{m_2 y_c}{y_c + z_c} - d_2 = 0 \tag{4.2}$$

luego se cumple

$$z_c = \frac{m_2 - d_2}{d_2} y_c \tag{4.3}$$

como también $y_c > 0$, entonces

$$\frac{m_2 - d_2}{d_2} > 0 \Rightarrow m_2 > d_2.$$

En forma similar, de

$$F_1(x_c, y_c, z_c) = x_c \left(1 - x_c - \frac{c_1 y_c x_c}{x_c + y_c} \right) = 0$$

como $x_c > 0$, tenemos que

$$1 - x_c - \frac{c_1 y_c x_c}{x_c + y_c} = 0 \tag{4.4}$$

despejamos y_c de forma conveniente para obtener

$$y_c = \frac{(1 - x_c)x_c}{c_1 - (1 - x_c)}. \tag{4.5}$$

Además tenemos que

$$F_2(x_c, y_c, z_c) = y_c \left(\frac{m_1 x_c}{x_c + y_c} - d_1 - \frac{c_2 z_c}{y_c + z_c} \right) = 0$$

como $y_c > 0$, se cumple

$$\frac{m_1 x_c}{x_c + y_c} - d_1 - \frac{c_2 z_c}{y_c + z_c} = 0 \tag{4.6}$$

en consecuencia se cumple

$$\frac{m_1 x_c}{x_c + y_c} - d_1 = \frac{c_2}{1 + \frac{y_c}{z_c}} = 0$$

reemplazamos (4.3) en la igualdad anterior

$$\frac{m_1 x_c}{x_c + y_c} - d_1 = \frac{c_2}{1 + \frac{y_c}{\frac{m_2 - d_2}{d_2} y_c}} = 0$$

$$\frac{m_1 x_c}{x_c + y_c} = d_1 + \frac{c_2}{1 + \dfrac{d_2}{m_2 - d_2}}$$

$$\frac{m_1}{1 + \dfrac{y_c}{x_c}} = d_1 + \frac{c_2(m_2 - d_2)}{m_2}$$

despejando y_c convenientemente, obtenemos

$$y_c = \left(\frac{m_1}{\dfrac{(m_2 - d_2)c_2}{m_2} + d_1} - 1 \right) x_c$$

luego tenemos

$$y_c = (A - 1)\, x_c \tag{4.7}$$

como $y_c > 0$ y $x_c > 0$ entonces tenemos que

$$A - 1 > 0 \Rightarrow A > 1.$$

Por otro lado, si reemplazamos (4.7) en (4.5) tenemos

$$(A - 1)\, x_c = \frac{(1 - x_c)x_c}{c_1 - (1 - x_c)}$$

$$A - 1 = \frac{1 - x_c}{c_1 - (1 - x_c)}$$

$$A - 1 = \frac{1}{\dfrac{c_1}{1 - x_c} - 1}$$

$$\frac{c_1}{1 - x_c} = \frac{1}{A - 1} + 1$$

despejando x_c convenientemente, tenemos

$$x_c = \frac{1}{A}\left(c_1 + A(1 - c_1)\right) \tag{4.8}$$

como $x_c > 0$ y $A > 1$ tenemos

$$c_1 + A(1 - c_1) > 0 \Rightarrow A > c_1(A - 1) > 0 \Rightarrow 0 < c_1 < \frac{A}{A - 1}$$

Hasta el momento hemos verificado las condiciones necesarias para que exista el punto E_c, para ver la unicidad, no es complicado ya que de (4.8) tenemos que x_c es un valor fijo, de (4.7) y (4.3) tenemos la dependencia de y_c y z_c de x_c, por lo tanto E_c es único. ■

4.1.2. Estabilidad local del punto crítico E_c

Notemos que E_0 indica la extinción total del sistema, por lo que analizaremos su estabilidad en una sección posterior junto con otros escenarios de extinción. A continuación solo estudiaremos la estabilidad para E_c, veremos las condiciones bajo las cuales el punto crítico E_c es estable. Para los resultados siguientes asumiremos que E_c existe, por consiguiente se satisfacen las condiciones del Lema 4.1, y estudiaremos su estabilidad local.

Empezaremos calculando la matriz Jacobiana del sistema (2.11), es decir calcularemos las derivadas parciales respecto a x, y y z de las funciones F_1, F_2 y F_3. Así tenemos

$$J(x,y,z)|_{(x_c,y_c,z_c)} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial x}F_1(x,y,z) & \frac{\partial}{\partial y}F_1(x,y,z) & \frac{\partial}{\partial z}F_1(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial x}F_2(x,y,z) & \frac{\partial}{\partial y}F_2(x,y,z) & \frac{\partial}{\partial z}F_2(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial x}F_3(x,y,z) & \frac{\partial}{\partial y}F_3(x,y,z) & \frac{\partial}{\partial z}F_3(x,y,z) \end{array} \right] \Bigg|_{(x_c,y_c,z_c)}$$

De la ecuación (3.1) tenemos

$$F_1(x,y,z) = x\left(1 - x - \frac{c_1 y}{x+y}\right)$$

derivando a F_1 con respecto a x

$$\frac{\partial}{\partial x}F_1(x,y,z) = 1 - x - \frac{c_1 y}{x+y} + x\left(-1 + \frac{c_1 y}{(x+y)^2}\right)$$

evaluando en E_c

$$\frac{\partial}{\partial x}F_1(x_c,y_c,z_c) = 1 - x_c - \frac{c_1 y_c}{x_c+y_c} + x_c\left(-1 + \frac{c_1 y_c}{(x_c+y_c)^2}\right)$$

reemplazando la ecuación (4.4), tenemos

$$\frac{\partial}{\partial x}F_1(x_c,y_c,z_c) = \frac{c_1 y_c}{x_c+y_c} - \frac{c_1 y_c}{x_c+y_c} + x_c\left(-1 + \frac{c_1 y_c}{(x_c+y_c)^2}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}F_1(x_c,y_c,z_c) = x_c\left(-1 + \frac{c_1 y_c}{(x_c+y_c)^2}\right)$$

denotemos $m_{1,1} = \dfrac{\partial}{\partial x}F_1(x_c,y_c,z_c)$, es decir

$$m_{1,1} = x_c\left(-1 + \frac{c_1 y_c}{(x_c+y_c)^2}\right). \tag{4.9}$$

Ahora derivamos a F_1 con respecto a y, así tenemos

$$\frac{\partial}{\partial y}F_1(x,y,z) = \frac{-c_1 x(x+y) + c_1 xy}{(x+y)^2} = -\frac{c_1 x^2}{(x+y)^2}$$

evaluando en E_c

$$\frac{\partial}{\partial y}F_1(x_c,y_c,z_c) = -\frac{c_1 x_c^2}{(x_c+y_c)^2}$$

denotemos $m_{1,2} = \dfrac{\partial}{\partial y} F_1(x_c, y_c, z_c)$, es decir

$$m_{1,2} = -\frac{c_1 x_c^2}{(x_c + y_c)^2}. \tag{4.10}$$

Ahora derivamos a F_1 con respecto a z, así tenemos

$$\frac{\partial}{\partial z} F_1(x, y, z) = 0$$

Evaluamos en E_c, y denotemos $m_{1,3} = \dfrac{\partial}{\partial z} F_1(x_c, y_c, z_c)$, es decir

$$m_{1,3} = 0. \tag{4.11}$$

Ahora trabajaremos con F_2, de manera análoga lo anterior, de la ecuación (3.2) tenemos

$$F_2(x, y, z) = y\left(\frac{m_1 x}{x + y} - d_1 - \frac{c_2 z}{z + y}\right)$$

derivando a F_2 con respecto a x obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial x} F_2(x, y, z) = \frac{m_1 y(x + y) - m_1 xy}{(x + y)^2} = \frac{m_1 y^2}{(x + y)^2}$$

Evaluamos en E_c, y denotemos $m_{2,1} = \dfrac{\partial}{\partial x} F_2(x_c, y_c, z_c)$, es decir

$$m_{2,1} = \frac{m_1 y_c^2}{(x_c + y_c)^2}. \tag{4.12}$$

ahora derivamos a F_2 con respecto a y, así obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial y} F_2(x, y, z) = \frac{m_1 x}{x + y} - d_1 - \frac{c_2 z}{z + y} + y\left(-\frac{m_1 x}{(x + y)^2} + \frac{c_2 z}{(y + z)^2}\right)$$

reemplazando E_c, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial y} F_2(x_c, y_c, z_c) = \frac{m_1 x_c}{x_c + y_c} - d_1 - \frac{c_2 z_c}{z_c + y_c} + y_c\left(-\frac{m_1 x_c}{(x_c + y_c)^2} + \frac{c_2 z_c}{(y_c + z_c)^2}\right)$$

reemplazando la ecuación (4.6), tenemos

$$\frac{\partial}{\partial y} F_2(x_c, y_c, z_c) = \frac{c_2 z_c}{z_c + y_c} - \frac{c_2 z_c}{z_c + y_c} + y_c\left(-\frac{m_1 x_c}{(x_c + y_c)^2} + \frac{c_2 z_c}{(y_c + z_c)^2}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} F_2(x_c, y_c, z_c) = y_c\left(-\frac{m_1 x_c}{(x_c + y_c)^2} + \frac{c_2 z_c}{(y_c + z_c)^2}\right)$$

denotemos $m_{2,2} = \dfrac{\partial}{\partial y} F_2(x_c, y_c, z_c)$, es decir

$$m_{2,2} = y_c\left(-\frac{m_1 x_c}{(x_c + y_c)^2} + \frac{c_2 z_c}{(y_c + z_c)^2}\right). \tag{4.13}$$

ahora derivamos a F_2 con respecto a z, obteniendo

$$\frac{\partial}{\partial z} F_2(x, y, z) = \frac{-c_2 y(y + z) + c_2 yz}{(y + z)^2} = -\frac{c_2 y^2}{(y + z)^2}$$

Evaluamos en E_c, y denotemos $m_{2,3} = \dfrac{\partial}{\partial z}F_2(x_c, y_c, z_c)$, es decir

$$m_{2,3} = -\frac{c_2 y_c^2}{(y_c + z_c)^2}. \tag{4.14}$$

Análogamente a lo anterior, trabajamos con F_3, de la ecuación (3.3) tenemos

$$F_3(x, y, z) = z\left(\frac{m_2 y}{z + y} - d_2\right)$$

derivamos a F_3 con respecto a x, así tenemos

$$\frac{\partial}{\partial x}F_3(x, y, z) = 0$$

Evaluamos en E_c, y denotemos $m_{3,1} = \dfrac{\partial}{\partial x}F_3(x_c, y_c, z_c)$, es decir

$$m_{3,1} = 0. \tag{4.15}$$

ahora derivamos a F_3 con respecto a y, obteniendo

$$\frac{\partial}{\partial y}F_3(x, y, z) = \frac{m_2 y(y + z) - m_2 yz}{(y + z)^2} = \frac{m_2 z^2}{(y + z)^2}$$

Evaluamos en E_c, y denotemos $m_{3,2} = \dfrac{\partial}{\partial y}F_3(x_c, y_c, z_c)$, es decir

$$m_{3,2} = \frac{m_2 z_c^2}{(y_c + z_c)^2}. \tag{4.16}$$

ahora derivamos a F_3 con respecto a z, obteniendo

$$\frac{\partial}{\partial z}F_3(x, y, z) = \frac{m_2 y(y + z) - m_2 yz}{(y + z)^2} = \frac{m_2 y^2}{(y + z)^2} - d_2$$

Evaluando en E_c tenemos

$$\frac{\partial}{\partial z}F_3(x_c, y_c, z_c) = \frac{m_2 y_c^2}{(y_c + z_c)^2} - d_2$$

reemplazando convenientemente la ecuación (4.2), tenemos

$$\frac{\partial}{\partial z}F_3(x_c, y_c, z_c) = \frac{m_2 y_c^2}{(y_c + z_c)^2} - \frac{m_2 y_c}{y_c + z_c}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}F_3(x_c, y_c, z_c) = \frac{m_2 y_c}{y_c + z_c}\left(\frac{y_c}{y_c + z_c} - 1\right) = -\frac{m_2 y_c z_c}{(y_c + z_c)^2}$$

denotemos $m_{3,3} = \dfrac{\partial}{\partial z}F_3(x_c, y_c, z_c)$, es decir

$$m_{3,3} = -\frac{m_2 y_c z_c}{(y_c + z_c)^2}. \tag{4.17}$$

Si denotamos

$$M = J(x, y, z)|_{(x_c, y_c, z_c)}$$

por las ecuaciones del (4.9) al (4.17) tenemos

$$M = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & 0 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ 0 & m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix}.$$

$$M = \begin{bmatrix} x_c\left(-1+\dfrac{c_1 y_c}{(x_c+y_c)^2}\right) & -\dfrac{c_1 x_c^2}{(x_c+y_c)^2} & 0 \\ \dfrac{m_1 y_c^2}{(x_c+y_c)^2} & y_c\left(-\dfrac{m_1 x_c}{(x_c+y_c)^2}+\dfrac{c_2 z_c}{(y_c+z_c)^2}\right) & -\dfrac{c_2 y_c^2}{(y_c+z_c)^2} \\ 0 & \dfrac{m_2 z_c^2}{(y_c+z_c)^2} & -\dfrac{m_2 y_c z_c}{(y_c+z_c)^2} \end{bmatrix}$$

El polinomio característico de M esta dado por $P_M(\lambda) = det(M - \lambda I)$, es decir

$$P_M(\lambda) = \begin{vmatrix} m_{1,1}-\lambda & m_{1,2} & 0 \\ m_{2,1} & m_{2,2}-\lambda & m_{2,3} \\ 0 & m_{3,2} & m_{3,3}-\lambda \end{vmatrix}$$

como $P_M(\lambda)$ es una matriz de 3×3 podemos utilizar la regla de Sarrus, obteniendo

$$P_M(\lambda) = (m_{1,1}-\lambda)(m_{2,2}-\lambda)(m_{3,3}-\lambda) - m_{1,2}m_{2,1}(m_{3,3}-\lambda) - m_{2,3}m_{3,2}(m_{1,1}-\lambda).$$

expandiendo y agrupando convenientemente obtenemos

$$P_M(\lambda) = \lambda^3 + A_1\lambda^2 + A_2\lambda + A_3$$

donde

$$\begin{aligned} A_1 &= -m_{1,1} - m_{2,2} - m_{3,3}, \\ A_2 &= m_{2,2}m_{3,3} + m_{1,1}m_{2,2} + m_{1,1}m_{3,3} - m_{1,2}m_{2,1} - m_{2,3}m_{3,2}, \\ A_3 &= m_{1,2}m_{2,1}m_{3,3} + m_{1,1}m_{2,3}m_{3,2} - m_{1,1}m_{2,2}m_{3,3}. \end{aligned}$$

Para analizar la estabilidad de E_c utilizaremos el criterio de Routh (Teorema 1.2) entonces de $P_M(\lambda)$ tenemos

$$\begin{array}{c|cc} \lambda^3 & 1 & A_2 \\ \lambda^2 & A_1 & A_3 \\ \lambda^1 & \dfrac{A_1A_2 - A_3}{A_1} & \\ \lambda^0 & A_3 & \end{array}$$

para que E_c sea estable se necesita que todos los signos de la primera columna del arreglo anterior sean iguales es decir que $A_1, \dfrac{A_1A_2 - A_3}{A_1}$ y A_3 sean positivos.

Además notemos que si $A_1 > 0, A_3 > 0$ y

$$\frac{A_1A_2 - A_3}{A_1} > 0 \quad \Rightarrow \quad A_1A_2 > A_3 \quad \Rightarrow \quad A_2 > 0$$

En la siguiente proposición daremos condiciones suficientes para la estabilidad local de E_c.

Proposición 4.1 *Si $m_{1,1} < 0$ y $m_{2,2} < 0$ entonces E_c es local y asintóticamente estable.*

Demostración. Por el análisis previo, será suficiente probar que $A_1 > 0$, $A_3 > 0$ y $\dfrac{A_1A_2 - A_3}{A_1} > 0$.

En efecto como $A_1 = -m_{1,1} - m_{2,2} - m_{3,3}$, reemplazamos la ecuación (4.17) obteniendo

$$A_1 = -m_{1,1} - m_{2,2} + \frac{m_2 y_c z_c}{(y_c + z_c)^2}$$

y como $m_{1,1} < 0$ y $m_{2,2} < 0$ entonces

$$A_1 = -m_{1,1} - m_{2,2} + \frac{m_2 y_c z_c}{(y_c + z_c)^2} > 0.$$

Por otro lado notamos que $A_3 = -det(M)$, es decir

$$A_3 = -\left(m_{1,1}m_{2,2}m_{3,3} - m_{1,2}m_{2,1}m_{3,3} - m_{1,1}m_{2,3}m_{3,2}\right)$$

$$A_3 = -\left(m_{1,1}\left[m_{2,2}m_{3,3} - m_{2,3}m_{3,2}\right] - m_{1,2}m_{2,1}m_{3,3}\right)$$

por comodidad denotemos

$$A_3 = -(A_{3,I} - A_{3,II}) = A_{3,II} - A_{3,I} \tag{4.18}$$

donde

$$A_{3,I} = m_{1,1}\left[m_{2,2}m_{3,3} - m_{2,3}m_{3,2}\right] \quad \wedge \quad A_{3,II} = m_{1,2}m_{2,1}m_{3,3}$$

y analizaremos cada sumando por separado.

Reemplazando las ecuaciones (4.12), (4.10) y (4.17) en $A_{3,II}$ obtenemos

$$A_{3,II} = \left(\frac{m_1 y_c^2}{(x_c + y_c)^2}\right)\left(-\frac{c_1 x_c^2}{(x_c + y_c)^2}\right)\left(-\frac{m_2 y_c z_c}{(y_c + z_c)^2}\right)$$

es decir, tenemos

$$A_{3,II} = \left(\frac{m_1 y_c^2}{(x_c + y_c)^2}\right)\left(\frac{c_1 x_c^2}{(x_c + y_c)^2}\right)\left(\frac{m_2 y_c z_c}{(y_c + z_c)^2}\right). \tag{4.19}$$

Por otro lado reemplazando las ecuaciones (4.9), (4.13), (4.17), (4.16) y (4.14) en $A_{3,I}$ obtenemos

$$A_{3,I} = x_c\left(-1 + \frac{c_1 y_c}{(x_c + y_c)^2}\right)\left[-y_c\left(-\frac{m_1 x_c}{(x_c + y_c)^2} + \frac{c_2 z_c}{(y_c + z_c)^2}\right)\frac{m_2 y_c z_c}{(y_c + z_c)^2} + \frac{m_2 z_c^2}{(y_c + z_c)^2}\left(\frac{c_2 y_c^2}{(y_c + z_c)^2}\right)\right]$$

$$A_{3,I} = x_c\left(-1 + \frac{c_1 y_c}{(x_c + y_c)^2}\right)\left(\frac{m_2 y_c z_c}{(y_c + z_c)^2}\right)\left[-y_c\left(-\frac{m_1 x_c}{(x_c + y_c)^2} + \frac{c_2 z_c}{(y_c + z_c)^2}\right) + \frac{c_2 z_c y_c}{(y_c + z_c)^2}\right]$$

así tenemos

$$A_{3,I} = x_c\left(-1 + \frac{c_1 y_c}{(x_c + y_c)^2}\right)\left(\frac{m_2 y_c z_c}{(y_c + z_c)^2}\right)\left(\frac{m_1 x_c y_c}{(x_c + y_c)^2}\right). \tag{4.20}$$

Reemplazando las ecuaciones (4.19) y (4.20) en (4.18)

$$A_3 = \left(\frac{m_1 y_c^2}{(x_c + y_c)^2}\right)\left(\frac{c_1 x_c^2}{(x_c + y_c)^2}\right)\left(\frac{m_2 y_c z_c}{(y_c + z_c)^2}\right) - x_c\left(-1 + \frac{c_1 y_c}{(x_c + y_c)^2}\right)\left(\frac{m_2 y_c z_c}{(y_c + z_c)^2}\right)\left(\frac{m_1 x_c y_c}{(x_c + y_c)^2}\right)$$

factorizando convenientemente tenemos

$$A_3 = \frac{m_1 m_2 x_c^2 y_c^2 z_c}{(x_c+y_c)^2(y_c+z_c)^2}\left[\frac{c_1 y_c}{(x_c+y_c)^2} - \left(-1 + \frac{c_1 y_c}{(x_c+y_c)^2}\right)\right]$$

así tenemos

$$A_3 = \frac{m_1 m_2 x_c^2 y_c^2 z_c}{(x_c+y_c)^2(y_c+z_c)^2} > 0.$$

Ahora solo nos resta probar $A_1 A_2 > A_3$, lo cual es equivalente a probar $A_1 A_2 - A_3 > 0$.

En efecto, tenemos

$$A_1 A_2 = -\left(m_{1,1} + m_{2,2} + m_{3,3}\right)\left(m_{2,2}m_{3,3} + m_{1,1}m_{2,2} + m_{1,1}m_{3,3} - m_{1,2}m_{2,1} - m_{2,3}m_{3,2}\right)$$

efectuando la multiplicación tenemos

$$\begin{aligned} A_1 A_2 \;=\; & -m_{1,1}m_{2,2}m_{3,3} - m_{1,1}^2 m_{2,2} - m_{1,1}^2 m_{3,3} + m_{1,1}m_{1,2}m_{2,1} + m_{1,1}m_{2,3}m_{3,2} - m_{2,2}^2 m_{3,3} \\ & -m_{1,1}m_{2,2}^2 - m_{1,1}m_{2,2}m_{3,3} + m_{1,2}m_{2,1}m_{2,2} + m_{2,2}m_{2,3}m_{3,2} - m_{2,2}m_{3,3}^2 - m_{1,1}m_{2,2}m_{3,3} \\ & -m_{1,1}m_{3,3}^2 + m_{1,2}m_{2,1}m_{3,3} + m_{3,3}m_{2,3}m_{3,2} \end{aligned}$$

Simplificando y agrupando términos tenemos

$$\begin{aligned} A_1 A_2 \;=\; & -m_{1,1}^2 m_{2,2} - m_{1,1}^2 m_{3,3} - m_{3,3}^2 m_{2,2} - m_{3,3}^2 m_{1,1} - m_{2,2}^2 m_{3,3} - m_{2,2}^2 m_{1,1} \\ & -3m_{1,1}m_{2,2}m_{3,3} + m_{1,1}m_{1,2}m_{2,1} + m_{1,1}m_{2,3}m_{3,2} + m_{1,2}m_{2,1}m_{2,2} \\ & +m_{2,2}m_{2,3}m_{3,2} + m_{1,2}m_{2,1}m_{3,3} + m_{2,3}m_{3,2}m_{3,3} \end{aligned}$$

como $A_3 = m_{1,2}m_{2,1}m_{3,3} + m_{1,1}m_{2,3}m_{3,2} - m_{1,1}m_{2,2}m_{3,3}$, entonces

$$\begin{aligned} A_1 A_2 - A_3 \;=\; & -m_{1,1}^2 m_{2,2} - m_{1,1}^2 m_{3,3} - m_{3,3}^2 m_{2,2} - m_{3,3}^2 m_{1,1} - m_{2,2}^2 m_{3,3} - m_{2,2}^2 m_{1,1} \\ & -2m_{1,1}m_{2,2}m_{3,3} + m_{1,1}m_{1,2}m_{2,1} + m_{1,2}m_{2,1}m_{2,2} + m_{2,2}m_{2,3}m_{3,2} + m_{2,3}m_{3,2}m_{3,3} \end{aligned}$$

y de la ecuaciones (4.10), (4.12), (4.14), (4.16) y (4.17) tenemos

$$m_{1,2} < 0, \;\; m_{2,1} > 0, \;\; m_{2,3} < 0, \;\; m_{3,2} > 0 \quad \text{y} \quad m_{3,3} < 0$$

entonces

$$A_1 A_2 - A_3 > 0.$$

Así tenemos probada las condiciones para la estabilidad local de E_c. ■

Ahora veamos que podemos expresar las condiciones de la proposición anterior ($m_{1,1} < 0$ y $m_{2,2} < 0$) en términos de c_1 y c_2.

Empecemos mostrando las condiciones para que $m_{1,1} < 0$. De las ecuaciones (4.9) y (4.5) tenemos

$$m_{1,1} = x_c\left(-1 + \frac{c_1 y_c}{(x_c+y_c)^2}\right)$$

$$m_{1,1} = x_c\left(-1 + \frac{c_1 (A-1) x_c}{(x_c+(A-1)x_c)^2}\right)$$

$$m_{1,1} = x_c\left(-1 + \frac{c_1 (A-1) x_c}{A^2 x_c^2}\right)$$

Como $x_c > 0$ y queremos que $m_{1,1} < 0$, entonces se debe cumplir

$$-1 + \frac{c_1 (A-1) x_c}{A^2 x_c^2} < 0$$

$$c_1(A-1)x_c < A^2x_c^2$$
$$c_1(A-1) < A^2x_c$$

reemplazamos (4.8) tenemos

$$\begin{aligned} c_1(A-1) &< A^2\left[\frac{1}{A}\left(c_1+A(1-c_1)\right)\right] \\ &< A\left(c_1+A(1-c_1)\right) \\ &< A\left(A-c_1(A-1)\right) \\ &< A\left(A-1+1-c_1(A-1)\right) \\ &< A\left((A-1)(1-c_1)+1\right) \end{aligned}$$

es decir, se cumple

$$c_1(A-1) < A\left((A-1)(1-c_1)+1\right) \tag{4.21}$$

Notemos que si se cumple la relación (4.21) entonces $m_{1,1} < 0$, además el recíproco también es cierto.

Proposición 4.2 *Si $c_1 > 1$ entonces $m_{1,1} < 0$ si y sólo si $1 < A < \sqrt{\frac{c_1}{c_1-1}}$*

Demostración. Suponemos valido que $c_1 > 1$ y $m_{1,1} < 0$, entonces se cumple (4.21), es decir

$$c_1(A-1) < A\left((A-1)(1-c_1)+1\right)$$
$$c_1A - c_1 < A^2 - c_1A^2 + c_1A$$
$$A^2(c_1-1) < c_1$$
$$A < \sqrt{\frac{c_1}{c_1-1}}$$

y por el Lema 4.1, tenemos

$$1 < A < \sqrt{\frac{c_1}{c_1-1}}$$

Ahora suponemos valido $c_1 > 1$ y $1 < A < \sqrt{\frac{c_1}{c_1-1}}$, luego

$$A^2 < \frac{c_1}{c_1-1}$$
$$A^2(c_1-1) < c_1$$
$$-c_1 < -A^2(c_1-1)$$
$$c_1A - c_1 < -A^2(c_1-1) + c_1A$$
$$c_1A - c_1 < A^2 - c_1A^2 + c_1A$$
$$c_1(A-1) < A\left((A-1)(1-c_1)+1\right)$$
$$c_1(A-1) < A^2\left[\frac{1}{A}\left((A-1)(1-c_1)+1\right)\right]$$

reemplazando la ecuación (4.8), tenemos

$$c_1(A-1) < A^2x_c$$
$$c_1(A-1)x_c < A^2x_c^2$$

$$-1 + \frac{c_1(A-1)x_c}{A^2 x_c^2} < 0$$

y como $x_c > 0$, entonces se cumple

$$m_{1,1} = x_c \left(-1 + \frac{c_1(A-1)x_c}{A^2 x_c^2} \right) < 0$$

Y así queda demostrada nuestra proposición. ■

Proposición 4.3 *Si* $0 < c_1 \leq 1$ *entonces* $m_{1,1} < 0$

Demostración. Notemos que

$$A^2 - 1 < A^2 \quad \Rightarrow \quad 1 < \frac{A^2}{A^2 - 1}$$

como $0 < c_1 \leq 1$ entonces

$$0 < c_1 \leq 1 < \frac{A^2}{A^2 - 1}$$

$$c_1 < \frac{A^2}{A^2 - 1}$$

$$c_1(A^2 - 1) < A^2$$

$$-c_1 < A^2 - c_1 A^2$$

$$c_1 A - c_1 < A^2 - c_1 A^2 + c_1 A$$

$$c_1(A - c_1) < A(A - c_1 A + c_1)$$

$$c_1(A - c_1) < A^2 \left[\frac{1}{A}(A - c_1 A + c_1)\right]$$

reemplazando la ecuación (4.8) tenemos

$$c_1(A - c_1) < A^2 x_c$$

$$c_1(A - c_1)x_c < A^2 x_c^2$$

$$\frac{c_1(A - c_1)x_c}{A^2 x_c^2} < 1$$

$$-1 + \frac{c_1(A - c_1)x_c}{A^2 x_c^2} < 0$$

y como $x_c > 0$, entonces se cumple

$$m_{1,1} = x_c \left(-1 + \frac{c_1(A-1)x_c}{A^2 x_c^2}\right) < 0$$

Y así queda demostrada nuestra proposición. ■

Ahora veremos las condiciones para que $m_{2,2} < 0$. De la ecuación (4.13) tenemos

$$m_{2,2} = y_c \left(-\frac{m_1 x_c}{(x_c + y_c)^2} + \frac{c_2 z_c}{(y_c + z_c)^2}\right)$$

y como $y_c > 0$ y queremos que $m_{2,2} < 0$, entonces se debe cumplir

$$-\frac{m_1 x_c}{(x_c + y_c)^2} + \frac{c_2 z_c}{(y_c + z_c)^2} < 0$$

$$\frac{c_2 z_c}{(y_c + z_c)^2} < \frac{m_1 x_c}{(x_c + y_c)^2}$$

reemplazado la ecuación (4.3) tenemos

$$\frac{c_2 \left(\frac{m_2 - d_2}{d_2} y_c\right)}{\left(y_c + \left(\frac{m_2 - d_2}{d_2} y_c\right)\right)^2} < \frac{m_1 x_c}{(x_c + y_c)^2}$$

$$\frac{\dfrac{c_2(m_2-d_2)}{d_2}}{y_c\left(1+\dfrac{m_2-d_2}{d_2}\right)^2} < \frac{m_1 x_c}{(x_c+y_c)^2}$$

reemplazado la ecuación (4.5) tenemos

$$\frac{\dfrac{c_2(m_2-d_2)}{d_2}}{(A-1)x_c\left(1+\dfrac{m_2-d_2}{d_2}\right)^2} < \frac{m_1 x_c}{(x_c+(A-1)x_c)^2}$$

$$\frac{\dfrac{c_2(m_2-d_2)}{d_2}}{(A-1)x_c\left(1+\dfrac{m_2-d_2}{d_2}\right)^2} < \frac{m_1}{x_c(1+(A-1))^2}$$

$$\frac{\dfrac{c_2(m_2-d_2)}{d_2}}{(A-1)\left(1+\dfrac{m_2-d_2}{d_2}\right)^2} < \frac{m_1}{(1+(A-1))^2}$$

$$\frac{c_2\left(\dfrac{m_2}{d_2}-1\right)}{(A-1)\left(\dfrac{m_2}{d_2}\right)^2} < \frac{m_1}{A^2}$$

es decir, se cumple

$$\frac{c_2\left(\dfrac{m_2}{d_2}-1\right)}{\left(\dfrac{m_2}{d_2}\right)^2} < \frac{m_1(A-1)}{A^2} \tag{4.22}$$

Además, notemos que

$$\frac{m_1(A-1)}{A^2} = m_1\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{A^2}\right)$$

reemplazando la ecuación (4.1) tenemos

$$\frac{m_1(A-1)}{A^2} = m_1\left[\frac{\dfrac{c_2(m_2-d_2)}{m_2}+d_1}{m_1} - \left(\frac{\dfrac{c_2(m_2-d_2)}{m_2}+d_1}{m_1}\right)^2\right]$$

$$\frac{m_1(A-1)}{A^2} = \frac{c_2(m_2-d_2)}{m_2}+d_1-\frac{1}{m_1}\left(\frac{c_2(m_2-d_2)}{m_2}+d_1\right)^2$$

entonces por la relación (4.22) tenemos

$$\frac{c_2\left(\dfrac{m_2}{d_2}-1\right)}{\left(\dfrac{m_2}{d_2}\right)^2} < \frac{c_2(m_2-d_2)}{m_2}+d_1-\frac{1}{m_1}\left(\frac{c_2(m_2-d_2)}{m_2}+d_1\right)^2$$

es decir

$$0 < -\frac{1}{m_1}\left(\frac{c_2(m_2-d_2)}{m_2}+d_1\right)^2+\frac{c_2(m_2-d_2)}{m_2}+d_1-\frac{c_2\left(\frac{m_2}{d_2}-1\right)}{\left(\frac{m_2}{d_2}\right)^2}$$

Consideremos la función $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = -\frac{1}{m_1}\left(\frac{t(m_2-d_2)}{m_2}+d_1\right)^2+\frac{t(m_2-d_2)}{m_2}+d_1-\frac{t\left(\frac{m_2}{d_2}-1\right)}{\left(\frac{m_2}{d_2}\right)^2} \tag{4.23}$$

tenemos que

$$g(c_2) = -\frac{1}{m_1}\left(\frac{c_2(m_2-d_2)}{m_2}+d_1\right)^2+\frac{c_2(m_2-d_2)}{m_2}+d_1-\frac{c_2\left(\frac{m_2}{d_2}-1\right)}{\left(\frac{m_2}{d_2}\right)^2} > 0.$$

Resumiendo lo anterior tenemos la siguiente proposición.

Proposición 4.4 *Para $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por (4.23) se cumple*

$$m_{2,2} < 0 \quad \textit{si y sólo si} \quad 0 < g(c_2).$$

Por otro lado, tenemos

$$g(0) = -\frac{d_1^2}{m_1}+d_1 = \frac{d_1(m_1-d_1)}{m_1}$$

Por el Lema 4.1 tenemos que $A > 1$ y $m_2 > d_2$, es decir

$$\frac{m_1}{\frac{c_2(m_2-d_2)}{m_2}+d_1} > 1 \quad \Rightarrow \quad m_1-d_1 > \frac{c_2(m_2-d_2)}{m_1} > 0 \quad \Rightarrow \quad g(0) > 0$$

Además

$$\begin{aligned} g\left(\frac{m_2(m_1-d_1)}{m_2-d_2}\right) &= -\frac{1}{m_1}\left[\left(\frac{m_2(m_1-d_1)}{m_2-d_2}\right)\left(\frac{m_2-d_2}{m_2}\right)+d_1\right]^2+\left(\frac{m_2(m_1-d_1)}{m_2-d_2}\right)\left(\frac{m_2-d_2}{m_2}\right) \\ &\quad +d_1-\left(\frac{m_2(m_1-d_1)}{m_2-d_2}\right)\left(\frac{d_2(m_2-d_2)}{m_2^2}\right) \end{aligned}$$

$$g\left(\frac{m_2(m_1-d_1)}{m_2-d_2}\right) = -\frac{m_1^2}{m_1}+m_1-\frac{d_2(m_1-d_1)}{m_2}$$

es decir

$$g\left(\frac{m_2(m_1-d_1)}{m_2-d_2}\right) = \frac{d_2(d_1-m_1)}{m_2}$$

como $m_1-d_1>0$ entonces

$$g\left(\frac{m_2(m_1-d_1)}{m_2-d_2}\right) = \frac{d_2(d_1-m_1)}{m_2} < 0.$$

Por otro lado, al ser $g(0)>0$ y $g\left(\frac{m_2(m_1-d_1)}{m_2-d_2}\right)<0$, entonces

$$\exists\, c_2^* > 0 \quad \text{tal que} \quad g(c_2^*) = 0.$$

Tal y como se muestra en la Figura 4.1.

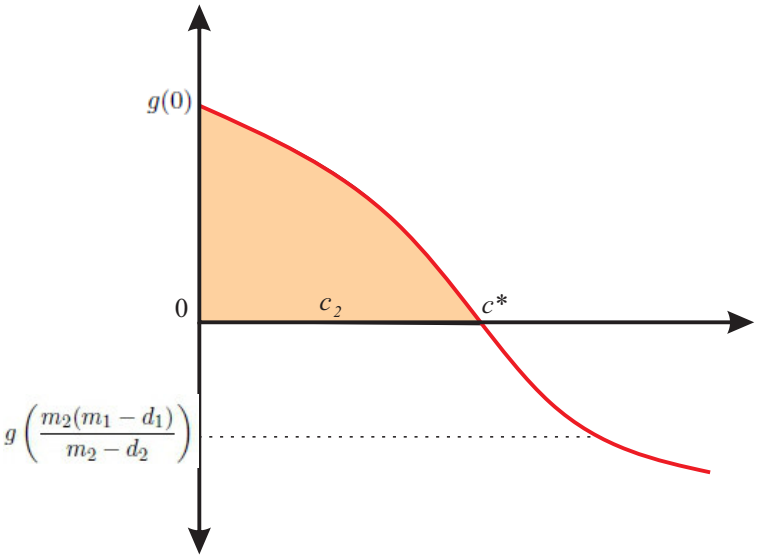


Figura 4.1: Existencia de c_2^*

Como se cumple que

$$m_{2,2} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < g(c_2)$$

Resumiendo lo anterior, tenemos que

$$\exists\, c_2^* \in \left\langle 0, \frac{m_2(m_1 - d_1)}{m_2 - d_2} \right\rangle \quad \text{tal que} \quad m_{2,2} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < c_2 < c_2^*.$$

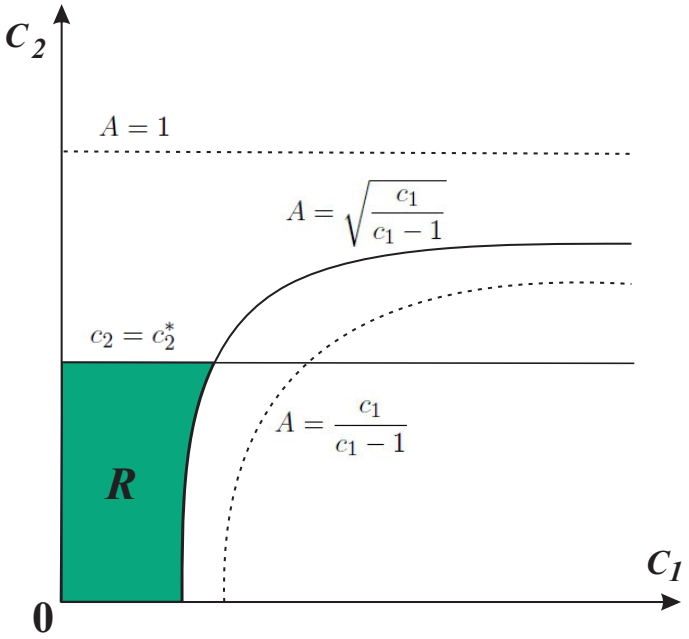


Figura 4.2: Región estable para E_c

En la Figura 4.2, R es la región en la cual E_c es asintoticamente estable, además esta delimitada por las curvas $c_2 = c_2^*$ y $A = \sqrt{\dfrac{c_1}{c_1 - 1}}$.

4.1.3. Inestabilidad local del punto crítico E_c

En el apartado anterior asumimos la existencia del punto E_c, es decir que se satisfacen las condiciones del Lema 4.1, y estudiamos las condiciones bajo las cuales E_c es estable. Esto lo hicimos mediante el criterio de Routh, para lo cual calculamos la matriz Jacobiana del sistema (2.11) evaluamos en $E_c = (x_c, y_c, z_c)$, calculamos el polinomio característico de dicha matriz

$$P_M(\lambda) = \lambda^3 + A_1\lambda^2 + A_2\lambda + A_3$$

y para que E_c sea estable, se debía verificar que $A_1 > 0$, $A_3 > 0$ y $A_1A_2 > A_3$ esto se debía a que en el arreglo

$$\begin{array}{c|cc} \lambda^3 & 1 & A_2 \\ \lambda^2 & A_1 & A_3 \\ \lambda^1 & \dfrac{A_1A_2 - A_3}{A_1} & \\ \lambda^0 & A_3 & \end{array}$$

los componentes de la primera columna deben tener el mismo signo. Entonces para que E_c sea inestable basta que aparezca un componente negativo en la primera columna del arreglo anterior. Entonces para discutir la inestabilidad de E_c; consideraremos la posibilidad de escoger c_1 y c_2 de tal manera que $A_1 < 0$.

Esto lo haremos mediante la siguiente proposición

Proposición 4.5 *Si se cumplen*

i. $0 < m_2 - d_2 < m_1 - d_1$

ii. $\dfrac{m_2}{d_2} < (m_1 - d_1) - (m_2 - d_2)$

Entonces E_c es inestable cuando

$$m_2 < c_2 < \frac{m_2(m_1 - d_1)}{m_2 - d_2}.$$

Y c_2 esta proximo al valor de $\dfrac{m_2(m_1 - d_1)}{(m_2 - d_2)}$.

Demostración. Recordemos que

$$A_1 = -m_{1,1} - m_{2,2} - m_{3,3}$$

reemplazando las ecuaciones (4.9), (4.13) y (4.17) tenemos

$$\begin{aligned} A_1 &= -x_c\left(-1 + \frac{c_1y_c}{(x_c + y_c)^2}\right) - y_c\left(-\frac{m_1x_c}{(x_c + y_c)^2} + \frac{c_2z_c}{(y_c + z_c)^2}\right) + \frac{m_2y_cz_c}{(y_c + z_c)^2} \\ &= x_c - \frac{c_1x_cy_c}{(x_c + y_c)^2} + \frac{m_1x_cy_c}{(x_c + y_c)^2} - \frac{c_2y_cz_c}{(y_c + z_c)^2} + \frac{m_2y_cz_c}{(y_c + z_c)^2} \end{aligned}$$

es decir

$$A_1 = x_c - \frac{x_cy_c(c_1 - m_1)}{(x_c + y_c)^2} - \frac{y_cz_c(c_2 - m_2)}{(y_c + z_c)^2}$$

reemplazando la ecuación (4.3) tenemos

$$\begin{aligned} A_1 &= x_c - \frac{x_c y_c (c_1 - m_1)}{(x_c + y_c)^2} - \frac{y_c \left(\frac{m_2 - d_2}{d_2} y_c \right) (c_2 - m_2)}{\left(y_c + \frac{m_2 - d_2}{d_2} y_c \right)^2} \\ &= x_c - \frac{x_c y_c (c_1 - m_1)}{(x_c + y_c)^2} - \frac{\frac{(m_2 - d_2)(c_2 - m_2)}{d_2}}{\left(\frac{m_2}{d_2} \right)^2} \end{aligned}$$

reemplazando la ecuación (4.7) tenemos

$$\begin{aligned} A_1 &= x_c - \frac{x_c (A-1) x_c (c_1 - m_1)}{(x_c + (A-1)x_c)^2} - \frac{\frac{(m_2 - d_2)(c_2 - m_2)}{d_2}}{\left(\frac{m_2}{d_2} \right)^2} \\ &= x_c - \frac{(A-1)(c_1 - m_1)}{A^2} - \frac{\frac{(m_2 - d_2)(c_2 - m_2)}{d_2}}{\left(\frac{m_2}{d_2} \right)^2} \end{aligned}$$

así tenemos

$$A_1 = x_c - \frac{(A-1)(c_1 - m_1)}{A^2} + \frac{d_2 (m_2 - c_2)(m_2 - d_2)}{m_2^2}$$

por comodidad denotemos

$$I_1 = x_c - \frac{(A-1)(c_1 - m_1)}{A^2} \quad \wedge \quad I_2 = \frac{d_2 (m_2 - c_2)(m_2 - d_2)}{m_2^2}$$

es decir

$$A_1 = I_1 + I_2.$$

Para probar que $A_1 < 0$, analizaremos sus componentes I_1 e I_2, pero para esto necesitaremos las siguientes afirmaciones

$$A > 1 \quad \Leftrightarrow \quad c_2 < \frac{m_2 (m_1 - d_1)}{m_2 - d_2}. \tag{4.24}$$

En efecto, si $A > 1$ entonces

$$\frac{m_1}{\frac{c_2 (m_2 - d_2)}{m_2} + d_1} > 1$$

$$m_1 - d_1 > \frac{c_2 (m_2 - d_2)}{m_2}$$

$$\frac{m_2 (m_1 - d_1)}{m_2 - d_2} > c_2$$

Por otro lado, si $c_2 < \frac{m_2 (m_1 - d_1)}{m_2 - d_2}$, entonces

$$\frac{c_2 (m_2 - d_2)}{m_2} < m_1 - d_1$$

$$1 < \frac{m_1}{\dfrac{c_2(m_2-d_2)}{m_2}+d_1}$$
$$1 < A$$

Así tenemos probada nuestra primera afirmación. También notemos que se cumple

$$A = 1 \quad \Leftrightarrow \quad c_2 = \frac{m_2(m_1-d_1)}{m_2-d_2}. \tag{4.25}$$

En efecto si $A = 1$ entonces

$$\frac{m_1}{\dfrac{c_2(m_2-d_2)}{m_2}+d_1} = 1$$
$$m_1 - d_1 = \frac{c_2(m_2-d_2)}{m_2}$$
$$\frac{m_2(m_1-d_1)}{(m_2-d_2)} = c_2$$

Por otro lado, si $c_2 = \dfrac{m_2(m_1-d_1)}{(m_2-d_2)}$ entonces

$$c_2(m_2-d_2) = m_2(m_1-d_1)$$
$$\frac{c_2(m_2-d_2)}{m_2}+d_1 = m_1$$
$$1 = \frac{m_1}{\dfrac{c_2(m_2-d_2)}{m_2}+d_1}$$

Así tenemos probada nuestra segunda afirmación.

Ahora analizaremos el comportamiento de I_2. De la hipótesis (i) de nuestra proposición tenemos

$$0 < m_2 - d_2 \quad \wedge \quad 0 < m_1 - d_1$$

y si tomamos el caso

$$m_2 < c_2 \quad \Rightarrow \quad m_2 - c_2 < 0$$

así tenemos que

$$I_2 = \frac{d_2(m_2-c_2)(m_2-d_2)}{m_2^2} < 0$$

pero de la existencia de E_c, se cumple (4.24), entonces si

$$m_2 < c_2 < \frac{m_2(m_1-d_1)}{m_2-d_2} \quad \Rightarrow \quad I_2 < 0. \tag{4.26}$$

veamos si el recíproco de (4.26) es cierto, para eso consideremos

$$I_2 = \frac{d_2(m_2-c_2)(m_2-d_2)}{m_2^2} < 0$$

de la hipótesis (i) de nuestra proposición tenemos que $m_2 - d_2 > 0$, por lo tanto si

$$I_2 < 0 \quad \Rightarrow \quad m_2 - c_2 < 0 \quad \Rightarrow \quad m_2 < c_2$$

para la existencia de E_c se cumple (4.24), entonces

$$m_2 < c_2 < \frac{m_2(m_1-d_1)}{m_2-d_2}$$

Así hemos probado que

$$m_2 < c_2 < \frac{m_2(m_1 - d_1)}{m_2 - d_2} \quad \Leftrightarrow \quad I_2 < 0. \tag{4.27}$$

Ahora analizaremos el comportamiento de I_1, para eso notemos que

$$I_1 = x_c - \frac{(A-1)(c_1 - m_1)}{A^2} = x_c - (c_1 - m_1)\left(\frac{A-1}{A^2}\right)$$

reemplazando la ecuación (4.8) tenemos

$$I_1 = \frac{1}{A}\left(c_1 + A(1 - c_1)\right) - (c_1 - m_1)\left(\frac{A-1}{A^2}\right). \tag{4.28}$$

Para que E_c exista es necesario que $A > 1$, pero si consideremos que $A \approx 1$ entonces

$$\frac{m_1}{\frac{c_2(m_2 - d_2)}{m_2} + d_1} \approx 1$$

$$m_1 - d_1 \approx \frac{c_2(m_2 - d_2)}{m_2}$$

$$c_2 \approx \frac{m_2(m_1 - d_1)}{(m_2 - d_2)}$$

además, de (4.28) tenemos

$$I_1 \approx \frac{1}{1}\left(c_1 + 1(1 - c_1)\right) - (c_1 - m_1)\left(\frac{1-1}{1^2}\right) \approx 1.$$

Por otro lado

$$I_2 = \frac{d_2(m_2 - c_2)(m_2 - d_2)}{m_2^2} = (m_2 - c_2)\left(\frac{d_2(m_2 - d_2)}{m_2^2}\right)$$

$$I_2 \approx \left(m_2 - \frac{m_2(m_1 - d_1)}{(m_2 - d_2)}\right)\left(\frac{d_2(m_2 - d_2)}{m_2^2}\right)$$

$$I_2 \approx \left(\frac{m_2(m_2 - d_2) - m_2(m_1 - d_1)}{(m_2 - d_2)}\right)\left(\frac{d_2(m_2 - d_2)}{m_2^2}\right)$$

$$I_2 \approx \frac{d_2}{m_2}\left((m_2 - d_2) - (m_1 - d_1)\right)$$

de la hipótesis (i) de nuestra proposición tenemos

$$0 < m_2 - d_2 < m_1 - d_1 \quad \Rightarrow \quad (m_2 - d_2) - (m_1 - d_1) < 0$$

es decir

$$I_2 \approx \frac{d_2}{m_2}\left((m_2 - d_2) - (m_1 - d_1)\right) < 0$$

y por consecuencia de la afirmación (4.27), tenemos que

$$m_2 < c_2 < \frac{m_2(m_1 - d_1)}{m_2 - d_2}$$

Como $A_1 = I_1 + I_2$ se cumple

$$A_1 \approx 1 + \frac{d_2}{m_2}\left((m_2 - d_2) - (m_1 - d_1)\right)$$

De la hipótesis (ii) de nuestra proposición tenemos

$$\frac{m_2}{d_2} < (m_1 - d_1) - (m_2 - d_2)$$

$$1 < \frac{d_2}{m_2}\left((m_1 - d_1) - (m_2 - d_2)\right)$$

$$1 - \frac{d_2}{m_2}\left((m_1 - d_1) - (m_2 - d_2)\right) < 0$$

$$1 + \frac{d_2}{m_2}\left((m_2 - d_2) - (m_1 - d_1)\right) < 0$$

así tenemos que

$$A_1 \approx 1 + \frac{d_2}{m_2}\left((m_2 - d_2) - (m_1 - d_1)\right) < 0.$$

Es decir $A_1 < 0$ para c_2 cercano a $\dfrac{m_2(m_1 - d_1)}{(m_2 - d_2)}$.

Así tenemos probada nuestra proposición. ■

4.2. Escenarios de extinción

En esta sección estudiaremos el comportamiento asintótico de la solución del sistema (2.11) alrededor de $E_0 = (0, 0, 0)$ y $E_1 = (1, 0, 0)$. Examinaremos condiciones que llevan a la extinción de ciertas especies, como la extinción de x y en consecuencia la extinción de y y z (extension total E_0); o la extinción de y y en consecuencia la extinción de z pero no de x (estado libre de depredadores E_1); o la extinción de z mas no la de x e y. Todo esto ocurre cuando el punto de equilibrio E_c, interior a Ω, no existe.

Una de las características de las cadenas alimenticias simples es el efecto dominó, el cual nos dice que si se extingue algún nivel trófico en nuestra cadena alimenticia, entonces también lo harán los niveles tróficos superiores (los que que se alimental de él).

Proposición 4.6 (Efecto dominó) *Sean x, y y z las soluciones del sistema (2.11). Entonces*

- *Si* $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$, *entonces* $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.
- *Si* $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$, *entonces* $\lim_{t\to\infty} z(t) = 0$.

Demostración. En efecto, recordemos que

$$y(t) = y(0)exp\left\{\int_0^t \left(\frac{m_1 x(s)}{x(s) + y(s)} - d_1 - \frac{c_2 z(s)}{z(s) + y(s)}\right) ds\right\}$$

entonces

$$y(t) < y(0)exp\left\{\int_0^t \left(\frac{m_1 x(s)}{x(s) + y(s)} - d_1\right) ds\right\} \tag{4.29}$$

Notemos que existe $\lim_{t\to\infty} y(t)$, ya que de no ser así entonces

$$\limsup y(t) = \overline{y} > 0$$

Luego por la Proposición 1.1 existe una sucesión (t_n) tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ y además

$$y'(t_n) = 0 \ \wedge \lim_{n\to\infty} y(t_n) = \overline{y}.$$

De la segunda ecuación del sistema (2.11) tenemos

$$y'(t_n) = \frac{m_1 x(t_n) y(t_n)}{x(t_n) + y(t_n)} - d_1 y(t_n) - \frac{c_2 y(t_n) z(t_n)}{z(t_n) + y(t_n)} < \frac{m_1 x(t_n) y(t_n)}{x(t_n) + y(t_n)} - d_1 y(t_n)$$

$$0 < \frac{m_1 x(t_n) y(t_n)}{x(t_n) + y(t_n)} - d_1 y(t_n)$$

$$d_1 y(t_n) < \frac{m_1 x(t_n) y(t_n)}{x(t_n) + y(t_n)}$$

$$\lim_{n\to\infty} d_1 y(t_n) < \lim_{n\to\infty} \frac{m_1 x(t_n) y(t_n)}{x(t_n) + y(t_n)}$$

$$d_1 \overline{y} \leq \frac{m_1 0 \overline{y}}{0 + \overline{y}}$$

$$d_1 \leq 0$$

lo cual es una contradicción con la positividad de los parámetros por lo tanto si existe el límite.

Afirmamos que $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.

Como y es positivo y acotado entonces supondremos que $\lim_{t\to\infty} y(t) > 0$.

Es decir

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = L > 0.$$

Así tenemos para $0 < \varepsilon < L$ existe $t_1^* > 0$ tal que

$$L - \varepsilon < y(t) < L + \varepsilon \quad \forall t > t_1^*.$$

Para el mismo ε, del $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$, existe $t_2^* > 0$ tal que

$$0 < x(t) < \varepsilon \quad \forall t > t_2^*.$$

Tomando $t^* = \max\{t_1^*, t_2^*\}$ tenemos

$$L - \varepsilon < x(t) + y(t) < L + 2\varepsilon \quad \forall t > t^*$$

$$\frac{1}{L + 2\varepsilon} < \frac{1}{x(t) + y(t)} < \frac{1}{L - \varepsilon} \quad \forall t > t^*$$

luego

$$\frac{m_1 x(t)}{x(t) + y(t)} < \frac{m_1 x(t)}{L - \varepsilon} < \frac{m_1 \varepsilon}{L - \varepsilon} \quad \forall t > t^*$$

es decir; $\forall t > t^*$, se cumple

$$\frac{m_1 x(t)}{x(t) + y(t)} - d_1 < \frac{m_1 \varepsilon}{L - \varepsilon} - d_1 \tag{4.30}$$

Ahora tomando

$$0 < \varepsilon < \frac{d_1 L}{m_1 + d_1} < L$$

notamos que

$$m_1 \varepsilon + d_1 \varepsilon < d_1 L$$

$$m_1\varepsilon < d_1L - d_1\varepsilon$$

$$\frac{m_1\varepsilon}{L-\varepsilon} < d_1$$

entonces

$$\frac{m_1\varepsilon}{L-\varepsilon} - d_1 < 0. \tag{4.31}$$

De (4.29) y la positividad de y tenemos

$$0 < y(t) < y(0)exp\left\{\int_0^{t^*}\left(\frac{m_1x(s)}{x(s)+y(s)} - d_1\right)ds + \int_{t^*}^{t}\left(\frac{m_1x(s)}{x(s)+y(s)} - d_1\right)ds\right\}$$

por (4.30) tenemos

$$0 < y(t) < y(0)exp\left\{\int_0^{t^*}\left(\frac{m_1x(s)}{x(s)+y(s)} - d_1\right)ds + \int_{t^*}^{t}\left(\frac{m_1\varepsilon}{L-\varepsilon} - d_1\right)ds\right\}$$

entonces

$$0 \leq \lim_{t\to\infty} y(t) \leq y(0)exp\left\{\int_0^{t^*}\left(\frac{m_1x(s)}{x(s)+y(s)} - d_1\right)ds + \lim_{t\to\infty}\int_{t^*}^{t}\left(\frac{m_1\varepsilon}{L-\varepsilon} - d_1\right)ds\right\}$$

y por (4.31) concluimos que $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$, lo cual contradice nuestra suposición.
Así tenemos probada la implicación

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \to \lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$$

Para terminar con la demostración de esta proposición, analizaremos el comportamiento de z lo cual haremos de manera análoga a lo anterior, primero recordemos que

$$z(t) = z(0)exp\left\{\int_0^{t}\left(\frac{m_2y(s)}{y(s)+z(s)} - d_2\right)ds\right\}, \tag{4.32}$$

y probaremos, por contradicción, que se cumple

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0 \to \lim_{t\to\infty} z(t) = 0.$$

Notemos que existe $\lim_{t\to\infty} z(t)$, ya que que de no ser así

$$\limsup z(t) = \overline{z} > 0.$$

Luego por la Proposición 1.1 existe una sucesión (t_n) tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ y además

$$z'(t_n) = 0 \quad \wedge \lim_{n\to\infty} z(t_n) = \overline{z}.$$

De la tercera ecuación del sistema (2.11) tenemos

$$z'(t_n) = \frac{m_2y(t_n)z(t_n)}{z(t_n)+y(t_n)} - d_2z(t_n)$$

$$d_2z(t_n) = \frac{m_2y(t_n)z(t_n)}{z(t_n)+y(t_n)}$$

$$\lim_{n\to\infty} d_2z(t_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{m_2y(t_n)z(t_n)}{z(t_n)+y(t_n)}$$

$$d_2\overline{z} = \frac{m_2 0\overline{z}}{\overline{z}+0}$$
$$d_2 = 0.$$

Y esto es una contradicción con la positividad de los parámetros, por lo tanto existe el límite.

Afirmamos que $\lim_{t\to\infty} z(t) = 0$.

Por la positividad y acotación de z podemos suponer que

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = L > 0$$

Así tenemos para $0 < \varepsilon < L$ existe $t_1^* > 0$ tal que

$$L - \varepsilon < z(t) < L + \varepsilon \quad \forall t > t_1^*.$$

Para el mismo ε, de $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ existe $t_2^* > 0$ tal que

$$0 < y(t) < \varepsilon \quad \forall t > t_2^*.$$

Tomando $t^* = \max\{t_1^*, t_2^*\}$ tenemos

$$L - \varepsilon < y(t) + z(t) < L + 2\varepsilon \quad \forall t > t^*$$

$$\frac{1}{L+2\varepsilon} < \frac{1}{y(t)+z(t)} < \frac{1}{L-\varepsilon} \quad \forall t > t^*$$

luego

$$\frac{m_2 y(t)}{y(t)+z(t)} < \frac{m_2 y(t)}{L-\varepsilon} < \frac{m_2\varepsilon}{L-\varepsilon} \quad \forall t > t^*$$

es decir; $\forall t > t^*$, se cumple

$$\frac{m_2 y(t)}{y(t)+z(t)} - d_2 < \frac{m_2\varepsilon}{L-\varepsilon} - d_2 \tag{4.33}$$

Ahora tomando

$$0 < \varepsilon < \frac{d_2 L}{m_2 + d_2} < L$$

notamos que

$$m_2\varepsilon + d_2\varepsilon < d_2 L$$

$$m_2\varepsilon < d_2 L - d_2\varepsilon$$

$$\frac{m_2\varepsilon}{L-\varepsilon} < d_2$$

entonces

$$\frac{m_2\varepsilon}{L-\varepsilon} - d_2 < 0. \tag{4.34}$$

De (4.32) y la positividad de z tenemos

$$0 < z(t) < z(0) exp\left\{\int_0^{t^*}\left(\frac{m_2 y(s)}{y(s)+z(s)} - d_2\right)ds + \int_{t^*}^{t}\left(\frac{m_2 y(s)}{y(s)+z(s)} - d_2\right)ds\right\}$$

por (4.33) tenemos

$$0 < z(t) < z(0)exp\left\{\int_0^{t^*}\left(\frac{m_2 y(s)}{y(s)+z(s)} - d_2\right)ds + \int_{t^*}^{t}\left(\frac{m_2\varepsilon}{L-\varepsilon} - d_2\right)ds\right\}$$

entonces

$$0 \leq \lim_{t\to\infty} z(t) \leq z(0)exp\left\{\int_0^{t^*}\left(\frac{m_2 y(s)}{y(s)+z(s)} - d_2\right)ds + \lim_{t\to\infty}\int_{t^*}^{t}\left(\frac{m_2\varepsilon}{L-\varepsilon} - d_2\right)ds\right\}$$

y por (4.34) concluimos que $\lim_{t\to\infty} z(t) = 0$, lo cual contradice nuestra suposición, por lo tanto se cumple

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0 \to \lim_{t\to\infty} z(t) = 0.$$

Así tenemos que si se extingue x también lo hará y, y si se extingue y también lo hará z. ■

En los siguientes resultados veremos otros casos de extinción y al de final de la sección daremos un teorema que resume las condiciones bajo las cuales se extingue el depredador superior.

Empezaremos viendo las condiciones que hacen que el depredador intermedio y superior se extingan.

Lema 4.2 *Si $m_2 > d_2$ y $0 < A \leq 1$ donde A esta definido por (4.1). Entonces*

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{t\to\infty} z(t) = 0.$$

Demostración.
Tenemos como hipótesis $m_2 > d_2$ y $0 < A \leq 1$, entonces de la ecuación (4.1) tenemos

$$0 < \frac{m_1}{\frac{c_2(m_2-d_2)}{m_2} + d_1} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad m_1 \leq \frac{c_2(m_2-d_2)}{m_2} + d_1$$

luego $\exists\eta \geq 0$ tal que

$$m_1 + \eta = \frac{c_2(m_2-d_2)}{m_2} + d_1$$

entonces

$$\frac{c_2}{m_2}(m_2-d_2) = m_1 + \eta - d_1 \tag{4.35}$$

de la segunda ecuación del sistema (2.11), para $s \geq 0$ tenemos

$$y'(s) = y(s)\left(\frac{m_1 x(s)}{x(s)+y(s)} - d_1 - \frac{c_2 z(s)}{z(s)+y(s)}\right)$$

$$\frac{y'(s)}{y(s)} = \frac{m_1 x(s)}{x(s)+y(s)} - d_1 - \frac{c_2 z(s)}{z(s)+y(s)} - \frac{c_2 y(s)}{y(s)+z(s)} + \frac{c_2 y(s)}{y(s)+z(s)} - \frac{d_2 c_2}{m_2} + \frac{d_2 c_2}{m_2}$$

$$\frac{y'(s)}{y(s)} - \frac{c_2 y(s)}{y(s)+z(s)} + \frac{d_2 c_2}{m_2} = \frac{m_1 x(s)}{x(s)+y(s)} - d_1 - \frac{c_2 z(s)}{z(s)+y(s)} - \frac{c_2 y(s)}{y(s)+z(s)} + \frac{d_2 c_2}{m_2}$$

$$\frac{y'(s)}{y(s)} - \frac{c_2}{m_2}\left(\frac{m_2 y(s)}{y(s)+z(s)} - d_2\right) = \frac{m_1 x(s)}{x(s)+y(s)} - d_1 + \frac{-c_2 z(s) - c_2 y(s)}{z(s)+y(s)} + \frac{d_2 c_2}{m_2}$$

de la tercera ecuación del sistema (2.11) y lo anterior, tenemos

$$\frac{y'(s)}{y(s)} - \frac{c_2}{m_2}\frac{z'(s)}{z(s)} = \frac{m_1 x(s)}{x(s)+y(s)} - d_1 - c_2 + \frac{d_2 c_2}{m_2}$$

$$\frac{y'(s)}{y(s)} - \frac{c_2}{m_2}\frac{z'(s)}{z(s)} = \left(m_1 - \frac{m_1 y(s)}{x(s)+y(s)} - d_1\right) - \frac{c_2}{m_2}(m_2 - d_2)$$

y por (4.35), tenemos

$$\frac{y'(s)}{y(s)} - \frac{c_2}{m_2}\frac{z'(s)}{z(s)} = m_1 - \frac{m_1 y(s)}{x(s)+y(s)} - d_1 - (m_1 + \eta - d_1)$$

$$\frac{y'(s)}{y(s)} - \frac{c_2}{m_2}\frac{z'(s)}{z(s)} = -\frac{m_1 y(s)}{x(s)+y(s)} - \eta \leq -\frac{m_1 y(s)}{x(s)+y(s)}$$

de donde tenemos

$$\frac{d}{ds}\ln y(s) - \frac{c_2}{m_2}\frac{d}{ds}\ln z(s) \leq -\frac{m_1 y(s)}{x(s)+y(s)}$$

$$d\left(\ln y(s) - \frac{c_2}{m_2}\ln z(s)\right) \leq -\frac{m_1 y(s)}{x(s)+y(s)}ds$$

$$\int_0^t d\left(\ln y(s) - \frac{c_2}{m_2}\ln z(s)\right) \leq -\int_0^t \frac{m_1 y(s)}{x(s)+y(s)}ds$$

$$\ln\left(\frac{y(t)}{y(0)}\right) - \frac{c_2}{m_2}\ln\left(\frac{z(t)}{z(0)}\right) \leq -\int_0^t \frac{m_1 y(s)}{x(s)+y(s)}ds$$

$$\ln\left[\frac{\frac{y(t)}{y(0)}}{\left(\frac{z(t)}{z(0)}\right)^{\frac{c_2}{m_2}}}\right] \leq -\int_0^t \frac{m_1 y(s)}{x(s)+y(s)}ds$$

$$y(t) \leq y(0)\left(\frac{z(t)}{z(0)}\right)^{\frac{c_2}{m_2}} exp\left\{-\int_0^t \frac{m_1 y(s)}{x(s)+y(s)}ds\right\}$$

es decir

$$y(t) \leq \frac{y(0)}{(z(0))^{\frac{c_2}{m_2}}}(z(t))^{\frac{c_2}{m_2}} exp\left\{-\int_0^t \frac{m_1 y(s)}{x(s)+y(s)}ds\right\} \tag{4.36}$$

Del Lema 3.2, tenemos que existe $M_\varepsilon > 0$ tal que $x(s) + y(s) < M_\varepsilon$ para $s \geq 0$, de donde

$$\frac{1}{M_\varepsilon} < \frac{1}{x(s)+y(s)}$$

$$\frac{m_1 y(s)}{M_\varepsilon} < \frac{m_1 y(s)}{x(s)+y(s)}$$

$$-\frac{m_1}{M_\varepsilon}\int_0^t y(s)ds > -\int_0^t \frac{m_1 y(s)}{x(s)+y(s)}ds$$

luego tenemos

$$exp\left\{-\int_0^t \frac{m_1 y(s)}{x(s)+y(s)}ds\right\} < exp\left\{-\frac{m_1}{M_\varepsilon}\int_0^t y(s)ds\right\}$$

por la desigualdad (4.36) y positividad de y, para $t \geq 0$, tenemos

$$0 < y(t) < \frac{y(0)}{(z(0))^{\frac{c_2}{m_2}}} (z(t))^{\frac{c_2}{m_2}} exp\left\{-\frac{m_1}{M_\varepsilon}\int_0^t y(s)ds\right\} \tag{4.37}$$

Adicionalmente, del Lema 3.2, tenemos la existencia de $N > 0$ tal que $z(t) < N$ para todo $t \geq 0$, entonces se cumple

$$(z(t))^{\frac{c_2}{m_2}} < N^{\frac{c_2}{m_2}}$$

$$\frac{y(0)}{(z(0))^{\frac{c_2}{m_2}}} (z(t))^{\frac{c_2}{m_2}} < \frac{y(0)}{(z(0))^{\frac{c_2}{m_2}}} N^{\frac{c_2}{m_2}} = M$$

es decir existe algún $M > 0$ tal que

$$\frac{y(0)}{(z(0))^{\frac{c_2}{m_2}}} (z(t))^{\frac{c_2}{m_2}} < M$$

luego por la desigualdad (4.37) tenemos

$$0 < y(t) < Mexp\left\{-\frac{m_1}{M_\varepsilon}\int_0^t y(s)ds\right\} \tag{4.38}$$

Afirmamos que $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$.

En efecto por la positividad y acotación de y tenemos

$$\exists C > 0 \quad \text{tal que} \quad |y'(t)| < C, \ \ \forall t \geq 0.$$

Ya que de la segunda ecuación de sistema (2.11)

$$y'(t) = \frac{m_1 xy}{x+y} - d_1 y - \frac{c_2 yz}{z+y}$$

tenemos

$$y'(t) \leq \frac{m_1 xy}{x+y} \leq m_1 x$$

$$y'(t) < m_1 M_\varepsilon.$$

Así también

$$-d_1 y - \frac{c_2 yz}{z+y} \leq y'(t).$$

Pero como

$$0 < y < M_\varepsilon \ \ \Rightarrow \ \ -y > -M_\varepsilon$$

$$\frac{c_2 yz}{z+y} \leq yc_2 \ \ \Rightarrow \ \ -\frac{c_2 yz}{z+y} \geq -yc_2$$

entonces

$$-d_1 M_\varepsilon - c_2 M_\varepsilon < y'(t).$$

Por lo tanto

$$|y'(t)| < C, \quad \text{con} \quad C = \text{máx}\left\{m_1 M_\varepsilon, (d_1 + c_2)M_\varepsilon\right\} > 0.$$

Entonces y es lipschitziana y por ende uniformemente continua.

Luego por el Teorema del Valor Medio $\exists c \in < a, b >$ tal que $\int_a^b y(t)dt = y(c)(b-a)$, tomando $a = 0$ y $b = t$, tenemos

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t y(s)ds = \lim_{t\to\infty} y(c)(t-0) = +\infty.$$

Luego tomando límite a (4.38)

$$0 \leq \lim_{t\to\infty} y(t) \leq \lim_{t\to\infty} Mexp\left\{-\frac{m_1}{M_\varepsilon}\int_0^t y(s)ds\right\} = 0$$

Por el Teorema del Sandwich tenemos

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$$

Y por la Proposición 4.6 (efecto dominó), se cumple

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0 \ \rightarrow \ \lim_{t\to\infty} z(t) = 0.$$

Así tenemos probado el lema. ■

A continuación veremos un teorema que nos da las condiciones para la extinción de el depredador intermedio y superior, pero no de la especie presa x.

El teorema sugiere que si el depredador intermedio tiene una capacidad de consumo baja (caracterizado por $c_1 < 1$) entonces las presas persistirán.

Teorema 4.1 *Sea $m_2 > d_2$ y $0 < A \leq 1$. Tal que si $c_1 < 1$, entonces*

$$\lim_{t\to\infty} (x(t), y(t), z(t)) = (1, 0, 0).$$

Demostración. Como se verifican las condiciones del Lema 4.2 tenemos que

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to\infty} z(t) = 0.$$

De la primera ecuación del sistema (2.11) tenemos

$$x' = x - x^2 - \frac{c_1 xy}{x+y}$$

además

$$y < x + y \quad \rightarrow \quad \frac{xy}{x+y} < x$$

por consiguiente

$$-\frac{c_1 xy}{x+y} > -c_1 x$$

entonces

$$x' = x - x^2 - \frac{c_1 xy}{x+y} > x - x^2 - c_1 x$$

es decir

$$x' > x(1 - c_1 - x)$$

como $c_1 < 1$, por el Teorema de Comparación y propiedad de la ecuación logística tenemos

$$\begin{aligned} \lim\inf x(t) &\geq \lim\inf \frac{(1-c_1)x(0)exp\{(1-c_1)t\}}{1-c_1+x(0)\left[exp\{(1-c_1)t\}-1\right]} \\ &\geq \lim_{t\to\infty} \frac{(1-c_1)x(0)exp\{(1-c_1)t\}}{1-c_1+x(0)\left[exp\{(1-c_1)t\}-1\right]} \\ &\geq 1-c_1 \end{aligned}$$

es decir

$$\lim\inf x(t) \geq 1-c_1 > 0$$

como $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$, para $0 < \varepsilon < c_1$ existe $t_1^* > 0$ tal que

$$y(t) < \left(\frac{1-c_1}{2}\right)\left(\frac{\varepsilon}{c_1-\varepsilon}\right) \quad \forall t > t_1^*$$

y como $\lim\inf x(t) \geq 1-c_1$, existe $t_2^* > 0$ tal que

$$x(t) \geq 1-c_1 > \frac{1-c_1}{2} \quad \forall t > t_2^*$$

es decir

$$\frac{1}{x(t)} < \frac{2}{1-c_1}$$

Sea $t^* = \max\{t_1^*, t_2^*\}$ para el cual se cumple

$$\frac{y(t)}{x(t)} < \left(\frac{1-c_1}{2}\right)\left(\frac{\varepsilon}{c_1-\varepsilon}\right)\left(\frac{2}{1-c_1}\right) = \frac{\varepsilon}{c_1-\varepsilon}$$

Así para $t > t^*$ se cumple

$$\begin{aligned} y(t)(c_1-\varepsilon) &< \varepsilon x(t) \\ c_1 y(t) &< \varepsilon(x(t)+y(t)) \\ \frac{c_1 y(t)}{x(t)+y(t)} &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Es decir

$$-\frac{c_1 y(t)}{x(t)+y(t)} > -\varepsilon \quad \forall t > t^*$$

entonces para $t > t^*$, de la primera ecuación del sistema (2.11) tenemos

$$x' = x - x^2 - \frac{c_1 xy}{x+y} > x - x\varepsilon - x^2$$

entonces del Teorema de Comparación y propiedad de la ecuación logística tenemos

$$\begin{aligned} \lim\inf x(t) &\geq \lim\inf \frac{(1-\varepsilon)x(0)exp\{(1-\varepsilon)t\}}{1-\varepsilon+x(0)\left[exp\{(1-\varepsilon)t\}-1\right]} \\ &\geq \lim_{t\to\infty} \frac{(1-\varepsilon)x(0)exp\{(1-\varepsilon)t\}}{1-\varepsilon+x(0)\left[exp\{(1-\varepsilon)t\}-1\right]} \\ &\geq 1-\varepsilon \end{aligned}$$

es decir

$$\lim\inf x(t) \geq 1-\varepsilon$$

haciendo $\varepsilon \to 0$, tenemos

$$\lim \inf x(t) \geq 1. \tag{4.39}$$

Por otro lado, de la primera ecuación del sistema (2.11) tenemos

$$x' = x - x^2 - \frac{c_1 xy}{x+y} < x - x^2$$

es decir

$$x' < x(1-x)$$

análogamente a lo anterior, por el Teorema de Comparación y propiedad de la ecuación logística tenemos

$$\begin{aligned} \lim \sup x(t) &\leq \lim \sup \frac{x(0) exp\{t\}}{1 + x(0)\left[exp\{t\} - 1\right]} \\ &\leq \lim_{t\to\infty} \frac{x(0) exp\{t\}}{1 + x(0)\left[exp\{t\} - 1\right]} \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

es decir

$$\lim \sup x(t) \leq 1. \tag{4.40}$$

entonces de las inecuaciones (4.39) y (4.40) tenemos

$$1 \leq \lim \inf x(t) \leq \lim \sup x(t) \leq 1$$

esto quiere decir que

$$\lim \inf x(t) = \lim \sup x(t) = 1$$

por consiguiente

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 1.$$

Así termina la demostración del teorema. ■

A continuación veremos un teorema que nos da las condiciones para la extinción total de las tres especies. El teorema indica que si el depredador intermedio tiene una capacidad de consumo alta y agresiva (caracterizado por valores grandes de c_1) y hay poca reposición de las presas para saciar dichas necesidades, entonces las tres especies se extinguirán.

Teorema 4.2 *Sea $m_2 > d_2$ y $0 < A \leq 1$. Tal que si*

$$c_1 > 1 + d_1 + c_2 \quad y \quad \delta := \frac{c_1 - (1 + d_1 + c_2)}{1 + d_1 + c_2} > \frac{x(0)}{y(0)},$$

entonces

$$\lim_{t\to\infty} (x(t), y(t), z(t)) = (0, 0, 0).$$

Demostración. Sea $m_2 > d_2$ y $0 < A \leq 1$, entonces por el Lema 4.2, tenemos

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{t\to\infty} z(t) = 0.$$

Si $c_1 > 1 + d_1 + c_2$ y $\delta := \dfrac{c_1 - (1 + d_1 + c_2)}{1 + d_1 + c_2} > \dfrac{x(0)}{y(0)}$, entonces podemos afirmar

$$\frac{x(t)}{y(t)} < \delta, \quad \forall t > 0.$$

En efecto, probaremos esto por contradicción, entonces existe un $t_1 > 0$ tal que es el primer punto donde

$$\frac{x(t_1)}{y(t_1)} = \delta \quad \text{y} \quad \frac{x(t)}{y(t)} < \delta \quad \text{para} \quad t \in [0, t_1\rangle\,. \tag{4.41}$$

Para $t \in [0, t_1\rangle$, tenemos

$$\frac{x(t)}{y(t)} < \delta$$

$$1 + \frac{x}{y} < 1 + \delta$$

$$-\frac{1}{1+\frac{x}{y}} < -\frac{1}{1+\delta},$$

y de la primera ecuación del sistema (2.11) tenemos

$$x' = x - x^2 - \frac{c_1 xy}{x+y} < x - \frac{c_1 xy}{x+y}$$

luego

$$x' < x\left(1 - \frac{c_1 y}{x+y}\right) = x\left(1 - \frac{c_1}{1+\frac{x}{y}}\right)$$

así para $t \in [0, t_1\rangle$, tenemos

$$x' < x\left(1 - \frac{1}{1+\delta}\right). \tag{4.42}$$

Además, de la segunda ecuación del sistema (2.11) tenemos

$$y' = \frac{m_1 xy}{x+y} - y\left(d_1 + \frac{c_2 z}{y+z}\right)$$

$$y' > -y\left(d_1 + \frac{c_2 z}{y+z}\right),$$

de la positividad de y y z tenemos

$$z < z + y \;\Rightarrow\; \frac{z}{y+z} < 1 \;\Rightarrow\; -c_2 < -\frac{c_2 z}{y+z}$$

por lo tanto, se cumple

$$y' > y\,(-d_1 - c_2) \quad \forall t > 0. \tag{4.43}$$

Por otro lado, tenemos

$$\delta = \frac{c_1 - (1 + d_1 + c_2)}{1 + d_1 + c_2}$$

$$\delta + 1 = \frac{c_1 - (1 + d_1 + c_2)}{1 + d_1 + c_2} + 1 = \frac{c_1}{1 + d_1 + c_2}$$

$$\frac{1 + d_1 + c_2}{c_1} = \frac{1}{\delta + 1}$$

$$1 + d_1 + c_2 = \frac{c_1}{\delta + 1}$$

Así tenemos

$$1 - \frac{c_1}{\delta + 1} = -d_1 - c_2. \tag{4.44}$$

De (4.42), tenemos para $t \in [0, t_1\rangle$

$$\frac{x'}{x} < 1 - \frac{1}{1+\delta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\ln x(t)\right) < 1 - \frac{1}{1+\delta}$$

$$\int_0^{t_1} d\left(\ln x(t)\right) \leq \int_0^{t_1} \left(1 - \frac{1}{1+\delta}\right) dt$$

$$\ln x(t_1) - \ln x(0) \leq \left(1 - \frac{1}{1+\delta}\right) t_1$$

$$\ln\left(\frac{x(t_1)}{x(0)}\right) \leq \left(1 - \frac{1}{1+\delta}\right) t_1$$

$$x(t_1) \leq x(0) exp\left\{\left(1 - \frac{1}{1+\delta}\right) t_1\right\}$$

por la ecuación (4.44), para $t \in [0, t_1\rangle$ tenemos

$$x(t_1) \leq x(0) exp\left\{-(d_1 + c_2)t_1\right\}. \tag{4.45}$$

De la ecuación (4.43), tenemos

$$\frac{y'}{y} > -d_1 - c_2$$

$$\frac{d}{dt}(\ln y(t)) > -(d_1 + c_2)$$

$$\int_0^{t_1} d(\ln y(t)) \geq -\int_0^{t_1} (d_1 + c_2) dt$$

$$\ln y(t_1) - \ln y(0) \geq -(d_1 + c_2)t_1$$

$$\ln\left(\frac{y(t_1)}{y(0)}\right) \geq -(d_1 + c_2)t_1$$

$$y(t_1) \geq y(0) exp\left\{-(d_1 + c_2)t_1\right\}$$

luego tenemos

$$y(0) \leq y(t_1) exp\left\{(d_1 + c_2)t_1\right\}. \tag{4.46}$$

De la relación (4.45) tenemos

$$x(t_1)y(0) \leq x(0)y(0) exp\left\{-(d_1 + c_2)t_1\right\}$$

y por la relación (4.46) tenemos

$$x(t_1)y(0) < x(0)y(0) exp\left\{-(d_1 + c_2)t_1\right\} \leq x(0)y(t_1) exp\left\{(d_1 + c_2)t_1\right\} exp\left\{-(d_1 + c_2)t_1\right\}$$

por consiguiente

$$x(t_1)y(0) \leq x(0)y(t_1) exp\left\{((d_1 + c_2) - (d_1 + c_2))t_1\right\} = x(0)y(t_1)$$

es decir

$$\frac{x(t_1)}{y(t_1)} \leq \frac{x(0)}{y(0)}$$

y de nuestras hipótesis iniciales tenemos

$$\delta = \frac{x(t_1)}{y(t_1)} \leq \frac{x(0)}{y(0)} < \delta$$

lo cual es una contradicción. Así tenemos probada nuestra afirmación.

De forma similar a la construcción de (4.45) y la positividad de x, tenemos

$$0 < x(t) < x(0)exp\{-(d_1 + c_2)t\} \quad \forall t > 0 \tag{4.47}$$

y del Teorema del Sandwich, tenemos

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

Así termina la aprueba del teorema. ■

Notemos que si $E_0 = (0, 0, 0)$ fuese un atractor global, entonces el sistema (2.11) estaría experimentando una extinción total. A continuación veremos las condiciones bajo las cuales el punto crítico E_0 es un atractor global.

Teorema 4.3 *Si $c_1 > 1$ y $m_1 \geq \dfrac{c_1}{c_1 - 1}(d_1 + c_2)$, entonces $E_0 = (0, 0, 0)$ es atractor global. Esto es*

$$\lim_{t\to\infty}(x(t), y(t), z(t)) = (0, 0, 0).$$

Demostración. Empezaremos mostrando que $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$, para ello consideremos

$$0 < U(t) = \frac{x(t)}{(y(t))^\alpha}, \quad \text{donde } \alpha \text{ sera determinado despues.}$$

Así tenemos

$$U' = \frac{x'y^\alpha - \alpha x y^{\alpha-1}y'}{y^{2\alpha}}$$

$$U' = \frac{1}{y^\alpha}\left(x' - \frac{\alpha x y'}{y}\right)$$

reemplazando la primera y segunda ecuación del sistema (2.11) tenemos

$$U' = \frac{1}{y^\alpha}\left[x(1-x) - \frac{c_1 xy}{x+y} - \frac{\alpha x}{y}\left(\frac{m_1 xy}{x+y} - d_1 y - \frac{c_2 yz}{y+z}\right)\right]$$

es decir

$$\begin{aligned}
U' &= \frac{x}{y^\alpha}\left[1 - x - \frac{c_1 y}{x+y} - \frac{\alpha}{y}\left(\frac{m_1 xy}{x+y} - d_1 y - \frac{c_2 yz}{y+z}\right)\right] \\
&= \frac{x}{y^\alpha}\left(1 - x - \frac{c_1 y}{x+y} - \frac{\alpha m_1 x}{x+y} + \alpha d_1 + \frac{\alpha c_2 z}{y+z}\right) \\
&= \frac{x}{y^\alpha}\left(1 - x + \alpha d_1 - \frac{c_1 y + \alpha m_1 x}{x+y} + \frac{\alpha c_2 z}{y+z} + \alpha c_2 - \alpha c_2\right) \\
&= \frac{x}{y^\alpha}\left[1 + \alpha(d_1 + c_2) - x - \frac{c_1 y + \alpha m_1 x}{x+y} + \alpha c_2\left(\frac{z}{y+z} - 1\right)\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
U' &= \frac{x}{y^\alpha}\left[1+\alpha(d_1+c_2)-\frac{c_1y+\alpha m_1x}{x+y}-x-\frac{\alpha c_2y}{y+z}\right] \\
&= \frac{x}{y^\alpha}\left[\frac{x+y+\alpha(d_1+c_2)(x+y)-(c_1y+\alpha m_1x)}{x+y}-x-\frac{\alpha c_2y}{y+z}\right] \\
&= \frac{x}{y^\alpha}\left[\frac{x+y+\alpha(d_1+c_2)x+\alpha(d_1+c_2)y-c_1y-\alpha m_1x}{x+y}-x-\frac{\alpha c_2y}{y+z}\right] \\
&= \frac{x}{y^\alpha}\left[\frac{[1+\alpha(d_1+c_2-m_1)]x+[1-c_1+\alpha(d_1+c_2)]y}{x+y}-x-\frac{\alpha c_2y}{y+z}\right]
\end{aligned}
$$

Si denotamos como

$$\beta_1 = 1+\alpha(d_1+c_2-m_1) \quad \wedge \quad \beta_2 = 1-c_1+\alpha(d_1+c_2)$$

entonces tenemos

$$U' = \frac{x}{y^\alpha}\left[\frac{\beta_1x+\beta_2y}{x+y}-x-\frac{\alpha c_2y}{y+z}\right]$$

es decir

$$U' = U\left(\frac{\beta_1x+\beta_2y}{x+y}-x-\frac{\alpha c_2y}{y+z}\right). \tag{4.48}$$

Por otro lado, de las hipótesis del teorema tenemos

$$m_1 \geq \frac{c_1(d_1+c_2)}{c_1-1} \quad \Rightarrow \quad m_1(c_1-1) \geq c_1(d_1+c_2)$$

es decir

$$\frac{c_1}{m_1} \leq \frac{c_1-1}{d_1+c_2}$$

Además, de las hipótesis del teorema $c_1 > 1$, por lo tanto existe $\alpha > 0$ tal que

$$\frac{c_1}{m_1} \leq \alpha \leq \frac{c_1-1}{d_1+c_2}.$$

También notamos

$$m_1 \geq \frac{c_1(d_1+c_2)}{c_1-1} \quad \Rightarrow \quad m_1c_1-m_1 \geq c_1d_1+c_1c_2 \quad \Rightarrow \quad c_1(m_1-d_1-c_2) \geq m_1$$

es decir

$$\frac{1}{m_1-d_1-c_2} \leq \frac{c_1}{m_1}$$

Así tenemos

$$\frac{1}{m_1-d_1-c_2} \leq \frac{c_1}{m_1} \leq \alpha \leq \frac{c_1-1}{d_1+c_2}. \tag{4.49}$$

En consecuencia β_1 y β_2 son no positivos. En efecto

$$\beta_1 = 1-\alpha(m_1-d_1-c_2)$$

$$\alpha(m_1-d_1-c_2) = 1-\beta_1$$

$$\frac{\alpha}{1-\beta_1} = \frac{1}{m_1-d_1-c_2}$$

y de (4.49) tenemos

$$\frac{\alpha}{1-\beta_1} = \frac{1}{m_1 - d_1 - c_2} \leq \alpha$$

$$\frac{1}{1-\beta_1} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \beta_1 \leq 0.$$

Por otro lado, tenemos

$$\beta_2 = 1 - c_1 + \alpha(d_1 + c_2)$$

$$\beta_2 + c_1 - 1 = \alpha(d_1 + c_2)$$

$$(c_1 - 1)\left(\frac{\beta_2}{c_1 - 1} + 1\right) = \alpha(d_1 + c_2)$$

$$(c_1 - 1)\left(\frac{\beta_2 + c_1 - 1}{c_1 - 1}\right) = \alpha(d_1 + c_2)$$

$$\frac{c_1 - 1}{d_1 + c_2} = \alpha\left(\frac{c_1 - 1}{\beta_2 + c_1 - 1}\right)$$

y de (4.49) tenemos

$$\alpha \leq \frac{c_1 - 1}{d_1 + c_2} = \alpha\left(\frac{c_1 - 1}{\beta_2 + c_1 - 1}\right)$$

$$1 \leq \frac{c_1 - 1}{\beta_2 + c_1 - 1} \quad \Rightarrow \quad \beta_2 \leq 0.$$

Luego en (4.48) tenemos

$$U' = U\left(\frac{\beta_1 x + \beta_2 y}{x + y} - x - \frac{\alpha c_2 y}{y + z}\right) < -xU$$

entonces

$$\frac{U'}{U} < -x$$

de donde tenemos

$$0 < U(t) \leq U(0) exp\left\{-\int_0^t x(s)ds\right\}.$$

$$0 < \frac{x(t)}{(y(t))^\alpha} \leq U(0) exp\left\{-\int_0^t x(s)ds\right\}$$

$$0 < x(t) \leq (y(t))^\alpha U(0) exp\left\{-\int_0^t x(s)ds\right\}$$

como y es acotada entonces existe un $N_\varepsilon > 0$ tal que $y(t) < N_\varepsilon$ para todo $t \geq 0$ entonces se cumple $(y(t))^\alpha < (N_\varepsilon)^\alpha$. Así tenemos

$$0 < x(t) < (N_\varepsilon)^\alpha U(0) exp\left\{-\int_0^t x(s)ds\right\}. \tag{4.50}$$

Afirmamos que $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

En efecto, de la positividad y acotación de x tenemos que

$$\exists C > 0 \quad \text{tal que} \quad |x'(t)| < C, \ \ \forall t \geq 0.$$

Ya que de la primera ecuación de sistema (2.11)

$$x'(t) = x(1-x) - \frac{c_1 xy}{x+y}$$

tenemos

$$x'(t) \leq x(1-x) < x$$
$$x'(t) < M_\varepsilon.$$

Así también

$$-\frac{c_1 xy}{x+y} \leq x'(t).$$

Pero como

$$0 < x < M_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad -x > -M_\varepsilon$$

$$\frac{c_1 xy}{x+y} \leq xc_1 \quad \Rightarrow \quad -\frac{c_1 xy}{x+y} \geq -xc_1$$

entonces

$$-c_1 M_\varepsilon < x'(t).$$

Por lo tanto

$$|x'(t)| < C, \quad \text{con} \quad C = \max\{M_\varepsilon, c_1 M_\varepsilon\} > 0.$$

Entonces x es lipschitziana y por ende uniformemente continua.

Luego por el Teorema del Valor Medio $\exists c \in < a, b >$ tal que $\displaystyle\int_a^b x(t)dt = x(c)(b-a)$, tomando $a = 0$ y $b = t$, tenemos

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t x(s)ds = \lim_{t\to\infty} x(c)(t-0) = +\infty. \tag{4.51}$$

Así de (4.50) tenemos

$$0 \leq \lim_{t\to\infty} x(t) \leq (N_\varepsilon)^\alpha U(0) exp\left\{ - \lim_{t\to\infty} \int_0^t x(s)ds \right\} = 0$$

por el Teorema del Sandwich tenemos

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

Y por la Proposición 4.6 (efecto dominó) tenemos que

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{t\to\infty} z(t) = 0.$$

por lo tanto

$$\lim_{t\to\infty} (x(t), y(t), z(t)) = (0,0,0).$$

Así termina la prueba de nuestro teorema. ■

A continuación veremos unos resultados que solo aseguran la extinción del depredador superior.

En el siguiente lema, probaremos un resultado un tanto obvio en la extinción del depredador superior. Digamos, si la tasa de muerte del depredador superior no es menor su tasa máxima de nacimientos, entonces se extinguirá.

Lema 4.3 *Si $m_2 \leq d_2$ entonces* $\lim_{t\to\infty} z(t) = 0$.

Demostración. Del sistema (2.11) tenemos

$$z'(t) = z\left(\frac{m_2 y}{z+y} - d_2\right)$$

como $m_2 \leq d_2$, se cumple

$$z'(t) \leq z\left(\frac{d_2 y}{z+y} - d_2\right)$$

$$z'(t) \leq d_2 z\left(\frac{y}{z+y} - 1\right) < 0$$

por lo tanto

$$z'(t) < 0, \ \ \forall t \geq 0$$

es decir z es estrictamente decreciente y de la positividad de z tenemos que $\lim_{t\to\infty} z(t)$ existe y es no negativo.

Afirmamos que $\lim_{t\to\infty} z(t) = 0$.

De no ser así, entonces el

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = L > 0$$

Para $0 < \varepsilon < L$ existe un $t_0 > 0$, tal que

$$L - \varepsilon < z(t) < L + \varepsilon, \ \ \forall t \geq t_0.$$

Por otro lado, del Lema 3.2 tenemos que existe $M > 0$ tal que $y(t) < M$ para todo $t \geq t_0$

De la tercera ecuación del sistema (2.11) tenemos

$$z(t) = z(t_0) exp\left\{\int_{t_0}^{t}\left(\frac{m_2 y(s)}{y(s)+z(s)} - d_2\right) ds\right\}$$

como

$$L - \varepsilon < z(s)$$

$$y(s) + L - \varepsilon < z(s) + y(s)$$

$$\frac{m_2 y(s)}{z(s)+y(s)} < \frac{m_2 y(s)}{y(s)+L-\varepsilon}$$

entonces

$$z(t) < z(t_0) exp\left\{\int_{t_0}^{t}\left(\frac{m_2 y(s)}{y(s)+L-\varepsilon} - d_2\right) ds\right\}$$

como $m_2 \leq d_2$

$$z(t) < z(t_0) exp\left\{\int_{t_0}^{t}\left(\frac{d_2 y(s)}{y(s)+L-\varepsilon} - d_2\right) ds\right\}$$

$$z(t) < z(t_0) exp\left\{\int_{t_0}^{t}\left(\frac{-d_2(L-\varepsilon)}{y(s)+L-\varepsilon}\right) ds\right\}. \tag{4.52}$$

Además como $y(s) < M$, entonces

$$y(s) + L - \varepsilon < M + L - \varepsilon$$

$$\frac{1}{M+L-\varepsilon} < \frac{1}{y(s)+L-\varepsilon}$$
$$\frac{-d_2(L-\varepsilon)}{y(s)+L-\varepsilon} < \frac{-d_2(L-\varepsilon)}{M+L-\varepsilon}.$$

Luego de (4.52) y la positividad de z tenemos

$$0 < z(t) < z(t_0) exp\left\{\int_{t_0}^{t}\left(\frac{-d_2(L-\varepsilon)}{M+L-\varepsilon}\right)ds\right\}$$
$$0 < z(t) < z(t_0) exp\left\{\left(\frac{-d_2(L-\varepsilon)}{M+L-\varepsilon}\right)(t-t_0)\right\}$$

Aplicando límite y del Teorema de Sandwich se cumple

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = 0.$$

lo cual es una contradicción, por lo tanto se cumple la afirmación y así termina la prueba del lema. ■

Lema 4.4 *Si $m_2 > d_2$, $A > 1$ y $c_1 \geq \dfrac{A}{A-1}$, entonces*

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = 0.$$

Demostración. De las hipótesis del lema tenemos

$$c_1 \geq \frac{A}{A-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c_1} \leq \frac{A-1}{A}$$

es decir

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{c_1} - 1 \leq 0. \tag{4.53}$$

Además notemos que

$$A = \frac{m_1}{\dfrac{c_2(m_2-d_2)}{m_2} + d_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{m_1}{A} = \frac{c_2(m_2-d_2)}{m_2} + d_1$$

es decir

$$\frac{m_1}{A} = d_1 + c_2 - \frac{c_2 d_2}{m_2}. \tag{4.54}$$

Por otro lado, del sistema (2.11) tenemos

$$\begin{aligned} x'(t) &= x\left(1 - x - \frac{c_1 y}{x+y}\right) \\ y'(t) &= y\left(\frac{m_1 x}{x+y} - d_1 - \frac{c_2 z}{z+y}\right) \\ z'(t) &= z\left(\frac{m_2 y}{z+y} - d_2\right) \end{aligned}$$

de donde tenemos

$$\begin{aligned}\frac{m_1x'}{c_1x} &= \frac{m_1(1-x)}{c_1} - \frac{m_1y}{x+y}\\ \frac{y'}{y} &= \frac{m_1x}{x+y} - d_1 - \frac{c_2z}{z+y}\\ \frac{c_2z'}{m_2z} &= \frac{c_2y}{z+y} - \frac{d_2c_2}{m_2}\end{aligned}$$

entonces se cumple

$$\begin{aligned}\frac{m_1x'}{c_1x} - \frac{y'}{y} + \frac{c_2z'}{m_2z} &= \frac{m_1(1-x)}{c_1} - \frac{m_1y}{x+y} - \frac{m_1x}{x+y} + d_1 + \frac{c_2z}{z+y} + \frac{c_2y}{z+y} - \frac{d_2c_2}{m_2}\\ &= \frac{m_1(1-x)}{c_1} - m_1 + d_1 + c_2 - \frac{d_2c_2}{m_2}\end{aligned}$$

reemplazando (4.54) tenemos

$$\begin{aligned}\frac{m_1x'}{c_1x} - \frac{y'}{y} + \frac{c_2z'}{m_2z} &= \frac{m_1(1-x)}{c_1} - m_1 + \frac{m_1}{A}\\ &= -\frac{m_1x}{c_1} + \frac{m_1}{c_1} - m_1 + \frac{m_1}{A}\\ &= -\frac{m_1x}{c_1} + m_1\left(\frac{1}{c_1} - 1 + \frac{1}{A}\right)\end{aligned}$$

y por (4.53) tenemos

$$\frac{m_1x'}{c_1x} - \frac{y'}{y} + \frac{c_2z'}{m_2z} = -\frac{m_1x}{c_1} + m_1\left(\frac{1}{c_1} - 1 + \frac{1}{A}\right) \leq -\frac{m_1x}{c_1} < 0$$

luego integrando de 0 a t

$$\int_0^t \left(\frac{m_1x'(s)}{c_1x(s)} - \frac{y'(s)}{y(s)} + \frac{c_2z'(s)}{m_2z(s)}\right)ds \leq -\int_0^t \frac{m_1x(s)}{c_1}ds$$

$$\frac{m_1}{c_1}\ln x(s)\Big|_0^t - \ln y(s)|_0^t + \frac{c_2}{m_2}\ln z(s)\Big|_0^t \leq -\int_0^t \frac{m_1x(s)}{c_1}ds$$

$$\ln\left(\frac{x(t)}{x(0)}\right)^{\frac{m_1}{c_1}} - \ln\left(\frac{y(t)}{y(0)}\right) + \ln\left(\frac{z(t)}{z(0)}\right)^{\frac{c_2}{m_2}} \leq -\int_0^t \frac{m_1x(s)}{c_1}ds$$

$$\ln\left[\frac{\left(\frac{x(t)}{x(0)}\right)^{\frac{m_1}{c_1}}\left(\frac{z(t)}{z(0)}\right)^{\frac{c_2}{m_2}}}{\left(\frac{y(t)}{y(0)}\right)}\right] \leq -\int_0^t \frac{m_1x(s)}{c_1}ds$$

$$\ln\left[\frac{(x(t))^{\frac{m_1}{c_1}}(z(t))^{\frac{c_2}{m_2}}}{y(t)}\right] + \ln\left[\frac{y(0)}{(x(0))^{\frac{m_1}{c_1}}(z(0))^{\frac{c_2}{m_2}}}\right] \leq -\int_0^t \frac{m_1x(s)}{c_1}ds$$

denotemos como

$$K_1 = \ln\left[\frac{y(0)}{(x(0))^{\frac{m_1}{c_1}}(z(0))^{\frac{c_2}{m_2}}}\right]$$

$$\ln\left[\frac{(x(t))^{\frac{m_1}{c_1}}(z(t))^{\frac{c_2}{m_2}}}{y(t)}\right] \leq -K_1 - \int_0^t \frac{m_1 x(s)}{c_1} ds$$

tomando la exponencial tenemos

$$\frac{(x(t))^{\frac{m_1}{c_1}}(z(t))^{\frac{c_2}{m_2}}}{y(t)} \leq exp\{-K_1\} exp\left\{-\int_0^t \frac{m_1 x(s)}{c_1} ds\right\}$$

denotando $K = exp\{-K_1\} > 0$, entonces

$$\frac{(x(t))^{\frac{m_1}{c_1}}(z(t))^{\frac{c_2}{m_2}}}{y(t)} \leq K exp\left\{-\int_0^t \frac{m_1 x(s)}{c_1} ds\right\}$$

es decir

$$(x(t))^{\frac{m_1}{c_1}}(z(t))^{\frac{c_2}{m_2}} \leq K y(t) exp\left\{-\int_0^t \frac{m_1 x(s)}{c_1} ds\right\}. \tag{4.55}$$

Por el Lema 3.2, existe $M > 0$ tal que $y(t) < M$, y de la positividad de x y z tenemos

$$0 < (x(t))^{\frac{m_1}{c_1}}(z(t))^{\frac{c_2}{m_2}} \leq KM exp\left\{-\int_0^t \frac{m_1 x(s)}{c_1} ds\right\}. \tag{4.56}$$

Afirmamos $\lim_{t\to\infty} x(t)z(t) = 0$.

En efecto, de (4.51) tenemos

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t x(s) ds = 0.$$

Luego, tomando límite en (4.56) tenemos

$$0 \leq \lim_{t\to\infty} (x(t))^{\frac{m_1}{c_1}}(z(t))^{\frac{c_2}{m_2}} \leq KM exp\left\{\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{m_1}{c_1}\int_0^t x(s) ds\right)\right\} = 0$$

y por el Teorema del Sandwich, concluimos

$$\lim_{t\to\infty} (x(t))^{\frac{m_1}{c_1}}(z(t))^{\frac{c_2}{m_2}} = 0.$$

Denotemos como

$$G_1(t) = (x(t))^{\frac{m_1}{c_1}}(z(t))^{\frac{c_2}{m_2}},$$

y sea

$$G_2(t) = (x(t)z(t))^{\frac{\alpha}{\beta}}, \text{ con } \alpha = \min\{m_1, c_2\} > 0 \wedge \beta = \max\{c_1, m_2\} > 0$$

Notamos que

$$\frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{m_1}{c_1} \quad \wedge \quad \frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{c_2}{m_2}$$

y de la positividad de x y z tenemos

$$0 < G_2(t) \leq G_1(t)$$

por el Teorema del Sandwich concluimos que

$$\lim_{t\to\infty} (x(t)z(t))^{\frac{\alpha}{\beta}} = 0$$

entonces

$$\lim_{t\to\infty} x(t)z(t) = 0.$$

Por lo tanto se cumple

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \quad \vee \quad \lim_{t\to\infty} z(t) = 0.$$

Si $\lim_{t\to\infty} z(t) = 0$, la prueba esta completa.

Por otro lado, si $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$, entonces por la Proposición 4.6 (efecto dominó) se cumple

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{t\to\infty} z(t) = 0.$$

Así concluimos nuestra demostración. ■

En vista de los resultados de esta sección, podemos resumir en el siguiente teorema las condiciones que causan la extinción del depredador superior.

Teorema 4.4 *Si el punto de equilibrio interior E_c no existe, entonces el depredador superior del sistema (2.11) se extinguirá. Específicamente si se cumple una de las siguientes condiciones*

I. $m_2 \leq d_2$

II. $m_2 > d_2$ *y* $0 < A \leq 1$

III. $m_2 > d_2$, $A > 1$ *y* $c_1 \geq \dfrac{A}{A-1}$

entonces

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = 0.$$

A continuación veremos una gráfica de m_1 vs c_1 en la cual veremos diferentes regiones en las cuales ocurren los escenarios de extinción (cuando no existe E_c) así como la coexistencia de las tres especies (cuando existe E_c).

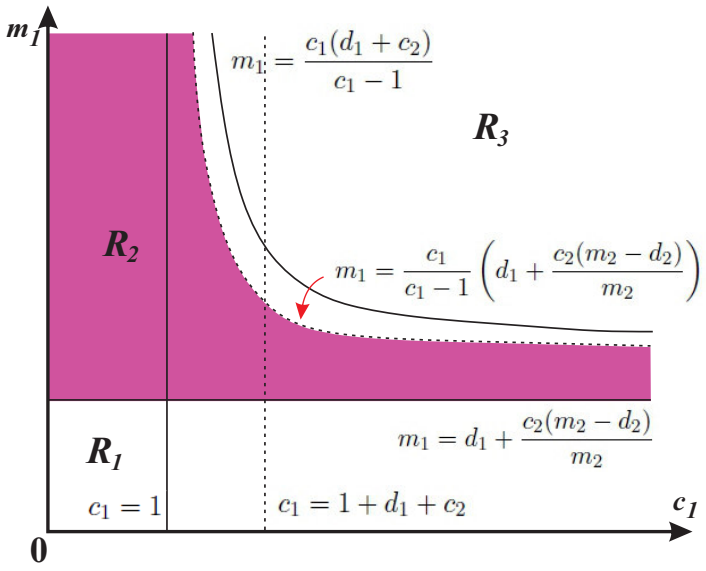


Figura 4.3: Rango de los parámetros para los escenarios de extinción

En la Figura 4.3 distinguimos principalmente tres regiones

- $R_1 = \left\{ (c_1, m_1) \quad | \quad c_1 \in \langle 0, 1 \rangle, \;\; m_1 \leq d_1 + \dfrac{c_2(m_2 - d_2)}{m_2} \right\}$
- $R_2 = \left\{ (c_1, m_1) \quad | \quad d_1 + \dfrac{c_2(m_2 - d_2)}{m_2} < m_1 < \left(\dfrac{c_1}{c_1 - 1} \right) \left(d_1 + \dfrac{c_2(m_2 - d_2)}{m_2} \right) \right\}$
- $R_3 = \left\{ (c_1, m_1) \quad | \quad c_1 > 1, \;\; m_1 \geq \dfrac{c_1(d_1 + c_2)}{c_1 - 1} \right\}$

Donde R_1 es la región en la cual el $(1, 0, 0)$ atrae todas las soluciones positivas del sistema (2.11), R_2 es la región en la cual E_c existe y R_1 es la región en la cual $(0, 0, 0)$ atrae a todas las soluciones positivas del sistema (2.11).

4.3. Sensibilidad a las condiciones iniciales

Se conoce que los modelos simples de cadena alimenticia pueden generar dinámicas caóticas, lo que indica que para algunos parámetros, las soluciones pueden ser muy sensitivas a las poblaciones iniciales. Veremos que nuestro modelo de cadena alimenticia, con tres niveles tróficos (2.11), también es capaz de generar estas dinámicas sensibles.

Para eso recordemos que el sistema (2.11), podia ser visto de la forma

$$\begin{cases} x' &= F_1(x, y, z) \quad , \quad x(0) > 0 \\ y' &= F_2(x, y, z) \quad , \quad y(0) > 0 \\ z' &= F_3(x, y, z) \quad , \quad z(0) > 0 \end{cases}$$

donde F_1, F_2 y F_3 están definidas por (3.1), (3.2) y (3.3) respectivamente. Y considerando $w = (x, y, z)$ y $F = (F_1, F_2, F_3)$, teníamos el PVI

$$\begin{cases} w' &= F(w) \\ w(0) &= (x(0), y(0), z(0)) \end{cases}$$

Ahora queremos ver específicamente cual es el dominio de F, para lo cual notamos que $w \in \Omega$, definido por (3.6)con la condición

$$x + y \neq 0 \;\; \wedge \;\; y + z \neq 0. \tag{4.57}$$

es decir

$$Dom(F) = \{ w \in \Omega \; : \; x + y \neq 0 \;\; \wedge \;\; y + z \neq 0 \}$$

Si negamos la condición (4.57), tenemos

$$x + y = 0 \;\; \wedge \;\; y + z = 0,$$

pero como $w \in \Omega$, entonces

$$x = y = 0, z \geq 0 \;\; \wedge \;\; y = z = 0, x \geq 0.$$

En la Figura (4.4) se ilustra las condiciones anteriores.

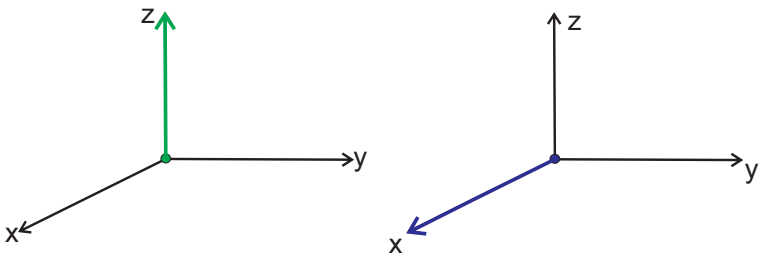


Figura 4.4: Lado izquierdo $x = y = 0, z \geq 0$, lado derecho $y = z = 0, x \geq 0$.

Con dichas condiciones obtenemos el conjunto

$$\Lambda = \{(x, 0, 0) \ : \ x > 0\} \cup \{(0, 0, z) \ : \ z > 0\}.$$

El cual se ilustra en la Figura 4.5.

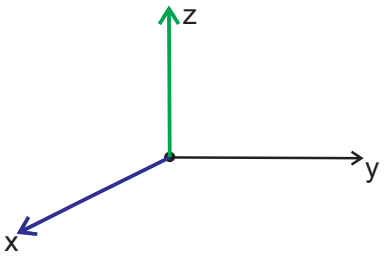


Figura 4.5: Región Λ.

De esta forma tenemos que el dominio de F seria equivalente a

$$Dom(F) = \Omega - \Lambda.$$

Notemos que el $Dom(F)$ es el complemento de la region mostrada en la Figura 4.5, lo cual se muestra en la Figura 4.6.

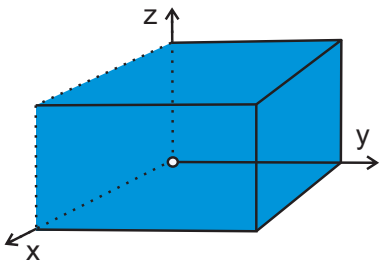


Figura 4.6: Gráfica del $Dom(F)$

Y como por la Proposición 3.1, tenemos para $i = 1, 2, 3$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} F_i(x, y, z) = 0,$$

se puede extender el $Dom(F)$ incluyendo al $(0, 0, 0)$.

Además notemos que

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,0,0)} F_1(x, y, z) = x_0(1 - x_0), \quad \text{para algun } x_0 > 0,$$

mientras que

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,0,0)} F_i(x,y,z) = 0, \quad \text{para} \quad i = 2,3.$$

Y de forma similar

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,y_0,0)} F_2(x,y,z) = -d_1 y_0, \quad \text{para algun } y_0 > 0$$

mientras que

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,y_0,0)} F_i(x,y,z) = 0, \quad \text{para} \quad i = 1,3.$$

Así también

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,z_0)} F_3(x,y,z) = -d_2 z_0, \quad \text{para algun } z_0 > 0$$

mientras que

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,z_0)} F_i(x,y,z) = 0, \quad \text{para} \quad i = 1,2.$$

De donde deducimos que

$$Dom(F) = \Omega.$$

pero la función F también sera redefinida mediante

$$\overline{F}(w) = \begin{cases} F(w) & , \quad w \in \Omega^\circ \\ (0,0,0) & , \quad w = (0,0,0) \\ (x_0(1-x_0),0,0) & , \quad w = (x_0,0,0) \text{ para } x_0 > 0 \\ (0,-d_1 y_0,0) & , \quad w = (0,y_0,0) \text{ para } y_0 > 0 \\ (0,0,-d_2 z_0) & , \quad w = (0,0,z_0) \text{ para } z_0 > 0 \\ (x_0(1-x_0),-d_1 y_0,0) & , \quad w = (x_0,y_0,0) \text{ para } x_0, y_0 > 0 \\ (x_0(1-x_0),0,-d_2 z_0) & , \quad w = (x_0,0,z_0) \text{ para } x_0, z_0 > 0 \\ (0,-d_1 y_0,-d_2 z_0) & , \quad w = (0,y_0,z_0) \text{ para } y_0, z_0 > 0 \end{cases}$$

De donde podemos notar que $E_0 = (0,0,0)$ es una singularidad, y para $x_0 = 1$ tenemos que $E_1 = (1,0,0)$ también es una singularidad, aparte de la singularidad $E_c = (x_c, y_c, z_c)$ la cual existe por el Lema 4.1.

En esta sección mostraremos que bajo una misma combinación de parámetros el sistema (2.11) puede tener soluciones que tienden asintóticamente a E_c, E_0 o E_1, para valores adecuados de las condiciones iniciales $(x(0), y(0), z(0))$ respectivamente.

La estabilidad de E_c ya fue estudiada en las secciones previas, así como también la estabilidad asintótica de E_0 y E_1 cuando E_c no existe. Entonces sólo necesitamos discutir las posibles trayectorias que tienden a E_0 o E_1, asumiendo que el punto de equilibrio interior E_c puede o no existir.

Para analizar la estabilidad de E_0 y E_1 utilizaremos en esencia la técnica de blow-up en alguna vecindad de E_0 y E_1 respectivamente. La técnica de blow-up consiste en reparametrizar el sistema de tal manera que la singularidad pueda ser analizada en el sistema

reparametrizado sin mayor inconveniente.

Primero empezaremos con las posibles trayectorias que tienden a E_0. Para este fin, introduciremos el siguiente cambio de variables

$$u = \frac{x}{y} \quad \wedge \quad v = \frac{y}{z} \tag{4.58}$$

es decir $(x, y, z) \longrightarrow (u, y, v)$.

Consideremos

$$E(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}, y, \frac{y}{z}\right) = (u, y, v).$$

Notamos que

$$Dom(E) = \{(x, y, z) \in \Omega \ : \ y, z \neq 0\} = \{(x, y, z) \in \Omega \ : \ y, z > 0\}$$

y de (4.58) tenemos que

$$x = uy \quad \wedge \quad z = \frac{y}{v}.$$

Entonces existe E^{-1} definida por

$$E^{-1}(u, y, v) = \left(uy, y, \frac{y}{v}\right).$$

Mediante E y E^{-1} podemos estudiar el comportamiento de la singularidad E_0 en las coordenadas (u, y, v) ya que este será equivalente en las coordenadas (x, y, z).

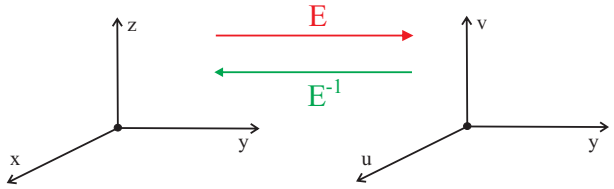


Figura 4.7: Cambio de coordenadas de (x, y, z) a (u, y, v).

Ahora veremos como esta reparametrización E, afecta al sistema (2.11). Para esto, de las ecuaciones (4.58) tenemos

$$\begin{aligned} u' &= \frac{x'y - xy'}{y^2} \\ &= \frac{x'}{y} - \frac{xy'}{y^2} \end{aligned}$$

reemplazando la primera y segunda ecuación del sistema (2.11)

$$u' = \frac{x(1-x) - \dfrac{c_1 xy}{x+y}}{y} - \frac{\dfrac{x}{y}\left(\dfrac{m_1 xy}{x+y} - d_1 y - \dfrac{c_2 yz}{y+z}\right)}{y}$$

De los cambios de variables (4.58) tenemos que $x = uy$ y $z = \dfrac{y}{v}$, entonces

$$u' = \frac{uy(1-uy) - \dfrac{c_1 uyy}{uy+y}}{y} - \frac{\dfrac{uy}{y}\left(\dfrac{m_1 uyy}{uy+y} - d_1 y - \dfrac{\dfrac{c_2 yy}{v}}{y+\dfrac{y}{v}}\right)}{y}$$

simplificando tenemos

$$\begin{aligned} u' &= u(1-uy) - \frac{c_1 u}{u+1} - u\left(\frac{m_1 u}{u+1} - d_1 - \frac{c_2}{v+1}\right) \\ &= u(1-uy) - \frac{c_1 u}{u+1} - \left(\frac{u^2 m_1}{u+1} - d_1 u - \frac{c_2 u}{v+1}\right) \\ &= \frac{u}{u+1}\left[(1-uy)(u+1) - c_1 - um_1 + d_1(u+1)\right] + \frac{c_2 u}{v+1} \\ &= \frac{u}{u+1}\left[u+1-u^2 y - uy - c_1 - um_1 + d_1 u + d_1\right] + \frac{c_2 u}{v+1} \\ &= \frac{u}{u+1}\left[u\underbrace{[1-(m_1-d_1)]}_{A} + \underbrace{(1-c_1+d_1)}_{B}\right] - \frac{u^2 y(u+1)}{u+1} + \frac{c_2 u}{v+1} \end{aligned}$$

es decir

$$u' = \frac{u}{u+1}(Au+B) - u^2 y + \frac{c_2 u}{v+1}. \tag{4.59}$$

Además, de la segunda ecuación del sistema (2.11) tenemos

$$\begin{aligned} y' &= \frac{m_1 u y^2}{uy+y} - d_1 y - \frac{\frac{c_2 yy}{v}}{y+\frac{y}{v}} \\ &= \frac{m_1 uy}{u+1} - d_1 y - \frac{c_2 y}{v+1} \end{aligned}$$

es decir

$$y' = y\left[\frac{m_1 u}{u+1} - d_1\right] - \frac{c_2 y}{v+1}. \tag{4.60}$$

Por otro lado, de la segunda y tercera ecuación del sistema (2.11) tenemos

$$\begin{aligned} v' &= \frac{y'z - z'y}{z^2} \\ &= \frac{y'}{z} - \frac{z'y}{z^2} \\ &= \frac{\frac{m_1 xy}{x+y} - d_1 y - \frac{c_2 xy}{y+z}}{z} - \frac{y}{z}\left(\frac{\frac{m_2 yz}{y+z} - d_2 z}{z}\right) \end{aligned}$$

de los cambios de variables (4.58) tenemos $x = uy$ y $z = \frac{y}{v}$ entonces

$$\begin{aligned} v' &= \frac{\frac{m_1 uyy}{uy+y} - d_1 y - \frac{\frac{c_2 yy}{v}}{y+\frac{y}{v}}}{\frac{y}{v}} - v\left(\frac{m_2 y}{y+z} - d_2\right) \\ &= \left(\frac{m_1 uv}{u+1} - d_1 v - \frac{c_2 v}{v+1}\right) - v\left(\frac{m_2 y}{y+\frac{y}{v}} - d_2\right) \end{aligned}$$

es decir

$$v' = v\left[\frac{m_1 u}{u+1} - d_1 - \frac{c_2}{v+1} - \left(\frac{m_2 v}{v+1} - d_2\right)\right]. \tag{4.61}$$

Así de las ecuaciones (4.59) ,(4.60) y (4.61) tenemos nuestro nuevo sistema

$$\begin{cases} u' = u\left(\dfrac{Au+B}{u+1} - uy + \dfrac{c_2}{v+1}\right) & , \quad u(0) > 0 \\ y' = y\left(\dfrac{m_1 u}{u+1} - d_1 - \dfrac{c_2}{v+1}\right) & , \quad y(0) > 0 \\ v' = v\left(\dfrac{m_1 u}{u+1} - d_1 + d_2 - \dfrac{c_2 + m_2 v}{v+1}\right) & , \quad v(0) > 0 \end{cases} \tag{4.62}$$

donde $A = 1 - (m_1 - d_1)$ y $B = 1 - c_1 + d_1$.

A continuación haremos el análisis de estabilidad en el sistema (4.62).

4.3.1. Singularidades (puntos críticos)

Para hallar los puntos críticos, lo que hacemos es igualar a cero las ecuaciones del sistema (4.62). Así de la segunda ecuación del sistema (4.62) tenemos

$$y\left(\frac{m_1 u}{1+u} - d_1 - \frac{c_2}{1+v}\right) = 0$$

por lo tanto

$$y = 0 \quad \vee \quad \frac{m_1 u}{1+u} - d_1 - \frac{c_2}{1+v} = 0$$

es decir

$$y = 0 \quad \vee \quad v = \frac{(1+u)(c_2+d_1) - m_1 u}{m_1 u - (1+u)d_1}.$$

Si consideramos $y = 0$, en la primera ecuación del sistemas (4.62) tenemos

$$u\left(\frac{Au+B}{1+u} + \frac{c_2}{1+v}\right) = 0$$

es decir

$$u = 0 \quad \vee \quad u = -\frac{c_2 + B(1+v)}{A(1+v) + c_2}.$$

Ahora considerando $y = 0$ y $u = 0$, de la tercera ecuación del sistema (4.62) tenemos

$$v\left(-d_1 - \frac{c_2}{v+1} - \frac{m_2 v}{v+1} + d_2\right) = 0$$

entonces

$$v = 0 \quad \vee \quad v = \frac{c_2 + d_1 - d_2}{d_2 - d_1 - m_2}$$

por lo tanto tenemos los puntos críticos

$$\widetilde{E}_0 = (0,0,0) \quad \text{y} \quad \widetilde{E}_1 = (0,0,\widetilde{v}_1) \tag{4.63}$$

donde

$$\widetilde{v}_1 = \frac{c_2 + d_1 - d_2}{d_2 - d_1 - m_2}.$$

Por otro lado si $y = 0$ y $u = -\dfrac{c_2 + B(1+v)}{A(1+v)+c_2}$, de la tercera ecuación del sistema (4.62) tenemos

$$v = 0 \quad \vee \quad u = \frac{c_2 + m_2 v + (d_1 - d_2)(1+v)}{(d_2 - d_1 + m_1)(1+v) - (c_2 + m_2 v)}.$$

Considerando $u = -\dfrac{c_2 + B(1+v)}{A(1+v)+c_2}$, $y = 0$ y $v = 0$, tenemos el punto crítico

$$\widetilde{E}_2 = (\widetilde{u}_1, 0, 0) \tag{4.64}$$

donde

$$\widetilde{u}_1 = -\frac{B + c_2)}{A + c_2}.$$

Por otro lado, si consideramos $u = -\dfrac{c_2 + B(1+v)}{A(1+v)+c_2}$, $y = 0$ y además

$$u = \frac{c_2 + m_2 v + (d_1 - d_2)(1+v)}{(d_2 - d_1 + m_1)(1+v) - (c_2 + m_2 v)}$$

entonces de la igualdad para u tenemos

$$\frac{c_2 + m_2 v + (d_1 - d_2)(1+v)}{(d_2 - d_1 + m_1)(1+v) - (c_2 + m_2 v)} = -\frac{c_2 + B(1+v)}{A(1+v)+c_2}$$

del producto cruzado tenemos $J_1 = J_2$, donde

$$\begin{aligned} J_1 &= (c_2 + m_2 v + (d_1 - d_2)(1+v))\,(A(1+v) + c_2) \\ &= A(d_1 - d_2)(1+v)^2 + c_2(d_1 - d_2)(1+v) + c_2(c_2 + m_2 v) + A(c_2 + m_2 v)(1+v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_2 &= [-c_2 - B(1+v)]\,[(d_2 - d_1 + m_1)(1+v) - (c_2 + m_2 v)] \\ &= -c_2(d_2 - d_1 + m_1)(1+v) - B(d_2 - d_1 + m_1)(1+v)^2 + c_2(c_2 + m_2 v) + B(c_2 + m_2 v)(1+v) \end{aligned}$$

Ahora simplificaremos $J_1 - J_2 = 0$, es decir

$$\begin{aligned} (1+v)^2\,[A(d_1 - d_2) + B(d_2 - d_1 + m_1)] + (1+v)\,[c_2(d_1 - d_2) + A(c_2 + m_2 v) \\ + c_2(d_2 - d_1 + m_1) - B(c_2 + m_2 v)] &= 0 \end{aligned}$$

$$(1+v)^2\,[A(d_1 - d_2) + B(d_2 - d_1 + m_1)] + (1+v)\,[(c_2 + m_2 v)(A - B) + c_2 m_1] = 0$$

$$(1+v)^2\,[(d_1 - d_2)(A - B) + B m_1)] + (1+v)\,[(c_2 + m_2 v)(A - B) + c_2 m_1] = 0$$

$$(1+v)^2\,[(d_1 - d_2)(A - B) + B m_1)] + (1+v)\,[c_2(A - B) + m_2(A - B)v + c_2 m_1] = 0$$

sumamos y restamos $m_2(A - B)$ convenientemente

$$\begin{aligned} (1+v)^2\,[(d_1 - d_2)(A - B) + B m_1)] + (1+v)\,[c_2(A - B) + m_2(A - B)v \\ + m_2(A - B) - m_2(A - B) + c_2 m_1] &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1+v)^2\,[(d_1 - d_2)(A - B) + B m_1)] + (1+v)\,[c_2(A - B) + m_2(A - B)(v+1) \\ - m_2(A - B) + c_2 m_1] &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1+v)^2\,[(d_1 - d_2)(A - B) + B m_1 + m_2(A - B)] + (1+v)\,[c_2(A - B) \\ - m_2(A - B) + c_2 m_1] &= 0 \end{aligned}$$

$$(1+v)^2\,[(d_1 - d_2 + m_2)(A - B) + B m_1] + (1+v)\,[(c_2 - m_2)(A - B) + c_2 m_1] = 0$$

de donde tenemos

$$(1+v)^2\left[(d_1-d_2+m_2)(A-B)+Bm_1\right]=(1+v)\left[(m_2-c_2)(A-B)-c_2m_1\right]$$

como $v>0$ entonces $1+v>0$, por lo tanto

$$(1+v)\left[(d_1-d_2+m_2)(A-B)+Bm_1\right]=(m_2-c_2)(A-B)-c_2m_1$$

$$1+v=\frac{(m_2-c_2)(A-B)-c_2m_1}{(d_1-d_2+m_2)(A-B)+Bm_1}$$

despejando v tenemos

$$\begin{aligned} v &= \frac{(m_2-c_2)(A-B)-c_2m_1}{(d_1-d_2+m_2)(A-B)+Bm_1}-1 \\ &= \frac{(m_2-c_2)(A-B)-c_2m_1-(d_1-d_2+m_2)(A-B)-Bm_1}{(d_1-d_2+m_2)(A-B)+Bm_1} \\ &= \frac{(m_2-c_2-d_1+d_2-m_2)(A-B)-m_1(c_2+B)}{(d_1-d_2+m_2)(A-B)+Bm_1} \end{aligned}$$

es decir

$$v=\frac{(d_2-c_2-d_1)(A-B)-m_1(c_2+B)}{(d_1-d_2+m_2)(A-B)+Bm_1}.$$

Por otro lado si reemplazando $1+v$ en u tenemos

$$\begin{aligned} u &= -\frac{c_2+B(1+v)}{A(1+v)+c_2} \\ &= -\frac{c_2+B\left[\dfrac{(m_2-c_2)(A-B)-c_2m_1}{(d_1-d_2+m_2)(A-B)+Bm_1}\right]}{A\left[\dfrac{(m_2-c_2)(A-B)-c_2m_1}{(d_1-d_2+m_2)(A-B)+Bm_1}\right]+c_2} \\ &= -\frac{c_2\left[(d_1-d_2+m_2)(A-B)+Bm_1\right]+B\left[(m_2-c_2)(A-B)-c_2m_1\right]}{A\left[(m_2-c_2)(A-B)-c_2m_1\right]+c_2\left[(d_1-d_2+m_2)(A-B)+Bm_1\right]} \\ &= -\frac{(A-B)\left[B(m_2-c_2)+c_2(d_1-d_2+m_2)\right]}{(A-B)\left[(m_2-c_2)A+c_2(d_1-d_2+m_2)\right]-Bc_2m_1-Ac_2m_1} \\ &= -\frac{(A-B)\left[B(m_2-c_2)+c_2(d_1-d_2+m_2)\right]}{(A-B)\left[A(m_2-c_2)+c_2(d_1-d_2+m_2)-c_2m_1\right]} \end{aligned}$$

es decir

$$u=\frac{c_2(d_2-d_1-m_2)-B(m_2-c_2)}{A(m_2-c_2)+c_2(d_1-d_2+m_2-m_1)}.$$

Así tenemos el punto crítico

$$\widetilde{E}_3=(\widetilde{u}_2,0,\widetilde{v}_2) \tag{4.65}$$

donde

$$\widetilde{u}_2=\frac{c_2(d_2-d_1-m_2)-B(m_2-c_2)}{A(m_2-c_2)+c_2(d_1-d_2+m_2-m_1)}$$

y

$$\widetilde{v}_2=\frac{(d_2-c_2-d_1)(A-B)-m_1(c_2+B)}{(d_1-d_2+m_2)(A-B)+Bm_1}.$$

Resumiendo lo anterior, de las ecuaciones (4.63), (4.64) y (4.65) para

$$A = 1 - (m_1 - d_1) \quad \text{y} \quad B = 1 - c_1 + d_1$$

tenemos los siguientes puntos críticos

$$\begin{aligned} \widetilde{E}_0 &= (0,0,0) \\ \widetilde{E}_1 &= (0,0,\widetilde{v}_1) \\ \widetilde{E}_2 &= (\widetilde{u}_1,0,0) \\ \widetilde{E}_3 &= (\widetilde{u}_2,0,\widetilde{v}_2) \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \widetilde{v}_1 &= \frac{c_2 + d_1 - d_2}{d_2 - d_1 - m_2} \\ \widetilde{u}_1 &= -\frac{B + c_2}{A + c_2} \\ \widetilde{u}_2 &= \frac{c_2(d_2 - d_1 - m_2) - B(m_2 - c_2)}{A(m_2 - c_2) + c_2(d_1 - d_2 + m_2 - m_1)} \\ \widetilde{v}_2 &= \frac{(d_2 - c_2 - d_1)(A - B) - m_1(c_2 + B)}{(d_1 - d_2 + m_2)(A - B) + Bm_1} \end{aligned}$$

Notamos que todas las singularidades están en el plano uv tal y como se muestra en la Figura 4.8.

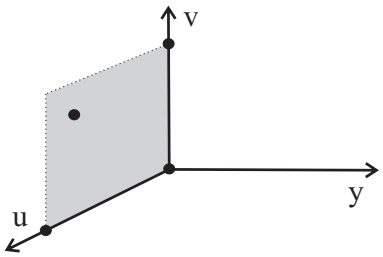


Figura 4.8: Singularidades en las coordenadas (u, y, v).

Del efecto domino de una cadena de alimenticia simple, es fácil de ver que

$(u(t), y(t), v(t)) \to \widetilde{E}_0$ como $t \to \infty$ si y solo si $(x(t), y(t), z(t)) \to (0,0,0)$ y $x(t) \to 0$ mas rapido que $y(t) \to 0,\ y(t) \to 0$ mas rapido que $z(t) \to 0$.

$(u(t), y(t), v(t)) \to \widetilde{E}_1$ si y solo si $(x(t), y(t), z(t)) \to (0,0,0)$ y $x(t) \to 0$ mas rapido que $y(t) \to 0, z(t) \to 0$ en una tasa finita como $y(t) \to 0$.

$(u(t), y(t), v(t)) \to \widetilde{E}_2$ si y solo si $(x(t), y(t), z(t)) \to (0,0,0)$ y $y(t) \to 0$ mas rapido que $z(t),\ x(t) \to 0$ en una tasa finita como $y(t) \to 0$.

$(u(t), y(t), v(t)) \to \widetilde{E}_3$ si y solo si $y(t) \to 0$ y $x(t) \to 0,\ z(t) \to 0$ en una tasa finita como $y(t) \to 0$.

4.3.2. Matriz Jacobiana

Para hacer el análisis de estabilidad de los puntos críticos, necesitamos calcular la matriz Jacobiana del sistema (4.62), para ello consideremos las siguientes funciones

$$G_1(u,y,v) = \frac{u}{u+1}\left[uA+B\right] - u^2 y + \frac{c_2 u}{v+1} \tag{4.66}$$

$$G_2(u,y,v) = y\left[\frac{m_1 u}{u+1} - d_1\right] - \frac{c_2 y}{v+1} \tag{4.67}$$

$$G_3(u,y,v) = v\left[\frac{m_1 u}{u+1} - d_1 + d_2 - \frac{c_2 + m_2 v}{v+1}\right] \tag{4.68}$$

$$J(u,y,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u}G_1(u,y,v) & \frac{\partial}{\partial y}G_1(u,y,v) & \frac{\partial}{\partial v}G_1(u,y,v) \\ \frac{\partial}{\partial u}G_2(u,y,v) & \frac{\partial}{\partial y}G_2(u,y,v) & \frac{\partial}{\partial v}G_2(u,y,v) \\ \frac{\partial}{\partial u}G_3(u,y,v) & \frac{\partial}{\partial y}G_3(u,y,v) & \frac{\partial}{\partial v}G_3(u,y,v) \end{bmatrix}.$$

Derivando G_1, definido por la ecuación (4.66), con respecto a u tenemos

$$\frac{\partial}{\partial u}G_1(u,y,v) = \frac{Au(2+u)+B}{(1+u)^2} + \frac{c_2}{1+v} - 2uy$$

denotemos como $L_{1,1} = \frac{\partial}{\partial u}G_1(u,y,v)$, es decir

$$L_{1,1} = \frac{Au(2+u)+B}{(1+u)^2} + \frac{c_2}{1+v} - 2uy. \tag{4.69}$$

Derivando G_1, definido por la ecuación (4.66), con respecto a y tenemos

$$\frac{\partial}{\partial y}G_1(u,y,v) = -u^2$$

denotemos como $L_{1,2} = \frac{\partial}{\partial y}G_1(u,y,v)$, es decir

$$L_{1,2} = -u^2. \tag{4.70}$$

Derivando G_1, definido por la ecuación (4.66), con respecto a v tenemos

$$\frac{\partial}{\partial v}G_1(u,y,v) = -\frac{c_2 u}{(1+v)^2}$$

denotemos como $L_{1,3} = \frac{\partial}{\partial v}G_1(u,y,v)$, es decir

$$L_{1,3} = -\frac{c_2 u}{(1+v)^2}. \tag{4.71}$$

Por otro lado, derivando G_2, definido por la ecuación (4.84), con respecto a u tenemos

$$\frac{\partial}{\partial u}G_2(u,y,v) = \frac{m_1 y}{(1+u)^2}$$

denotemos como $L_{2,1} = \dfrac{\partial}{\partial u} G_2(u, y, v)$, es decir

$$L_{2,1} = \frac{m_1 y}{(1+u)^2}. \tag{4.72}$$

Derivando G_2, definido por la ecuación (4.84), con respecto a y tenemos

$$\frac{\partial}{\partial y} G_2(u, y, v) = \frac{m_1 u}{1+u} - d_1 - \frac{c_2}{1+v}$$

denotemos como $L_{2,2} = \dfrac{\partial}{\partial y} G_2(u, y, v)$, es decir

$$L_{2,2} = \frac{m_1 u}{1+u} - d_1 - \frac{c_2}{1+v}. \tag{4.73}$$

Derivando G_2, definido por la ecuación (4.84), con respecto a v tenemos

$$\frac{\partial}{\partial v} G_2(u, y, v) = \frac{c_2 y}{(1+v)^2}$$

denotemos como $L_{2,3} = \dfrac{\partial}{\partial v} G_2(u, y, v)$, es decir

$$L_{2,3} = \frac{c_2 y}{(1+v)^2}. \tag{4.74}$$

Así también, derivando G_3, definido por la ecuación (4.68), con respecto a u tenemos

$$\frac{\partial}{\partial u} G_3(u, y, v) = \frac{m_1 v}{(1+u)^2}$$

denotemos como $L_{3,1} = \dfrac{\partial}{\partial u} G_3(u, y, v)$, es decir

$$L_{3,1} = \frac{m_1 v}{(1+u)^2}. \tag{4.75}$$

Derivando G_3, definido por la ecuación (4.68), con respecto a y tenemos

$$\frac{\partial}{\partial y} G_3(u, y, v) = 0$$

denotemos como $L_{3,2} = \dfrac{\partial}{\partial y} G_3(u, y, v)$, es decir

$$L_{3,2} = 0. \tag{4.76}$$

Derivando G_3, definido por la ecuación (4.68), con respecto a v tenemos

$$\frac{\partial}{\partial v} G_3(u, y, v) = \frac{m_1 u}{1+u} - d_1 + d_2 - \frac{(c_2 + 2v m_2)(v+1) - (c_2 v + m_2 v^2)}{(1+v)^2}$$

denotemos como $\dfrac{\partial}{\partial v} G_3(u, y, v)$, es decir

$$L_{3,3} = \frac{m_1 u}{1+u} - d_1 + d_2 - \frac{c_2 + 2m_2 v + v^2 m_2}{(1+v)^2}. \tag{4.77}$$

Así de las ecuaciones del (4.69) al (4.77) tenemos nuestra matriz Jacobiana

$$J(u, y, v) = \begin{bmatrix} L_{1,1} & L_{1,2} & L_{1,3} \\ L_{2,1} & L_{2,2} & L_{2,3} \\ L_{3,1} & L_{3,2} & L_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{1,1} & L_{1,2} & L_{1,3} \\ L_{2,1} & L_{2,2} & L_{2,3} \\ L_{3,1} & 0 & L_{3,3} \end{bmatrix}$$

4.3.3. Estabilidad de las singularidades

Ahora analizaremos la estabilidad de los puntos críticos $\widetilde{E}_0, \widetilde{E}_1, \widetilde{E}_2$ y $\widetilde{E}_3$, esto lo haremos reemplazando cada punto crítico en el la matriz Jacobiana y utilizaremos el método de la posición de las raíces.

Para el punto crítico $\widetilde{E}_0 = (0,0,0)$ tenemos

$$J(0,0,0) = \begin{bmatrix} B+c_2 & 0 & 0 \\ 0 & -d_1-c_2 & 0 \\ 0 & 0 & -d_1-c_2+d_2 \end{bmatrix} = L_0$$

De lo cual obtenemos los siguientes autovalores

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= B+c_2 \\ \lambda_2 &= -d_1-c_2 \\ \lambda_3 &= -d_1-c_2+d_2 \end{aligned}$$

Si consideramos $1+d_1+c_2 < c_1$ y $d_2-d_1 < c_2$ entonces todos los autovalores de L_0 tienen parte real negativa y por lo tanto el punto crítico $\widetilde{E}_0$ es asintóticamente estable.

Ahora analizaremos la estabilidad Para el punto $\widetilde{E}_1 = (0,0,\widetilde{v}_1)$, de la matriz Jacobiana tenemos

$$J(u,y,v)|_{(0,0,\widetilde{v}_1)} = \begin{bmatrix} B+\dfrac{c_2}{1+\widetilde{v}_1} & 0 & 0 \\ 0 & -d_1-\dfrac{c_2}{1+\widetilde{v}_1} & 0 \\ m_1\widetilde{v}_1 & 0 & \dfrac{\widetilde{v}_1(c_2-m_2)}{(\widetilde{v}_1+1)^2} \end{bmatrix}$$

De lo cual obtenemos los siguientes autovalores

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= B+\frac{c_2}{1+\widetilde{v}_1} \\ \lambda_2 &= -d_1-\frac{c_2}{1+\widetilde{v}_1} \\ \lambda_3 &= \frac{\widetilde{v}_1(c_2-m_2)}{(\widetilde{v}_1+1)^2} \end{aligned}$$

Para que $\lambda_1 < 0$, se debe cumplir

$$1+d_1+\frac{c_2}{1+\widetilde{v}_1} < c_1. \tag{4.78}$$

También notamos que $\lambda_2 < 0$, y para que $\lambda_3 < 0$ es necesario que $c_2 < m_2$.

Reemplazando $\widetilde{v}_1$ en la ecuación (4.78) tenemos

$$1+d_1+\frac{c_2}{1+\dfrac{c_2+d_1-d_2}{d_2-d_1-m_2}} < c_1$$

es decir

$$1 + d_1 + \frac{c_2(d_2 - d_1 - m_2)}{c_2 - m_2} < c_1$$

y además como $\widetilde{v}_1 > 0$, entonces se cumple que $c_2 < d_2 - d_1 < m_2$.

Así tenemos que si se cumple $1 + d_1 + \dfrac{c_2(d_2 - d_1 - m_2)}{c_2 - m_2} < c_1$ y $c_2 < d_2 - d_1 < m_2$ entonces el punto crítico $\widetilde{E}_1$ es asintóticamente estable.

Ahora analizaremos la estabilidad Para el punto $\widetilde{E}_2 = (\widetilde{u}_1, 0, 0)$, de la matriz Jacobiana tenemos

$$J(\widetilde{u}_1, 0, 0) = \begin{bmatrix} \dfrac{Au_1(2 + \widetilde{u}_1) + B}{(1 + \widetilde{u}_1)^2} + c_2 & -\widetilde{u}_1^2 & -c_2\widetilde{u}_1 \\ 0 & -d_1 - c_2 + \dfrac{m_1\widetilde{u}_1}{1 + \widetilde{u}_1} & 0 \\ 0 & 0 & d_2 - d_1 - c_2 + \dfrac{m_1\widetilde{u}_1}{1 + \widetilde{u}_1} \end{bmatrix}$$

Donde $\widetilde{u}_1 = \dfrac{-(B + c_2)}{A + c_2}$, así tenemos

$$c_2(\widetilde{u}_1 + 1) = -(B + A\widetilde{u}_1)$$

es decir

$$c_2 = \frac{-(B + A\widetilde{u}_1)}{\widetilde{u}_1 + 1} = \frac{-B - B\widetilde{u}_1 - A\widetilde{u}_1^2 - A\widetilde{u}_1}{(1 + \widetilde{u}_1)^2}$$

entonces $J(\widetilde{u}_1, 0, 0)$ toma la siguiente forma

$$J(\widetilde{u}_1, 0, 0) = \begin{bmatrix} \dfrac{(A - B)\widetilde{u}_1}{(1 + \widetilde{u}_1)^2} & -\widetilde{u}_1^2 & -c_2\widetilde{u}_1 \\ 0 & -d_1 - c_2 + \dfrac{m_1\widetilde{u}_1}{1 + \widetilde{u}_1} & 0 \\ 0 & 0 & d_2 - d_1 - c_2 + \dfrac{m_1\widetilde{u}_1}{1 + \widetilde{u}_1} \end{bmatrix}$$

De lo cual obtenemos los siguientes autovalores

$$\lambda_1 = \frac{(A - B)\widetilde{u}_1}{(1 + \widetilde{u}_1)^2}$$

$$\lambda_2 = -d_1 - c_2 + \frac{m_1\widetilde{u}_1}{1 + \widetilde{u}_1}$$

$$\lambda_3 = d_2 - d_1 - c_2 + \frac{m_1\widetilde{u}_1}{1 + \widetilde{u}_1}$$

Para que $\lambda_1 < 0$, se debe cumplir que $A - B = c_1 - m_1 < 0$, es decir

$$c_1 < m_1.$$

Para que $\lambda_2 < 0$, se debe cumplir que

$$\frac{m_1\widetilde{u}_1}{1 + \widetilde{u}_1} < d_1 + c_2.$$

Para que $\lambda_3 < 0$, se debe cumplir que

$$\frac{m_1\widetilde{u}_1}{1+\widetilde{u}_1} + d_2 < d_1 + c_2.$$

De donde notamos que

$$\frac{m_1\widetilde{u}_1}{1+\widetilde{u}_1} < \frac{m_1\widetilde{u}_1}{1+\widetilde{u}_1} + d_2 < d_1 + c_2$$

es decir si $\lambda_3 < 0$, entonces $\lambda_2 < 0$.

Además como $\widetilde{u}_1 > 0$ entonces se debe cumplir que $(B + c_2)(A + c_2) < 0$.

Por otro lado, reemplazando $\widetilde{u}_1$ en la condición $\frac{m_1\widetilde{u}_1}{1+\widetilde{u}_1} + d_2 < d_1 + c_2$ tenemos

$$\frac{m_1\left(\frac{c_1-1-d_1-c_2}{1-m_1+d_1+c_2}\right)}{1+\left(\frac{c_1-1-d_1-c_2}{1-m_1+d_1+c_2}\right)} + d_2 < d_1 + c_2$$

$$\frac{-m_1\left(\frac{1-c_1+d_1+c_2}{1-m_1+d_1+c_2}\right)}{1-\left(\frac{1-c_1+d_1+c_2}{1-m_1+d_1+c_2}\right)} + d_2 < d_1 + c_2$$

$$\frac{-m_1(1-c_1+d_1+c_2)}{c_1-m_1} < d_1 + c_2 - d_2$$

$$-m_1(1-c_1+d_1+c_2) > (c_1-m_1)(d_1+c_2-d_2)$$

$$-m_1(1-c_1+d_1+c_2) + m_1(d_1+c_2-d_2) > c_1(d_1+c_2-d_2)$$

$$-m_1(1-c_1+d_2) > c_1\,(d_1+c_2-d_2)$$

$$m_1(1+d_2-c_1) < c_1(d_2-c_2-d_1)$$

Además como $(B + c_2)(A + c_2) < 0$, reemplazando A y B tenemos

$$(1+d_1+c_2-c_1)(1+d_1+c_2-m_1) < 0$$

y como $c_1 < m_1$ concluimos que

$$c_1 < 1 + d_1 + c_2 < m_1.$$

Entonces si se cumple $m_1(1+d_2-c_1) < c_1(d_2-c_2-d_1)$ y $c_1 < 1+d_1+c_2 < m_1$ entonces el punto crítico $\widetilde{E}_2$ es asintóticamente estable.

Y por ultimo analizaremos la estabilidad Para el punto $\widetilde{E}_3 = (\widetilde{u}_2, 0, \widetilde{v}_2)$, de la matriz Jacobiana tenemos

$$\begin{bmatrix} \frac{A\widetilde{u}_2(2+\widetilde{u}_2)+B}{(1+\widetilde{u}_2)^2} + \frac{c_2}{1+\widetilde{v}_2} & -\widetilde{u}_2 & \frac{-c_2\widetilde{u}_2}{(1+\widetilde{v}_2)^2} \\ 0 & -d_1 - c_2 + \frac{m_1\widetilde{u}_2}{1+\widetilde{u}_2} - \frac{c_2}{1+\widetilde{v}_2} & 0 \\ m_1\widetilde{v}_2(1+\widetilde{u}_2)^2 & 0 & d_2 - d_1 + \frac{m_1\widetilde{u}_2}{1+\widetilde{u}_2} - \frac{c_2+m_2\widetilde{v}_2(2+\widetilde{v}_2)}{(1+\widetilde{v}_2)^2} \end{bmatrix}$$

Debido a la forma compleja que tiene la matriz Jacobiana, el análisis de estabilidad de este punto crítico es demasiado complicado por lo que no se realizará.

El siguiente resultado provee otro conjunto de condiciones para que el origen sea un atractor local. Notemos que el resultado es una mejora del Teorema 4.2 cuando $m_1 < \dfrac{c_1(d_1+c_2)}{c_1-1}$ en adición de las condiciones que no excluyen la existencia de E_c.

Proposición 4.7 *Si se cumplen las siguientes condiciones*

- $c_1 > 1 + d_1 + c_2$
- $m_1 < \dfrac{c_1(d_1+c_2)}{c_1-1}$
- $\dfrac{x(0)}{y(0)} \leq \dfrac{c_1-(1+d_1+c_2)}{1+d_1+c_2-m_1} \equiv u_0$

entonces

$$\lim_{t\to\infty}(x(t),y(t),z(t)) = (0,0,0).$$

Demostración. Primero veremos que $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Como $u(t) = \dfrac{x(t)}{y(t)}$, entonces

$$u'(t) = \frac{x'(t)y(t) - y'(t)x(t)}{y^2(t)}$$

reemplazando la primera y segunda ecuación del sistema (2.11)

$$u'(t) = \frac{y\left(x(1-x) - \dfrac{c_1xy}{x+y}\right) - x\left(\dfrac{m_1xy}{x+y} - d_1y - \dfrac{c_2yz}{y+z}\right)}{y^2}$$

como $x(t) = u(t)y(t)$ tenemos

$$\begin{aligned}
u'(t) &= \frac{y\left(uy(1-uy) - \dfrac{c_1uy^2}{uy+y}\right) - uy\left(\dfrac{m_1uy^2}{uy+y} - d_1y - \dfrac{c_2yz}{y+z}\right)}{y^2} \\
&= \frac{u(1-uy)(u+1) - c_1u}{u+1} - u\left(\frac{m_1}{u+1} - d_1 - \frac{c_2z}{y+z}\right) \\
&= u\left(\frac{(1-uy)(u+1) - c_1}{u+1} - \frac{m_1}{u+1} + d_1 + \frac{c_2z}{y+z} + \frac{c_2y}{y+z} - \frac{c_2y}{y+z}\right) \\
&= u\left((1-x) - \frac{c_1+m_1u}{u+1} + d_1 + c_2 - \frac{c_2y}{y+z}\right) \\
&= u\left(\frac{u+1-c_1-m_1u+(d_1+c_2)(u+1)}{u+1} - x - \frac{c_2y}{y+z}\right)
\end{aligned}$$

Es decir

$$u'(t) = u\left(\frac{u(1+d_1+c_2-m_1) - (c_1-(1+d_1+c_2))}{u+1} - x - \frac{c_2y}{y+z}\right) \tag{4.79}$$

De las hipótesis de nuestra proposición tenemos

$$u_0(1+d_1+c_2-m_1) = c_1-(1+d_1+c_2)$$

reemplazando en la ecuación (4.79) tenemos

$$u'(t) = u\left[\frac{u(1+d_1+c_2-m_1)-u_0(1+d_1+c_2-m_1)}{u+1} - x - \frac{c_2y}{y+z}\right]$$

es decir

$$u'(t) = u\left[(1+d_1+c_2-m_1)\left(\frac{u-u_0}{u+1}\right) - x - \frac{c_2y}{y+z}\right] \tag{4.80}$$

para $t>0$, si $u(0)\leq u_0$ entonces $u(t)\leq u_0$ (ver demostración del Teorema 4.2) luego de la ecuación (4.80) se tiene

$$u'(s) = u\left[(1+d_1+c_2-m_1)\left(\frac{u(s)-u_0}{u(s)+1}\right) - x(s) - \frac{c_2y(s)}{y(s)+z(s)}\right] \leq -u(s)x(s)$$

así tenemos

$$\frac{u'(s)}{u(s)} < -x(s)$$

$$d(\ln u(s)) < -x(s)ds$$

$$\int_0^t d(\ln u(s)) < -\int_0^t x(s)ds$$

$$u(t) < u(0)exp\left\{-\int_0^t x(s)ds\right\}$$

el resto se sigue del argumento de la demostración del Teorema 4.3, lo cual nos lleva a

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

Debido al efecto dominó, de la cadena alimenticia simple, tenemos que

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to\infty} z(t) = 0.$$

Así termina nuestra demostración ■

Proposición 4.8 *Si $m_2 > d_2$ y $m_1 < \min\{1+d_1, d_1+c_2-d_2\}$ entonces hay soluciones de sistema (2.11) que tienden a $E_1=(1,0,0)$ cuando $t\to\infty$.*

Demostración.
De la primera ecuación del sistema (4.62) tenemos

$$u'(t) = \frac{u(Au+B)}{1+u} - u^2y + \frac{c_2u}{v+1}$$

$$= u^2\left(\frac{Au+B}{u(1+u)} + \frac{c_2}{u(1+v)} - y\right)$$

Consideremos

$$K(u,v) = \frac{Au+B}{u(1+u)} + \frac{c_2}{u(1+v)}$$

por lo tanto nuestra ecuación queda expresa de la siguiente manera

$$u'(t) = u^2(K(u,v)-y) \equiv H_1(u,y,v) \quad , \quad u(0)>0 \tag{4.81}$$

De la segunda ecuación del sistema (4.62) tenemos

$$\begin{aligned} y'(t) &= y\left(\frac{m_1 u}{1+u} - d_1\right) - \frac{c_2 y}{1+v} \\ &= y\left(\frac{m_1 u}{u+1} - d_1 - \frac{c_2}{1+v}\right) \\ &= y\left(\frac{m_1 u}{u+1} - m_1 + m_1 - d_1 - \frac{c_2}{v+1}\right) \\ &= y\left(-\frac{m_1}{u+1} + m_1 - d_1 - \frac{c_2}{v+1}\right) \\ &= y\left(\frac{(m_1 - d_1)(1+v) - c_2}{v+1} - \frac{m_1}{u+1}\right) \\ &= y\left(\frac{(m_1 - d_1)v + m_1 - d_1 - c_2}{v+1} - \frac{m_1}{u+1}\right) \end{aligned}$$

Denotemos como

$$l_1 = m_1 - d_1 \quad \text{y} \quad l_2 = m_1 - d_1 - c_2$$

entonces

$$y'(t) = y\left(\frac{l_1 v + l_2}{v+1} - \frac{m_1}{u+1}\right) \equiv H_2(u,y,v) \quad , \quad u(0) > 0 \tag{4.82}$$

De la tercera ecuación del sistema (4.62) tenemos

$$\begin{aligned} v'(t) &= v\left(\frac{m_1 u}{1+u} - d_1 + d_2 - \frac{m_2 v + c_2}{1+v}\right) \\ &= v\left(\frac{m_1 u}{1+u} - m_1 + m_1 - d_1 + d_2 - \frac{m_2 v + c_2}{1+v} + d_2\right) \\ &= v\left(-\frac{m_1}{1+u} + \frac{(m_1 - d_1 + d_2)(1+v) - m_2 v - c_2}{1+v}\right) \\ &= v\left(\frac{(m_1 - d_1 + d_2 - m_2)v + m_1 - d_1 + d_2 - c_2}{1+v} - \frac{m_1}{1+u}\right) \end{aligned}$$

Denotemos como

$$q_1 = m_1 - d_1 + d_2 - m_2 \quad \text{y} \quad q_2 = m_1 - d_1 + d_2 - c_2$$

así tenemos que

$$v'(t) = v\left(\frac{q_1 v + q_2}{v+1} - \frac{m_1}{u+1}\right) \equiv H_3(u,y,v) \quad , \quad v(0) > 0 \tag{4.83}$$

Entonces, de las ecuaciones (4.83), (4.82) y (4.81) podemos escribir el sistema (4.62) como

$$\begin{cases} u'(t) = u^2(K(u,v) - y) \equiv H_1(u,y,v) \quad , \quad u(0) > 0 \\ y'(t) = y\left(\dfrac{l_1 v + l_2}{v+1} - \dfrac{m_1}{u+1}\right) \equiv H_2(u,y,v) \quad , \quad y(0) > 0 \\ v'(t) = v\left(\dfrac{q_1 v + q_2}{v+1} - \dfrac{m_1}{u+1}\right) \equiv H_3(u,y,v) \quad , \quad v(0) > 0 \end{cases} \tag{4.84}$$

Recordemos que $A = 1 - m_1 + d_1$ y de las hipótesis de nuestra proposición tenemos

$$m_1 < \text{mín}\{1 + d_1, d_1 + c_2 - d_2\} \leq 1 + d_1$$

entonces

$$0 < 1 + d_1 - m_1 = A$$

es decir

$$A > 0.$$

Además

$$m_1 < \text{mín}\{1 + d_1, d_1 + c_2 - d_2\} \leq d_1 + c_2 - d_2$$

entonces $m_1 - d_1 + d_2 - c_2 < 0$, es decir $q_2 < 0$, por lo tanto

$$A > 0 > q_2.$$

Por otro lado, notemos que

$$q_2 = m_1 - d_1 - c_2 + d_2 > m_1 - d_1 - c_2 = l_2$$

entonces $q_2 > l_2$, así tenemos

$$A > 0 > q_2 > l_2.$$

Por lo tanto existe $v_0 > 0$ tal que

$$H_2(u, y, v) < 0 \text{ y } H_3(u, y, v) < 0 \quad \forall (u, y, v) \in [0, \infty\rangle \times [0, \infty\rangle \times [o, v_0].$$

Sea $u_0 = \text{máx}\left\{-\frac{B}{A}, 0\right\} \geq 0$. Entonces para u_0 y v_0 definimos el conjunto

$$\Delta = \left\{(u, y, v) \in \mathbb{R}^3_+ \;\mid\; u \in [u_0, \infty\rangle, \;\; v\epsilon[0, v_0\rangle, \;\; y \in [0, K(u_0, v_0)]\right\}$$

tenemos que

$$H_1(u, y, v) > 0, \;\; H_2(u, y, v) < 0 \quad \text{y} \quad H_3(u, y, v) < 0 \quad \forall (u, y, v) \in \Delta$$

es decir H_1 es creciente, mientras que H_2 y H_3 son decrecientes en Δ. Luego

$$\lim_{t \to \infty} (u(t), y(t), v(t)) = (\infty, 0, 0).$$

Así para $(u(0), v(0), y(0)) \in \Delta$, esto es

$$\begin{aligned} u(0) \geq u_0 \;\; &\rightarrow \;\; x(0) \geq y(0)u_0 \\ v(0) \leq v_0 \;\; &\rightarrow \;\; y(0) \leq z(0)v_0 \\ y(0) &< k(u_0, v_0) \end{aligned}$$

se cumple $\lim_{t \to \infty} u(t) = \lim_{t \to \infty} \dfrac{x(t)}{y(t)} = \infty$.

Entonces para $0 < \epsilon < c_1$ existe $t^* > 0$ tal que

$$\frac{c_1 - \varepsilon}{\varepsilon} < \frac{x(t)}{y(t)} \quad \forall t > t^*$$

Notemos que, si

$$\frac{c_1}{\varepsilon} - 1 < \frac{x(t)}{y(t)} \quad \rightarrow \quad \frac{c_1}{1 + \dfrac{x(t)}{y(t)}} < \varepsilon$$

es decir, para $0 < \varepsilon < c_1$ existe $t^* > 0$ tal que

$$-\frac{c_1}{1+\dfrac{x(t)}{y(t)}} > -\varepsilon \quad \forall t > t^*.$$

Así de la primera ecuación del sistema (2.11) tenemos

$$x'(t) = x\left(1 - x - \frac{c_1 y}{x+y}\right) > x(t)(1-\varepsilon-x(t)) \quad \forall t > t^*$$

y por argumentos similares a la prueba del Teorema 4.1 tenemos

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 1.$$

Así termina la demostración de nuestra proposición. ■

Para obtener resultados adicionales sobre las condiciones para la existencia de trayectorias del sistema de ecuaciones (2.11) que tienden a $E_1 = (1,0,0)$ cuando $t \longrightarrow \infty$, Sea $v = \dfrac{y}{z}$ y considerando la transformación $(x,y,z) \longrightarrow (x,y,v)$.

Es decir

$$T(x,y,z) = \left(x, y, \frac{y}{z}\right) = (u,y,v).$$

Notamos que

$$Dom(T) = \{(x,y,z) \in \Omega \ : \ z \neq 0\} = \{(x,y,z) \in \Omega \ : \ z > 0\}$$

y como $v = \dfrac{y}{z}$, entonces

$$z = \frac{y}{v}.$$

Entonces existe T^{-1} definida por

$$T^{-1}(x,y,v) = \left(x, y, \frac{y}{v}\right).$$

Mediante T y T^{-1} podemos estudiar el comportamiento de la singularidad E_1 en las coordenadas (x,y,v) ya que este será equivalente en las coordenadas (x,y,z).

Ahora veamos como este cambio de coordenadas afecta al sistema (2.11), del cual tenemos

$$x'(t) = x(1-x) - \frac{c_1 xy}{x+y} \equiv N_1(x,y,v) \quad , \quad x(0) > 0$$

$$y'(t) = y\left(\frac{m_1 x}{x+y} - d_1 - \frac{c_2}{v+1}\right) \equiv N_2(x,y,v) \quad , \quad y(0) > 0$$

y como $v = \dfrac{y}{z}$, entonces

$$v' = \frac{y'z - z'y}{z^2}$$

considerando la segunda y tercera ecuación del sistema (2.11) tenemos

$$v' = \frac{yz\left(\dfrac{m_1 x}{x+y} - d_1 - \dfrac{c_2}{1+v}\right) - y\left(\dfrac{m_2 yz}{y+z} - d_2 z\right)}{z^2}$$

$$= v\left[\frac{m_1 x}{x+y} - d_1 - \frac{c_2}{v+1} - \left(\frac{m_2 y}{y+z} - d_2\right)\right]$$

Además, notemos que $y = vz$ entonces

$$v' = v\left[\frac{m_1 x}{x+y} - d_1 - \frac{c_2}{v+1} - \left(\frac{m_2 vz}{vz+z} - d_2\right)\right]$$

$$v' = v\left[\frac{m_1 x}{x+y} - d_1 - \frac{c_2}{v+1} - \left(\frac{m_2 v}{v+1} - d_2\right)\right]$$

Es decir

$$v' \quad = \quad v\left[\frac{m_1 x}{x+y} - d_1 - \frac{c_2}{v+1} - \left(\frac{m_2 v}{v+1} - d_2\right)\right] \quad \equiv \quad H_3(x,y,v) \quad , \quad v(0) > 0$$

Entonces las ecuaciones del sistema (2.11) se convierten en el siguiente sistema

$$\begin{cases} x'(t) \quad = \quad x(1-x) - \dfrac{c_1 xy}{x+y} & \equiv \quad N_1(x,y,v) \quad , \quad x(0) > 0 \\ y'(t) \quad = \quad y\left(\dfrac{m_1 x}{x+y} - d_1 - \dfrac{c_2}{v+1}\right) & \equiv \quad N_2(x,y,v) \quad , \quad y(0) > 0 \\ v'(t) \quad = \quad v\left[\dfrac{m_1 x}{x+y} - d_1 - \dfrac{c_2}{v+1} - \left(\dfrac{m_2 v}{v+1} - d_2\right)\right] & \equiv \quad N_3(x,y,v) \quad , \quad v(0) > 0 \end{cases} \tag{4.85}$$

A continuación hallaremos los puntos críticos del sistema de ecuaciones (4.85).

De la primera ecuación del sistema (4.85) tenemos

$$y = 0 \ \vee \ \frac{m_1 x}{x+y} - d_1 - \frac{c_2}{v+1} = 0$$

si $y = 0$, de la primera ecuación del sistema (4.85) tenemos

$$x(1-x) = 0$$

entonces

$$x = 0 \quad \vee \quad x = 1$$

consideremos que $y = 0$ y $x = 1$, entonces de la tercera ecuación del sistema (4.85) tenemos

$$v = 0 \quad \vee \quad m_1 - d_1 - \frac{c_2 + m_2 v}{v+1} + d_2 = 0$$

Notemos que si $m_1 - d_1 - \dfrac{c_2 + m_2 v}{v+1} + d_2 = 0$, entonces

$$m_1 - d_1 + d_2 = \frac{c_2 + m_2 v}{v+1} \tag{4.86}$$

$$(m_1 - d_1 + d_2)(v+1) = c_2 + m_2 v$$

$$v = \frac{c_2 - m_1 + d_1 - d_2}{m_1 - d_1 + d_2 - m_2}. \tag{4.87}$$

Por lo tanto, tenemos los siguientes puntos críticos

$$E_{10} = (1,0,0) \quad y \quad E_{20} = (1,0,\widehat{v})$$

donde

$$\widehat{v} = \frac{c_2 - m_1 + d_1 - d_2}{m_1 - d_1 + d_2 - m_2}$$

Notamos que los las singularidades E_{10} y E_{20} están en plano xv, tal y como muestra la Figura 4.9.

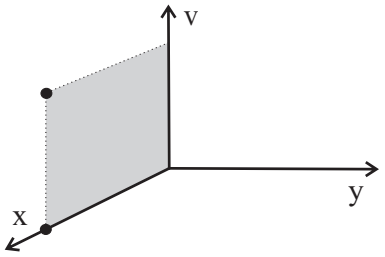


Figura 4.9: Singularidades en las coordenadas (x, y, v).

Ahora analizaremos la estabilidad para los puntos de equilibrio E_{10} y E_{20}. Para ello calcularemos la matriz Jacobiana

$$J(x,y,v) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}N_1(u,y,v) & \dfrac{\partial}{\partial y}N_1(u,y,v) & \dfrac{\partial}{\partial v}N_1(u,y,v) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}N_2(u,y,v) & \dfrac{\partial}{\partial y}N_2(u,y,v) & \dfrac{\partial}{\partial v}N_2(u,y,v) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}N_3(u,y,v) & \dfrac{\partial}{\partial y}N_3(u,y,v) & \dfrac{\partial}{\partial v}N_3(u,y,v) \end{bmatrix}.$$

Derivando N_1, definido por la primera ecuación del sistema (4.85), con respecto a x tenemos

$$\frac{\partial}{\partial x}N_1(u,y,v) = 1 - 2x - \frac{c_1 y^2}{(x+y)^2}$$

denotemos como $H_{1,1} = \dfrac{\partial}{\partial x}N_1(x,y,v)$, es decir

$$H_{1,1} = 1 - 2x - \frac{c_1 y^2}{(x+y)^2}. \tag{4.88}$$

Derivando N_1, definido por la primera ecuación del sistema (4.85), con respecto a y tenemos

$$\frac{\partial}{\partial y}N_1(u,y,v) = -\frac{c_1 x^2}{(x+y)^2}$$

denotemos como $H_{1,2} = \dfrac{\partial}{\partial y}N_1(x,y,v)$, es decir

$$H_{1,2} = -\frac{c_1 y^2}{(x+y)^2}. \tag{4.89}$$

Derivando N_1, definido por la primera ecuación del sistema (4.85), con respecto a v tenemos

$$\frac{\partial}{\partial v}N_1(u,y,v) = 0$$

denotemos como $H_{1,3} = 0$, es decir

$$H_{1,3} = 0. \tag{4.90}$$

Derivando N_2, definido por la segunda ecuación del sistema (4.85), con respecto a x tenemos

$$\frac{\partial}{\partial x}N_2(u,y,v) = \frac{m_1 y^2}{(x+y)^2}$$

denotemos como $H_{2,1} = \dfrac{\partial}{\partial x} N_2(x, y, v)$, es decir

$$H_{2,1} = \frac{m_1 y^2}{(x+y)^2}. \tag{4.91}$$

Derivando N_2, definido por la segunda ecuación del sistema (4.85), con respecto a y tenemos

$$\frac{\partial}{\partial y} N_2(u, y, v) = \frac{m_1 x^2}{(x+y)^2} - d_1 - \frac{c_2}{v+1}$$

denotemos como $H_{2,2} = \dfrac{\partial}{\partial y} N_2(x, y, v)$, es decir

$$H_{2,2} = \frac{m_1 x^2}{(x+y)^2} - d_1 - \frac{c_2}{v+1}. \tag{4.92}$$

Derivando N_2, definido por la segunda ecuación del sistema (4.85), con respecto a v tenemos

$$\frac{\partial}{\partial v} N_2(u, y, v) = \frac{c_2 y}{(v+1)^2}$$

denotemos como $H_{2,3} = \dfrac{\partial}{\partial v} N_2(x, y, v)$, es decir

$$H_{2,3} = \frac{c_2 y}{(v+1)^2}. \tag{4.93}$$

Derivando N_3, definido por la tercera ecuación del sistema (4.85), con respecto a x tenemos

$$\frac{\partial}{\partial x} N_3(u, y, v) = \frac{m_1 y v}{(x+y)^2}$$

denotemos como $H_{3,1} = \dfrac{\partial}{\partial x} N_3(x, y, v)$, es decir

$$H_{3,1} = \frac{m_1 y v}{(x+y)^2}. \tag{4.94}$$

Derivando N_3, definido por la tercera ecuación del sistema (4.85), con respecto a y tenemos

$$\frac{\partial}{\partial y} N_3(u, y, v) = -\frac{m_1 x v}{(x+y)^2}$$

denotemos como $H_{3,2} = \dfrac{\partial}{\partial y} N_3(x, y, v)$, es decir

$$H_{3,2} = -\frac{m_1 x v}{(x+y)^2}. \tag{4.95}$$

Derivando N_3, definido por la tercera ecuación del sistema (4.85), con respecto a v tenemos

$$\frac{\partial}{\partial v} N_3(u, y, v) = \frac{m_1 x}{x+y} - d_1 - \frac{c_2 + m_2 v^2 + 2 m_2 v}{(v+1)^2} + d_2$$

denotemos como $H_{3,3} = \dfrac{\partial}{\partial v} N_3(x, y, v)$, es decir

$$H_{3,3} = \frac{m_1 x}{x+y} - d_1 - \frac{c_2 + m_2 v^2 + 2 m_2 v}{(v+1)^2} + d_2. \tag{4.96}$$

$$J(u,y,v) = \begin{bmatrix} H_{1,1} & H_{1,2} & H_{1,3} \\ H_{2,1} & H_{2,2} & H_{2,3} \\ H_{3,1} & H_{3,2} & H_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{1,1} & H_{1,2} & 0 \\ H_{2,1} & H_{2,2} & H_{2,3} \\ H_{3,1} & H_{3,2} & H_{3,3} \end{bmatrix}$$

Ahora analizaremos la estabilidad de los puntos críticos E_{10} y E_{20}, esto lo haremos reemplazando cada punto crítico en el la matriz Jacobiana y utilizaremos el método de la posición de las raíces.

Para el punto crítico $E_{10} = (1,0,0)$ tenemos

$$J(1,0,0) = \begin{bmatrix} -1 & -c_1 & 0 \\ 0 & m_1 - d_1 - c_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 - d_1 - c_2 + d_2 \end{bmatrix} = H_0$$

De lo cual obtenemos los siguientes autovalores

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1 \\ \lambda_2 &= m_1 - d_1 - c_2 \\ \lambda_3 &= m_1 - d_1 - c_2 + d_2 \end{aligned}$$

Si consideramos $m_1 - d_1 - c_2 < 0$ y $m_1 - d_1 - c_2 + d_2 < 0$ entonces todos los autovalores de H_0 tienen parte real negativa y por lo tanto el punto crítico E_{10} es asintóticamente estable.

Ahora analizaremos la estabilidad Para el punto $E_{20} = (1,0,\widehat{v})$, de la matriz Jacobiana tenemos

$$J_{(1,0,\widehat{v})} = \begin{bmatrix} -1 & -c_1 & 0 \\ 0 & -m_1 - d_1 - \dfrac{c_2}{\widehat{v}+1} & 0 \\ 0 & -m_1\widehat{v} & m_1 - d_1 + d_2 - \dfrac{c_2 + m_2\widehat{v}^2 + 2m_2\widehat{v}}{(\widehat{v}+1)^2} \end{bmatrix}$$

notemos que $\widehat{v}$ satisface la ecuación (4.86), es decir

$$m_1 - d_1 + d_2 = \frac{c_2 + m_2\widehat{v}}{\widehat{v}+1}$$

luego tenemos

$$J_{(1,0,\widehat{v})} = \begin{bmatrix} -1 & -c_1 & 0 \\ 0 & -m_1 - d_1 - \dfrac{c_2}{\widehat{v}+1} & 0 \\ 0 & -m_1\widehat{v} & \dfrac{(c_2 + m_2\widehat{v})(\widehat{v}+1) - (c_2 + m_2\widehat{v}^2 + 2m_2\widehat{v})}{(\widehat{v}+1)^2} \end{bmatrix}$$

simplificando términos tenemos

$$J_{(1,0,\widehat{v})} = \begin{bmatrix} -1 & -c_1 & 0 \\ 0 & -m_1 - d_1 - \dfrac{c_2}{\widehat{v}+1} & 0 \\ 0 & -m_1\widehat{v} & \dfrac{(c_2-m_2)\widehat{v}}{(\widehat{v}+1)^2} \end{bmatrix}$$

De lo cual obtenemos los siguientes autovalores

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1 \\ \lambda_2 &= m_1 - d_1 - \frac{c_2}{\widehat{v}+1} \\ \lambda_3 &= \frac{(c_2-m_2)\widehat{v}}{(\widehat{v}+1)^2} \end{aligned}$$

notemos que $\widehat{v}$ satisface la ecuación (4.87), es decir

$$\widehat{v} = \frac{c_2 - m_1 + d_1 - d_2}{m_1 - d_1 + d_2 - m_2}$$

si consideramos $c_2 < m_2$ y $m_1 < d_1 + \dfrac{c_2}{\widehat{v}+1}$, entonces

$$\widehat{v} = \frac{c_2 - m_1 + d_1 - d_2}{m_1 - d_1 + d_2 - m_2} > 0$$

y además se cumple

$$\widehat{v} + 1 = \frac{c_2 - m_2}{m_1 - d_1 + d_2 - m_2}$$

así de $m_1 < d_1 + \dfrac{c_2}{\widehat{v}+1}$, tenemos

$$\begin{aligned} m_1 &< d_1 + \frac{c_2(m_1 - d_1 + d_2 - m_2)}{c_2 - m_2} \\ m_1(c_2 - m_2) &> d_1(c_2 - m_2) + c_2(m_1 - d_1 + d_2 - m_2) \\ c_2(m_2 - d_2) &> m_2(m_1 - d_1) \end{aligned}$$

Por lo tanto el punto crítico E_{20} es asintóticamente estable si y sólo si

$$(m_2 - d_2)c_2 > (m_1 - d_1)m_2 \quad \text{y} \quad c_2 < m_2.$$

En el siguiente teorema resumiremos algunos de los resultados mas importantes sobre la estabilidad de E_0 y E_1 vistos en esta sección.

Teorema 4.5 *Si al menos una de las siguientes cuatro condiciones se mantiene*

- $1 + d_1 + c_2 < c_1$ *y* $d_2 - d_1 < c_2$
- $1 + d_1 + \dfrac{c_2(m_2 + d_1 - d_2)}{m_2 - c_2} < c_1$ *y* $c_2 < d_2 - d_1 < m_2$
- $m_1 > 1 + d_1 + c_2 > c_1$, $m_1(1 + d_2 - c_1) < c_1(d_2 - c_2 - d_1)$
- $c_1 > 1 + d_1 + c_2$ *y* $m_1 < \dfrac{c_1(d_1 + c_2)}{c_1 - 1}$

Entonces hay soluciones positivas que tienden al origen i.e.

$$\lim_{t\to\infty}(x(t),y(t),z(t))=E_0=(0,0,0).$$

Si al menos una de las siguientes tres condiciones se mantienen

- $m_1+d_2<d_1+c_2$
- $(m_2-d_2)c_2>(m_1-d_1)m_2$ *y* $c_2<m_2$
- $m_2>d_2 \quad y \quad m_1<\min\{1+d_1,d_1+c_2-d_2\}$.

Entonces hay soluciones positivas tendiendo al estado libre de depredadores i.e.

$$\lim_{t\to\infty}(x(t),y(t),z(t))=E_1=(1,0,0).$$

Una pregunta natural, sería si ¿el sistema (2.11) admite escenarios tri-estables?. Una análisis cuidadoso de las condiciones que aseguran el comportamiento atractor de E_0, E_1 y E_c sugiere que puede ser compatible la existencia de escenarios tri-estables para algún conjunto de parámetros. Esta posibilidad es estudiada por el siguiente teorema

Teorema 4.6 *Si* $m_2>d_2$, $c_1>1+d_1+c_2$ *y*

$$\frac{\left(d_1+\dfrac{c_2(m_2-d_2)}{m_2}\right)^2}{d_1+c_2\left(\dfrac{m_2-d_2}{m_2}\right)^2}<m_1<\min\left\{1+d_1,c_2-d_2+d_1,\left(d_1+\frac{c_2(m_2-d_2)}{m_2}\right)\sqrt{\frac{c_1}{c_1-1}}\right\},$$

entonces el sistema (2.11)tiene al menos tres atractores

$$E_0=(0,0,0),\quad E_1=(1,0,0)\quad y\quad E_c=(x_c,y_c,z_c).$$

Demostración. Como $c_1>1+d_1+c_2>1$, entonces

$$c_1>c_1-1>0$$
$$\frac{c_1}{c_1-1}>1$$

luego

$$\sqrt{\frac{c_1}{c_1-1}}<\frac{c_1}{c_1-1} \tag{4.97}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\left(d_1+\frac{c_2(m_2-d_2)}{m_2}\right)\sqrt{\frac{c_1}{c_1-1}} &< \left(d_1+\frac{c_2(m_2-d_2)}{m_2}\right)\left(\frac{c_1}{c_1-1}\right)\\
&= \left(\frac{d_1m_2+c_2(m_2-d_2)}{m_2}\right)\left(\frac{c_1}{c_1-1}\right)\\
&= \left(\frac{(d_1+c_2)m_2-c_2d_2}{m_2}\right)\left(\frac{c_1}{c_1-1}\right)\\
&= \left(d_1+c_2-\frac{c_2d_2}{m_2}\right)\left(\frac{c_1}{c_1-1}\right)\\
&< (d_1+c_2)\left(\frac{c_1}{c_1-1}\right)\\
&= \frac{c_1\,(d_1+c_2)}{c_1-1}
\end{aligned}$$

Así las hipótesis de nuestro teorema satisfacen las hipótesis de la Proposición 4.7 y la Proposición 4.8 por lo tanto E_0 y E_1 son atractores. Ahora solo nos resta probar que E_c existe y es asintóticamente estable.

Como $m_2 > d_2$, se cumple

$$m_2 > m_2 - d_2 > 0 \quad \rightarrow \quad 1 > \frac{m_2 - d_2}{m_2} > 0$$

así tenemos

$$\frac{m_2 - d_2}{m_2} > \left(\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right)^2$$

entonces

$$\left(\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right)\left(\frac{c_2^2(m_2 - d_2)}{m_2} + d_1 c_2\right) > \left(\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right)^2\left(\frac{c_2^2(m_2 - d_2)}{m_2} + d_1 c_2\right)$$

$$c_2^2\left(\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right)^2 + d_1 c_2\left(\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right) > d_1 c_2\left(\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right)^2 + c_2^2\left(\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right)^3$$

$$c_2^2\left(\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right)^2 + 2d_1 c_2\left(\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right) > d_1 c_2\left(\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right) + d_1 c_2\left(\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right)^2 + c_2^2\left(\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right)^3$$

$$c_2^2\left(\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right)^2 + 2d_1 c_2\left(\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right) + d_1^2 > d_1^2 + d_1 c_2\left(\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right) + d_1 c_2\left(\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right)^2 + c_2^2\left(\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right)^3$$

$$\left(d_1 + c_2\left(\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right)\right)^2 > \left(d_1 + c_2\left(\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right)\right)\left(d_1 + c_2\left(\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right)^2\right)$$

es decir

$$\frac{\left(d_1 + c_2\left(\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right)\right)^2}{d_1 + c_2\left(\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right)^2} > d_1 + c_2\left(\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right) \tag{4.98}$$

y por hipótesis de nuestro teorema tenemos

$$m_1 > \frac{\left(d_1 + c_2\left(\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right)\right)^2}{d_1 + c_2\left(\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right)^2} > d_1 + c_2\left(\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right)$$

de donde notamos que

$$\underbrace{\frac{m_1}{d_1 + c_2\left(\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right)}}_{A} > 1. \tag{4.99}$$

Por otro lado, de las hipótesis de nuestro teorema tenemos

$$m_1 < \text{mín}\left\{1 + d_1, c_2 - d_2 + d_1, \left(d_1 + \frac{c_2(m_2 - d_2)}{m_2}\right)\sqrt{\frac{c_1}{c_1 - 1}}\right\}$$

es decir

$$m_1 < \left(d_1 + c_2\left(\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right)\right)\sqrt{\frac{c_1}{c_1 - 1}}$$

y por la relación (4.97) tenemos

$$m_1 < \left(d_1 + c_2\left(\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right)\right)\sqrt{\frac{c_1}{c_1 - 1}} < \left(d_1 + c_2\left(\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right)\right)\left(\frac{c_1}{c_1 - 1}\right)$$

entonces

$$m_1 < \left(d_1 + c_2\left(\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right)\right)\left(\frac{c_1}{c_1 - 1}\right)$$

por lo tanto

$$\underbrace{\frac{m_1}{d_1 + c_2\left(\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right)}}_{A} < \frac{c_1}{c_1 - 1}$$

así tenemos

$$0 < A(c_1 - 1) < c_1$$

$$Ac_1 - c_1 < A$$

$$c_1(A - 1) < A$$

es decir

$$0 < c_1 < \frac{A}{A - 1}.$$

Luego por el Lemma 4.1 existe E_c. Para que E_c sea asintóticamente estable tenemos que verificar que $m_{1,1} < 0$ y $m_{2,2} < 0$.

De la relación (4.98) tenemos

$$\underbrace{\frac{m_1}{d_1 + c_2\left(\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right)}}_{A} < \sqrt{\frac{c_1}{c_1 - 1}}$$

y de la relación (4.99) tenemos

$$1 < A < \sqrt{\frac{c_1}{c_1 - 1}}$$

y como $c_1 > 1 + d_1 + c_2 > 1$ entonces por Proposición 4.2 $m_{1,1} < 0$.

vamos a probar que

$$\frac{\left(d_1 + c_2\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right)^2}{\left(d_1 + c_2\left(\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right)^2\right)} < m_1 \quad \Rightarrow \quad m_{2,2} < 0.$$

luego de

$$\frac{\left(d_1 + c_2\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right)^2}{\left(d_1 + c_2\left(\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right)^2\right)} < m_1$$

tenemos

$$\frac{1}{m_1}\left(d_1 + c_2\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right)^2 < d_1 + c_2\left(\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right)^2$$

$$\frac{1}{m_1}\left(d_1 + c_2\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right)^2 < d_1 + c_2\frac{(m_2 - d_2)(m_2 - d_2)}{m_2^2}$$

$$\frac{1}{m_1}\left(d_1 + c_2\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right)^2 < d_1 + \frac{c_2 m_2(m_2 - d_2) - d_2 c_2(m_2 - d_2)}{m_2^2}$$

$$\frac{1}{m_1}\left(d_1 + c_2\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right)^2 + \frac{d_2 c_2(m_2 - d_2)}{m_2^2} < d_1 + c_2\frac{m_2 - d_2}{m_2}$$

$$\frac{1}{m_1}\left(d_1 + c_2\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right)^2 + \frac{c_2\left(\frac{m_2}{d_2} - 1\right)}{\left(\frac{m_2}{d_2}\right)^2} < d_1 + c_2\frac{m_2 - d_2}{m_2}$$

$$\underbrace{0 < d_1 + c_2\frac{m_2 - d_2}{m_2} - \frac{1}{m_1}\left(d_1 + c_2\frac{m_2 - d_2}{m_2}\right)^2 - \frac{c_2\left(\frac{m_2}{d_2} - 1\right)}{\left(\frac{m_2}{d_2}\right)^2}}_{g(c_2)}$$

y como $g(c_2) > 0$ entonces por la Proposición 4.4 tenemos que $m_{2,2} < 0$.

por lo tanto el punto E_c es localmente y asintóticamente estable. ■

Capítulo 5

Simulaciones

En muchos libros sobre ecuaciones diferenciales se encontrará explicaciones amplias acerca de varios métodos para obtener explícitamente soluciones a los problemas de valor inicial de primer orden. Pero en la practica, pocos de los problemas que se presentan en el estudio de los fenómenos físicos, químicos y biológicos pueden resolverse con exactitud. Por consiguiente utilizaremos un método numérico para aproximar la solución de nuestro sistema

$$\begin{cases} x'(t) &= x(1-x) - \dfrac{c_1 xy}{x+y} &, \quad x(0) > 0 \\ y'(t) &= \dfrac{m_1 xy}{x+y} - d_1 y - \dfrac{c_2 yz}{z+y} &, \quad y(0) > 0 \\ z'(t) &= \dfrac{m_2 yz}{z+y} - d_2 z &, \quad z(0) > 0 \end{cases}$$

Para el cual tenemos

$$\begin{aligned} F_1(x,y,z) &= x(1-x) - \frac{c_1 xy}{x+y} \\ F_2(x,y,z) &= \frac{m_1 xy}{x+y} - d_1 y - \frac{c_2 yz}{z+y} \\ F_3(x,y,z) &= \frac{m_2 yz}{z+y} - d_2 z \end{aligned}$$

definidas para en

$$\Omega^\circ = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0\right\}$$

Consideremos $U = \Omega^\circ$ y la función

$$\begin{array}{rccc} F & : & U & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (x,y,z) & \longmapsto & F(x,y,z) \end{array}$$

donde

$$F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$$

y $w(t) = (x(t), y(t), z(t))$, así tenemos el siguiente PVI asociado a w y F

$$\begin{cases} w' &= F(w) \\ w(0) &= (x(0), y(0), z(0)) \end{cases}$$

Para el cual obtendremos aproximaciones en algunos puntos específicos e igualmente espaciados, para esto utilizaremos los métodos de Runge-Kutta ya que tienen un error local

de truncamiento de orden alto, como los métodos de Taylor, pero permiten prescindir del calculo y evaluación de las derivadas de $F(t, w)$.

El método de Runge-Kutta de mayor uso es el de orden cuatro en la forma de la ecuación en diferencias. Estos detalles y mas se pueden encontrar en [4].

5.1. Método de Runge-Kutta de cuarto orden

Para el PVI anterior definimos el método de Runge-Kutta de cuarto orden mediante el siguiente esquema

$$\begin{aligned} w_0 &= w(0) \\ K_1 &= hF(t_i, w_i) \\ K_2 &= hF\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}K_1\right) \\ K_3 &= hF\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}K_2\right) \\ K_4 &= hF\left(t_{i+1}, w_i + K_3\right) \\ w_{i+1} &= w_i + \frac{K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4}{6} \\ t_{i+1} &= t_i + h \end{aligned}$$

Para cada $i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$. Este método tiene error local de truncamiento $O(h^4)$.

El mayor esfuerzo de calculo que se requiere para aplicar los métodos de Runge-Kutta es la evaluación de F. en los métodos de segundo orden el error de truncamiento es $O(h^2)$, y el costo es realizar dos evaluaciones funcionales por paso. El método de Runge-Kutta de orden cuatro requiere cuatro evaluaciones por paso y el error local de truncamiento es $O(h^4)$.

Como el método de Runge-Kutta de orden cuatro requiere realizar cuatro evaluaciones por paso, deberá dar respuestas mas exactas que el método de Euler con un cuarto del tamaño de paso para que sea mejor. De manera análoga si queremos que el método de Runge-Kutta sea mejor, deberá ofrecer una mayor precisión con el tamaño de paso h que el método de Runge-Kutta de segundo orden con el tamaño de paso $\frac{h}{2}$, porque el método de Runge-Kutta de cuarto orden requiere el doble de evaluaciones de paso.

A continuación veamos un posible algoritmo para la implementación general del método de Runge-Kutta de cuarto orden.

Algoritmo 5.1: RK4

Entrada: Extremos a, b; entero n; condición inicial w_0.
Salida : Aproximación a w en los $n+1$ valores de t en el intervalo $[a, b]$.

$h \leftarrow \dfrac{b-a}{n}$;
$t_1 \leftarrow a$;
$w_1 \leftarrow w_0$;
Para $i \leftarrow 1$ **hasta** n **hacer**
  $K_1 \leftarrow hF(t_i, w_i)$;
  $K_2 \leftarrow hF\left(t_i + \dfrac{h}{2}, w_i + \dfrac{1}{2}K_1\right)$;
  $K_3 \leftarrow hF\left(t_i + \dfrac{h}{2}, w_i + \dfrac{1}{2}K_2\right)$;
  $K_4 \leftarrow hF\left(t_{i+1}, w_i + K_3\right)$;
  $w_{i+1} \leftarrow w_i + \dfrac{K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4}{6}$;
  $t_{i+1} \leftarrow t_i + h$;
fin para

Notemos que este algoritmo depende principalmente de la definición de la función vectorial F, la cual en primer instancia representará al sistema autónomo (2.11), pero la modificaremos para que también reciba como argumentos los parámetros del mismo sistema.

Algoritmo 5.2: F

Entrada: Parámetros P; valor de las variables W.
Salida : Evaluación de F con argumentos P y W.
`/* función R = F(P,W)  */`

$R(1) = W(1)(1 - W(1)) - P(1)\left(\dfrac{W(1)W(2)}{W(1) + W(2)}\right)$;
$R(2) = P(3)\left(\dfrac{W(1)W(2)}{W(1) + W(2)}\right) - P(2)W(2) - P(4)\left(\dfrac{W(2)W(3)}{W(2) + W(3)}\right)$;
$R(3) = P(6)\left(\dfrac{W(2)W(3)}{W(2) + W(3)}\right) - P(5)W(3)$;

Notemos que en el Algoritmo 5.2 los parámetros y los valores de las variables se están pasando como como arreglos, mediante P y W definidos como

$$P = \left[\begin{array}{cccccc} c_1 & d_1 & m_1 & c_2 & d_2 & m_2 \end{array}\right] \quad \text{y} \quad W = \left[\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}\right].$$

Para implementar dichos algoritmos y realizar las simulaciones utilizamos MATLAB R2010a, ya que a pesar de ser el programa de simulación matemática mas utilizado nos brinda una interface amigable para el desarrollo de interfaces de usuario denominada *GUIDE*.

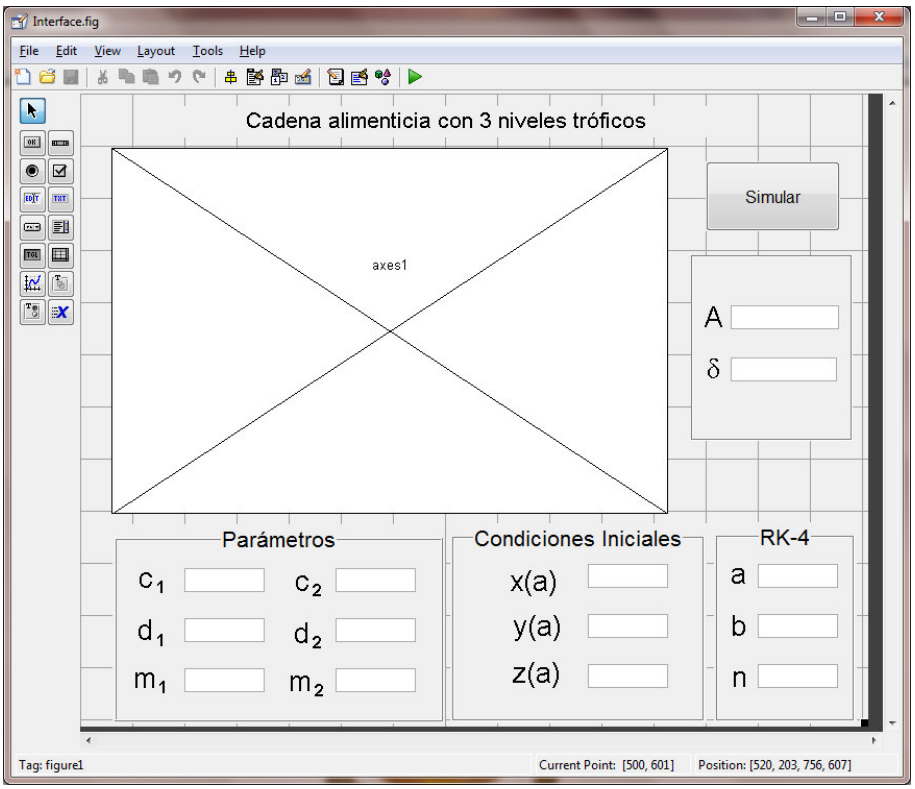


Figura 5.1: Desarrollo de la interface de usuario GUIDE - MATLAB R2010a

Así se desarrollo un entorno en el cual se irán ingresando los valores correspondientes a los parámetros, valores iniciales, el intervalo y el numero de particiones en las cuales se aproximará la solución mediante el Algoritmo 5.1; como se muestra en la Figura 5.1. Notamos también de la imagen que se implemento el calculo de A definido por (4.1) y δ utilizado en el Teorema 4.2.

Las simulaciones básicamente consiste en la gráfica de las solución aproximada w obtenida por los Algoritmos 5.1 y 5.2. Esto lo podemos hacer tal y como muestra la Figura 5.2.

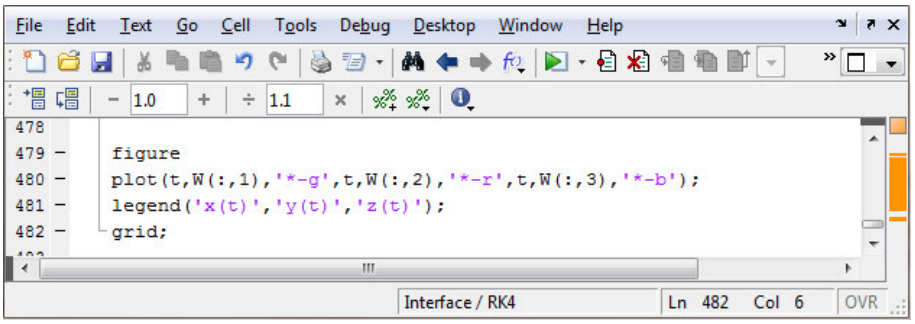


Figura 5.2: Codificación de la gráfica de la simulación

Las códigos fuente de los algoritmos y programas desarrollados en MatLab R2010a se encuentran en el Apéndice A.

5.2. Escenarios de extinción

A continuación simularemos diversos escenarios de extinción correspondiente a los resultados vistos en el Capitulo 4.

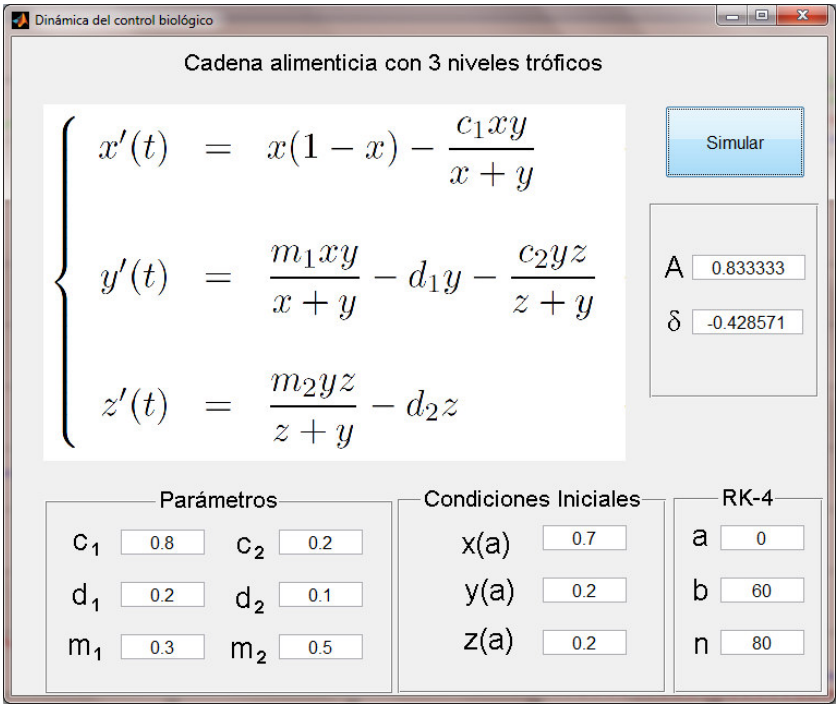


Figura 5.3: Parámetros y condiciones iniciales para simular el Teorema 4.1

Para los datos que se muestran en la Figura 5.3 se verifican las hipótesis del Teorema 4.1 por lo tanto se extingue el depredador intermedio y superior mientras que persiste la presa, es decir el control biológico fue efectivo.

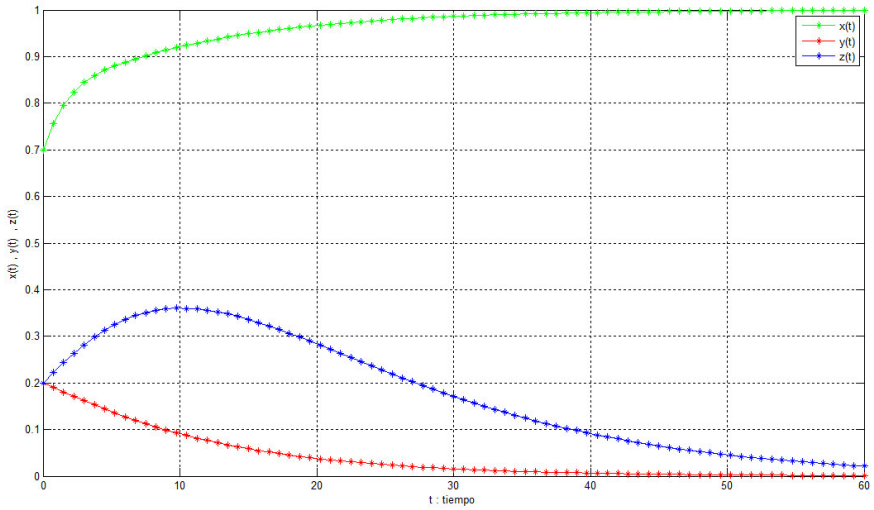


Figura 5.4: Soluciones del sistema (2.11) con los datos de la Figura 5.3

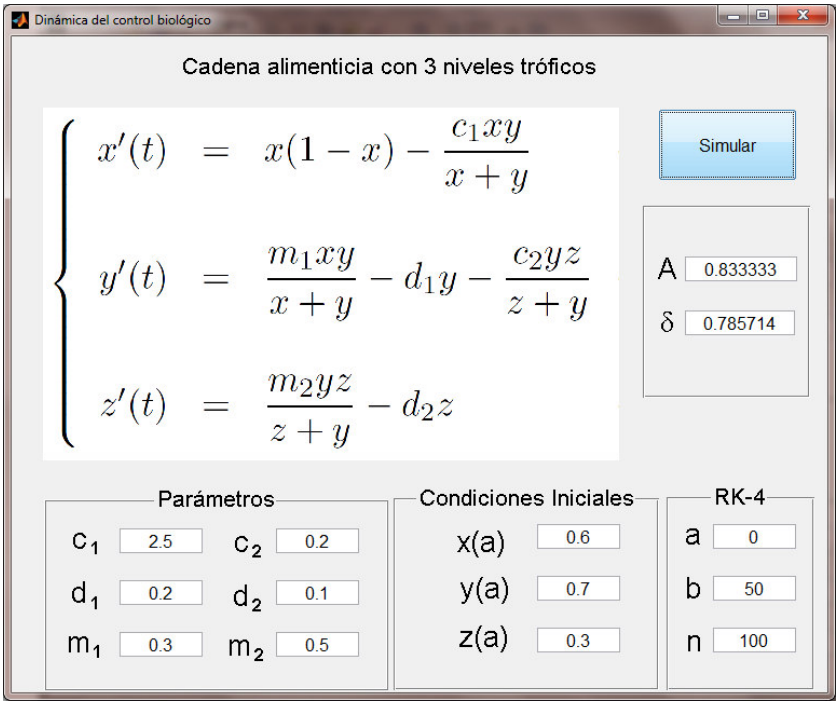


Figura 5.5: Parámetros y condiciones iniciales para simular el Teorema 4.2

Para los datos que se muestran en la Figura 5.5 se verifican las hipótesis del Teorema 4.2 entonces el depredador intermedio depreda completamente a las presas, y al carecer de presas el depredador intermedio se extingue y por consiguiente el depredador superior también se extingue.

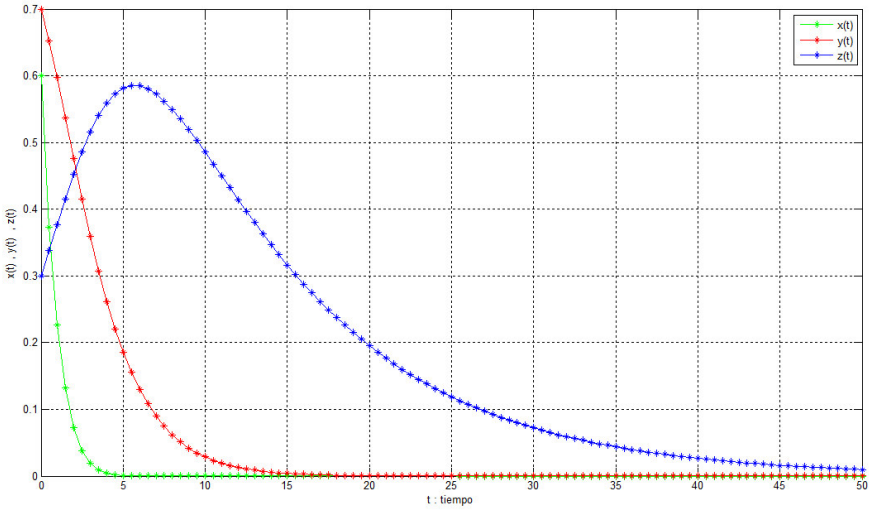


Figura 5.6: Soluciones del sistema (2.11) con los datos de la Figura 5.5

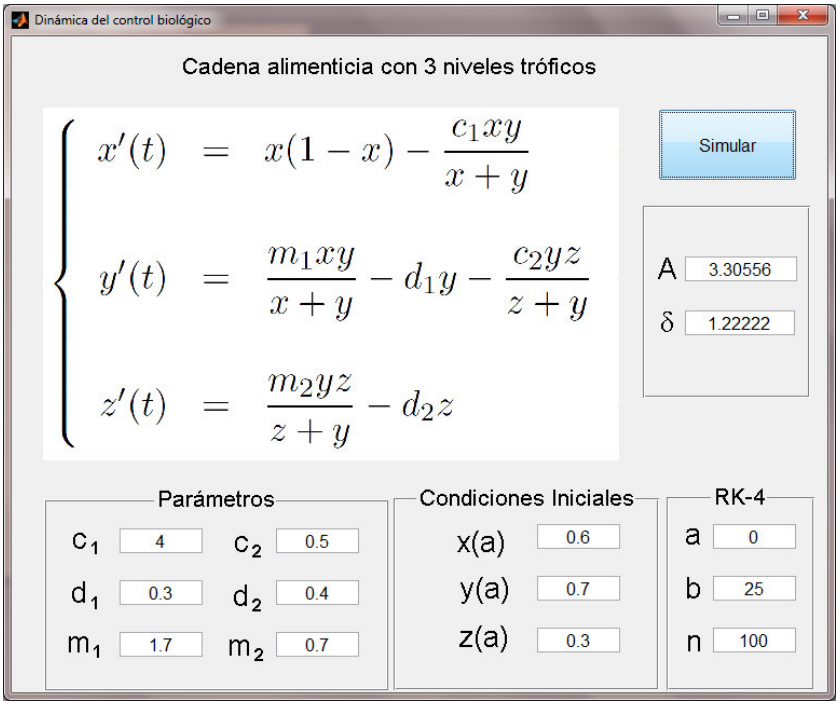


Figura 5.7: Parámetros y condiciones iniciales para simular el Teorema 4.3

Para los datos que se muestran en la Figura 5.7 se verifican las hipótesis del Teorema 4.3 por lo que la solución estable $E_0 = (0, 0, 0)$ es un atractor global, es decir ocurre la extinción total del sistema.

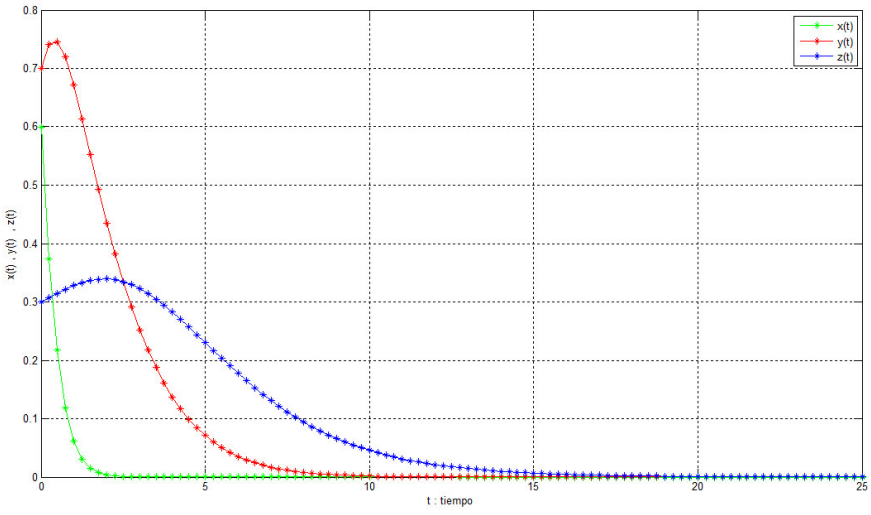


Figura 5.8: Soluciones del sistema (2.11) con los datos de la Figura 5.7

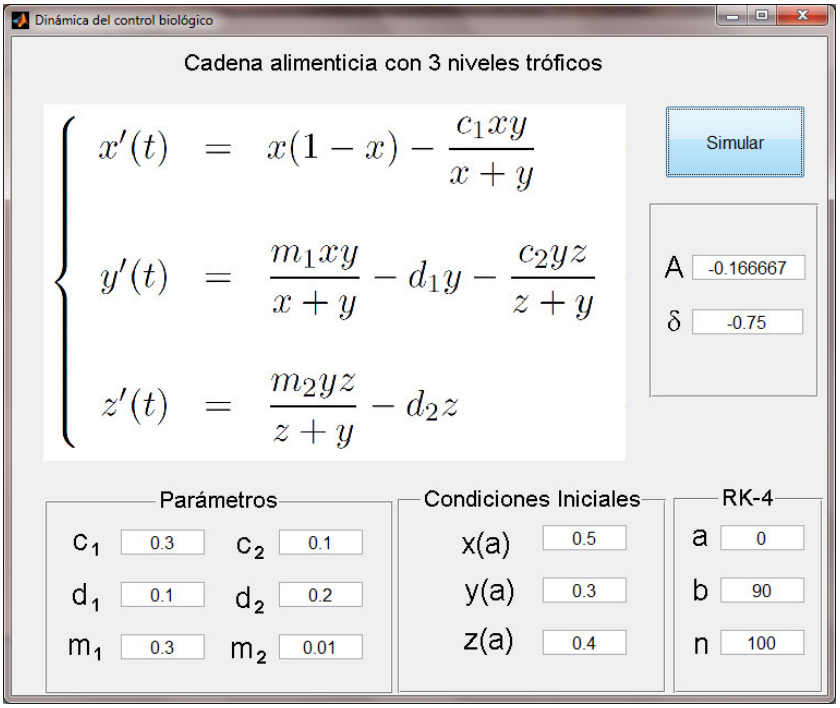


Figura 5.9: Parámetros y condiciones iniciales para simular el 1° caso del Teorema 4.4

En el Teorema 4.4 se dieron las condiciones especificas para la extinción del depredador superior, por ejemplo si $m_2 > c_2$ y los demás parámetros como muestra la Figura 5.9, entonces se extingue el depredador superior pero la presa y el depredador intermedio coexisten tal y como muestra la Figura 5.10.

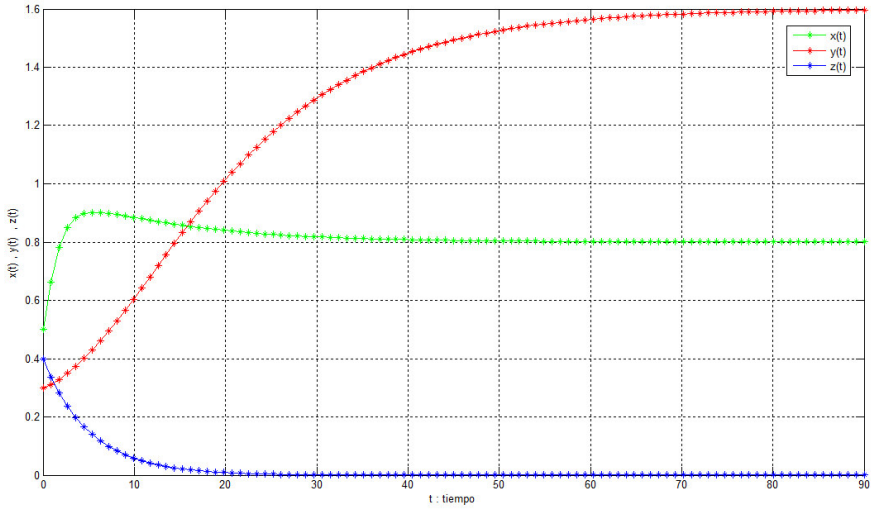


Figura 5.10: Soluciones del sistema (2.11) con los datos de la Figura 5.9

Así mismo en el Teorema 4.4, se asegura que si $m_2 < d_2$ y $0 < A \leq 1$ también se extingue el depredador superior. Este caso contiene a los resultados mostrados en el Teorema 4.1 y el Teorema 4.2.

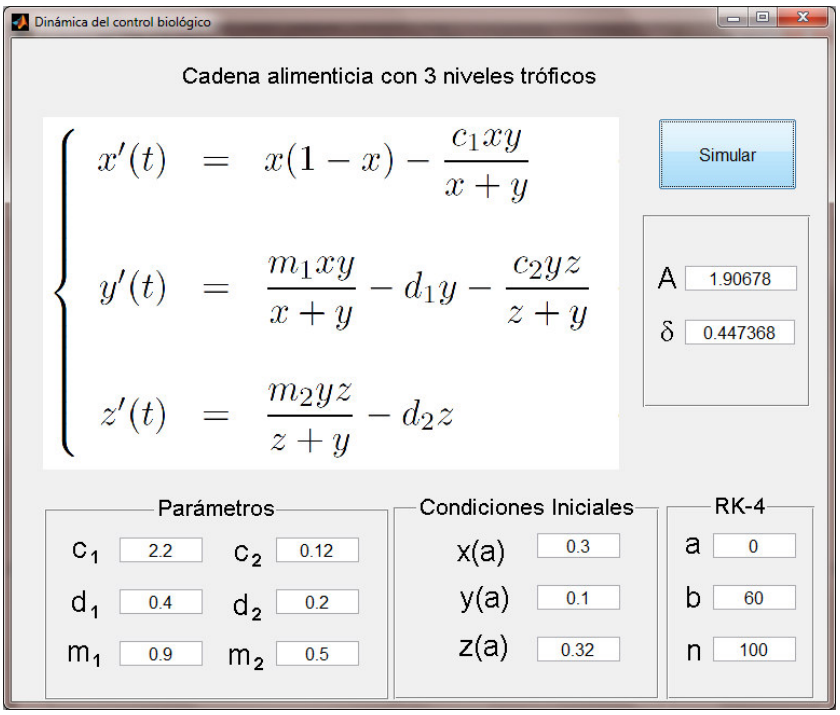


Figura 5.11: Parámetros y condiciones iniciales para simular el 3° caso del Teorema 4.4

El ultimo caso del Teorema 4.4 es $m_2 > d_2$, $A > 1$ y $c_1 \geq \frac{A}{A-1}$. Para esto escogemos los parámetros que se muestran en la Figura 5.11 obteniendo como resultado de la simulación la Figura 5.12, el la cual observamos que también ocurre la extinción total del sistema.

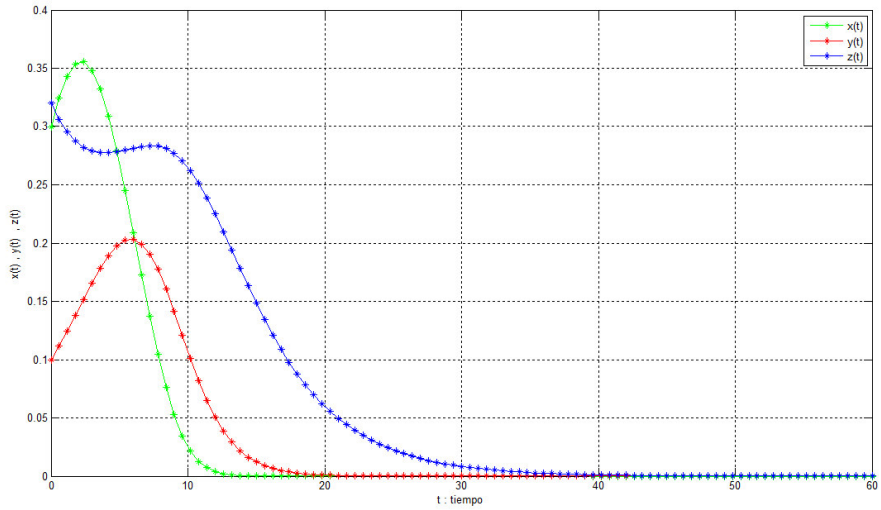


Figura 5.12: Soluciones del sistema (2.11) con los datos de la Figura 5.11

5.3. Sensibilidad a las condiciones iniciales

En esta sección veremos como las soluciones del sistema (2.11), para ciertos parámetros fijos, se ven afectadas al cambiar sus condiciones iniciales. Es decir tienen un comportamiento sensible a las condiciones iniciales.

Para empezar consideremos los parámetros como se muestra en la Figura 5.13, los cuales mantendremos fijos hasta que se diga lo contrario.

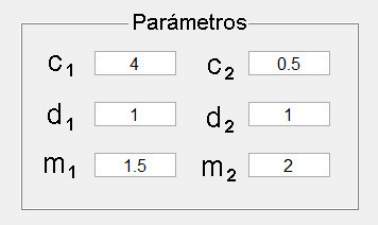
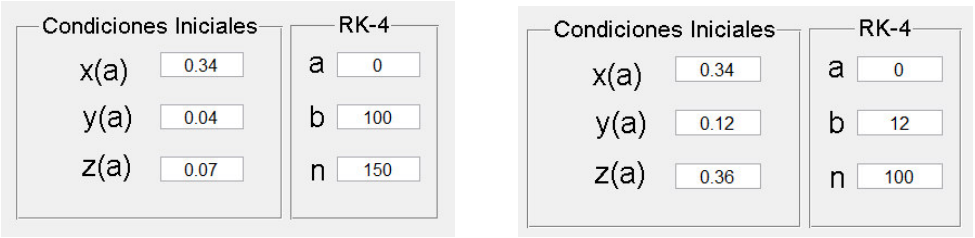


Figura 5.13: Primeros parámetros para mostrar la sensibilidad a las condiciones iniciales

Además consideremos los valores iniciales mostrados en la Figura 5.14(a) con los cuales se obtiene la simulación mostrada en la Figura 5.15



(a) (b)

Figura 5.14: Condiciones iniciales, en (a) coexistencia y en (b) extinción total

en la cual podemos observar que las soluciones oscilan en tiempos muy cortos, es decir se describen ciclos heteroclinos.

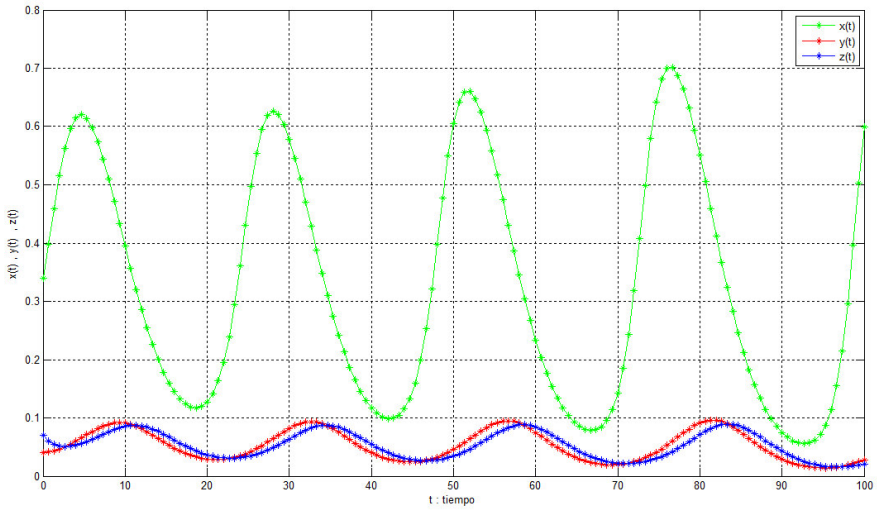


Figura 5.15: Soluciones del sistema (2.11) con condición inicial $(0.34, 0.04, 0.07)$

Para tener una mejor visualización de los ciclos heteroclinos obtenidos en la simulación de la Figura 5.15, consideraremos un gráfico alternativo mostrado en la Figura 5.16, el cual es gráfico en el espacio tridimensional de la solución de la forma $(x(t), y(t), z(t))$.

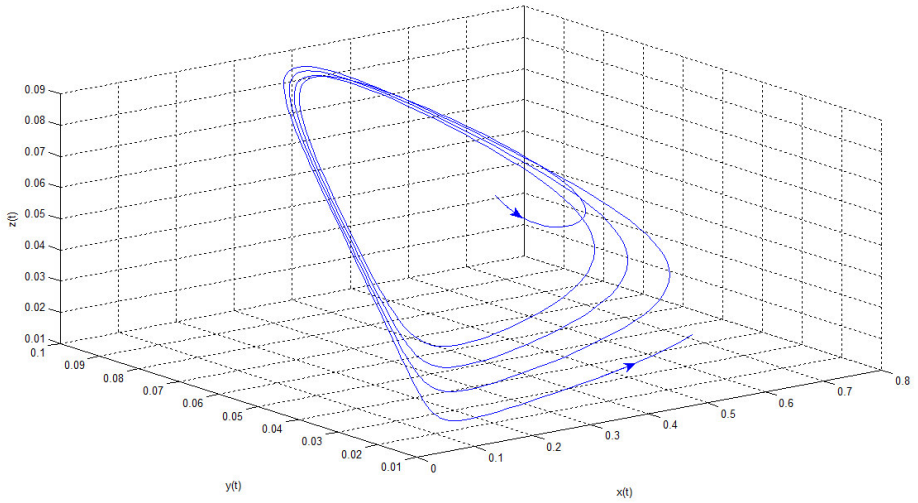


Figura 5.16: Ciclos heteroclinos para el sistema (2.11) vistos en la forma $(x(t), y(t), z(t))$

Por otro lado, notamos que los parámetros de la Figura 5.13 cumplen la primera condición del Teorema 4.5, entonces para dichos parámetros se puede encontrar una solución que tiende al origen. Para ilustrar esto consideramos las condiciones iniciales a las mostradas en la Figura 5.14(b) de las cuales obtenemos la simulación mostrada en la Figura 5.17, en la cual se ve la extinción total del sistema (2.11).

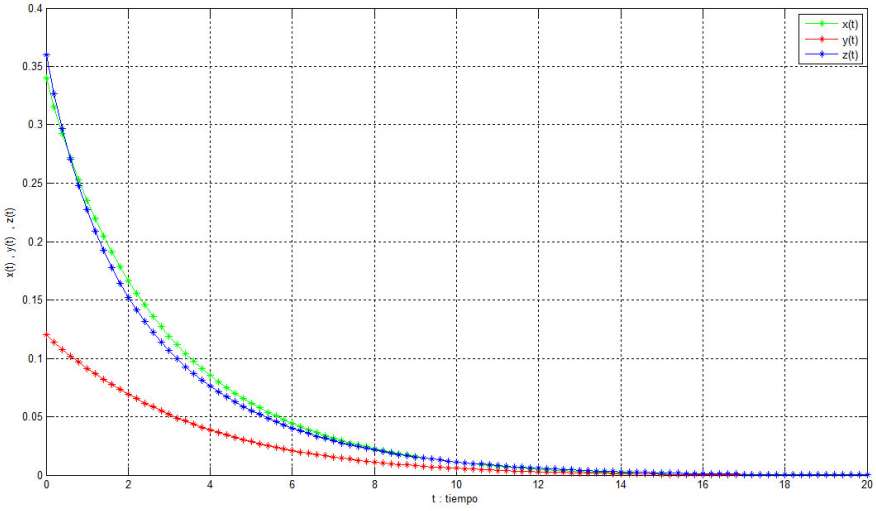


Figura 5.17: Extinción total del sistema (2.11)

Para mostrar otros casos de sensibilidad a las condiciones iniciales del sistema (2.11) consideremos la combinación de parámetros mostrada en la Figura 5.18

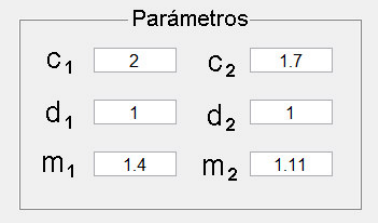


Figura 5.18: Otros parámetros para mostrar la sensibilidad a las condiciones iniciales

para los parámetros anteriores, consideremos las siguientes condiciones iniciales

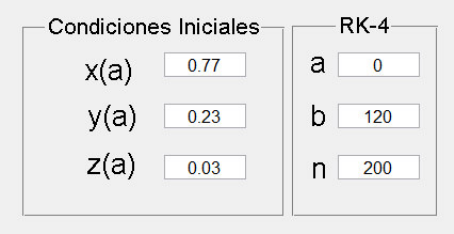


Figura 5.19: Condiciones iniciales para la coexistencia

para las cuales la simulación se muestra en la Figura 5.22, la cual muestra que las soluciones se estabilizan en el hacia la solución constante $E_c = (0.6692, 0.1326, 0.0146)$. Esto es el sistema alcanza la coexistencia estable de las tres especies.

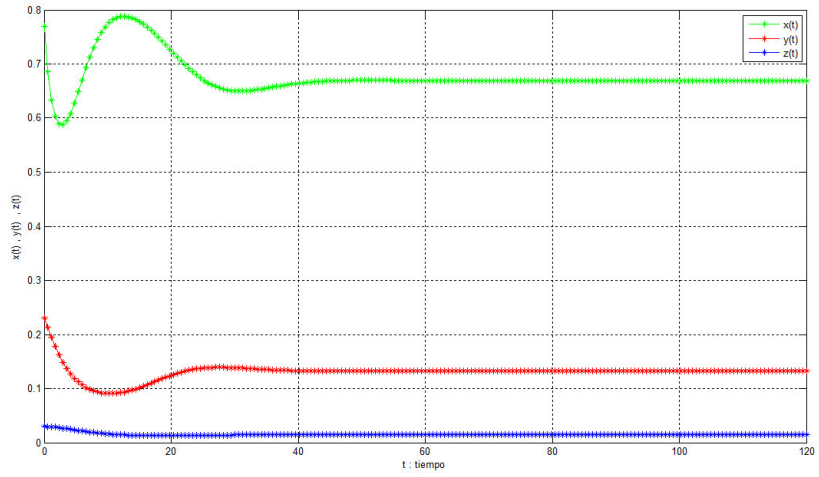


Figura 5.20: Estabilidad asintótica en $E_c = (0.6692, 0.1326, 0.0146)$

Ahora consideremos algunas vistas diferentes de la simulación mostrada en la Figura 5.22 pero en el espacio tridimensional.

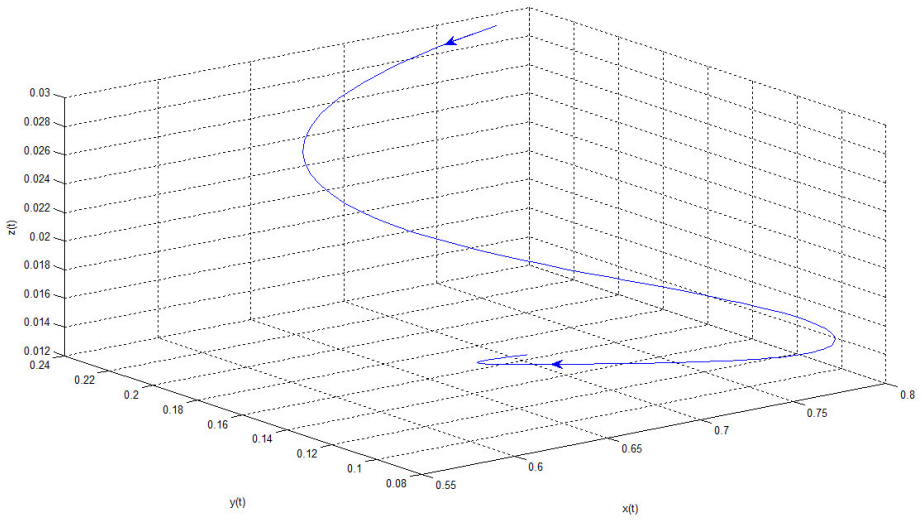


Figura 5.21: Estabilidad asintótica en E_c vista en la forma $(x(t), y(t), z(t))$

Notemos que las condiciones iniciales mostradas en la Figura 5.19 cumplen las condiciones de la Proposición 4.1 por lo que se asegura que E_c es local y asintóticamente estable.

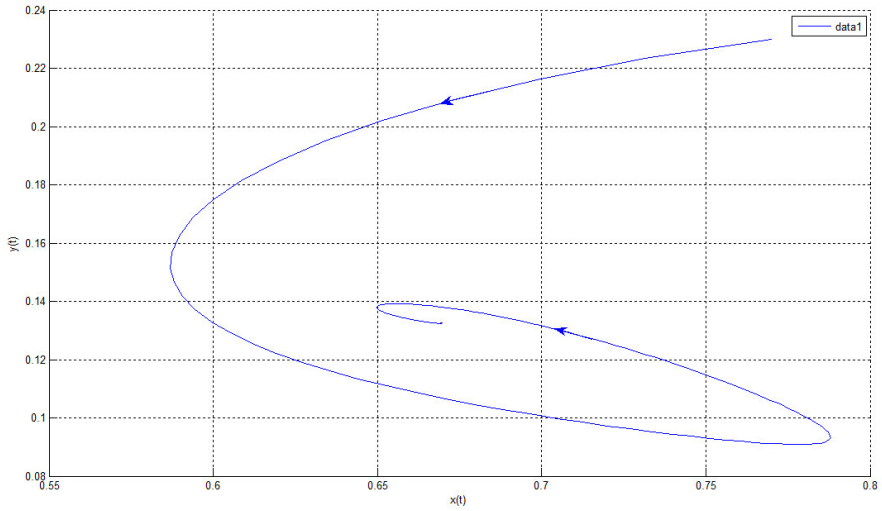


Figura 5.22: Estabilidad asintótica en E_c vista en la forma $(x(t), y(t), 0)$

Para mostrar la sensibilidad de las soluciones consideremos las condiciones iniciales mostradas en la Figura 5.23 y los parámetros de la Figura 5.18

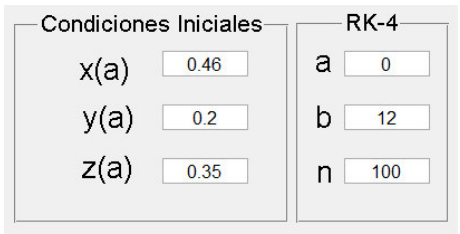


Figura 5.23: Condiciones iniciales para el éxito del control biológico

Los parámetros de la Figura 5.18 satisfacen la primera condición de la segunda parte del Teorema 4.5, entonces para dichos parámetros es posible tener alguna solución que converge a $(1, 0, 0)$. Esto lo mostraremos con las condiciones iniciales de la Figura 5.23 con lo cual obtenemos la simulación mostrada en la Figura 5.24

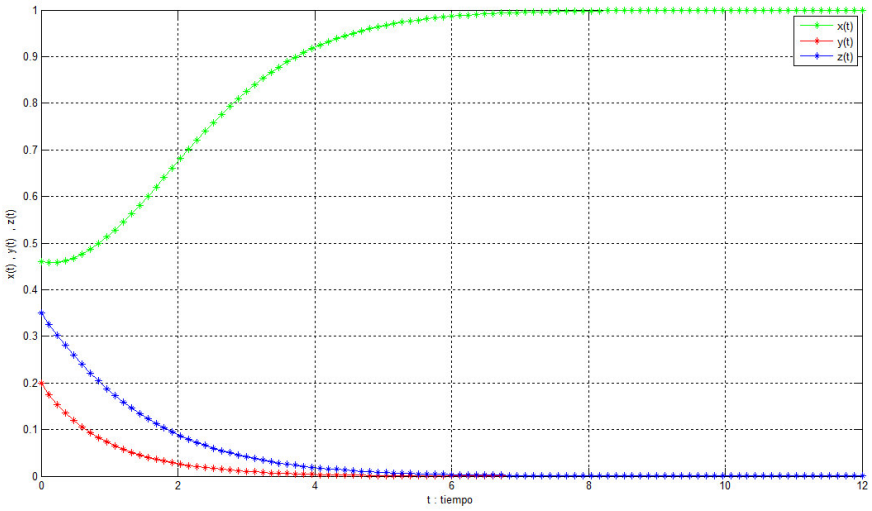


Figura 5.24: Éxito del control biológico

la cual muestra que la solución tiende a la solución estable $E_0 = (1, 0, 0)$, es decir la persistencia de las presas y la extinción del depredador intermedio y superior. Esto se puede interpretar como el éxito del control biológico. Y su vista tridimensional se muestra en la Figura 5.25

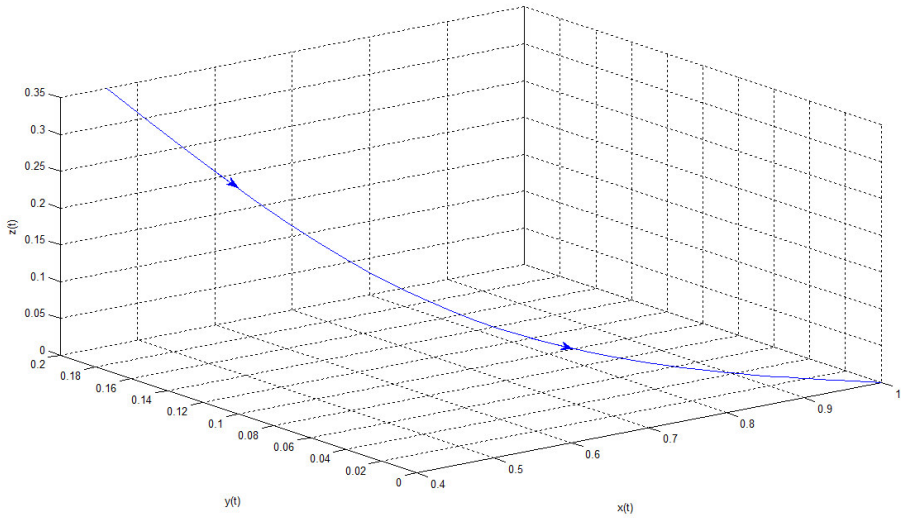


Figura 5.25: Éxito del control biológico vista $(x(t), y(t), z(t))$

Ahora consideraremos la combinación de parámetros mostrada en la Figura 5.26 la cual verifica las condiciones del Teorema 4.6, por lo que vemos que hay soluciones que tienden a los estados de equilibrio E_0, E_1 y E_c. Es decir escenarios de tri-estabilidad.

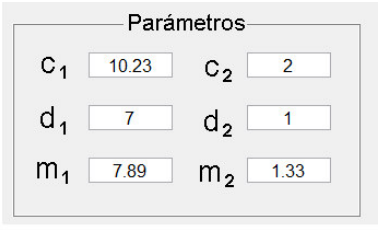


Figura 5.26: Parámetros para la tri-estabilidad

Considerando las condiciones iniciales mostradas en la Figura 5.27

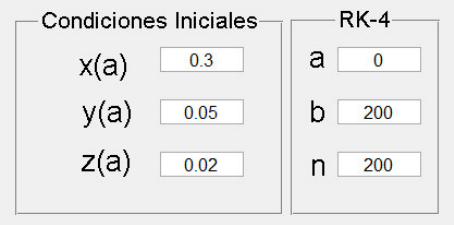


Figura 5.27: Condiciones para la estabilidad en $E_c = (0.4877, 0.0259, 0.0085)$

obtenemos la simulación mostrada en la Figura 5.28, donde vemos que después de un comportamiento oscilatorio de las soluciones para luego estabilizarse en $E_c = (0.4877, 0.0259, 0.0085)$. Los parámetros de la Figura 5.26 cumplen con las condiciones de la Proposición 4.1 por lo que se asegura que E_c es local y asintóticamente estable. Este resultado nos da la coexistencia de las tres especies.

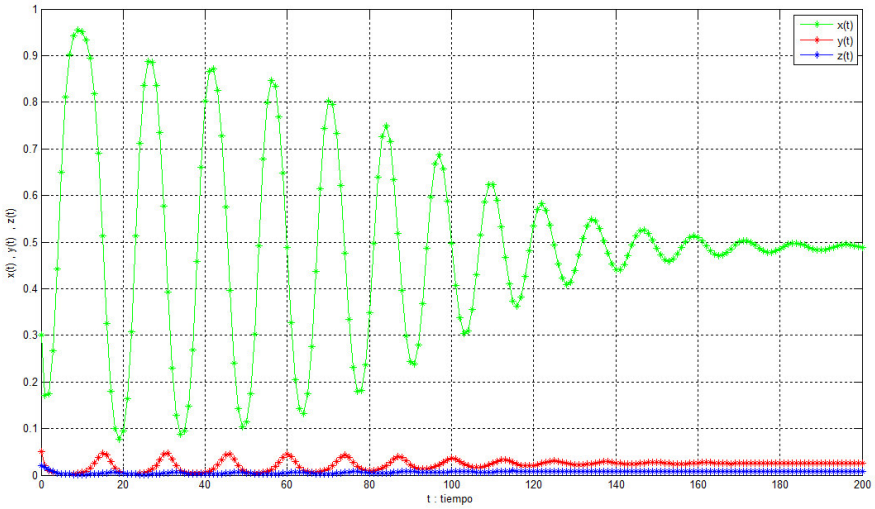


Figura 5.28: Estabilidad asintótica en E_c

Como vimos antes el comportamiento oscilatorio de las soluciones es mas fácil de ver en una gráfica tridimensional, así tenemos en la Figura 5.29 el resultado de la simulación visto de la forma $(x(t), y(t), z(t))$.

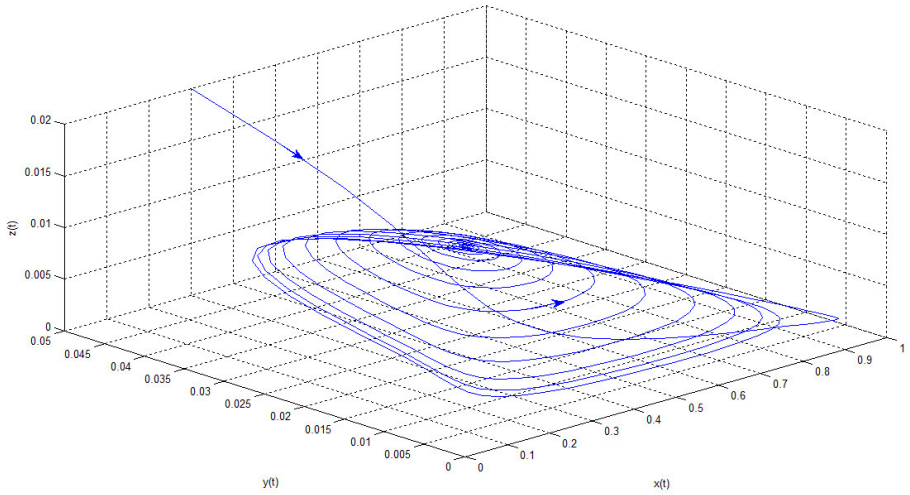


Figura 5.29: Estabilidad asintótica en E_c vista $(x(t), y(t), z(t))$

así mismo notamos el acercamiento de la solución a $E_c = (0.4877, 0.0259, 0.0085)$ describiendo trayectorias de forma espiraladas, esto es mas fácil de ver si consideramos una vista $(x(t), y(t), 0)$ tal y como muestra la Figura 5.30

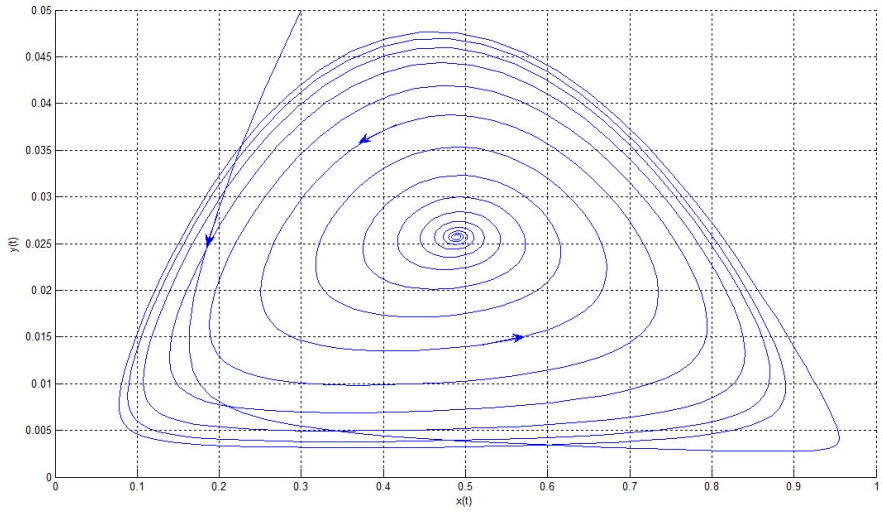


Figura 5.30: Estabilidad asintótica en E_c vista $(x(t), y(t), 0)$

Por otro lado si consideramos las condiciones unciales mostradas en la Figura 5.31, para los mismos parámetros de la Figura 5.26

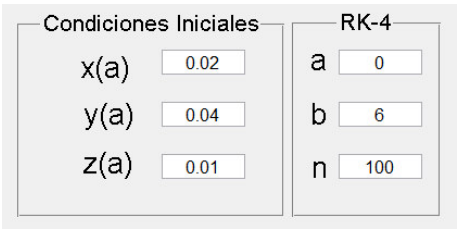


Figura 5.31: Condiciones para la extinción total

obtenemos la extinción total del sistema (2.11) tal y como muestra la Figura 5.32 es decir el $E_0 = (0, 0, 0)$ es asintóticamente estable

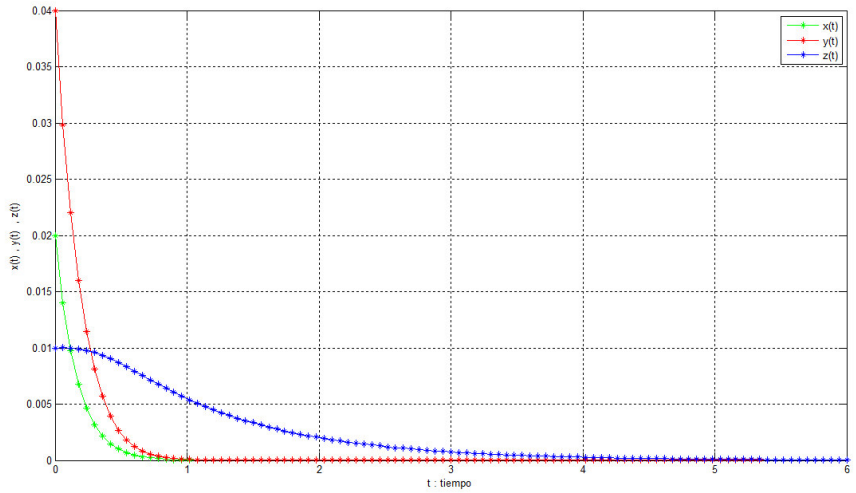


Figura 5.32: Estabilidad asintótica en E_0

Además si consideramos las condiciones unciales mostradas en la Figura 5.33, para los mismos parámetros de la Figura 5.26

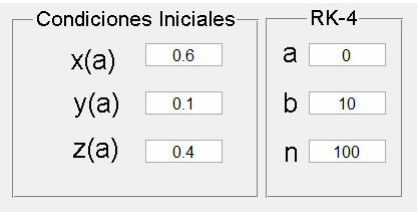


Figura 5.33: Estabilidad asintótica en E_0

obtenemos que la solución tiende al estado libre de depredadores $E_1 = (1, 0, 0)$, tal y como muestra la Figura 5.34

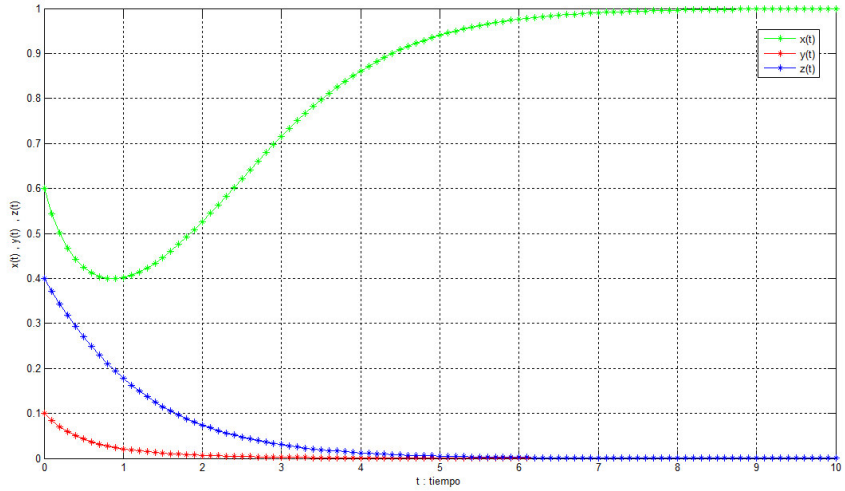


Figura 5.34: Estabilidad asintótica en E_1

Capítulo 6

Conclusiones

- Con este modelo matemático lo que se busca es que el control biológico aplicado a dicho sistema sirva para controlar cualquier tipo de plaga, en consecuencia tener una población que sobrevive a la propagación de la misma y así minimizar el impacto al medio ambiente.
- Lo esencial de este trabajo es demostrar bajo que condiciones la plaga desaparece; si esta muere el control biológico también lo hará por considerarse un modelo de cadena alimenticia simple. La pregunta a resolver seria: ¿Es posible que las tres especies coexistan y se pueda evitar el daño de la población de plantas?. En el Lema 4.1 podemos observar que bajo ciertas condiciones, la presa (planta), depredador intermedio (plaga) y el depredador superior (control biológico) especies coexisten en estado de equilibrio.
- El uso de la técnica del control biológico es una solución natural y no es contaminante, por eso que es de suma importancia conocer las condiciones bajo las cuales el control biológico sera efectivo. Sabemos del Teorema 4.1, que bajo las siguientes condiciones:

  - $m_2 > d_2$.
  - $0 < A \leq 1$.
  - $c_1 < 1$.

  este control es contundente en pocas palabras acaba con la plaga.
- También podemos observar que el punto $(0, 0, 0)$ y $(1, 0, 0)$ son singularidades, pero como no pertenecen al dominio Ω°, lo que hacemos es buscar un sistema equivalente al sistema (2.11) y así ya podemos hablar de estos puntos que son muy importantes puesto que significa que la plaga debastó a la población de plantas y que el control biológico hizo efecto respectivamente.
- Sabemos que en un modelo de cadena alimenticia simple se cumple el efecto domino (Proposición 4.6), lo cual fue demostrado en la tesis; esto nos dice que si se extingue un nivel trófico de la cadena alimenticia, entonces también lo harán todos los niveles trófico superiores a él. Notemos que el éxito del control biológico significa que la plaga se extingue y luego por el efecto domino también se extingue el controlador biológico; esto significa que solo persiste la presa (es decir el controlador biológico no representa una amenaza potencial).

Apéndice A

Códigos en MatLab®

A.1. Interface

```
function varargout = Interface(varargin)
% INTERFACE M-file for Interface.fig
% INTERFACE, by itself, creates a new INTERFACE or raises the existing
% singleton*.
%
% H = INTERFACE returns the handle to a new INTERFACE or the handle to
% the existing singleton*.
%
% INTERFACE('CALLBACK',hObject,eventData,handles,...) calls the local
% function named CALLBACK in INTERFACE.M with the given input arguments.
%
% INTERFACE('Property','Value',...) creates a new INTERFACE or raises
% the
% existing singleton*. Starting from the left, property value pairs are
% applied to the GUI before Interface_OpeningFcn gets called. An
% unrecognized property name or invalid value makes property application
% stop. All inputs are passed to Interface_OpeningFcn via varargin.
%
% *See GUI Options on GUIDE's Tools menu. Choose "GUI allows only one
% instance to run (singleton)".
%
% See also: GUIDE, GUIDATA, GUIHANDLES

% Edit the above text to modify the response to help Interface
% Last Modified by GUIDE v2.5 24-Jul-2014 12:45:52

% Begin initialization code - DO NOT EDIT
gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name', mfilename, 'gui_Singleton', ...
gui_Singleton, 'gui_OpeningFcn', @Interface_OpeningFcn, 'gui_OutputFcn', ...
@Interface_OutputFcn, 'gui_LayoutFcn', [ ] , 'gui_Callback', [ ]);

if nargin && ischar(varargin{1})
gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end

if nargout
```

```
[ varargout{ 1 : nargout} ] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end
% End initialization code - DO NOT EDIT

% — Executes just before Interface is made visible.
function Interface_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles, varargin)
% This function has no output args, see OutputFcn.
% hObject handle to figure
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)
% varargin command line arguments to Interface (see VARARGIN)

% Choose default command line output for Interface
handles.output = hObject;

%axes(handles.axes1)
%background = imread('MVH-2.bmp');
%axis off;

[x,map]=imread('Modelo.png','png');
image(x),colormap(map),axis off,hold on

imshow(x);

% Update handles structure
guidata(hObject, handles);

% UIWAIT makes Interface wait for user response (see UIRESUME)
% uiwait(handles.figure1);

% — Outputs from this function are returned to the command line.
function varargout = Interface_OutputFcn(hObject, eventdata, handles)
% varargout cell array for returning output args (see VARARGOUT);
% hObject handle to figure
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Get default command line output from handles structure
varargout{1} = handles.output;

function c_1_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to c_1 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of c_1 as text
% str2double(get(hObject,'String')) returns contents of c_1 as a double

% — Executes during object creation, after setting all properties.
function c_1_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
```

```
% hObject handle to c_1 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles empty - handles not created until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function d_1_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to d_1 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of d_1 as text
% str2double(get(hObject,'String')) returns contents of d_1 as a double

% — Executes during object creation, after setting all properties.
function d_1_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to d_1 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles empty - handles not created until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function m_1_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to m_1 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of m_1 as text
% str2double(get(hObject,'String')) returns contents of m_1 as a double

% — Executes during object creation, after setting all properties.
function m_1_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to m_1 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles empty - handles not created until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function c_2_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to c_2 (see GCBO)
```

```
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of c_2 as text
% str2double(get(hObject,'String')) returns contents of c_2 as a double

% — Executes during object creation, after setting all properties.
function c_2_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to c_2 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles empty - handles not created until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function d_2_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to d_2 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of d_2 as text
% str2double(get(hObject,'String')) returns contents of d_2 as a double

% — Executes during object creation, after setting all properties.
function d_2_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to d_2 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles empty - handles not created until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function m_2_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to m_2 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of m_2 as text
% str2double(get(hObject,'String')) returns contents of m_2 as a double

% — Executes during object creation, after setting all properties.
function m_2_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to m_2 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles empty - handles not created until after all CreateFcns called
```

```
% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function a_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to a (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of a as text
% str2double(get(hObject,'String')) returns contents of a as a double

% — Executes during object creation, after setting all properties.
function a_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to a (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles empty - handles not created until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function b_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to b (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of b as text
% str2double(get(hObject,'String')) returns contents of b as a double

% — Executes during object creation, after setting all properties.
function b_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to b (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles empty - handles not created until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function n_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to n (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of n as text
```

```
% str2double(get(hObject,'String')) returns contents of n as a double

% — Executes during object creation, after setting all properties.
function n_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to n (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles empty - handles not created until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function x_0_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to x_0 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of x_0 as text
% str2double(get(hObject,'String')) returns contents of x_0 as a double

% — Executes during object creation, after setting all properties.
function x_0_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to x_0 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles empty - handles not created until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function y_0_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to y_0 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of y_0 as text
% str2double(get(hObject,'String')) returns contents of y_0 as a double

% — Executes during object creation, after setting all properties.
function y_0_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to y_0 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles empty - handles not created until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
set(hObject,'BackgroundColor','white');
```

```
end

function z_0_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to z_0 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of z_0 as text
% str2double(get(hObject,'String')) returns contents of z_0 as a double

% — Executes during object creation, after setting all properties.
function z_0_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to z_0 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles empty - handles not created until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function A_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to A (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of A as text
% str2double(get(hObject,'String')) returns contents of A as a double

% — Executes during object creation, after setting all properties.
function A_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to A (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles empty - handles not created until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function delta_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to delta (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of delta as text
% str2double(get(hObject,'String')) returns contents of delta as a double

% — Executes during object creation, after setting all properties.
function delta_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
```

```
% hObject handle to delta (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles empty - handles not created until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function xx_c_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to xx_c (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of xx_c as text
% str2double(get(hObject,'String')) returns contents of xx_c as a double

% — Executes during object creation, after setting all properties.
function xx_c_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to xx_c (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles empty - handles not created until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function zz_c_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to zz_c (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of zz_c as text
% str2double(get(hObject,'String')) returns contents of zz_c as a double

% — Executes during object creation, after setting all properties.
function zz_c_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to zz_c (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles empty - handles not created until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function yy_c_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to yy_c (see GCBO)
```

```
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of yy_c as text
% str2double(get(hObject,'String')) returns contents of yy_c as a double

% — Executes during object creation, after setting all properties.
function yy_c_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to yy_c (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles empty - handles not created until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

% — Executes on button press in checkbox4.
function checkbox4_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to checkbox4 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hint: get(hObject,'Value') returns toggle state of checkbox4

% — Executes on button press in checkbox3.
function checkbox3_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to checkbox3 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hint: get(hObject,'Value') returns toggle state of checkbox3

% — Executes on button press in pushbutton1.
function pushbutton1_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to pushbutton1 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)

P(1)=str2double(get(handles.c_1,'String'));
P(2)=str2double(get(handles.d_1,'String'));
P(3)=str2double(get(handles.m_1,'String'));
P(4)=str2double(get(handles.c_2,'String'));
P(5)=str2double(get(handles.d_2,'String'));
P(6)=str2double(get(handles.m_2,'String'));

A = P(3)/( P(4)*(P(6)-P(5))/P(6) + P(2) );
c_2_min = (P(6)/P(5))^2*(1/(P(6)-P(5)))*(1-P(1)*(A-1)/A + (P(3)+P(1))*(A^2-1)/A^2);
x_0Y_0 = (P(1) - (1 + P(2)+ P(4)))/(1 + P(2) +P(4));

set(handles.A, 'String',A);
```

```
set(handles.delta, 'String',x_0Y_0);

X0(1)=str2double(get(handles.x_0,'String'));
X0(2)=str2double(get(handles.y_0,'String'));
X0(3)=str2double(get(handles.z_0,'String'));

x_c=(1/A)*(P(1)+A*(1-P(1)));
y_c=(A-1)*x_c;
z_c=((P(6)-P(5))/P(5))*y_c;

Wc = [ x_c , y_c , z_c ];

set(handles.xx_c, 'String',x_c);
set(handles.yy_c, 'String',y_c);
set(handles.zz_c, 'String',z_c);

m_11=x_c*(-1+(P(1)*y_c)/(x_c+y_c)^ 2);
m_22=y_c*(-(P(3)*x_c)/(x_c+y_c)^ 2+(P(4)*z_c)/(z_c+y_c)^2);
m_33=-P(6)*y_c*z_c/(y_c+z_c)^2;

m_12 = -P(1)*x_c^2/(x_c+y_c)^2;
m_21 = P(3)*y_c^2/(x_c+y_c)^2;
m_23 = -P(4)*y_c^ 2/(y_c+z_c)^2;
m_32 = P(6)*z_c^2/(y_c+z_c)^2;

M = [ m_11 m_12 0 ; m_21 m_22 m_23 ; 0 m_32 m_33]

a = str2double(get(handles.a ,'String'));
b = str2double(get(handles.b ,'String'));
n = str2double(get(handles.n ,'String'));
E = get(handles.checkbox4,'Value');
D = get(handles.checkbox3,'Value');

RK4(P, a, b, n , X0 , D , E , Wc)
```

A.2. Función RK4

```
function RK4(P, a, b, n, X0 , D , E , Wc)
% implementación del método de Runge-Kutta de cuarto orden
h = (b-a)/n;
t = a:h:b;

W=X0;

for i=1:n
K1 = f(P,W(i,:));
K2 = f(P,W(i,:)+K1*h/2);
K3 = f(P,W(i,:)+K2*h/2);
K4 = f(P,W(i,:)+K3*h);
W(i+1,:)=W(i,:)+(K1+2*K2+2*K3+K4)*h/6;
```

```
end

figure
grid on
plot(t,W(:,1),'*-g',t,W(:,2),'*-r',t,W(:,3),'*-b')
grid
legend('x(t)','y(t)','z(t)'); xlabel('t : tiempo'); ylabel( 'x(t) , y(t) , z(t)')

 %axis square

if (D ==1)
figure
grid on
plot3(W(:,1),W(:,2),W(:,3))
grid
xlabel('x(t)'); ylabel('y(t)'); zlabel('z(t)');
end

if (E == 1)

Aux = ones(size(t));
figure
grid on
plot(t,W(:,1),'*-g',t,Wc(1).*Aux,'-m')
grid
legend('x(t)','Xc'); xlabel('t : tiempo'); ylabel('x(t)');

figure
grid on
plot(t,W(:,2),'*-r',t,Wc(2).*Aux,'-m')
grid
legend('y(t)','Yc'); xlabel('t : tiempo'); ylabel('y(t)');

figure
grid on
plot(t,W(:,3),'*-b',t,Wc(3).*Aux,'-m')
grid
legend('z(t)','Zc'); xlabel('t : tiempo'); ylabel('z(t)');

end
```

A.3. función f

```
function R = f(P,W)
% función que representa el sistema de cadena alimenticia simple
% con tres niveles tróficos en forma vectorial

R(1)= W(1)*(1- W(1))-P(1)*(W(1)*W(2))/(W(1)+W(2));
R(2)= P(3)*(W(1)*W(2))/(W(1)+W(2)) - P(2)*W(2) -P(4)*(W(2)*W(3))/(W(2)+W(3));
R(3)= P(6)*(W(2)*W(3))/(W(2)+W(3)) - P(5)*W(3);
```

Bibliografía

[1] R. M. BENAZIC. *Topicos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.* Universidad Nacional de Ingenieria, 2007.

[2] E. BERETTA and Y. KUANG. Global analyses in some delayed ratio-dependent predator-prey systems. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods y Applications*, 32:381–408, 1998.

[3] E. BERETTA and Y. KUANG. Global qualitative analysis of a ratio-dependent predator-prey system. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 266:401–419, 2002.

[4] R. L. BURDEN and J. D. FAIRES. *Numerical Analysis.* BROOKS/COLE CENGAGE learning, USA, 2010.

[5] F. R. GANTMACHER. *Applications of the theory of matrices.* Interscience Publishers, INC., New York, 1959.

[6] N. G. HAIRSTON, F. E. SMITH, and L. B. SLOBODKIN. Community structure, population control and competition. *The American Naturalist*, 94:421–425, 1960.

[7] S. B. HSU. *Mathematical Modelling In Biological Science.* Department of Mathematics Tsing-Hua University, Taiwan, 2004.

[8] S. B. HSU, T. W. HWANG, and Y. KUANG. Global analysis of the Michaelis-Menten type ratio-dependence predator-prey system. *Journal of Mathematical Biology*, 42:489–506, 2001.

[9] S. B. HSU, T. W. HWANG, and Y. KUANG. A Ratio-Dependent Food Chain Model and Its Applications to Biological Control. *Mathematical Biosciences*, 181:55–83, 2003.

[10] C. JOST, O. ARINO, and R. ARDITI. About deterministic extinction in ratio-dependent predator-prey models. *Bulletin of Mathematical Biology*, 61:19–32, 1999.

[11] C. I. NICHOLLS. *Control biológico de insectos: un enfoque agroecológico.* Editorial Universidad de Antioquia, 2008.

[12] C. PITA. *Calculo Vectorial.* Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A., 1995.

[13] M. L. ROSENZWEIG. Paradox of enrichment: destabilization of exploitation systems in ecological time. *Science*, 7:385–387, 1971.

[14] USDA Agricultural Research Service. 20th Century Insect Control. Recuperado el 18 de marzo del 2014, de: http://www.ars.usda.gov/is/timeline/insect.htm. "20th Century Insect Control" fue publicado en julio de 1992 por Agricultural Research magazine.

[15] H. R. THIEME. Uniform persistence and permanence for non-autonomous semiflows in Population Biology. *Mathematical Biosciences*, 166:173–201, 2000.

[16] R. van den BOSCH, A. P. GUTIERREZ, and P. S. MESSENGER. *An introduction to biologicalcontrol.* Plenum Press, 1982.

[17] A. VERA and P. ALEGRÍA. *Un curso de análisis funcional.* AVL, 1997.

[18] D. XIAO and S. RUAN. Global dynamics of a ratio-dependent predator-prey system. *Journal of Mathematical Biology*, 43:268–290, 2001.