UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

E.A.P. DE MATEMÁTICA

Reducción de Singularidades en Dimensión 2

TESIS

Para optar el Título profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Jorge Luis Crisóstomo Parejas

Lima – Perú

2010

REDUCCIÓN DE SINGULARIDADES EN DIMENSIÓN 2

Jorge Luis Crisóstomo Parejas

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas, de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemáticas.

Aprobado por:

Yolanda Silvia Santiago Ayala
Miembro

Edgar Vera Saravia
Presidente

Renato Mario Benazic Tome
Miembro Asesor

Lima-Perú
Diciembre 2010

FICHA CATALOGRÁFICA

JORGE LUIS CRISÓSTOMO PAREJAS

Reducción de Singularidades en dimensión 2, (Lima) 2010.
XII, 64 p., 29,1 cm, (UNMSM Licenciado en Matemática, 2010).
Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciéncias Matemáticas. UNMSM. F/de CM.

A mi familia.

No conseguimos encontrar repuestas para todo nuestros problemas. Las que encontramos apenas nos llevaran a formular nuevas preguntas. De una cierta manera nos sentimos tan confusos como antes, pero creemos que ahora estamos confusos en un nivel más alto y sobre cosas más importantes.

Encontrado en la puerta del Instituto de Matemática en la Universidad de Tromso-Noruega

Agradecimientos

A mis padres, Herminio y Julia, a mis hermanos y hermanas, por haberme apoyado siempre en mis decisiones, por haber contribuido de forma fundamental en mi formación personal.

A mi asesor Renato Benazic Tome, por los momentos de discusión fructífera y por el enriquecimiento de mi experiencia matemática.

A mi novia Luz, por todo el apoyo y los ánimos para seguir en frente de las adversidades.

A los profesores de la facultad de ciencias matemáticas, que con toda seguridad contribuyeron para mi crecimiento profesional, en especial para los profesores: Edgar Vera y Yolanda Santiago.

Resumen

REDUCCIÓN DE SINGULARIDADES EN DIMENSIÓN 2

Jorge Luis Crisóstomo Parejas

Diciembre 2010

Asesor: Dr. Renato Mario Benazic Tome.

Título Obtenido: Licenciado en Matemática.

En el presente trabajo, estudiamos sobre la reducción de singularidades de un campo vectorial analítico en $\mathbb{C}^2$. Presentaremos un resultado de J. Mattei and R. Moussu [7], esté resultado prueba que después de un número finito de blow-ups las singularidades son simples.

PALABRAS CLAVES: Campos vectoriales analíticos.

Singularidades.

Blow-up.

Abstract

REDUCTION OF SINGULARITIES IN TWO DIMENSION

Jorge Luis Crisóstomo Parejas

Diciembre 2010

Advisor: Dr. Renato Mario Benazic Tome.

Obtainded Degree: Licenciado en Matemática.

In this work, we study about reduction of singularities of analytic vector fields on $\mathbb{C}^2$. We will present a result of J. Mattei and R. Moussu [7], that result showed that after a finite number of blow-ups the singularities are simple.

KEYWORDS: Analytic vector fields.

Singularities.

Blow-up.

Índice general

Introducción

Consideremos un campo vectorial analítico Z definido en un abierto de $\mathbb{C}^2$ con parte lineal no nula y con singularidad $0 \in \mathbb{C}^2$ que por un cambio lineal de coordenadas (Forma canónica de Jordan) la parte lineal puede ser una de las siguientes formas:

$$Z = (\lambda_1 z_1 + A(z), \lambda_2 z_2 + B(z)) \text{ ó } Z = (\lambda z_1 + z_2 + A(z), \lambda z_2 + B(z)).$$

Y tenemos la siguiente clasificación del campo vectorial Z dependiendo de los autovalores de su parte lineal.

H. Poincaré en [8] demostró:. Si $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ y $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{R}^- \cup \mathbb{N} \cup \dfrac{1}{\mathbb{N}}$, entonces Z es analíticamente conjugado a su parte lineal.

H. Dulac en [4] demostró: Si $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{N}$ y $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} \in \mathbb{N}$ entonces Z es analíticamente conjugado al Campo Vectorial $W = (\lambda_1 z_1 + a z_2^n, \lambda_2 z_2)$.

C. L. Siegel en [11] demostró: Si $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{R}^-$ y (λ_1, λ_2) satisface la condición del tipo (C, ν) entonces Z es analíticamente conjugado a su parte lineal.

De las clasificaciones anteriores para campos vectoriales analíticos, es natural preguntarse lo siguiente:

Pregunta 0.1: ¿Que clasificación analítica se tiene para los campos vectoriales de la forma $Z = (\lambda z_1 + z_2 + A(z), \lambda z_2 + B(z))$?

Pregunta 0.2: ¿Que clasificación analítica se tiene para los campos vectoriales con parte lineal nula?

Pregunta 0.3: ¿Existe una clasificación para campos vectoriales si (λ_1, λ_2) no satisface una de las condiciones anteriores, en otras palabras que clasificación tenemos si $0 \in \mathbb{C}^2$ es una singularidad no simple (ver 3.1)?

El objetivo de este trabajo es responder estas interrogantes, lo cual será realizado en dos partes: en la primera parte estudiaremos el teorema de Seidenberg, esté resultado transforma campos vectoriales con parte lineal nula a campos vectoriales con parte lineal no nula después de un número finito de blow-ups, más específicamente presentamos el siguiente resultado.

Teorema 0.4 (Teorema Seidenberg,[10])**.** *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^2$ abierto, $0 \in U$ singularidad aislada de $Z \in \mathcal{X}(U)$ tal que $ord_0(Z) \geq 2$. Después de un número finito de blow-ups con centro en las singularidades de los transformados estrictos que van apareciendo, todos los transaformados estrictos tienen multiplicidad algebraica igual a 1; i.e., que todos los transformados estrictos que van apareciendo tienen parte lineal no nula.*

La segunda parte de este trabajo es estudiar el teorema de reducción de singularidades siguiendo los artículos de C. Camacho [1], y J. Mattei, R. Moussu [7]. Esté reduce singularidades no simples a simples después de un número finito de blow-ups, más específicamente presentamos el siguiente resultado.

Teorema 0.5 (Teorema Principal)**.** *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^2$ abierto, $0 \in U$ singularidad aislada de $Z \in \mathcal{X}(U)$. Después de un número finito de blow-ups con centro en las singularidades de los transformados estrictos que van apareciendo, tienen todas las singularidades simples.*

Este trabajo esta compuesto de tres capítulos, en el capítulo 1 presentamos los conceptos matemáticos tales como: Funciones analíticas, campos vectoriales, variedades complejas, Blow-up, etc. primordiales para la comprensión de este trabajo. En el capítulo 2 estudiamos y presentamos el teorema de Seidenberg. En capítulo final hacemos la presentación del resultado principal de este trabajo, el teorema de reducción de singularidades.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Funciones analíticas

En esta sección mencionaremos algunos resultados del análisis complejo en varias variables, los cuales pueden ser encontrados en [6].

Definición 1.1: Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto, $f : U \to \mathbb{C}$ una función. Decimos que f ***es analítica en*** $z_0 \in U$ si y sólo si existe una vecindad V de z_0 tal que f tiene una expansión en series de potencias

$$f(z) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha (z - z_0)^\alpha, a_\alpha \in \mathbb{C}$$

la cual es convergente $\forall z \in V$.

Observación 1.2: 1) Decimos que f es analítica en U si y sólo si f es analítica en z_0, $\forall z_0 \in U$.

2) Denotaremos por $\mathcal{O}(U)$ al conjunto de todas las funciones analíticas en U.

Definición 1.3: Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto, $f : U \to \mathbb{C}$ una función. Decimos que f ***es holomorfa en*** U si y sólo si $f \in C^1(U)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z_j}} = 0$ en U; $\forall j = 1, \cdots, n$.

Teorema 1.4. *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto, $f : U \to \mathbb{C}$, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1) $f \in \mathcal{O}(U)$*.*

2) f *es holomorfa en* U*.*

Observación 1.5: Por el Teorema anterior no habra distinción alguna cuando hablamos de funciones analíticas u holomorfas.

Definición 1.6: Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto, $f : U \to \mathbb{C}$ función analítica en $a = (a_1, \cdots, a_n) \in U$ $(f \not\equiv 0)$.

1) ***El Orden Total de*** f ***en*** a, denotado por $ord(f, a)$ es el menor entero no negativo ν tal que alguna derivada parcial de f de orden ν no se anula en a; i.e., decir

$$ord(f,a) = \nu \Leftrightarrow \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha}(a) = 0;\ \forall\, |\alpha| < \nu - 1 \text{ y } \exists \beta \in \mathbb{N}^n;\ |\beta| = \nu \text{ tal que } \frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial z^\beta}(a) \neq 0$$

2) f ***es regular con respecto a la variable*** z_n ***en*** a si y sólo si $f(a_1, \ldots, a_{n-1}, z_n)$ no es idénticamente nula (como función de la variable z_n en la vecindad de a_n).

3) Sea f regular con respecto a la variable z_n en a. ***El orden de*** f ***con respecto a la variable*** z_n ***en*** a, denotado por $ord_{z_n}(f, a)$ es el menor entero no negativo μ tal que $\frac{\partial^\mu f}{\partial z_n^\mu}(a) \neq 0$; i.e.,

$$ord_{z_n}(f,a) = \mu \Leftrightarrow f(a) = \frac{\partial f}{\partial z_n}(a) = \cdots = \frac{\partial^{u-1} f}{\partial z_n^{\mu-1}}(a) = 0 \text{ y } \frac{\partial^u f}{\partial z_n^\mu}(a) \neq 0$$

Observación 1.7: Sea f analítica en $a \in U \subseteq \mathbb{C}^n$ y no idénticamente nula, entonces

$$f(z) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha (z-a)^\alpha$$

como converge absolutamente en una vecindad de a, entonces podemos reordenar sus términos y obtener:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha (z-a)^\alpha \Big) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$$

donde $f_k(z) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha (z-a)^\alpha$ es un polinomio homogéneo de grado k en las variables $z_1 - a_1, \dots, z_n - a_n$ de esto se sigue que

$$ord(f, a) = \nu \Leftrightarrow f_1(a) \equiv \cdots \equiv f_{\nu-1}(a) \equiv 0, f_\nu(a) \neq 0$$

Lema 1.8. *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto, $f : U \to \mathbb{C}$ función analítica en $0 \in U$ tal que $ord(f, 0) = \nu$. Entonces $\exists T \in GL(\mathbb{C}^n)$ tal que $f \circ T$ es regular con respecto a la variable z_n en 0 y $ord_{z_n}(f \circ T, 0) = \nu$.*

1.2. Campos vectoriales analíticos y sistemas de ecuaciones diferenciales

Definición 1.9: Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto, una aplicación $F : U \to \mathbb{C}^m$ es llamada ***mapeo***.

Observación 1.10: Dado $z \in U$, como $F(z) \in \mathbb{C}^m$ entonces existen $f_1(z), \cdots, f_m(z) \in \mathbb{C}$ tales que $F(z) = (f_1(z), \cdots, f_m(z))$. De esta manera quedan definidas m funciones coordenadas $f_1, \cdots, f_m : U \to \mathbb{C}$.

Decimos que $F = (f_1, \cdots, f_m) : U \to \mathbb{C}^m$ es un ***mapeo holomorfo*** en U si y sólo si $f_1, \cdots, f_m \in \mathcal{O}(U)$. Denotaremos por $\mathcal{O}(U, \mathbb{C}^m)$ al conjunto de todos los mapeos holomorfos en U.

Definición 1.11: Sean $U, V \subseteq \mathbb{C}^n$ y $F : U \to V$. Decimos que F es un ***biholomorfismo*** entre U y V si y sólo si

1) $F : U \to V$ es biyectiva.

2) $F \in \mathcal{O}(U, V)$

3) $F^{-1} \in \mathcal{O}(V, U)$

Definición 1.12: Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto, un ***campo vectorial holomorfo*** en U es un mapeo holomorfo

$$Z = (Z_1, \cdots, Z_n) : U \to \mathbb{C}^n$$

tal que si $z \in U$, entonces $Z(z) \in \mathbb{C}^n$ es un vector cuyo punto de aplicación es z.

Denotaremos por $\mathcal{X}(U)$ al conjunto de todos los Campos Vectoriales holomorfos en U.

Definición 1.13: Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto y $Z \in \mathcal{X}(U)$, un punto $p \in U$ es llamado ***punto singular de*** Z si sólo si $Z(p) = 0$. Caso contrario decimos que p es un *punto regular de* Z.

Denotaremos por $Sing(Z)$ al conjunto de todos los puntos singulares de Z.

Observación 1.14: Sea $U \subseteq \mathbb{C}^2$ abierto, $Z = (Z_1, Z_2) \in \mathcal{X}(U)$ y $0 \in Sing(Z)$ entonces

$$Z_1 = a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + A(z_1, z_2) \text{ y } Z_2 = a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + B(z_1, z_2)$$

Con $ord(A, 0), ord(B, 0)$ mayor igual a 2, llamaremos ***parte lineal de*** Z al cual lo denotaremos por $DZ(0, 0)$ a la matríz

$$DZ(0,0) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Definición 1.15: Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto y $Z \in \mathcal{X}(U)$. Decimos que $p \in U$ es una ***singularidad aislada*** de Z si sólo si $p \in Sing(Z)$ y $\exists V \subseteq U$ vecindad abierta de p tal que $Sing(Z) \cap V = \{p\}$.

Definición 1.16: Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto y $Z \in \mathcal{X}(U)$

1) La ecuación diferencial ordinaria de primer orden (EDO) asociada a Z, viene dado por

$$z^{'} = Z(z) \tag{1.1}$$

donde $z^{'} = \dfrac{dz}{dT}$, $T \in \mathbb{C}$

2) Una solución de la EDO (1,1) es una función analítica $\varphi : D \to \mathbb{C}^n$ donde $D \subseteq \mathbb{C}$ es un disco abierto tal que $\varphi^{'}(T) = Z(\varphi(T))$; $\forall$T$\in D$.

Definición 1.17: Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto y $Z \in \mathcal{X}(U)$ y sea $F : V \to U$ un biholomorfismo, donde $V \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto, el ***pull-back*** de Z bajo F, denotado por F^*Z; se define como el campo vectorial

$$(F^*Z)(w) = [F^{'}(w)]^{-1}Z(F(w)), \forall w \in V$$

Observación 1.18: 1) De la definición anterior se sigue que $F^*Z \in \mathcal{X}(V)$.

2) La EDO asociada a Z viene dada por $z^{'} = Z(z)$, si $z = F(w)$ entonces $F^{'}(w)w^{'} = z^{'} = Z(z) = Z(F(w))$ del cual se sigue que

$$w^{'} = [F^{'}(w)]^{-1}Z(F(w))$$

y que F es una conjugación analítica entre Z y F^*Z.

1.3. Anillo local de funciones holomorfas

En esta sección mencionaremos algunos resultados de la teoría local de las funciones holomorfas, para más detalles ver [6].

Definición 1.19: Sean $U, V \subseteq \mathbb{C}^n$ vecindades abiertas de $a \in \mathbb{C}^n$ y $f \in \mathcal{O}(U)$, $g \in \mathcal{O}(V)$. Decimos que $f \sim_a g$ si y sólo si existe $W \subseteq U \cap V$ vecindad abierta de a tal que $f|_W = g|_W$.

Observación 1.20: 1) Denotaremos por $\mathcal{V}_a$ al conjunto de todas las vecindades abiertas de a.

2) Denotaremos por O_a al conjunto de todas las funciones holomorfas definidas en una vecindad de a.

3) "$\sim_a$."es una relación de equivalencia en O_a.

4) Denotemos por $\mathcal{O}_a = O_a/\sim_a$, el cual es llamado ***el conjunto de gérmenes de funciones holomormas en*** a. Sus elementos son clases de equivalencia

$$\overline{f} = \{g \in O_a; g \sim_a f\}$$

la que llamaremos ***germen de función holomorfa en*** a.

5) Todas las funciones que pertenecen al mismo germen tienen el mismo valor en el punto a, esto es si $g \in \overline{f}$ entonces $f(a) = g(a)$.

Vamos a dotar al conjunto $\mathcal{O}_a$ de una estructura algebraica.

Sean $\overline{f}, \overline{g} \in \mathcal{O}_a$, entonces existen $U, V \in \mathcal{V}_a$ tales que $f \in \mathcal{O}(U)$ y $g \in \mathcal{O}(V)$ como $U \cap V \in \mathcal{V}_a$ entonces $f|_{U\cap V} + g|_{U\cap V} \in O_a$ y $f|_{U\cap V}.g|_{U\cap V} \in O_a$. De allí podemos definir lo siguiente:

$$\overline{f} + \overline{g} = \overline{f|_{U\cap V} + g|_{U\cap V}}$$

$$\overline{f}.\overline{g} = \overline{f|_{U\cap V}.g|_{U\cap V}}$$

Observación 1.21: 1) Las operaciones anteriores están bien definidas.

2) $(\mathcal{O}_a,+,\cdot)$ es un anillo conmutativo con elemento identidad.

En lo sucesivo, llamaremos ***álgebra compleja*** a un anillo conmutativo con elemento identidad que contiene a $\mathbb{C}$ (o una identificación) como subanillo y ***homomorfismo(isomorfismo) de álgebras complejas*** a un homomorfismo (isomorfismo) de anillos que restricto a $\mathbb{C}$ es la identidad.

Observación 1.22: 1) $\mathcal{O}_a$ es una álgebra compleja.

2) Sean $a, b \in\subseteq \mathbb{C}^n$, entonces $\mathcal{O}_a$ y $\mathcal{O}_b$ son álgebras Isomorfas.

3) Gracias a la observación anterior es suficiente estudiar al anillo $\mathcal{O}_0$ el cual será denotado por $\mathcal{O}_n$ (simplemente para enfatizar que $0 \in \mathbb{C}^n$).

Teorema 1.23. *$\mathcal{O}_n$ es un dominio de integridad.*

Teorema 1.24. *$\overline{f} \in \mathcal{O}_n$ es unidad si y sólo si $\overline{f}(0) \neq 0$.*

Denotaremos por m_n al conjunto de todos los elementos que no son unidades en $\mathcal{O}_n$.

Observación 1.25: 1) m_n es un ideal máximal de $\mathcal{O}_n$ y más aún es el único.

2) $\mathcal{O}_{n-1}$ se puede considerar como un subanillo de $\mathcal{O}_n$.

3) Si consideramos el anillo de los polinomios en la indeterminada z_n y con coeficientes en $\mathcal{O}_{n-1}$, el cual lo denotamos por $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$; se prueba que $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ también puede ser identificado como un subanillo de $\mathcal{O}_n$ y que

$$\mathcal{O}_{n-1} \subseteq \mathcal{O}_{n-1}[z_n] \subseteq \mathcal{O}_n$$

Definición 1.26: $\overline{f} \in \mathcal{O}_n$ es llamado ***regular de orden*** ν en $\overline{z_n}$ si y sólo si existe $U \subseteq \mathbb{C}^n$ vecindad abierta del $0 \in \mathbb{C}^n$ y existe $f \in \mathcal{O}(U)$ con $f \in \overline{f}$ tal que f es regular de orden ν en z_n.

Definición 1.27: Un ***Polinomio de Weierstrass de grado*** ν ***en*** z_n es un elemento de $\overline{h} \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ de la forma

$$\overline{h} = z_n^{\nu} + \overline{a_1} z_n^{\nu-1} + \cdots + \overline{a_{\nu-1}} z_n + \overline{a_\nu}$$

donde $\overline{a_1}, \cdots, \overline{a_\nu} \in \mathcal{O}_{n-1}$ son no unidades.

La definición anterior queda expresada en términos de funciones analíticas de la siguiente manera: Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ vecindad abierta del $0 \in \mathbb{C}^n$ y $f(z', z_n) = z_n^{\nu} + a_1(z') z_n^{\nu-1} + \cdots + a_{\nu-1}(z') z_n + a_\nu(z')$; $\forall z = (z', z_n) \in \Delta(0, r) = \Delta(0', r') \times D_{r_n}(0) \subseteq \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ donde $a_1, \cdots, a_\nu$ son analíticas en una vecindad del $0' \in \mathbb{C}^{n-1}$ con $a_1(0') = \cdots = a_\nu(0') = 0$, entonces f es llamado ***Polinomio de Weierstrass de grado*** ν ***en la indeterminada*** z_n con coeficientes $a_1, \cdots, a_\nu \in \mathcal{O}(\Delta(0', r'))$.

Teorema 1.28 (Teorema de Preparación de Weierstrass). *Si* $\overline{f} \in \mathcal{O}_n$ *es regular de orden* ν *en* $\overline{z_n}$ *entonces existen un polinomio de Weierstrass* $\overline{h} \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ *de grado* ν *en* z_n *y* $\overline{u} \in \mathcal{O}_n$ *unidad tal que* $\overline{f} = \overline{h}.\overline{u}$.

Teorema 1.29 (Teorema de la División de Weierstrass). *Si* $\overline{h} \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ *de grado* ν *en* z_n *y* $\overline{f} \in \mathcal{O}_n$ *entonces existen* $\overline{g} \in \mathcal{O}_n$ *y* $\overline{r} \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ *polinomios de Weierstrass de grado menor* ν *tal que* $\overline{f} = \overline{g}.\overline{h} + \overline{r}$.

Definición 1.30: Sea $\overline{f} \in \mathcal{O}_n$ no unidad, decimos que $\overline{f}$ es ***reducible*** sobre $\mathcal{O}_n$ si y sólo si existen $\overline{g_1}, \overline{g_2} \in \mathcal{O}_n$ no unidades tales que $\overline{f} = \overline{g_1}.\overline{g_2}$, en caso contrario decimos que $\overline{f}$ es ***irreducible*** sobre $\mathcal{O}_n$.

Teorema 1.31. $\mathcal{O}_n$ *es un D.F.U.*

A continuación presentamos dos resultados muy importantes para nuestro estudio, sus demostraciones pueden ser vistos en [5]

Teorema 1.32 (Puiseux). *Sea* $\overline{g} \in \mathcal{O}_2$ *irredecible, si* $g \in \overline{g}$ *entonces existe* $U \subseteq \mathbb{C}^2$ *vecindad abierta del* $0 \in \mathbb{C}^2$, $\epsilon > 0$ *y una función analítica* $\gamma : D_\epsilon(0) \to U$ *tal que* $g(\gamma(T)) = 0$, $\forall T \in D_\epsilon(0)$.

La función γ del Teorema anterior es llamada ***Parametrización de Puiseux de*** g.

Teorema 1.33 (Puiseux). *Consideremos un polinomio de Weiertrass irreducible de grado* n *en la indeterminada* z_2 *esto es*

$$g(z_1, z_2) = z_2^n + a_1(z_1)z_2^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(z_1)z_2 + a_n(z_1)$$

en donde $a_1, \cdots, a_n$ *son funciones analíticas de una variable compleja a valores complejas tal que* $a_1(0) = \cdots = a_n(0) = 0$. *Entonces existe una función analítica* $\varphi : D_\epsilon(0) \to \mathbb{C}$ *tal que* $g(T^n, \varphi(T)) = 0$, $\forall T \in D_\epsilon(0)$.

Observación 1.34: 1) El Teorema 1,33 mejora al Teorema 1,32 en el sentido que en el primer teorema lo único que sabemos es que $\gamma(T) = (\gamma_1(T), \gamma_2(T))$, mientras que el segundo establece que $\gamma_1(T) = T^n$.

2) Si en el enunciado del Teorema 1.3.7, g fuese un polinomio de Weierstrass de grado n en la indeterminada z_1, esto es

$$g(z_1, z_2) = z_1^n + b_1(z_2)z_1^{n-1} + \cdots + b_{n-1}(z_2)z_1 + b_n(z_2)$$

en donde $b_1, \cdots, b_n$ son funciones analíticas de una variable compleja tales que $b_1(0) = \cdots = b_n(0) = 0$, entonces la parametrización de Puiseux de g es del tipo $\gamma(T) = (\varphi(T), T^n)$.

Ejemplo 1.35: Sea $g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ definida por $g(z_1, z_2) = z_2^2 - z_1^{2k-1}, k \in \mathbb{N}$, entonces g es un polinomio de Weierstrass de grado 2 en la indeterminada z_2, se sigue del Teorema 1,32 que existe $\varphi : D_\epsilon(0) \to \mathbb{C}$ tal que $g(T^2, \varphi(T)) = 0$; $\forall\ T \in D_\epsilon(0)$, entonces $\varphi(T) = T^{2k-1}$, de allí

$$\begin{array}{rll} \gamma : & \mathbb{C} & \to \mathbb{C}^2 \\ & T & \to \gamma(T) = (T^2, T^{2k-1}) \end{array}$$

es una parametrización de Puiseux de g.

Ejemplo 1.36: Sea $g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ definida por $g(z_1, z_2) = z_1^2 - z_2^5$, entonces g es un polinomio de Weierstrass de grado 2 en la indeterminada z_1, se sigue de la obeservación anterior que existe $\varphi : D_\epsilon(0) \to \mathbb{C}$ tal que $g(\varphi(T), T^2) = 0$; $\forall T \in D_\epsilon(0)$, luego $\varphi(T) = T^5$ y de allí

$$\begin{array}{rll} \gamma : & \mathbb{C} & \to \mathbb{C}^2 \\ & T & \to \gamma(T) = (T^5, T^2) \end{array}$$

es una parametrización de Puiseux de g.

1.4. Variedades complejas

En esta sección presentamos a las variedades complejas y algunos resultados relacionados con este último, los cuales pueden ser encontrados en [5], [6] y [9].

Sea X un espacio topológico de Hausdorff con base numerable.

1) Una ***carta compleja de dimensión*** n ***sobre*** X es un homeomorfismo $\varphi : U \to V$ donde $U \subseteq X$ es un abierto de X y $V \subseteq \mathbb{C}^n$ es un abierto de $\mathbb{C}^n$.

2) Dos cartas complejas $\varphi_1 : U_1 \to V_1$, $\varphi_2 : U_2 \to V_2$ sobre X son ***analíticamente compatibles*** si y sólo si $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ es un biholomorfismo.

3) Un ***atlas complejo holomorfo de dimensión*** n ***sobre*** X es una colección de cartas complejas de dimensión n.

$$\mathcal{A}=\{\varphi_i : U_i \to V_i\}_{i \in I}$$

tales que

a) $X = \bigcup_{i \in I} U_i$

b) Si $\varphi_i : U_i \to V_i$, $\varphi_j : U_j \to V_j \in \mathcal{A}$, entonces ellos son analíticamente compatibles.

4) Dos atlas complejas $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ sobre X son llamados ***analíticamente equivalentes*** si y sólo si toda carta de $\mathcal{A}$ es analíticamente compatible con toda carta de $\mathcal{A}'$.

Observación 1.37: i) Si $\varphi_1 : U_1 \to V_1$, $\varphi_2 : U_2 \to V_2$ son dos cartas complejas de dimensión n sobre X tal que $U_1 \cap U_2 = \phi$, entonces admitiremos que ellos son analíticamente compatibles.

ii) Sean $\varphi_1 : U_1 \to V_1$, $\varphi_2 : U_2 \to V_2$ dos cartas complejas de dimensión n sobre X, el biholomorfismo $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ es llamado ***cambio de coordenadas***.

iii) Denotemos por A_X al conjunto de todas las atlas complejos holomorfos de dimensión n sobre X. Dados $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}' \in \mathcal{A}_{\mathcal{X}}$, definimos

$$\mathcal{A} \sim \mathcal{A}' \Leftrightarrow \mathcal{A} \text{ y } \mathcal{A}' \text{ son analíticamente equivalentes}$$

Así definido " $\sim$ " es una relación de equivalencia en A_X, entonces podemos considerar el espacio cociente $A_X/\sim$.

Definición 1.38: Una clase de equivalencia $\sum \in A_X/\sim$ es llamada ***estructura compleja de dimensión n*** sobre X.

Dado $\sum \in A_X/\sim$ podemos definir

$$\mathcal{A}_{\sum} = \bigcup_{\mathcal{A}\in\sum} \mathcal{A}$$

Se sigue que $\mathcal{A}_{\sum}$ tiene la siguiente propiedad. Si $\mathcal{A} \in \sum$ entonces $\mathcal{A} \in \mathcal{A}_{\sum}$ (maximalidad), $\mathcal{A}_{\sum}$ es llamado ***atlas máximal***.

Definición 1.39: Una ***Variedad Compleja holomorfa*** de dimensión n es un par $(X, \sum)$ donde X es un espacio topológico de Hausdorff con base numerable y $\sum$ es una estructura compleja de dimensión n sobre X.

Observación 1.40: i) Una variedad compleja holomorfa de dimensión 1 es ***llamada superficie de Riemann***.

ii) Sea $\mathcal{A}$ un atlas complejo de dimensión n sobre X, entonces existe una única $\sum \in A_X/\sim$ tal que $\mathcal{A} \in \sum$, entonces existe $\mathcal{A}_{\sum}$ que es el atlas maximal. Concluímos que para obtener una variedad compleja, es suficiente fijar un atlas sobre X.

El siguiente resultado, cuya demostración puede ser encontrado en [9], establece una manera de construir variedades analíticas teniendo una familia de inyecciones.

Lema 1.41. *Sea $X \neq \phi$ y $\mathcal{F}$=$\{(U_i, \varphi_i)\}$ familia arbitraria de funciones inyectivas $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}^n$ que satisfacen*

1) $\varphi_i(U_i) \subseteq \mathbb{C}^n$ son abiertos, $\forall i$.

2) $X = \bigcup_i U_i$

3) *Si* (U_i, φ_i), $(U_j, \varphi_j) \in \mathcal{F}$ *tal que* $U_i \cap U_j \neq \phi \Rightarrow (\varphi_i(U_i \cap U_j))$, $(\varphi_j(U_i \cap U_j))$ *son abiertos de* $\mathbb{C}^n$ *y* $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ *es un biholomorfismo.*

4) $\forall (U_i, \varphi_i)$, $(U_j, \varphi_j) \in \mathcal{F}$ *con* $U_i \cap U_j \neq \phi$ *no existe ninguna sucesión* $(x_n) \subseteq \varphi_i(U_i \cap U_j)$ *tal que* $x_n \to x \in \varphi_i(U_i - U_j)$ *y que* $(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(x_n) \to y \in \varphi_j(U_j - U_i)$.

5) *El cubrimiento de* $\{U_i\}$ *de* X *admite un subcubrimiento numerable.*

Entonces existe una única topología sobre X que torna a X en un espacio tolológico de Hausdorff con base numerable y a $\mathcal{F}$ en un atlas analítica compleja de dimensión n sobre X.

A continuación veremos un ejemplo de superficie de Riemman, que será de gran utiliadad para la próxima sección.

Ejemplo 1.42 (El Espacio Proyectivo $\mathbb{C}P(1)$)**:** En $\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$ definimos la siguiente relación :

$$\text{Sean } z, z' \in \mathbb{C}^2 - \{(0,0)\},\ z \sim z' \Leftrightarrow \exists \text{ t} \in \mathbb{C}^* \text{ tal que } z' = tz$$

Así definido $\sim$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$.

Denotemos por $\mathbb{C}\text{P}(1) = \mathbb{C}^2 - \{(0,0)\} / \sim$; es decir

$$\mathbb{C}\text{P}(1) = \{[z]; z \in \mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}\}$$

donde

$$[z] = [z_1, z_2] = \{(tz_1, tz_2); t \in \mathbb{C}^*\}$$

Sean $U_1 = \{[z_1, z_2] \in \mathbb{C}P(1); z_1 \neq 0\}$, $U_2 = \{[z_1, z_2] \in \mathbb{C}P(1); z_2 \neq 0\}$
$U_1 \cap U_2 = \{[z_1, z_2] \in \mathbb{C}P(1); z_2 \neq 0 \neq z_1\}$.

Definamos las siguientes funciones

$$\begin{array}{rll} \varphi_1 : & U_1 & \to \mathbb{C} \\ & [z_1, z_2] & \to \varphi_1([z_1, z_2]) = \dfrac{z_2}{z_1} \end{array}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2: \quad & U_2 && \to \mathbb{C}\\ & [z_1,z_2] && \to \varphi_2([z_1,z_2]) = \frac{z_1}{z_2}\end{aligned}$$

Se sigue que φ_1 y φ_2 son biyecciones y más aún sus inversas están dadas como

$$\begin{aligned}\varphi_1^{-1}: \quad & \mathbb{C} && \to U_1\\ & t && \to \varphi_1^{-1}(t) = [1,t]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2^{-1}: \quad & \mathbb{C} && \to U_2\\ & t && \to \varphi_2^{-1}(t) = [t,1]\end{aligned}$$

Consideremos $\mathcal{F}$=$\{(U_1,\varphi_1),(U_2;\varphi_2)\}$ y $X = \mathbb{C}P(1)$, entonces esta familia de biyecciones satisfacen las 5 condiciones del Lema 1.4.1. En efecto las condiciones (1),(2) y (5) se siguen inmediatamente, veamos la condición (3), como $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C}^* = \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ y

$$\begin{aligned}\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}: \quad & \mathbb{C}^* && \to \mathbb{C}^*\\ & t && \to \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(t) = \frac{1}{t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}: \quad & \mathbb{C}^* && \to \mathbb{C}^*\\ & t && \to \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(t) = \frac{1}{t}\end{aligned}$$

Se sigue que $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ y $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ son biholomorfismos, entonces se satisface la condición (3), por último veamos que la condición (4) se satisface, consideremos $(z_m) \subseteq \varphi_1(U_1 \cap U_2)$ tal que $z_m \to z \in \varphi_1(U_1 - U_2) = \{0\}$ y $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z_m) = \varphi_2([1,z_m]) = \frac{1}{z_m}$, como $z_m \to z$ y $z = 0$, entonces $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z_m)$ no es convergente, del cual se sigue la condición (4). Así por el Lema 1,41 existe una única topología τ sobre $\mathbb{C}$P(1), el cual torna a $\mathbb{C}$P(1) en un espacio topológico de Hausdorff y de base numerable, este espacio es llamado ***espacio proyectivo complejo unidimensional*** y además $\mathcal{F}$ es un atlas analítica compleja de dimensión 1 sobre $\mathbb{C}$P(1).

Definición 1.43: Sean $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ variedades complejas holomorfas de dimensión m y n respectivamente y sea $f : X \to Y$ continua.

1) Decimos que f es ***holomorfa en*** $p \in X$ si y sólo si existen $\varphi : U \to V \in \mathcal{A}$, $\psi : \widetilde{U} \to \widetilde{V} \in \mathcal{B}$, con $p \in U$ y $f(U) \subseteq \widetilde{U}$ tales que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : V \subseteq \mathbb{C}^m \to \widetilde{V} \subseteq \mathbb{C}^n$ es holomorfa en $\varphi(p)$.

2) Decimos que f es ***holomorfa en*** X si y sólo si f es holomorfa en p, $\forall p \in X$.

3) Decimos que f es un ***biholomorfismo*** si y sólo si f es biyectiva, f es holomorfa y $f^{-1} : Y \to X$ es holomorfa

4) Decimos que $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ son ***variedades biholomorfas*** si y sólo si existe $f : X \to Y$ biholomorfismo entre X e Y.

1.5. Blow-up del $0 \in \mathbb{C}^2$

En la presente sección construiremos una variedad compleja analítica que sera muy importante en nuestro estudio, para su construcción usaremos el resultado del Lema 1,41. Sea la siguiente función

$$\begin{aligned} E_1 : \quad & \mathbb{C}^2 && \to \mathbb{C}^2 \\ & (x,t) && \to E_1(x,t) = (x,tx) = (z_1, z_2) \end{aligned}$$

Se sigue de inmediato que esta función es un mapeo analítico que cumple las siguientes propiedades:

1) $E_1^{-1}(0,0) = \{(0,t); t \in \mathbb{C}\}$

2) $E_1(\mathbb{C}^2) = (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}) \cup \{(0,0)\}$.

3) $E_1(x, t_0) = (x, xt_0)$ (recta de pendiente t_0).

4) $E_1(x_0, t) = (x_0, x_0 t)$ (recta vertical).

5) $E_1 : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ es biyectiva, con inversa

$$\begin{aligned} E_1^{-1} : \quad \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} &\to \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \\ (z_1, z_2) &\to E_1^{-1}(z_1, z_2) = (z_1, \frac{z_2}{z_1}) \end{aligned}$$

Entonces E_1 es un biholomorfismo de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ en $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$

Análogamente si consideramos el mapeo analítico

$$\begin{aligned} E_2 : \quad \mathbb{C}^2 &\to \mathbb{C}^2 \\ (u, y) &\to E_2(u, y) = (uy, y) = (z_1, z_2) \end{aligned}$$

Se cumple las siguientes condiciones

1) $E_2^{-1}(0, 0) = \{(u, 0); u \in \mathbb{C}\}$

2) $E_2(\mathbb{C}^2) = (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*) \cup \{(0, 0)\}$.

3) $E_2(u_0, y) = (u_0 y, y)$ (recta de pendiente $\frac{1}{u_0}$).

4) $E_2(u, y_0) = (uy_0, y_0)$.

5) $E_2 : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ es un biholomorfismo, con inversa

$$\begin{aligned} E_2^{-1} : \quad \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* &\to \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \\ (z_1, z_2) &\to E_2^{-1}(z_1, z_2) = (\frac{z_1}{z_2}, z_2) \end{aligned}$$

definimos los siguientes conjuntos

$$\widetilde{U_1} = \left\{(z_1, z_2, [l]) \in \mathbb{C}^2 \times U_1; z_2 = \varphi_1([l])z_1\right\} \subseteq \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}P(1)$$

$$\widetilde{U_2} = \left\{(z_1, z_2, [l]) \in \mathbb{C}^2 \times U_2; z_1 = \varphi_2([l])z_2\right\} \subseteq \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}P(1)$$

y definamos las siguientes funciones

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi_1} : \quad \widetilde{U_1} &\to \mathbb{C}^2 \\ (z_1, z_2, [l]) &\to \widetilde{\varphi_1}(z_1, z_2, [l]) = (z_1, \varphi_1([l])) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi_2}: \quad & \widetilde{U_2} && \to \mathbb{C}^2 \\ & (z_1, z_2, [l]) && \to \widetilde{\varphi_2}(z_1, z_2, [l]) = (\varphi_2([l]), z_2) \end{aligned}$$

Se sigue que estas funciones son biyecciones con inversas

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi_1}^{-1}: \quad & \mathbb{C}^2 && \to \widetilde{U_1} \\ & (x, t) && \to \widetilde{\varphi_1}^{-1}(x, t) = (x, xt, \varphi_1^{-1}(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi_2}^{-1}: \quad & \mathbb{C}^2 && \to \widetilde{U_2} \\ & (u, y) && \to \widetilde{\varphi_2}^{-1}(u, y) = (uy, y, \varphi_2^{-1}(u)) \end{aligned}$$

donde (U_1, φ_1),(U_2, φ_2) son las cartas de $\mathbb{C}P(1)$ (Ver Ejemplo 1,42).

Definimos $\widetilde{\mathbb{C}_0^2} = \widetilde{U_1} \cup \widetilde{U_2}$. Se tiene que $\widetilde{U_1} \cap \widetilde{U_2} = \mathbb{C}^2 \times (U_1 \cap U_2)$ y por tanto $\widetilde{\varphi_1}(\widetilde{U_1} \cap \widetilde{U_2}) = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$, $\widetilde{\varphi_2}(\widetilde{U_1} \cap \widetilde{U_2}) = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

Así tenemos un conjunto no vacio $\widetilde{\mathbb{C}_0^2}$ y una familia de biyecciones

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \left\{ (\widetilde{U_1}, \widetilde{\varphi_1}); (\widetilde{U_2}, \widetilde{\varphi_2}) \right\}$$

tales que

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi_2} \circ \widetilde{\varphi_1}^{-1}: \quad & \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} && \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \\ & (x, t) && \to \widetilde{\varphi_2} \circ \widetilde{\varphi_1}^{-1}(x, t) = (\frac{1}{t}, tx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi_1} \circ \widetilde{\varphi_2}^{-1}: \quad & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* && \to \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \\ & (x, t) && \to \widetilde{\varphi_1} \circ \widetilde{\varphi_2}^{-1}(u, y) = (uy, \frac{1}{u}) \end{aligned}$$

De esta manera, se tiene que $\widetilde{\varphi_2} \circ \widetilde{\varphi_1}^{-1}$ y $\widetilde{\varphi_1} \circ \widetilde{\varphi_2}^{-1}$ son biholomorfismos. Se sigue que la familia $\widetilde{\mathcal{F}}$ satisface las condiciones (1),(2) y (3) del Lema 1,41, luego existe una única topología $\tau(\widetilde{\mathcal{F}})$ sobre $\widetilde{\mathbb{C}_0^2}$ que torna a $\widetilde{\mathcal{F}}$ un atlas complejo holomorfo de dimensión 2. Como $\widetilde{\mathcal{F}}$ es finita, entonces la condición (5) del Lema 1,41 se satisface luego $\tau(\widetilde{\mathcal{F}})$ es una topología con base numerable, por último probaremos que también es satisfecha la condición (4). Consideremos la suceción $(z_m) = (z_m^1, z_m^2) \in \widetilde{\varphi_1}(\widetilde{U_1} \cap \widetilde{U_2}) = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ tal que $z_m \to z \in \widetilde{\varphi_1}(\widetilde{U_1} - \widetilde{U_2})$. Como $\widetilde{U_1} - \widetilde{U_2} \subseteq \mathbb{C}^2 \times (U_1 - U_2)$ entonces $\widetilde{\varphi_1}(\widetilde{U_1} - \widetilde{U_2}) \subseteq \mathbb{C} \times \{0\}$ de donde si $z = (z_1, z_2)$ se sigue que $z_2 = 0$. Por otro lado $\widetilde{\varphi_2} \circ \widetilde{\varphi_1}^{-1}(z_m) = (\frac{1}{z_m^2}, z_m^1 z_m^2)$ desde que $z_m^2 \to z_2$ y $z_2 = 0$ se tiene que $\widetilde{\varphi_2} \circ \widetilde{\varphi_1}^{-1}(z_m)$ no es convergente. Lo cual prueba que la condición (4) es satisfecha.

Hemos probado que $(\widetilde{\mathbb{C}_0^2}, \widetilde{\mathcal{F}})$ es una variedad compleja holomorfa de dimensión 2. Esta variedad compleja holomorfa recibe un nombre muy especial de ***Blow-up o explosión de*** $\mathbb{C}^2$ ***en*** $0 \in \mathbb{C}^2$.

Observación 1.44: 1) $\widetilde{\mathbb{C}_0^2} \subseteq \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}P(1)$

2) Existen dos proyecciones naturales.

$$\begin{aligned} E: \quad & \widetilde{\mathbb{C}_0^2} \to \mathbb{C}^2 \\ & (p, [l]) \to E(p, [l]) = p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi: \quad & \widetilde{\mathbb{C}_0^2} \to \mathbb{C}P(1) \\ & (p, [l]) \to \Pi(p, [l]) = [l] \end{aligned}$$

Vamos a expresar E en coordenadas

$$E \circ \widetilde{\varphi_1}^{-1}(x, t) = E(x, xt, \varphi_1^{-1}(t)) = (x, xt) = E_1(x, t)$$

entonces $E \circ \widetilde{\varphi_1}^{-1} = E_1$.

Análogamente $E \circ \widetilde{\varphi_2}^{-1} = E_2$

3) $E^{-1}\{(0,0)\} = \{(0,0)\} \times \mathbb{C}P(1)$.

4) $E|_{\widetilde{\mathbb{C}_0^2} - \mathbb{C}P(1)} : \widetilde{\mathbb{C}_0^2} - \mathbb{C}P(1) \to \mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$ es un biholomorfismo entre variedades. En efecto, en primer lugar probaremos que $E : \widetilde{\mathbb{C}_0^2} \to \mathbb{C}^2$ es una función analítica entre variedades, esto resulta de inmediato

desde que $E \circ \widetilde{\varphi_1}^{-1} = E_1$ y $E \circ \widetilde{\varphi_2}^{-1} = E_2$ son analíticas y más aún sus inversas son analíticas como ya fue probado líneas arriba y como $E^{-1}\{(0,0)\} = \{(0,0)\} \times \mathbb{C}P(1)$ entonces se sigue la observación.

5) E es un mapeo propio.

6) $E : \widetilde{\mathbb{C}_0^2} \to \mathbb{C}^2$ es llamado ***morfismo de explosión*** o simplemente explosión.

1.6. Blow-up de una variedad en un punto

En la sección anterior construimos el Blow-up del $0 \in \mathbb{C}^2$, en esta sección construiremos el Blow-up de una variedad cualquiera en un punto, reemplazando este por una línea proyectiva; pero antes construiremos el espacio proyectivo complejo asociado a un $\mathbb{C}$-espacio vectorial bidimensional.

Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión 2; y sea $B = \{v_1, v_2\} \subseteq V$ base fijada.

En $V - \{0\}$ definamos la siguiente relación:

$$v \sim w \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \text{tal que} v = \lambda w$$

Es claro que "$\sim$.$^{\text{es}}$ una relación de equivalencia, denotemos por

$$VP(1) = V - \{0\} \,/ \sim$$

$VP(1)$ es llamado ***espacio proyectivo complejo de dimensión 1*** y se torna una variedad compleja de la manera siguiente:

Sean $U_1 = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 / \alpha_1 \neq 0\}$ y $U_2 = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 / \alpha_2 \neq 0\}$. Consideramos

$$\begin{aligned} [\,] :\ & V - \{0\} && \to VP(1) \\ & v && \to [v] \end{aligned}$$

se tiene

$[\,]^{-1}(U_1) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in V / \alpha_1 \neq 0\}$ y $[\,]^{-1}(U_2) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in V / \alpha_2 \neq 0\}$

Luego U_1 y U_2 forman un cubrimiento abierto de $VP(1)$(considerado el espacio topológico, con la topología inducida por $[\,]$).

Definamos ahora

$$\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{C} \text{ por } \varphi_1([\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2]) = \tfrac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

$$\varphi_2 : U_2 \to \mathbb{C} \text{ por } \varphi_2([\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2]) = \tfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

Por tanto, en $\varphi_2(U_1 \cap U_2)$ se tiene $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$. Análogamente para $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$. Así $VP(1)$ es una variedad compleja unidimensional.

Observación 1.45: $VP(1)$ es biholomorfo a S^2.

Sea M una variedad analítica de dimensión 2 y T_pM el espacio tangente a M en p construimos entonces el espacio proyectivo complejo P_p de T_pM y tenemos el mapeo cociente $[\,] : T_pM - \{0\} \to P_p$.

El ***blow-up o explosión de*** M ***en*** p se define como el conjunto $M_p = (M - \{0\}) \cup P_p$ dotado de la estructura de variedad compleja de dimensión 2; obtenida de M como sigue.

Dada la carta $\psi = (x, y) : U \to \mathbb{C}^2$ con $\psi(p) = 0$, queda asociada la base $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}\right\}$ del espacio tangente T_pM.

Definamos dos cartas locales para M_p por:

$\psi_i : V_i \to \mathbb{C}^2$; con $V_1 = [U - x^{-1}(0)] \cup (P_p - K_1)$ y $V_2 = [U - y^{-1}(0)] \cup (P_p - K_2)$ donde $K_1 = Ker(dx)_p$; $K_2 = Ker(dy)_p$

$$\begin{cases} \psi_1 = (x, \frac{y}{x}) & \text{en } U - x^{-1}(0) \\ \psi_1(\left[\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y}\right]) = (0, \frac{\alpha_2}{\alpha_1}) & \text{en } P_p - K_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi_2 = (\frac{y}{x}, y) & \text{en } U - y^{-1}(0) \\ \psi_2(\left[\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y}\right]) = (\frac{\alpha_1}{\alpha_2}, 0) & \text{en } P_p - K_2 \end{cases}$$

Es claro que $V_1 \cup V_2 = M_p$ e

$$\psi_1^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{cases} (\left[\frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y}\right]) & \text{si } \alpha_1 = 0 \\ \psi^{-1}(\alpha_1, \alpha_1\alpha_2) & \text{si } \alpha_1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\psi_2^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)=\left\{\begin{array}{ll}(\left[\alpha_1\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right]) & \text{si } \alpha_1=0\\ \psi^{-1}(\alpha_1\alpha_2,\alpha_2) & \text{si } \alpha_1\neq 0\end{array}\right.$$

de allí se tiene que

$$\psi_2\circ\psi_1^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)=\left\{\begin{array}{ll}(\left[\frac{1}{\alpha_2},0\right]) & \text{si } \alpha_1=0\\ (\left[\frac{\alpha_1}{\alpha_2},\alpha_1\alpha_2\right]) & \text{si } \alpha_1\neq 0\end{array}\right.$$

claramente se observa que es holomorfa con inversa holomorfa. Análogamente con $\psi_1\circ\psi_2^{-1}$. Por lo tanto M_p es una variedad bidimensional compleja.

Definamos $E : M_p \to M$ como

$$E(u)=\left\{\begin{array}{ll}u & \text{si } u\notin P_p\\ p & \text{si } u\in P_p\end{array}\right.$$

Probaremos que E es una función analítica. Sea $u\in M_p$ entonces $u\in M-\{p\}$ ó $u\in P_p$.

Si $u\in M-\{p\}$; supongamos que $u\in U$ donde U es una vecindad de $p\in M$, entonces definida $\psi=(x,y):U\to\mathbb{C}^2$ una carta local de M siendo $u\neq p$ entonces $\psi(u)=(x(u),y(u))\neq 0$ podemos suponer que $x(u)\neq 0$ de allí $u\in U-x^{-1}(0)$ y tenemos que existen dos cartas locales (V_1,ψ_1), (U,ψ) con $u\in V_1$ y $E(u)=u\in U$ tal que

$$\begin{array}{lll}\psi\circ E\circ\psi_1^{-1}: & \psi_1(V_1) & \to\psi(U)\\ & (\alpha_1,\alpha_2) & \to\psi\circ E\circ\psi_1^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_1\alpha_2)\end{array}$$

se observa que es analítica y su inversa $(\psi\circ E\circ\psi_1^{-1})^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_1,\frac{\alpha_2}{\alpha_1})$

Si $u\in P_p$; entonces $E(u)=p$, existe (V_i,ψ_i), (U,ψ) con $u\in P_p-K_i$, vamos a suponer que $i=1$, de allí se tiene que $\psi\circ E\circ\psi_1^{-1}:\psi_1(V_1)\to\psi(U)$ dado por

$$\psi\circ E\circ\psi_1^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)=\left\{\begin{array}{ll}0 & \text{si } \alpha_1=0\\ (\alpha_1,\alpha_1\alpha_2) & \text{si } \alpha_1\neq 0\end{array}\right.$$

también es analítica. Por lo tanto E es analítica en M_p.

Observación 1.46: 1) $E|_{M_p-P_p}:M_p-P_p\to M-\{p\}$ es un biholomorfismo de variedades analíticas.

2) E es propia.

1.7. El índice de Poincaré Hopf

Los resultados de esta sección pueden ser encontrados en [12], excepto el Lema 1,49 que se puede ser consultado en [13].

Definición 1.47: Sea $Z \in \mathcal{X}(U)$, donde U es una vecindad abierta de $p \in \mathbb{C}^2$ con p singularidad aislada de Z. El ***indice de Poincaré Hopf*** de Z en p, denotado por $I_p(Z)$, es el grado del mapeo liso

$$\frac{Z}{|Z|} : S_\epsilon^{2n-1}(p) \to S_1^{2n-1}$$

donde $S_\epsilon^{2n-1}(p)$ es la esfera euclideana de radio $\epsilon > 0$ de manera que Z tenga solamente a p como singularidad en $\overline{B}_\epsilon(p)$(la bola cerrada de radio ϵ centrada en p) y S_1^{2n-1} es la esfera unitaria centrada en $0 \in \mathbb{C}^n$.

Proposición 1.48. *Sea $Z \in \mathcal{X}(U)$, donde U es una vecindad abierta de $p \in \mathbb{C}^n$ con p singularidad aislada de Z. Si Z es un biholomorfismo, entonces $I_p(Z) = 1$.*

Lema 1.49. *Sea $B_\epsilon(p) \subseteq \mathbb{C}^n$ una bola abierta de radio ϵ centrada en p, con ϵ suficientemente pequeño de tal forma que p sea la única singularidad de Z en $\overline{B}_\epsilon(p)$. Entonces la ecuación $Z(z) - w_0 = 0$ posee exactamente $I_p(Z)$ soluciones en $B_\epsilon(p)$; para todo $w_0 \in \mathbb{C}^n$ en una vecindad de 0.*

Definición 1.50: Sean $Z, W \in \mathcal{X}(U)$ donde U es una vecindad abierta de $p \in \mathbb{C}^n$, decimos que Z y W son algebraicamente equivalentes o A-equivalentes, si existe un mapeo holomorfo $A : V \subseteq \mathbb{C}^n \to GL(n, \mathbb{C})$ donde V es una vecindad de p, tal que

$$Z(z) = A(z)W(z), \forall z \in U \cap V$$

Proposición 1.51. *Si $Z, W \in \mathcal{X}(U)$ donde U es una vecindad abierta de $p \in \mathbb{C}^n$ son A-equivalentes y $Z^{-1}(Z(p)) = \{p\}$, entonces $I_p(Z) = I_p(W)$.*

Capítulo 2

Reducción de la multiplicidad algebraica

El resultado principal de este capítulo es presentar el resultado de A. Seidenberg [10], esté resultado transforma campos vectoriales con parte lineal nula a campos vectoriales con parte lineal no nula después de un número finito de blow-ups.

2.1. El transformado estricto

Sea $U \subseteq \mathbb{C}^2$ abierto con $0 \in U$ y $f : U \to \mathbb{C}$ función analítica tal que $ord(f, 0) = m$. Definamos

1) $\widetilde{f_1}(t, x) = \dfrac{(f \circ E_1)(t, x)}{x^m}$

2) $\widetilde{f_2}(u, y) = \dfrac{(f \circ E_2)(u, y)}{y^m}$

$\widetilde{f_1}$, $\widetilde{f_2}$ son llamados ***transformados estrictos de*** f ***por*** E en las cartas $(\widetilde{U_1}, \widetilde{\varphi_1})$ y $(\widetilde{U_2}, \widetilde{\varphi_2})$ respectivamente, donde E es el morfismo de explosión de la sección 1,5 1.5.

Ejemplo 2.1: Si $f(z_1, z_2) = z_2^{2k} + 2z_1^{2k-2} z_2$ con $k \geq 1$, se tiene que $ord(f, 0) = 2k - 1$, entonces

$$\widetilde{f_1}(t, x) = \frac{f(x, tx)}{x^{2k-1}} = \frac{x^{2k}t^{2k} + 2x^{2k-1}t}{x^{2k-1}} = xt^{2k} + t$$

y

$$\widetilde{f_2}(u,y) = \frac{f(uy,y)}{y^{2k-1}} = \frac{y^{2k}+2u^{2k-2}y^{2k-1}}{y^{2k-1}} = y + 2u^{2k-2}$$

Ejemplo 2.2: Si $g(z_1,z_2) = z_1^{2k}+z_2^{2k}$ con $k \geq 1$, se tiene que $ord(g,0) = 2k$, entonces

$$\widetilde{g_1}(t,x) = \frac{g(x,tx)}{x^{2k}} = \frac{x^{2k}+x^{2k}t^{2k}}{x^{2k}} = 1 + t^{2k}$$

y

$$\widetilde{g_2}(u,y) = \frac{g(uy,y)}{y^{2k}} = \frac{u^{2k}y^{2k}+y^{2k}}{y^{2k}} = u^{2k} + 1$$

Sea $U \subseteq \mathbb{C}^2$ abierto y $Z \in \mathcal{X}(U)$ tal que $0 \in U$ es una singularidad aislada de Z, recordemos que $E : \widetilde{\mathbb{C}_0^2} \to \mathbb{C}^2$ es un biholomorfismo entre $\widetilde{\mathbb{C}_0^2} - \mathbb{C}P(1)$ y $\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$ luego podemos considerar el pull-back de $Z \in \mathcal{X}(U - \{(0,0)\})$ por E y obtener $E^*Z \in \mathcal{X}(\widetilde{\mathbb{C}_0^2} - \mathbb{C}P(1))$.

Denotemos $Z = (Z_1, Z_2)$ donde $Z_1, Z_2 \in \mathcal{O}(U)$, si $ord(Z_1,0) = \nu_1$ y $ord(Z_2,0) = \nu_2$, entonces podemos expresar

$$Z_1 = \textstyle\sum_{k\geq\nu_1} a_k(z_1,z_2) \text{ y } Z_2 = \sum_{k\geq\nu_2} b_k(z_1,z_2)$$

donde a_k, b_k son polinomios homogéneos de grado k.

Trabajando en la carta $z_1 = x$, $z_2 = xt$ del blow-up en el $0 \in \mathbb{C}^2$ tenemos

$$E_1(x,t) = (x,tx), E_1^{'}(x,t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & x \end{pmatrix}$$

y

$$(E_1^{'})^{-1}(x,t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{t}{x} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

Luego

$$\begin{aligned} E_1^*Z(x,t) &= (E_1^{'})^{-1}(x,t)Z(E_1(x,t)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{t}{x} & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1(E_1(x,t)) \\ Z_2(E_1(x,t)) \end{pmatrix} \\ &= (Z_1(E_1(x,t)), \frac{Z_2(E_1(x,t)) - tZ_1(E_1(x,t))}{x}) \end{aligned}$$

Sabemos que

$$\widetilde{Z_1}(x,t) = \frac{Z_1(E_1(x,t))}{x^{\nu_1}} \text{ y } \widetilde{Z_2}(x,t) = \frac{Z_2(E_1(x,t))}{x^{\nu_2}}$$

logo

$$E_1^*Z(x,t) = (x^{\nu_1}\widetilde{Z_1}(x,t), x^{\nu_2-1}\widetilde{Z_2}(x,t) - tx^{\nu_1-1}\widetilde{Z_1}(x,t))$$

además podemos observar que:

$$\widetilde{Z_1}(x,t) = x^{-\nu_1}\sum_{k\geq\nu_1} x^k a_k(1,t)$$

$$\widetilde{Z_2}(x,t) = x^{-\nu_2}\sum_{k\geq\nu_2} x^k b_k(1,t)$$

De allí tenemos que

$$E_1^*Z(x,t) = (\sum_{k\geq\nu_1} x^k a_k(1,t), \sum_{k\geq\nu_2} x^{k-1}b_k(1,t) - t\sum_{k\geq\nu_1} x^{k-1}a_k(1,t))$$

Para simplificar los cálculos vamos a suponer que $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, entonces se tiene

$$E_1^*Z(x,t) = x^{\nu-1}(x\sum_{k\geq\nu} x^{k-\nu}a_k(1,t), \sum_{k\geq\nu} x^{k-\nu}(b_k(1,t) - ta_k(1,t))) \qquad (2.1)$$

de donde se presentan dos casos:

Caso I: $b_\nu(1,t) - ta_\nu(1,t)) \not\equiv 0$. De 2,1

$$E_1^*Z(x,t) = x^{\nu-1}(x\sum_{k\geq\nu} x^{k-\nu}a_k(1,t), \sum_{k\geq\nu} x^{k-\nu}(b_k(1,t) - ta_k(1,t)))$$

denotemos por $\widetilde{Z^1}(x,t) = \dfrac{E_1^*Z(x,t)}{x^{\nu-1}}$, se observa que $\widetilde{Z^1}(x,t)$ está bien definida y se tiene que

$$\widetilde{Z^1}(x,t) = (x\sum_{k\geq\nu} x^{k-\nu}a_k(1,t), \sum_{k\geq\nu} x^{k-\nu}(b_k(1,t) - ta_k(1,t)))$$

$\widetilde{Z^1}$ es llamado ***transformado estricto de*** Z ***en la carta*** $z_1 = x$, $z_2 = xt$.

Observación 2.3: 1) $\widetilde{Z^1}(0,t) = (0, b_\nu(1,t) - ta_\nu(1,t))$, luego el .$^{\text{ej}}$e t.$^{\text{es}}$ invariante por $\widetilde{Z^1}$.

2) Las singularidades de $\widetilde{Z^1}$ son las raíces del polinomio $b_\nu(1,t) - ta_\nu(1,t)$ y existen a lo más $\nu + 1$ singularidades todas en el .$^{\text{ej}}$e t", es decir

$$Sing(\widetilde{Z^1}) = \{(0,t_0); b_\nu(1,t_0) - t_0 a_\nu(1,t_0) = 0\}$$

3) $\{0\} \times \mathbb{C} - Sing(\widetilde{Z^1})$ es una hoja de $\mathcal{F}_{\widetilde{\mathcal{Z}}}$.

Caso II: $b_\nu(1,t) - ta_\nu(1,t)) \equiv 0$. De (2,1)

$$E_1^* Z(x,t) = x^\nu (\sum_{k\geq\nu} x^{k-\nu} a_k(1,t), \sum_{k\geq\nu+1} x^{k-\nu-1}(b_k(1,t) - ta_k(1,t)))$$

en este caso el transformado estricto de Z en la carta $z_1 = x$, $z_2 = xt$, se define como

$$\widetilde{Z^1}(x,t) = \frac{E_1^* Z(x,t)}{x^\nu}$$

y se tiene

$$\widetilde{Z^1}(x,t) = (\sum_{k\geq\nu} x^{k-\nu} a_k(1,t), \sum_{k\geq\nu+1} x^{k-\nu-1}(b_k(1,t) - ta_k(1,t)))$$

Observación 2.4: 1) $\widetilde{Z^1}(0,t) = (a_\nu(1,t), b_{\nu+1}(1,t) - ta_{\nu+1}(1,t))$, así el .$^{\text{ej}}$e t"no es invariante por $\widetilde{Z^1}$.

2) $Sing(\widetilde{Z^1}) = \{(0,t_0); a_\nu(1,t_0) = 0 \wedge b_{\nu+1}(1,t_0) - t_0 a_{\nu+1}(1,t_0) = 0\}$, entonces las singularidades de $\widetilde{Z^1}$ es un conjunto finito y a lo más existen ν singularidades.

3) Cuando $t_0 \in \mathbb{C}$ es tal que $a_\nu(1,t_0) = 0$ y $b_{\nu+1}(1,t_0) - t_0 a_{\nu+1}(1,t_0) \neq 0$, entonces la hoja de $\mathcal{F}_{\widetilde{\mathcal{Z}}}$ que pasa por $(0,t_0)$ es tangencial al .$^{\text{ej}}$e t".

4) Cuando $t_0 \in \mathbb{C}$ es tal que $a_\nu(1,t_0) \neq 0$, entonces la hoja de $\mathcal{F}_{\widetilde{\mathcal{Z}}}$ que pasa por $(0,t_0)$ es transversal al .$^{\text{ej}}$e t".

Trabajando en la carta $z_1 = uy$, $z_2 = y$ del blow-up en el $0 \in \mathbb{C}^2$, tenemos:

$$E_2(u,y) = (uy, y), E_2^{'}(u,y) = \begin{pmatrix} y & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$(E_2^{'})^{-1}(u,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y} & -\frac{u}{y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego

$$\begin{aligned} E_2^* Z(u,y) &= (E_2^{'})^{-1}(u,y) Z(E_2(u,y)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y} & -\frac{u}{y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1(E_2(u,y)) \\ Z_2(E_2(u,y)) \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{Z_1(E_2(u,y)) - uZ_2(E_2(u,y))}{y}, Z_2(E_2(u,y))\right) \end{aligned}$$

Sabemos que $\widetilde{Z_1}(u,y) = \dfrac{Z_1(E_2(u,y))}{y^{\nu_1}}$ y $\widetilde{Z_2}(u,y) = \dfrac{Z_2(E_2(u,y))}{y^{\nu_2}}$, asi

$$E_2^* Z(u,y) = (y^{\nu_1 - 1}\widetilde{Z_1}(u,y) - uy^{\nu_2 - 1}\widetilde{Z_2}(u,y), y^{\nu_2}\widetilde{Z_2}(u,y))$$

además podemos observar que:

$$\widetilde{Z_1}(u,y) = y^{-\nu_1} \sum_{k \geq \nu_1} y^k a_k(u,1)$$

$$\widetilde{Z_2}(x,t) = y^{-\nu_2} \sum_{k \geq \nu_2} y^k b_k(u,1)$$

por tanto

$$E_2^* Z(u,y) = (\sum_{k \geq \nu_1} y^{k-1} a_k(u,1) - u \sum_{k \geq \nu_2} y^{k-1} b_k(u,1), \sum_{k \geq \nu_2} y^k b_k(u,1))$$

Para simplificar los cálculos supongamos que $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, de donde se sigue que

$$E_2^* Z(u,y) = y^{\nu-1}(\sum_{k \geq \nu} y^{k-\nu}(a_k(u,1) - ub_k(u,1)), y \sum_{k \geq \nu} y^{k-\nu} b_k(u,1)) \qquad (2.2)$$

De aqui se presentan dos casos:

Caso I: $a_\nu(u,1) - ub_\nu(u,1) \not\equiv 0$. De (2,2)

$$E_2^* Z(u,y) = y^{\nu-1}(\sum_{k\geq\nu} y^{k-\nu}(a_k(u,1) - ub_k(u,1)), y\sum_{k\geq\nu} y^{k-\nu} b_k(u,1))$$

denotemos por

$$\widetilde{Z^2}(u,y) = \frac{E_2^* Z(u,y)}{y^{\nu-1}}$$

se observa que $\widetilde{Z^2}(u,y)$ está bien definida y que

$$\widetilde{Z^2}(u,y) = (\sum_{k\geq\nu} y^{k-\nu}(a_k(u,1) - ub_k(u,1)), y\sum_{k\geq\nu} y^{k-\nu} b_k(u,1))$$

$\widetilde{Z^2}$ es llamado ***transformado estricto de*** Z ***en la carta*** $z_1 = uy$, $z_2 = y$.

Observación 2.5: 1) $\widetilde{Z^2}(u,0) = (a_\nu(u,1) - ub_\nu(u,1), 0)$, luego el ."eje u."es invariante por $\widetilde{Z^2}$.

2) Las singularidades de $\widetilde{Z^2}$ son las raíces del polinomio $a_\nu(u,1) - ub_\nu(u,1)$ y existen a lo más $\nu + 1$ singularidades todas en el ."eje u", esto es

$$Sing(\widetilde{Z^2}) = \{(u_0, 0); a_\nu(u_0,1) - u_0 b_\nu(u_0,1) = 0\}$$

3) $\mathbb{C} \times \{0\} - Sing(\widetilde{Z^2})$ es una hoja de $\mathcal{F}_{\widetilde{Z}}$.

Caso II: $a_\nu(u,1) - ub_\nu(u,1) \equiv 0$. De (2,2)

$$E_2^* Z(u,y) = y^{\nu}(\sum_{k\geq\nu+1} y^{k-\nu-1}(a_k(u,1) - ub_k(u,1)), \sum_{k\geq\nu} y^{k-\nu} b_k(u,1))$$

En este caso el transformado estricto de Z en la carta $z_1 = uy$, $z_2 = y$ se define como $\widetilde{Z^2}(u,y) = \dfrac{E_2^* Z(u,y)}{y^\nu}$, asi

$$\widetilde{Z^2}(u,y) = (\sum_{k\geq\nu+1} y^{k-\nu-1}(a_k(u,1) - ub_k(u,1)), \sum_{k\geq\nu} y^{k-\nu} b_k(u,1))$$

Observación 2.6: 1) $\widetilde{Z^2}(u,0) = (a_{\nu+1}(u,1) - ub_{\nu+1}(u,1), b_\nu(u,1))$, luego el .eje u"no es invariante por $\widetilde{Z^2}$.

2) $Sing(\widetilde{Z^2}) = \{(u_0,0); a_{\nu+1}(u,1) - ub_{\nu+1}(u,1) = 0 \wedge b_\nu(u,1) = 0\}$ así las singularidades de $\widetilde{Z^2}$ es un conjunto finito y a lo más existen ν singularidades.

3) Cuando $u_0 \in \mathbb{C}$ es tal que $b_\nu(u_0,1) = 0$ y $a_{\nu+1}(u_0,1) - u_0 b_{\nu+1}(u_0,1) \neq 0$ entonces la hoja de $\mathcal{F}_{\widetilde{\mathcal{Z}}}$ que pasa por $(u_0,0)$ es tangencial al .eje u".

4) Cuando $u_0 \in \mathbb{C}$ es tal que $b_\nu(u_0,1) \neq 0$ entonces la hoja de $\mathcal{F}_{\widetilde{\mathcal{Z}}}$ que pasa por $(u_0,0)$ es transversal al .eje u".

Ejemplo 2.7: Sea $Z(z_1,z_2) = (z_1^{2k-1}, z_2^{2k} + 2z_1^{2k-2}z_2)$ con $k \geq 2$. $0 \in \mathbb{C}^2$ es singularidad aislada de Z y

$$Z_1(z_1,z_2) = \underbrace{z_1^{2k-1}}_{a_{2k-1}(z_1,z_2)} \text{ y } Z_2(z_1,z_2) = \underbrace{2z_1^{2k-2}z_2}_{b_{2k-1}(z_1,z_2)} + \underbrace{z_2^{2k}}_{b_{2k}(z_1,z_2)}$$

de allí se tiene que

$$ord(Z_1,0) = 2k-1 = ord(Z_2,0)$$

y

$$z_2 a_{2k-1}(z_1,z_2) - z_1 b_{2k-1}(z_1,z_2) = z_1^{2k-1}z_2 \neq 0$$

entonces estamos en el caso I, de donde se tiene que los transformados estrictos son:

$$\widetilde{Z^1}(x,t) = (x, t + xt^{2k})$$

$$\widetilde{Z^2}(u,y) = (u^{2k-1} - yu, 2u^{2k-2}y + y^2)$$

se observa que la única singularidad de $\widetilde{Z^1}$ y $\widetilde{Z^2}$ es $(0,0)$.

En el siguiente ejemplo, veremos el caso donde $ord(Z_1,0) \neq ord(Z_2,0)$.

Ejemplo 2.8: Sea $Z(z_1,z_2) = (z_1^{2k+1}, z_2^{2k} + 2z_1^{2k}z_2)$ con $k \geq 1$, luego $0 \in \mathbb{C}^2$ es una singularidad aislada de Z y que

$$Z_1(z_1,z_2) = \underbrace{z_1^{2k+1}}_{a_{2k+1}(z_1,z_2)} \text{ y } Z_2(z_1,z_2) = \underbrace{2z_1^{2k}z_2}_{b_{2k+1}(z_1,z_2)} + \underbrace{z_2^{2k}}_{b_{2k}(z_1,z_2)}$$

de allí se tiene que

$$ord(Z_1,0) = 2k+1 \text{ y } ord(Z_2,0) = 2k$$

y los pull-backs de Z por E_1 y E_2 respectivamente son:

$$\begin{aligned} E_1^*Z(x,t) &= (\sum_{j\geq 2k+1} x^j a_j(1,t), \sum_{j\geq 2k} x^{j-1}b_j(1,t) - t\sum_{j\geq 2k+1} x^{j-1}a_j(1,t)) \\ &= (x^{2k+1}, x^{2k-1}t^{2k} + x^{2k}t) \\ &= x^{2k-1}(x^2, t^{2k} + xt) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2^*Z(u,y) &= (\sum_{j\geq 2k+1} y^{j-1}a_j(u,1) - u\sum_{j\geq 2k} y^{j-1}b_j(u,1), \sum_{j\geq 2k} y^j b_j(u,1)) \\ &= (-u^{2k+1}y^{2k} - uy^{2k-1}, y^{2k} + 2u^{2k}y^{2k+1}) \\ &= y^{2k-1}(-u^{2k+1}y - u, y + 2u^{2k}y^2) \end{aligned}$$

se sigue que los transformardos estrictos de Z en las cartas $z_1 = x$, $z_2 = xt$ y $z_1 = uy$, $z_2 = y$ respectivamente estan dados por

$$\widetilde{Z^1}(x,t) = \frac{E_1^*Z(x,t)}{x^{2k-1}} = (x^2, t^{2k} + xt)$$

$$\widetilde{Z^2}(u,y) = \frac{E_2^*Z(u,y)}{y^{2k-1}} = (-u^{2k+1}y - u, y + 2u^{2k}y^2)$$

de donde se puede observar que la única singularidad de $\widetilde{Z^1}$ y $\widetilde{Z^2}$ es $(0,0)$.

Observación 2.9: 1) $z_2a_\nu(z_1,z_2) - z_1b_\nu(z_1,z_2) \not\equiv 0 \Leftrightarrow a_\nu(u,1) - ub_\nu(u,1) \not\equiv 0$ y $b_\nu(1,t) - ta_\nu(1,t) \not\equiv 0$

2) Si $t_0 \neq 0$, entonces $(0,t_0) \in Sing(\widetilde{Z^1}) \Leftrightarrow (\frac{1}{t_0}, 0) \in Sing(\widetilde{Z^2})$.

Definición 2.10: Sea $U \subseteq \mathbb{C}^2$ abierto y $Z \in \mathcal{X}(U)$ tal que $0 \in U$ es una singularidad aislada de Z. Decimos que $0 \in U$ es ***singularidad no dicrítica*** de Z si y sólo si $\mathbb{C}P(1) \subseteq \widetilde{\mathbb{C}_0^2}$ es invariante por $\widetilde{Z}$, en caso contrario decimos que $0 \in U$ es una ***singularidad dicrítica*** de Z.

Proposición 2.11. *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^2$ abierto y $Z \in \mathcal{X}(U)$ tal que $0 \in U$ es una singularidad aislada de Z. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) $0 \in U$ *es una singularidad dicrítica de* Z*.*

2) $z_2 a_\nu(z_1, z_2) - z_1 b_\nu(z_1, z_2) \equiv 0$*.*

Demostración: Como $0 \in U$ es singularidad dicrítica de Z, entonces se tiene que $\mathbb{C}P(1) \subseteq \widetilde{\mathbb{C}_0^2}$ es no invariante por $\widetilde{Z}$, es decir que el .eje t z el .eje u"no es invariante por $\widetilde{Z}$. Supongamos que $z_2 a_\nu(z_1, z_2) - z_1 b_\nu(z_1, z_2) \not\equiv 0$ por la observación 2,9 se tiene que $a_\nu(u, 1) - u b_\nu(u, 1) \not\equiv 0$ y $b_\nu(1, t) - t a_\nu(1, t) \not\equiv 0$, luego por el caso I estudiado se tiene que el .eje tz el .eje u"son invariates por $\widetilde{Z}$, lo cual es una contradicción con nuestra hipótesis, se sigue que lo supuesto es falso.

Reciprocamente, como $z_2 a_\nu(z_1, z_2) - z_1 b_\nu(z_1, z_2) \equiv 0$ entonces por la observación anterior se tiene $a_\nu(u, 1) - u b_\nu(u, 1) \equiv 0$ o $b_\nu(1, t) - t a_\nu(1, t) \equiv 0$. Si $a_\nu(u, 1) - u b_\nu(u, 1) \equiv 0$, entonces por el caso II estudiado se tienea que el .eje u.es no invariante por $\widetilde{Z}$. De donde se sigue que $\mathbb{C}P(1) \subseteq \widetilde{\mathbb{C}_0^2}$ es invariante por $\widetilde{Z}$. Por lo tanto $0 \in U$ es una singularidad dicrítica de Z. □

Ejemplo 2.12: Sean

$$Z(z_1, z_2) = (z_1^{2k+1}, z_2^{2k} + 2z_1^{2k} z_2) \text{ con } k \geq 1$$

y

$$W(z_1, z_2) = (z_1^{2k-1}, z_2^{2k} + 2z_1^{2k-2} z_2) \text{ con } k \geq 2$$

se tiene que $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ es una singularidad aislada de estos campos y además se sigue de los dos ejemplos anteriores, que se trata de singularidades del tipo no dicrítico.

Observación 2.13: 1) De la proposición anterior se tiene que el caso I estudiado páginas atras, se da cuando la singularidad es no dicrítica y el caso II cuando la singularidad es dicrítica.

2) $\widetilde{Z}$ sólo tiene singularidades en la carta (x, xt) (respectivamente en (uy, y)) si y sólo si el polinomio $b_\nu(1,t) - ta_\nu(1,t)$ (respectivamente $ub_\nu(u,1) - a_\nu(u,1)$) es de grado $\nu + 1$.

2.2. Multiplicidad de intersección

Definición 2.14: Sea $\overline{f}, \overline{g} \in \mathcal{O}_2$ con $\overline{g}$ irreducible, si $g \in \overline{g}$ y $f \in \overline{f}$ entonces existe $U \subseteq \mathbb{C}^2$ vecindad abierta del $0 \in \mathbb{C}^2$ tal que $f, g \in \mathcal{O}(U)$. Si $\gamma : D_\epsilon(0) \to U$ es una parametrización de Puiseux de g. ***La multiplicidad de intersección*** *de f y g en* $0 \in \mathbb{C}^2$ se define como el orden del 0 de la función $f \circ \gamma : D_\epsilon(0) \to \mathbb{C}$ lo cual será denotada $m_0(f, g)$.

Ejemplo 2.15: Sean $f, g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ definidas por $f(z_1, z_2) = z_1 + z_2^2$ y $g(z_1, z_2) = z_2^2 - z_1^{2n-1}, n \in \mathbb{N}$
sabemos que:

$$\begin{aligned} \gamma : \ \ & \mathbb{C} \ \to \mathbb{C}^2 \\ & T \ \to \gamma(T) = (T^2, T^{2n-1}) \end{aligned}$$

es una parametrización de Puiseux de g. De allí se tiene $(f \circ \gamma)(T) = f(T^2, T^{2n-1}) = T^2 + (T^{2n-1})^2 = T^2 + T^{4n-2}$, entonces $m_0(f, g) = 4n - 2$.

Ejemplo 2.16: Sean $f, g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ definidas por $f(z_1, z_2) = z_2$ y $g(z_1, z_2) = z_1^2 - z_2^5$
sabemos que:

$$\begin{aligned} \gamma : \ \ & \mathbb{C} \ \to \mathbb{C}^2 \\ & T \ \to \gamma(T) = (T^5, T^2) \end{aligned}$$

es una parametrización de Puiseux de g. De allí se tiene $(f \circ \gamma)(T) = f(T^5, T^2) = T^2$, entonces $m_0(f, g) = 2$.

Observación 2.17: 1) Por comodidad hemos definido la multiplicidad de intersección en el $0 \in \mathbb{C}^2$, pero podemos definir, de manera análoga la multiplicidad de intersección en cualquier punto p perteneciente a una de las curvas.

2) En lo sucesivo cuando escribimos $\overline{f}$ nos estamos refiriendo al germen de la función f y cuando escribimos f se entiende como un representate de $\overline{f}$.

Proposición 2.18. *Si $\overline{f}, \overline{g} \in \mathcal{O}_2$ con $\overline{g}$ irreducible. Si $\overline{f}$ es una unidad entonces $m_0(f, g) = 0$.*

Demostración: Como $g \in \overline{g}$ y $f \in \overline{f}$ entonces existe $U \subseteq \mathbb{C}^2$ vecindad abierta del $0 \in \mathbb{C}^2$ tal que $f, g \in \mathcal{O}(U)$. Desde que f es analítica en 0, tenemos $f(z_1, z_2) = \sum_{|Q|=0} a_Q z^Q$ y como $\overline{f}$ es una unidad por el Teorema 1.3.2 se tiene que $f(0,0) \neq 0$ entonces $a_{(0,0)} \neq 0$, si $\gamma(T)$ es una parametrización de Puiseux de g. Entonces

$$f(\gamma(T)) = \sum_{|Q|=0} a_Q(\gamma(T))^Q$$

del cual $f(\gamma(0)) = a_{(0,0)} \neq 0$, entonces $m_0(f, g) = 0$. □

Proposición 2.19. *Si $\overline{f_1}, \overline{f_2}, \overline{g} \in \mathcal{O}_2$ con $\overline{g}$ irreducible, se cumple que*

$$m_0(f_1.f_2, g) = m_0(f_1, g) + m_0(f_2, g)$$

Demostración: Como $g \in \overline{g}$, $f_1 \in \overline{f_1}$ y $f_2 \in \overline{f_2}$ entonces existe $U \subseteq \mathbb{C}^2$ vecindad abierta del $0 \in \mathbb{C}^2$ tal que $f_1, f_2, g \in \mathcal{O}(U)$. Si $\gamma(T)$ una parametrización de Puiseux de g. Entonces

$$(f_1.f_2)(\gamma(T)) = f_1(\gamma(T)).f_2(\gamma(T))$$

Por propiedades de orden de funciones analíticas de una variable compleja se tiene que

$$ord_0(f_1(\gamma(T)).f_2(\gamma(T))) = ord_0(f_1(\gamma(T))) + ord_0(f_2(\gamma(T)))$$

lo cual concluye la prueba. □

Hasta el momento hemos definido la multiplicidad de intersección de dos curvas, siendo una de ellas irreducibles. £Que pasa si $\overline{f}$ y $\overline{g}$ son reducibles?. Si $\overline{g}$ no es irreducible, por el Teorema 1,31 se tiene que $\mathcal{O}_2$ es un Domino de Factorización Única entonces podemos escribir $\overline{g} = \overline{u}.\overline{g_1}^{\alpha_1} \cdots \overline{g_r}^{\alpha_r}$, donde $\overline{u}, \overline{g}_1, \overline{g}_2, \cdots, \overline{g}_r \in \mathcal{O}_2$ y $\overline{g}_1, \overline{g}_2, \cdots, \overline{g}_r$ son irreducibles, $\overline{u}$ es una unidad y $\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in \mathbb{N}$. Gracias a las dos Proposiciones anteriores es natural definir lo siguiente.

Definición 2.20: Si $\overline{f}, \overline{g} \in \mathcal{O}_2$ con $\overline{g}$ reducible, entonces

$$m_0(f,g) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j m_0(f, g_j)$$

con $\overline{g} = \overline{u}.\overline{g_1}^{\alpha_1} \cdots \overline{g_r}^{\alpha_r}$, donde $\overline{g}_1, \overline{g}_2, \cdots, \overline{g}_r \in \mathcal{O}_2$ son irreducibles, $\overline{u} \in \mathcal{O}_2$ es una unidad y $\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in \mathbb{N}$.

Lema 2.21. *Sea $B_\epsilon(0) \subseteq \mathbb{C}^2$ una bola abierta de radio ϵ centrada en $0 \in \mathbb{C}^2$, con ϵ suficientemente pequeño de tal forma que $0 \in \mathbb{C}^2$ sea la única singularidad de $Z = (Z_1, Z_2)$ en $\overline{B}_\epsilon(0)$, entonces $m_0(Z_1, Z_2)$ es el número de soluciones de la ecuación $Z(z) - (\xi, 0) = (0,0)$, donde $\xi \neq 0$ es suficiente pequeño.*

Demostración: Sea $m_0(Z_1, Z_2) = \nu$, las soluciones de pueden ser vistas en los t-planos como soluciones de

$$(*) \begin{cases} Z_2(\gamma(T)) = 0 \\ Z_1(\gamma(T)) = \xi \end{cases}$$

donde γ es la parametrización de Puiseux de Z_2. Pero $Z_1(\gamma(T)) = T^\nu h(T)$ con $h(0) \neq 0$ entonces $T^\nu h(T) = \xi$, como $h(0) \neq 0$ entonces $\overline{h} \in \mathcal{O}_1$ es una unidad, de allí podemos considerar la ecuación $T^\nu h(T) = \xi$, sólo de la siguiente manera $T^\nu = \xi$, de donde se sigue que esta ecuación tiene ν racices, lo cual concluye la prueba. $\square$

Lema 2.22. *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^2$ abierto y $Z \in \mathcal{X}(U)$, si $0 \in U$ es un punto singular aislada de $Z = (Z_1, Z_2)$. Entonces $I_0(Z) = m_0(Z_1, Z_2)$.*

Demostración. Como $0 \in U$ es una singularidad aislada de Z entonces existe $B_\epsilon(0) \subseteq \mathbb{C}^2$ una bola abierta de radio ϵ centrada en $0 \in \mathbb{C}^2$, con ϵ suficientemente pequeño de tal forma que $0 \in \mathbb{C}^2$ sea la única singularidad de Z en $\overline{B}_\epsilon(0)$, haciendo $w_0 = (\xi, 0)$ donde $\xi \neq 0$ es suficiente pequeño, por el Lema 2,21 tenemos que $m_0(Z_1, Z_2)$ es el número de soluciones de la ecuación $Z(z) - w_0 = 0$. Por otro lado tenemos también por el Lema 1,49 que esta ecuación posee exactamente $I_0(Z)$ soluciones, de donde se sigue $I_0(Z) = m_0(Z_1, Z_2)$. $\square$

Teorema 2.23. *Sea A una matriz 2×2 cuyas entradas son germenes de funciones holomorfas en $0 \in \mathbb{C}^2$; i.e.,*

$$A(z) = \begin{pmatrix} \overline{f_{11}}(z) & \overline{f_{12}}(z) \\ \overline{f_{21}}(z) & \overline{f_{22}}(z) \end{pmatrix}$$

Si $det(A(0,0)) \neq 0$ y $\overline{f_1}, \overline{g_1}, \overline{f}, \overline{g} \in \mathcal{O}_2$ no unidades tales que

$$\begin{pmatrix} \overline{f_1} \\ \overline{g_1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \overline{f} \\ \overline{g} \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Entonces $m_0(f_1, g_1) = m_0(f, g)$.

Demostración: Como $f_{ij} \in \overline{f_{ij}}$ con $1 \leq i, j \leq 2$, $f_1 \in \overline{f_1}$, $g_1 \in \overline{g_1}$, $f \in \overline{f}$ y $g \in \overline{g}$ entonces existe $U \subseteq \mathbb{C}^2$ vecindad abierta del $0 \in \mathbb{C}^2$ tal que $f_{ij}, f_1, f, g_1, g \in \mathcal{O}(U)$; consideremos los siguientes campos vectoriales $Z, W \in \mathcal{X}(U)$ definidos por $Z(z) = (f(z), g(z))$ y $W(z) = (f_1(z), g_1(z))$, como $\overline{f_1}, \overline{f_2}, \overline{f}, \overline{g}$ son no unidades, se sigue del Teorema 1,24 que $f_1(0) = g_1(0) = f(0) = g(0) = 0$, entonces $0 \in \mathbb{C}^2$ es singularidad de Z y W. Por otro lado, como $det(A(0,0)) \neq 0$ de la continuidad se sigue que $A(z) \in GL(2, \mathbb{C})$ para z en una vecindad del $0 \in \mathbb{C}^2$ y por la condición (2,3), se tiene de la definición 1,50 que Z y W son A-equivalentes de allí por la Proposición 1,51 se tiene que $I_0(Z) = I_0(W)$, luego por el Lema 2,21 se sigue que $m_0(f, g) = m_0(f_1, g_1)$. $\square$

Corolário 2.24. $m_0(f, g) = m_0(g, f)$.

Demostración. Basta considerar la matriz

$$A(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

□

Teorema 2.25. *Si $\overline{f}, \overline{g} \in \mathcal{O}_2$ con $\overline{g}$ no unidad. Entonces*

$$m_0(f,g) = ord(f,0).ord(g,0) + \sum_{q \in E^{-1}(0)} m_q(\widetilde{f}, \widetilde{g}).$$

Demostración. Sin perdida de generalidad, podemos suponer que todos los puntos en el proyectivo donde $\widetilde{f}$ corta a $\widetilde{g}$ se encuentra en la carta $z_1 = x$, $z_2 = xt$.

CASO 1: $\overline{g}$ irreducible. Como $g \in \overline{g}$ y $f \in \overline{f}$ entonces existe $U \subseteq \mathbb{C}^2$ vecindad abierta del $0 \in \mathbb{C}^2$ tal que $f, g \in \mathcal{O}(U)$ desde que $\overline{g}$ es no unidad se tiene que $\overline{g}(0,0) = 0$ entonces $\nu = ord(g,0) > 0$, por el Lema 1,8 podemos suponer que g es regular con respecto a la variable z_2 y de orden ν y por el Teorema de Preparación de Weiestrass se tiene

$$\overline{g} = \underbrace{(z_2^{\nu} + \overline{a_1}(z_1) z_2^{\nu-1} + \cdots + \overline{a_\nu}(z_1))}_{\overline{h}} \overline{u}$$

donde $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_\nu} \in \mathcal{O}_1$ no unidades y $\overline{u} \in \mathcal{O}_2$ unidad, se sigue de las proposiciones 2,18 y 2,19 que

$$m_0(f,g) = m_0(f,hu) = m_0(f,h)$$

donde $h \in \overline{h}$ y $u \in \overline{u}$, del Teorema 1,33 tenemos que existe $\epsilon > 0$ y $\varphi : D_\epsilon(0) \to U$ tal que $h(T^\nu, \varphi(T)) = 0$, $\forall T \in D_\epsilon(0)$; i.e., $\gamma(T) = (T^\nu, \varphi(T))$ es una parametrización de Puiseux de h de allí

$$\begin{aligned} f(\gamma(T)) &= T^{m_0(f,h)} \phi(T); \qquad \phi(0) \neq 0 \\ &= T^{m_0(f,g)} \phi(T) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Por otro lado sabemos que:

$$\widetilde{h}(x,t) = \frac{(h \circ E)(x,t)}{x^{ord(h,0)}} = \frac{(h \circ E)(x,t)}{x^{\nu}}$$

pues $ord(g,0) = ord(h,0)$. Ahora definamos

$$\begin{aligned} \widetilde{\gamma}: \ D_\epsilon(0) & \to \mathbb{C}^2 \\ T & \to \widetilde{\gamma}(T) = (T^\nu, \frac{\varphi(T)}{T^\nu}) \end{aligned}$$

Se sigue que $\widetilde{\gamma}$ esta bien definida y es analítica en $D_\epsilon(0)$.

Afirmación: $\widetilde{\gamma}(T)$ es una parametrización de Puiseux de $\widetilde{h}$. En efecto

$$\begin{aligned} \widetilde{h}(\widetilde{\gamma}(T)) &= (h \circ E_1)(T^\nu, \frac{\varphi(T)}{T^\nu})/(T^\nu)^\nu \\ &= h(T^\nu, \varphi(T)) = h(\gamma(T)) = 0. \end{aligned}$$

lo cual prueba la afirmación.

Si $ord(f,0) = \mu$, de (2,4) se tiene

$$\begin{aligned} T^{m_0(f,g)}\phi(T) &= f(\gamma(T)) = (f \circ E)(T^\nu, \frac{\varphi(T)}{T^{\nu)}}) \\ &= T^{\mu\nu}.\frac{(f \circ E)(T^\nu, \frac{\varphi(T)}{T^\nu})}{(T^\nu)^\mu} \\ &= T^{\mu\nu}.\widetilde{f}(\widetilde{\gamma}(T)) \end{aligned}$$

desde que $\overline{g}$ es irreducible y estamos suponiendo que todos los puntos en el proyectivo donde $\widetilde{f}$ corta a $\widetilde{g}$ se encuentra en la carta $z_1 = x$, $z_2 = xt$, se sigue que este es un único punto donde $\widetilde{f}$ corta a $\widetilde{g}$ y se encuentra en el ."eje t", denotemos este punto con $q = (0, t_0)$. Por otro lado como $\phi(0) \neq 0$ y desde que $\widetilde{\gamma}(T)$ es una parametrización de Puiseux de $\widetilde{h}$ tenemos

$$T^{m_0(f,g)}\phi(T) = T^{\mu\nu}.T^{m_q(\widetilde{f},\widetilde{h})}.H(T) \qquad H(0) \neq 0$$

Del cual se tiene

$$m_0(f,g) = \mu\nu + m_q(\widetilde{f},\widetilde{h}) \tag{2.5}$$

y desde que $\overline{u} \in \mathcal{O}_2$ es una unidad y $\overline{g} = \overline{h}.\overline{u}$, se sigue que $m_q(\widetilde{f},\widetilde{h}) = m_q(\widetilde{f},\widetilde{g})$ y $\sum_{q \in E^{-1}(0)} m_q(\widetilde{f},\widetilde{g}) = m_q(\widetilde{f},\widetilde{g})$, pues $\widetilde{f}$ corta a $\widetilde{g}$ en único punto, de (2,5) y de estas últimas líneas se tiene

$$m_0(f,g) = ord(f,0).ord(g,0) + \sum_{q\in E^{-1}(0)} m_q(\widetilde{f},\widetilde{g})$$

CASO 2: $\overline{g}$ reducible. Por el Teorema 1,31 se tiene que $\mathcal{O}_2$ es un Domino de Factorización Única, entonces podemos escribir

$$\overline{g} = \overline{u}.\overline{g_1}^{\alpha_1}\cdots\overline{g_r}^{\alpha_r}$$

Donde $\overline{u}, \overline{g}_1, \overline{g}_2, \cdots, \overline{g}_r \in \mathcal{O}_2$ y $\overline{g}_1, \overline{g}_2, \cdots, \overline{g}_r$ son irreducibles, $\overline{u}$ es una unidad y $\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in \mathbb{N}$ y por la definición 2,20 tenemos

$$m_0(f,g) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j m_0(f,g_j) \tag{2.6}$$

Como $\overline{g}_j$ son irreducibles y denotemos por q_j al único punto en el proyectivo donde $\widetilde{f}$ corta a $\widetilde{g}_j$, entonces del caso 1 se tiene que

$$m_0(f,g_j) = ord(f,0).ord(g_j,0) + m_{q_j}(\widetilde{f},\widetilde{g}_j) \tag{2.7}$$

De (2,6) y (2,7) se sigue

$$m_0(f,g) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j m_0(f,g_j) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j ord(f,0).ord(g_j,0) + \sum_{j=1}^{r} \alpha_j m_{q_j}(\widetilde{f},\widetilde{g}_j) \tag{2.8}$$

como $\overline{g} = \overline{u}.\overline{g_1}^{\alpha_1}\cdots\overline{g_r}^{\alpha_r}$, tomando un representante de cada germen, se tiene $g = u.g_1^{\alpha_1}\cdots g_r^{\alpha_r}$ de donde se sigue que

$$ord(g,0) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j ord(g_j,0)$$

Por otro lado tenemos r puntos en el proyectivo donde $\widetilde{f}$ corta a $\widetilde{g}$ entonces

$$\sum_{q\in E^{-1}(0)} m_q(\widetilde{f},\widetilde{g}) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j m_{q_j}(\widetilde{f},\widetilde{g}_j)$$

De estas últimas líneas en (2,8) tenemos

$$m_0(f,g) = ord(f,0).ord(g,0) + \sum_{q\in E^{-1}(0)} m_q(\widetilde{f},\widetilde{g})$$

Así, se concluye con la prueba.

□

2.3. Número de Milnor de un campo vectorial

Definición 2.26: Sea $U \subseteq \mathbb{C}^2$ abierto y $Z \in \mathcal{X}(U)$, si $0 \in U$ es un punto singular de Z. Definamos

1) ***La Multiplicidad Algebraica de Z en 0***, el cual denotamos con $ord_0(Z)$ se define como $ord_0(Z) = \text{mín}\{ord(Z_1,0), ord(Z_2,0)\}$, donde $Z = (Z_1, Z_2)$.

2) ***El Número de Milnor de Z en 0***, denotado por $\mu_0(Z)$ se define como $\mu_0(Z) = m_0(Z_1, Z_2)$.

Ejemplo 2.27: Sea $Z(z_1, z_2) = (z_1 + z_2^2, z_2^2 - z_1^{2k-1})$ con $k \geq 1$, se tiene que $ord(Z_1, 0) = 1$ y $ord(Z_2, 0) = 2$ entonces $ord_0(Z) = 1$. Por otro lado del Ejemplo 2.2.1 se tiene que $m_0(Z_1, Z_2) = 4k - 2$ entonces $\mu_0(Z) = 4k - 2$.

Ejemplo 2.28: Sea $Z(z_1, z_2) = (z_2^2, z_1^2 - z_2^5)$ entonces se tiene que $ord(Z_1, 0) = ord(Z_2, 0) = 2$ de allí $ord_0(Z) = 1$. Por otro lado sabemos que:

$$\begin{aligned} \gamma : \ \ \mathbb{C} &\to \mathbb{C}^2 \\ T &\to \gamma(T) = (T^5, T^2) \end{aligned}$$

es una parametrización de Puiseux de Z_2 y $Z_1(\gamma(T)) = T^4$, entonces se sigue que $\mu_0(Z) = m_0(Z_1, Z_2) = 4$.

Observación 2.29: 1) $ord_0(Z) = 0 \Leftrightarrow 0 \notin Sing(Z)$.

2) Z tiene parte lineal nula si y sólo si $ord_0(Z) \geq 2$.

Hay una manera equivalente de definir el Número de Milnor para campos en $\mathbb{C}^n$, que resulta ser más algebraica. En dimensión 2, esta definición es de la siguiente manera.

$$\mu_0(Z) = dim_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_2/\langle\overline{Z_1}, \overline{Z_2}\rangle$$

Donde $\langle\overline{Z_1}, \overline{Z_2}\rangle$ es el ideal de $\mathcal{O}_2$ generado por $\overline{Z_1}, \overline{Z_2}$. A definición 2,26 es más geométrica e intuitiva desde que estamos trabajando con campos en $\mathbb{C}^2$.

Proposición 2.30. *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^2$ abierto, $Z \in \mathcal{X}(U)$ y $0 \in U$ es un punto singular de Z, entonces $ord_0(Z) \leq \mu_0(Z)$.*

Demostración: Supongamos que $ord_0(Z) = ord(Z_2, 0) \leq ord(Z_1, 0)$ y que Z_2 no es identicamente nulo, entonces $\nu = ord(Z_2, 0) > 0$. Considerando el germen de la función Z_2, del Lema 1,8 y de la definición 1,26 $\overline{Z_2}$ es regular de orden ν en $\overline{z_2}$ por el Teorema 1,24 se tiene que $\overline{z_2} = \overline{h}\overline{u}$, donde $\overline{h} \in \mathcal{O}_1$ es un polinomio de Weiertrass de grado ν en z_2 y $\overline{u} \in \mathcal{O}_2$ es una unidad, se sigue de las Proposiciónes 2,18 y 2,19 que

$$\begin{aligned} \mu_0(Z) &= m_0(Z_1, Z_2) = m_0(Z_1, hu) \\ &= m_0(Z_1, h) \end{aligned} \tag{2.9}$$

Por el Teorema 1,33, $\gamma(T) = (T^\nu, \varphi(T))$ es una parametrización de Puiseux de h. Por otro lado, si $\mu = ord(Z_1)$ podemos poner $Z_1(z_1, z_2) = \sum_{i=\mu} b_i(z_1, z_2)$, donde $b_i(z_1, z_2)$ es un polinómio homogéneo de grado i en las variables z_1 y z_2.

$$Z_1(\gamma(T)) = b_\mu(T^\nu, \varphi(T)) + \sum_{i=\mu+1} b_i(T^\nu, \varphi(T))$$

Como $b_\mu(z_1, z_2)$ es polinomio de homogéneo de grado μ, entonces

$$\underbrace{ord_0(Z_1(\gamma(T)))}_{m_0(Z_1,h)} \geq ord(Z_1, 0) \geq \underbrace{ord(Z_2, 0)}_{ord_0(Z)}$$

De 2,9 se sigue que $ord_0(Z) \leq \mu_0(Z)$. □

Teorema 2.31. *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^2$ abierto, si $0 \in U$ es una singularidad aislada no dicrítica de $Z \in \mathcal{X}(U)$ y $\nu = ord_0(Z)$ entonces*

$$\mu_0(Z) = \nu^2 - (\nu + 1) + \sum_{q \in E^{-1}(0)} \mu_q(\widetilde{Z})$$

Demostración: Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $ord(Z_1, 0) = ord(Z_2, 0) = \nu$ $(Z = (Z_1, Z_2))$ y que todas las singularidades de $\widetilde{Z}$ se encuentran en la carta (x, t) del blow-up. Por el Teorema 2,25

$$\begin{aligned} \mu_0(Z) &= m_0(Z_1, Z_2) = ord(Z_1, 0).ord(Z_2, 0) + \sum_{q \in E^{-1}(0)} m_q(\widetilde{Z_1}, \widetilde{Z_2}) \\ &= \nu^2 + \sum_{q \in E^{-1}(0)} m_q(\widetilde{Z_1}, \widetilde{Z_2}) \qquad (*) \end{aligned} \tag{2.10}$$

Como 0 es una singularidad no dicrítica, tenemos

$$\widetilde{Z}(x, t) = \frac{E_1 Z(x, t)}{x^{\nu - 1}} = (x\widetilde{Z_1}(x, t), \widetilde{Z_2}(x, t) - t\widetilde{Z_1}(x, t))$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \mu_{(0,t_0)}(\widetilde{Z}) &= m_{(0,t_0)}(x\widetilde{Z_1}(x, t), \widetilde{Z_2}(x, t) - t\widetilde{Z_1}(x, t)) \\ &= m_{(0,t_0)}(x, \widetilde{Z_2}(x, t) - t\widetilde{Z_1}(x, t)) + m_{(0,t_0)}(\widetilde{Z_1}(x, t), \widetilde{Z_2}(x, t) \\ &\quad -t\widetilde{Z_1}(x, t)) \end{aligned} \tag{2.11}$$

Consideremos

$$\begin{aligned} \gamma : \ D_\epsilon(0) &\to U \\ T &\to \gamma(T) = (0, T + t_0) \end{aligned}$$

se observa que γ es una parametrización de Puiseux de $f(x, t) = x$ en $(0, t_0)$. Luego si denotamos $g(x, t) = \widetilde{Z_2}(x, t) - t\widetilde{Z_1}(x, t)$, tenemos

$$g(\gamma(T)) = g(0, T + t_0) = \widetilde{Z_2}(0, T + t_0) - (T + t_0)\widetilde{Z_1}(0, T + t_0) \tag{2.12}$$

Por otro lado recordemos que:

$$g(x, t) = \widetilde{Z_2}(x, t) - t\widetilde{Z_1}(x, t) = b_\nu(1, t) - ta_\nu(1, t) + x[b_{\nu+1}(1, t) - ta_\nu(1, t)] + x^2[\cdots$$

así

$$\begin{aligned} g(0, t) &= b_\nu(1, t) - ta_\nu(1, t) \\ &= c(t - t_1)^{r_1} \cdots (t - t_m)^{r_m} \end{aligned} \tag{2.13}$$

donde $t_1, \cdots, t_m \in \mathbb{C}$ distintos dos a dos, y $r_1 + \cdots + r_m = \nu + 1$. De 2,12 y 2,13

$$g(\gamma(T)) = g(0, T + t_0) = c(T + t_0 - t_1)^{r_1} \cdots (T + t_0 - t_m)^{r_m}$$

Luego, si $t_0 \notin \{t_1, \cdots, t_m\}$, entonces

$$m_{(0,t_0)}(x, \widetilde{Z_2}(x,t) - t\widetilde{Z_1}(x,t)) = m_{(0,t_0)}(f,g) = 0$$

y si $t_0 = t_j$, entonces

$$g(\gamma(T)) = c(T + t_0 - t_1)^{r_1} \cdots T^{r_j} \cdots (T + t_0 - t_m)^{r_m} \tag{2.14}$$

de donde se sigue que

$$m_{(0,t_j)}(x, \widetilde{Z_2}(x,t) - t\widetilde{Z_1}(x,t)) = m_{(0,t_j)}(f,g) = r_j. \tag{2.15}$$

Como

$$\begin{pmatrix} \widetilde{Z_1} \\ \widetilde{Z_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \widetilde{Z_1} \\ \widetilde{Z_2} - t\widetilde{Z_1} \end{pmatrix}$$

sigue del Teorema 2,23

$$m_{(0,t_0)}(\widetilde{Z_1}, \widetilde{Z_2} - t\widetilde{Z_1}) = m_{(0,t_0)}(\widetilde{Z_1}, \widetilde{Z_2}) \tag{2.16}$$

De (2,11), (2,16), (2,15) y (2,14) se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{q \in E^{-1}(0)} \mu_q(\widetilde{Z}) &= \sum_{t_0 \in \mathbb{C}} \mu_{0,t_0}(\widetilde{Z}) \\
&= \sum_{t_0 \in \mathbb{C}} m_{(0,t_0)}(x, \widetilde{Z_2} - t\widetilde{Z_1}) + \sum_{t_0 \in \mathbb{C}} m_{(0,t_0)}(\widetilde{Z_1}, \widetilde{Z_2} - t\widetilde{Z_1}) \\
&= r_1 + \cdots + r_m + \sum_{t_0 \in \mathbb{C}} m_{(0,t_0)}(\widetilde{Z_1}, \widetilde{Z_2}) \\
&= \nu + 1 + \sum_{q \in E^{-1}(0)} m_q(\widetilde{Z_1}, \widetilde{Z_2}) \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

De (2,17) en (2,10) tenemos,

$$\mu_0(z) = \nu^2 - (\nu + 1) + \sum_{q\in E^{-1}(0)} \mu_q(\widetilde{Z}).$$

□

Teorema 2.32. *Sean $U \subseteq \mathbb{C}^2$ abierto, si $0 \in U$ es una singularidad aislada dicrítica de $Z \in \mathcal{X}(U)$ y $\nu = ord_0(Z)$, entonces*

$$\mu_0(Z) = \nu^2 + \nu - 1 + \sum_{q\in E^{-1}(0)} \mu_q(\widetilde{Z})$$

Demostración: Sin pérdida de generalidad podemos asumir que todas las singularidades de $\widetilde{Z}$ se encuentran en la carta (x,t) del blow-up y también que $ord(Z_1,0) = ord(Z_2,0) = \nu$ $(Z = (Z_1, Z_2))$. Como 0 es una singularidad dicrítica, tenemos

$$\widetilde{Z}(x,t) = \tfrac{E_1 Z(x,t)}{x^\nu} = (\widetilde{Z_1}(x,t), \tfrac{\widetilde{Z_2}(x,t) - t\widetilde{Z_1}(x,t)}{x})$$

Si $q \in Sing(\widetilde{Z})$

$$\mu_q(\widetilde{Z}) = m_q(\widetilde{Z_1}(x,t), \frac{\widetilde{Z_2}(x,t) - t\widetilde{Z_1}(x,t)}{x}) \tag{2.18}$$

como $ord(Z_1,0) = ord(Z_2,0) = \nu$

$$Z_1(z_1,z_2) = \textstyle\sum_{k\geq\nu} a_k(z_1,z_2) \text{ y } Z_2(z_1,z_2) = \sum_{k\geq\nu} b_k(z_1,z_2)$$

donde a_k y b_k son polinomios homogéneos de grado k. Sea

$$P(z_1,z_2) = z_1 Z_2(z_1,z_2) - z_2 Z_1(z_1,z_2) \tag{2.19}$$

así,

$$P(z_1,z_2) = (z_1 b_\nu(z_1,z_2) - z_2 a_\nu(z_1,z_2)) + (z_1 b_{\nu+1}(z_1,z_2) - z_2 a_{\nu+1}(z_1,z_2)) + \cdots$$

desde que 0 es una singularidad dicrítica se tiene que $z_1 b_\nu(z_1,z_2) - z_2 a_\nu(z_1,z_2) = 0$, luego $ord_0(P) = \nu + 2$. De 2,19 y de esto último se sigue que

$$Z_1(0, z_2) = z_2^{\nu+1} + \cdots \tag{2.20}$$

también se tiene

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}(x,t) &= \frac{P(E_1(x,t))}{x^{\nu+2}} = \frac{P(x,xt)}{x^{\nu+2}} = \frac{xZ_2(x,xt) - xtZ_1(x,xt)}{x^{\nu+2}} \\
&= \frac{1}{x}\left(\frac{Z_2(E_1(x,t))}{x^{\nu}} - t\frac{Z_1(E_1(x,t))}{x^{\nu}}\right) \\
&= \frac{\widetilde{Z_2}(x,t) - t\widetilde{Z_1}(x,t)}{x} \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

De (2,21) en (2,18)

$$\mu_q(\widetilde{Z}) = m_q(\widetilde{Z_1}(x,t), \widetilde{P}(x,t)) \tag{2.22}$$

sigue del Teorema 2,25

$$m_0(Z_1, P) = ord(Z_1, 0).ord(Z_2, 0) + \sum_{q \in E^{-1}(0)} m_q(\widetilde{Z_1}, \widetilde{P})$$

De (2,22)

$$m_0(Z_1, P) = \nu(\nu + 2) + \sum_{q \in E^{-1}(0)} \mu_q(\widetilde{Z}). \tag{2.23}$$

Por otro lado

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ z_1Z_2 - z_2Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_1 \\ z_1Z_2 \end{pmatrix}$$

y por el Teorema 2,24

$$\begin{aligned}
m_0(Z_1, z_1Z_2 - z_2Z_1) &= m_0(Z_1, z_1Z_2) \\
&= m_0(Z_1, z_1) + m_0(Z_1, Z_2) \\
&= m_0(Z_1, z_1) + \mu_0(Z) \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

Si hacemos $f(z_1, z_2) = Z_1 = \sum_{k\geq\nu} a_k(z_1, z_2)$ y $g(z_1, z_2) = z_1$. Así del Teorema 1,33, $\gamma(T) = (0, T)$ es una parametrización de Puiseux de g. De (2,20) se tiene

$$f(\gamma(T)) = Z_1(\gamma(T)) = Z_1(0, T) = T^{\nu+1} + \cdots$$

Así

$$m_0(Z_1, z_1) = m_0(f, g) = ord_0(f\gamma(T)) = \nu + 1 + \mu_0(Z) \tag{2.25}$$

logo, de (2,24) y (2,25)

$$\mu_0(Z_1, P) = m_0(Z_1, z_1Z_2 - z_2Z_1) = \nu + 1 + \mu_0(Z) \tag{2.26}$$

así, de (2,23) y (2,26) tenemos

$$\mu_0(Z) = \nu^2 + \nu - 1 + \sum_{q\in E^{-1}(0)} \mu_q(\widetilde{Z})$$

□

2.4. Teorema de Seidenberg

Antes de enunciar el teorema de Seidenberg veamos dos ejemplos.

Ejemplo 2.33: Sea $Z(z_1, z_2) = (z_1z_2 + z_1^2, z_2^2)$; se observa que $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ es una singularidad aislada de Z; y también este campo vectorial tiene parte lineal nula. Apliquemos la explosión en $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$. Trabajando en la carta (x, t) como en la sección 2,1 tenemos

$$\begin{aligned} E_1^*Z(x,t) &= (Z_1(E_1(x,t)), \frac{Z_2(E_1(x,t)) - tZ_1(E_1(x,t))}{x}) \\ &= (x^2t + x^2, -tx) \end{aligned}$$

De allí

$$\widetilde{Z^1}(x, t) = (xt + x, -t)$$

y se observa que este nuevo campo vectorial tiene parte lineal no nula. Análogamente si trabajamos en la otra carta (u, y) se obtiene

$$\widetilde{Z^2}(u, y) = (u^2, y)$$

Y también se observa que este nuevo campo vectorial tiene parte lineal no nula.

Ejemplo 2.34: Sea $Z(z_1, z_2) = (z_1z_2 + z_1^3, -z_2^2)$; al igual que el ejemplo anterior este campo vectorial presenta parte lineal nula y al $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ como una singularidad aislada. Realicemos la explosión en $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$. Trabajando en las cartas (x, t) y (u, y) se obtiene

$$\widetilde{Z^1}(x, t) = (x^2t + x^2, -2t^2 - tx) \text{ y } \widetilde{Z^2}(u, y) = (2u + u^3y, -y)$$

Se sigue que $\widetilde{Z^1}$ presenta parte lineal nula y al $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ como única singularidad; por otro lado $\widetilde{Z^2}$ presenta parte lineal no nula. Apliquemos la explosión en la singularidad de $\widetilde{Z^1}$ y para no introducir más variables hagamos $x = z_1$, $t = z_2$ y $W = \widetilde{Z^1}$ entonces se sigue que $W(z_1, z_2) = (z_1z_2 + z_2^2, -2z_2^2 - z_1z_2)$. Trabajando en la carta (x, t) y (u, y) tenemos

$$\widetilde{W^1}(x, t) = (xt + xt^2, -t - 3t^2 - t^3) \text{ y } \widetilde{W^2}(u, y) = (1 + 3u + u^2, -2y - uy)$$

Del cual se sigue que $\widetilde{W^1}$ y $\widetilde{W^2}$ presentan parte lineal no nula.

En el ejemplo 2,33 solo basto un blow-up para obtener transformados estrictos con parte lineal no nula, pero en el ejemplo 2,34 fue necesario dos blow-ups. Una pregunta natural que surge a partir de estos dos ejemplos es la siguiente si $U \subseteq \mathbb{C}^2$ abierto y $0 \in U$ singularidad aislada de $Z \in \mathcal{X}(U)$ tal que Z tiene parte lineal nula.

Pregunta 2.35: ¿Será que después de un número finito de blow-up's todos los transformados estrictos que van apareciendo tengan parte lineal no nula?.

El siguiente resultado de A. Seidenberg responde positivamente a esta interrogante.

Teorema 2.36 (Seidenberg, [10]). *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^2$ abierto, $0 \in U$ singularidad aislada de $Z \in \mathcal{X}(U)$ tal que $ord_0(Z) \geq 2$. Después de un número finito de blow-ups con centro en las singularidades de los transformados estrictos que van apareciendo, todos los transformados estrictos tienen multiplicidad algebraica igual a 1; i.e., que todos los transformados estrictos que van apareciendo tienen parte lineal no nula.*

Demostración: De los Teoremas 2,31 y 2,32 se tiene que

$$\mu_q(\widetilde{Z}) < \mu_p(Z), \forall q \in E^{-1}(p) \tag{2.27}$$

y por la Proposición 2,30

$$ord_p(Z) \leq \mu_p(Z), \forall p \in Sing(Z) \tag{2.28}$$

Supongamos que existe un número infinito de blow-ups con centro en las singularidades de los transformados estrictos que van apareciendo que tienen multiplicidad algebraica mayor que 1; i.e.,

$$\exists p_1 \in E^{-1}(0) \text{ tal que } ord_{p_1}(Z^{(1)}) \geq 2, \text{ donde } Z^{(1)} = \widetilde{Z}$$

$$\exists p_2 \in E^{-1}(p_1) \text{ tal que } ord_{p_2}(Z^{(2)}) \geq 2, \text{ donde } Z^{(2)} = \widetilde{Z^{(1)}}$$

$$\exists p_3 \in E^{-1}(p_2) \text{ tal que } ord_{p_3}(Z^{(3)}) \geq 2 \text{ donde } Z^{(3)} = \widetilde{Z^{(2)}}$$

$$\vdots$$

$$\exists p_k \in E^{-1}(p_{k-1}) \text{ tal que } ord_{p_k}(Z^{(k)}) \geq 2 \text{ donde } Z^{(k)} = \widetilde{Z^{(k-1)}}$$

$$\vdots$$

Por (2,27) tenemos

$$\mu_{p_1}(Z^{(1)}) < \mu_0(Z), \mu_{p_2}(Z^{(2)}) < \mu_{p_1}(Z^{(1)}), \cdots, \mu_{p_k}(Z^{(k)}) < \mu_{p_{k-1}}(Z^{(k-1)})$$

de estas desigualdades y de (2,28) se tiene

$$\mu_0(Z) > \mu_{p_1}(Z^{(1)}) > \mu_{p_2}(Z^{(2)}) > \mu_{p_2}(Z^{(2)}) > \cdots > \mu_{p_k}(Z^k) > \cdots \geq 2$$

como $\mu_{p_k}(Z^{(k)}) \in \mathbb{N}$, entonces debemos tener que $\mu_0(Z) = +\infty$ el cual es una contradicción. Luego lo supuesto es falso, lo cual concluye la prueba. $\square$

Capítulo 3

Reducción de Singularidades

En este capítulo, presentamos el resultado principal de este trabajo. Estudiamos sobre la reducción de singularidades de campos vectoriales analíticos en $\mathbb{C}^2$ siguiendo los trabajos de C. Camacho [1], y J. Mattei, R. Moussu [7]. El teorema a probar afirma que los campos vectoriales analíticos en $\mathbb{C}^2$ presentan sólo singularidades simples después de un número finito de blow-ups.

3.1. Singularidades simples:

Definición 3.1: Sean $U \subseteq \mathbb{C}^2$ abierto y $Z \in \mathcal{X}(U)$, $p \in Sing(Z)$ es llamada ***Singularidad Simple*** si los autovalores λ_1, λ_2 de la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial Z_1}{\partial z_1}(p) & \frac{\partial Z_1}{\partial z_2}(p) \\ \frac{\partial Z_2}{\partial z_1}(p) & \frac{\partial Z_2}{\partial z_2}(p) \end{pmatrix}$$

donde $Z = (Z_1, Z_2)$, satisfacen

i) $\lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_2$ y $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{N}, \lambda_2/\lambda_1 \notin \mathbb{N}$

ó

ii) $\lambda_1 \neq 0 = \lambda_2$ ó $\lambda_2 \neq 0 = \lambda_1$

Ejemplo 3.2: Sea $Z(z_1, z_2) = (2z_1 + z_1 z_2, z_2^2)$ se observa que $(0,0) \in \mathbb{C}^2$ es una singularidad de Zy se tiene que

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial Z_1}{\partial z_1}(0,0) & \dfrac{\partial Z_1}{\partial z_2}(0,0) \\ \dfrac{\partial Z_2}{\partial z_1}(0,0) & \dfrac{\partial Z_2}{\partial z_2}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y los autovalores de esta matriz son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 0$. Luego, se sigue que $(0,0) \in \mathbb{C}^2$ es una singularidad simple de Z.

Ejemplo 3.3: Sea $Z(z_1, z_2) = (2z_1 + z_2 + z_1 z_2, 2z_2 + z_2^2)$ se observa que $(0,0) \in \mathbb{C}^2$ es una singularidad de Z que no es simple, pues

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial Z_1}{\partial z_1}(0,0) & \dfrac{\partial Z_1}{\partial z_2}(0,0) \\ \dfrac{\partial Z_2}{\partial z_1}(0,0) & \dfrac{\partial Z_2}{\partial z_2}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y sus autovalores son $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.

Haciendo un blow-up en la singularidad del ejemplo 3,3 y trabajando en las cartas (x, t), (u, y) obtenemos los transformados estrictos siguientes:

$$\widetilde{Z^1}(x,t) = (2x + xt + x^2 t, -t^2) \text{ y } \widetilde{Z^2}(u,y) = (1 - uy, 2y + 2y^2)$$

Se sigue que $\widetilde{Z^1}$ es como en el ejemplo 3,2, es decir la única singularidad de $\widetilde{Z^1}$ es $(0,0) \in \mathbb{C}^2$ y es simple; mientras que $\widetilde{Z^2}$ no presenta singularidades.

3.2. Teorema principal

En el ejemplo 3,3 el campo vectorial presentaba una singularidad no simple, y haciendo un blow-up conseguimos que uno de los transformados estrictos presentase singularidades simples y el otro transformado estricto no presentase singularidades. Entonces una pregunta que resulta natural es la siguiente:

Pregunta 3.4: ¿Podemos hacer que una singularidad que no es simple se transforme en simple después de un número finito de blow-ups?.

El siguiente resultado responde positivamente a la pregunta.

Teorema 3.5 (Teorema Principal)**.** *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^2$ abierto, $0 \in U$ singularidad aislada de $Z \in \mathcal{X}(U)$. Después de un número finito de blow-ups con centro en las singularidades de los transformados estrictos que van apareciendo, tienen todas las singularidades simples.*

Demostración: Por el Teorema 2,33 existe un número finito de blow-ups de tal manera que todos los transformados estrictos tienen parte lineal no nula. Así, bastara estudiar los campos vectoriales que tienen parte lineal no nula y singularidad aislada en $0 \in \mathbb{C}$.

Por un cambio lineal de coordenadas (Forma Canónica de Jordan) podemos suponer que $DZ(0,0)$ es como en los tres casos siguientes que presentaremos. Sean λ_1, λ_2 son los autovalores de $DZ(0,0)$.

CASO I: Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$. De esto se presenta dos subcasos:

1.a) Si $DZ(0,0) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, entonces se tiene que:

$$Z(z_1, z_2) = (\lambda z_1 + z_2 + \sum_{k\geq 2} a_k(z_1, z_2), \lambda z_2 + \sum_{k\geq 2} b_k(z_1, z_2))$$

donde a_k, b_k son polinomios homogéneos de grado k. Denotando

$$a_1(z_1, z_2) = \lambda z_1 + z_2 \text{ y } b_k(z_1, z_2) = \lambda z_2.$$

Entonces

$$z_1 b_1(z_1, z_2) - z_2 a_1(z_1, z_2) = \lambda z_1 z_2 - z_2(\lambda z_1 + z_2) = -z_2^2 \neq 0$$

sigue de la Proposición 2,11 que $(0,0)$ es una singularidad no dicrítica. Trabajando en la carta (x,t) tenemos

$$\begin{aligned} \widetilde{Z^1}(x,t) &= \frac{E_1^*(Z)(x,t)}{x^{1-1}} \\ &= (x\sum_{k\geq 1} x^{k-1} a_k(1,t), \sum_{k\geq 1} x^{k-1}(b_k(1,t) - t a_k(1,t))) \\ &= (\lambda x + xt + \sum_{k\geq 2} x^{k-1} a_k(1,t)), -t^2 + \sum_{k\geq 2} x^{k-1}(b_k(1,t) - t a_k(1,t)) \end{aligned}$$

de donde se sigue que la única singularidad de $\widetilde{Z^1}$ es $(0,0)$ y además

$$D\widetilde{Z^1}(0,0) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ b_2(1,0) & 0 \end{pmatrix}$$

lo cual implica que la única singularidad de $\widetilde{Z^1}$ es una singularidad simple.

Ahora trabajando en la otra carta (u,y) tenemos

$$\begin{aligned}
\widetilde{Z^2}(u,y) &= \frac{E_2^*(Z)(u,y)}{y^{1-1}} \\
&= (\sum_{k\geq 1} y^{k-1}(a_k(u,1) - ub_k(u,1)), y\sum_{k\geq 1} y^{k-1}b_k(u,1)) \\
&= (1 + \sum_{k\geq 2} y^{k-1}(a_k(u,1) - ub_k(u,1)), \lambda y + y\sum_{k\geq 2} y^{k-1}b_k(u,1))
\end{aligned}$$

así, $\widetilde{Z^2}$ no tiene singularidades, pues $\widetilde{Z^2}(u,0) = (1,0)$.

1.b) Si $DZ(0,0) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, entonces se tiene que

$$Z(z_1,z_2) = (\lambda z_1 + \sum_{k\geq 2} a_k(z_1,z_2), \lambda z_2 + \sum_{k\geq 2} b_k(z_1,z_2))$$

donde a_k, b_k son polinomios homogéneos de grado k. Denotando

$$a_1(z_1,z_2) = \lambda z_1 \text{ y } b_k(z_1,z_2) = \lambda z_2.$$

Se sigue que

$$z_1b_1(z_1,z_2) - z_2a_1(z_1,z_2) = \lambda z_1z_2 - \lambda z_1z_2 \equiv 0$$

por la Proposición 2,11 se tiene que $(0,0)$ es una singularidad dicrítica. Trabajando en la carta (x,t) tenemos

$$\begin{aligned}
\widetilde{Z^1}(x,t) &= \frac{E_1^*(Z)(x,t)}{x^1} \\
&= (\sum_{k\geq 1} \underbrace{x^{k-1}a_k(1,t)}_{A_k(x,t)}, \sum_{k\geq 2} \underbrace{x^{k-2}(b_k(1,t) - ta_k(1,t))}_{B_k(x,t)}) \\
&= (\lambda + \sum_{k\geq 2} A_k(x,t), (b_2(1,t) - ta_2(1,t)) + \sum_{k\geq 3} B_k(x,t))
\end{aligned}$$

desde que $\lambda \neq 0$, se sigue que $\widetilde{Z^1}$ no presenta singularidades.

Ahora trabajando en la otra carta (u, y)

$$\begin{aligned}
\widetilde{Z^2}(u,y) &= \frac{E_2^*(Z)(u,y)}{y^1} \\
&= (\sum_{k\geq 1} y^{k-2}(a_k(u,1) - ub_k(u,1)), \sum_{k\geq 1} y^{k-1}b_k(u,1)) \\
&= (\sum_{k\geq 2} y^{k-2}(a_k(u,1) - ub_k(u,1)), b_1(u,1) + \sum_{k\geq 2} y^{k-1}b_k(u,1)) \\
&= (\sum_{k\geq 2} y^{k-2}(a_k(u,1) - ub_k(u,1)), \lambda + \sum_{k\geq 2} y^{k-1}b_k(u,1))
\end{aligned}$$

desde que $\lambda \neq 0$, se sigue también que $\widetilde{Z^2}$ no presenta singularidades.

CASO II: Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_2$ y $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = n \geq 2$, entonces

$$DZ(0,0) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

podemos asumir que $\lambda_1 = 1$ y que $\lambda_2 = n$. Así,

$$Z(z_1, z_2) = (z_1 + \sum_{k\geq 2} a_k(z_1, z_2), nz_2 + \sum_{k\geq 2} b_k(z_1, z_2))$$

donde a_k, b_k son polinomios homogéneos de grado k. Denotando

$$a_1(z_1, z_2) = z_1 \text{ y } b_k(z_1, z_2) = nz_2.$$

se sigue que

$$z_1 b_1(z_1, z_2) - z_2 a_1(z_1, z_2) = nz_1 z_2 - z_1 z_2 \equiv 0$$

por la Proposición 2,11 se tiene que $(0, 0)$ es una singularidad no dicrítica. Trabajando en la carta (u, y)

$$\begin{aligned}
\widetilde{Z^2}(u,y) &= \frac{E_2^*(Z)(u,y)}{y^{1-1}} \\
&= (\sum_{k\geq 1} \underbrace{y^{k-1}(a_k(u,1) - ub_k(u,1))}_{C_k(u,y)}, y\sum_{k\geq 1} \underbrace{y^{k-1}b_k(u,1)}_{D_k(u,y)}) \\
&= (a_1(u,1) - ub_1(u,1) + \sum_{k\geq 2} C_k(u,y), yb_1(u,1) + y\sum_{k\geq 2} D_k(u,y)) \\
&= ((u - un) + \sum_{k\geq 2} y^{k-1}C_k(u,y), yn + y\sum_{k\geq 2} D_k(u,y))
\end{aligned}$$

de donde se sigue que la única singularidad de $\widetilde{Z^2}$ es $(0,0)$ y además

$$D\widetilde{Z^2}(0,0) = \begin{pmatrix} 1-n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$$

lo cual implica que la única singularidad de $\widetilde{Z^2}$ es una singularidad simple.

Ahora trabajando en la otra carta (x,t), tenemos

$$\begin{aligned}
\widetilde{Z^1}(x,t) &= \frac{E_1^*(Z)(x,t)}{x^{1-1}} \\
&= (x\sum_{k\geq 1}\underbrace{x^{k-1}a_k(1,t)}_{A_k(x,t)}, \sum_{k\geq 1}\underbrace{x^{k-1}(b_k(1,t)-ta_k(1,t))}_{B_k(x,t)}) \\
&= (xa_1(1,t)+x\sum_{k\geq 2}A_k(x,t), b_1(1,t)-ta_1(1,t)+\sum_{k\geq 2}B_k(x,t)) \\
&= (x+x\sum_{k\geq 2}A_k(x,t), (n-1)t+\sum_{k\geq 2}B_k(x,t))
\end{aligned}$$

de donde se sigue que la única singularidad de $\widetilde{Z^2}$ es $(0,0)$ y además

$$D\widetilde{Z^1}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n-1 \end{pmatrix}$$

pero esta singularidad no es simple, sin embargo tiene la forma inicial, entonces prosiguiendo con los blow-ups, después de $n-1$ blow-ups obtendremos

$$D\widetilde{Z^{n-1}}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

lo que se reduce al caso I(exactamente al subcaso 1.b) que ya fue estudiado.

CASO III: Si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, entonces $DZ(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ así,

$$Z(z_1,z_2) = (z_2 + \sum_{k\geq 2}a_k(z_1,z_2), \sum_{k\geq 2}b_k(z_1,z_2))$$

donde a_k, b_k son polinomios homogéneos de grado k, denotando

$$a_1(z_1,z_2) = z_2 \text{ y } b_k(z_1,z_2) = 0.$$

Se sigue que

$$z_1b_1(z_1,z_2) - z_2a_1(z_1,z_2) = -z_2^2 \equiv 0$$

Por la Proposición 2,11 se tiene que $(0,0)$ es una singularidad no dicrítica.

Trabajando en la carta (u,y) obtenemos

$$\begin{aligned}
\widetilde{Z^2}(u,y) &= E_2^*(Z)(u,y) \\
&= (\sum_{k\geq 1} \underbrace{y^{k-1}(a_k(u,1) - ub_k(u,1))}_{C_k(u,y)}, y\sum_{k\geq 2} \underbrace{y^{k-1}b_k(u,1)}_{D_k(u,y)}) \\
&= (a_1(u,1) - ub_1(u,1) + \sum_{k\geq 2} C_k(u,y), yb_1(u,1) + y\sum_{k\geq 2} D_k(u,y)) \\
&= (1 + \sum_{k\geq 2} C_k(u,y), y\sum_{k\geq 2} D_k(u,y)
\end{aligned}$$

de donde se sigue que este nuevo campo vectorial no tiene singularidades.

Ahora trabajando en la carta (x,t), tenemos

$$\begin{aligned}
\widetilde{Z^1}(x,t) &= E_1^*(Z)(x,t) \\
&= (x\sum_{k\geq 1} \underbrace{x^{k-1}a_k(1,t)}_{A_k(x,t)}, \sum_{k\geq 1} \underbrace{x^{k-1}(b_k(1,t) - ta_k(1,t))}_{B_k(x,t)}) \\
&= (xa_1(1,t) + x\sum_{k\geq 2} A_k(x,t), (b_1(1,t) - ta_1(1,t)) + \sum_{k\geq 2} B_k(x,t)) \\
&= (xt + x\sum_{k\geq 2} A_k(x,t), -t^2 + \sum_{k\geq 2} B_k(x,t)) \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

y se observa de inmediato que la única singularidad de $\widetilde{Z^1}$ es $(0,0)$.

Si hacemos $\widetilde{Z^1} = (\widetilde{Z_1^1}, \widetilde{Z_2^1})$ se tiene que

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \widetilde{Z_1^1}}{\partial x}(0,0) & \dfrac{\partial \widetilde{Z_1^1}}{\partial t}(0,0) \\ \dfrac{\partial Z_2^1}{\partial x}(0,0) & \dfrac{Z_2^1}{\partial t}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde se sigue que esta singularidad no es simple. Continuamos haciendo un blow-up en este nuevo punto singular, para no introducir nuevas variables hagamos $x = z_1, t = z_2$ y $W = \widetilde{Z^1}$, la ecuación (3,1) se expresa de la siguiente manera

$$W(z_1,z_2) = (z_1z_2 + z_1\sum_{k\geq 2} z_1^{k-1}a_k(1,z_2), -z_2^2 + \sum_{k\geq 2} z_1^{k-1}(b_k(1,z_2) - z_2a_k(1,z_2)))$$

si hacemos

$$A(z_1,z_2)=\sum_{k\geq 2} z_1^{k-2}a_k(1,z_2) \text{ y}$$
$$B(z_1,z_2)=\sum_{k\geq 2} z_1^{k-2}(b_k(1,z_2)-z_2a_k(1,z_2))$$

entonces

$$W(z_1,z_2)=(z_1(z_2+z_1A(z_1,z_2)),-z_2^2+z_1B(z_1,z_2)).$$

Haciendo un blow-up en $(0,0)$.

3.a) Si $B(0,0)=b_0\neq 0$. Trabajando en la carta (x,t)

$$\begin{aligned} E_1^*W(x,t) &= (E_1^{'})^{-1}(x,t).W(x,xt) \\ &= (x(xt+xA(x,t)),-t(xt+xA(x,t))-xt^2+B(x,xt)) \end{aligned}$$

desde que $B(0,0)\neq 0$, tenemos $B(z_1,z_2)=b_0+B_1(z_1,z_2)$ con $B_1(0,0)=0$. Así,

$$\begin{aligned} \widetilde{W^1}(x,t) &= E_1^*W(x,t) \\ &= (x(xt+xA(x,t)),-t(xt+xA(x,t))-xt^2+b_0 \\ &\quad +B_1(x,xt)) \end{aligned}$$

y se observa que $\widetilde{W^1}$ no tiene singularidades.

Ahora trabajando en la carta (u,y) tenemos

$$\begin{aligned} E_2^*W(u,y) &= (E_2^{'})^{-1}(u,y).W(uy,y) \\ &= (u(y+uyA(uy,y))+uy-u^2B(uy,y),-y^2 \\ &+ uyB(uy,y)) \end{aligned}$$

De esto se sigue

$$\begin{aligned} \widetilde{W^2}(u,y) &= (u(2y-u(b_2(1,y)-ya_2(1,y))+A_2(u,y)),y(-y \\ &\quad +u(b_2(1,y)-ya_2(1,y))+B_2(u,y))) \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde $ord_0(A_2)=ord_0(B_2)=2$ y $A_2(0,0)=B_2(0,0)=0$. Así, se sigue que $\widetilde{W^2}$ tiene como única singularidad a $(0,0)$ de multiplicidad 2 y esta singularidad aún no es simple. Entonces continuamos con los blow-ups en $(0,0)$, nuevamente para no introducir mas variables hagamos $X=\widetilde{W^2}$ y $u=z_1, y=z_2$ así de la ecuación (3,2) se tiene

$$X(z_1,z_2)=(z_1(2z_2-z_1(b_2(1,z_2)-z_2a_2(1,z_2))+A_2(z_1,z_2)),z_2(-z_2+z_1(b_2(1,z_2)-z_2a_2(1,z_2))+B_2(z_1,z_2)))$$

Además podemos considerar que

$$\begin{aligned} X(z_1,z_2) &= (z_1(2z_2-z_1(b_2(1,z_2)-z_2a_2(1,z_2)))),z_2(-z_2+z_1(b_2(1,z_2)\\ &\quad -z_2a_2(1,z_2)))). \end{aligned}$$

Trabajando en las carta (x,t) tenemos

$$\begin{aligned} E_1^*X(x,t) &= (E_1')^{-1}(x,t).X(x,xt)\\ &= (x^2[2t-(b_2(1,xt)-xta_2(1,xt))],-tx[3t-2(b_2(1,xt)\\ &\quad -xta_2(1,xt))]) \end{aligned}$$

de donde $\widetilde{X^1}=\dfrac{E_1^*X(x,t)}{x}$. Luego,

$$\widetilde{X^1}=(x[2t-(b_2(1,xt)-xta_2(1,xt))],-t[3t-2(b_2(1,xt)-xta_2(1,xt))])$$

las singularidades de $\widetilde{X^1}$ son $(0,t_1)$ y $(0,t_2)$ donde t_1,t_2 son raíces de la ecuación $t(3t-2b_0)=0$. Así, $(0,0)$ y $(0,\frac{2b_0}{3})$ son las singularidades de $\widetilde{X^1}$ y más aún estas singularidades son simples, pues si hacemos $\widetilde{X^1}=(\widetilde{X_1^1},\widetilde{X_2^1})$ tenemos

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\widetilde{X_1^1}}{\partial x}(0,0) & \dfrac{\partial\widetilde{x_1^1}}{\partial t}(0,0)\\ \dfrac{\partial X_2^1}{\partial x}(0,0) & \dfrac{X_2^1}{\partial t}(0,0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -b_0 & 0\\ 0 & 2b_0 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

y

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\widetilde{X_1^1}}{\partial x}(0,\dfrac{2b_0}{3}) & \dfrac{\partial\widetilde{x_1^1}}{\partial t}(0,\dfrac{2b_0}{3})\\ \dfrac{\partial X_2^1}{\partial x}(0,\dfrac{2b_0}{3}) & \dfrac{X_2^1}{\partial t}(0,\dfrac{2b_0}{3}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{b_0}{3} & 0\\ m & -2b_0 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

y se observa de inmediato que si λ_1, λ_2 son los autovalores de las matrices (3,3) y (3,4) se tiene $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{N}$ y $\lambda_2/\lambda_1 \notin \mathbb{N}$, lo cual prueba que $(0,0)$ y $(0, \frac{2b_0}{3})$ son singularidades simples.

Ahora trabajaremos en la carta (u, y)

$$\begin{aligned} E_2^* X(u,y) &= (E_2^{'})^{-1}(u,y).X(uy,y) \\ &= (3uy - 2u^2 y(b_2(1,y) - ya_2(1,y)), -y^2 + uy^2(b_2(1,y) \\ &- \ ya_2(1,y))) \end{aligned}$$

de donde $\widetilde{X^2} = \dfrac{E_1^* X(u,y)}{y}$, luego

$$\widetilde{X^2}(u,y) = (3u - 2u^2(b_2(1,y) - ya_2(1,y)), -y + uy(b_2(1,y) - ya_2(1,y))).$$

Del cual se sigue que las singularidades de $\widetilde{X^2}$ son $(u_1, 0)$ y $(u_2, 0)$ donde u_1, u_2 son las raíces de la ecuación $3u - 2u^2 b_0 = 0$, entonces las singularidades de $\widetilde{X^2}$ son $(0,0)$ y $(0, \frac{3}{2b_0})$, de forma análoga que el anterior se prueba que estas dos singularidades son simples.

3.b) Si $B(0,0) = 0$. Como

$$W(z_1, z_2) = (z_1(z_2 + z_1 A(z_1, z_2)), -z_2^2 + z_1 B(z_1, z_2))$$

donde

$A(z_1, z_2) = \sum_{k \geq 2} z_1^{k-2} a_k(1, z_2)$ y $B(z_1, z_2) = \sum_{k \geq 2} z_1^{k-2}(b_k(1, z_2) - z_2 a_k(1, z_2))$.

Y podemos hacer

$$A(z_1, z_2) = a_2(z_1, z_2) = \beta_1 + \beta_1 z_2 + \beta_3 z_2^2$$

y

$$\begin{aligned} B(z_1, z_2) &= b_2(1, z_2) - z_2 a_2(1, z_2) \\ &= \gamma_1 z_2 + \gamma_2 z_2^2 - z_2(\beta_1 + \beta_1 z_2 + \beta_3 z_2^2) \\ &= (\gamma_1 - \beta_1) z_2 + (\gamma_2 - \beta_2) z_2^2 - \beta_3 z_2^3. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} W(z_1,z_2) &= (z_1(z_2+\beta_1+\beta_2 z_2+\beta_3 z_2^2), -z_2^2+(\gamma_1-\beta_1)z_1z_2 \\ &+ (\gamma_2-\beta_2)z_1z_2^2-\beta_3 z_1 z_2^3). \end{aligned}$$

Haciendo un blow-up en $(0,0)$. Trabajando en la carta (x,t)

$$\begin{aligned} E_1^*W(x,t) &= (E_1^{'})^{-1}(x,t).W(x,xt) \\ &= (x[xt+\beta_1 x+\beta_2 x^2 t+\beta_3 x^3 t^2], -t[xt+\beta_1 x+\beta_2 x^2 t \\ &\quad +\beta_3 x^3 t^2]-xt^2+(\gamma_1-\beta_1)xt+(\gamma_2-\beta_2)x^2t^2 \\ &\quad -\beta_3 x^3 t^3) \end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned} \widetilde{W^1}(x,t) &= \frac{E_1^*(W)(x,t)}{x} \\ &= (xt+\beta_1 x+\beta_2 x^2 t+\beta_3 x^3 t^2, -2t^2+(\gamma_1-2\beta_1)t+(\gamma_2 \\ &\quad -\beta_2)xt^2-2\beta_3 x^2 t^3) \end{aligned}$$

y las singularidades de $\widetilde{W^1}$ son $(0,t_1)$ y $(0,t_2)$, donde t_1, t_2 son las raíces de la ecuación $-2t^2+(\gamma_1-2\beta_1)t=0$. Así, las singularidades son $(0,0)$ y $(0,\frac{\gamma_1-2\beta_1}{2})$.

Luego tenemos 3 subcasos. Haciendo $\widetilde{W^1}=(\widetilde{W_1^1},\widetilde{W_2^1})$, tenemos

3.b.1) Si $\gamma_1\neq 2\beta_1$ y $\gamma_1\neq 0\neq\beta_1$, entonces

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\widetilde{W_1^1}}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial\widetilde{W_1^1}}{\partial t}(0,0) \\ \frac{\partial\widetilde{W_2^1}}{\partial x}(0,0) & \frac{\widetilde{W_2^1}}{\partial t}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \gamma_1-2\beta_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\widetilde{W_1^1}}{\partial x}(0,\frac{\gamma_1-2\beta_1}{2}) & \frac{\partial\widetilde{W_1^1}}{\partial t}(0,\frac{\gamma_1-2\beta_1}{2}) \\ \frac{\partial\widetilde{W_2^1}}{\partial x}(0,\frac{\gamma_1-2\beta_1}{2}) & \frac{\widetilde{W_2^1}}{\partial t}(0,\frac{\gamma_1-2\beta_1}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1}{2} & 0 \\ m & -\gamma_1+2\beta_1 \end{pmatrix}$$

y se observa de que estas dos matrices se reducen al caso II.

3.b.2) Si $\gamma_1 = 2\beta_1$ y $\gamma_1 \neq 0$, entonces

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \widetilde{W_1^1}}{\partial x}(0,0) & \dfrac{\partial \widetilde{W_1^1}}{\partial t}(0,0) \\ \dfrac{\partial \widetilde{W_2^1}}{\partial x}(0,0) & \dfrac{\widetilde{W_2^1}}{\partial t}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

y

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \widetilde{W_1^1}}{\partial x}(0, \dfrac{\gamma_1 - 2\beta_1}{2}) & \dfrac{\partial \widetilde{W_1^1}}{\partial t}(0, \dfrac{\gamma_1 - 2\beta_1}{2}) \\ \dfrac{\partial \widetilde{W_2^1}}{\partial x}(0, \dfrac{\gamma_1 - 2\beta_1}{2}) & \dfrac{\widetilde{W_2^1}}{\partial t}(0, \dfrac{\gamma_1 - 2\beta_1}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1}{2} & 0 \\ m & 0 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

los autovalores de (3,5) y (3,6) satisfacen la definición de singularidad Simple, por tanto en este caso se trata de singularidades simples.

3.b.3) Si $\gamma_1 = 2\beta_1$ y $\gamma_1 = 0$, entonces

$$\widetilde{W^1}(x,t) = (xt + \beta_2 x^2 t + \beta_3 x^3 t^2, -2t^2 + (\gamma_2 - \beta_2)xt^2 - 2\beta_3 x^2 t^3)$$

y se observa que $\widetilde{W^1}$ es como en el caso (3.a) que ya fue estudiado.

Análogamente se estudia W en la carta (u, y).

Así de los tres casos estudiados se tiene que, después de un número finito de blow-ups con centro en las singularidades, se logra que todas las singularidades que van apareciendo sean simples, lo cual concluye la prueba. $\square$

Bibliografía

[1] Camacho, C.; *Lectures on Complex 2-Dimensional Dynamical Systems*, ICTP, Trieste, 1988.

[2] Conway, J.; *Functions of one Complex Variables*, P, Springer-Verlag, New york, 1995.

[3] Camacho, C.; Sad,P, *Puntos Singulares de Equações Diferenciais Analíticas*, 16ž Coloquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1987.

[4] Dulac, H.;*Recherches sur les points singuliries des équations différentiables*, Journal de l'Ecole Polytechnique 2 sec 9, 1-125, 1912.

[5] Forster, O.; *Lectures on Riemann Surfaces*, Graduate texts in mathematics, 81, Springer-Verlag, Heidelberg, 1977.

[6] Gunning, R.; Rossi, H.;*Analytic Functions of Several Complex Variables*, Prentice Hall, New York, 1965.

[7] Mattei, J.; Moussu, R.; *Holonomie et Intégrales Premièrs*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 13, 469-523, 1980.

[8] Poincaré, H.; *Sur les propriétés des fonctiones définies par les équationes aux différences partielles*, Thèse, Paris, 1879.

[9] Lima, E.; *Variedades Diferenciáveis*, Textos de IMPA, Rio de Janeiro, 2007.

[10] Seidenberg, A.; *Reduction of singularities of the differentiable equation $Ady = Bdx$*, Amer. J. Math. 90 (1968), pp. 248-269.

[11] Siegel, C.L.; *Über die Normal form analyticher differentialgleichungen in der nähe einer gleichgewichtslösung*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys. 21-30, 1952.

[12] Soares, M.; *Lectures on Point Residues*, Monografías del IMCA Nž28, Lima-Perú, 2002.

[13] Soares, M.; Mol, R.; *Índices de Campos Holomorfos e Aplicações*, 23ž Coloquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 2001.

[14] Sotomayor, J.; *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Proyecto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.