UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

FACULTAD DE LETRAS Y CIENCIAS HUMANAS

UNIDAD DE POSGRADO

La evolución de la paradoja de las clases propuesta por Bertrand Russell

TESIS

Para optar el Grado Académico de Magíster en Filosofía con mención en Epistemología

AUTOR

Rafael Félix Mora Ramirez

Lima – Perú

2016

Dedico este trabajo a todos aquellos hombres que, como escribió Leibniz sobre Berkeley, aspiran a ser conocidos por sus paradojas.

La lógica no puede proporcionarnos el alimento que sustenta nuestra vida intelectual. Este debe provenir de nuestros problemas y de nuestros conocimientos reales. Pero la lógica tampoco puede dejar de ser la fuerza motriz que impulsa a la investigación. Es semejante al ácido clorhídrico, que ayuda a nuestro estómago a digerir los alimentos. Constituye el antiséptico de la vida intelectual que nos previene de ser envenenados por los alimentos. Las impresiones que tenemos en el entendimiento serán confusas a menos que las ordenemos conforme a un principio lógico determinado.

MORRIS RAPHAEL COHEN

ÍNDICE DE CONTENIDO

Pág.

INTRODUCCIÓN

Para empezar este trabajo, será menester explicar lo que queremos dar a entender con 'evolución'. Este término alude a un desarrollo progresivo y escalonado de las cosas o de los organismos. Se puede comprender que una especie tropical evolucione considerando tales o cuales circunstancias, pero lo que no es muy común es sostener que las cosas pueden evolucionar. Sin embargo, esto último también sucede. Por ejemplo, los celulares han pasado por una serie de cambios progresivos al igual que las representaciones del dinero. Pero, además, también evolucionan los conceptos. Por ejemplo, los conceptos de 'dialéctica' o de 'ser' han ido adquiriendo diversos sentidos a lo largo del tiempo. Asimismo, en este trabajo se considera que el concepto de 'paradoja de Russell' ha ido desarrollándose desde su formulación pasando por su proceso de popularización hasta su posterior discusión en relación a la filosofía de la matemática.

En este sentido, esta tesis intenta rastrear el desarrollo que tuvo la paradoja de Russell desde que fue formulada por su autor hasta el impacto que causó dentro del problema de los fundamentos de la matemática. En principio, sabemos que esta paradoja (llamada "la paradoja de las clases") fue esgrimida por Russell contra el sistema de Frege. Es decir, asumió algunas ideas previas que la sustentaron. Después de indicar sus principales influencias, nosotros buscamos explicar cómo surgió para, finalmente, entender los diversos intentos que se propusieron para resolverla o eliminarla.

Para satisfacer el primer punto, nos es necesario establecer cuáles fueron las fuentes de las que bebió Russell para formular su paradoja. Alguna información tenemos, por sus propias declaraciones, de que se inspiró en un sesudo estudio de la paradoja de Cantor, la misma que versa sobre el máximo cardinal.

Sin embargo, no hemos encontrado una pormenorizada exposición de cómo particularmente Russell derivó su paradoja a partir de la de Cantor. Esto requiere previamente que distingamos entre el 'contexto de justificación' y el 'contexto de descubrimiento' planteado por Hans Reichenbach. Este es un tema algo espinoso pues, sencillamente, algunos pensadores sostienen que la creatividad científica es algo inescrutable a la investigación ('contexto de descubrimiento'). Sucede, pues, que algunos hallazgos científicos han sido descubiertos en sueños de cansancio, o algunos otros procesos irracionales difíciles de especificar.

Así pues, después de esclarecer el descubrimiento de la paradoja russelliana, nos proponemos evaluar las distintas propuestas de solución dadas a la misma tanto las del propio Russell como las de otros interesados en la misma a raíz de sus implicancias dentro del problema de los fundamentos de la matemática.

Entonces, lo que nos proponemos investigar, principalmente, es la siguiente cuestión:

¿Cómo así, partiendo de las investigaciones de Frege y Cantor, Bertrand Russell logró formular la paradoja de las clases?

Adicionalmente, en relación con esta pesquisa nosotros buscamos resolver las siguientes interrogantes:

1) ¿Qué otras paradojas están relacionadas con el origen y la difusión de la paradoja de las clases?

2) ¿Cuál fue el impacto que causó esta paradoja en relación a los fundamentos de la matemática?

3) ¿Cómo han pretendido enfrentar esta paradoja los investigadores?

Este trabajo tiene tres partes. En la primera, se pretende rastrear las posibles fuentes de las que se nutrió Russell para poder elaborar su conocida paradoja. Consideramos que han sido tres los ingredientes que forman parte de las bases que dieron origen a la paradoja de las clases. En primer lugar, la teoría conjuntista de Georg Cantor gracias a la cual pudo conocer la teoría de números ordinales así como algunos problemas fundamentales respecto a la noción de infinito en matemáticas. En segundo lugar, la fundamentación lógica de la aritmética de Gottlob Frege que le permitió reforzar sus convicciones sobre la postura que asume que la lógica es el fundamento de las matemáticas así como desarrollar estrategias para hacerle frente a críticas como la que dio lugar a la paradoja de las clases en el sistema fregeano. Asimismo, consideramos que Russell conoció la definición de número que Frege elaboró en base a conceptos puramente lógicos, pero sobre todo tuvo que haber examinado cuidadosamente la 'Ley V' o 'Axioma de Comprehensión' del sistema fregeano. Finalmente, en tercer lugar, consideramos que Russell tuvo que haber sido consciente del desarrollo histórico de la paradoja de *El Mentiroso*, la misma que tiene diferentes versiones registradas ya por la tradición filosófica. En este sentido, pasamos revista a la paradoja de Eubúlides, la del abogado, la de Buridán, la del puente y la del Quijote.

En la segunda parte, en base a la distinción entre contextos de descubrimiento y justificación, buscamos especificar cómo ocurrió el hallazgo de la paradoja de Russell. Esta tarea implica dar cuenta de aquellas actividades que Russell realizó y que lo llevaron a formular su propia paradoja. Así, constatamos que Russell estaba intentando solucionar la paradoja de Cantor sobre la cardinalidad del conjunto potencia del conjunto universal. Asimismo, también le hacía frente a la paradoja de Burali-Forti sobre el mayor número ordinal. Sin embargo, a pesar de que Russell no tuvo éxito intentando solucionar estas paradojas matemáticas, consiguió diseñar una paradoja más simple y preocupante: la paradoja de las clases. Enseguida, damos a conocer las tesis planteadas por Kleene, Kilmister y la nuestra acerca de cómo probablemente Russell procedió a descubrir su paradoja. Después de esclarecer la manera cómo fue descubierta la paradoja russelliana, procedemos a clasificar diversas paradojas relacionadas con ella: las paradojas matemáticas (como la de Cantor, la de Burali-Forti, la de Richard y la de Berry), la familia oracional de la paradoja de Russell (como la de las clases, la de las propiedades y la de las relaciones) y la familia argumental de la misma (como la del barbero, la de los alcaldes, la de los catálogos y la de Grelling).

En la parte tercera, se busca exponer el impacto que la paradoja de Russell causó en la discusión acerca de los fundamentos de la matemática. Sucede que la teoría de conjuntos era considerada la base de toda la matemática. Por ello, causó mucha extrañeza que se encontraran paradojas en esta fundamental teoría, siendo la paradoja formulada por Russell la más problemática y representativa. Ante esto, las diversas respuestas no se hicieron esperar. El propio Russell, dentro del logicismo, propone la teoría de los tipos lógicos para limitar los modos de construir fórmulas bien formadas. El axiomatismo de Zermelo pretende limitar los conjuntos mediante axiomas que imposibiliten la aparición de paradojas. El intuicionismo de Brouwer rechaza la lógica clásica y el infinito actual y postula una nueva lógica y una nueva matemática. El formalismo de Hilbert pretende utilizar el concepto de demostraciones absolutas, sin contradicciones y buscaba lograr este tipo de demostraciones construyendo un sistema de signos formales, vacíos de significados, con reglas manifiestas de cómo manipular estos signos. Por otro lado, Gödel quien, con sus teoremas de incompletud, derrumba los objetivos formalistas y afirma, dentro del platonismo, que los matemáticos con toda su maquinaria operativa y simbólica tan sólo pueden hacer teorías matemáticas subjetivas con una alta aproximación a las verdades matemáticas objetivas, pero sin llegar a conocer estas en su totalidad. Finalmente, el dialeteísmo de Priest asume que existen ciertas contradicciones verdaderas, o *dialetheias*, es decir, sostiene que existen proposiciones verdaderas cuyas negaciones son también verdaderas. Así, las paradojas de la teoría de conjuntos constituyen pruebas para el dialeteísmo. Las soluciones que tradicionalmente se han dado consisten en restringir el esquema de comprensión. Pero, un punto de vista dialeteico no altera el esquema de comprensión y, a la vez, permite la existencia de contradicciones evitando la explosión para que sólo algunas fórmulas sean verdaderas. Con esto se consigue que no haya trivialidad.

En el desarrollo y despliegue de la presente investigación se recurrirá al empleo de la lógica moderna propuesta por Gottlob Frege, mejorada a nivel simbólico por Bertrand Russell y Alfred North Whitehead y sometida a revisión por Ludwig Wittgenstein. Es preciso indicar que más que lógica pura lo que se intenta es elaborar una reflexión en el marco de la filosofía de la lógica, que es una disciplina dedicada a la investigación de los fundamentos de la lógica. Esto no evita, obviamente, que se tenga que hacer uso de toda una desarrollada maquinaria lógica que involucre el uso de la lógica de primer grado así como de otras lógicas no clásicas, como la paraconsistente. Asimismo, en cuanto se toque el tema de las soluciones dadas a la paradoja de Russell será inevitable apoyarnos en la filosofía de la matemática para poder tener un mejor control de las propuestas en relación al problema de la fundamentación de las matemáticas. En este campo resaltan: Hilbert, Zermelo, el propio Russell, Brouwer, etc.

Los temas desarrollados en el trabajo que estamos presentando son propios de la filosofía del lenguaje formal. Podríamos encajarlo dentro de lo que se puede denominar 'filosofía de las ciencias formales', específicamente, filosofía de la lógica y de la matemática. Esto, sin embargo, debe ser enfocado desde la orientación de la filosofía analítica que considera al lenguaje como una herramienta de análisis sumamente valiosa. Además, la filosofía analítica es la única forma de hacer filosofía que garantiza un análisis exhaustivo de la lógica misma, al ser sus principales fundadores (Frege, Russell y Wittgenstein) reconocidos lógicos de elevado calibre. Entonces, al igual que la filosofía analítica tendremos por principales virtudes al rigor, la exactitud y la claridad para poder establecer una argumentación no solo válida sino también sólida.

Las siguientes páginas contienen el resultado de nuestra investigación. Invitamos al lector a revisar críticamente este producto para lograr mejorar alguna falencia que se nos pudiera haber escapado. Tanto los aciertos como los desaciertos de este trabajo son plena responsabilidad del tesista que tuvo a su cargo la responsabilidad de controlar los límites de su investigación.

CAPÍTULO I

FUENTES DE LA PARADOJA DE RUSSELL

Vino a Arquímedes un joven deseoso de saber;
Iníciame, le dijo, en ese arte divina
Que tan magníficos frutos dio a nuestra patria,
Y protegió los muros ciudadanos frente a los sambuca[1].
¡Divina dices que es el arte! Y lo es, replicó el sabio,
Mas ya lo era, hijo mío, antes de servir al estado,
Si quieres frutos, puede dártelos también una mortal;
Quien aspira a la diosa, no busque en ella a la doncella.

SCHILLER

Nuestra investigación inicia considerando las posibles fuentes, influencias o antecedentes de la paradoja de Russell. Si bien es cierto que, como sostiene Sorensen (2007: 251-254), Russell tuvo al principio cierta influencia hegeliana, también es cierto que supo deshacerse de la misma al leer al propio Hegel y no a sus comentadores. Pero, una cosa quedó de tal influencia: su afán por ver en la matemática puros procesos dialécticos y contradictorios. Esto se nota en la obra *Ensayo sobre los fundamentos de la geometría* (1897) en la cual Russell afirma encontrar contradicciones relativas a conceptos geométricos básicos. Digamos que esta impronta filosófica juega un importante papel en el pensamiento de Russell sobre las paradojas, pero también hay otras fuentes de las que bebió.

Específicamente, nosotros planteamos que Russell se nutrió básicamente de tres fuentes: la teoría de conjuntos de Cantor, la fundamentación lógica de la aritmética de Frege

[1] *Sambuca* fue un arma de asedio naval inventada por Heráclides de Tarento. Su nombre significa "arpa", por su semejanza a un arpa triangular de cuatro cuerdas llamada 'σαμβύκη' en griego.

y la paradoja de *El Mentiroso*. Las dos primeras fuentes son casi una convención sobre el tema[2]. Nuestro primer aporte en este trabajo de tesis consiste en considerar que Russell, con todo su amplio conocimiento de filosofía y lógica, debía haber conocido la paradoja de *El Mentiroso*. Asimismo, nos atrevemos a sostener que Russell, de alguna manera, buscaba reproducir esta paradoja en el sistema de Frege lo cual, como sabemos, consiguió con resultados muy productivos para la reflexión.

1. 1. La teoría conjuntista de George Cantor [3]

Según Cantor, un conjunto es una colección de un todo de determinados y distintos objetos de nuestra percepción o nuestro pensamiento, llamados los elementos del conjunto. Un conjunto se dice que contiene sus elementos (o miembros), y de estos se dice, a su vez, que pertenecen al conjunto. Un subconjunto de un conjunto dado S es aquel cuyos elementos son todos elementos de S, y de él puede decirse que es una parte de S.

Dos conjuntos S y T se dicen equivalentes si se da entre ellos una correspondencia biunívoca, esto es, si hay alguna relación tal que mediante ella cada elemento de S se halle

[2] Frápolli y Romero han dado algunos detalles del origen conjuntista de la paradoja russelliana (1998: 81). También, Stephen Cole Kleene en *Introducción a la matemática* nos indica cómo derivar la paradoja de las clases a partir de la paradoja de Cantor de modo más directo (1974: 44, 25). Michael Clark en "El gran libro de las paradojas" relaciona a la paradoja de Cantor con la de Russell (2007: 220-225). Javier Castro Albano estudia las influencias que tuvo Russell tanto de Cantor como de Frege (Barrio, 2015). Sebástian Salgado Gonzáles (2011) también asegura que algunos conceptos utilizados en la teoría de Cantor lograron armonizar con las pretensiones del proyecto logicista fregeano dando esto como resultado la propuesta de Russel. Ferreirós (2000) igualmente encuentra que Russell consideró tanto a Cantor como a Frege para realizar su propia teoría.

[3] Esta parte se basa en Kneale (1980: 405- 409) y Cantor (2011: 835-908).

correlacionado con uno y solo uno de los elementos de T y cada elemento de T se halle correlacionado con uno y solo uno de los elementos de S.

La potencia o número cardinal de un conjunto podrá entonces ser introducida como aquello que este posee en común con todos los conjuntos equivalentes pero no así con otros. Según Cantor, se trata del concepto general que con ayuda de la actividad de nuestra inteligencia resulta de un conjunto cuando hacemos abstracción de sus diversos elementos así como del orden en que éstos vienen dados. Este nuevo concepto puede representarse por $\overline{\overline{S}}$, donde los dos trazos horizontales dan idea de la doble abstracción a la que S es sometido en relación tanto a sus elementos como al orden de los mismos. Si S es finito, $\overline{\overline{S}}$ será un número natural. [4]

Enseguida, conoceremos ciertas operaciones con conjuntos a partir de los cuales se podrían construir nuevos conjuntos.

1. S+T es la suma lógica (o la unión o asociación) de S y T. Este contiene todas aquellas cosas que son, a la vez, elementos de S o de T y ninguna otra.

2. ST, llamado el producto interno (o la intersección o confluencia) de S y T, contiene todas aquellas cosas que son, a la vez, elementos de S y de T y ninguna otra.

[4] $\overline{\overline{S}}$ también puede ser simbolizado como Card(S).

3. $S \times T$, llamado el producto externo (o cruzado o cartesiano) de S y T, es aquel conjunto cuyos elementos son todos los posibles pares que contienen un elemento de S y un elemento de T.

4. S^T llamado a veces la inserción de S en T, es el conjunto de todas las posibles ordenaciones (o funciones monovalentes) por medio de las cuales cabe asignar elementos de S a todos los diversos elementos de T cuando

a) T no es nulo,

b) se concede la posibilidad de asignar un elemento de S a más de un elemento de T, y

c) dos ordenaciones se consideran diferentes si hay al menos un elemento de T al que asignan diferentes elementos de S.

El conjunto potencia de S resulta ser un conjunto constituido por inserción. Este se trata del conjunto de todos los subconjuntos de S y se le representa a menudo por "Pot(S)".

Cantor sostiene que Pot(S) posee un número cardinal más alto que S, cualquiera que S sea; y esta proposición tiene tal importancia en su teoría que se la ha distinguido con el nombre de "teorema de Cantor".

Como los símbolos usados por Cantor sugieren, las operaciones por medio de las cuales se constituyen nuevos conjuntos a partir de los originariamente dados tienen por cometido preparar el camino para una aritmética general de los números cardinales. Así, si S y T son mutuamente excluyentes (o disjuntos):

$\overline{\overline{S + T}} = \overline{\overline{S}} + \overline{\overline{T}}$, donde la segunda intervención del signo "+" expresa la adición de números naturales. Análogamente

$\overline{\overline{S \times T}} = \overline{\overline{S}} \times \overline{\overline{T}}$

y

$\overline{\overline{S^{T}}} = \overline{\overline{S}}^{\overline{\overline{T}}}$.

Todas las operaciones planteadas sobre entes finitos no ocasionarán problemas. El problema surge cuando S es infinito. Un conjunto es infinito, si puede hacerse corresponder biunívocamente con un subconjunto propio (es decir, con un subconjunto que no sea idéntico al conjunto mismo). Así como los conjuntos finitos pueden ser comparados entre sí por referencia a sus números cardinales, de la misma manera podrán serlo los conjuntos infinitos.

1. 1. 1. Teoría de números ordinales

Los números ordinales miden cierto tamaño de la misma forma en que los números de atención de una tienda miden la longitud de la fila de sus clientes, pero no proporcionan información acerca de la distancia que media entre los miembros de la secuencia. Cuando a tres clientes se les asigna el primero, el segundo y el tercer turno, la secuencia está bien ordenada porque hay un primer miembro y una única posición posterior en la fila. Sin embargo, al extender el concepto de "orden" de modo adecuado a cantidades infinitas, hay que guardarse de no exigir un miembro final de la secuencia. Por ejemplo,

$\langle 0, 1, 2, 3, \ldots \rangle$

está bien ordenada.

Pero,

<…, -2, -1, 0, 1, 2, …>

no está bien ordenada pues no tiene un primer miembro. Asimismo, la sucesión de números racionales no negativos

<0, 1, 2, …, -3, -2, -1>

no se encuentra bien ordenada porque no establece qué conjunto sucede a todos los números naturales. No obstante, una sucesión que agrupa a todos los pares antes que los impares

<0, 2, 4, …, 1, 3, 5, …>

está bien ordenada. Asimismo, la sucesión acelerada tan popular en las paradojas de Zenón

<1/2, 3/4, 7/8, …, 1>

está bien ordenada. (Sorensen, 2007: 258-259)

Ahora, mostraremos que para todo conjunto de números de orden se da uno que no está contenido en él, que es mayor que todos los comprendidos en él. Caracterizaremos los números ordinales en términos de la teoría de conjuntos, utilizando conjuntos representativos que no son arbitrarios, sino que se generan a partir de un primer elemento de modo iterativo, es decir, por una ley de formación de una sucesión que involucra a los elementos precedentes. En particular, se seleccionarán los conjuntos que se construyan iterativamente a partir del conjunto vacío. Veremos cómo ese aparentemente inocente conjunto vacío desarrolla un interesante papel en esta circunstancial teoría de ordinales. Por construcción, el primer ordinal es el conjunto vacío; el segundo, el conjunto que contiene al conjunto vacío; el tercero, el conjunto que incluye a los dos anteriores; el cuarto, el conjunto que incluye a los tres anteriores y así sucesivamente.

ϕ

$\{\phi\}$

$\{\phi;\{\phi\}\}$

$\{\phi;\{\phi\};\{\phi;\{\phi\}\}\}$

Dejando de lado las múltiples apariciones de ϕ, adviértase que el primer ordinal carece de elementos, el segundo tiene un único elemento, el tercero tiene dos elementos, etc. Nótese además que, si en cada ordinal están presentes todos los anteriores en calidad de elementos, el número ordinal sucesivo es el conjunto de todos los números ordinales anteriores. Por cuestiones de simplicidad notacional, los mencionados números ordinales serán nombrados del siguiente modo:

$\phi = 0$

$\{\phi\} = 1$

$\{\phi;\{\phi\}\} = 2$

$\{\phi;\{\phi\};\{\phi;\{\phi\}\}\} = 3$

…

$\{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \omega$

Ahora bien, ω a diferencia de 0, 1, 2, 3 y todos los demás números es un conjunto de números ordinales o de orden. Este es el primer ordinal transfinito y, en ese sentido, es diferente de 0, 1, 2, 3 y todos los demás pues estos últimos son números ordinales finitos. Además, 0, 1, 2, 3, y los demás son números ordinales que corresponden a una sola forma de ordenación, mientras que a todos los números transfinitos a partir de ω les corresponden infinitas formas de ordenación similares, pues ω es tanto el número ordinal de {0, 1, 2, 3, …} como de {0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, …}. Veamos qué ordinales siguen a continuación:

$\{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \omega$

$\{0, 1, 2, 3, \ldots \omega\} = \omega+1$

$\{0, 1, 2, 3, \ldots \omega, \omega+1\} = \omega+2$

$\{0, 1, 2, 3, \ldots \omega, \omega+1, \omega+2\} = \omega+3$

…

$\{0, 1, 2, 3, \ldots \omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \ldots\} = \omega+\omega = 2\omega$

$\{0, 1, 2, 3, \ldots \omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \ldots, 2\omega\} = 2\omega+1$

…

Este grupo nos interesa en virtud de lo que queremos demostrar, a saber, que todo conjunto de números de orden constituye un número de orden no contenido en ese conjunto, mayor que cada uno de los elementos de ese conjunto de números ordinales. Como verificamos, siempre la denominación de un conjunto de números ordinales es un número ordinal mayor en una unidad que, además, no está incluido en el conjunto de números ordinales (Picollo, 2007). Según Jesús Mosterín:

> "(…) Los números ordinales se suceden indefinidamente, obteniéndose ordinales cada vez mayores, sin que este proceso acabe nunca. Después de los ordinales finitos (que coinciden con los números naturales: 0, 1, 2, 3, …), un salto mortal nos permite pasar a ω, el primer ordinal infinito. Después de ω viene $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3$, etc., hasta llegar a $\omega+\omega = \omega.2$, al que sigue $(\omega.2)+1$, $(\omega.2)+2$, etc., hasta llegar a $(\omega.2)+\omega = \omega.3$, y así sucesivamente $\omega.4$, $\omega.5$, … hasta llegar a $\omega.\omega = \omega^2$. A ω^2 siguen ω^2+1, ω^2+2, … hasta $\omega^2+\omega$, … $\omega^2+\omega^2.2$, … hasta $\omega^2.\omega = \omega^3$. El proceso de generación de ordinales no se acaba nunca: ω^3+1, ω^3+2,

etc., y así sucesivamente: ω^4, ω^5, ω^6, … hasta llegar a ω^ω, y luego ω^{ω^ω}, $\omega^{\omega^{\omega^\omega}}$, etc." (Mosterín, 1980: 127) [5]

1. 1. 2. El infinito en matemática

En sus *Diálogos acerca de dos nuevas ciencias* (1945: 57-59), Galileo planteaba algunas cuestiones fundamentales y paradójicas sobre el infinito:

> "Da la impresión de que hay más números enteros (1,2,3, …) que cuadrados de dichos números (1, 4, 9, …).
> Pero es posible emparejar los números enteros con sus cuadrados:
>
> | | | | | | | | | |
> |---|---|---|---|---|---|---|---|---|
> | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | … |
> | ⇳ | ⇳ | ⇳ | ⇳ | ⇳ | ⇳ | ⇳ | ⇳ | |
> | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | … |
>
> y, por tanto, hay igual cantidad de unos que de otros." (Clark, 2009: 105)

De aquí, concluye Galileo que no podemos aplicar (sin modificaciones) las relaciones de ser mayor, igual entre los conjuntos infinitos de la misma manera en la que lo hacemos entre los finitos. [6]

---

[5] Otra forma de explicación sería la siguiente. Burali-Forti advierte que las secuencias que constituyen ordinales pueden ser clasificadas por tamaños. Primero <1>, a continuación <1,2>, luego <1,2,3> y así sucesivamente. Esto es, el conjunto de números ordinales está bien ordenado. Todo conjunto bien ordenado tiene un número ordinal. Por consiguiente, dicho conjunto debe tener un ordinal, el cual es ω. Sin embargo, este ordinal debe ser mayor que todos los elementos del conjunto y así no puede hallarse en el conjunto.

[6] Escribe Galileo Galilei (1945: 57-59) en sus *Diálogos sobre dos nuevas ciencias:*
"SALVIATI. (…) Supongo muy bien sabido de vosotros, cuáles son los números cuadrados y cuáles los no cuadrados.
SIMPLICIO. Sé muy bien que el número cuadrado es el que resulta de la multiplicación de otro número por sí mismo: así el cuatro y el nueve, etc., son número cuadrados, ya que se originan uno de dos y el otro del tres, multiplicados por sí mismos.
SALVIATI. Muy bien; y sabéis, además, que así como los productos se llaman cuadrados, los que los producen, o sea los que se multiplican se llaman lados (*lati*) o raíces. Por consiguiente, los otros que no nacen de números multiplicados por sí mismos, no son cuadrados. De dónde, si yo dijere que todos los números incluyendo los cuadrados y los no cuadrados, son más que los cuadrados solos, habré enunciado una proposición realmente verdadera, ¿No es así?
SIMPLICIO. No se puede decir lo contrario.

Dedekind sostendrá una definición precisa de infinito y finito. Un conjunto S se llama infinito cuando es biyectable[7] con una parte propia de sí mismo; en caso contrario, se llama finito. El conjunto de los números naturales, por ejemplo, es infinito, pues es biyectable con el de los números pares positivos, que es una parte suya. Esta propiedad de los conjuntos infinitos es fuente de paradojas intuitivas[8] surgidas del trato con lo finito. Por ejemplo:

> "Un hotel con infinitas habitaciones, todas ocupadas, puede albergar a un huésped más si todos los que ya están se trasladan a la siguiente habitación. De modo que, a pesar de estar completamente lleno, siempre puede albergar a un huésped más." (Clark, 2009: 115)

SALVIATI. Si después yo preguntare, cuántos son los número cuadrados, se podría con toda verdad responder, que son tantos como son sus respectivas raíces, puesto que todo cuadrado tiene su raíz, y toda raíz su cuadrado, sin que haya ningún cuadrado que tenga más de una raíz, ni raíz ninguna que tenga más de un cuadrado.
SIMPLICIO. Así es.
SALVIATI. Más si yo preguntare, cuántas son las raíces, no podrá negarse que son tantas como sean todos los números, porque no hay ningún número que no sea raíz de algún otro; y sentado esto, habrá que decir que los números cuadrados son tantos como sean todos los números, ya que son tantos como sus raíces, y raíces son todos los números. Y sin embargo nosotros en un principio dijimos que los números en conjunto son muchos más que todos los cuadrados, por ser no cuadrados la mayor parte. Todavía más, la multitud de cuadrados va disminuyendo progresivamente, a medida que pasamos a números más grandes; porque hasta cien hay diez cuadrados, que es como decir que son cuadrados una décima parte; en diez mil, sólo la centésima parte son cuadrados; en un millón solo la milésima. Y sin embargo, en un número infinito, si pudiéramos concebirlo, sería necesario decir que son tantos los cuadrados, cuántos son todos los números en conjunto.
SAGREDO. ¿Y qué se puede decir en tal coyuntura?
SALVIATI. No veo que se pueda llegar a otra decisión, sino a decir que es infinita la totalidad de los números, infinitos los cuadrados, infinitas sus raíces; y que la multitud de cuadrados no es menor que la de la totalidad de los números, ni ésta mayor que aquella, y en última instancia, que los atributos de igual, mayor y menor no tienen lugar en los infinitos, sino solo en la cantidades limitadas. (…)"

[7] En matemáticas, una función es biyectiva si es al mismo tiempo inyectiva y sobreyectiva; es decir, si todos los elementos del conjunto de salida tienen una imagen distinta en el conjunto de llegada, y a cada elemento del conjunto de llegada le corresponde un elemento del conjunto de salida. Así, por ejemplo, la función $F = \{(x;y) \in \mathbb{R}x\mathbb{R} / y = 4x + 7\}$ es biyectiva, pues para F(1)=11, F(2)=15, F(3)=19, etc. Con esto notamos que F es inyectiva (porque todo elemento x refleja una imagen distinta y) y a la vez sobreyectiva (porque cada elemento x tiene una sola imagen y).

[8] Una paradoja intuitiva es aquella que (generalmente, sin una explicación suficiente) desafía alguna de las ortodoxias habituales, es decir, pone en duda algo común o normalmente aceptado. Así, una paradoja de este tipo puede poner en tela de juicio, por ejemplo, el concepto de "bueno" o el de "infinito".

Este ejemplo fue planteado por Hilbert (1862-1943). En cuanto se comprende que no hay más enteros positivos que cuadrados de enteros positivos, no debe sorprender que el conjunto de los enteros positivos (x) no sea más numeroso que el de los enteros positivos mayores en 1 (x+1).

1	2	3	4	5	6	…
⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	
2	3	4	5	6	7	…

Cada uno de los infinitos huéspedes se puede trasladar a la habitación siguiente y la número 1 queda libre para el recién llegado. Ninguno de los huéspedes anteriores se queda sin habitación.

Incluso, si llega un autobús infinito con infinitos nuevos clientes, tampoco hay problema. Basta con mudar a cada huésped anterior que ocupe la habitación nº m a la habitación nº 2m. Automáticamente, se quedarán libres infinitas habitaciones (todas las de número impar), en las que alojaremos a los infinitos viajeros recién llegados.

Entre lo finito y lo infinito hay un abismo insalvable. Partiendo de conjuntos finitos, y mediante un número finito de operaciones conjuntistas como la unión, la intersección, el producto cartesiano y el conjunto de partes, solo obtenemos de nuevo conjuntos finitos. Lo infinito es inalcanzable desde lo finito. Para alcanzarlo hay que dar un salto mortal, que la misma teoría de conjuntos avala. Una vez dado el salto, Cantor se puso a explorar lo infinito. Lo primero que descubrió fue que no hay un solo tipo de infinito, una sola cardinalidad infinita, sino muchos infinitos distintos. Un conjunto infinito es numerable si y solo si es biyectable con el conjunto de los números naturales, N. Un conjunto infinito numerable se llama también "denumerable". Un conjunto infinito que no es numerable es "supernumerable".

A finales de 1873, las cartas de Cantor a Dedekind reflejaban el interés de Cantor por los temas de numerabilidad de los conjuntos infinitos. Cantor, que ya sabía que hay tantos números enteros y tantos números racionales como números naturales, probó que el conjunto de todos los números algebraicos (es decir, raíces de ecuaciones algebraicas) es también biyectable con N. Vemos que muchos conjuntos infinitos son numerables: N mismo, el conjunto de los números pares, el de los impares, el de los primos, el de los enteros, el de los racionales, el de los algebraicos, etc. Sin embargo, Cantor descubrió que hay conjuntos innumerables o supernumerables.

Enseguida, aclararemos el concepto de "diagonalización" planteado por George Cantor y relacionado con el concepto de "numerabilidad". Consideremos los *n* números reales x en el intervalo $\forall n \in N,\ 0 < x_n \leq 1$. Cada número real, en este intervalo, está representado, de modo único, por una fracción decimal no-terminativa propia, es decir, una fracción decimal, que tiene su primer dígito significativo (diferente de cero) a la derecha del punto decimal, y un número infinito de dígitos que no son 0. Admitiendo esto, aceptemos que toda fracción decimal no-terminativa propia representa un número real *único* en el intervalo. Llamemos "numerables" a todos aquellos conjuntos cuyos elementos pueden ser puestos en correspondencia uno-a-uno con los elementos del conjunto de los números naturales. Supongamos ahora que los números: x_0, x_1, x_2, x_3 … x_a … conforman una enumerable lista infinita de todos los números reales que pertenecen al intervalo entre 0 y 1.

Escribamos una debajo de otra sus respectivas fracciones decimales no-terminativas, aprovechando el esquema matricial fila-columna.

$$x_0 = 0, x_{00}x_{01}x_{02}x_{03} \dots$$

$$x_1 = 0, x_{10}x_{11}x_{12}x_{13} \dots$$

$$x_2 = 0, x_{20}x_{21}x_{22}x_{23} \dots$$

$$x_3 = 0, x_{30}x_{31}x_{32}x_{33} \dots$$

$$\dots$$

Seleccionemos la "fracción diagonal" mostrada por la línea trazada, o sea el decimal 0, x_{00} x_{11} x_{22} x_{33} … Cambiemos en ella cada uno de los sucesivos dígitos x_{nn} por un dígito diferente x_{nn}', evitando producir una fracción terminativa. Sea, x_{nn}' = 5, si $x_{nn} \neq 5$, y x_{nn}' = 6, si x_{nn} = 5, de tal modo que cualquier número representado por la fracción resultante de reemplazar cada x_{nn} por x_{nn}' (es decir, 0, x_{00}' x_{11}' x_{22}' x_{33}' …) sea un número decimal conformado por varios cincos y seises distribuidos en su configuración. Así, "0, x_{00}' x_{11}' x_{22}' x_{33}' …" es diferente de cada uno de los números de la tabla anterior, puesto que difiere del primer número en su primer decimal, del segundo en su segundo decimal y, en general, difiere del *n*-ésimo número en su *n*-ésimo decimal. Esto prueba que el esquema matricial anterior no contiene todos y cada uno de los números del intervalo (0,1); y, por inducción, se demuestra implícitamente que ni éste, ni algún otro segmento representativo del conjunto de los números reales son numerables. En conclusión, mientras que los números reales no son numerables, los naturales y hasta los racionales sí lo son. Como hemos podido apreciar, la técnica cantoriana de la diagonalización es un método que muestra que hay infinitos conjuntos, considerados en la Matemática, que no pueden ser numerados.

Ya hemos visto cómo Cantor probó la supernumerabilidad del conjunto de los números reales, con lo cual quedaba claro por primera vez que había infinitos de distinto tamaño o cardinalidad. También probó que, en general, el conjunto de las partes Pot(S) de un conjunto dado S cualquiera tiene siempre una cardinalidad superior a la de ese conjunto: $Card(S) < Card(Pot(S))$. Por tanto, dado un conjunto infinito, por ejemplo ω, tendremos $Card(\omega) < Card(Pot(\omega)) < Card(Pot(Pot(\omega))) < Card(Pot\left(Pot(Pot(\omega))\right))$, etc. Por tanto, hay una infinidad de cardinales o números cardinales distintos. A la cardinalidad más pequeña, es decir, a la cardinalidad de ω, la llamó Cantor $\aleph_0$; a la siguiente más grande, $\aleph_1$; a la siguiente, $\aleph_2$; y, así sucesivamente, con lo que obtenemos la secuencia de los alefs o números cardinales: $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, … Por ejemplo, $Card(\omega) = \aleph_0$. $\aleph_0$ es también la cardinalidad del conjunto de los números enteros Z, del de los racionales Q, de los algebraicos, etc.

Cada tipo de orden o número ordinal tiene la cardinalidad del conjunto de todos los números ordinales que lo preceden. Cantor llamó “primera clase de números” a la clase de todos números ordinales finitos. La segunda clase de números Z ($\aleph_0$) es la clase de todos los tipos de orden de conjuntos bien ordenados con cardinalidad $\aleph_0$. La cardinalidad de Z($\aleph_0$) es $\aleph_1$, el número cardinal siguiente a $\aleph_0$. La tercera clase de números Z($\aleph_1$) es la clase de todos los tipos de orden de conjuntos bien ordenados de cardinalidad $\aleph_1$. La cardinalidad de Z($\aleph_1$)

es $\aleph_2$. La secuencia de los alfes $\aleph_\alpha$ crece así indefinidamente con subíndices ordinales crecientes.

En tanto, habíamos confiado nuestra atención a conjuntos finitos, los resultados no eran, en ningún caso, sorprendentes. Mas, tan pronto como tomamos en consideración conjuntos infinitos, aparecieron algunos problemas. Así, tenemos, por ejemplo:

$$\aleph_0 = \aleph_0 + n = n\aleph_0 = {\aleph_0}^n$$

donde $\aleph_0$ será el número cardinal del conjunto de los números naturales y *n* cualquier número natural mayor que 0. En cambio, $2^{\aleph_0} > \aleph_0$, tal y como $2^n > n$ para cualquier número natural n; y, en general, $2^c > c$ para cualquier cardinal c, sea finito o transfinito. Tendremos, por lo tanto, una cantidad interminable de cardinales transfinitos (o alefs) de magnitud siempre creciente: $\aleph_0$, $2^{\aleph_0}$, $2^{2^{\aleph_0}}$, etcétera.

Como todos los grandes matemáticos, Cantor concebía su obra como el descubrimiento de leyes no creadas por el hombre, de las cuales se limitaría únicamente a dar un testimonio fidedigno sin aspirar a otra contribución de su cosecha que el estilo y la economía en su exposición.

1. 1. 3. Paradojas

La paradoja que expondremos, a continuación, se conoce con el nombre de paradoja "Burali-Fortiana" (Grelling, 1943: 116-117). Por una parte, todo conjunto de números de orden es bien ordenado[9]. Veamos el conjunto de todos los números de orden, que llamaremos Ω; él mismo también deberá ser bien ordenado y, por lo tanto, deberá tener un menor elemento y ya que $\Omega +1$ es un número ordinal, éste (que está incluido en Ω por definición) podrá ser menor, es decir, $\Omega +1 \leq \Omega$. Por otra parte, habíamos demostrado la proposición de que para todo conjunto de números de orden se da uno que no está contenido en él y que es mayor. Refiramos esta proposición al conjunto Ω; se sigue de aquí que existe un número ordinal, el cual es mayor que cualquiera contenido en Ω; este número no es otro naturalmente que el tipo de orden de $\Omega +1$. Por lo tanto, $\Omega +1 > \Omega$. He aquí una abierta contradicción, pues hay un número ordinal que es menor (o igual) y mayor que su precedente. (Ferrater Mora, 1994: 2693). Ni Cantor, ni Frege, ni Dedekind reaccionaron ante el resultado de Burali-Forti. [10]

---

[9] "Un esbozo de la demostración de que todo conjunto puede ser ordenado es el siguiente: dado un conjunto X se toma, en primer lugar, un elemento cualquiera de ese conjunto al que llamaremos x_1,este será el primer elemento del orden de X. A continuación, se toma, también arbitrariamente, un elemento del conjunto resultante (es decir, del conjunto obtenido al extraer de X el elemento de x_1), que será el segundo elemento del orden de X y que se llamará x_2. Luego, tomamos otro, y otro, y otro, y otro, y otro, etc. Si el conjunto es finito, en un número finito de pasos habremos obtenido un orden del conjunto. Es decir, se obtiene la progresión '$x_1, x_2, \dots x_n, \dots$'. Puede suceder que el conjunto no se haya agotado todavía, con lo cual habría que reiterar el procedimiento, pero ahora empezando con el conjunto obtenido al quitarle a X toda la progresión. Este proceso puede continuar indefinidamente hasta que todos los elementos de X hayan sido extraídos y la serie resultante constituya un orden de X" (Sartorio, 2000: 104-105). Para Sartorio, el orden o buen orden consiste en lo siguiente: para cada subconjunto de elementos que hayan sido ordenados hay, a menos que el conjunto no tenga más elementos, otro que es el sucesor inmediato del último elemento en el orden.

[10] Burali-Forti consideraba su "razonamiento" como una *reductio ad absurdum* de la ley de tricotomía. Esta ley dice que dado un par cualquiera de números ordinales A y B, o bien A=B o A<B o A>B. Burali-Forti se sorprendió cuando Cantor aportó pruebas de la ley de tricotomía. Parece que Burali-Forti había malinterpretado la definición de Cantor de orden adecuado. Tras bautizar de nuevo su concepto como "orden perfecto", Burali-Forti concluyó que ambas pruebas eran correctas. Para él, como para la mayoría, la teoría de Cantor resultaba demasiado evidente como para servir de telón de

Cantor ya conocía este y otros problemas. En una carta a Hilbert (citada en Mosterín, 2000: 128) de 1897 menciona la antinomia del conjunto de todos los alefs, si se considera como una totalidad: "La totalidad de los alefs no puede considerarse como un conjunto bien definido y terminado. Si lo fuera, le seguiría un cierto alef mayor, que por tanto, a la vez pertenecería (como elemento) a esa totalidad y no le pertenecería. … A las totalidades que no pueden considerarse como conjuntos (como, por ejemplo, la de los alefs, según hemos mostrado antes) las he llamado hace ya muchos años totalidades 'absolutamente infinitas' y las he distinguido tajantemente de los conjuntos transfinitos". Cantor era consciente del carácter inconsistente o antinómico del sistema de todos los números cardinales o del de todos los ordinales.

En términos formales, supongamos que S sea el conjunto de todos los conjuntos[11]. En virtud del teorema cantoriano de los conjuntos potencia, $Card(Pot(S)) > Card(S)$. Pero, ya que $Pot(S)$ es un conjunto de conjuntos (a saber, el conjunto de todos los subconjuntos de S), habrá de ser, a su vez, parte del conjunto de todos los conjuntos, esto es, de S. De donde se sigue que $Card(Pot(S)) \leq Card(S)$, lo que contradice el resultado que acabamos de obtener.

---

fondo a las paradojas. Los teóricos afectos a Cantor interpretaban las deducciones sorprendentes a partir de su teoría como conjeturas enigmáticas. Los hostiles veían tales resultados como inverosimilitudes que desmentían sus propuestas. Solo después de que la obra de Cantor se abriera paso en la matemática dominante se empezaron a describir las sorpresas como "paradojas".

[11] A veces, suele decirse que el conjunto U es el conjunto de todos los conjuntos. Sin embargo, algunos piensan que tal conjunto podría no ser infinito, si se asume el concepto de 'universo relativo'. Por ejemplo: el conjunto universo de todas las letras de alfabeto es un universo relativo y es finito. Pero, hay que apuntar que claramente Cantor se refiere al conjunto de todo, es decir, un universal absoluto que es un infinito actual.

Hay que recalcar que, como apunta Torreti (1998: 51-52), la misiva del 3 agosto de 1899 enviada por Cantor a Dedekind sugiere que aquel era consciente de que el conjunto universal constituía una anomalía para la conclusión del argumento de la diagonal. Si el superconjunto de un conjunto siempre es mayor que el conjunto, el conjunto universal debe ser mayor que sí mismo. Cantor no se preocupó en exceso, pues distinguió dos especies de pluralidad determinada:

a) Si el supuesto de que todos los elementos de una pluralidad existen conjuntamente genera una contradicción, entonces se trata de una pluralidad absolutamente infinita o inconsistente. En este caso, es imposible captar esa pluralidad como una unidad, como “una cosa acabada”.

b) Si el supuesto de que todos los elementos de una pluralidad existen conjuntamente no genera una contradicción, entonces se trata de una pluralidad consistente o “conjunto”. En este caso, es posible concebir conjuntamente esa pluralidad como una unidad, como “una cosa”.

Así pues, Cantor consideró que la relación entre U y Pot (U) no constituía una paradoja. Más bien, era tan solo una indicación de que hay pluralidades bien definidas mediante una caracterización verbal, que no forman una unidad, esto es, un conjunto. Además, Cantor era un hombre religioso que creía que Dios le había concedido dotes especiales para descubrir la naturaleza del infinito. En su desarrollo de la aritmética transfinita había visto que las anomalías aparecían y desaparecían. De la historia de la teoría de los números había aprendido que los números irracionales, negativos e imaginarios habían padecido tribulaciones. ¿Por qué iban a ser diferentes los números transfinitos? A Cantor le seducía la idea de que algunos infinitos son inconmensurables: “cantidades demasiados grandes para ser considerados uno”. Estas “multiplicidades inconsistentes” inspiraban el arrobo místico de

Cantor: “El Absoluto solo puede ser reconocido y aceptado, nunca conocido, ni siquiera de manera aproximada”.

1. 2. La fundamentación lógica de la aritmética de Gottlob Frege [12]

Frege en sus *Fundamentos de la Aritmética* buscaba demostrar que las matemáticas eran analíticas. Esto significaba que las matemáticas se podrían reducir a las leyes elementales de la lógica que hacen posible el razonamiento. Este es el origen del programa “logicista”. (Scruton, 2003: 388)

De acuerdo a Javier Castro Albano, el sistema que Frege construyó para llevar adelante su programa logicista intentaba combinar dos líneas teóricas diferentes. La primera era la teoría de conjuntos de Cantor. Aunque la teoría de Cantor había nacido estimulada por problemas de índole matemática, en las últimas décadas del siglo XIX, estaba claro para quienes conocían el trabajo de Cantor que la teoría de conjuntos tenía mucho que decir sobre la aritmética, porque los números naturales podían ser caracterizados como conjuntos de estructura especial y los teoremas de la aritmética podían ser probados a partir de los axiomas de la teoría de conjuntos. La segunda línea teórica que influyó en el sistema de Frege se remonta hasta el siglo XVII, cuando Arnauld y Nicole publicaron la *Lógica de Port Royal*. Su idea era explicar el comportamiento lógico de las expresiones predicativas asociándoles una intensión (o comprensión, o connotación) y una extensión (o denotación). En el siglo XIX, Mill ejemplificaba esa distinción en su *Lógica* del siguiente modo: “La palabra ‘blanco’

[12] Esta parte se basa en Torreti (1998: 159-175 y 509-516).

denota todas las cosas blancas, como la nieve, la espuma del mar, etc., e implica, o en el lenguaje de los hombres de escuela, *connota*, el atributo *blancura*". Sin embargo, denotar "todas las cosas blancas" se entendía como denotar la *clase* de las cosas blancas. "Una clase", sostenía Mill, "es la indefinida multiplicidad de individuos denotada por un nombre general". Boole después ofreció clases como interpretación para su algebra de la lógica: "si el nombre es 'hombre', por ejemplo, considérese que x representa […] la clase 'hombre'. Por "clase" usualmente se quiere significar una colección de individuos, para cada cual un nombre particular o una descripción puede aplicarse". Los atributos de Mill, o los *conceptos* en términos fregeanos, así como las extensiones (o clases) eran parte del instrumental habitual de los lógicos en el siglo XIX. Frege intentó combinar ambas líneas teóricas identificando los conjuntos de Cantor con las extensiones de conceptos o clases. Con esta identificación Frege esperaba aprovechar los recursos de la teoría de conjuntos para la fundamentación de la aritmética y, a la vez, hacer plausible la tesis de la logicidad de la teoría de conjuntos pues las extensiones (clases) podían ser entendidas como entidades lógicas. De hecho, Frege pensaba que esa era la única manera de adquirir conocimiento sobre entidades lógicas: "¿Cómo captamos los objetos lógicos?", se preguntaba Frege en una carta a Russell, "Los captamos como extensiones de conceptos"-escribió. (Castro, 2015)

A fines del siglo pasado, Dedekind demostró que todas las nociones básicas de la aritmética se podían reducir a la teoría de los números naturales. Después, Cantor demostró que el concepto de correspondencia de uno-a-uno podía ser usado para definir "equinumerabilidad"; y, finalmente, Peano redujo la aritmética a un conjunto de axiomas. Solo quedaba definir los conceptos fundamentales sobre los cuales se basan estos axiomas para completar la reducción de la aritmética. Los cinco axiomas de Peano son los siguientes:

1. El 0 es un número

2. Cada número tiene por lo menos uno y a lo más un sucesor que también es un número.

3. El 0 no es el sucesor de ningún número.

4. No hay dos números que tengan el mismo sucesor.

5. Lo que sea verdad del 0, también es verdad para el sucesor de cualquier otro número, y si es verdad para ese número, es verdad de todos los números.[13]

De estos cinco axiomas se puede derivar toda la aritmética. Por ende, el logicismo buscará definir los términos "número", "sucesor" y "0", y además buscará demostrar que las proposiciones propuestas por Peano pueden derivarse de las definiciones a través de la lógica. (Scruton, 2003: 389-391)

De la misma manera en la que los teólogos demandaban un concepto de Dios que no tenga más que un solo ejemplar, Frege exigía una definición de número que certifique la unicidad del uno, el dos, el tres, etc. La genialidad de Frege en cuanto a la fundamentación de la aritmética se refiere no radica en la derivación de los teoremas sino en la selección de los conceptos apropiados para formularlos. Sus conceptos básicos son el de *serie determinada por un procedimiento* y *propiedad hereditaria en una tal serie*. Para Frege, la inferencia de n a n+1, es decir, la inducción matemática finita, se puede reducir a las leyes lógicas únicamente a través de sus conceptos.

[13] Este quinto axioma expresa el axioma de la inducción matemática.

Frege procede a averiguar qué son los números examinando el modo como corrientemente se habla de ellos. Para eso, disponemos de palabras y signos, los numerales. Ahora bien, cotidianamente, los números funcionan como atributos o predicados. Por eso, los manuales de gramática clasifican a los números como adjetivos. Sin embargo, en la fraseología matemática los números se comportan como sustantivos. Por ello, Frege buscó concebir la noción de número en tanto sustantivo.

Para Frege, cuando empleamos un numeral como adjetivo le atribuimos la propiedad de ser tal número a un concepto que hace referencia a un objeto. Si nadie ha tenido cólera en Finlandia en 1991, entonces no podríamos atribuir la propiedad de ser cero al objeto descrito por la frase “enfermo de cólera diagnosticado en Finlandia en 1991”. Esto sucede porque tal objeto no existe y no puede, por lo tanto, tener propiedad alguna. Pero, sí se podría atribuir dicha propiedad al concepto de enfermo de cólera diagnosticado en Finlandia en 1991 y de hecho se la atribuye.

Es decir, para Frege, los números no son cosas materiales, ni conjuntos, montones o configuraciones de cosas materiales, ni propiedades de cosas materiales. Los números no se dicen de las cosas, sino de los conceptos. Si decimos que la Tierra tiene un satélite natural, o que nuestro sistema solar tiene nueve planetas, o que en la biblioteca municipal hay veinte mil libros, estamos diciendo algo conceptos: que bajo el concepto de “satélite natural de la Tierra” cae un objeto, bajo el concepto “planeta de nuestro sistema solar” caen nueve objetos, bajo el concepto “libro de la biblioteca municipal” caen veinte mil objetos. (Mosterín, 2000: 48)

Frege argumenta que cuando digo que un hombre existe, no predico la existencia de un hombre, sino que, más bien, predico el concepto *hombre*: lo que estoy diciendo es que el concepto de *hombre* tiene por lo menos una instancia. Así, se entiende que la existencia es un predicado de predicados. En forma similar, los números se predican de conceptos: decir que hay cinco hombres sabios, es decir que el concepto *hombre sabio* se instancia cinco veces. (Scruton, 2003: 389)

Para poder dar una explicación del significado de los sustantivos numerales que nombran a los objetos de la aritmética Frege elabora una serie de definiciones:

[$N_{\approx}$] La expresión 'el concepto F es equinumeroso con el concepto G' significa lo mismo que la expresión 'hay una relación ϕ que coordina biunívocamente los objetos que caen bajo el concepto F con los que caen bajo el concepto G'.[14]

[N_F] El número correspondiente al concepto F es la extensión del concepto expresado mediante la fórmula '$X \approx F$'.

[N_n] La expresión 'n es un número' significa lo mismo que la expresión 'existe un concepto F tal que n es el número correspondiente a F'.

[14] En otras palabras, F es biyectable con G si y solo si hay una relación que relaciona cada objeto que cae bajo P con un (y solo un) objeto que cae bajo Q, y a la inversa. Está claro que la relación de biyectabilidad es una relación de equivalencia. Por tanto, da lugar a una partición de la clase de los conceptos en clases de equivalencia, a las que Frege llama "números cardinales". El número cardinal de un concepto P no es sino la clase de equivalencia de P respecto a la relación de biyectabilidad, es decir, la clase de todos los conceptos biyectables con P. Esto es lo que Frege expresa en su peculiar terminología diciendo que el número que corresponde a un concepto P es la extensión del concepto "equinumeroso con P". De hecho, Frege no dispone explícitamente de la noción de clase de equivalencia. Su exposición sigue el siguiente orden: primero define la relación de equinumerosidad (o biyectabilidad); en función de ella define la noción de *número del concepto* …, en función de la cual define a su vez *número*, en general: una cosa es un número si y solo si hay algún concepto P, tal que esa cosa es el número de P. Esta definición no es circular, pues la noción de *número del concepto…* se define con independencia de la de *número*. (Mosterín, 2000: 49-50)

Con estas definiciones se habría vindicado finalmente el uso de los numerales como sustantivos. Un numeral nombra un número que, según $[N_F]$, es un objeto: la extensión de un concepto. Pero, también se ha justificado su uso como adjetivos: el concepto cuya extensión nombra un cierto numeral se determina fijando uno de los correlatos de una relación binaria entre conceptos: la relación de equinumerosidad. Dicho numeral puede emplearse por eso sin mayor riesgo de confusión para expresar la propiedad que pertenece a un concepto cualquiera si y solo si es equinumeroso con el correlato fijado.

Así pues, para definir números, primero se debe pasar desde un concepto a su "extensión" (a la clase de cosas que dependen de él). Frege postuló que cada concepto determina una clase: para cada concepto F, existe una clase de cosas que son F. El número de un concepto F es el número de miembros de la clase de cosas que son F. Se puede saber que este número es el mismo que el número de otro concepto, sin que para ello se tenga que saber qué número es. Esto se logra con la definición de "equinumerabilidad". (Scruton, 2003: 390)

De este modo, es posible definir 'número' como la clase de las clases equinumerables. Recordemos que el objetivo logicista de Frege es completar la definición usando solo conceptos lógicos, es decir, conceptos cuyo significado y extensión se determinan por las leyes elementales del razonamiento. Finalizando, Frege asigna ahora denotaciones precisas a los numerales 0 y 1:

$[N_0]$ 0 es el número correspondiente al concepto expresado mediante la fórmula '$x \neq x$'.

En este caso, el cero se define como el número correspondiente al concepto “distinto de sí mismo”. En otras palabras, el 0 es la clase de todos los conceptos vacíos, es decir, de todos los conceptos bajo los que no cae objeto alguno. El número cero es el número de entidades x, en las que x no es idéntica a sí misma (alternativamente, la clase de todas las clases de entidades que no son idénticas a sí mismas). (Scruton, 2003: 391)

$[N_1]$ 1 es el número correspondiente al concepto expresado mediante la fórmula ‘$x = 0$’

En este caso, el uno se define como el número que corresponde al concepto “igual a cero”. En otras palabras, el 1 es la clase de todos los conceptos unitarios, es decir, de todos los conceptos bajo los que cae un solo objeto. El número 1 es la clase de todas las clases que son iguales en número a la clase nula, ya que solo hay una clase nula. (Scruton, 2003: 391)

Consecuentemente, el número 2 es la clase de todas las clases igual en número a la clase cuyos únicos miembros son la clase nula y la misma clase nula (o vacía).

La identificación fregeana de los objetos denotados por los demás numerales depende esencialmente de la relación binaria que Frege llama *seguir inmediatamente en la serie natural de los números*. Esta relación se define así:

$[N_\sigma]$ La oración “n sigue inmediatamente a m en la serie natural de los números” significa lo mismo que la oración “hay un concepto F y un objeto a que cae bajo F, y n es el número correspondiente a F y m es el número correspondiente al concepto expresado mediante la fórmula 'Fx pero $x \neq a$' "

En otras palabras, *que n es el siguiente de m* significa, según Frege, que hay un concepto *F* y un objeto *a* que cae bajo él, tales que *n* es el número de *F* y *m* es el número del concepto "cae bajo *F* y es distinto de *a*". Podemos definir la relación de sucesor usando el cuantificador existencial, porque el número de los Fs es mayor en "uno" que el que sucede al número total de los Gs y donde hay un F constituido por el resto de los Fs formado por el mismo número que todos los Gs.

Una vez definidos el 0 y el siguiente, Frege está en posición de darnos su definición de número natural: *n es un número natural* (o cardinal finito) significa que *n* pertenece a la serie numérica que empieza por el cero, es decir, que *n* es el 0 o *n* cae bajo cada concepto bajo el que cae el 1 y bajo el que cae el siguiente de cada objeto que cae bajo él.

Es decir, *n* es un número natural si está incluido en todos los conceptos que incluyen al cero y que es tal que cualquier sucesor de lo que lo incluye, también está incluido en él. (Scruton, 2003: 391)

La conclusión de *Die Grundalgen der Arithmetik* se inicia con la solemne formulación de la tesis logicista: los teoremas aritméticos son enunciados analíticos. Cada concepto aritmético es definible en función de conceptos puramente lógicos. Cada teorema aritmético es deducible a partir de leyes puramente lógicas. Calcular es deducir. La aritmética se reduce a la lógica.

Pero, Frege en la mentada obra no definió específicamente la extensión de los conceptos (es decir, de las clases). Se conformó con despachar la noción de *extensión de un concepto* en una nota a pie de página, en la que se limitaba a suponer que "ya se sabe lo que es la extensión de un concepto". En *Grundgesetze der Arithmetik* desempeña un papel central la noción de recorrido de una función, del cual un caso particular es la extensión de un concepto, pues la extensión es un tipo especial de recorrido y el concepto es un tipo especial de función. Frege pensaba que a cada enunciado abierto (como "x ha muerto") corresponde un concepto, y a cada concepto corresponde una clase, su extensión (la clase de todos los objetos que caen bajo ese concepto). Las clases mismas son también objetos. Así, Frege introdujo un operador de abstracción de clases a partir de conceptos, que automáticamente asignaba a cada concepto su extensión. El axioma V de *Grundgesetze* da por supuesta dicha existencia de clases y corresponde en su sistema al axioma conjuntista de extensionalidad[15]: determina la transformación de la validez universal de una equivalencia entre conceptos en una ecuación entre sus respectivas extensiones. (Mosterín, 2000: 60)

Ahora bien, sería posible deducir los cinco Axiomas de Peano de leyes lógicas suplementadas con las definiciones fregeanas.[16] Desgraciadamente, en el sistema de Frege,

---

[15] Este axioma lo veremos cuando investiguemos el axiomatismo de Zermelo.

[16] En 1889 Peano publicó en latín un breve pero importante opúsculo titulado *Principios de aritmética expuestos según un nuevo método*, en el que aparece la presentación original de los cinco axiomas para la aritmética de los números naturales. Allí utilizó como primitivos los siguientes términos: la constante individual 1 (uno), el predicado monádico N (número natural), y el functor unario +1 (sucesor de). A continuación, Cassini transcribe los axiomas modernizando la notación simbólica de Peano. (2006: 187-188)

1. 1 es un número natural.

$1 \in N$

2. Si x es un número natural, el sucesor de x es un número natural.

$(\forall x)\ [(x \in N) \rightarrow (x+1 \in N)]$

3. Si x e y son números naturales, x es igual a y si y solo si el sucesor de x es igual al sucesor de y.

estas definiciones solo pueden enunciarse como tales bajo un supuesto que, como sabemos, implica la paradoja de Russell: si F es un concepto bien definido, existe la extensión de F. Este supuesto entra en la definición [$N_{\approx}$], y sobre todo en la definición [N_F], de la que penden la objetividad y unicidad de los números fregeanos.

Como sabemos, según Frege, cada número natural es la extensión de un concepto, a saber, el concepto mediante el cual se piensa la propiedad de ser equinumeroso con cierto concepto. Así pues, para Frege, las extensiones de los conceptos son objetos, que pueden naturalmente caer bajo otros conceptos. Consideramos que la extensión de un concepto es la suma o agregado de todas las cosas que caen bajo ese concepto.

La notación $\varepsilon x(F(x))$ designa la extensión del concepto expresado por la letra F. Frege entiende que los conceptos constituyen una especie del género *función*. Un concepto es una función que asigna a cada objeto del universo uno de los dos valores $\mathcal{V}$ ("lo verdadero") o $\mathcal{F}$ ("lo falso"). Frege supone que cada función esta asociada a un objeto característico, que Torreti llama su *recorrido*. También, Frege se limita a decir que emplea universalmente las palabras 'la función $\Phi(\xi)$ tiene el mismo recorrido que la función $\Psi(\xi)$' como sinónimas de las palabras 'las funciones $\Phi(\xi)$ y $\Psi(\xi)$ tienen siempre valores iguales

$(\forall x)\ (\forall y)\ \{[(x \in N) \wedge (y \in N)] \rightarrow [(x=y)\leftrightarrow(x+1=y+1)]\}$

4. Si x es un número natural, el sucesor de x no es igual a 1.

$\sim(\exists x)[(x \in N) \rightarrow (x+1 \neq 1)]$

5. Si x es una clase y 1 pertenece a k, y para todo objeto y, si y es un numero natural e y pertenece a k, también el sucesor de y pertenece a k, entonces la clase de los números naturales está incluida en k. (Donde K es una constante que, de acuerdo a Peano, significa clase o agregado de entidades)

$(\forall x)\ ((x \in K) \wedge (1 \in k) \wedge \forall y\ \{[(y\in N) \wedge (y\in k)] \rightarrow (y+1 \in k)\}) \rightarrow N \subseteq x$

para argumentos iguales'. La notación $\varepsilon x(\Phi(x))$ se introduce precisamente para designar el recorrido de la función Φ.

Frege adopta la siguiente convención léxica: "Podemos designar como extensión de un concepto al recorrido de una función cuyo valor para cada argumento es un valor veritativo". En virtud de ello, si la función Φ es un concepto, la expresión $\varepsilon x(\Phi(x))$ denota su extensión mas no parece que esta pueda identificarse con la colección de todas las cosas que caen bajo ese concepto.

Frege utiliza eficazmente la notación $\varepsilon x(F(x))$ para expresar las definiciones de conceptos aritméticos fundamentales. La nueva notación figura solo en dos de las "leyes lógicas fundamentales" en las que descansa el sistema deductivo de Frege. Aquí solo nos interesa una traducción de la Ley V:

(V) $\forall G \forall F(\varepsilon x(F(x)) = \varepsilon x(G(x)) \leftrightarrow \forall x[F(x) \leftrightarrow G(x)]$

Lamentablemente, con esta ley puede derivarse la paradoja de Russell, la misma que originalmente fue planteada usando el término 'clase' aunque también puede formularse y reformularse mediante el término 'conjunto'. La diferencia estriba en el énfasis. Cuando se relaciona la paradoja con las clases se busca enfatizar en aspectos fregeanos de la teoría logicista; en cambio, cuando se la relaciona con los conjuntos se busca enfatizar su carácter meramente matemático muy vinculado a la teoría de conjuntos. Pero, nosotros debemos ser claros en este punto: la paradoja que envuelve toda una serie de discusiones y polémicas es la paradoja de las clases, la misma que surgió dentro de la teoría de Frege. El hecho de que después Russell haya difundido su paradoja utilizando el concepto de conjunto no elimina, por cierto, su origen fregeano.[17]

1. 3. Desarrollo histórico de la paradoja de *El Mentiroso*

La primera gran paradoja real que conoció la humanidad fue la de *El Mentiroso* (*ψευδομενος*, en griego). Esta reporta un gran interés puesto que ha sido y es objeto de detenidos estudios por parte de lógicos de la Antigüedad, la Edad Media y aún en el s. XXI. Algunos afirman que una formulación expresa de la misma la encontramos en la *Carta a Tito* de San Pablo. Según esta carta, Epiménides de Creta dijo: "Los cretenses son siempre embusteros, malas bestias, vientres corrompidos". Epiménides fue un cretense que vivió a comienzos del s. VI a. C. y debido a que fue él quien sostuvo la afirmación: "Todos los cretenses son mentirosos" se ha solido llamar a esta paradoja como la de *Epiménides* haciendo creer que las dos son la misma paradoja. Pero esto es erróneo, por lo cual, quienes

[17] Resulta interesante constatar que han existido propuestas para resolver el tema de la paradoja mediante una distinción entre clase y conjunto. Escribe Mosterín:
"Von Neumann no ve el peligro en admitir multiplicidades demasiado grandes, sino solo en permitir que sean a su vez elementos de otras. Por ello, distingue entre clases y conjuntos y permite que para cada condición exista la clase de todas las cosas que satisfacen esta condición. Pero no todas las clases pueden ser elementos de otras. Las que no pueden serlo se llaman clases últimas. Las que sí pueden serlo, conjuntos. En 1899, en una carta a Dedekind, Cantor había tratado de solucionar las primeras paradojas (las de Cantor y de Burali-Forti) distinguiendo entre multiplicidades consistentes, que pueden pensarse como unidades sin contradicción, y multiplicidades inconsistentes (la de todos los ordinales, la clase universal), que dan lugar a contradicciones si se las piensa como unidades y se opera con ellas como tales. Aunque históricamente independientes, las ideas expuestas por Von Neumann en 1925 representan una continuación lógica y un refinamiento de las de Cantor de 1899.
De todos modos Von Neumann formuló su sistema axiomático de un modo muy extraño, utilizando como concepto fundamental el de función y no el de conjunto. Las clases corresponden a las funciones y los conjuntos a sus valores. Este sistema fue "traducido" a una terminología más habitual por Bernays, cuyo sistema, publicado a partir de 1937, es una adaptación y simplificación del de Von Neumann. Bernays distingue entre clases y conjuntos. Una clase nunca es un conjunto, pero a cada clase "normal" corresponde un conjunto. A las clase últimas no corresponde ningún conjunto." (Mosterín, 1980: 27)

afirman que la paradoja de *El Mentiroso* y la de Epiménides son la misma caen en un error muy común[18]. Sin embargo, quien realmente se merece el título de autor de la paradoja de *El Mentiroso* es Eubúlides (s. IV a. C.), según el testimonio de Diógenes Laercio.

En sentido técnico, García Zárate define a la paradoja como tipos especiales de contradicción, aquella dada por una oración cuya verdad implica su falsedad, del mismo modo que su falsedad implica su verdad, es decir, una paradoja es una oración que es verdadera si y solo si es falsa (2007: 233). Por este singular rasgo es que es plausible señalar que la paradoja asombra, toda vez que nos enfrenta a la formulación de un enunciado absurdo, en relación con el cual extrañamente parece no ser posible señalar la causa que explique por qué adopta dicha forma.[19]

---

[18] En mi tesis de licenciatura (Mora, 2014a: 95-102) comprobé que la paradoja de Epiménides no es una afirmación paradójica como en cambio sí lo es la de *El Mentiroso*. Es muy observable que algunos filósofos sostengan que la versión de Epiménides es una expresión paradójica como la de *El Mentiroso* cuando, en realidad, solo representa algo así como media paradoja. A continuación, cito a Piscoya:
"Se cuenta que Epiménides, ciudadano cretense, decía "todos los cretenses son mentirosos", afirmación que abreviadamente podemos representar mediante la letra **A**. Los datos anteriores permiten preguntar: ¿Es la afirmación **A** verdadera o falsa? Si se acepta que es verdadera, entonces como Epiménides era cretense y mentiroso, y él era el que afirmaba **A**, entonces debe aceptarse que **A** es falsa. Recíprocamente, si se acepta que **A** es falsa, entonces no todos los cretenses son mentirosos y Epiménides puede decir la verdad, por tanto, debe aceptarse que **A** es verdadera. Epiménides formuló una proposición que satisface estrictamente la definición de paradoja, en la medida que la aceptación de su verdad implica su falsedad y la aceptación de su falsedad implica su verdad." (Piscoya, 1999: 118)
Ahora bien, hay que decir que es posible que en el idioma griego antiguo *El Epiménides* sí sea, después de todo, una auténtica paradoja, haciendo la salvedad que para que ocurra tal cosa el contradictorio de "Todos los cretenses son mentirosos" debería ser "Ningún cretense es mentiroso". Con la ayuda de la lógica actual se puede desestimar el carácter paradójico de tal expresión, pero los antiguos, por cierto, desconocían el sutil orden de tecnicismos que hoy ha logrado la lógica.
[19] Hay que señalar que esta definición técnica de 'paradoja' ya se encuentra en Piscoya (1995: 205).

Desde este punto de vista, la versión de Epiménides de *El Mentiroso* no es paradójica del todo. Analicemos. Cuando Epiménides, un individuo oriundo de Creta, afirma

α. “Todos los cretenses mienten siempre”,

¿está mintiendo también este cretense al sostener esto?

Nosotros creemos que no. Esta versión se ha considerado como una paradoja contante y sonante pero realmente es falsaria (o falsídica), pues aparenta una contradicción que a primera vista, si se sigue el razonamiento del sentido común, puede demostrarse que no está bien deducida.

Por un lado, si suponemos que α es verdad, entonces el cretense está afirmando de sí mismo que, como cualquier cretense, está mintiendo y, por lo tanto, α sería falsa, consiguiendo así una contradicción. Pero, por otro lado, si suponemos que α es falsa, no obtenemos una contradicción en sentido estricto, pues si la afirmación “Todos los cretenses mienten siempre” es falsa, significa que podríamos encontrar, al menos, un cretense, y no necesariamente el que está enunciando esta oración, que diga la verdad. Es decir, en términos formales:

$$\{[\mathrm{V}(\alpha) \rightarrow \mathrm{F}(\alpha)] \land \sim[\mathrm{F}(\alpha) \rightarrow \mathrm{V}(\alpha)]\} \not\equiv [\mathrm{V}(\alpha) \leftrightarrow \mathrm{F}(\alpha)]$$

Si bien, según Bochenski (1985: 141-144), no conocemos la formulación original propuesta por Eubúlides de Mileto sino una colección de varias formulaciones de la misma, aquí asumiremos que la paradoja de *El Mentiroso* se presenta cuando alguien afirma lo siguiente:

A. "Lo que digo es una mentira" [20]

La pregunta problemática es: "¿Es falsa o verdadera la oración (A)?".

Resulta sumamente sencillo demostrar que lo dicho por ese alguien es tanto falso como verdadero. Supongamos que A es la proposición "Yo miento". Ahora bien, si A es verdad, entonces estoy mintiendo y, por ende, haciendo afirmaciones falsas. Así, como yo digo A, entonces A es falsa. Pero, si A es falsa, entonces como he dicho que miento, estoy diciendo la verdad. Por ello, como yo digo A, entonces A es verdadera. Notamos que A es una oración cuya verdad implica su falsedad y cuya falsedad implica su verdad, lo cual equivale a afirmar que A es verdadera si y solo si A es falsa. Formalmente:

$$\{[V(A) \rightarrow F(A)] \wedge [F(A) \rightarrow V(A)]\} \equiv V(A) \leftrightarrow F(A)$$

Se ha sostenido que la intención original del filósofo megárico al formular su paradoja era desacreditar al racionalismo mostrando que sus mismos cánones básicos de razonamiento, sus propias reglas, conducían a lo que éstos rechazaban: la inconsistencia

[20] Susan Haack (1982: 173-174) reformula *El Mentiroso* en los siguientes términos:
1. La oración numerada con 1 es la oración "Toda oración numerada con 1 está negada".
El anterior enunciado en términos formales sería como sigue:
1. $r = (\forall y)\ [(r = y) \rightarrow\ \sim y]$

generada por una contradicción. La contradicción que de aquí se derivaba era contraria a la razón, pero también era derivada de acuerdo con la razón.

Aristóteles en las *Refutaciones sofísticas* examina la anterior paradoja y llega a la conclusión de que hay que distinguir en que algo sea verdadero o falso sin más o que lo sea desde un determinado punto de vista o respecto de algo. Aristóteles no resuelve la paradoja pero marca la ruta que algunos medievales seguirán más tarde. Incluso, por sus escritos se nota el firme convencimiento que tiene el estagirita de que la paradoja tiene solución.

Crisipo de Soli (281/78-208/05 a. C.) escribió seis libros sobre la paradoja de *El Mentiroso*, y también muchas críticas a quienes consideraban que podían resolverla. Asimismo, manifestó una solución en un papiro muy fragmentario. Este filósofo estoico afirmó que el enunciado de *El Mentiroso* no es una proposición, sino un sonido sin sentido. De ser cierta esta interpretación de dicho texto antiguo, resultaría ser un punto de vista de suma importancia histórica. Un detalle anecdótico de esta paradoja la menciona Benson Mates refiriéndose a Filites de Cos (hacia 340-285 a. C.):

> "(…) Esta importante antinomia fue tomada muy en serio en la antigüedad, como también en tiempos medievales y modernos; Crisipo escribió libros enteros sobre ella, y existe incluso el epitafio del lógico Filites de Cos (…)
> Soy Filites de Cos,
> El Mentiroso fue quien me hizo morir
> Y las insomnes noches por él causadas." (Mates, 1979: 263)

Otra paradoja vinculada a la de *El Mentiroso* es la de *El Abogado*. De acuerdo a Michael Clark (2009:14), el primero que expuso esta paradoja (también conocida con el nombre de "paradoja de los abogados") fue Aulo Gelio (circa 150). Diógenes Laercio (1985: 204) la repitió más tarde. En lo que sigue, nosotros brindaremos la versión de este último.

Se sostiene que Protágoras era un profesor que transmitía sus conocimientos a los hijos de las familias ricas de Grecia a cambio de grandes sumas de dinero. Los cursos eran rápidos y eficaces, y entre las enseñanzas gran parte la ocupaba la abogacía o retórica, "saber" cuyo nombre en ese tiempo era el de 'arte de argüir ante los tribunales' (Copi y Cohen, 2001: 314). Así pues, un día se le acercó Euatlo [21], un joven que quería pedirle que le enseñe su arte. El sofista aceptó y …

> "Pactó Protágoras con su discípulo Euatlo de enseñarle la oratoria forense por cierta paga, con la condición de que el discípulo daría de entrada la mitad de aquel tanto, y la otra mitad luego que defendiese algún pleito y lo ganase. Como se pasase mucho tiempo sin verificarse la condición pactada, pidió Protágoras el resto de la deuda, a lo que Euatlo satisfizo diciendo que todavía no había ganado ni orado causa alguna. Pero no se aquietó Protágoras, antes le puso pleito sobre ello; y hallándose ambos ante los jueces, dijo Protágoras: -Sábete, oh necio joven, que de cualquier modo que este pleito salga, debes pagarme; pues si te condenan a ello, me habrás de pagar por sentencia; y si te libran, me pagarás por nuestro pacto.- A esto respondió Euatlo: - Sabed también vos, oh sabio maestro, que por todo lo mismo no debo yo pagaros; pues si los jueces me absuelven, quedo libre por sentencia; y si pierdo el pleito, lo quedo por nuestro pacto." (Laercio, 1985: 204)

En otras palabras, Protágoras había pactado con Euatlo que le enseñará Derecho a cambio de una cantidad que le habría de pagar cuando haya ya ganado su primer caso. Esto es del todo coherente puesto que cuando el discípulo aplica los conocimientos del maestro logrando el resultado esperado, aquel saber se revela como útil y en retribución habría que reconocer el talento del maestro mediante el pago correspondiente; en cambio, si ocurriese lo contrario, la misma falla a la hora de aplicar los conocimientos adquiridos revelaría que aquel saber no tuvo el valor suficiente. Después de la instrucción, Euatlo no participa en ningún pleito y Protágoras, impaciente, lo demanda. El razonamiento de Protágoras consiste

[21] Este personaje parecer haber sido inventado por la tradición filosófica. De hecho, su nombre, en realidad, más que un nombre propio parece una descripción muy específica. De acuerdo al diccionario VOX: "Eu", significa "bueno"; mientras que "atlo" podría provenir de "αθλέω" que significa "luchar, combatir, arrostrar". Por ende, "Eu-atlo" significa "el buen contrincante". Esta persona tendría el nombre ideal como para hacerle frente al sabio sofista. (Pavón, 1973: 12)

en que, si él gana, el tribunal obligará a Euatlo a pagarle sus honorarios; y si él pierde, Euatlo habrá ganado un caso y también estará obligado por el pacto a pagarle. Euatlo, en cambio, argumenta que, si Protágoras gana, él no estará obligado a pagar, dado que aún no habrá ganado ningún caso; si Protágoras pierde, el tribunal decidirá que no tiene obligación de pagar (Clark, 2009: 13). Puestas así las cosas ¿Quién tiene la razón? ¿A favor de quién debe fallar el tribunal? ¿Cuál debe ser la decisión final del juez? [22]

Resulta curioso observar que esta paradoja está cómicamente relacionada con el relativismo de Protágoras. Siendo Protágoras un relativista, al parecer su discípulo Euatlo logra aprender tan bien su doctrina que incluso consigue poner en aprietos a su maestro, el mismo que resulta relativizado. La expresión "Euatlo debe pagar los honorarios a Protágoras" resulta en sí misma relativa. Para Protágoras será cierto; pero no necesariamente es cierta

---

[22] En MORA, R. (2014b: 53-74) que es un artículo publicado en la revista *Tesis* el autor analiza esto con mayor detalle. Incluso formaliza esta paradoja de la siguiente manera, primero indicando las premisas y luego su simbolización:
1. Si el tribunal favorece a Euatlo, entonces Euatlo gana el juicio y es obligatorio que Euatlo le pague los honorarios a Protágoras.
2. Si el tribunal favorece a Protágoras, entonces es obligatorio que Euatlo pague los honorarios a Protágoras.
3. Si el tribunal favorece a Protágoras, entonces Euatlo no gana el juicio y no es obligatorio que Euatlo pague los honorarios a Protágoras.
4. Si el tribunal favorece a Euatlo, no es obligatorio que Euatlo le pague los honorarios a Protágoras.
5. El tribunal favorece a Euatlo o a Protágoras pero no a ambos.
Por lo tanto, el tribunal favorece y no favorece a Euatlo y a Protágoras
Ahora bien, los símbolos de lo que nos valdremos serán los siguientes. La propiedad *F* indica la relación de favorecer que un tribunal *t* mantiene con otro, sea *e* (Euatlo) o sea *p* (Protágoras). *G* es la propiedad de alguien de ganar un juicio *j*. *O* es la propiedad de ser obligatorio. *P* es la propiedad que tiene alguien de pagar los honorarios a otro.
1. $Fte \rightarrow (Gej \wedge OPep)$
2. $Ftp \rightarrow OPep$
3. $Ftp \rightarrow (\sim Gej \wedge \sim OPep)$
4. $Fte \rightarrow \sim OPep$
5. $(Fte \vee Ftp) \wedge \sim (Fte \wedge Ftp)$ // $\therefore$ $(Fte \wedge \sim Fte) \wedge (Ftp \wedge \sim Ftp)$

para Euatlo. Lo más desconcertante es que incluso ambas posturas pueden probarse mediante argumentación lógica.

Se ha dicho que esta paradoja tiene la misma estructura que *El Puente*, aunque esta es más simple y no puede tratarse de la misma manera[23]. Leibniz solucionó esta paradoja en una variante muy parecida en su tesis doctoral. Sostuvo que el tribunal no debería fallar a favor de Protágoras. Si lo hiciera, cometería una injusticia, dado que Euatlo aún no ha ganado ningún caso (ni lo habría ganado después del fallo). Por supuesto, si, como debe ser, falla a favor de Euatlo, el pacto obligaría a Euatlo a pagar, dado que acaba de ganar un caso y, si no paga, Protágoras podrá demandarle otra vez, proceso que, casi con seguridad, ganaría. Así, Leibniz concluyó que este caso no merecía considerarse una paradoja, probablemente porque su solución es demasiado fácil. Es posible que Russell, gran investigador de la obra de Leibniz, conociera esta paradoja y su solución, razón por la cual no la consideró realmente una paradoja sino un sofisma o falacia. Sin embargo, debemos considerarla en tanto se trata de una variante de la de *El Puente* que, a su vez, es una variante de la de *El Mentiroso*.

En la época medieval, el problema de las paradojas cobrará dimensiones inimaginables. Esto lleva a Bochenski (1985: 249-264) a afirmar que en la Lógica formal escolástica tenemos una forma de la Lógica extraordinariamente original y cualificada. Empecemos mencionando a Alberto Magno (el recordado maestro de Tomás de Aquino). Este medieval resalta porque llama a la paradoja de *El Mentiroso* con el nombre de "insoluble" término con el que se le conocerá en el resto de la tradición medieval. Otro

[23] La paradoja de *El Puente* la veremos líneas más abajo.

importante autor es el Pseudo-Escoto. Afirma que una parte de la sentencia no puede suponer toda la sentencia. Asimismo, sostiene una incipiente distinción moderna entre uso y mención. A decir de Ferrater Mora, la solución más común a la paradoja del mentiroso fue la de indicar que se trata de un círculo vicioso[24]. Ockham señalaba ya que ninguna proposición puede afirmar nada de sí misma, pues de lo contrario el círculo vicioso sería automáticamente engendrado. Bochenski, menciona a Pablo de Venecia quien dio una lista de 14 soluciones, a las cuales sobrepuso una decimoquinta solución propia. Entre las muchas soluciones que expone como parte de su investigación, sostiene que la expresión de *El Mentiroso* podría tratarse de una expresión que carece sencillamente de sentido. Asimismo, menciona que la sentencia en sí no puede ser ni algo verdadero ni algo falso sino algo intermedio, con lo cual muestra un intento de resolverlo aplicando una suerte de lógica trivalente. Otra solución consiste en sostener que la sentencia podría ser o verdadera o falsa, pero no definitivamente verdadera ni definitivamente falsa. También hace referencia Pablo de Venecia a la solución que detecta un círculo vicioso en la formulación de *El Mentiroso*. La solución 15ª original del filósofo medieval mencionado se basa en la diferencia entre dos géneros de significaciones: las significaciones sin cualificativo o expresiones que significan lo que significan y nada más, y las significaciones precisas y adecuadas o expresiones que significan asimismo que son ellas mismas verdaderas (Ferrater Mora, 1964: 366). Para Pablo de Venecia la causa del problema estriba en la autorreferencia, las proposiciones que componen la paradoja se refieren a ellas mismas y no a otras cosas. Sucede, pues, que el lenguaje ordinario o natural sirve para todo tipo de expresión y se distingue por su enorme posibilidad y riqueza comunicativa. Es inherentemente flexible, elástico, pero frente a estas ventajas, se

[24] Russell coincide con esto al notar cierto círculo vicioso presente en las paradojas.

alzan algunos inconvenientes como su evidente ambigüedad. La paradoja de *El Mentiroso* es un caso extremo de esta ambigüedad.

Otro filósofo medieval también fue Juan Buridán. En su obra *Sophismata* se consigna al menos dos versiones de la paradoja de *El Mentiroso*. El primero que mencionaremos es conocido como un ciclo de mentirosos.

Sócrates: (S) "Lo que dice Platón es falso"

Platón: (P) "Lo que dice Sócrates es verdad" [25]

Si Sócrates se refiere a la proposición P de Platón y Platón a la proposición S de Sócrates, entonces S es verdad si y solo si S es falsa. Y lo mismo pasa con P. Visto así, aunque ninguna de las proposiciones se refiere directamente a sí misma, juntas son autorreferenciales indirectamente: cada una se refiere a sí misma implícitamente por medio de la otra. Este es el noveno sofisma de Buridán. (Clark, 2009: 139)

La siguiente versión mentirosa es conocida como *El Puente*.

> "Sócrates llega a un puente guardado por un poderoso señor, Platón, y le ruega que le permita cruzar. Este le contesta:
> Juro que si la próxima cosa que digas es verdadera, te dejaré pasar, pero si es falsa, te arrojaré al agua.
> Sócrates responde:
> Me vas a arrojar al agua.
> Si Platón no lo tira al agua, Sócrates habrá dicho algo falso y merecerá que lo arrojen; pero, si Platón lo arroja, Sócrates habrá dicho una verdad y no merece ser arrojado al agua."

[25] En la época contemporánea esta paradoja será reformulada de otra manera, y será más conocida como la paradoja de la Tarjeta de Jourdain. En la paradoja de la Tarjeta de Philip Edward Bertrand Jourdain se presenta una tarjeta en uno de cuyos lados está escrita la oración:
(1) *Al dorso de esta tarjeta hay una oración verdadera*
Se da la vuelta a la tarjeta y se lee lo siguiente:
(2) *Al dorso de esta tarjeta hay una oración falsa*
La única forma genérica de esta paradoja es
(X) La oración (X + (-1) (X-1)) tiene la propiedad de ser Y, donde si X=1, Y es "verdadera", y si X=2, Y es "falsa".

(Clark, 2009: 214) [26]

Este es el sofisma XVII de la obra “Sophismata” escrita por Juan Buridán en el siglo XIV pero se remonta a Crisipo (circa 280-circa 207 a. C.). Esta misma paradoja fue luego recuperada para la literatura y, por ello, también se le conoce como la paradoja de Miguel de Cervantes Saavedra o la paradoja de El Quijote (1995: 409-411) la cual se narra, en la segunda parte de *El Ingenioso Hidalgo Don Quijote de la Mancha*. Vamos a exponerla solo para mostrar que esta es un ejemplar de *El Puente*.

Se dice que apenas Sancho Panza logró ser alcalde de Barataria, tuvo que resolver una consulta jurídica inmediata que un forastero planteó detalladamente de la siguiente manera:

> “Señor, un caudaloso río dividía dos términos de un mismo señorío […] Sobre este río estaba una puente, y al cabo de ella, una horca y una como casa de audiencia, en la cual habían de ordinario cuatro jueces, que juzgaban la ley que puso el dueño del río, de la puente, y del señorío, que era en esta forma: “Si alguno pasare por esta puente de una parte a otra, ha de jurar primero adónde y a qué va; y si jurare verdad, déjenle pasar; y si dijere mentira, muera por ello ahorcado en la horca que allí se muestra, sin remisión alguna”. Sabida esta ley y la rigurosa condición de ella, pasaban muchos, y luego, en lo que juraban se echaba de ver que decían verdad, y los jueces los dejaban pasar libremente. Sucedió, pues, que tomando juramento a un hombre, juró y dijo que para el juramento que hacía, que iba a morir en aquella horca que allí estaba, y no otra cosa. Repararon los jueces en el juramento y dijeron: “Si a

---

[26] Ahora, formalmente, precisemos este argumento paradójico mediante un lenguaje más claro.

1. Lo que dice el pasante es la oración “Voy a morir en la horca”.
2. Si la oración antedicha es verdadera, el pasante no morirá en la horca, y si no muere en la horca, entonces pasará por el puente.
3. Si la oración antedicha es falsa, el pasante morirá en la horca.

Por lo tanto, lo que dice el pasante es verdadero si y solo si es falso.

Formalicemos esta paradoja mediante el lenguaje de la lógica de segundo grado con identidad. Esta es la notación utilizada: t es la abreviatura de lo dicho por el pasante, m es el significado de lo dicho por el pasante o sea la oración “Voy a morir en la horca”, p es el significado de la oración “Voy a pasar por el puente”. “F” indicará la propiedad de ser una falsedad o mentira, y “V” la propiedad de ser verdadera.

1. $t=m$
2. $[\ V(t) \rightarrow \sim m\ ] \wedge (\sim m \rightarrow p\ )$
3. $F(t) \rightarrow m$ // $\therefore$ $V(t) \leftrightarrow F(t)$

> este hombre le dejamos pasar libremente, mintió en su juramento y, conforme a la ley debe morir, y si le ahorcamos, él juró que iba a morir en aquella horca y, habiendo jurado verdad, por la misma ley debe ser libre. Pídese a vuestra merced, señor gobernador, qué harán los jueces (…).” (1995: 409-411)

Desde un punto de vista lógico, no se puede tomar una decisión, ya que si la oración “Voy a morir en la horca que allí está” es falsa, entonces debe ser colgado, lo cual implica que la oración es verdadera. Por otra parte, si la oración es verdadera, entonces lo deben dejar pasar por el puente, pero cuando esto suceda la oración será falsa. Y así, sucesivamente, hasta el infinito. En términos lógicos:

1) Si “p” es falsa, entonces debe ser colgado; pero si es colgado, entonces “p” es verdadera.

2) Si “p” es verdadera, entonces debe pasar por el puente; pero si pasa, entonces “p” es falsa.

3) Si “p” es falsa ….

Con respecto a la paradoja de los abogados ocurre algo similar. El tribunal podría razonar que, si decidiese fallar a favor de Euatlo, este ganaría un caso y estaría obligado por el pacto a pagar los honorarios a su maestro, pero si esto ocurriera, entonces debería fallar a favor de Protágoras. Sin embargo, si fallara a favor de Protágoras, entonces, Euatlo no estaría obligado por el pacto a pagar, pero si esto ocurriera, entonces debería fallar a favor de Euatlo, y así, sucesivamente, hasta el infinito.

1) Si el tribunal falla a favor de Euatlo, entonces este ganaría su primer juicio y le debería pagar los honorarios a su maestro; pero si el tribunal falla a favor de Protágoras, entonces le debería pagar sus honorarios.

2) Si el tribunal falla a favor de Protágoras, entonces Euatlo no habría ganado su primer juicio y no debería pagarle sus honorarios; pero si el tribunal falla a favor de Euatlo, entonces no debería pagarle sus honorarios.

3) Si el tribunal falla a favor de Euatlo…

Para mostrar este mismo problema desde otra perspectiva igualmente paradójica podemos construir tanto el dilema (o argumento) de Protágoras como el contradilema (o contra-argumento) de Euatlo.

Protágoras, quien sostiene que Euatlo tiene que pagarle, dice: "Si gano este juicio, entonces (en virtud de mi demanda válida) tendrás que pagarme, pero si no gano, entonces (a causa de nuestro pacto), tendrás que pagarme. Además, gano o no gano este juicio. Por lo tanto, tú, Euatlo, tendrás que pagarme". Formalizando tenemos:

$[(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow q) \wedge (p \vee \sim p)] \rightarrow q$

Euatlo, quien sostiene que él no está obligado a pagarle, dice: "Si gano este juicio, entonces (a causa de que tu demanda no fue validada) no estoy en la obligación de pagarte, pero si no gano este juicio, entonces (en virtud de nuestro pacto) tampoco debo pagarte. Además, gano o no gano este juicio. Por lo tanto, no estoy en la obligación de pagarte".

Formalizando tenemos:

$[(a \rightarrow \sim q) \wedge (\sim a \rightarrow \sim q) \wedge (a \vee \sim a)] \rightarrow \sim q$

Tomemos en cuenta que Euatlo dijo lo mismo que dijo Protágoras para defenderse siendo al mismo tiempo sus discursos contradictorios entre sí. Esta simetría argumentativa hace más interesante y compleja la paradoja de los abogados en comparación con la de *El Puente* y la de *El Quijote*.

Sin embargo, así como hay evidentes semejanzas entre la paradoja de Protágoras y la de *El Puente* también existen ciertas diferencias que debemos notar. La diferencia primordial está en que en *El Puente* solo hay un argumentador que mediante su aserción introduce la paradoja, en cambio, en la paradoja de Protágoras existen dos posiciones contrapuestas que son ambas válidas desde sendos puntos de vista. Otra diferencia reside en que la mentada paradoja difiere de la paradoja de *El Puente* porque esta última solo usa nociones proposicionales vinculadas a la verdad o la falsedad mientras que la de Protágoras hace uso de operadores deónticos.

Los intentos antiguos por resolver el problema de las paradojas parecen haber caído en completo olvido en la época moderna. Los lógicos matemáticos no tuvieron tampoco conocimiento de ellas. A finales del s. XIX volvió a emerger de nuevo el antiguo problema, y esta vez bajo una forma nueva: junto a *El Mentiroso* aparecen toda una serie de paradojas que no son semánticas. Los lógicos comenzaron, como es natural, a buscar soluciones al igual que en la Antigüedad y en la Edad Media. Russell será uno de los que consignen a la paradoja de *El Mentiroso* en su *Principia*:

> "(…) comenzaremos por la enumeración de algunas de las importantes e ilustradoras de estas contradicciones, y mostraremos luego cómo todas ellas se fundan sobre falacias que encierran un círculo vicioso, y cómo, por consiguiente, quedan todas salvadas por la teoría de los tipos. (…) La solución se ha de buscar en un examen de los conceptos lógicos fundamentales como el que se ha acometido en las páginas que preceden:
>
> > (1) La contradicción más antigua del tipo en cuestión es el *Epiménides*. Epiménides el cretense dijo que todos los cretenses eran mentirosos, y que todos los otros enunciados hechos por los cretenses eran ciertamente mentiras. ¿Fue esta una mentira? La forma más simple de esta contradicción nos la ofrece el hombre que dice "miento"; si miente, dice la verdad y viceversa." (1910: 63)

Esto constata claramente que Russell ya conocía la paradoja de *El Mentiroso*. Pero, nosotros también consideramos él conocía sus otras versiones que ciertamente guardan conexión. En este sentido, tenemos las declaraciones del propio Russell acerca de *El Mentiroso*: "(…) Es este un viejo rompecabezas y nadie lo consideró nunca sino a título de pasatiempo, hasta que se encontró que tenía que ver con problemas concretos e importantes como el de si hay un número cardinal u ordinal mayor que todos. Entonces, por fin, fueron tomadas en serio estas contradicciones. (…)" (Russell, 1986: 231)

Las otras paradojas que Russell menciona son las siguientes:

> "De Russell: Sea *w* la clase de todas las clases que no son miembros de sí mismas. ¿Es *w* miembro de sí misma? Como en la paradoja anterior cualquier posible respuesta conduce a una contradicción.
>
> Sea *T* la relación entre dos relaciones *R* y *S* que se da cuando *R* no tiene la relación *R* con *S*. ¿Tiene *T* la relación *T* con *T*? Cualquier posible respuesta conduce a una contradicción.
>
> De Burali-Forti: Se sabe que toda serie bien ordenada (como es el caso de la serie de todos los ordinales) tiene su número ordinal y que el ordinal de una serie de números ordinales es una unidad mayor que el mayor ordinal de la serie. ¿Cuál es el ordinal de la serie de todos los ordinales? Si lo llamamos Ω, la serie de todos los ordinales, que incluirá Ω, tendrá, como mínimo, el número ordinal $\Omega + 1$, luego Ω no es el ordinal de la serie de todos los ordinales.
>
> De Berry: "The least integer not nameable in fewer than nineteen syllables", es decir, el menor número entero que no se puede nombrar, en inglés, con menos de diecinueve sílabas. ¿Existe? Por un lado, parece obvio que de todos los números que no se pueden nombrar en inglés, con menos de diecinueve sílabas habrá uno que será el menor. Por otro lado, la frase entrecomillada muestra que dicho número se puede nombrar en inglés con dieciocho sílabas, lo cual es una contradicción.
>
> Del menor ordinal indefinible: ¿Existe? Se sabe que el número de posibles definiciones es menor que el número de ordinales transfinitos por lo que hay ordinales indefinibles. Puesto que los ordinales forman una serie bien ordenada, debe haber un ordinal indefinible que sea el menor. Sin embargo, es definible mediante la expresión "el menor ordinal indefinible".
>
> Paradoja de Richard: Sea *E* la clase de todos los números decimales que pueden ser definidos mediante un número finito de palabras. *E* es numerable porque el conjunto de series finitas de palabras lo es. Sea *N* el número cuya enésima cifra es *(p+1)mód10*, siendo *p* la enésima cifra del enésimo número de *E*. ¿Pertenece *N* a *E*? No, porque al menos se diferencia en una cifra de cualquier número de *E*. Sí, porque *N* ha sido definido mediante un número finito de palabras." (Benito Santos, 2007: 13-14)

Para Russell, todas las paradojas por él estudiadas proceden de la violación que denominó el principio del círculo vicioso: *lo que presupone la totalidad de una colección no debe ser un miembro de la colección o ninguna totalidad puede contener miembros solamente definibles en términos de la misma totalidad* [27] [28]. Por lo tanto, el argumento de una función no puede involucrar la propia función. Esto conduce a una jerarquía de funciones y proposiciones desarrollada en la teoría ramificada de los tipos lógicos. Esto lo veremos en el capítulo III de esta tesis.

Según Russell, la paradoja se produce por la ambigüedad del lenguaje, es decir, por la falta de especificación de la jerarquía de las proposiciones. "Estoy diciendo una mentira" puede interpretarse como: "Hay una proposición que yo estoy afirmando y que es falsa", esto es: "Yo afirmo *p*, y *p* es falsa". Para deshacerse de la ambigüedad, es necesario especificar el orden[29] de la falsedad, o lo que es lo mismo, el orden de la proposición a la que se adscribe

[27] En Copi (1995: 360), se presenta el principio del círculo vicioso de la siguiente manera: "Cualquier cosa que involucre toda una colección no debe ser de la colección". Ahora bien, Ramsey pone en duda la validez del mismo sosteniendo que podemos referirnos a un hombre como el más alto de un grupo identificándolo así por medio de una totalidad de la que él mismo es un miembro sin que haya ningún círculo vicioso. (Ramsey, 1968: 39)

[28] Es importante advertir que este principio del círculo vicioso no es lo mismo que la falacia del círculo vicioso. Según García Zárate (2012: 38), el círculo vicioso alude a un defecto que tiene un argumento y se produce cuando tratamos de probar una primera cosa en función de otra segunda cosa que, a su vez, presupone que ya está probada la primera, por lo que volvemos al punto de partida, como si estuviéramos describiendo un círculo. En pocas palabras, consiste demostrar la verdad de una proposición por medio de otra, y luego demostrar la verdad de la segunda por medio de la verdad de la primera. El círculo es vicioso en el sentido de que conduce al fracaso de nuestro intento. Ejemplo: "Un buen médico cura la mayoría de sus pacientes porque ha tenido una buena educación médica; pues un hombre con una buena educación médica es un buen médico que cura la mayoría de sus pacientes". El principio del círculo vicioso alude a la errónea manera de definir ciertos elementos en relación a una agrupación; en cambio, la falacia del círculo vicioso refiere a una falla argumentativa que impide afirmar la validez de una inferencia.

[29] El orden de una función proposicional indica el universo sobre el cual el cuantificador está siendo aplicado. Si la función proposicional contiene cuantificadores solo sobre variables individuales, se dice que es una función de primer orden. Si contiene cuantificadores sobre funciones de primer orden, se dice que es de segundo orden y así sucesivamente. (Copi, 1995: 357)

la falsedad. Así, Bertrand Russell en sus *Principia Mathematica* dirá que, según la jerarquización de las proposiciones: "Si *p* es una proposición de orden *n*, la proposición *q* que incluya a *p* como variable no es de orden *n*, sino de un orden más alto". Por lo tanto, se hace evidente que la verdad o falsedad que pueda pertenecer al enunciado "Hay una proposición *p* que yo estoy afirmando y esta tiene una falsedad de orden enésimo" tiene una verdad o falsedad de un orden superior al enésimo. De este modo, el enunciado no cae dentro de su propio alcance y, por consiguiente, no surge la contradicción.

El problema de esta solución de la jerarquía de las proposiciones y los distintos niveles lógicos es que, por un lado, parece que estamos construyendo *ad hoc* un universo más allá de lo postulado para salvar la coherencia lógica de nuestro universo primitivo. Por otro lado, aun cuando esta hipótesis fuera correcta, podría servir para disolver la paradoja de afirmaciones como "Estoy diciendo una mentira" pero no para otras formas de esta paradoja como las formulaciones no autorreferenciales, es decir, las afirmaciones que no se refieran directamente a su propio valor de verdad. Un ejemplo es la siguiente versión asociada a Jourdain: "La oración posterior es cierta" y "La oración anterior es falsa". Cada uno de estos enunciados no nos lleva a una paradoja por separado, pero juntos sí constituyen una auténtica paradoja.

Independientemente de las críticas que se pueden hacer a la solución de Russell para enfrentar a las paradojas, hay que reconocer que, según Haack, no solo ofrece una solución formal sino también un fundamento filosófico: el principio del círculo vicioso (1982: 164). Además, es el primer intento serio de solucionar un grupo importante de paradojas (Benito Santos, 2007: 14). Asimismo, la sugerencia ruselliana parece haber influido en otras propuestas posteriores que ofrecen soluciones análogas a las de Russell. Por ejemplo, para solucionar este problema, Tarski (1997: 63-108), antes de anular la validez de las leyes lógicas en el lenguaje natural, prefiere dividir dicho lenguaje en dos niveles: lenguaje objeto y metalenguaje. Es importante mencionar que el metalenguaje posee una riqueza esencial con respecto al lenguaje objeto. Esto evita que las oraciones que se refieran a sí mismas (como *El Mentiroso*) o a otras se confundan con las oraciones que no hablan sobre sí mismas[30]. Entonces, para evitar *El Mentiroso* se exige que las oraciones que prediquen verdad de otras oraciones (o de sí mismas) estén en un nivel superior llamado "metalenguaje". Con ello, el razonamiento anterior, que justifica la contradicción presente en *El Mentiroso*, ya no funciona. Veamos. Supongamos que A es la proposición "Yo miento". La recomendación de Tarski implica que modifiquemos dicha expresión del siguiente modo: A es la proposición "Yo miento-en-L-1", sin embargo, la afirmación de la verdad o falsedad de A está en L-2. Ahora bien, si es verdad que yo miento-en-L-1, entonces el hecho de que yo hago afirmaciones falsas-en-L-1 sería expresado por A en L-2. Es decir, si A es verdad-en-L-2 entonces A es falso-en-L-1. Pero, si es falso que miento-en-L-1, entonces el hecho de que yo hago afirmaciones verdaderas-en-L-1 sería expresado por A en L-2. Es decir, si A es falso-en-L-2 entonces A es verdad-en-L-1. Inmediatamente, es fácil ver que la verdad-en-L-2 de A no implica la falsedad-en-L-2 de A, y que la falsedad-en-L-2 de A no implica la verdad-en-L-2 de A. Así, haciendo uso de los niveles del lenguaje la paradoja desaparece.

[30] Esto está vinculado con el teorema tarskiano acerca de la indefinibilidad de la verdad en un mismo lenguaje. De acuerdo a este teorema, la central noción semántica de verdad puede ser definida para un lenguaje de primer orden tan solo a través de un metalenguaje más rico. Es decir, la noción de verdad en una teoría no puede definirse dentro de la misma teoría, con sus propios recursos; para definirla, hay que salir fuera de ella, a una metateoría con más recursos expresivos. (Mosterín y Torreti, 2002: 573)

CAPÍTULO II

DESCUBRIMIENTO Y CLASIFICACIÓN DE PARADOJAS

> *Cantor destruye el fundamento de la tesis de Nietzsche [sobre el Eterno Retorno]. Afirma la perfecta infinitud del número de puntos del universo, y hasta de un metro de universo, o de una fracción de ese metro. La operación de contar no es otra cosa para él que la de equiparar series. (...). El conjunto de los números naturales es infinito, pero es posible demostrar que son tantos los impares como los pares.*
>
> **BORGES**

En esta segunda parte nos ocuparemos de determinar el modo cómo se gestó la paradoja de las clases[31] propuesta por Bertrand Russell dentro del seno de su investigación sobre las relaciones entre la lógica y la matemática. A esto es lo que llamamos, tomando como base una dicotomía planteada por Hans Reichenbach, “contexto de descubrimiento”. Sin embargo, nosotros no queremos investigar el estado psicológico de la mente de Russell y saber lo que estaba pensando a la hora de construir su paradoja. Más bien, nosotros buscamos establecer la manera en la que derivó su paradoja considerando la información previa que ya manejaba. Por este motivo, una vez que exponemos las tesis de Kleene y Kilmister, pasamos a detallar nuestra propia perspectiva al respecto. Después de determinar esto, buscaremos establecer una clasificación de todas las paradojas que estaban involucradas con el trabajo de Bertrand Russell. Intentaremos, en la medida de nuestras posibilidades, formalizar en lenguaje lógico todas estas paradojas.

[31] Para Russell, una clase es una conjunción numérica de términos. Así, la clase de los hombres es el objeto (o grupo de objetos) denotado por el concepto *hombres*. (Russell, 1983: 98)

2. 1. Contexto de justificación y contexto de descubrimiento

Lo que buscamos en este trabajo es exponer el contexto de descubrimiento de la paradoja de Russell. Es decir, lo que queremos es conocer el proceso lógico e intelectual que desarrolló Russell en relación a la investigación en la que él estaba involucrado. Para aclarar lo que estamos interesados en conseguir definiremos dos conceptos relacionados:

a) Contexto de descubrimiento. Este concepto, propuesto por Reichenbach, comprende la producción de hipótesis y teorías, el hallazgo y la formulación de ideas, la invención de conceptos; todo ello relacionado con las circunstancias personales, psicológicas, sociológicas, políticas, económicas y tecnológicas que pudiesen haber influido en la gestación y aparición de dichas producciones (Speltini *et. al.*, 2006: 3). Es decir, este concepto alude a la manera de hallar un conocimiento y a todos los pormenores psicológicos, sociológicos y demás que pudieran haber tomado parte en el proceso de hallazgo del nuevo saber.

b) Contexto de justificación. Este concepto, también propuesto por Reichenbach, aborda cuestiones de validación, es decir, cómo saber si el resultado final de una investigación es auténtico o no, si la creencia en tales o cuales conclusiones es verdadera o falsa, si una teoría es lógicamente aceptable, si las evidencias la apoyan, si realmente ha incrementado el conocimiento disponible, etc. (Speltini *et. al.*, 2006: 3). Es decir, este concepto alude a lo que ya Carnap denominó 'reconstrucción lógica de teorías', esto es, la evaluación de los resultados finales de la investigación científica, la misma que consta de hechos descubiertos, teorías elaboradas y métodos lógicos utilizados. (Echeverría, 1998: 52-53)

Consideramos que el contexto de justificación no presenta mayor problema puesto que la paradoja de las clases formulada por Russell ha sido expuesta en numerosos tratados, libros, revistas y artículos. Sin embargo, el contexto de descubrimiento asociado al proceso racional que posibilitó que Russell formulara su paradoja no parece haber sido totalmente esclarecido[32]. Este es un tema algo espinoso pues, sencillamente, algunos pensadores sostienen que la creatividad científica es algo inescrutable a la investigación. Sucede, pues, que algunos hallazgos científicos han sido resueltos en sueños de cansancio, o algunos otros procesos irracionales difíciles de especificar. Ahora bien, debemos aclarar que nuestra intención no es dar explicaciones del modo en que se le ocurrió a Russell su paradoja. Tal actividad parece condenada a un escrutinio oscuro, confuso y que fácilmente se presta a la especulación. Lo que buscamos es emprender la tarea de dar cuenta de aquellas actividades que Russell realizó y que lo llevaron a formular su propia paradoja.

2. 2. Descubrimiento de la paradoja de Russell

Desdoblaremos esta parte en dos. La primera sección, que viene enseguida, tratará acerca de la actividad intelectual que Russell realizaba al abocarse a sus investigaciones sobre las bases fundamentales de la matemática, en particular, tendremos noticia de cómo fue concibiendo su propia versión del 'logicismo'. En la segunda sección, intentaremos desarrollar, de modo racional, una manera en la que posiblemente Russell dio con su paradoja mediante la previa presentación de dos perspectivas involucradas.

[32] Pero, hay algunas fuentes relevantes. Por ejemplo, A. Coffa: "The humble origins of Russell's paradox" (1979) y I. Grattan-Guinness: "How Bertrand Russell discovered his paradox" (1978).

2. 2. 1. Aspectos epistémicos: las investigaciones inspiradoras[33]

En 1901, Russell discutió cómo la nueva filosofía cantoriana del “infinito” y la “continuidad” resolvía las cuestiones fundamentales de la filosofía de las matemáticas, incluyendo los cuatro argumentos de Zenón que involucraban los conceptos de “continuidad”, “infinitud” y “movimiento”. Pero, Russell también mencionó la existencia de un error en el razonamiento de Cantor, aunque Russell para señalarlo usó el término ‘falacia’:

> “(…) Hay un máximo de todos los números infinitos, que es el número de todas las cosas juntas, de toda clase y tipo. Es evidente que no puede haber un número mayor que este, pues si se ha tomado todo, no queda nada por añadir. Cantor tiene una prueba de que no hay un número máximo, y si esta prueba fuese válida, las contradicciones del infinito reaparecerían en forma sublimada. Mas, en este punto, el maestro se hace culpable de una falacia muy sutil que espero explicar en algún trabajo futuro.” (Russell, 1949: 93) [34]

---

[33] Esta parte se basa en Garciadiego (1992: 136-153).

[34] El argumento de la diagonal puede emplearse para demostrar que el superconjunto de los números naturales (el conjunto de todos sus subconjuntos) es más grande que el conjunto de los números naturales. Todo conjunto de números naturales puede describirse simplemente escribiendo verdadero o falso según el enésimo número natural sea o no miembro del conjunto. Por ejemplo, el conjunto de los números pares es <falso, verdadero, falso, verdadero, …>. Una correspondencia de uno-a-uno entre el conjunto de números naturales y su superconjunto tendría el aspecto siguiente.

Pares:	**falso**	verdadero	falso	verdadero	…
Impares:	verdadero	**falso**	verdadero	falso	...
Primos:	falso	verdadero	**verdadero**	falso	…
Cuadrados:	verdadero	falso	falso	**verdadero**	…

La secuencia diagonal es < falso, falso, verdadero, verdadero, …>. Considérese ahora la secuencia resultante de invertir todos los valores de verdad: < verdadero, verdadero, falso, falso, …>. La secuencia definida por esta antidiagonal no puede estar en la lista. Diverge por lo menos una vez de cada secuencia de la lista.

A partir de lo anterior, Cantor demuestra que el superconjunto de todo conjunto (el conjunto de todos los subconjuntos de ese conjunto) siempre posee una cardinalidad mayor que el conjunto. Se sigue de ahí que existe una jerarquía infinita de números transfinitos.

Cuando Russell calculó cuántas cosas había en el universo, llegó a un conjunto que las incluía a todas. El número de cosas dentro de este conjunto debe ser el número mayor puesto que no existe nada más que añadir. En consecuencia, Russell sospechó que el argumento de la diagonal cometía algún tipo de falacia sutil.

Russell cayó en la cuenta de que la antidiagonal se parecía a la paradoja de *El Mentiroso*. Al interpretar “Este juicio es falso” uno se ve obligado a cambiar continuamente falso por verdadero y verdadero por falso. La construcción de la antidiagonal sigue el mismo sendero zigzageante.

Sin embargo, esta objeción al argumento de la diagonal resultó contraproducente. En mayor de 1901, mientras terminaba *Los principios de la matemática*, Russell se dio cuenta de que la paradoja de *El*

Russell no utilizó la palabra “contradicción” para describir el ‘error’ (o ‘falacia’) de Cantor. Por esta época, nuestro filósofo todavía creía que las matemáticas eran una ciencia consistente (que no albergaba enunciados de la forma “P $\wedge \sim$P”); pero, si la ‘falacia’ de Cantor permanecía, entonces las “contradicciones” de Zenón aún serían válidas. Esto sucedería puesto que el teorema de Cantor aplicado a conjuntos de infinitos elementos permitiría la construcción de conjuntos cuya medida sería de difícil determinación, lo cual haría discutible cualquier comparación del tamaño de unos conjuntos con otros.[35]

Mentiroso posee un parecido más dañino con una variante leve de este conjunto universal: el conjunto de Russell, es decir, el conjunto de los conjuntos que no se contienen a sí mismos. (Sorensen, 2007: 258)

[35] Russell se interesó por las paradojas de Zenón. Por ejemplo, se ocupa de esta:
Si las cosas son múltiples, es necesario que sean tantas como son, y no más ni menos. Ahora bien, si son tantas como son, serán finitas en número.
Si las cosas son múltiples, entonces serán infinitas en número, porque siempre habrá otras cosas entre ellas y de nuevo otras entre estas. De ahí que las cosas sean infinitas en número.
Con esta paradoja, Zenón pretende demostrar que todo es uno y no múltiple porque si lo fuera, esto conduciría a contradicción. Y la observación de Russell es que los números infinitos son tan definidos como los finitos, por ende, el número de cosas en el mundo bien puede ser múltiple.
Otra paradoja que le interesa a Russell es la de Aquiles. Según Clark (2009: 22):
“Aquiles corre más rápido que la tortuga, por lo que le concede una ventaja: él empieza en d_1 y la tortuga en d_2. Cuando Aquiles recupera la ventaja y llega a d_2, la tortuga está en d_3. Cuando él llega a d_3, ella está en d_4. Cada vez que Aquiles salva la distancia que los separa, la tortuga se ha alejado un poco. ¿Logrará Aquiles alcanzar a la tortuga, teniendo en cuenta que deberá recorrer un número infinitos de tramos?”
Aunque también existen estas otras versiones:
“[Forma progresiva] Aquiles no puede llegar hasta el final de la pista, dado que tendría que recorrer un número infinito de intervalos. Primero tendría que llegar al punto medio y, luego al punto medio de cada distancia que quedase y así sucesivamente, de tal forma que atravesaría una sucesión infinita de intervalos”
“[Forma regresiva] Antes de llegar al final de la pista, Aquiles tiene que recorrer la primera mitad, y, antes de recorrerla, debe recorrer la primera mitad de ella, a saber, el primer cuarto y, antes, el primer octavo, etcétera. No puede llegar a ningún lugar distinto de la salida sin recorrer primero un número infinito de intervalos”. (Clark, 2009: 187)
Para demostrar que el movimiento es imposible Zenón sostiene que Aquiles no puede alcanzar a la tortuga, ya que si el movimiento fuera posible, Aquiles tendría que recorrer un número infinito de tramos en un tiempo finito, lo cual es contradictorio. Frente a esto, Russell sostiene que podemos pasar del 0 al 1 habiendo recorrido una infinidad de números reales, ya que no se requiere para ellos haberlos enumerados uno por uno. Russell infiere, como era de esperarse, que Zenón está en un error al afirmar que no se puede recorrer un número infinito de puntos que formen una distancia en un tiempo finito. (Tomasini, 2016)

Analizando estos conceptos, Bertrand Russell en *Los principios de la matemática* construye una nueva paradoja[36] para relacionarla con la de Aquiles y la de Cantor. Esta es la denominada "paradoja de Tristam Shandy". Aquí la reproducimos:

> "Tristam Shandy, como sabemos, tardó dos años en escribir la historia de sus dos primeros días de vida, y se lamentaba que a ese paso se le acumularía el material con mayor rapidez que la que podría emplear para trabajar con él, de modo que nunca terminaría. Sin embargo, sostengo que si hubiese vivido eternamente y no hubiese desfallecido en su propósito, aun cuando su vida hubiese seguido estando tan llena de acontecimientos como en sus comienzos, sin embargo, ninguna parte de su biografía habría permanecido sin escribir. Esta paradoja, que demostraré, es estrictamente semejante a la de Aquiles y puede llamarse de Tristam Shandy." (Russell, 1983: 407)

Enseguida, el filósofo británico expondrá esta paradoja en forma estrictamente lógica:

> "1) Tristam Shandy escribe en un año los acontecimientos de un día.
> 2) La serie de días y años no tiene último término.
> 3) Los acontecimientos del n-simo día se escribe en el n-simo año.
> 4) Cualquier día dado es el n-simo, para un valor adecuado de n.
> 5) En consecuencia, se escribirá sobre cualquier día asignado.
> 6) Por lo tanto, no quedará sin escribir parte alguna de la biografía.
> 7) Como existe una correlación biunívoca entre los tiempos de los sucesos y los tiempos en que se escriben, y los primeros son parte de los últimos, el todo y la parte tienen el mismo número de términos." (Russell, 1983: 408)

De acuerdo a Clark, incluso a un ritmo constante de dos años por cada dos días de biografía, el protagonista de la novela de Laurence Sterne podría poner por escrito toda su vida, si viviese eternamente, es decir, si viviera un número infinito de días. Esto es así porque cada par de días de vida pueden hacerse corresponder con un par sucesivo de años que tarda en redactar esos días, si bien su memoria necesitará retrotraerse cada vez más, sin límite. Por ejemplo, tendrá que redactar los días 101 y 102 alrededor de un siglo después, en los años 101 y 102, y los días 1001 y 1002 los redactará casi un milenio después. (Clark, 2009: 239)

[36] En este punto es importante indicar lo que, al parecer, Russell entendía por paradoja. Todo indica que él asumía que una paradoja es una idea extraña y opuesta al sentido común o a lo establecido. Además, la paradoja se expresa mediante una proposición que, en apariencia, es verdadera pero que también contiene una contradicción lógica o un elemento contraituitivo.

Esta paradoja es una prueba de que Russell investigaba otras paradojas, como las de Cantor o Zenón, reformulándolas y tratando de transformar las situaciones problemáticas incomprensibles en esquemas teóricos más familiares y, por ende, en problemas solubles.

Es posible que Russell pensara originalmente, según dijo, en las clases, pero no en la "contradicción", de la clase de todas las clases que no son miembros de sí mismas, como consecuencia de su examen detallado de la demostración de Cantor. Desafortunadamente, según señala Grattan-Guinness (1978), no sobreviven fuentes que explícitamente apoyen esta conjetura. Las fuentes disponibles no parecen indicar, al menos directamente a partir del texto, alguna relación entre la demostración de Cantor y la formulación original de Russell de su "contradicción", contenida en el primer borrador de la parte I de *Los principios de la matemática* escrita en mayo de 1901. Sin embargo, Garciadiego argumenta que Russell llegó a interesarse en tales clases (las que no son miembros de sí mismas) a partir de su descubrimiento de posibles "falacias" o "errores" en Cantor. A este respecto, hay otra cita relevante de Russell, contenida en alguno de sus escritos autobiográficos posteriores:

> "Fui conducido a esta contradicción [de la clase de todas las clases que no son miembros de sí mismas] al considerar la demostración de Cantor de que no existe el número cardinal máximo. Pensé, en mi inocencia, que el número de todas las cosas que hay en el mundo debería ser el número máximo posible, y apliqué la demostración [de Cantor] a este número para ver lo que ocurriría. El proceso me condujo a la consideración de una clase muy peculiar. Pensando a lo largo de las líneas que hasta ahora parecían adecuadas, me pareció que una clase a veces es un miembro de sí misma y a veces no […]. La aplicación del argumento de Cantor me condujo a considerar las clases que no son miembros de sí mismas; y estas, parecía, debían formar una clase. Me pregunté si esta clase es un miembro de sí misma o no […]. Cada alternativa conduce a su opuesta y hay una contradicción." (Russell, 1976: 58)

Russell fue sencillamente conducido por la demostración de Cantor a considerar la clase de todas las clases que no son miembros de sí mismas. La "contradicción" se originó únicamente a partir de esta clase misma al cuestionar si tal clase era un miembro de sí misma o no. En cada caso, la respuesta implicaba su opuesta, resultando una “contradicción”. Como señalamos, Russell concluyó, primero, que esta clase negaba el principio de Peano que establece “que toda proposición que contenga solamente una variable es reducible a la forma ‘x es un a’ ”. Sobre un análisis más profundo, tal vez inconscientemente, Russell se percató que podía derivar una “contradicción” sin necesidad de apoyarse en el trabajo de Peano. La formulación de la clase en sí misma era contradictoria. [37]

Específicamente, Russell en correspondencia con Couturat[38] insistía en la validez del concepto de “clase de clases” aparecido en el “razonamiento” de Cantor, pero él le reprochaba haciéndole notar qué tan útil puede ser este concepto si puede asociarse con una especie de “contradicciones”. Así, Russell comprendió que el teorema de Cantor no era producto de un error sino la base de una “contradicción” real. (Garciadiego, 1992: 136-138)

---

[37] Frápolli y Romero coinciden con el origen cantoriano de la paradoja de Russell:
“La historia de una de las paradojas, (…) la paradoja de Russell, es, en líneas generales, la siguiente: Russell entró en contacto con la obra de Cantor (nacido en San Petesburgo en 1845) a través de un encargo de la revista *Mind* para recensionar una obra de Hannequin en la que se incluía un resumen de la teoría de conjuntos cantoriana. Russell pensaba que el teorema cantoriano que implica la existencia de un conjunto mayor que cualquier conjunto dado (…) no podía ser verdadero, puesto que, razonaba Russell, no puede haber un conjunto mayor que el de todas las cosas. En el transcurso de sus intentos por resolver lo que creía que era una falacia sutil, Russell (…) encontró no solo que el matemático centroeuropeo había procedido de acuerdo con un procedimiento irreprochable, sino que descubrió primero, la Paradoja del cardinal máximo, que demuestra la inconsistencia de los presupuestos cantorianos y, posteriormente, la paradoja que lleva su nombre, que demuestra la inconsistencia de los planteamientos fregeanos. (…) ” (Frápolli y Romero, 1998: 81)

[38] De acuerdo al Diccionario Filosófico:
“**COUTURAT, Louis** (1868-1914). Filósofo y lógico francés, partidario y popularizador de la fundamentación lógica, debida a *Russell* y *Whitehead,* de los principios de la matemática; investigador de las premisas del cálculo lógico contenidas en la lógica de *Leibniz*; editor de fragmentos y pequeñas obras de *Leibniz* no publicados hasta fines del siglo XIX, consagrados a cuestiones de lógica. Fue uno de los primeros autores no rusos en valorar como se merecían los resultados obtenidos en álgebra de la lógica por el científico ruso *Porietski,* cosa que hizo en su obra “El álgebra de la lógica”. En un apéndice a sus “Principios de matemática” (1905), Couturat criticó –desde las posiciones del formalismo lógico y matemático de Russell– la teoría matemática de Kant, sus fundamentos lógico-gnoseológicos. En varios artículos se manifestó contra la teoría “semikantiana” de la matemática, formulada por Poincaré.” (Rosental, M. y P. Judin, 1965: 90-91)

Ahora bien, en la primera versión de la parte I de *Los principios de la matemática*, Russell menciona una contradicción dentro de la lógica de las clases. De acuerdo con Russell:

> "(…) Vimos que algunos predicados pueden ser predicables de sí mismos. Considérense ahora a aquellos de los cuales este no es el caso. Estos son los referentes (y también lo referido) en lo que parece una relación compleja, es decir, la combinación de la no predicabilidad con la identidad. Pero no hay predicado que se adhiera a todos ellos y a ningún otro término. Para este predicado, será ya sea predicable o no predicable de sí mismo. Si es predicable de sí mismo, es uno de esos referentes por relación con los cuales fue definido, y, por lo tanto, en virtud de su definición, es predicable de sí mismo. Recíprocamente, si no es predicable de sí mismo, entonces otra vez uno de los referentes dichos, de todos los cuales (por hipótesis) es predicable y, por lo tanto, otra vez es predicable de sí mismo. *Esta es una contradicción*, la cual muestra que todos los referentes considerados no tienen predicado exclusivo común y, por lo tanto, si los predicados que definen son esenciales para las clases, no forman una clase (…).
> Se sigue de lo anterior, que no toda colección definible de términos forma una clase definida por un predicado común (…)." (Russell, 1983: 131-132)[39]

Russell interpretó esta contradicción como que había necesidad de cierto tipo de limitación cuando se definen las clases. Además, el anterior pasaje nos muestra una versión previa a la "contradicción" de Russell de la clase de todas las clases que no son miembros de sí mismas, a saber, la paradoja de las propiedades. Asimismo, podemos asumir que Russell había empezado a pensar formalmente en estas contradicciones como resultado del teorema demostrado por Cantor. Así, Russell, en base a esta contradicción, afirma que, si bien Peano sostiene que toda proposición que solamente contiene una variable es reducible a la forma 'x es un a', podemos mostrar que al menos existe una proposición que no es reducible a esta forma.

Como resultado del razonamiento de Russell, estaban surgiendo dos contradicciones casi simultáneamente. Primero, Russell había examinado el teorema de Cantor para evitar la "contradicción" conocida hoy como la 'paradoja de Cantor' o la 'paradoja del número

[39] Hemos preferido la traducción de Garciadiego.

cardinal máximo'. Por otro lado, también estaba considerando otro argumento problemático que surgió como consecuencia de sus consideraciones del teorema de Cantor. Ya se señaló que Russell escribió en su borrador de la parte I, escrita en 1901, un enunciado que contradice el principio de Peano de que toda proposición que contenga solamente una variable es reducible a la forma "x es un a"; es decir, que toda proposición de este tipo define una clase.

Efectivamente, Russell había mostrado que este no era el caso cuando se consideraban los "predicados que no son predicados de sí mismos". Su argumento es como sigue: hay una clase definida por todas las clases que no son miembros de sí mismas. La cuestión radicaba en si esta clase era un miembro de sí misma o no. Si lo era, entonces implicaría que no era un miembro de sí misma. Si no lo era, entonces significaría que era una de esas clases que no son miembros de sí mismas y, por lo tanto, era un miembro de sí misma. Así que, de cada enunciado se seguía su propia negación. Russell concluyó que esta "contradicción" significaba que había una limitación al principio de Peano. Al respecto, Alejandro Garciadiego sugiere que tal vez Russell estaba pensando en esta clase al examinar el teorema de Cantor. No era necesario aplicar el concepto a cualquier otro argumento porque era una "contradicción" en sí misma, contradiciendo el principio de Peano. (Garciadiego, 1992: 139-145) [40]

---

[40] Para reforzar esto, podemos asegurar que, de acuerdo al Principio de Peano: "Toda proposición con una variable debe poder ser reducida a la expresión *x es un a*". Es decir, la proposición con una sola variable define una clase de este modo: {x / x es un a}. De esta manera, si afirmo que "∀x Ax" (todos son abogados), esto puede representarse como "x es abogado"; igualmente, si afirmo que "∃x (Ax ∧ Px)" (algunos abogados son profesionales), esto puede reducirse a "x es abogado y x es profesional". Sin embargo, Russell encuentra una dificultad en un cierto tipo de expresión: "Los predicados que no son predicados de sí mismos". Esto serían de la forma:
X no es X
En términos formales:
~X(X)

Al respecto, se debe tener cuidadosamente en cuenta los siguientes argumentos. Antes que nada, Grattan-Guinness en *How Bertrand Russell discovered his paradox* (1978) ha afirmado correctamente que las páginas donde Russell delineó originalmente el descubrimiento de la "paradoja" no parecen haber sobrevivido, haciendo imposible determinar exactamente cuándo y cómo hizo su descubrimiento. Asimismo, Coffa en *The humble origins of Russell's paradox* (1979) argumentó que este no fue un descubrimiento súbito, sino que "surgió lentamente durante un periodo de tiempo" y no tuvo un impacto inmediato. Si estas observaciones son correctas, entonces es posible que Russell se hubiera dado cuenta de la validez del descubrimiento mientras escribía su artículo "On well-ordered series" ("Sobre series bien-ordenadas") para la *Rivista di Matematica* en junio de 1901. Ahora, distinguía su "contradicción" de los argumentos asociados con el teorema de Cantor, aunque tal vez no tan claramente cómo se podría desear. Es importante tener en mente que Russell llegó gradualmente a estar consciente de la inconsistencia; no llegó a ella súbitamente. Durante toda su vida, Russell confundió los orígenes de su inconsistencia con la de Cantor y nunca reclamó haber descubierto tal inconsistencia, aunque lo hizo inadvertidamente. Como se mencionó antes, Russell describió su contradicción, por primera vez, en un manuscrito compuesto en mayo de 1901 (recordemos el mentado primer borrador de la parte I de *Los principios de las matemáticas*). También, reveló públicamente la

---

Ejemplos de estos casos son:
-"Está escrito en francés" no está escrito en francés;
-"Está impreso en rojo" no está impreso en rojo;
-"Consta de dos palabras" no consta de dos palabras.
Llamemos a estos predicados como A. A partir de esto, podemos tener dos situaciones:
-Si A es un predicado de sí mismo entonces A no es un predicado de sí mismo.
-Si A no es un predicado de sí mismo entonces A es un predicado de sí mismo.
Sucede que no se puede afirmar que A sea predicado de sí mismo ni que no lo sea. Esto, por supuesto, rompe con el Principio de Peano.

“contradicción” de Cantor, por primera vez, en mayo de 1903, en *Los principios de las matemáticas*.

Había aun otro elemento nuevo en este relato, e indicaba que Russell tenía un problema con la teoría de los números ordinales. El 1 de febrero de 1901 había escrito a Couturat para agradecerle el envío de un artículo en el que Burali-Forti había demostrado que la ley de la tricotomía no se cumplía entre los tipos ordinales transfinitos. Por otro lado, Cantor había mostrado recientemente que esta ley se cumplía entre los números cardinales transfinitos. Russell se confrontaba ahora con la evidencia de otra “contradicción” potencial más. En una nota a pie de página añadida al final del artículo escrito en junio de 1901, Russell mencionó brevemente que Burali-Forti había negado lo que Cantor había demostrado positivamente. Russell pensó que había una posible falla en la demostración de Burali-Forti, en particular, la afirmación de que el conjunto de todos los tipos ordenados era él mismo un tipo ordenado. [41]

[41] Como cabe esperar, a pesar de sus esfuerzos, Russell no había conseguido detectar la supuesta ‘falacia’ presente en Cantor. Sin embargo, resulta importante señalar que hay semejanzas importantes entre la negación inicial de Russell de la existencia de “ω”, y su rechazo actual del teorema de Cantor sobre la cardinalidad del conjunto potencia. En 1896, Russell había negado la existencia de “ω”, argumentando que era imposible determinar “ω” cuando no había un último elemento en la sucesión infinita de los números finitos. Habiendo aceptado a “ω”, Russell argumentó que había un límite para la sucesión de los números cardinales transfinitos. Es decir, existía una clase máxima de todas las clases: la clase de clases.
Sin embargo, su realismo metafísico no le permitió aceptar la existencia ilimitada de los números cardinales porque, según dijo, una vez que se había considerado la clase de todas las clases no quedaba nada por añadirse. Por este motivo, el rechazo del teorema de Cantor parece ser una reiteración, con diferentes justificaciones filosóficas, de la razón que Russell había dado para justificar su negación de la existencia de “ω”.

Así, para junio de 1901, Russell estaba involucrado intelectualmente con tres "contradicciones" potenciales. Antes de nada, el teorema de 1892 de Cantor contradecía el concepto de Russell de una clase de todas las clases o conjunto universal. En segundo lugar, la propia "contradicción" de Russell, que estaba basada en la clase de todas las clases que no son miembros de sí mismas. Esta "contradicción" lo forzó a negar el principio básico de Peano sobre la formación de las clases, descritas por Russell en su borrador de la parte I de mayo de 1901. En tercer lugar, había también dos teoremas sobre la ley de la tricotomía, uno propuesto por Burali-Forti y el otro por Cantor, conduciendo, aparentemente, a conclusiones opuestas. Antes de junio de 1901, no parece haber evidencia alguna de que Russell tomara simultáneamente todas estas "contradicciones" en consideración mientras pensaba en los fundamentos de las matemáticas. Parece haber fallado en entender la importancia de ellas en esa época. El mismo afirma que: "primero, pensé que debía haber cierto error trivial en mi razonamiento [concerniente a la contradicción de la clase de todas las clases que no son miembros de sí mismas]. Examiné cada paso bajo un microscopio lógico, pero no pude descubrir algo equivocado." (Russell, 1976: 77) Aún más, no parece haber comunicado sus resultados a persona alguna.

Sin embargo, hay que acotar que Russell, a diferencia de otros teóricos de conjuntos, se resiste a dejar de lado estos conjuntos anómalos. Al principio dedicó tiempo a estas cuestiones simplemente porque parecían sofisterías resolubles. El tiempo perdido en "la contradicción" lo obligó a apresurarse en la fase final de la redacción de *Los principios de la matemática*. La naturaleza sistemática de ese libro hacía difícil obviar la cuestión de si esa clase se contenía a sí misma o no. Es innecesario mencionar que, probablemente, se sintió muy incómodo con estas "contradicciones", pues si bien estaba muy próximo a terminar su libro, había encontrado nuevos problemas y ninguna respuesta. En su autobiografía, sostiene que la contrariedad que sufrió cuando descubrió la "contradicción", en mayo y/o junio de 1901, fue tan severa como la sufrida al ser testigo ocular del ataque de corazón de la señora Whitehead a principios de 1901, pero en esta ocasión fue de carácter intelectual y no emocional. Russell describió el descubrimiento de su propia "contradicción" en los siguientes términos:

> "Cantor tenía una demostración de que no existe un número máximo, y a mí me parecía que el número de todas las cosas en el mundo tenía que ser el máximo posible. De acuerdo a ello, examiné su demostración con cierta minuciosidad, e hice un esfuerzo por aplicarla a la clase de todas las cosas que existen. Esto me condujo a considerar a las clases que no son miembros de sí mismas, y a preguntar si la clase de tales clases es o no es un miembro de sí misma. Encontré que cualquier respuesta implica su contraria." (Russell, 1968: 232)

Esta cita debe ser analizada con cierto detalle. Es claro que las primeras cuatro líneas tienen que ver con la inconsistencia del número cardinal máximo. El resto del párrafo está relacionado con una segunda inconsistencia: la que Russell reclamó como suya. El contenido de los manuscritos y correspondencia de Russell que ha sobrevivido parece apoyar los recuerdos de Russell si se toman literalmente. Los folios restantes de *Los principios de la matemática* de noviembre de 1900 indican que el análisis russelliano de la demostración de Cantor (hecho originalmente para evitar la inconsistencia del número cardinal máximo) le condujo a desarrollar la formulación del concepto y después a formular la "contradicción" de la clase de todas las clases que no son miembros de sí mismas. Garciadiego concuerda con Coffa en que el proceso de descubrimiento no fue de inmediato sino lento y paulatino. Las fuentes muestran a Russell hablando de la existencia de errores en Cantor, desde diciembre de 1900. Por otro lado, es posible que Russell haya llegado a convencerse de que no había nada equivocado en la demostración de Cantor cuando escribió su artículo "Sobre series bien-ordenadas", lo cual cree García Diego que ocurrió, como ya dijimos, en junio de 1901.

Debatiéndose aún entre considerar "la contradicción" como un descubrimiento importante o como un fracaso del ingenio, Russell escribió a Peano. Peano no le respondió. Por este motivo, el 16 de junio de 1902, Russell decidió acudir a un lógico sobre el que había leído en una reseña de Peano: Gottlob Frege. Le escribió para consultarle sobre su investigación un año después de haber hallado su descubrimiento. Russell acababa de descubrir que Frege también estaba trabajando en el programa logicista y que había hecho progresos. Quizá pudiera resolver la paradoja. La carta de Russell llegó cuando el segundo volumen de *Leyes básicas de la aritmética* de Frege estaba en prensa. Mientras que Russell se había tomado un buen tiempo para detectarla, Frege recibió el resultado directamente. Rápidamente cayó en la cuenta de que su quinta ley[42] daba lugar a una contradicción.[43] Este axioma permite la construcción de la clase de Russell al sostener que dos clases son iguales y solo si sus funciones correspondientes coinciden en valores para todos los argumentos posibles. En un apéndice redactado apresuradamente, Frege empieza a plantear las preguntas pertinentes: "¿Es siempre lícito hablar de la extensión de un concepto, de una clase? Y en caso contrario, ¿Cómo reconocemos las excepciones? ¿Podemos inferir siempre, a partir de la coincidencia entre la extensión de un concepto y la de otro, que todo objeto que entra dentro del primer concepto también entra dentro del segundo?" (Sorensen, 2007: 260). Frege

[42] La ley V (formalizada de este modo: (V) $\forall G \forall F(\varepsilon x(\mathrm{F}(x)) = \varepsilon x(\mathrm{G}(x)) \leftrightarrow \forall x(Fx \leftrightarrow Gx))$ sostiene que dos conceptos tienen las mismas extensiones si y solo si se aplican a lo mismo. Por ejemplo, 'perro' y 'can' refieren a la misma clase de cosas siempre y cuando las cosas que sean perros también sean canes.

[43] La expresión paradójica a la que Russell llega es: $w = cls \cap x \ni (x \sim\in x) :\supset: w \in w .=. w \sim\in w$. Esta misma expresión en notación moderna es $w = \{x: \sim(x\in x)\} \rightarrow (w\in w \leftrightarrow \sim(w\in w))$.

había creído que tenemos un acceso infalible a las verdades lógicas a través de la intuición. El axioma de abstracción (o comprehensión) afirma que cualquier condición coherente puede ser usada para determinar un conjunto. ¿Podría haber algo más claro? Sin embargo, la paradoja de Russell demuestra que esa intuición permite arribar a contradicciones.

Los análogos del axioma de abstracción (o comprehensión) son comunes en semántica. Parece que definimos algunas cosas y luego las hacemos existir. Durante el apogeo del sindicalismo estadounidense, L. S. Johnston (1940) tenía una secretaria disgustada con las organizaciones que excluían a sus secretarias. La secretaria deseaba un sindicato para aquellas secretarias que no podían ser miembro de la organización para la que trabajaban. Puesto que Johnston era un matemático familiarizado con la paradoja del conjunto de Russell, estaba en disposición de percibir que la secretaria pedía un imposible. Supóngase que hay un sindicato destinado únicamente a las secretarias que no pueden ingresar en la asociación que les da trabajo. El sindicato crece tanto que contrata a una secretaria. Supongamos que ninguna organización la excluye. ¿Puede afiliarse al sindicato de secretarias excluidas? Si reúne los requisitos para afiliarse, entonces no hay ninguna razón para que esta organización la excluya. Esto le hace perder los requisitos para la afiliación. Pero, si no cumple esos requisitos, entonces será excluida del sindicato y, por consiguiente, reúne los requisitos.

Hemos incurrido en contradicción porque damos por hecho que es posible la existencia de tal secretaria. El resultado es paradójico porque pensamos que la definición hace existir a los grupos. Si queremos crear un club de ajedrez, podemos hacerlo declarándonos miembros del club. Gottlob Frege tenía la misma intuición acerca de las clases: cualquier condición que pueda ser descrita es suficiente para definir una clase. (Sorensen, 2007: 256-258)

Finalmente, hay que decir que Russell consideró que su propia "contradicción" era, en comparación con las paradojas de Cantor y Burali-Forti, la más sencilla y la más primitiva, además de que su formulación involucraba elementos técnicos muy simples. Para generar esta "contradicción" solamente se necesitaba el concepto de clase y la relación de membresía ($\in$). En contraste, la contradicción del número cardinal máximo involucraba, al menos, el concepto de conjunto y de conjunto potencia, mientras la "paradoja" de Burali-Forti implicaba parte de la teoría de los números ordinales. (Garciadiego, 1992: 148-152)

2. 2. 2. Aspectos lógicos: las posibles vías deductivas

El hallazgo de la paradoja russelliana ha sido tematizado por Kleene y Kilmister. Enseguida, nosotros exponemos sendas tesis y, además, presentamos nuestra posición acerca del descubrimiento de la paradoja mencionada.

2. 2. 2. 1. La tesis de Kleene

La paradoja de Russell sugiere rechazar al elemento que causa contradicción. Este es el conjunto U, el cual será considerado como una totalidad inconsistente. Para empezar a analizarla, podemos criticar las premisas de este razonamiento paradójico, por ejemplo, podríamos ser más exigentes con la demostración del Teorema de Cantor. Quizá no detectemos ningún error, pero de lo que se trata es de ver el mecanismo o 'fisiología' de este sistema lógico, llamado paradoja. Esta actitud nos podrá llevar, como llevó a Russell, a simplificar la paradoja cantoriana para determinar la existencia del conjunto de todos los conjuntos que no se pertenecen a sí mismos.

El teorema de Cantor establece que la cardinalidad del conjunto potencia de un conjunto A es mayor (estrictamente) que la cardinalidad del conjunto A. Una simple aplicación de identidades y ciertos criterios sintácticos nos permiten constatar que efectivamente se da tal relación entre los conjuntos. Podríamos asumir que si *n* es la cardinalidad del conjunto A, entonces *2n* será la cardinalidad del conjunto potencia de A. Entonces, ya que para todo *n* que pertenezca a los reales se cumple que 2n>n, el Teorema de Cantor se verifica o comprueba. Incluso podríamos asegurar que así será para conjunto con infinitos elementos. Supongamos que *n* es el número de elementos del conjunto de los números naturales. Cantor propuso que $\aleph_0$ fuera el símbolo del primer número cardinal transfinito. Pero, ya que $2^{\aleph_0} > \aleph_0$ es intuitivamente verdadera, entonces el Teorema de Cantor sigue siendo verdadero[44]. Con este proceder este teorema queda mostrado pero no demostrado. Por ello, esta comprobación no es más que una prueba en círculos que supone algo verdadero, y luego declara corroborada su verdad. Lo que buscamos es una demostración sin presuposiciones ajenas a la matemática.

[44] Esta relación está profundamente vinculada a la hipótesis del continuo. En teoría de conjuntos, esta hipótesis es un enunciado relativo a la cardinalidad del conjunto de los números reales, formulado por Georg Cantor en 1878. Su enunciado afirma que no existen conjuntos infinitos cuyo tamaño esté estrictamente comprendido entre el del conjunto de los números naturales y el del conjunto de los reales. El nombre *continuo* hace referencia al conjunto de los reales.

El teorema de Cantor tiene dos partes en virtud de la ley de la tricotomía según la cual dados dos números se dan tres posibles relaciones $a<b$, $a=b$, $a>b$. Si a es mayor que b, entonces a no es menor que b y a no es igual a b. Pero ¿qué significa que algo sea mayor que otra cosa? Según Hunter:

> "Un conjunto A tiene un número cardinal mayor que un conjunto B sii existe una correspondencia uno a uno entre B y un subconjunto propio de A, pero no existe una correspondencia uno a uno entre B y la totalidad de A. Un conjunto C es un subconjunto propio de un conjunto D [se escribe: $C \subset D$] sii no existe ningún elemento de C que no sea elemento de D, pero existe un elemento de D que no es un elemento de C." (Hunter, 1981: 31)

Dos condiciones se necesitan para que un conjunto A sea mayor que otro B:

a) debe haber una correspondencia 1-1 entre B y un subconjunto propio de A, y

b) no debe existir una correspondencia 1-1 entre B y A.

Recordemos que el teorema de Cantor dice que el conjunto potencia de un conjunto tiene un número cardinal mayor (estricto) que el de este conjunto. Sigamos a Hunter en la demostración de este teorema tomando en cuenta las condiciones de verdad de lo mayor estricto:

1. Sea A un conjunto cualquiera. Consideremos cualquier emparejamiento de los elementos de A con elementos del conjunto potencia de A, que asigna a cada elemento distinto de A un subconjunto diferente de A. Sea S el conjunto de todos los elementos de A que no son elementos del subconjunto asignado a ellos. S es un subconjunto de A. Pero S no está asignado a ningún elemento de A, ya que si suponemos que está asignado a un elemento, por ejemplo, x de A, entonces x sería un elemento de S si y solo si no fuera un elemento de S. Esto es una contradicción. De esta forma cualquier emparejamiento de diferentes elementos de A con diferentes elementos del conjunto potencia de A deja sin emparejar algún

elemento del conjunto potencia de A. Por lo tanto, no existe ningún correspondencia uno a uno entre A y su conjunto potencia.

2. Queda por mostrar que existe una correspondencia uno a uno entre A y un subconjunto propio del conjunto potencia de A. Esto resulta fácil. Tomemos como subconjunto propio el conjunto de todos los subconjuntos que tienen como único elemento un elemento de A.

Ejemplo: Sea A el conjunto {1,2,3}. Entonces, el conjunto potencia de A es el conjunto.

{{1,2,3},{1,2},{1,3},{2,3},{1},{2},{3},∅}

A tiene tres elementos. El conjunto potencia de A tiene ocho elementos. No existe ninguna correspondencia uno a uno entre A y su conjunto potencia; pero existe una correspondencia uno a uno entre A y un subconjunto propio de su conjunto potencia: considérese, por ejemplo, el subconjunto {{1},{2},{3}}.

Debido a que el conjunto anómalo podría o no pertenecerse a sí mismo, la paradoja de Russell puede dar inicio. Pero, esto hace muy dificultosa la visión del conjunto de Russell. Por ello, Stephen Cole Kleene en *Introducción a la metamatemática* nos indica cómo derivar la paradoja de las clases a partir de la paradoja de Cantor, de modo más directo. Para ello, se vale de otras herramientas como la semejanza:

> "[La] paradoja [de Russell] puede ser extraída de la de Cantor del siguiente modo. Si prescribimos que sean (a2) [el conjunto vacío] y (b) [conjuntos arbitrarios cuyos miembros sean elementos admisibles] los elementos admisibles, de suerte que los conjuntos tengan como miembros solamente conjuntos, entonces cuando M es el conjunto de todos los conjuntos, Pot (M) = M, y el conjunto T [el conjunto de todos los conjuntos que no son miembros de sí mismos] de la paradoja se obtiene aplicando la demostración del Lema A a

> la idéntica correspondencia de 1-1 M ~ Pot (M), en la cual cada elemento de M corresponde a sí mismo en Pot(U).” (Kleene, 1974: 44)

La demostración del Lema A se lleva a cabo mediante la aplicación de un cierto criterio básico para derivar la paradoja de Russell desde la de Cantor:

> “**LEMA A**. Si S es un conjunto de subconjuntos de M, y M~S, entonces hay un subconjunto T de M que no pertenece a S
>
> **DEMOSTRACIÓN**, por el método de la diagonal de Cantor. Un subconjunto [T] de M está definido cuando se ha determinado qué elementos de M pertenecen a ese subconjunto. Ello puede disponerse estableciendo un criterio general que, para cualquier elemento m de M, determine si ese elemento pertenece o no pertenece al subconjunto. Damos ahora un criterio de esta suerte para definir T.
>
> **CRITERIO**. En la correspondencia de 1-1 dada por la hipótesis M~S, cualquier elemento m de M corresponde a un elemento s de S. Pero s es uno de los subconjuntos de M. Por tanto, o m pertenece a s, o m no pertenece a s. Si m pertenece a s, entonces m no pertenecerá a T. Si m no pertenece a s, entonces m pertenecerá a T.
>
> Supóngase ahora, contrariamente a lo que hay que mostrar, que T [de M] pertenece a S. Selecciónese aquel elemento de M, llamémosle m_1, que corresponda a T en la correspondencia de 1-1 M~S.
>
> ¿Pertenece m_1 a T? Aplicamos el criterio con m_1 en el lugar de m. Puesto que m_1 corresponde a T, el s del criterio es ahora T. El criterio da lugar a una contradicción, tanto si m_1 pertenece a T como si m_1 no pertenece a T.
>
> La suposición de que T pertenece a S conduce así al absurdo. De ahí (…) concluimos que T no pertenece a S.” (Kleene, 1974: 25)

M es semejante a S. Esto quiere decir que si hubiera una función de M a S, dicha función sería inyectiva, es decir, dado un elemento m de M podemos encontrar su única imagen correspondiente s en S. Si la imagen de m, v. g., el elemento s de S es uno de los subconjuntos de M, entonces el elemento m de M pertenecerá o no pertenecerá a s. El conjunto m que pertenezca a s, no pertenecerá a T, pero el conjunto m que no pertenezca a s, pertenecerá a T. Los elementos que pertenezcan a T no perteneciendo a s, determinarán el conjunto T que es un subconjunto de M. Supongamos que T pertenezca a S. Escojamos el elemento de M, m_1, cuya imagen sea T. De acuerdo al criterio antedicho, ya que T es un subconjunto de M, m_1 pertenecerá o no pertenecerá a T. Pero si pertenece a T, no pertenece a T, y viceversa.

Esta es una flagrante contradicción, que nos obliga a rechazar que T pertenezca a S. Entonces, queda probado que si S es un conjunto de subconjuntos de M, y M~S, entonces hay un subconjunto T de M que no pertenece a S. Y ya que S es el conjunto potencia del conjunto universal, estaríamos probando que existe un subconjunto T del conjunto universal que no pertenece a su conjunto potencia. Sin embargo, esto no puede ser posible pues Pot(U)=U. T es un conjunto de distintas características que todo conjunto que pertenece al conjunto universal. T es un conjunto de conjuntos que no se pertenecen a sí mismos, es el conjunto R de la paradoja de Russell. Este conjunto tiene elementos y, a la vez, no los tiene.

2. 2. 2. 2. La tesis de Kilmister

Kilmister (1992: 75-84) plantea una manera de estudiar varios aspectos lógicos de la paradoja que estamos analizando. Sea S la clase de todas las clases, T la clase de todas las clases de clases y U la clases de clases de clases de clases. Es decir,

- La clase S es la clase de clases.
- La clase de clases T es la clase de clases de clases.
- La clase de clases de clases U es la clase de clases de clases de clases.

Evidentemente, puesto que cualquier clase de clases de clases es automáticamente una clase de clases, pero no a la inversa, sucede que: $U \subset T \subset S$. Además, como S es una clase, pertenece a S, y puesto que T es una clase de clases, pertenece a T. Por lo cual, tanto S como T y U tienen la propiedad, bastante peculiar, de la autopertenencia.

$S \in S, T \in T, U \in U$

Esto no es todo: como T es una clase de clases de clases, tenemos que $T \in U$; y como U es una clase de clases (de clases de clases), $U \in T$. Que dos clases como estas sean elementos una de otra resulta, de nuevo, sumamente peculiar. Más aun, el mismo análisis sirve para demostrar que $S \in T$, y uniéndolo a $T \subset S$ tenemos otra situación extraña: T es parte de uno de sus propios elementos.

A partir del método de formación queda claro también que toda subclase de S (o T) es una clase de clases (de clases) y que todas las subclases de S (o T) juntas deben constituir T (o U). Es decir,

$\mathrm{Pot}(S) = T$,

$\mathrm{Pot}(T) = U$.

Por lo cual, $T \subset S$ se convierte en $\mathrm{Pot}(S) \subset S$, resultado que decididamente es extraño sin tomar en cuenta el teorema de Cantor, según el cual el cardinal de Pot(S) es mayor que el de S. En efecto, una vez que llegamos a los cardinales hay algo más que una mera apariencia de extrañeza, resulta una paradoja lógica. Pues, $\mathrm{Pot}(S) \subset S$ muestra que existe una relación uno-a-uno entre Pot(S) y una subclase de S, mientras que el teorema de Cantor dice expresamente que, aun cuando exista una relación uno-a-uno entre S y una subclase de Pot(S), no puede existir una entre Pot(S) y una subclase de S, lo cual es una contradicción. Esta es, pues, en esencia la paradoja de Cantor del mayor cardinal; y la del ordinal mayor surge de manera parecida. Cantor había establecido ambas ya desde 1896, pero no las consideró lo bastante importantes como para divulgarlas.

A fines de 1900, Russell comprobó que $T \subset S$; y así concluyó, puesto que lo anterior era $Pot(S) \subset S$, que tenía un ejemplo contrario al teorema de Cantor. Buscó un error en la prueba de Cantor y creyó (incorrectamente) que lo había encontrado.

Pensó que Cantor había supuesto la existencia de clases incluidas en u que no eran elementos de u. Tal supuesto, de haberlo aceptado Cantor, seria obviamente verdadero para la mayoría de las clases u; pero, puesto que T es una clase de clases de clases, también lo es cualquier clase incluida en T. Debe por tanto ser un elemento de T. Es decir, el supuesto sería falso si $u = T$. Cantor no supuso esto.

En este punto el relato parece dividirse. Una corriente considera que Russell investigó cuidadosamente la manera en que Cantor había probado su teorema. Esta consistía en establecer una relación uno-a-uno entre la clase α y $Pot(\alpha)$ y mostrar que el agregado particular β de elementos de α que no pertenecen a sus imágenes bajo la supuesta relación completa uno-a-uno, es un elemento de $Pot(\alpha)$ que no corresponde a ningún elemento de α. Esto muestra que la relación no es completa. Es decir, Cantor consideró una supuesta relación R entre los elementos x de α y los elementos X de $Pot(\alpha)$ y supuso que tal relación uno-a-uno completa es posible. Entonces, aquellas x para las cuales xRX pero distinta de $x \in X$ constituyen una clase de las x, es decir, una subclase de α y, por ende, un elemento de $Pot(\alpha)$. Pero, si este elemento de $Pot(\alpha)$, llamémoslo V, es tal que vRV, surge entonces la pregunta de si $v \in V$ o no. Si sucediera que v no pertenece a V, entonces tenemos que "vRV pero no $v \in V$", de tal suerte que v satisface la condición definidora de V, es decir, $v \in V$, lo cual es una contradicción. Pero, si, por otra parte, sucediera que $v \in V$, entonces esto significaría que vRV pero no $v \in V$, y de nuevo tenemos una contradicción.

Este argumento tiene un parecido sospechoso con el último que produjo la paradoja de Russell. En ese momento (1900), empero, Russell imitó la prueba de Cantor en el caso particular de α=S, de tal modo que Pot(α)=T, mediante la definición de la relación de R de uno-a-uno con la regla:

xRx	para	x en T,
xR{x}	para	x en S pero no en T.

Luego, consideró la V particular que es el agregado de aquellas x para las cuales se cumple $x \in S$ y xRX, pero no $x \in X$. Este agregado pertenece, desde luego, a T, de tal suerte que se cumple VRV, lo cual es una contradicción de la prueba de Cantor según la cual no existe ninguna v para la que vRV. Así, de hecho, si el teorema de Cantor es cierto, tenemos que sucede y no sucede que $V \in V$. Parece aquí como si ya hubiéramos deducido la paradoja de Cantor en una forma derivada del teorema de Cantor en 1900 y no en 1901, como declara el mismo Russell.

Pero esto no es cierto, ya que V no es la clase de todas las clases que no se autopertenecen, sino la clase de todas las clases de clases con esta propiedad. Al parecer fue entre la primavera y junio de 1901 cuando Russell observó que podría llegar a una paradoja partiendo de conceptos distintos, aunque se separara al mismo tiempo del teorema de Cantor.

Tampoco fue su pérdida de interés en criticar a Cantor el único cambio importante en sus ideas nacidas en este punto. Una de las razones supuestas para las paradojas fue la de una limitación ontológica insospechada –es decir, que ciertos agregados, de hechos los "muy grandes", no eran objetos matemáticos en el sentido en que lo eran los "más pequeños". Por "muy grandes" se quiere indicar que la clase, como la de todas las clases, no se puede agrandar más. Russell perdió todo el interés que hubiera podido tener en tales teorías de la "limitación de tamaño", porque la definición correspondiente del agregado de la paradoja de Russell como la clase de todas las x tales que x∈S, pero no que x∈x no es "muy grande" en el sentido en que lo es la clase de todas las clases. (Grattan-Guinness, 1977: 35)

2. 2. 2. 3. Nuestra posición

Ya hemos presentado las tesis de Kleene y de Kilmister. Pero, nosotros tenemos nuestra propia explicación acerca de cómo se pudo haber descubierto la paradoja de Russell. Para ello, partiremos de la teoría fregeana:

> "(…) El axioma fundamental de la teoría de Frege, el célebre axioma (V), es una tesis sobre las extensiones que no parece a primera vista demasiado problemático: las extensiones de dos conceptos *F* y *G* son idénticas si y solo si los dos conceptos se aplican exactamente a los mismos individuos:
> (V) $\varepsilon x(F(x)) = \varepsilon x(G(x)) \leftrightarrow \forall x\, [F(x) \leftrightarrow G(x)]$
> A partir de la operación ε, en el sistema de orden superior de Frege se puede introducir por definición la relación de pertenencia. Sean **t** y **u** dos términos singulares:
> (∈) $\mathbf{t}\in\mathbf{u} =_{def} \exists F\, [\mathbf{u}= \varepsilon x(F(x)) \wedge \mathrm{F}(\mathbf{t})\,]$
> Según esta definición, **t** es un elemento de **u** si y solo si existe una propiedad *F* tal que *F* se aplica a **t** y **u** es la extensión de *F*. Podemos probar ahora una versión del principio de comprehensión que resulta más apropiada en el contexto de las ideas de Frege:
> (PC_2) $x \in \varepsilon x(F(x)) \leftrightarrow F(x)$
> Una vez que se ha probado (PC_2) no es difícil probar que el sistema es inconsistente, pues $x \in \varepsilon x(x\notin x) \leftrightarrow x\notin x$ es una instancia de (PC_2). Esto fue lo que Frege advirtió al leer la carta de Russell. La diferencia crucial entre esta presentación de la paradoja de Russell y la presentación habitual es que la que ahora estamos considerando ubica en el centro de la escena a la identificación entre conjuntos y extensiones. Y es en esa identificación donde tenemos que buscar la explicación del carácter paradójico del resultado de Russell. Como

Frege observó correctamente, para que las extensiones pudieran cumplir el rol que él esperaba que cumplieran en la fundamentación de la aritmética, debían ser considerados *objetos* de la teoría, como los conjuntos en la teoría de Cantor. Pero, no advirtió el riesgo que implica tratar a las extensiones de los conceptos (propiedades, atributos) expresables en el lenguaje de una teoría, entidades que hoy consideraríamos propias de la *teoría semántica* del lenguaje, como objetos de *ese mismo* lenguaje. Para nosotros, la idea de modelar las extensiones de las expresiones de un lenguaje L por medio de conjuntos no es en absoluto una idea descabellada; de hecho, es lo más frecuente en la semántica formal contemporánea. Pero, precisamente para evitar las paradojas, la práctica común es tratar esos conjuntos/extensiones como entidades cuya existencia se afirma en el metalenguaje de L, no en L mismo. La paradoja de Russell, como la paradoja de *El Mentiroso* y las otras paradojas semánticas, pueden explicarse, entonces, como consecuencia del intento por expresar en el lenguaje objeto ciertos enunciados semánticos que (en el contexto de la lógica clásica) parece más prudente considerar propios del metalenguaje. Que no podamos hablar en nuestro lenguaje sobre las extensiones de nuestros propios predicados es un resultado extraño, la clase de resultado que provoca ese tipo de inquietud intelectual que no es fácil despejar. (…)" (Castro Albano, 2015)

Esta es, según Castro Albano, la paradoja de Russell. Y así, esta paradoja aparece como una paradoja semántica[45]. En lo que sigue, nosotros (inspirados en esta idea) formularemos una explicación de cómo podría haber surgido esta paradoja.

La clase universal (U) contiene todo. Por ende, debe tener el mayor número de elementos. Si esto es así, su potencia no puede tener más elementos. Pero, sucede que tiene

[45] Esto, por supuesto, rompe con la clasificación de las paradojas propuesta por Ramsey. Frank Plumpton Ramsey (1931: 1-59) en su ensayo titulado *Los Fundamentos de la Matemática* dividió a las paradojas en dos, a saber, 'paradojas lógicas' o de teoría de conjuntos y 'paradojas epistemológicas' o semánticas. Según Kleene (1974: 51) : "Ramsey (…) observó que las antinomias lógicas son (aparentemente) detenidas por la jerarquía simple de tipos, y en cuanto a las [paradojas] semánticas, se previene que surjan dentro del lenguaje simbólico por la ausencia en éste de medios requeridos para referirse a expresiones del mismo lenguaje. (…)". A la cabeza de cada tipo de paradojas se encontraban la paradoja de Russell y la paradoja de *El Mentiroso* (las cuales actuaban como condiciones sin las cuales no se garantizaba la consistencia de teorías formales o semánticas, respectivamente). El primer grupo de paradojas involucran esencialmente conceptos de la teoría de conjuntos (y también conceptos lógicos) tales como: 'clase', 'pertenencia', 'número ordinal', 'procedimiento diagonal', 'conjunto potencia', etc., y como ejemplos de ellos tenemos a la paradoja de Russell, la de Cantor y la de Burali-Forti. El segundo grupo de paradojas involucran conceptos "semánticos", conceptos "epistemológicos" (como el mismo Ramsey propuso) y también conceptos "lingüísticos" (como aseguró originalmente Peano refiriéndose a la paradoja de Richard) tales como: 'falso', 'falso de', 'definible', 'afirmación', 'pensamiento', 'lenguaje', y en fin, términos empíricos no lógicos. Como ejemplos de este segundo grupo tenemos la paradoja de *El Mentiroso* y sus variantes, la paradoja de Grelling o de Weyl (Ramsey, 1931: 20-21), la de Richard y la de Berry.

más elementos. Esto ocurre al menos, según el teorema de Cantor. Esto es extraño. Ahora bien, U no es una clase común. Sucede que como es la clase de "todo", también se debe almacenar a sí mismo. Es decir, U es miembro de U.

Por otro lado, tenemos ϕ, la clase vacía. Esta clase también es rara porque no tiene elementos. Y si no tiene elementos no se comprende cómo así es una clase puesto que una clase es siempre una colección de elementos. Sin embargo, a diferencia de U, ϕ no se contiene a sí mismo. De hecho, este rasgo es propio de la mayoría de las clases que los hombres suelen construir.

Tal vez, sería saludable pensar en las clases desde el vacío. Imaginemos que solo existe el vacío, ϕ.

$\phi = \{\}$

Enseguida, supongamos que buscamos clases que no se contienen a sí mismas y que denominamos "R" a esta agrupación. Pues bien, así puestas las cosas tenemos que

$R= \{\phi\}$

Pero, al darnos cuenta que R contiene a una clase que no se contiene a sí misma nosotros queremos saber cómo es R. Por el momento, al inspeccionar R constatamos que no se contiene a sí misma. Sin embargo, si R es así, entonces como R agrupa a las clases que no se contienen a sí mismas, R debería ser miembro de sí misma. Por este motivo, corregimos el esquema anterior y tenemos:

$R= \{\phi, R\}$

El problema con esto es que R ahora se ha convertido en una clase que se contiene a sí misma. Pero, como R solo reúne a las clases que no se contienen a sí mismas entonces R no debería estar dentro de R. Por ende,

R= $\{\phi\}$

Sin embargo, esto hace que R no se contenga a sí mismo, lo cual constituye una prueba de que R debe estar en R.

R= $\{\phi, R\}$

El proceso de indecisión de si R está o no dentro de R es lo que constituye la paradoja de Russell. Y, de esta manera, la clase de las clases que no se contienen a sí mismas se vuelve un objeto causante de paradojas; mientras que la clase de las clases que se contienen a sí mismas (a saber, R') constituye un ente particularmente interesante, no por ser paradójico sino más bien por no serlo.

Así, planteamos:

R' = {U}

Pero, ¿R' se contiene a sí mismo o no?

Si R' se contiene, dado que R' contiene a las clases que se contienen, entonces

R' = {U, R'}

Y, si R' no se contiene, entonces como R' contiene solo a las clases que se contienen

R' = {U}

Esto nos permite arribar a la extraña situación en la cual una clase se contiene porque se contiene y no se contiene porque no se contiene. Nuevamente, esto, aunque no es contradictorio, es raro.

Ahora bien, hemos considerado que para lograr entender cómo es que a Russell se le ocurrió su paradoja, es necesario reformularla cuantas veces sea necesario para entenderla. El mismo Russell reformuló su paradoja en términos más amigables[46]. Así, en base a la paradoja del barbero, elaboramos esta versión:

> Existe un consejero que aconseja a todos los consejeros que no se aconsejan a sí mismos. Obviamente, este consejero no aconseja a los que se aconsejan a sí mismos. Si Hesíodo es el consejero de todos los consejeros que no se aconsejan a sí mismos, ¿Hesíodo se aconseja a sí mismo o no? [47]

1) Si se aconseja a sí mismo, entonces no se aconseja a sí mismo ya que él aconseja a los que no se aconsejan a sí mismos.
2) Si no se aconseja a sí mismo, entonces se aconseja a sí mismo ya que él no aconseja a los que ya se aconsejan a sí mismos.

¿Qué ha sucedido? ¿Cómo hemos podido reformular esta paradoja? Lo que sucede es que hemos notado que algo raro ocurre cuando consideramos que un sujeto se vuelve un predicado aplicado sobre sí mismo y esto empeora cuando dicho predicado es negado. Así, lo mismo ocurriría si, por ejemplo, consideramos a los vigilantes. Sabemos que estos pueden vigilar a otros o a sí mismos. Pero, fijémonos en los vigilantes que no se vigilan a sí mismos. Si estos son vigilados por otro, a saber, el vigilante de todos los vigilantes que no se vigilan a sí mismos (es decir, es vigilante V), ¿podemos decir que este último se vigila a sí mismo o no?

---

[46] Esto se comprueba revisando la familia argumental de las paradojas de Russell.
[47] Esta formulación la elaboró el autor de esta investigación en una clase del curso de *Filosofía Antigua I* en pregrado. Al parecer, el profesor responsable, sencillamente, no se esperaba algo así, lo cual desató cierta rencilla *contra la lógica*.

Es inevitable pensar en la paradoja de las propiedades, referida a la propiedad 'impredicable', cuando elaboramos estos ejercicios conceptuales. Esto nos hace pensar que al ser 'vulgarizada' la paradoja de Russell sobre las clases ha recuperado su forma primera solo que ahora de un modo más concreto, es decir, con términos más mundanos.

Sin embargo, la capacidad de decidir la verdad de la oración "El vigilante V no se vigila a sí mismo" no solo se ve frenada por esta contradicción sino también por el problema surgido al estudiar el problema desde otro ángulo. Consideremos a V' el cual es el vigilante de todos los vigilantes que se vigilan a sí mismos. ¿Este se vigila a sí mismo o no? El raciocinio involucrado con este último análisis nos recuerda al conjunto R'.

En este punto, podemos plantear la conexión entre R (la clase de todas las clases que no se contienen a sí mismas) y V (el vigilante de todos los vigilantes que no se vigilan a sí mismos). Lo que propiamente hace una clase es contener; lo que propiamente hace un vigilante es vigilar. Entonces, la paradoja surge cuando al pensar si $R \in R$ o si V vigila a V, cuestionamos la característica propia de una clase o de un vigilante. Planteemos una pregunta paralela: ¿El rey del país de los tontos (el tonto superior) es el más tonto o el menos tonto? Normalmente, pensaríamos que el rey de los tontos debería ser el tonto superior, esto es, el más tonto. Así, de esta manera, solemos pensar que una cosa relacionada con un grupo de cosas debería tener la propiedad que define ese grupo de cosas. De la misma manera, pensamos que R (que reúne a las clases que no se autocontienen) no debería contenerse a sí mismo. Pero, también podemos pensar que el tonto superior debe ser lo mejor, es decir, el rey de los tontos tendría que ser el menos tonto de todos. Ahora, pensando con más cautela, asumimos que una cosa relacionada con un grupo de cosas podría no tener la propiedad que define ese grupo de cosas Análogamente, solemos pensar que R (que reúne a las clases que no se autocontienen) debería contenerse a sí mismo.

Considerando esto, nosotros afirmamos que la paradoja de Russell tiene un origen conjuntista, porque surgió a partir de reflexiones sobre la teoría de Cantor; pero, dado que dicha paradoja fue presentada en oposición a la teoría de Frege, quien se dedicó a establecer las bases lógicas del lenguaje, su naturaleza obedece a consideraciones semánticas referidas al lenguaje y a la posibilidad de un elemento de mantener una relación (no necesariamente de pertenencia) con un cierto grupo.

2. 3. Clasificación de las paradojas

Después de que se apreciara la gravedad de la paradoja de Russell se produjo una avalancha de paradojas: las de Jules Richard, Kurt Grelling, Julios Konig y Ernst Zermelo. Enseguida, veremos una clasificación más ordenada de algunas de estas paradojas.

2. 3. 1. Paradojas matemáticas

A continuación, expondremos tres paradojas matemáticas: la paradoja de Cantor, la de Burali-Forti y la de Richard. (La última que mencionaremos es, en realidad, una reformulación más popular de la richardiana: la de Berry.) Tradicionalmente, estas han sido consideradas las aporías que abren las puertas hacia una investigación sobre los fundamentos de la matemática. Estas paradojas y las familias de Russell que siguen estarán construidas como reducciones al absurdo. Pero, es necesario advertir antes que la prueba por reducción al absurdo solo tiene 'sentido', si la nueva premisa que se hace ingresar al cuerpo del argumento tiene alguna participación en el argumento a desarrollar. Notaremos que en la paradoja de Cantor, la de Burali-Forti, la de Richard, la de las clases y la de las propiedades, la cuarta (para la de Cantor, Burali-Forti y la de las propiedades), la décimo sexta (para la de Richard) y la quinta premisa (para la paradoja de las clases) que resultan de negar la conclusión a la que se quiere llegar no juegan ningún papel interesante en la deducción. Estos razonamientos serán llamados reducciones al absurdo 'triviales' en oposición a las reducciones 'no triviales' en las que la prueba se consolida gracias a la nueva premisa en forma de negación que participa activamente en la prueba.

2. 3. 1. 1. Paradoja de Cantor

La paradoja del máximo número cardinal de la teoría intuitiva de conjuntos fue descubierta por Georg Cantor y luego comunicada por este a Dedekind en una carta escrita en 1899. Con ella se demuestra la inexistencia del conjunto universal U aplicando la prueba por reducción al absurdo. Recordemos que por paradoja entendemos el argumento que desemboca en contradicciones. Pero, ya que para entender la paradoja es necesario estar imbuido de conceptos matemáticos, trataremos breve y claramente algunas nociones previas para la buena comprensión de esta paradoja. En primer lugar, distingamos entre conjuntos de elementos y conjuntos de conjuntos. En los conjuntos de elementos la relación que se da entre cada elemento y un conjunto es la relación de pertenencia o no pertenencia. En cambio, en los conjuntos de conjuntos la posible relación que se da entre conjunto y conjunto de conjuntos es la relación de inclusión. En este último caso, es común distinguir a los conjuntos incluidos en otros con la denominación de subconjuntos. En este sentido, entendamos que el conjunto potencia de cualquier conjunto es un conjunto de todos los posibles subconjuntos obtenidos a partir de reagrupar de modo diferente los elementos de ese conjunto. Ahora bien, formalmente la noción de subconjunto de un conjunto se introduce por la siguiente definición: un conjunto A es un subconjunto de un conjunto B, si cada elemento de A es un elemento de B.

$$\forall n[(n\in A)\rightarrow(n\in B)] \rightarrow (A\subset B)$$

Técnicamente, los conjuntistas llaman 'cardinal' al número de elementos de un conjunto dado. En símbolos, dado el conjunto X es posible determinar Card(X), es decir, el cardinal de X. Además, el número de subconjuntos de un conjunto C, se obtiene a partir de elevar la base 2 al número correspondiente al cardinal de C, es decir, simbólicamente,

$$\text{Card} (\text{Pot} (C)) = 2^{\text{Card} (C)}.$$

Ejemplo: El conjunto A = {a, b, c} de tres elementos (o sea, con Card(A)=3) tiene ocho (2^3) subconjuntos reunidos en su respectivo conjunto potencia:

Pot(A) = { ∅, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c} }

El número de subconjuntos de A se determina así:

$\text{Card}(\text{Pot}(A)) = 2^{\text{Card}(A)} = 2^3 = 8.$

(Obsérvese que el conjunto potencia de A incluye al conjunto vacío (∅ y al mismo conjunto A). La relación entre inclusión y cardinalidad es casi evidente: si un conjunto A es subconjunto de otro B, el primero tendrá menor o igual cardinalidad que el segundo, simbólicamente,

$$(A\subseteq B) \rightarrow [\text{Card}(A) \leq \text{Card}(B)].$$

También, es notoria la relación entre conjunto potencia y cardinalidad: dado un conjunto X, Pot(X) tendrá mayor cardinalidad que X. En símbolos:

$$Card(Pot(X)) > Card(X).$$

Este último resultado es conocido como el 'Teorema de Cantor'.

Este es el argumento paradójico de Cantor. Supuesta la existencia del conjunto universal U, por un lado, se plantea que como U incluye a todos los conjuntos, U también incluirá a su propio conjunto potencia Pot (U), es decir, (Pot (U) $\subseteq$ U). Pero, la cardinalidad de un subconjunto X de Y es siempre menor o igual que la cardinalidad de Y. Esta es la relación entre inclusión y cardinalidad de dos conjuntos cualesquiera:

$$\forall X \forall Y \{ (X \subseteq Y) \rightarrow [Card(X) \leq Card(Y)] \}.$$

Por lo tanto, mediante la ejemplificación universal de la anterior fórmula obtendremos la condicional [Pot(U) $\subseteq$ U] $\rightarrow$ [Card(Pot(U)) $\leq$ Card(U)] y por *Modus Ponens* entre esta fórmula y la primera de todo el razonamiento, obtenemos la siguiente fórmula:

$$Card(Pot(U)) \leq Card(U).$$

Por otro lado, por el Teorema de Cantor que indica que

$$\forall X [Card(Pot(X)) > Card(X)]$$

tendremos que

$$Card(Pot(U)) > Card(U).$$

Estos dos resultados se contradicen. Éste es el razonamiento en lenguaje natural el cual aunque es paradójico ha sido formulado de manera que parezca una reducción al absurdo trivial, puesto que, como veremos, la nueva premisa negada no interviene en los pasos deductivos de la prueba.

1. Dados dos conjuntos X e Y, si X es un subconjunto de Y, la cardinalidad de X será menor o igual que la de Y.

2. Dado un conjunto X, el cardinal de su conjunto potencia será mayor que su cardinal. (Teorema de Cantor)

3. Todos los conjuntos están incluidos en el conjunto universal.

POR LO TANTO, no es cierto que exista el conjunto universal.

Enseguida, el mismo argumento en lenguaje lógico.

1. $\forall X \forall Y [(X \subseteq Y) \rightarrow (Card(X) \leq Card(Y))]$

2. $\forall X [Card(Pot(X)) > Card(X)]$

3. $\forall X (X \subseteq U)$ // $\therefore \sim \exists X (X=U)$

4. $\exists X (X=U)$ // $\therefore \perp$

5. $Pot(U) \subseteq U$ 3 Ejemplificación universal

6. $[Pot(U) \subseteq U] \rightarrow [Card(Pot(U)) \leq Card(U)]$ 1 Ejemplificación universal

7. $Card(Pot(U)) \leq Card(U)$ 5, 6 Modus Ponens

8. $Card(Pot(U)) > Card(U)$ 2 Ejemplificación universal

9. $[Card(Pot(U)) \leq Card(U)] \wedge [Card(Pot(U)) > Card(U)]$

7, 8 Conjunción

10. $\exists X (X=U) \rightarrow [Card(Pot(U)) \leq Card(U)] \wedge [Card(Pot(U)) > Card(U)]$

4-9 Prueba condicional

11. $\sim \exists X (X=U)$ 10 Reducción al absurdo

2. 3. 1. 2. Paradoja de Burali-Forti

La paradoja de Burali-Forti fue publicada por su autor en 1897 en *Una questione sui numeri transfiniti*, sin embargo, Georg Cantor en 1895 en *The Founding of the Theory of Transfinite Numbers,* ya la había advertido. Es la llamada "paradoja del mayor ordinal", y al igual que su hermana cantoriana, dicha prueba se construirá por el método de la reducción al absurdo trivial, que demuestra la inexistencia de los conjuntos universales de ordinales.

La paradoja, que expondremos a continuación, se conoce con el nombre de paradoja "Burali-Fortiana" (Grelling, 1943: 116-117). Por una parte, todo conjunto de números de orden es bien ordenado. Veamos el conjunto de todos los números de orden, que llamaremos Ω; él mismo también deberá ser bien ordenado y, por lo tanto, deberá tener un menor elemento y ya que $\Omega + 1$ es un número ordinal, este (que está incluido en Ω por definición) podrá ser menor, es decir, $\Omega + 1 \leq \Omega$. Por otra parte, habíamos demostrado la proposición de que para todo conjunto de números de orden se da uno que no está contenido en él y que es mayor. Refiramos esta proposición al conjunto Ω; se sigue de aquí que existe un número ordinal, el cual es mayor que cualquiera contenido en Ω; este número no es otro naturalmente que el tipo de orden de $\Omega + 1$. Por lo tanto, $\Omega + 1 > \Omega$. He aquí una abierta contradicción, pues hay un número ordinal que es menor y mayor o igual y mayor que su precedente. (Ferrater Mora, 1994: 2693). Reduciremos esta paradoja al siguiente argumento en lenguaje natural y luego al lenguaje formal:

1. Dados un número ordinal X y un conjunto Y de números ordinales, si X es el número ordinal de Y, siempre un número ordinal Z pertenecerá a Y y será menor o igual que X.

2. Dados un número ordinal X y un conjunto Y de números ordinales, si X es el número ordinal de Y, siempre un número ordinal W no pertenecerá a Y y será mayor que X.

3. Para cualquier número ordinal Y, Ω (el número ordinal de todos los ordinales) es el ordinal de Y.

POR LO TANTO, no es cierto que exista Ω , el ordinal de todos los ordinales.

1. $\forall X \, \forall Y \, \{ \text{Ord}(X,Y) \rightarrow \forall Z \, [(Z \in Y) \wedge (Z \leq X)] \}$	
2. $\forall X \, \forall Y \, \{ \text{Ord}(X,Y) \rightarrow \forall W \, [(W \notin Y) \wedge (W > X)] \}$	
3. $\forall Y \, [\text{Ord}(\Omega,Y)]$	// $\therefore \sim \exists X \, (X = \Omega)$
4. $\exists X \, (X = \Omega)$	// $\therefore \perp$
5. $\text{Ord}(\Omega,A) \rightarrow \forall Z [(Z \in A) \wedge (Z \leq \Omega)]$	1 Ejemplificación universal
6. $\text{Ord}(\Omega,A)$	3 Ejemplificación universal
7. $\forall Z [(Z \in A) \wedge (Z \leq \Omega)]$	5, 6 Modus Ponens
8. $\text{Ord}(\Omega,A) \rightarrow \forall W [(W \notin A) \wedge (W > \Omega)]$	2 Ejemplificación universal
9. $\forall W [(W \notin A) \wedge (W > \Omega)]$	6, 8 Modus Ponens
10. $(\Omega +1 \in A) \wedge (\Omega +1 \leq \Omega)$	7 Ejemplificación universal
11. $(\Omega +1 \notin A) \wedge (\Omega +1 > \Omega)$	9 Ejemplificación universal
12. $(\Omega +1 \leq \Omega)$	10 Simplificación
13. $(\Omega +1 > \Omega)$	11 Simplificación
14. $(\Omega +1 \leq \Omega) \wedge (\Omega +1 > \Omega)$	12, 13 Conjunción
15. $\exists X \, (X = \Omega) \rightarrow [(\Omega +1 \leq \Omega) \wedge (\Omega +1 > \Omega)]$	4-14 Prueba condicional
16. $\sim \exists X \, (X = \Omega)$	15 Reducción al absurdo

2. 3. 1. 3. Paradoja de Richard [48]

Esta paradoja planteada por el matemático francés Jules Richard fue publicada en 1905 en su libro *Les Principes des Mathématiques et le Problème des Ensembles.* (Russell por sugerencia de Berry en 1908 elaboró una versión simplificada de la misma, que expondremos líneas más abajo). Si bien los estudiosos opinan que esta paradoja versa principalmente sobre la definibilidad finita, la mayor parte de su argumento se basa en ciertos instrumentos matemáticos tales como el Teorema de la Diagonal de Cantor, la correspondencia biunívoca, el Teorema Fundamental de la Aritmética, la equivalencia, las funciones inyectivas y la noción de enumerabilidad y no-enumerabilidad. Tengamos en cuenta que Richard expuso esta paradoja en forma relativa a la definición de un número real, paralelamente a la demostración de la no numerabilidad de los Números Reales, en la que Cantor utiliza el Método de la Diagonal. En este sentido, la paradoja de Richard es matemática, a pesar de que la consideración del significado en un cierto lenguaje natural o artificial hace de esta paradoja una paradoja afín a las paradojas semánticas. Como siempre, nuestros principios metodológicos exigen que expliquemos en la medida de lo posible lo más breve y concisamente algunos de los conceptos involucrados en la formulación de esta paradoja.

Como ya dijimos, la paradoja de Richard trata sobre la noción de definibilidad finita en un lenguaje previamente dado. A efectos de precisión, convengamos en referirnos a un lenguaje dado, por ejemplo, el español, con un alfabeto, un diccionario y una gramática

[48] Esta paradoja hunde sus raíces en la paradoja de Zermelo-König. Según Beth: “Este argumento fue expuesto por König para refutar la hipótesis del continuo de Cantor. Sin embargo, pronto perdió su valor a este respecto con motivo del descubrimiento de la paradoja de Richard, que es enteramente independiente de la hipótesis del continuo y del teorema de buena ordenación”. (Beth, 1975: 19)

previamente asignados. Podemos considerar que el alfabeto consta de las 27 letras del idioma español, la coma y el espacio en blanco. Luego, establecemos una correspondencia biunívoca entre las letras (incluyendo la coma y el espacio en blanco) y los números naturales para traducir sucesiones continuas de letras a sucesiones continuas de números tomando en cuenta esta codificación básica. (Castro y Pérez, 2003: 22-35)

LETRA	NÚMERO	LETRA	NÚMERO	LETRA	NÚMERO	LETRA	NÚMERO
A, a	1	J, j	10	R, r	19	,	28
B, b	2	K, k	11	S, s	20		29
C, c	3	L, l	12	T, t	21		
D, d	4	M, m	13	U, u	22		
E, e	5	N, n	14	V, v	23		
F, f	6	Ñ, ñ	15	W, w	24		
G, g	7	O, o	16	X, x	25		
H, h	8	P, p	17	Y, y	26		
I, i	9	Q, q	18	Z, z	27		

Por una expresión en el español podemos entender, simplemente, cualquier secuencia finita de esos 29 signos que no comience con un espacio en blanco.

A = {α ∈ R / α es un número que se puede definir con una frase en castellano} donde R= NÚMEROS REALES.

Una expresión descriptora de un número real α de A, puede definir un número real. Por ejemplo, "π" puede ser definido con la siguiente expresión: "La longitud de una circunferencia sobre su diámetro" (En símbolos: $\frac{2\pi R}{2R}$). "*e"* puede ser definido con la siguiente expresión: "El límite cuando *n* tiende a infinito de uno más uno sobre *n*, elevado a la *n*" (En símbolos: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$). Y, también "$\sqrt{2}$" puede ser definido con la expresión: "Raíz cuadrada de dos". Estas expresiones en español pueden entonces ser numeradas por la codificación, es decir, el procedimiento en el que vinculamos un número con una expresión de otra índole. Este es el procedimiento de la gödelización[49]. Veamos cómo funciona este proceso. Vamos a hacer corresponder a cada número α un único número natural de la siguiente forma. En general, si un número $\alpha \in A$ está representado por una frase cuyos caracteres corresponden en su orden a los números: m_1, m_2, m_3, … m_k, … m_r, a α le hacemos corresponder el único número natural: $n_\alpha = 2^{m_1} \,.\, 3^{m_2} \,.\, 5^{m_3} \ldots {P_k}^{m_k} \ldots {P_r}^{m_r}$ en donde P_k es el k-ésimo número primo. Si A es el conjunto de todos los números reales, en B tenemos que a cada expresión matemática, definible con una frase en castellano, le corresponde un único número natural como resultado de elevar cada número de la productoria de los primeros números primos al número asignado a cada letra de la expresión analizada, según la codificación que se ve en la tabla. Además, como la descomposición de un número natural como producto de primos es única (por el Teorema Fundamental de la Aritmética), entonces, si un número natural es la imagen de una palabra, por esta asignación no puede existir otra palabra que tenga como imagen dicho número. Sea por ejemplo $\alpha = \sqrt{2}$. Las palabras en castellano que le corresponde es: "Raíz cuadrada de dos". De acuerdo al código anterior, tenemos que los números de los caracteres que corresponden a esta sentencia son en su orden:19-1-9-27-29-3-22-1-4-19-11-4-1-29-4-5-29-4-16-20.

Luego, el número natural que le hacemos corresponder a la descripción lingüística de $\sqrt{2}$ (que pertenece a B) es el siguiente Número Gödel (α):

$2^{19}.3^{1}.5^{9}.7^{27}.11^{29}.13^{3}.17^{22}.19^{1}.23^{4}.29^{19}.31^{11}.37^{4}.41^{1}.43^{29}.47^{4}.53^{5}.59^{29}.61^{4}.67^{16}.71^{20}$

[49] Este procedimiento fue utilizado por primera vez por Kurt Gödel en su famoso artículo titulado: "Sobre sentencias formalmente indecidibles de *Principia Mathematica* y sistemas afines" (1981a).

Ahora, estudiemos, por ejemplo, $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{10^n} = 0, b_1 b_2 b_3 b_4 \ldots$ en donde los b_n son números aleatorios. Esta fórmula debería ser definible mediante una expresión en castellano ya que se refiere a un número real. En este caso, el conjunto A será A = $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \ldots\}$. Luego, cada α_m puede expresarse en forma decimal como $\alpha_m = 0, b_{m1}b_{m2}b_{m3}\ldots b_{mm}$ donde $\forall k \in N$, $b_{mk} \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Por ejemplo:

$\alpha_1 = 0, b_{11} \qquad = 0, 1$
$\alpha_2 = 0, b_{21}b_{22} \qquad = 0, 20$
$\alpha_3 = 0, b_{31}b_{32}b_{33} \qquad = 0, 333$
$\alpha_4 = 0, b_{41}b_{42}b_{43}b_{44} \qquad = 0, 4440$
….
$\alpha_m = 0, b_{m1}b_{m2}b_{m3}\ldots b_{mm}$

Con estos números se ha pretendido explicitar que cada uno de los números reales entre cero y uno, desde el 0, 000…000…, hasta el 0, 999…999…, son expresables mediante una frase en castellano. Ahora, construyamos el siguiente número: $\delta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{10^k} = 0, c_1c_2c_3 \ldots$; donde: $c_k=1$, si $b_{kk}=0$ y $c_k=0$, si $b_{kk} \neq 0$. Por un lado, de acuerdo con la construcción de δ, podemos decir que este número se puede definir con la siguiente expresión en castellano: "El número real entre cero y uno, cuyo término en cada lugar dado es uno o cero, dependiendo de si el número que ocupa ese mismo lugar en la numeración de los números reales que tienen expresión en castellano, tiene uno o cero en el lugar en cuestión del desarrollo decimal". Por lo tanto, $\delta \in$ A, es decir, es un elemento de $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \ldots\}$. Pero, por otro lado, si construimos el número $0,c_1c_2c_3\ldots$, obtendríamos $\delta = 0, b'_{11}b'_{22}b'_{33}\ldots$, es decir un número cuya cifra en el lugar de los decenas es diferente a la cifra en el lugar de las decenas del primer número real del intervalo <0,1>, cuya cifra en el lugar de las centenas es diferente a la cifra en el lugar de las centenas del segundo número real del intervalo <0,1>, y así sucesivamente. Formalmente, ya que ∀m∈N, $\delta \neq \alpha_{\mathrm{m}}$, concluimos que $\delta \notin$ A, es decir, no es un elemento de $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \ldots\}$. Y, mediante una conjunción tenemos la contradicción buscada: ($\delta \notin$A) ∧ ($\delta \in$A). Como podemos apreciar, esta paradoja es especialmente interesante por sus implicaciones concernientes a lenguajes naturales, y por su estrecho parentesco con la demostración cantoriana de la no-enumerabilidad de los números reales. (Kleene, 1974: 44-45). En resumen:

> "La paradoja de Richard consiste en lo que equivale al siguiente problema ¿cómo ha de bastar un sistema de lógica simbólica en el que el conjunto de todas las fórmulas tiene el número transfinito $\aleph_0$ para la discusión y desarrollo de una rama de las matemáticas que maneje conjuntos cuyo número transfinito sea mayor que $\aleph_0$? Y en particular ¿cómo podemos ni siquiera hablar del conjunto de los números reales cuyo número transfinito $\aleph_1$ se ha demostrado que es mayor que $\aleph_0$?." (Northrop, 1949: 280) [50]

Este es el argumento en lenguaje natural un poco más largo que todos los otros.

1. El conjunto A es el conjunto de todos los números reales.
2. El conjunto B es el conjunto de todas las descripciones que pertenezcan al lenguaje español o conjunto E.
3. El conjunto C es el conjunto de todas las sustituciones a numerales que pertenezcan al conjunto F.
4. El conjunto D es el conjunto de todos los Números Gödel que pertenezcan al conjunto de todos los números naturales.
5. R es el conjunto de todos los números reales.

[50] $\aleph_0$ es el número de números naturales y racionales. Presumiblemente, $\aleph_1$ es el número de números reales.

6. E es el conjunto de todas las descripciones de números reales.
7. F es el conjunto de todas las sustituciones a numerales.
8. N es el conjunto de todos los números naturales.
9. A y B son equivalentes.
10. B y C son equivalentes.
11. C y D son equivalentes.
12. D y N son equivalentes.
13. Para cualquier par de conjuntos X e Y, si X es equivalente a Y, tienen el mismo cardinal.
14. Para cualquier par de conjuntos X e Y, si X es menor o mayor que Y, entonces no es cierto que X sea igual a Y.
15. El cardinal del conjunto N es menor que el cardinal del conjunto R.

    POR LO TANTO, no es cierto que exista un conjunto X que sea equivalente al conjunto R.

Tenemos un argumento de 15 premisas para desarrollar hasta llegar a la codiciada contradicción. A continuación, expondremos esas líneas en lenguaje lógico. Aclaremos antes que la relación de equivalencia no es otra que la relación de similaridad aparecida en la paradoja de Burali-Forti que alude a la correspondencia biunívoca entre los elementos de dos conjuntos equivalentes.

1. A = R
2. B = { x / descripción en español (x) $\in$ E }
3. C = { x / sustitución a numerales (x) $\in$ F }

4. $D = \{ x / \text{Número Gödel}(x) \in N \}$
5. $R = \{\ldots, -9000910, \ldots., -569/7987987, \ldots, 0, \ldots, 1, \ldots, 2.3, \ldots 99999999, \ldots\}$
6. E = { …, tres, …, raíz cuadrada de dos, …, tres quintos, …, raíz cubica de, siete menos raíz cuarta de cinco, …, la longitud de una circunferencia sobre su diámetro, …, el límite cuando n tiende al infinito de uno más uno sobre n, elevado a la n, … }
7. $F = \{ \ldots, 345, \ldots, 456(29)567, \ldots, 2345(29)6785(29)567456(29), \ldots\}$
8. $N =\{0, 1, 2, 3, 4, ,5 , 6, \ldots \}$
9. $A \sim B$
10. $B \sim C$
11. $C \sim D$
12. $D \sim N$
13. $\forall X \forall Y [X \sim Y \leftrightarrow Card(X)=Card(Y)]$
14. $\forall X \forall Y \{ [(X < Y) \vee (X > Y)] \rightarrow \sim (X = Y) \}$
15. $Card(N) < Card(R)$ // $\therefore \sim \exists X(X \sim R)$
16. $\exists X (X \sim R)$ // $\therefore \perp$
17. $R \sim N \leftrightarrow Card(R)=Card(N)$ 13 Ejemplificación universal
18. $\{R \sim N \rightarrow [Card(R) = Card(N)]\} \wedge \{ [Card(R) = Card(N)] \rightarrow R \sim N\}$

    17 Definición del bicondicional
19. $R \sim N \rightarrow [Card(R) = Card(N)]$ 18 Simplificación
20. $\sim [Card(R) = Card(N)] \rightarrow \sim (R \sim N)$ 19 Transposición
21. $\{ [(Card(R) < Card(N)] \vee [Card(R) > Card(N)] \} \rightarrow \sim [Card(R) = Card(N)]$

    14 Ejemplificación universal
22. $\{ [(Card(R) < Card(N)] \vee [Card(R) > Card(N)] \} \rightarrow \sim (R \sim N)$

20 y 21 Silogismo

23. [Card(N) < Card(R)] ∨ [(Card(N) > Card(R)]	
	15 Adición
24. ~ (R~N)	22, 23 Modus Ponens
25. A ~ N	9, 10, 11, 12 Propiedad Transitiva[51]
26. R ~ N	1, 25 (I) [52]
27. ~ (R~N) ∧ (R~N)	24, 26 Conjunción
28. ∃X(X~R) → [~ (R~N) ∧ (R~N)]	16-27 Prueba condicional
29. ~ ∃X(X~R)	28 Reducción al absurdo

2. 3. 1. 4. Paradoja de Berry

La paradoja de Berry nace de la consideración de la posibilidad de dar a la "antinomia Ricardeana", una nueva forma, que la hace aún más embarazosa. También, se la denomina "paradoja de las palabras"[53]. Tradicionalmente, se la suele formular de la manera siguiente. Si suponemos que una palabra no debe contener más de 20 letras, estaremos seguros de que se obtendrá un número finito perfectamente determinado de tales palabras. Oraciones a lo más con 12 de estas palabras son también en número finito. En español solo una pequeña

[51] También, hacemos uso de la intuitiva propiedad transitiva de la identidad según la cual: "Si una cosa *a* es igual a otra cosa *b*, y si esta otra cosa *b* es igual a una tercera cosa *c*, entonces la cosa *a* es igual a la tercera cosa *c*", en símbolos: $(a = b \wedge b = c) \rightarrow (a = c)$. En este caso, lo aplicamos para la relación de equivalencia, a saber, $(a \sim b \wedge b \sim c) \rightarrow (a \sim c)$.

[52] A nivel de reglas de deducción, hemos considerado conveniente hacer uso de la regla que rige las identidades (I) (Suppes, 1979: 144), según la cual si **S** es una fórmula abierta, de **S** y $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2$ es posible deducir **T**, siempre que **T** resulte de **S** por reemplazo de una o más incidencias de $\mathbf{t}_1$, en **S**, por $\mathbf{t}_2$.

[53] Aclaremos que la paradoja de Berry resulta ser una versión condensada de la complicada paradoja matemática de Richard si bien no utiliza los conceptos matemáticos de 'infinito', 'enumerabilidad', 'equivalencia', 'diagonal de Cantor', 'cardinalidad', etc.

parte de dichas oraciones tienen sentido; de las cuales otra pequeña parte nuevamente define números naturales. Pues bien, estamos en condiciones de demostrar que no hay número natural que no se pueda definir con 12 palabras. Si se dan tales números se tendrá entre ellos uno mínimo. Pero la definición: *el menor número natural, que no se puede definir con doce palabras*, consta exactamente de doce palabras. Tal número mínimo no existe. Por lo tanto, todo número natural se puede definir con doce palabras (Grelling, 1943: 117-118). Advirtamos que esta paradoja tiene una conclusión desajustada con la realidad, pues no es ilícito definir números naturales con 13, 48 o hasta más palabras.

En el razonamiento anterior los rasgos semánticos de la paradoja de Berry se dejan relucir en virtud del uso de la autorreferencia indirecta o del término ‘definición’. En este caso, la paradoja de Berry sirve para demostrar que todo número natural puede ser definido por 12 palabras. Tambien, Hartry Field en *Solving the Paradoxes, Escaping Revenge* elabora otra versión de la paradoja de Berry- Richard. En ella se utilizan los conceptos de definibilidad, numerabilidad, satisfacción y números ordinales (Field, s.a.: 12-13). En este segundo caso, la aparente paradoja de Berry (o de Berry-Richard) sirve para restringir los alcances semánticos de lo que es susceptible de definición y de lo indefinible. En ambos casos, la paradoja juega un papel demostrativo en una prueba por reducción al absurdo no trivial. Además, hemos revisado la versión de Hilbert-Ackermann (1962: 179-181) escrita en *Elementos de Lógica Teórica*, que hace uso del predicado ‘el más pequeño de los números no designados en el siglo XX’ y que confirma su carácter contradictorio mediante la consideración de significados formalizados de designación, definición, además, de reglas lógicas.

Consideremos un lenguaje (por ejemplo, el español) en el que se puedan formular y definir las propiedades puramente aritméticas de los números cardinales. Examinemos las expresiones que pueden ser expresadas en dicho lenguaje. Asumamos que resulta indiferente saber cuáles sean los términos no definidos o "primitivos". Basta con que podamos comprender lo que se quiere decir mediante los términos: "número", "entero", "divisible", "cuadrado", etc. La propiedad de ser un número primo puede ser definida como "no divisible por ningún otro número entero más que por sí mismo y la unidad"; la propiedad de ser un cuadrado perfecto puede ser definida como "ser el producto de algún número entero por sí mismo", etc.

Podemos ver que cada una de tales definiciones contendrá solamente un número finito de palabras y, por consiguiente, solo un número finito de letras del alfabeto. Siendo esto así, las definiciones pueden ser ordenadas en una lista: una definición precederá a otra, si el número de letras de la primera es menor que el número de letras de la segunda; y si dos definiciones tienen el mismo número de letras una de ellas precederá a la otra atendiendo al orden alfabético de las letras obtenidas en cada una. Sobre la base de este orden, a cada definición corresponderá un único número entero, que representará el lugar que ocupa la definición en la lista.

Dado que cada definición está asociada a un único número entero, puede ocurrir en algunos casos que un número entero posea la misma propiedad expresada por la definición con la cual está asociado. Supongamos, por ejemplo, que la expresión definidora "no divisible por ningún número entero más que por sí mismo y por la unidad" se halla en correlación con el número de orden 17; evidentemente, el 17 tiene la propiedad designada por esa expresión. Por otra parte, supongamos que la expresión definidora “ser el producto de algún número entero por sí mismo” se halla en correlación con el número de orden 15; está claro que 15 no posee la propiedad designada por la expresión. Si permitimos que los números tengan propiedades extra-numéricas en virtud de la relación existente entre los números y las definiciones de esta lista, describiremos la situación existente en el segundo ejemplo diciendo que el número 15 tiene la propiedad de ser *richardiano*, y la del primer ejemplo diciendo que el número 17 *no* tiene la propiedad de ser *richardiano*. Hablando en términos generales, definimos “x es richardiano” como una forma abreviada de declarar “x no tiene la propiedad designada por la expresión definidora con la que se halla relacionado en la serie ordenada de definiciones”.

Ahora, reconstruiremos este argumento mediante el lenguaje natural. Debido a la infinita cantidad de premisas en esta demostración haremos uso de números ordinales transfinitos.

1. Para todo x, x tiene la primera propiedad si y solo si se le aplica la primera función
2. Para todo x, x tiene la segunda propiedad si y solo si se le aplica la segunda función
3. …

...

15. Para todo x, x tiene la propiedad de ser un número cuadrado, si y solo si, x resulta del producto de x consigo mismo
16. …
17. Para todo x, x tiene la propiedad de ser un número primo, si y solo si no es divisible mas que por sí mismo y la unidad.

…

n. Para todo x, x tiene la propiedad n-ésima si y solo si se le aplica la n-ésima función.

…

w. Para todo w, w es richardiano, si y solo si no se le aplica la w-ésima propiedad.

…

x. 15 es richardiano si y solo si 15 no resulta del producto de algo consigo mismo.

…

z. 17 no es richardiano si y solo si no es divisible más que por sí mismo y la unidad.

ω. …

POR LO TANTO, no es cierto que la propiedad n-ésima sea igual a la propiedad de ser richardiana o no es cierto que n no sea richardiano.

Enseguida, la prueba formal de tan difícil argumento. Observemos que en esta versión de la paradoja Berry-Richard la prueba por reducción al absurdo es no-trivial porque se logra gracias a la necesaria participación de la nueva premisa en forma de negación.

1. $\forall x\ (P_1 (x) \leftrightarrow F_1 (x))$
2. $\forall x\ (P_2 (x) \leftrightarrow F_2 (x))$

…

15. $\forall x\ (P_{15} (x) \leftrightarrow F_{15} (x))$

16. …

17. $\forall x\ (\ P_{17}(x) \leftrightarrow F_{17}(x)\ )$

…

n. $\forall x\ (\ P_n(x) \leftrightarrow F_n(x)\ )$

…

w. $\forall w\ (\ R(w) \leftrightarrow \sim F_w(w)\ )$

…

x. $R(15) \leftrightarrow \sim F_{15}(15)$

…

z. $\sim R(17) \leftrightarrow F_{17}(17)$

ω. … $\quad$ // $\therefore \sim (\ P_n = R\ ) \vee \sim R(n)$

$\omega + 1.\ \sim [\ \sim (P_n = R) \vee \sim R(n)\ ]$ $\quad$ // $\therefore \perp$

$\omega + 2.\ (P_n = R) \wedge R(n)$ $\quad$ $\omega + 1$ De Morgan

$\omega + 3.\ R(n)$ $\quad$ $\omega + 2$ Simplificación

$\omega + 4.\ R(n) \leftrightarrow \sim F_n(n)$ $\quad$ w Ejemplificación universal

$\omega + 5.\ [\ R(n) \rightarrow \sim F_n(n)\ ] \wedge [\sim F_n(n) \rightarrow R(n)\ ]$

$\omega + 4$ Definición del bicondicional

$\omega + 6.\ R(n) \rightarrow \sim F_n(n)$ $\quad$ $\omega + 5$ Simplificación

$\omega + 7.\ \sim F_n(n)$ $\quad$ $\omega + 3$, $\omega + 6$ Modus Ponens

$\omega + 8.\ P_n = R$ $\quad$ $\omega + 2$ Simplificación

$\omega + 9.\ P_n(n) \leftrightarrow F_n(n)$ $\quad$ n Ejemplificación universal

$\omega + 10.\ P_n(n)$ $\quad$ $\omega + 3$, $\omega + 8$ (I)

$\omega + 11.\ [\ P_n(n) \rightarrow F_n(n)\ ] \wedge [\ F_n(n) \rightarrow P_n(n)\ ]$

$\omega + 9$ Definición del bicondicional

$\omega +12.\ P_n\ (n) \rightarrow\ F_n\ (n)$ — $\omega +11$ Simplificación

$\omega +13.\ F_n(n)$ — $\omega +10$, $\omega +12$ Modus Ponens

$\omega + 14.\ F_n(n) \wedge {\sim}F_n(n)$ — $\omega + 7$, $\omega +13$ Conjunción

$\omega + 15. \sim\ [\ \sim\ (Pn\ =\ R)\ \vee \sim R\ (n)\ ] \rightarrow [F_n(n) \wedge {\sim}F_n(n)]$

$\omega + 1$- $\omega + 14$ Prueba condicional

$\omega +16. \sim (\ P_n = R\ )\ \vee \sim R(n)$ — $\omega + 15$ Reducción al absurdo

2. 3. 2. Familia oracional de paradojas de Russell

Es necesario afirmar que la paradoja de Russell, es decir, la paradoja de las clases, también es una paradoja matemática que se basa en las paradojas de Cantor y Burali-Forti, pues es formulable mediante el lenguaje matemático de la teoría de conjuntos. En este sentido, la paradoja de Russell culmina las paradojas matemáticas del máximo ordinal y cardinal. En mi opinión, dicha paradoja se constituye como el eslabón perdido entre las paradojas en lenguaje natural y las paradojas en lenguaje formal. Según Kurt Gödel (1981b: 295-327) en *La Lógica Matemática de Russell*:

> “ (…) [Russell] [a]nalizando las paradojas a que había conducido la teoría de conjuntos de Cantor [acerca del máximo número ordinal o cardinal], las liberó de todos sus tecnicismos matemáticos, proporcionando así luz al asombroso hecho de que nuestras intuiciones lógicas (es decir, intuiciones relativas a nociones tales como verdad, concepto, ser, clase, etc.) son autocontradictorias. ”

La paradoja de Russell puede ser derivada a partir de la paradoja de Cantor gracias a la aplicación de un lema que relaciona los conceptos de ‘conjunto potencia’, ‘equivalencia’ y ‘pertenencia’. Asimismo, la paradoja de Burali-Forti también está relacionada con la de

Russell mediante la problemática existencia del conjunto de todos los ordinales. Ya que si ese conjunto es bien ordenado, debe tener un ordinal asociado y, por lo tanto, debe contenerse a sí mismo.

Ahora bien, sucede que la paradoja de Russell mantiene un estrecho vínculo con la paradoja de *El Mentiroso*, vínculo que explica la oracionalidad de esta familia de Russell [54]. Este vínculo se funda en el hecho de que las soluciones de una y otra paradoja limitan la universalidad expresiva de los lenguajes que las albergan. Además, existen tantos tipos de versiones de la paradoja de Russell como tipo de versiones de la paradoja del Mentiroso [55]. La paradoja de Russell resulta tener dos familias, una oracional y una argumental. También se da el caso de que la familia oracional contiene a la versión más difundida de la paradoja de Russell, la versión clásica de la clase de todas las clases que no se contienen a sí mismas.

2. 3. 2. 1. Paradoja de las clases

La paradoja de Bertrand Russell de la teoría lógica de las clases fue descubierta por Zermelo en 1900 y un año más tarde, redescubierta independientemente, por Russell, quien la publicó. Se ha solido considerarla como una paradoja de la teoría de conjuntos debido a la confusión del concepto de conjunto con el concepto fregeano de clase (o extensión de un concepto). La fundamentación lógica de la aritmética por Frege se basaba en el supuesto de que para cada

---

[54] Esta relación ha quedado establecida en la primera parte de este trabajo cuando se indica que la paradoja de *El Mentiroso* influye en la gestación de la paradoja de Russell.

[55] Como ya establecimos en nuestra tesis de licenciatura, existe una familia oracional y otra argumental de paradojas de *El Mentiroso* (Mora, 2014a, 69-94). Análogamente, estamos notando que existe una familia oracional y otra argumental de paradojas de Russell.

propiedad o condición φ (x), expresable en el lenguaje, existe la clase de todas las cosas que tienen esa propiedad o cumplen esa condición. Sucumbiendo a la confusión señalada, dicha clase se representa con el mismo símbolo que el conjunto de todas las x que cumplen la condición φ (x), a saber, $\{x / \varphi(x)\}$. Naturalmente, los objetos de esta clase satisfacen la condición que la define, es decir, $\forall z (z \in \{x / \varphi(x)\} \leftrightarrow \varphi(z))$; donde alentamos la confusión utilizando el símbolo $\in$ para significar la pertenencia a una clase fregeana. Ciertamente, hay clases que no se pertenecen a sí mismas, esto es clases x tales que $x \notin x$; por ejemplo, la clase de todas las moscas no es una mosca. Russell se preguntó por la clase de todas las clases que cumplen esa condición, la clase $r = \{x / x \notin x\}$ de todas las clases que no se pertenecen a sí mismas. La suposición de que esta clase existe produce inmediatamente una contradicción. En efecto, $\forall z (z \in \{x / x \notin x\} \leftrightarrow z \notin z)$. Tomando en consideración que $\{x / x \notin x\} = r$, tenemos que $\forall z (z \in r \leftrightarrow z \notin z)$. Lo que vale para todo z vale en especial para r, por lo tanto, $(r \in r) \leftrightarrow (r \notin r)$, lo cual es una contradicción manifiesta formalmente idéntica a $V(\alpha) \leftrightarrow F(\alpha)$, donde $\alpha = r \in r$. (Mosterín y Torreti, 2002: 434). Enseguida, para reproducir la paradoja en lenguaje natural y formal presupondremos entes que se pertenecen a sí mismos.

1. Para todo elemento z, z pertenece al conjunto determinado por aquellos elementos que tienen la propiedad φ si y solo si z tiene la propiedad φ
2. Para todo y, y tiene la propiedad φ es igual a que y no pertenezca a y.
3. r es el conjunto determinado por aquéllos elementos que tienen la propiedad de no pertenecerse a sí mismos.
4. Dados a y b, a pertenece a b es igual a que no sea cierto que a no pertenece a b.

POR LO TANTO, no es cierto que para todo W, W se pertenece a sí mismo.

1. $\forall z (z \in \{ x / \varphi (x) \} \leftrightarrow \varphi (z))$
2. $\forall y (\varphi (y) = y \notin y)$
3. $r = \{ x / x \notin x \}$
4. $\forall a \forall b (a \in b = \sim (a \notin b))$ $// \therefore \sim \forall W(W \in W)$
5. $\forall W (W \in W)$ $// \therefore \perp$
6. $\varphi (x) = x \notin x$ 2 Ejemplificación universal
7. $\varphi (z) = z \notin z$ 2 Ejemplificación universal
8. $\forall z (z \in \{ x / x \notin x \} \leftrightarrow z \notin z)$ 1, 6 y 7 (I)
9. $\forall z (z \in r \leftrightarrow z \notin z)$ 3, 8 (I)
10. $r \in r \leftrightarrow r \notin r$ 9 Ejemplificación universal
11. $(r \in r \rightarrow r \notin r) \wedge (r \notin r \rightarrow r \in r)$ 10 Definición del bicondicional
12. $[\sim (r \in r) \vee (r \notin r)] \wedge [\sim (r \notin r) \vee (r \in r)]$ 11 Definición del condicional
13. $r \in r = \sim (r \notin r)$ 4 Ejemplificación universal
14. $[\sim\sim (r \notin r) \vee (r \notin r)] \wedge [(r \in r) \vee (r \in r)]$ 12 y 13 (I)
15. $(r \notin r) \wedge (r \in r)$ 14 Doble negación e Idempotencia
16. $\forall W(W \in W) \rightarrow [(r \notin r) \wedge (r \in r)]$ 5-15 Prueba condicional
17. $\sim \forall W(W \in W)$ 16 Reducción al absurdo

2. 3. 2. 2. Paradoja de las propiedades

La paradoja de las propiedades impredicables mantiene una relación directa con una paradoja de la familia argumental de Russell, la paradoja de Grelling de los términos heterológicos. Por ello, sólo la exponemos, mas no la desarrollaremos:

> “Russell mostró también como reconstruir su paradoja en términos que fuesen lógicos y no propiamente de teoría de conjuntos. Una propiedad es llamada ‘predicable’ si se aplica a sí misma, ‘impredicable’ si no se aplica a sí misma. Por ejemplo, la propiedad ‘abstracto’ es abstracta, y por tanto predicable; pero ‘concreto’ es también abstracta y no concreta, y por tanto es impredicable. ¿Qué sucede, a este respecto con la propiedad ‘impredicable’.” (Kleene, 1974: 44)

El mismo Bertrand Russell razona por reducción al absurdo de la siguiente manera: “(…) Admitamos que “no predicable de sí mismo” es un predicado. Entonces, suponer que él es o no predicable a sí mismo es contradictorio. La conclusión en este caso parece evidente: “no predicable a sí mismo” no es predicado” (Russell, 1983: 136). En este caso el conjunto problemático es el generado por la propiedad impredicable. Además, tenemos que

Imp(Imp) $\leftrightarrow$ Pred(Imp), lo cual es una contradicción manifiesta formalmente idéntica a $V(\alpha)\leftrightarrow F(\alpha)$, donde α = Imp(Imp). Ahora, formularemos esta paradoja en lenguaje natural.

1. Para toda propiedad X, si X es un X, entonces X es predicable.
2. Para toda propiedad X, si X no es un X, entonces X es impredicable.
3. Para toda propiedad Y, Y es predicable es igual a Y no es impredicable.

POR LO TANTO, existe la propiedad impredicable.

Formalicemos esta paradoja:

1. $\forall X\ [\ X(X) \rightarrow Pred(X)\ ]$
2. $\forall X\ [\sim X(X) \rightarrow Imp(X)\ ]$
3. $\forall\ Y\ [Pred(Y) = \sim Imp(Y)]$ // $\therefore\ \forall\ Z\ (Z=Imp)$

El desarrollo de este argumento puede verse en la sección correspondiente a la paradoja de Grelling.

2. 3. 2. 3. Paradoja de las relaciones

La paradoja de las relaciones resulta de una generalización de la paradoja de las clases, puesto que la pertenencia es un tipo de relación. Esta paradoja también mantiene un estrecho parecido estructural con la paradoja del barbero y del catálogo. Nuevamente, sólo plantearemos la paradoja de las relaciones. Su desarrollo lo dejaremos pendiente hasta que lleguemos a la paradoja de los catálogos que está después de la del barbero.

> "(…) Sea *R* una relación y consideramos la clase ω de términos que no guardan la relación *R* respecto a sí mismos. Entonces, es imposible que exista un término *a* respecto al cual todos ellos y ningún otro guarden la relación *R*. Porque si existiera un tal término, la función proposicional "x no guarda la relación R con x" sería equivalente a "x guarda la relación R con a". Sustituyendo x por a, lo que es legítimo, pues la equivalencia es formal, encontramos una contradicción. Si en lugar de colocar R ponemos $\in$ (…) llegamos a la contradicción anterior. (…) " (Russell, 1983: 137)

La relación reflexiva R que vincula un término consigo mismo es el conjunto infundado que genera la circularidad y la contradicción. Asimismo, llegamos a concluir que $R(aa)\leftrightarrow \sim R(aa)$, lo cual es una contradicción manifiesta formalmente idéntica a $V(\alpha)\leftrightarrow F(\alpha)$, donde $\alpha = R(aa)$. En lenguaje natural, este es el argumento de la paradoja de las relaciones:

1. Para todo x, si a tiene la relación R con x, entonces x no tiene la relación R consigo mismo.
2. Para todo x, si a no tiene la relación R con x, entonces x tiene la relación R consigo mismo.

POR LO TANTO, no es cierto que exista a.

Este el mismo argumento pero desarrollado en lenguaje formal:

1. $\forall x\ [R(ax) \rightarrow \sim R(xx)]$
2. $\forall x\ [\sim R(ax) \rightarrow R(xx)]$ $\quad // \therefore \sim \exists x\ (x = a)$

2. 3. 3. Familia argumental de paradojas de Russell

Ahora, expondremos la variada familia argumental de Russell: la paradoja del barbero, la de los alcaldes, la del catálogo y la de Grelling. Esta familia de paradojas de Russell se caracteriza principalmente por estar formulada en lenguaje natural y por utilizar conceptos lingüísticos o verbos reflexivos o estructuras lógicas típicas de la familia oracional de Russell.

2. 3. 3. 1. Paradoja del barbero

La paradoja del barbero es una popularización de la paradoja de Russell que hace alusión a un barbero que, por norma, *afeita a todas aquellas personas de la aldea que no se afeitan a sí mismas* y solo a aquéllas. La pregunta desconcertante es: *¿se afeita el barbero a sí mismo?* Se plantea entonces una difícil situación circular y contradictoria.

1) Si suponemos que el barbero se afeita a sí mismo, como es un habitante del lugar que se afeita a sí mismo, no debería ser afeitado por el barbero y, por consiguiente, no debería ser afeitado por sí mismo. Así pues, si suponemos que es afeitado por él mismo, entonces afirmamos que no debería ser afeitado por sí mismo. $V(a) \rightarrow F(a)$.

2) Si suponemos que el barbero no se afeita a sí mismo, según la norma aceptada, debería ser afeitado por el barbero; es decir, debería ser afeitado por sí mismo. De nuevo se presenta el conflicto, ya que si el barbero no se afeita a sí mismo, debería ser afeitado por sí mismo. $F(a) \rightarrow V(a)$.

Conjuntando ambas posibilidades tenemos que el barbero se afeita a sí mismo, si y sólo si, no se afeita a sí mismo. Es decir, $V(a) \leftrightarrow F(a)$ donde $a=A(b,b)$[56]. Este mismo argumento lo representaremos en lenguaje natural y también en lenguaje formal (Llanos, 2003: 386):

1. Para todo x, si x no se afeita a sí mismo, entonces el barbero afeita a x.
2. Para todo x, si x se afeita a sí mismo, entonces el barbero no afeita a x.

POR LO TANTO, no es cierto que exista el barbero.

1. $\forall x\, [\sim A(xx) \rightarrow A(bx)]$
2. $\forall x\, [A(xx) \rightarrow \sim A(bx)]$ $\qquad //\therefore \sim \exists x\, (x = b)$

2. 3. 3. 2. Paradoja de los catálogos

Según la paradoja de los catálogos, partiendo de la base de que toda biblioteca tiene un catálogo (o bibliografía), se comprueba que en algunos casos estos catálogos *se incluyen a sí mismos* como libros de la biblioteca y, en otros casos, no.

[56] La expresión 'A(b,b)' se puede interpretar como afirmando que el barbero afeita al barbero, es decir, a sí mismo.

Supongamos ahora que quisiéramos construir una suerte de supercatálogo (o superbibliografía). Específicamente, queremos hacer un catálogo de todos aquellos catálogos que no se incluyen a sí mismos como libros de sus respectivas bibliotecas. Reflexionando un poco nos daremos cuenta que se nos plantea un problema en el momento de incluir o no al supercatálogo mismo en nuestro supercatálogo. Razonemos por una doble reducción al absurdo. En tanto estamos catalogando a los catálogos que no se incluyen a sí mismos, deberíamos incluirlo. No obstante, el catálogo sería erróneo por incluir un catálogo que sí se incluye a sí mismo. Pero, si a consecuencia de este razonamiento, decidimos no incluirlo, incurriríamos en el error de construir un catálogo incompleto, en el que faltaría precisamente el catálogo que estamos haciendo que, por no incluirse a sí mismo, debería ser incluido. Enseguida, presentaremos esta paradoja representada en lenguaje natural y, luego, en lenguaje formal.

1. Para todo x, si x no se incluye a sí mismo, entonces el catálogo incluye a x.
2. Para todo x, si x se incluye a sí mismo, entonces el catálogo no incluye a x.

POR LO TANTO, no es cierto que existe el catálogo.

1. $\forall x\ [\sim I(xx) \rightarrow I(cx)]$	
2. $\forall x\ [I(xx) \rightarrow \sim I(cx)]$	$//\therefore \sim\exists x\ (x = c)$
3. $\exists x\ (x = c)$	$//\therefore \perp$
4. $I(cc) \rightarrow \sim I(cc)$	2 Ejemplificación universal
5. $\sim I(cc) \rightarrow I(cc)$	1 Ejemplificación universal
6. $\sim I(cc) \vee \sim I(cc)$	4 Definición del condicional

7. $\sim\sim I(cc) \vee I(cc)$	5 Definición del condicional
8. $I(cc) \vee I(cc)$	7 Doble negación
9. $\sim I(cc)$	6 Idempotencia
10. $I(cc)$	8 Idempotencia
11. $\sim I(cc) \wedge I(cc)$	9, 10 Conjunción
12. $\exists x\ (x = c) \rightarrow [\sim I(cc) \wedge I(cc)]$	3-11 Prueba condicional
13. $\sim\exists\ x\ (x = c)$	12 Reducción al absurdo

2. 3. 3. 3. Paradoja de los alcaldes

De acuerdo a la paradoja de los alcaldes, todo distrito ha de tener un alcalde, y no puede haber dos distritos que tengan el mismo alcalde.

Sucede, a veces, que el alcalde no reside en su propio distrito. Supongamos que se promulga una ley en la cual se delimita un área especial S, exclusivamente para aquéllos alcaldes que no residen en su propio distrito, y se obliga a todos esos alcaldes a residir allí. Supóngase, por añadidura, que hay tantos alcaldes no-residentes, que S ha de ser constituido en distrito. La pregunta conflictiva es: ¿dónde residirá el alcalde de S? Existen dos posibilidades: que el alcalde resida en su propio distrito y que el alcalde no resida en su propio distrito.

1) Si el alcalde reside en su propio distrito, que es el distrito de los alcaldes, ya que allí solo residen los que no residen en su propio distrito, no debería residir en el distrito de los alcaldes. $V(a) \rightarrow F(a)$.

2) Si el alcalde no reside en su propio distrito, que es el de los alcaldes, ya que allí solo residen los que no residen en su propio distrito, debería residir en el distrito de los alcaldes. $F(a) \rightarrow V(a)$.

Conjuntando ambos resultados tenemos: $V(a) \leftrightarrow F(a)$ donde $a=V(b,s)$[57], lo que indica que estamos ante una paradoja. Como podemos darnos cuenta ambas soluciones nos conducen a contradicciones. En breve, la formulación en lenguaje natural y luego en lenguaje formal.

1. Para todo x, para todo y, si x es alcalde de y, y x no vive en y, entonces x vive en s.
2. Para todo x, para todo y, si x es alcalde de y, y x vive en y, entonces x no vive en s.
3. Para todo z, si z es un municipio, entonces para todo x, x es alcalde de z.
4. s es un municipio.

   POR LO TANTO, no es cierto que exista la ciudad s.

1. $\forall x \forall y [(A(x,y) \land \sim V(x,y)) \rightarrow V(x,s)]$
2. $\forall x \forall y [(A(x,y) \land V(x,y)) \rightarrow \sim V(x,s)]$
3. $\forall z [M(z) \rightarrow \forall x A(x, z)]$
4. $M(s)$ $\qquad\qquad$ $//\therefore \sim\exists z (z=s)$

[57] La expresión 'V(b,s)' puede ser leída como el alcalde b vive en s.

5. $\exists z\,(z=s)$	// $\therefore \perp$
6. $(A(b,s) \wedge \sim V(b,s)) \rightarrow V(b,s)$	1 Ejemplificación universal
7. $(A(b,s) \wedge V(b,s)) \rightarrow \sim V(b,s)$	2 Ejemplificación universal
8. $\sim (A(b,s) \wedge \sim V(b,s)) \vee V(b,s)$	6 Definición del condicional
9. $\sim (A(b,s) \wedge V(b,s)) \vee \sim V(b,s)$	7 Definición del condicional
10. $\sim A(b,s) \vee V(b,s) \vee V(b,s)$	8 De Morgan
11. $\sim A(b,s) \vee \sim V(b,s) \vee \sim V(b,s)$	9 De Morgan
12. $\sim A(b,s) \vee V(b,s)$	10 Idempotencia
13. $\sim A(b,s) \vee \sim V(b,s)$	11 Idempotencia
14. $M(s) \rightarrow \forall x\, A(x, s)$	3 Ejemplificación universal
15. $\forall x\, A(x, s)$	4, 14 Modus Ponens
16. $A\,(b,s)$	15 Ejemplificación universal
17. $V(b,s)$	12, 16 Silogismo disyuntivo
18. $\sim V(b,s)$	13, 16 Silogismo disyuntivo
19. $V(b,s) \wedge \sim V(b,s)$	17, 18 Conjunción
20. $\exists z\,(z=s) \rightarrow [\, V(b,s) \wedge \sim V(b,s)\,]$	5-19 Prueba condicional
21. $\sim\exists z\,(z=s)$	20 Reducción al absurdo

2. 3. 3. 4. Paradoja de Grelling

La paradoja de Grelling registrada en el trabajo de Leonard Nelson y Kurt Grelling, *Bemerkungen zu den Paradoxien von Russell und Burali-Forti*, y también en *Teoría de Conjuntos* del mismo Grelling (1943: 115-116) es también conocida como la ‘paradoja de los términos heterológicos'. Según ella, muchas expresiones del lenguaje corriente pueden dividirse en autológicas y heterológicas. Expresiones autológicas son las que se refieren a sí mismas, esto es, expresiones de la forma: '*t* ' es *t*. Ejemplos de ellas en español son: breve (que es breve); escrito en español (que está escrito en español); impreso en negro (que está impreso en negro); consta de cuatro palabras (que consta de cuatro palabras). Expresiones heterológicas son las que no se refieren a sí mismas, esto es expresiones de la forma: '*t* ' no es *t*. Ejemplos de ellas son: escrito en francés (que no está escrito en francés); impreso en rojo (que no está impreso en rojo); consta de dos palabras (que no consta de dos palabras). En medio de estas autoreferencias (o no-autorreferencias) el problema que se plantea es el siguiente: ¿El término 'heterológico' es heterológico o autológico? Tenemos entonces que:

1) Si 'heterológico' es heterológico, se refiere a sí mismo. Pero, si por definición todo término que se refiere a sí mismo es autológico, entonces 'heterológico' es autológico. Por tanto, si 'heterológico' es heterológico, entonces 'heterológico' es autológico. Formalmente: Het(Het) $\rightarrow$ Aut(Het).

2) Si 'heterológico' es autológico, no se refiere a sí mismo. Pero, si por definición todo término que no se refiere a sí mismo es heterológico, entonces 'heterológico' es heterológico. En consecuencia, si 'heterológico' es autológico, entonces 'heterológico' es heterológico. Formalmente: Aut(Het) $\rightarrow$ Het(Het).

Luego, la forma lógica de este argumento es: Het(Het)$\leftrightarrow$Aut(Het); lo cual indica la presencia de una paradoja. Hemos usado la expresión 'se refiere a'. Podíamos haber usado 'denota' o 'designa' o 'es verdadera de'. En esos casos, la paradoja de Grelling sería una de las paradojas de la denotación o de la designación o de la verdad. Hay similaridades entre ella y la de *El Mentiroso*. (Ferrater Mora, 1994: 1632-1633). Por ejemplo, modifiquemos la conclusión: si tenemos que a=Het(Het), entonces podremos concluir como en *El Mentiroso* que $V(a) \leftrightarrow F(a)$. También, mantiene ciertas semejanzas con la paradoja de las propiedades de Russell en cuanto a la estructura lógica del argumento paradójico. Frank P. Ramsey en *Fundamentos de Matemáticas* también la llama paradoja de Weyl. Arthur Pap en *Semántica y Verdad Necesaria* la llama paradoja de Grelling Weyl. A continuación, la paradoja de Grelling en lenguaje natural y, luego, en lenguaje formal.

1. Para todo X, si X es X, entonces X es autológico.
2. Para todo X, si X no es X, entonces X es heterológico.
3. Para todo Y, Y es autológico es igual que Y no es heterológico.

POR LO TANTO, no existe el predicado heterológico.

1. $\forall X[\ X(X) \rightarrow \ \mathrm{Auto}(X)\ ]$	
2. $\forall X[\sim X(X) \rightarrow \mathrm{Het}(X)\ ]$	
3. $\forall\ Y\ [\mathrm{Auto}(Y) = \sim \mathrm{Het}(Y)]$	// $\therefore \sim \exists\ Z\ (Z=\mathrm{Het})$
4. $\exists\ Z\ (Z=\mathrm{Het})$	// $\therefore\ \perp$
5. $\mathrm{Het}(\mathrm{Het}) \rightarrow \mathrm{Auto}(\mathrm{Het})$	1 Ejemplificación universal
6. $\sim \mathrm{Het}(\mathrm{Het}) \rightarrow \mathrm{Het}(\mathrm{Het})$	2 Ejemplificación universal
7. $\sim \mathrm{Het}(\mathrm{Het}) \vee \mathrm{Auto}(\mathrm{Het})$	5 Definición del condicional
8. $\sim\sim \mathrm{Het}(\mathrm{Het}) \vee \mathrm{Het}(\mathrm{Het})$	6 Definición del condicional
9. $\mathrm{Het}(\mathrm{Het}) \vee \mathrm{Het}(\mathrm{Het})$	8 Doble negación

10. Het(Het)	9 Idempotencia
11. Auto(Het) = ~Het(Het)	3 Ejemplificación universal
12. ~Het(Het) ∨ ~Het(Het)	7, 11 (I)
13. ~Het(Het)	12 Idempotencia
14. Het(Het) ∧ ~Het(Het)	10, 13 Conjunción
15. ∃ Z (Z=Het) → [Het(Het) ∧ ~Het(Het)]	4-14 Prueba condicional
16. ~∃ Z (Z=Het)	15 Reducción al absurdo

CAPÍTULO III

EVALUACIÓN E IMPACTO DE LA PARADOJA DE RUSSELL

Aun los expertos más sutiles pueden ser incapaces de evitar proferencias que conducen a paradojas. Se cuenta que Russell preguntó en una ocasión a Moore si siempre decía la verdad y que consideró la respuesta negativa de Moore como la única falsedad emitida por Moore. No hay duda de que nadie ha tenido un olfato más fino para las paradojas que Russell. Sin embargo, es obvio que no se percató de que si, como él pensaba, todas las otras proferencias de Moore eran verdaderas, la respuesta negativa de Moore no sólo era falsa, sino paradójica.

KRIPKE

Habiendo dado algunos lineamientos sobre cómo Russell descubrió su paradoja, nos toca ahora dar cuenta de todo el remezón que provocó en cuanto a los fundamentos de la matemática concierne. Esta paradoja no es, como algunos pueden suponer, un simple juego de palabras sino que tiene un importante valor. Su sola formulación amenazaba la consistencia de la teoría de conjuntos, la cual se configuraba como la base de toda la matemática. Varios intentos de solucionar o interpretar esta paradoja se han dado. A continuación, expondremos las propuestas clásicas añadiendo, además de las ya conocidas, las de Gödel y Priest. Finalmente, señalaremos los sentidos o las interpretaciones que estas escuelas les han dado a la paradoja de Russell.

3. 1. El problema de los fundamentos de la matemática

La investigación en el campo de los fundamentos de la matemática inicia a causa del tremendo impacto que produce el descubrimiento de las paradojas, o antinomias, de la teoría de conjuntos. En 1897, época en que Burali-Forti publica la primera paradoja (acerca de los ordinales) y en que el propio Cantor había descubierto ya varias paradojas pero no las había publicado, la teoría de conjuntos era considerada como el fundamento de toda la matemática clásica. Las paradojas mostraban que algo extraño acontecía en el nivel más alto del pensamiento racional y que, mientras no se supiera qué era lo que pasaba, la ciencia lógico-matemática y toda la ciencia en general, no podría establecerse sobre bases seguras. Así, el surgimiento de las paradojas se constituye como el gran incentivo que generó la moderna investigación en la que se ha ido desarrollando los grandes movimientos filosófico-matemáticos. (Miró Quesada, 1980: XIX-XX)

Las investigaciones que se realizan en torno a los fundamentos de la matemática se encuentran dentro de la filosofía de la matemática. Esta es una disciplina que trata de comprender y explicar los requisitos, el objeto, el método y la naturaleza de las matemáticas. En esta se intentan responder, entre otras, las siguientes preguntas:

-¿Cómo sabemos que nuestras teorías matemáticas son verdaderas?

-¿Sobre qué son las matemáticas? En otras palabras, si un enunciado matemático es verdadero, ¿qué lo hace verdadero? ¿En virtud de qué es verdadero?

-¿Las verdades matemáticas son verdaderas por necesidad? Y, si lo son, ¿cuál es la fuente de esta necesidad?

Ahora bien, es un hecho que la filosofía de la matemática logró ocupar el centro de los debates epistemológicos a inicios del siglo XX cuando surgió la mencionada “crisis de la teoría de conjuntos” provocada por la aparición de las paradojas en dicho campo. Sin embargo, es solo a partir del pronunciamiento de Russell que dichas paradojas comienzan a cobrar valor. Las paradojas ya existían desde antes que se comenzara a discutir sobre los fundamentos de la matemática. Pero, es Russell quien le otorga el valor adecuado a estas paradojas, llamando la atención así de propios y extraños. Existen muchas propuestas para anular, arreglar, amortiguar o reducir el impacto desestabilizador provocado: logicismo, axiomatismo, formalismo, etc. En lo que sigue, revisaremos todas y cada una de estas. [58]

3. 1. 1. Logicismo

Esta es la primera postura filosófica sobre los fundamentos de la matemática. Si bien Frege inició el programa logicista, este fue continuado por Bertrand Russell en la obra *Principia Mathematica* que escribió asociado con Alfred North Withehead. De acuerdo a Mosterín (2000: 151-152), la tesis logicista considera que la matemática es totalmente reducible a la lógica en el siguiente sentido:

---

[58] Es importante distinguir entre *filosofía matemática* y filosofía *de la* matemática. La expresión "filosofía matemática" fue muy habitual en la primera mitad del siglo XX; Russell la utilizó ya en 1919 con su obra *Introducción a la filosofía matemática*. Su objetivo era analizar las teorías matemáticas con medios lógico-matemáticos estableciendo resultados apodícticos. Ésta es también la línea que siguió el célebre programa de Hilbert, que intentó resolver el problema de los fundamentos de la matemática como un problema matemático, y se orientó a las demostraciones de consistencia. En dicha línea podemos situar enfoques como el logicismo, constructivismo, formalismo, predicativismo, e incluso el estructuralismo reciente. (Ferreirós, 2012: 46)
Actualmente, se ha revitalizado este término, pues de lo que trata ahora es del estudio de todo problema filosófico con herramientas formales como la lógica y las matemáticas. En Alemania (Múnich) dos importantes filósofos de la ciencia dirigen el Centro para la Filosofía Matemática de Múnich (heredero de la obra de Wolfgang Stegmüller, el estructuralista científico), ellos son Hannes Leitgeb y Stephan Hartmann. Ver el link: http://www.mcmp.philosophie.uni-muenchen.de/index.html.
El objeto de la "filosofía de la matemática", en cambio, es más tradicional: analizar los métodos, la base epistemológica y la evolución de la práctica matemática con las herramientas propias de la filosofía, o aun de la teorización en general. Habría que encuadrar aquí tendencias tan dispares como el platonismo, el intuicionismo, el empirismo, o los enfoques históricos y naturalistas. El siglo XX empezó con una clara preponderancia de la "filosofía matemática", que constituía la gran novedad al abrigo de la nueva lógica, pero concluyó con una balanza mucho más equilibrada. (Ferreirós, 2012: 46)

1) Todos los conceptos de la matemática pueden definirse a partir de conceptos puramente lógicos.

2) Todos los teoremas matemáticos pueden deducirse a partir de principios lógicos.

3. 1. 1. 1. Teoría de los tipos lógicos

Esta teoría, propuesta por Russell para evitar la aparición de paradojas, fue elaborada en 1908 e incorporada a los *Principia Mathematica* (1910-13). En el trabajo de Ferrater Mora y Leblanc (1992: 168-175) se presentan dos versiones: la intensional -fundada en el dualismo entre propiedades monádicas y clases- y la versión extensional -donde se abandonará tal dualismo y se acogerán solamente clases. Pero, hay que apuntar que ambas son distintas formulaciones de la teoría simple de los tipos. Enseguida, en base a Copi (1995: 180-181 y 355-365) presentaremos esta y luego la teoría ramificada de los tipos.

3. 1. 1. 1. 1. Teoría simple de los tipos

Según Russell, las entidades se dividen en una jerarquía de tipos lógicos diferentes, el más bajo de los cuales consiste en todos los individuos, el siguiente en todos los atributos de individuos, el siguiente en todos los atributos de atributos de individuos, el siguiente en todos los atributos de atributos de atributos de individuos, y así sucesivamente. Se debe, además, considerar aparte de esta división de todas las entidades en tipos lógicos diferentes, la restricción de que cualquier atributo que pueda significativamente predicarse de una entidad de un tipo lógico no puede significativamente predicarse de cualquier entidad de cualquier otro tipo lógico. Por ejemplo, una cosa individual puede ser de color naranja, pero claramente no tiene sentido decir de algún atributo que es de color naranja. Y un atributo puede tener muchas ejemplificaciones, es decir, objetos a los cuales se les puede aplicar, pero no tiene sentido ni afirmar ni negar que una cosa individual tenga muchas ejemplificaciones.

Expresaremos en términos formales la teoría simple de los tipos. Usando letras minúsculas para designar individuos y mayúsculas para denotar atributos, podemos representar esta jerarquía como sigue, donde el subíndice que se pone a una función indica su nivel correcto en la jerarquía:

.	.	.	.			
.	.	.	.			
.	.	.	.			
tipo 3:	F_3	G_3	H_3	.	.	.
tipo 2:	F_2	G_2	H_2	.	.	.
tipo 1:	F_1	G_1	H_1	.	.	.
tipo 0:	a	b	c	.	.	.

Solo una función de tipo 1 puede predicarse significativamente de un individuo, y en general, una función de tipo i puede significativamente predicarse de un función de tipo j si y solo si $i=j+1$.

Lo atractivo de la teoría simple de los tipos es el hecho de que permite evitar contradicciones como la del pretendido atributo “impredicable”. De acuerdo con esta teoría, el tipo de un atributo debe ser más alto que el tipo de cualquier entidad de la cual se pueda significativamente predicar. Así pues, no tiene sentido ni afirmar ni negar de ningún atributo que pertenezca a sí mismo; expresiones como "Imp (Imp)" y "~Imp(Imp)" deben rechazarse por carentes de significado. En consecuencia, no es posible definir el atributo "impredicable" y la contradicción desaparece.

Desde otro enfoque, también es posible resolver la paradoja de las clases. Como hemos podido notar, todas las entidades se disponen de acuerdo a tipos jerárquicos, lo que determina que, mientras las entidades del mismo tipo pueden juntarse en una clase, las entidades de tipos diferentes no lo pueden hacer. Por ejemplo, hay una clase de objetos rojos. Pero, no hay una clase que junta a los objetos rojos con la clase de los objetos rojos. La clase de los objetos rojos pertenece a un tipo superior que el tipo de los objetos rojos en forma aislada. En la medida que ascendemos en las jerarquías, esto se repite. Hay una clase cuyos miembros son la clase de los objetos rojos, otra que es la clase de los objetos verdes, otra es la clase de los objetos azules y otra la clase de los objetos amarillos. Pero, no hay ninguna clase que consista en el conjunto de todas ellas juntas con la clase de las clases de objetos coloreados. Y así sucesivamente. De este modo, se elimina cualquier intento de construir una clase cuyos miembros sean de diferente tipo. No se deben introducir clases con miembros de distinto nivel lógico, ya que el resultado no va a ser una expresión bien fundada en nuestra lógica. Por ende, la expresión "clase de las clases que no son miembros de ellas mismas" no es una expresión permitida. (Scruton, 2003: 392)[59]

[59] Como el propio Russell dice: "(…) toda esa cuestión de si una clase es o no miembro de sí misma carece de sentido; esto es, que ninguna clase es, ni deja de ser, miembro de sí misma, y que ni siquiera esto último tiene visos de ser cierto, ya que, cuando decimos tal cosa, se trata simplemente de palabras desprovistas de todo significado. (…)" (Russell, 1986: 230)

3. 1. 1. 1. 2. Teoría ramificada de los tipos

Esta teoría divide cada tipo por arriba del nivel cero en una nueva jerarquía. De este modo, todas las funciones de tipo 1, que pueden predicarse significativamente de los individuos, se dividen en diferentes órdenes de la manera siguiente. Todas las funciones proposiciones de tipo 1 que o no contienen cuantificadores o contienen cuantificadores solo sobre variables individuales se dice que son funciones de primer orden. Por ejemplo, $F_1(x)$ y $(\forall y) [F_1(y) \rightarrow G_1(x)]$ son funciones de primer orden de tipo 1. Las funciones de primer orden tendrán un supraíndice izquierdo 1 para indicar su posición en la jerarquía de los órdenes. Así, todas las funciones de primer orden y tipo 1 se pueden enlistar como ${}^1F_1$, ${}^1G_1$, ${}^1H_1$, … A continuación, todas las funciones proposicionales de tipo 1 que contienen cuantificadores sobre funciones de primer orden, pero no contienen cuantificadores sobre cualesquiera otras funciones son funciones de segundo orden. Ejemplos de funciones de segundo orden de tipo 1 son $(\forall {}^1F_1) [{}^1F_1 (x) \leftrightarrow {}^1F_1 (a)]$ y $(\exists {}^1G_1) (\exists y) [{}^1G_1 (y) \rightarrow {}^1H_1 (x)]$. Las funciones de segundo orden tendrán adjunto un supraíndice izquierdo 2, y todas las funciones de segundo orden de tipo 1 puede enlistarse como ${}^2F_1$, ${}^2G_1$, ${}^2H_1$, … En general, una función de orden n y tipo 1 contendrá cuantificadores sobre las funciones de orden n-1, pero no contendrá cuantificadores sobre funciones de orden m con $m \geq n$.

La teoría ramificada de los tipos puede estructurase de la siguiente manera.

	Orden 1	Orden 2	Orden 3	…
			.	
			.	
			.	
Tipo 3:	${}^{1}F_3$ ${}^{1}G_3$ ${}^{1}H_3$ …	${}^{2}F_3$ ${}^{2}G_3$ ${}^{2}H_3$ …	${}^{3}F_3$ ${}^{3}G_3$ ${}^{3}H_3$ …	…
Tipo 2:	${}^{1}F_2$ ${}^{1}G_2$ ${}^{1}H_2$ ….	${}^{2}F_2$ ${}^{2}G_2$ ${}^{2}H_2$ …	${}^{3}F_2$ ${}^{3}G_2$ ${}^{3}H_2$ …	…
Tipo 1:	${}^{1}F_1$ ${}^{1}G_1$ ${}^{1}H_1$ ….	${}^{2}F_1$ ${}^{2}G_1$ ${}^{2}H_1$ …	${}^{3}F_1$ ${}^{3}G_1$ ${}^{3}H_1$ …	…

Esta jerarquía de los órdenes no nos permite hablar de todas las funciones o atributos de un tipo dado, etc. De este modo, no podemos decir, según esta teoría, que Pepe tiene todas las buenas cualidades de Memo, lo que se simbolizaría como

$(\forall F_1)\{[G_2 (F_1) \wedge F_1 (a)] \rightarrow F_1(b)\}$

En vez de ello, podemos decir que Pepe tiene todas las cualidades de primer orden de Memo, lo que simboliza

$(\forall {}^{1}F_1)\{[{}^{1}G_2 ({}^{1}F_1) \wedge {}^{1}F_1 (a)] \rightarrow {}^{1}F_1(b)\}$

o que Pepe tiene todas la cualidades de segundo orden de Memo, que se escribe así:

$(\forall {}^{2}F_1)\{[{}^{1}G_2 ({}^{2}F_1) \wedge {}^{2}F_1 (a)] \rightarrow {}^{2}F_1(b)\}$

o que Pepe tiene todas las cualidades de orden n de Memo para algún n especificado. Habrá que notar que el atributo de tener todos los atributos de primer orden de Memo que se escribe simbólicamente como

$(\forall {}^{1}F_1)\ [{}^{1}F_1 (a) \rightarrow {}^{1}F_1 (x)]$.

es un atributo de segundo orden.

También, hay que decir que la teoría ramificada de los tipos proporciona la ventaja de evitar o disolver la paradoja de *El Mentiroso*. Asumiendo que una proposición es de orden $n+1$ si contiene un cuantificador sobre una variable proposicional de orden n, pero no contiene cuantificador sobre cualquier variable proposicional de orden m donde $m>n$. En este caso, la limitación alude a que nunca podremos referirnos a todas las proposiciones sino solo a las proposiciones de este o aquel orden especificado. De este modo, no podemos decir que "Ninguna de las proposiciones pronunciadas por Carlos tiende a incriminarlo" que podemos simbolizar como:

(∀p) [(Carlos pronuncia p) → ~ (p tiende a incriminar a Carlos)]

Pero, en vez de esto, se puede decir que "Ninguna de las proposiciones de primer orden pronunciadas por Carlos tiende a incriminarlo", o que "Ninguna de las proposiciones de segundo orden pronunciadas por Carlos tiende a incriminarlo". Este segundo caso lo podemos simbolizar así:

($\forall^2$p) [(Carlos pronuncia ^{2}p) → ~ (^{2}p tiende a incriminar a Carlos)]

Esa proposición contiene un cuantificador sobre una variable proposicional de orden 2 y por tanto es una proposición de orden 3.

Con esta argucia, la teoría ramificada de los tipos evita de manera efectiva que se produzca la paradoja de *El Mentiroso*. Cualquier versión de esa paradoja involucra la afirmación de que **la proposición que satisface una cierta condición es falsa**, siendo la afirmación misma una proposición que satisface la condición. Por ejemplo: "Esta oración es falsa". Se constata que si dicho ejemplo es verdadero entonces es falso, y si es falso entonces es verdadero. Esta contradicción se evita mediante la teoría ramificada de los tipos del siguiente modo. La afirmación solo puede referirse a proposiciones de cierto orden, de modo que solo para un *n* específico se puede afirmar que **la proposición de orden *n* que satisface cierta condición es falsa**. Pero la paradoja no puede empezar porque la oración en negritas expresa una proposición de orden *n+1* y aunque satisfaga la condición exigida no es una proposición de orden *n* y, por tanto, no puede afirmar su propia falsedad.

3. 1. 2. Axiomatismo [60]

Esta escuela (también conocida como "conjuntismo") no intenta desentrañar la esencia del conocimiento matemático. Más bien, propone limitar los conjuntos mediante axiomas que imposibiliten la aparición de paradojas. Por ejemplo, reemplaza el axioma de comprehensión[61] por el axioma de la separación[62] que sostiene que para que una propiedad pueda determinar un conjunto es necesario que se aplique a elementos de otro conjunto preexistente cuya existencia esté asegurada de antemano. Así, se logra frenar a la aparición de paradojas y, a su vez, admitiendo simultáneamente todos los axiomas, se pueden derivar los teoremas característicos de la teoría clásica de conjuntos.

[60] Si bien el axiomatismo no constituye una escuela de pensamiento filosófico sobre los fundamentos de la matemática sino que más bien se perfila como una estrategia para resolver el tema de las paradojas, consideramos que es justo colocarla al lado de las demás posturas siguiendo ciertos cánones establecidos. Así, también Miró Quesada lo hace en *Apuntes para una teoría de la razón* (1963: 52-53) y también Morris Kline en *Matemáticas: la pérdida de la certidumbre.* (2000: 295-311)

[61] El axioma de comprehensión sostiene que para cada condición, existe el conjunto de las cosas que satisfacen esa condición. Formalmente, $(\exists B)\ (\forall x)\ (x \in B \leftrightarrow \varphi(x))$. Ejemplo: si algún objeto x pertenece al conjunto de los gatos, se puede decir que "ser gato" se aplica al objeto x.

[62] El axioma de separación sostiene que para cualquier conjunto ya dado A y cualquier condición $\varphi(x)$, existe el conjunto de los elementos de A que satisfacen esa condición. Formalmente, $(\forall A)\ (\exists B)\ (\forall x)\ [x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge \varphi(x))]$. Ejemplo: si algún objeto x pertenece al conjunto de los gatos, se puede decir que "ser gato" se aplica al objeto x y que el objeto x pertenece a un conjunto ya existente, el cual podría ser el conjunto de los mamíferos.

Zermelo creía que las paradojas de la teoría de conjuntos surgían debido a que Cantor no había restringido el concepto de conjunto. Zermelo esperaba, por consiguiente, que unos axiomas claros y explícitos clarificarían lo que se entendía por conjunto y las propiedades que los conjuntos debían tener. Él buscaba en particular limitar el tamaño de los conjuntos.

Zermelo sostuvo que la paradoja solo se produce con algunos predicados, como los que escogió Russell. Por ende, hay que concluir que no hay un conjunto que corresponda al conjunto de los conjuntos que no son miembros de ellos mismos. Algunos predicados determinan conjuntos, otros no. Es decir, hay un conjunto para cada predicado legítimo, pero no para cada predicado. A partir de la teoría de conjuntos, definida en esta forma, se construyen nuestras matemáticas. [63]

El sistema de axiomas de Zermelo fue perfeccionado por Abraham A. Fraenkel. Zermelo no había distinguido entre la propiedad de un conjunto y el propio conjunto. La distinción fue hecha por Fraenkel en 1922. Pero, en este caso solo presentaremos la propuesta de Zermelo.

[63] Así, podemos afirmar que si se aceptan los axiomas de la teoría de conjuntos, se pueden construir todas las matemáticas sobre ellos. Por lo cual, la lógica al estar subordinada a los axiomas de las matemáticas, no controlaría lo que son o lo que hacen las matemáticas. La lógica es la gramática del lenguaje que usamos, un lenguaje que tuvo que existir antes de que se pudiera construir la gramática. Este lenguaje viene dado por los axiomas de Zermelo.

3. 1. 2. 1. Sistema de Zermelo

Según Cassini (2006: 192), en 1908 Ernst Zermelo publicó el artículo *Investigaciones sobre los fundamentos de la teoría de conjuntos* en el cual presenta la primera axiomatización de la teoría de conjuntos. Cierto es que después Fraenkel le agrega otros elementos de consideración pero para los fines de esta tesis solo interesa saber cómo estos axiomas le hacen frente a la paradoja de Russell. De acuerdo a Beth (1975: 30) y Cassini (2006: 117-121), los axiomas de la teoría de conjuntos de Zermelo son los siete siguientes.

1. Axioma de extensionalidad (o determinación)

Expresión:

Si dos conjuntos tienen los mismos elementos entonces son iguales.

Formalización:

$(\forall A)\ (\forall B)\ [(\forall x)\ (x \in A \leftrightarrow x \in B) \rightarrow A=B]$

Interpretación:

Si cada elemento de un conjunto A es a la vez elemento de un conjunto B y a la inversa, es decir, si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, entonces siempre $A=B$. O más brevemente: cada conjunto está determinado por sus elementos.

2. Axioma de los conjuntos elementales

Expresión:

(a) Existe el conjunto vacío $\emptyset$

(b) Si *x* es un elemento, existe entonces el conjunto $\{x\}$ que contiene a *x* como único elemento.

(c) Para dos elementos cualesquiera *x* e *y* existe un conjunto *A* que contiene solo a *x* e *y*.

Formalización:

(a) $(\forall x)\ (\exists y)\ (x \notin y)$

(b) $(\forall x)\ (\exists y)\ [x \in y \wedge (\forall z)\ (z \in y \rightarrow z = x)]$

(c) $(\forall x)\ (\forall y)\ (\exists A)\ (\forall u)\ [u \in A \leftrightarrow (u=x \vee u=y)]$

Interpretación:

(a) Hay un conjunto (impropio), el conjunto vacío $\emptyset$, que no contiene ningún elemento.

(b) Si x es una cosa del dominio, existe un conjunto $\{x\}$ que contiene a x y solo a x como elemento.

(c) Si x e y son dos cosas del dominio, existe siempre un conjunto $\{x,y\}$, que contiene como elementos a x e y.

3. Axioma de separación (o especificación)

Expresión:

Para todo conjunto A y para toda condición $\varphi(x)$ existe un conjunto B cuyos elementos son aquellos elementos x de A para los que se cumple $\varphi(x)$.

Formalización:

$(\forall A)\ (\exists B)\ (\forall x)\ [x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge \varphi(x))]$

Interpretación:

Si el enunciado universal $\varphi(x)$ está bien definido para todos los elementos de un conjunto A, entonces A posee siempre un subconjunto B que contiene como elementos a todos los elementos x de A para los cuales $\varphi(x)$ es verdadero, y solo a ellos.

4. Axioma de conjunto potencia

Expresión:

Para todo conjunto *A* existe un conjunto *B* que tiene como elementos todos los subconjuntos de *A*.

Formalización:

$(\forall A)\ (\exists B)\ (\forall C)\ (C \in B \leftrightarrow C \subseteq A)$

Interpretación:

A cada conjunto A le corresponde un segundo conjunto B (el conjunto potencia de A) que contiene como elementos a todos los subconjuntos de A, y solo a ellos.

5. Axioma de unión (o del conjunto suma)

Expresión:

Para todo conjunto *A* existe un conjunto *B* cuyos miembros son todos los miembros de los miembros de *A*.

Formalización:

$(\forall A)\ (\exists B)\ (\forall x)\ [x \in B \leftrightarrow (\exists C)\ (x \in C \wedge C \in A)]$

Interpretación:

A cada conjunto A le corresponde un conjunto B (el conjunto unión de A) que contiene como elementos a todos los elementos de los elementos de A, y solo a ellos.

6. Axioma de elección

Expresión:

Para todo conjunto A cuyos miembros son disjuntos dos a dos y por igual distintos del conjunto vacío, existe al menos un subconjunto de su conjunto unión que contiene un miembro, y sólo uno, de cada uno de los miembros de A.

Formalización:

$(\forall A)\ [(\forall B)\ [B \in A \rightarrow (\exists x)\ (x \in B \wedge (\forall C)\ (C \in A \wedge C \neq B) \rightarrow \sim\exists z\ (z \in B \wedge z \in C))] \rightarrow (\exists D)\ (\forall B)$

$(B \in A \rightarrow (\exists w)\ (\forall v)\ [v = w \leftrightarrow (v \in D \wedge v \in B)])]$

Interpretación:

Si A es un conjunto, cuyos elementos son todos los conjuntos no vacíos que no tienen elementos en común, la unión contiene al menos un subconjunto, el cual tiene un y solo un elemento en común con cada elemento de A.

7. Axioma del infinito

Expresión:

Existe al menos un conjunto *A* que cumple las condiciones siguientes:

$\emptyset \in A,\ x \in A \rightarrow \{x\} \in A.$

Formalización:

$(\exists A)\ [(\emptyset \in A) \wedge (\forall x)\ (x \in A \rightarrow \{x\} \in A)]$

Interpretación:

El dominio contiene al menos un conjunto A, que contiene como elemento al conjunto vacío y está constituido de manera que, a cada elemento x le corresponde otro elemento de la forma {x}, o que junto con cada elemento suyo x también contiene como elemento al conjunto correspondiente {x}.

Con esta axiomática se logra hacer frente a la paradoja de Russell. La paradoja de Russell surgía, afirma Mosterín (1980: 25-26), de la aceptación de los principios intuitivos de que (a) para cada condición existe el conjunto de las cosas que satisfacen esa condición y de que (b) todo conjunto es una cosa que puede ser elemento de otros conjuntos. Podemos formular (a) como afirmando que para cualquier condición $\varphi(x)$:

1. $(\exists B)\ (\forall x)\ (x \in B \leftrightarrow \varphi(x))$ Axioma de comprehensión

Eligiendo como condición $\varphi(x)$ la de no ser elemento de sí mismo, $x \notin x$, obtenemos

2. $(\exists B)\ (\forall x)\ (x \in B \leftrightarrow x \notin x)$ 1 y * (I) [64]

Llamando 'Z' a tal B resulta que

3. $(\forall x)\ (x \in Z \leftrightarrow x \notin x)$ 2 Ejemplificación existencial

Y sustituyendo x por Z se obtiene que

4. $(Z \in Z \leftrightarrow Z \notin Z)$ 3 Ejemplificación universal

Lo que constituye la contradicción hallada por Russell.

La estrategia de Zermelo consiste en evitar que puedan aparecer en la teoría conjuntos "demasiado grandes" que son los pueden dar lugar a contradicciones. Por eso, limita el esquema de formación de conjuntos a los elementos de algún conjunto ya dado B, por tanto, inofensivo. Así, pues, el esquema axiomático de formación de conjuntos (es decir, el axioma

[64] * Corresponde a la expresión: $\varphi(x) = x \notin x$.

de separación) dice ahora que para cualquier conjunto ya dado A y cualquier condición $\varphi(x)$, existe el conjunto de los elementos de A que satisfacen esa condición.

1. $(\forall A)\ (\exists B)\ (\forall x)\ [x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge \varphi(x))]$ Axioma de separación

2. $(\exists B)\ (\forall x)\ [x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge \varphi(x))]$ 1 Ejemplificación universal

A partir de esto, la paradoja de Russell ya no se puede obtener, pues por la misma inferencia de antes lo que ahora resulta es

3. $(\exists B)\ (\forall x)\ [x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin x)]$ 2 y * (I)

4. $(\forall x)\ [x \in Z \leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin x)]$ 3 Ejemplificación existencial

5. $Z \in Z \leftrightarrow (Z \in A \wedge Z \notin Z)$ 4 Ejemplificación universal

Lo cual ya no es ninguna contradicción, pues lo que ahora se sigue es

6. $Z \notin A \wedge Z \notin Z$ 5 Definición del bicondicional, Absorción

es decir, que el conjunto de los elementos de A que no son elementos de sí mismos (a saber, Z) no es elemento de A ni de sí mismo.

Ahora, debemos considerar la cuestión de si esta axiomatización se deshace de todas las paradojas de la teoría de conjuntos. Pero, parar lograr dar respuesta definitiva a esta cuestión tendríamos que tener una prueba de consistencia lo que, por el segundo teorema de Gödel[65], no puede hacerse. Por lo tanto, siguiendo a Beth, tendremos que conformarnos con poner de manifiesto que son eliminados los argumentos que en la versión original de Cantor de la teoría de conjuntos daban lugar a paradojas, gracias a las restricciones implícitas en axiomatizaciones como la de Zermelo. Es decir, este sistema no logra ofrecer una garantía indubitable contra el hallazgo de 'nuevas' paradojas. Los conjuntistas piensan que no se

[65] Presentaremos los teoremas gödelianos en la sección dedicada al 'Platonismo' de Gödel.

pueden obtener paradojas porque se ha construido una jerarquía de conjuntos que evitaba la ambigüedad. Pero, como hemos dicho, la consistencia de la teoría de conjuntos no ha sido demostrada ni podrá serlo. Según Poincaré: "Hemos puesto una cerca alrededor del rebaño para protegerlo de los lobos, pero no sabemos si dentro de la cerca han quedado encerrados algunos lobos". (Beth, 1975: 30-31)

3. 1. 3. Intuicionismo

Esta escuela expone una versión del constructivismo[66] y tiene como representantes a L. E. J. Brouwer y A. Heyting. Este grupo de pensadores imputa la existencia de contradicciones al manejo ciego del método lógico; este solo nos ofrece garantía donde lo hemos probado largamente, pero cuando nos salimos de esos dominios y entramos al dominio de lo transfinito la aplicación de este instrumento nos hace caer en error. Por ello, la intuición es la que debe juzgar, en última instancia, la validez misma de las reglas lógicas; de manera que si siempre le da uno la prioridad debida, ya no nos expondremos a antinomias (Blanché, 1965: 74). Es decir, para deshacerse de las paradojas, el intuicionismo sostiene que basta una vuelta al punto natural de partida del pensamiento matemático y una adecuada adaptación del lenguaje matemático respecto del pensamiento matemático (Beth, 1975: 28).[67] Para un

[66] El constructivismo en la fundamentación de las matemáticas surge a principios del siglo XX a raíz de la llamada crisis de la teoría de conjuntos. Sus variantes concuerdan en cuanto a la exigencia de que las demostraciones matemáticas sean constructivas, pero disienten en cuanto a la amplitud que conceden a este concepto. Así, el intuicionismo de Brouwer adopta una idea de construcción muy peculiar que excluye ciertos teoremas centrales del análisis clásico (por ejemplo, "Toda función real acotada por arriba tiene una cota superior mínima"), pero permite demostrar otros que para este son falsos (por ejemplo, "Toda función real definida en el intervalo cerrado [0,1] es uniformemente continua").

[67] Curiosamente, hay algo intuitivamente atractivo en la teoría de los tipos ya expuesta, pues se hace eco de la idea constructivista de que las entidades abstractas existen porque nosotros las construimos;

intuicionista una construcción es una entidad mental y en ningún caso se pueden identificar con entidades lingüísticas como lo sugiere la lógica clásica. El conocimiento matemático se basa en la aprehensión -que antecede cualquier lenguaje o lógica- de algunos conceptos matemáticos básicos dados por intuición.

Siguiendo a Scruton (1999: 387), podemos afirmar que el intuicionismo considera que la única concepción de la verdad matemática es la idea de prueba o demostración. Las teorías matemáticas son nuestros constructos intelectuales y, por lo tanto, nunca nos va a conducir a objetos que existan en forma independiente de nuestra actividad. Todo lo que hay es la prueba. Asimismo, los números no existen hasta que se los "construye", a través de operaciones que los generan en un número finito de pasos. Todo objeto matemático es considerado producto de la mente humana, y, por ende, la existencia de un objeto es equivalente a la posibilidad de su construcción. No hay números allá afuera, a la espera de ser descubiertos (como Platón afirmaba); todos los números que existen están contenidos en los libros y artículos de los matemáticos que ofrecen una prueba constructiva. Decir que los números existen es decir que hay pruebas válidas implicando numerales. Esto, evidentemente, contrasta con el enfoque clásico, que formula que la existencia de un objeto puede ser demostrada refutando su falsedad. Para los intuicionistas esto no es válido, pues la refutación de la falsedad de un objeto matemático no significa que es posible hallar una prueba constructiva de su existencia. En otras palabras, tal y como afirma Miró Quesada:

> "(…) La concepción intuicionista [de la verdad] es un tipo de concepción epistémica. La concepción epistémica de la verdad consiste en afirmar que *la verdad no puede separarse de*

---

por lo tanto, para no hacer algo sin sentido, se debe tener cuidado de cómo las construimos. Las clases con miembros de distinto nivel lógico sufren del mismo defecto que las oraciones "La existencia existe" o "El concepto de caballo es un caballo": estos aplican subrepticiamente conceptos a sí mismos, más que a las cosas que dependen de ellos. (Scruton, 2003: 393)

> *su conocimiento* (…). Para un intuicionista una proposición matemática, digamos, aritmética, F(m) *solo es verdadera si se ha construido*. Construir una proposición es, precisamente, disponer de un método que permita, en un numero finito de pasos, fundados en evidencias, *saber que m tiene la propiedad F*. Si se construye F(m), *se sabe* que F(m) es verdadera (…). Para la concepción epistémica de la verdad, la construcción de F(m) es condición suficiente y necesaria de la verdad de F(m). (…)" (Miró Quesada, 1982: 122-123)

Así, esta posición filosófica se basa en la intuición primordial de los números naturales, donde cada uno de esos números puede, a partir del 1, ser "construido" agregando 1 al anterior. Así, el resto de la matemática puede (y debe) ser construida de forma explícita y rigurosa, lo que requiere un método claro y preciso. Solo entidades cuya existencia (positiva o negativa) haya sido demostrada de tal manera, o por medio de tal método, tienen validez matemática. Se podría decir que, desde el punto de vista intuicionista, las verdades matemáticas no se descubren, se crean, se construyen.

Ahora bien, una proposición matemática es verdadera solo si hay una prueba de ella; en forma similar, es falsa solo si hay prueba de su negación. Pero, ¿qué ocurre si no hay pruebas para ninguna de las dos alternativas? Esta sería indecidible y tendríamos que romper con el principio del tercero excluido (PTE). Como ejemplo, tenemos la conjetura fuerte de Goldbach:

-Todo número par mayor que 2 puede expresarse como la suma de dos números primos.[68]

[68] Algunos, más informados, pensarán que esta conjetura ya ha sido resuelta, pero hay que recordar que la que ha encontrado solución es la conjetura débil de Goldbach, la misma que afirma lo siguiente: "Todo número impar mayor que 5 puede expresarse como suma de tres números primos". Precisamente, el matemático peruano Harald Helfgott ha publicado dos trabajos en los años 2012 y 2013 mediante los cuales se ha podido demostrar incondicionalmente la conjetura débil de Goldbach. De este modo, la conjetura queda demostrada después de 271 años. Así, dicha conjetura pasa a ser un teorema, es decir, un enunciado que es deducible a partir de los axiomas correspondientes, empleando reglas de inferencia.

Al respecto de este, no se puede probar ni su afirmación ni su negación, es decir, no tenemos una prueba de su verdad o falsedad. Otro ejemplo, sería el siguiente propuesto por Palau:

> "Supóngase que se quiere probar la siguiente afirmación: *Sea p cualquier número primo y N cualquier número natural; entonces p divide a N^2, si y solo si p divide a N*. Si se acepta el *Principio del Tercero Excluido*, debería poder probarse que para cualquier valor de p y N, la afirmación en cuestión puede decidirse bajo cualquier de las dos siguientes suposiciones: (i) p divide a N y (ii) p no divide a N. Pero resulta que en este caso no se puede probar el problema bajo ninguna de las dos suposiciones. Luego, pensar el problema tomando el PTE como válido induce a pensar que el problema tiene solución, cuando en realidad no la tiene y, por ello, el PTE no está justificadamente aplicado." (Palau, 2002: 82-83)[69]

Lo reafirmamos: para los intuicionistas un ente cualquiera es válido si y solo si puede ser construido por medio de un procedimiento especificado y con un número finito de pasos o operaciones. Pero, ¿cuál procedimiento específico y finito puede generar el infinito? Cualquier procedimiento que escojamos solo nos dará algún número concreto. Consecuentemente, el infinito intuicionista es solo potencial, a diferencia del infinito actual (de cuño cantoriano) que lo concibe como una totalidad completa y acabada.

De esta manera, el intuicionismo elimina la vertiginosa metafísica a la que pareciera someternos el platonismo. A la vez, también proporciona una explicación inteligible sobre la naturaleza *a priori* de las matemáticas tal y como la dio Kant. Es decir, las proposiciones

[69] Del texto de Piñero (2012: 39) podemos poner otro ejemplo. Sea $\pi = 3,14159265\ldots$. De este número sabemos que es un número irracional de infinitas cifras decimales no periódicas. Ahora, definamos el número *p* de la siguiente forma:
a) Si aparece entre los dígitos de π alguna vez una secuencia de exactamente quince ceros seguidos, entonces *p* es el digito (distinto de cero) que se sigue inmediatamente después de la primera aparición de esos quince ceros.
b) Si nunca aparecen exactamente quince ceros seguidos, entonces *p* vale 0 (cero)
Es preciso decir que hasta la fecha no se ha detectado una seguidilla de quince ceros entre los dígitos calculados de π.
Con respecto a esto, ¿existe *p*?
Para los intuicionistas, no existe *p*, pues la definición indicada no es constructiva. Además, dado que *p* no existe ni es un número, entonces no tiene sentido la afirmación "p+1=9", por poner un caso.

matemáticas se conocen *a priori* porque nosotros mismos somos sus autores. Sabemos tanto de números, y en forma tan infalible, porque las verdades respecto a ellos se crean por las pruebas que llevan a ellas.

En resumen, para Mario Bunge (1996: 66-101), las tesis principales del intuicionismo son las siguientes:

> "1) Las leyes de la lógica no son *a priori* ni eternas (…). Son hipótesis que el hombre formuló al estudiar el lenguaje por medio del cual expresaba su conocimiento de conjuntos finitos de fenómenos. Por consiguiente, las leyes de la lógica no deben considerarse como principios reguladores inmutables, sino como hipótesis corregibles que pueden fallar en relación con nuevos tipos de objetos, por ejemplo, los conjuntos infinitos.
> (…)
> 2) La matemática es un producto del espíritu humano. Como tal, es una disciplina pura, es decir, independiente de la experiencia, aunque puede ser aplicada a la experiencia; además, la matemática es autónoma, es decir, independiente de las otras ciencias y, en particular, de la lógica.
> (…)
> 3) Los signos matemáticos no son vacíos sino que designan objetos matemáticos, y estos son, a su vez, objetos mentales (conceptos y juicios) que de alguna manera reflejan los fenómenos. En otras palabras, los objetos matemáticos, lejos de existir por sí mismos (…), constituyen "campos de posibilidades constructivas", y las leyes matemáticas son leyes *a priori* de la naturaleza.
> (…)
> 4) Puesto que la matemática no deriva de la lógica ni de la experiencia, debe tener su fuente en una intuición especial que nos presente los conceptos e inferencias básicos de la matemática como inmediatamente claros y seguros. "Una construcción matemática debe ser tan inmediata a la mente, y sus resultados deben ser tan claros, que no requiera fundamento alguno" [Heyting]. En consecuencia, debemos elegir como nociones básicas a las más inmediatas, tales como la de número natural.
> (…)
> 5) La única técnica admisible de demostración de teoremas de existencia es la construcción efectiva, porque nos permite "ver" de qué se trata. En cambio, la demostración de que la afirmación que contradice la que se quiere probar lleva a contradicción, es decir, la técnica de la demostración indirecta, no hace otra cosa que señalar una posibilidad de existencia o de verdad, sin garantizarla. Ahora bien, la construcción explícita o efectiva es posible, por definición, solo con procedimientos finitistas, esto es, por medio de un número finito de signos y operaciones, como el cálculo del cuadrado de un número, o la aplicación del principio de inducción matemática o completa. Por consiguiente, todas las proposiciones que involucren clases infinitas consideradas como totalidades (…) deben eliminarse o reconstruirse [al igual que] las expresiones "para toda clase", "la clase de todos los primos", "la clase de todas las clases" y también los teoremas que se demuestren de una manera esencialmente indirecta (como ocurre con la mayor parte de los teoremas en la teoría de conjuntos de Cantor).
> (…)

6) Solo existe el infinito constructivo o potencial. El infinito actual o completo, la colección infinita considerada como dada o establecida que se estudia en la teoría de los conjuntos de Cantor, es una ilusión: no existe, puesto que no es construible.
(…)
7) La ley del tercero excluido debe ser suspendida (no eliminada). No es una proposición evidente ni demostrada, y como auxiliar metodológico es incompatible con el principio de constructividad o positividad (…), puesto que una proposición es verdadera solo si ha sido demostrada constructivamente; de otro modo, puede no solo ser falsa, sino también no decidida (por el momento) o aun esencialmente indecidible." (Bunge, 1996: 66-101)

3. 1. 3. 1. Lógica intuicionista

Según Garrido (2005: 527-528), en 1908 Brouwer publicó un ensayo titulado: *La no fiabilidad de los principios de la lógica*. Al respecto, Weyl afirmó lo siguiente: "la lógica clásica ha sido abstraída de la matemática de conjuntos finitos. Alguien que olvidó este limitado origen ha cometido después el error de otorgarle prioridad y superioridad sobre toda la matemática, y finalmente la aplicó, sin justificación, a la matemática de los conjuntos infinitos".

Así, Brouwer puso en tela de juicio principios de la lógica y la matemática clásica cuya verdad se consideraba evidente. Uno de ellos es el principio del tercio excluido: $A \vee \sim A$. Supongamos que nos piden decidir la verdad de la siguiente proposición: "Algunos números impares son perfectos[70]". Dado que hasta el presente no se conoce ningún número

[70] Un número perfecto es un número natural que es igual a la suma de sus divisores propios positivos. Así, 6 es un número perfecto porque sus divisores propios son 1, 2 y 3; y 6 = 1 + 2 + 3. Los siguientes números perfectos son 28, 496 y 8128.
28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14
496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248
8128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064
Hasta ahora los números perfectos encontrados son pares, sin embargo, permanece como una cuestión abierta la de saber si existen números perfectos impares. Otra cuestión semejante es la de saber si existen infinitos números perfectos, pues hasta el presente año 2016 solo se han hallado 49 números perfectos.

impar que tenga esa propiedad ni ningún procedimiento para averiguarlo, y dado que no nos es posible recorrer, examinando uno por uno, la serie de los números naturales, el intuicionista juzga aventurado decir de la citada proposición que es verdadera o falsa. Del mismo modo, los intuicionistas rechazan la ley lógica de la doble negación ($\sim\sim A \rightarrow A$).

También, los intuicionistas desconfían del uso generalizado de las pruebas de existencia por reducción al absurdo. A decir de Cassini (2006: 50), en el intuicionismo la regla del absurdo solo puede usarse para probar conclusiones negativas, es decir, para refutar proposiciones (la regla adopta la siguiente forma $[A \rightarrow (B \wedge \sim B)] \rightarrow \sim A$). En cambio, no resulta aceptable para establecer conclusiones positivas, puesto que en este caso hace uso de leyes clásicas rechazadas por los intuicionistas (en efecto, la regla $[\sim A \rightarrow (B \wedge \sim B)] \rightarrow A$ asume la ley de la doble negación). Una prueba realmente válida de existencia en matemática debe ser constructiva. Esto implica aducir un caso existente o, en su defecto, un método o procedimiento que permita construirlo, de la misma manera que la demostración real de que en una isla hay un tesoro no se efectúa deduciendo un absurdo de su negación sino mostrando ese tesoro o aduciendo un mapa o un conjunto de instrucciones que conducen a encontrarlo.

Entonces, al rechazar estas leyes se cambia y altera drásticamente la lógica clásica. De acuerdo a Gamut:

> "(…) La intención de Brouwer era eliminar de la matemática lo que consideraba presupuestos metafísicos concernientes a la naturaleza de los objetos matemáticos y fundar la disciplina en nuestras intuiciones acerca de los números naturales. Si, junto con Brouwer, se tiene la opinión de que todos los objetos matemáticos son creación de la mente humana, entonces no se aceptará una prueba de que es imposible que no haya un objeto que tenga la propiedad A como prueba de que hay algún objeto con la propiedad A. (…) De acuerdo con una terminología más moderna, es el razonamiento constructivo (en matemática) el que queda formalizado por la lógica intuicionista" (Gamut, 2006: 147)

Enseguida, en base a Mosterín y Torreti (2010: 357-358), presentaremos la lógica intuicionista propuesta por Heyting. Sin embargo, lo que expondremos será solo el cálculo axiomático para la lógica proposicional que consta de la regla de inferencia del *Modus Ponens* y de los siguientes esquemas axiomáticos:

1. $\varphi \rightarrow (\varphi \wedge \varphi)$

2. $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\psi \wedge \varphi)$

3. $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \wedge \rho) \rightarrow (\psi \wedge \rho))$

4. $((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \rho)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \rho)$

5. $\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$

6. $(\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow \psi$

7. $\psi \rightarrow (\psi \vee \varphi)$

8. $(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\psi \vee \varphi)$

9. $((\varphi \rightarrow \rho) \wedge (\psi \rightarrow \rho)) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \rho)$

10. $\sim\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$

11. $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \sim\psi)) \rightarrow \sim\varphi$

3. 1. 4. Formalismo

El formalismo fue planteado por David Hilbert. Esta escuela nació a raíz de los éxitos obtenidos por su axiomatización de la geometría en 1899 en su obra *Fundamentos de la Geometría*. Ahora bien, es importante señalar que la corriente formalista se ha constituido por oposición al intuicionismo, para poner de relieve el aspecto hipotético, formal y convencional de la matemática. Una consecuencia de esto ha sido el surgimiento de un enfoque que prácticamente desvanece la distinción entre axioma y postulado, lo que conduce, entre otras cosas, a prescindir del enunciado “es verdadero” como predicado de un axioma, y a restituir un cierto grado de libertad al momento de considerar de qué axiomas se parte, en la medida en que estos tan pronto como pueden ser admitidos, pueden ser, del mismo modo, rechazados o substituidos por otros. Asimismo, vuelve a reclamar la validez del principio del tercio excluso. A su juicio, quitarles a los matemáticos el principio del tercio excluso es como prohibir el telescopio a los astrónomos y el uso de sus puños a los boxeadores. Por ende, negar los teoremas de existencia que utilizan el principio del tercio excluso es tanto como renunciar de golpe a la ciencia de las matemáticas.

El formalismo de Hilbert consideraba que toda la matemática podía ser axiomatizada. Precisamente, el programa de Hilbert era el proyecto de axiomatizar todas las teorías de la matemática en un lenguaje completamente formalizado, y demostrar que los sistemas resultantes eran consistentes. Las pruebas de consistencia debían ser absolutas y susceptibles de ser verificadas concluyentemente en un número finito de pasos (es decir, ser finitistas). El ideal de Hilbert consistía en obtener para cada rama de la matemática un sistema axiomático formalizado que fuera a la vez consistente, completo e independiente (esto es, que sus axiomas no se deduzcan de otros). (Cassini, 2006: 52)

El denominado ‘programa hilbertiano’ consistía en unir la formalización axiomática con el rigor constructivo de la siguiente manera: en un primer momento, la matemática clásica es formalizada y axiomatizada; en un segundo momento, se procura obtener sistemas consistentes recurriendo solo a métodos finitos o constructivos, siendo una prueba de que el sistema formal axiomático resultante (que queda desprovisto de significado) está libre de contradicción.

Al estudio de los sistemas formales con vistas a obtener la demostración de su consistencia lo llamó Hilbert *metamatemática* o *teoría de la prueba*. Esto implica la distinción entre teoría intuitiva, teoría formal y metateoría. La teoría intuitiva[71] es la que va a ser formalizada. La teoría formal expresa en un lenguaje formal puro los contenidos de la teoría intuitiva. Finalmente, la metateoría investiga desde un metalenguaje y con métodos constructivos esa teoría formalizada.

Así, surge la teoría de la demostración (o metamatemática) la cual es una rama de la lógica matemática que trata a las demostraciones como objetos matemáticos, facilitando su análisis mediante técnicas matemáticas. Las demostraciones suelen presentarse como estructuras de datos que se construyen de acuerdo con los axiomas y reglas de inferencia de los sistemas lógicos. En este sentido, la teoría de la demostración se ocupa de la sintaxis del sistema en cuestión. De acuerdo a Manzano y Huertas:

> "La teoría de la prueba (…) nació con el denominado programa de Hilbert. La idea de Hilbert era la de explotar al máximo la naturaleza finita de las pruebas para proporcionar una fundamentación de la matemática. Podría resumirse su concepción diciendo que preconizaba una axiomatización de las teorías matemáticas de la que pudiera probarse su:
> 1. ***Consistencia***. Es decir, que nunca se podrá demostrar como teoremas de la teoría una sentencia y su negación.
> 2. ***Completud***. Es decir, que cada sentencia –del lenguaje en el que se axiomatizó la teoría- sea ella misma o su negación un teorema de la teoría axiomática.

[71] Una teoría intuitiva puede entenderse como una teoría en la que no hay axiomas y tampoco existe una manera rigurosamente formal de extraer teoremas a partir de ellos. Digamos que una teoría intuitiva es aquella en la cual a partir de proposiciones aceptables se busca deducir otras proposiciones también aceptables a través de procedimientos aparentemente sanos.

> 3. ***Decidibilidad***. Es decir, que exista un procedimiento efectivo mediante el cual, en un número finito de pasos, se determine si una sentencia del lenguaje es o no un teorema de la teoría." (Manzano y Huertas, 2004: 389)

Para Hilbert, la teoría de la demostración aborda la cuestión de la consistencia mediante dos niveles a tomar en cuenta. Por un lado, el nivel matemático, tal y como queda representado dentro del sistema formal. Por otro lado, el nivel metamatemático, un nivel de discurso en el que se habla de las matemáticas axiomatizadas. En este nivel se procedería a probar la consistencia mediante una serie de técnicas que estudiarían el sistema formal desde fuera, desconectándolo de cualquier significado numérico o relacionado con el infinito, simplemente como cadenas finitas de signos primitivos a partir de los cuales se pueden generar fórmulas y demostraciones de acuerdo a ciertas reglas predefinidas. Las proposiciones que se refieren a este esqueleto formal, a esta aritmética vaciada de significado, son las proposiciones metamatemáticas, que no se formulan en el lenguaje objeto sino en el metalenguaje. Es algo así como el español cuando se usa en una clase de inglés para enseñar los matices de uso de alguna palabra extranjera. La pregunta por la consistencia en matemáticas o, equivalentemente, la pregunta de si la fórmula $0\neq0$ es demostrable era, en suma, como preguntar si una determinada posición de ajedrez es legal, es decir, si es posible llegar a ella partiendo de la situación inicial de la partida y de las reglas del movimiento de piezas. Para responder, uno no juega al ajedrez sino que reflexiona sobre el propio juego de ajedrez (Madrid, 2013: 151-152). Así, mediante la metamatemática, Hilbert pretendía lograr demostraciones definitivas construyendo un sistema de signos formales, vacíos de significados, con reglas manifiestas de cómo manipular estos signos. Así, se derivan teoremas a partir de axiomas mediante combinaciones y transformaciones sígnicas de acuerdo a reglas de operación que funcionan bajo el principio de un razonamiento explícito.

Mientras que el platonismo[72] mantenía que la exactitud de la matemática descansaba en un reino celestial, y el intuicionismo en la mente humana, el formalismo hilbertiano la anclaba al papel escrito. Así, la matemática podría ser vista como un juego de notaciones carentes de significado, como una hilera de signos sobre el papel, vacíos de sentido, pero consistentes con ciertas reglas, como las del ajedrez, para manipularlos (Madrid, 2013: 141). Escribe Hilbert:

> "(…) Entendemos aquí por signo algo cuya forma es independiente del espacio y del tiempo, así como de las condiciones especiales en las que se produce, de las variaciones insignificantes en su trazado y que, en general y de la manera segura, puede ser identificado. El enfoque que consideramos adecuado y necesario para la fundamentación no solo de las matemáticas puras, sino en general de todo pensamiento, la comprensión y la comunicación científicas, puede entonces expresarse en una frase diciendo: *en un principio era el signo*" (Hilbert, 1993: 45)

Así, el programa de Hilbert consiste en construir la ciencia objetiva de la matemática como un sistema lógico-formal puro, cuya condición fundamental es la ausencia de contradicción, prescindiendo de todo tipo de contenido cual si fuera un sistema formal vacío. Así pues, considera que el lenguaje matemático, puede reducirse a operar con signos.

Se puede comprender mejor el razonamiento de Hilbert considerando una analogía. Los números irracionales no tienen significado intuitivo como tales números. Aunque podamos introducir longitudes cuyas medidas sean irracionales, las propias longitudes no proporcionan ningún significado intuitivo a los números irracionales, pero ellos son necesarios incluso para las matemáticas elementales. Hilbert hizo la misma observación al respecto de los números complejos. Estos no tienen contrapartidas reales inmediatas, pero

[72] El platonismo es la postura tradicional de la filosofía de las matemáticas que las consideraba como originadas en un mundo aparte poblado de objetos ideales, perfectos y eternos. Veremos en la siguiente sección cómo esta antigua postura resucita con Gödel.

hacen que sean posibles teoremas generales como el de que toda ecuación polinómica de grado *n* tiene exactamente *n* raíces. Independiente de que los símbolos representen o no objetos con un significado intuitivo, todos los signos y símbolos de conceptos y operaciones están libres de significado. Para el propósito de los fundamentos, los elementos del pensamiento matemático son los símbolos y las proposiciones, que son combinaciones o cadenas de símbolos. Así, se lograba la certeza al precio de tratar a la matemática como símbolos vacíos de significado.

3. 1. 5. Platonismo

El, llamado también objetivismo, es el núcleo de la filosofía gödeliana de la matemática. Consiste en la creencia de que los objetos y conceptos matemáticos (las entidades referidas por los símbolos matemáticos), así como los hechos matemáticos (los expresados por las proposiciones matemáticas), no son de nuestra creación, sino que existen objetivamente con total independencia de la existencia y el funcionamiento de nuestra mente. Escribe Piñeiro:

> “El platonismo sostiene que los objetos matemáticos tienen una existencia objetiva, y que el trabajo de los matemáticos consiste en descubrir las características de esos objetos. El nombre, desde luego, proviene de Platón, quien afirmaba que nuestras percepciones son solamente el reflejo deformado de una realidad superior que existe en el “mundo de las ideas”. En ese mismo mundo de las ideas habitarían los objetos que los matemáticos investigan; aunque dentro del platonismo matemático hay diferentes matices, esa es la idea esencial” (Piñeiro, 2012: 150)

Es decir, los objetos y conceptos tratados por las matemáticas no son simples invenciones existentes únicamente en la mente de los matemáticos, sino que son realidades ingénitas, universales, inmateriales, imperecederas, inmutables y atemporales. Por ende, tanto los “objetos matemáticos” (números, figuras geométricas, etc.) como las leyes matemáticas no se inventan, sino que se descubren. Por ejemplo, los axiomas de la teoría de conjuntos lejos de crear el concepto de conjunto lo desarrollan y este sería anteriormente dado a nuestra percepción de lo abstracto o intuición matemática. Según Gödel:

> "Me parece que la asunción de tales objetos es tan totalmente legítima como la asunción de cuerpos físicos, y existen las mismas razones para creer en su existencia. Son necesarios para obtener un sistema satisfactorio de matemática en el mismo sentido en que los cuerpos físicos son necesarios para una teoría satisfactoria de nuestras percepciones sensibles, y en ambos casos es imposible interpretar las proposiciones que uno desea afirmar acerca de tales entidades como proposiciones acerca de "datos", esto es, las percepciones sensibles que realmente tienen lugar". (Gödel, 1990: 128)[73]

Aunque es cierto que las proposiciones matemáticas no dicen nada sobre la realidad espacio-temporal tienen, sin embargo, un contenido objetivo que radica en que dicen algo sobre relaciones objetivas entre conceptos objetivos. (Rodríguez, 2007: 178)

Se puede comprender mejor al platonismo, repasando la postura opuesta, es decir, la del formalismo. Esta sostiene que la matemática es simplemente una creación humana, similar en ciertos aspectos a la música. La matemática es, esencialmente, un juego lingüístico (un juego sintáctico) en el que hay ciertos puntos de partida, que son los axiomas, y ciertas reglas lógicas que permiten operar a partir de ellos. El trabajo del matemático consistiría entonces en descubrir hacia dónde nos llevan las reglas del juego (algo no muy diferente en el fondo al trabajo de un ajedrecista que busca la jugada óptima en una cierta posición).[74] Finalmente, se puede decir que mientras que el formalismo afirma que los objetos matemáticos no existen por sí mismos, y tienen propiedades que los matemáticos les

[73] Hemos recogido la traducción de Rodríguez.

[74] Hay que agregar que el formalismo reduce a las matemáticas a fórmulas sin significado con el claro objetivo de probar su consistencia, completud entre otras propiedades.

atribuyen; el platonismo mantiene que los objetos matemáticos existen por sí mismos, y los matemáticos descubren sus propiedades.

En la conferencia “Gibbs”, Gödel afirma que la matemática es inagotable, de modo que no podemos hacer matemática sin recurrir a la intuición, que no puede reemplazarse por métodos puramente algorítmicos. Los conceptos y hechos matemáticos son objetivos, y la mente humana puede percibirlos de una forma que ninguna maquina finita podría (Rodríguez, 2007: 179). Así pues, puesto que conocemos muchas proposiciones sobre números naturales que son verdaderas, y como estamos convencidos de que muchas conjeturas relacionadas con ellos tienen sentido, entonces deben existir hechos objetivos sobre los números naturales y tales hechos deben referirse a objetos que son inmutables en el tiempo. La lógica y la matemática deben tener un contenido real, que puede verse estudiando teoría de números, donde hallamos hechos que son independientes de las convenciones arbitrarias.

Gödel en *The modern development of the foundation of mathematics in the light of philosophy* empieza por dividir las tendencias filosóficas en derecha (espiritualismo, teología, metafísica) e izquierda (escepticismo, materialismo, positivismo) y señala que la evolución de la filosofía desde el Renacimiento ha ido en la dirección de derecha a izquierda. La matemática ha sido una excepción, pero las dificultades causadas por las paradojas de la teoría de conjuntos han sido usadas como pretexto para moverse también aquí hacia la izquierda. Sin embargo, esas dificultades han sido exageradas. Las antinomias de la teoría de conjuntos ya han sido resueltas de un modo completamente satisfactorio y casi obvio para cualquiera que entienda la teoría. La certeza de la matemática debe conseguirse no mediante la manipulación de símbolos sino mediante el cultivo del conocimiento de los conceptos mismos. (Mosterín, 2000: 274)

Para Gödel, el intento russelliano de restringir las clases mediante las teoría de los tipos solo lleva al fracaso. Las entidades abstractas son imprescindibles. Las clases y conceptos son objetos reales, que nosotros no construimos sino que nos limitamos a describir. Por este motivo, Gödel no rechaza las definiciones impredicativas y critica el principio del círculo vicioso de Russell pues no posibilita la reducción de la matemática a la lógica y frena el desarrollo de gran parte de la matemática moderna (Mosterín, 2000: 266). Es más, en 1946, Gödel sostuvo que las paradojas conjuntistas no deben hacernos dudar de la realidad de los conjuntos matemáticos más de lo que las ilusiones ópticas nos hacen dudar de la realidad de los objetos físicos. (Mosterín, 2000: 271)

Gödel, con su famosa prueba metamatemática sostiene que no puede haber una prueba de lo completo de la aritmética que permita también probar su consistencia y viceversa[75]. En un sistema de axiomas que sea suficiente para generar la aritmética, no se puede saber al mismo tiempo si es consistente y completo. Luego, puede haber fórmulas de la aritmética que son verdad, pero que no pueden ser probadas. Pareciera deducirse a partir de esto que no hay un sistema lógico, por refinado que sea, que resulte suficiente para generar

[75] El primer teorema de incompletud de Gödel (1931) demuestra que la aritmética elemental no puede ser completamente axiomatizada en el sentido de completud deductiva, es decir, no puede axiomatizarse de modo consistente y completo. El segundo teorema dice que si una teoría aritmética T es consistente, entonces la consistencia de T no puede probarse en T, es decir, es imposible demostrar la consistencia de una teoría o sistema formal que incluya la aritmética elemental con los propios recursos de la teoría. Es decir, la consistencia de una teoría aritmética no puede probarse con sus propios medios.

todo el rango de las verdades matemáticas. También, se deduce que no podemos tratar a las matemáticas como lo hubiera deseado Hilbert, a saber, como simples hileras de fórmulas que se pueden probar. Pero, no solo esto podemos colegir. Escribe Piñeiro:

> "(…) en la conferencia Gibbs de 1951, Gödel sostuvo que sus teoremas de incompletud demostraban la validez del punto de vista platonista. Veamos, en un apretado resumen, cuál era el argumento de Gödel. Todos tenemos en nuestra mente una intuición de qué son los números naturales, entendemos cómo se definen sus operaciones fundamentales y cuáles son sus propiedades básicas. Percibimos, por ejemplo, que multiplicar 8 por 5 se equipara a la operación "física" de formar ocho columnas con cinco objetos cada una (…).
> Tenemos, en consecuencia, un "modelo mental" de los números naturales, de esos entes, o esa estructura que los matemáticos estudian. Por otra parte, el primer teorema de incompletud demuestra que ese modelo no puede ser completamente caracterizado por métodos sintácticos, es decir, si nos limitamos a los métodos sintácticos de razonamiento, siempre habrá verdades inalcanzables. Los métodos sintácticos de demostración son insuficientes para abarcar todas las propiedades de ese modelo que, semánticamente, somos capaces de comprender. Esto implica, según Gödel, que ese modelo mental, esos entes que llamamos "números naturales", con todas sus propiedades o relaciones mutuas, existe en una realidad platónica que se encuentra más allá de la mera lingüística". (Piñeiro, 2012: 152-153)[76]

Si las matemáticas fueran enteramente hipótesis existentes tan sólo en nuestras mentes, cualquier verdad matemática podría ser formulada y demostrada, cosa imposible por los teoremas gödelianos. Por el contrario, si los conceptos matemáticos son preexistentes la única tarea que realiza el matemático es percibir dicha verdad objetiva y describirla. Tampoco la matemática puede reducirse a un sistema formal de sintaxis lógica de lenguaje pues, por los resultados de Gödel, ningún sistema similar podría realizar una tarea semejante a menos que

[76] Ahora bien hay que decir, en honor a la verdad, que estas conclusiones de Gödel han sido cuestionadas por lógicos contemporáneos, como por ejemplo, Solomon Feferman o Panu Raatiken, quienes han sostenido que los argumentos de Gödel se basan en supuestos cuya validez es cuestionable (como el hecho de que en todas las mentes humanas existe un mismo modelo de los números naturales). El hecho es que, al momento actual, no existe todavía un consenso unánime acerca de qué relación existe entre los teoremas de Gödel y la naturaleza de los objetos matemáticos. Después de todo, solamente han pasado poco más de 80 años desde la publicación de los teoremas de Gödel, un tiempo demasiado breve como para pretender que hay alguna conclusión filosófica definitiva. (Piñeiro, 2012: 153-155)

contase con conceptos igualmente potentes que los que pretenden reducirse, de modo que cualquier intento por esa línea sería inútil por principio.

Los matemáticos con toda su maquinaria operativa y simbólica tan sólo pueden hacer teorías matemáticas subjetivas con una alta aproximación a las verdades matemáticas objetivas, pero sin llegar a conocer éstas en su totalidad. Según esto, las matemáticas objetivas son imperecederas, no varían ni desaparecen independientemente de que alguien las conciba o no. Logramos reconocer los objetos y las verdades matemáticas que se encuentran en las "esferas celestiales de las ideas" mediante la intuición matemática que, de manera similar a un órgano sensorial, hace que los seres humanos percibamos partes de ese otro mundo. La matemática es inagotable, de modo que no podemos hacer matemática sin recurrir a la intuición, que no puede reemplazarse por métodos puramente algorítmicos.

Notamos pues que, con Gödel, todavía hay cierta vida en el "platonismo". Si en las matemáticas pueden existir verdades que no se pueden probar, las matemáticas no pueden reducirse a las pruebas con las que las construimos. Hay un ámbito de verdad matemática, al que podemos o no tener acceso a través de nuestros procedimientos intelectuales. Y lo extraordinario es que *esto es algo que también podemos probar*. Es un hecho notable que el ser humano pueda alzarse sobre sus propias limitaciones y proyecte su pensamiento hacia las regiones mismas donde las reglas, normas y mandatos formales no permiten vagar libremente.

3. 1. 6. Dialeteísmo [77]

Los lógicos clásicos defienden el principio de no contradicción porque a partir de una contradicción es posible deducir cualquier otra proposición como válida (lo cual ocasiona que todos sus enunciados se conviertan en teoremas). De acuerdo a Palau:

> "(…) es sabido que desde Aristóteles las contradicciones no tienen lugar en la lógica clásica, ya que si se las admite, la lógica se torna trivialmente inconsistente, i. e., en ella es posible deducir cualquier afirmación. Duns Escoto fue el primero en expresar esta idea mediante el principio conocido como *Ex contradictione quodlibet* (ECQ) o, *Ex falsum sequitur quodlibet* (EFSQ) (…)" (2002: 159) [78]

La no-trivialidad se relaciona con el concepto de consistencia. En palabras de Piscoya:

> "(…) El concepto principal que decide la aceptabilidad lógica de los cálculos C_n es el de no-trivialidad. Un cálculo C_n es no-trivial si es absolutamente consistente, en otro caso es trivial. Como es conocido, un sistema S cualquiera es absolutamente consistente si existe al menos una fórmula F en S la cual no es deducible en S. En otras palabras, un sistema S es absolutamente consistente cuando el conjunto de sus fórmulas no coincide con el conjunto de sus teoremas. En cambio, un sistema S es simplemente inconsistente cuando desde S puede deducirse tanto una fórmula A como su correspondiente negación ∼A, en caso contrario S es simplemente o clásicamente consistente." (2000: 245)

Veamos la sencilla demostración de que a partir de una contradicción se puede deducir cualquier fórmula. Tenemos el siguiente caso:

* Perú es un país y Perú no es un país. Por lo tanto, la papa es un tubérculo

En términos formales:

[77] Esta parte de la investigación se ha basado en Sierra Casiano (2012: 30-33). Pero, también en las propias investigaciones del tesista publicadas en REFP. (Mora, 2013)

[78] El principio de *Ex contradictione quodlibet* es: $(A \wedge \sim A) \vdash B$ (ECQ), y el de *Ex falso sequitur quodlibet* es $\sim A \vdash (A \rightarrow B)$ (EFSQ). Pero, ambos son equivalentes en la lógica proposicional porque el segundo resulta de aplicar la equivalencia de exportación al primero previa aplicación de la conmutación al antecedente del mismo.

1. $p \wedge \sim p$ // $\therefore q$

2. p 1 Simplificación

3. $\sim p$ 1 Simplificación

4. $p \vee q$ 2 Adición

5. q 4, 3 Silogismo disyuntivo

Como ya lo dijo Piscoya, el hecho de que un sistema contenga una contradicción lo vuelve inconsistente porque mediante la simplificación, la adición y el silogismo disyuntivo se puede hacer que toda fórmula construible sea teorema por el solo hecho de ser construible y no por su propia validez lógica. En términos técnicos, esto significa que el sistema se vuelve trivial, inútil, inservible: puras manchas de tinta. Ahora bien, desde el punto de vista de un sistema paraconsistente tanto una proposición como su negación pueden ser ambas verdaderas sin ocasionar la trivialización del sistema lógico, es decir, sin posibilitar la opción de que cualquier fórmula bien formada sea, a su vez, un teorema. En otras palabras:

> "Las lógicas paraconsistentes son sistemas lógicos que soportan las contradicciones sin que para ello haya que destruir toda la estructura del aparato deductivo; parten del supuesto de que las contradicciones no siempre conducen al absurdo. De acuerdo con Da Costa, la ventaja de las lógicas paraconsistentes es que permiten las contradicciones y los vacíos de conocimiento; por tanto, pueden servir de base para una teoría que contenga contradicciones y que estas contradicciones no se deban eliminar" (Morales: 1048-1049).

Es decir, antes se solía pensar que al aceptar una contradicción nuestro sistema lógico se volvería trivial. Pero, últimamente, como estamos apreciando, hemos podido ser testigos de la aparición de las lógicas paraconsistentes para las cuales es posible que un sistema albergue contradicciones sin que por ello dicho sistema lógico se trivialice. Tomando como apoyo el desarrollo de éstas lógicas en los últimos años, existe una corriente filosófica que ha puesto en duda lo que parecía ser un principio inamovible e inatacable; a saber, el principio de no contradicción $\sim (A \wedge \sim A)$ (PNC). Este punto de vista que critica el PNC y que acepta que existen algunas contradicciones verdaderas es el llamado 'dialeteísmo'.

El término 'dialeteísmo' fue acuñado por Graham Priest y Richard Routley en 1981. Aunque la postura dialeteísta no es nueva, el nombre que se ha dado a esta corriente filosófica sí lo es. La idea del nombre surgió de un pasaje de *Remarks on the Foundations of Mathematics* (1956), en donde Ludwig Wittgenstein describe a la paradoja de *El Mentiroso* como una figura con la cabeza del dios romano Jano, es decir, como una figura con dos caras; en este caso se trata de la verdad y la falsedad[79]. De esta manera, la *aletheia* se vuelve *dialetheia*; de tal modo que una *dialetheia* es una oración de la forma $A \wedge \sim A$, donde tanto A como su negación ~A son al mismo tiempo verdaderas. De ahí que en 1981 Priest y Routley dieran el nombre de 'dialeteísmo' a la postura que afirma que hay contradicciones verdaderas.

Graham Priest ha presentado una variedad de ejemplos y situaciones que nos muestran que el mundo mismo es inconsistente. Por ejemplo, la paradoja de *El Mentiroso* es una *dialetheia* porque constituye una verdad de dos sentidos. Priest valora la consistencia pero solo de manera comparativa, tal como valora la simplicidad, la generalidad y la utilidad empírica. La consistencia no es más que un rasgo deseable entre muchos otros. En el caso de la paradoja mencionada y afines, Priest considera que deberíamos ceder un poco en

[79] Asimismo, de acuerdo a Sorensen, Wittgenstein se burlaba de los lógicos que pregonaban las contradicciones como desastres intelectuales. Sucede que, en la vida cotidiana, cuando las personas constatan que han caído en contradicción, simplemente ponen un parche sin más al problema. Wittgenstein esperaba el día en el que los lógicos se adaptaran a esta realidad antropológica logrando así emanciparse de la consistencia lógica. (Sorensen, 2007: 98)

consistencia para ganar mucho en simplicidad. En particular, deberíamos conceder que el enunciado paradójico es, a la vez, verdadero y falso, y emplear luego las lógicas paraconsistentes para evitar que la contradicción se extienda. Estas lógicas están diseñadas para limitar la exploración con mecanismos seguros. (Sorensen, 2007: 98-99)

Aunque ahora encontramos diferentes tipos de dialeteísmo, el más radical de todos ellos es el dialeteísmo metafísico (o realista), que el mismo Graham Priest ha defendido, pues afirma que en el mundo empírico podemos encontrar *dialetheias*. Pese a las diferentes críticas que hay hacia el dialeteísmo, este ha logrado, de alguna u otra manera, responder a ellas y dar batalla en el debate.

Un hecho importante que se tiene que tomar en cuenta al hablar del dialeteísmo, es que este tiene que ser distinguido del trivialismo. Mientras que el dialeteísmo defiende que solo algunas contradicciones muy específicas son verdaderas, el trivialismo afirma que todas las contradicciones son verdaderas, lo cual los lleva aceptar que cualquier cosa podría ser verdad. Un trivialista tiene que ser dialeteísta, pero lo contrario no es el caso. Si un dialeteísta no quiere aceptar cualquier cosa, y pecar de trivialismo, entonces tiene que aceptar algún tipo de lógica paraconsistente. Esto se debe a que es viable aceptar contradicciones al amparo de ciertas lógicas paraconsistentes, sin que por ello se trivialice una teoría o un sistema lógico.

Apoyar una postura dialeteísta con una lógica paraconsistente es algo que los dialeteístas hacen para dar mayor peso a su argumentación. Tal es el caso de Graham Priest quien defiende la postura metafísica del dialeteísmo expresada esencialmente en su propio sistema lógico y cuyo supuesto filosófico principal consiste en sostener que el mundo real es inconsistente ya que en él existen *dialetheias*, i.e., proposiciones que son verdaderas y falsas al mismo tiempo las cuales constituyen contradicciones genuinas. Ahora bien, ya que cuando decimos que el mundo es inconsistente, lo que queremos decir es que hay oraciones verdaderas sobre el mundo que son inconsistentes, la argumentación de Priest consistirá en mostrar que hay *dialetheias* que tienen que ver con objetos concretos del mundo.

3. 1. 6. 1. Lógica paraconsistente

El dialeteísmo sostiene que existen contradicciones verdaderas, es decir, dialetheias. Según esta postura filosófica, oraciones como la de la paradoja de *El Mentiroso*, conjuntos como el de la paradoja de Russell, ciertos tipos de dilemas legales y casos límite de predicados vagos, son ejemplos de contradicciones verdaderas. Un dialeteísta tiene que adscribirse a una lógica paraconsistente para no ser trivial. Así, el dialeteísmo al considerar que algunas contradicciones necesitan ser aceptadas, sin que por ello tengamos que aceptar que podemos derivar cualquier cosa de ellas, constituye una motivación para crear lógicas paraconsistentes.

Como es de esperar, la invalidación de ECQ nos llevará a deshacernos de algunas de nuestras inferencias favoritas. Cuáles sean las inferencias que se tengan que invalidar dependerá del método que se utilice para obtener la lógica paraconsistente. Así, encontraremos sistemas como el de Priest, en donde el principio de no contradicción será válido, pero el *Modus Ponens* no lo será[80]; o algunos sistemas como los de da Costa, en donde

[80] Asimismo, en el sistema de Priest resulta válido el principio del tercero excluido e inválido EFSQ. (Palau, 2002:153)

sucede lo contrario: el *Modus Ponens* resulta válido, y el principio de no contradicción resulta inválido. La validez o invalidez de las inferencias dependerá también de los fines para los que ha sido creado cada sistema de lógica paraconsistente.

Según el *Diccionario de Lógica y Filosofía de la Ciencia* de Mosterín y Torreti (2010: 364-365), la lógica paraconsistente estudia sistemas lógicos apropiados para la construcción de teorías formales inconsistentes pero no triviales. Tales sistemas permiten razonar desde conjuntos de premisas contradictorias sin que se pueda, en general, deducir todo de ellas, como en la lógica clásica. Da Costa ideó una jerarquía infinita de sistemas formales de lógica proposicional en los cuales la siguiente regla $(A \wedge \sim A) \vdash B$ no se postula ni se puede derivar. Esta jerarquía se conoce con el nombre de C_n, $1 \leq n \leq \omega$. El primero de ellos, llamado cálculo proposicional C_1, incluye ocho axiomas esquemáticos tradicionales, y la regla de inferencia *Modus Ponens*. A estos se agregan otros siete axiomas esquemáticos –donde X^0 abrevia la fórmula del principio de no contradicción, $\sim (A \wedge \sim A)$ - , a saber,

$\vdash B^0 \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \sim B) \rightarrow \sim A))$	1er. AXIOMA
$\vdash A \vee \sim A$	2do. AXIOMA
$\vdash \sim\sim A \rightarrow A$	3er. AXIOMA
$\vdash A^0 \rightarrow (\sim A)^0$	4to. AXIOMA
$\vdash A^0 \wedge B^0 \rightarrow (A \wedge B)^0$	5to. AXIOMA
$\vdash A^0 \wedge B^0 \rightarrow (A \vee B)^0$	6to. AXIOMA
$\vdash A^0 \wedge B^0 \rightarrow (A \rightarrow B)^0$	7mo. AXIOMA

El primer axioma dice que si B es una fórmula "bien portada" (esto es, cuya incompatibilidad con su propia negación $\sim B$ sea demostrable)[81], entonces una fórmula A que demostrablemente implique a B y $\sim B$ es demostrablemente falsa (según da Costa y Lewin (2005: 195), este axioma dice que el principio de reducción al absurdo se puede aplicar siempre que la oración B no sea contradictoria). Los axiomas 2 (tercio excluso) y 3 (doble negación) que son rechazados por la lógica intuicionista, son admitidos por la lógica paraconsistente. Los últimos cuatro axiomas aseguran que las fórmulas compuestas mediante los conectores verifuncionales sean tan "bien portadas" como sus respectivos componentes (Estos axiomas, en palabras de da Costa y Lewin, dicen que el buen comportamiento se extiende a las oraciones complejas).

Asimismo, para $1 \leq n < \omega$ definimos

$A^{n} = A^{ooo\ldots o\ (n\ veces)}$ y

$A^{(n)} = A^{o} \wedge A^{oo} \wedge A^{ooo} \wedge \ldots A^{n}$

[81] Pensemos en, por ejemplo, la paradoja de Russell, Precisamente, las lógicas paraconsistentes sirven también para dar cuentas de problemas que surgen en la aritmética, la teoría de conjuntos y la semántica formal. Entre la lista de problemas encontramos la mencionada paradoja acerca del conjunto de los conjuntos que no son miembros de sí mismos. Considérese el conjunto de todos los conjuntos que no son miembros de sí mismos; llamemos a este conjunto R.
1. Si **R es miembro de sí mismo**, entonces es uno de los conjuntos que no es miembro de sí mismo; por lo tanto no es miembro de sí mismo.
2. Si **R no es miembro de sí mismo**, entonces es uno de los conjuntos de R; por lo tanto es un miembro de sí mismo.
Conclusión: R es miembro y no es miembro de sí mismo.
Ya sea que R sea o no sea miembro de sí mismo (podemos elegir una de las dos opciones por medio de la ley del tercero excluso), en ambos casos la proposición es verdadera y falsa a la vez. No importa si elegimos 1. R es miembro de sí mismo o 2. R no es miembro de sí mismo, la oración elegida tendrá que ser verdadera y falsa al mismo tiempo para cumplir con lo que dice.

Además, los cálculos C_n, $1 < n < \omega$, se obtienen reemplazando los axiomas 1, 5, 6 y 7 por los siguientes que los incluyen de forma generalizada:

$\vdash B^{(n)} \to ((A \to B) \to ((A \to {\sim}B) \to {\sim}A))$ Reemplaza al 1er axioma

$\vdash A^{(n)} \land B^{(n)} \to (A \to B)^{(n)} \land (A \land B)^{(n)} \land (A \lor B)^{(n)}$ Reemplaza a los axiomas 5, 6 y 7

También, C_ω está definido por los siguientes 10 axiomas (donde todos son parte de C_1) y la regla *Modus Ponens*:

$\vdash A \to (B \to A)$

$\vdash (A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$

$\vdash A \to (B \to (A \land B))$

$\vdash (A \land B) \to A$

$\vdash (A \land B) \to B$

$\vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \lor B) \to C))$

$\vdash A \to (A \lor B)$

$\vdash B \to (A \lor B)$

$\vdash {\sim}{\sim}A \to A$

$\vdash A \lor {\sim}A$

$A, (A \to B) \vdash B$

Finalmente, en los cálculos C_n, $n < \omega$, se define la negación fuerte

${\sim}*_n A = {\sim}A \land A^{(n)}$ (α)

Con respecto a esto, de acuerdo a Piscoya (2009: 217-218) para el caso C_1 la fórmula "$\sim (A \wedge \sim A)$" es abreviada por A^o y la negación fuerte es introducida a través de la definición $\sim * A = \sim A \wedge A^0$. Asimismo, una fórmula de tipo "$A \wedge \sim * A$" trivializa al sistema C_1. Además, usando la equivalencia (α) y generalizando podemos decir que cada fórmula del tipo "$A \wedge \sim *_{(n-1)} A$" trivializa C_n. Y, se dice que un sistema S es finitamente trivializable cuando existe una fórmula F que añadiéndola como axioma trivializa S. En este sentido puede demostrarse que los cálculos C_n son finitamente trivializables. Asimismo, una consecuencia inmediata de lo anterior es que los cálculos C_n más débiles son menos trivializables que los más fuertes. Esto es visible a partir del hecho de que "$A \wedge \sim *_{(n-1)} A$" trivializa C_n pero no C_{n+1}. Resumiendo podemos expresar esto último en dos teoremas que figuran en da Costa y Lewin (2005: 196):

- Los sistemas C_n, $1 \leq n \leq \omega$, son no triviales. Los C_n, $1 \leq n < \omega$ son finitamente trivializables, pero C_ω no lo es.

- Los axiomas de C_n, $1 \leq n < \omega$, son independientes. Cada sistema es estrictamente más fuerte que los que lo siguen.

Según Miró Quesada, C_n tiene diversas aplicaciones. Por ejemplo, si tenemos $C_1^=$ (que contiene a C_1 y el símbolo de la igualdad, entre otros elementos) podemos con este sistema desarrollar la matemática clásica sin mucha complicación y además ofrece una solución definitiva a las paradojas. Así pues, si era posible desarrollar la matemática sin preocuparse por las paradojas, entonces las paradojas podían multiplicarse sin límite. De esta manera N. C. A. da Costa y su grupo comenzaron a explorar el reino de los objetos matemáticos contradictorios.[82]

Como resultado de esta exploración, tenemos una manera de tratar a la paradoja de Russell. Por ejemplo, el conjunto russelliano: $R_0 = \{x/\ x \notin x\}$ tiene, entre otras, las siguientes propiedades:

$$(1)\ \chi \in R_0 \to \{\chi\} \in R_0;\ R_0 \in R_0 \wedge R_0 \notin R_0;\ \perp \cup\ R_0 = T_1 \ldots$$ [83]

El conjunto R_0 trivializa NF[84] (el sistema de Quine) pero no trivializa NF_1. El concepto de conjunto russelliano ha sido generalizado utilizando el concepto de negación fuerte, definido de la siguiente manera

$$(2)\ \sim * A =_{df}\ \sim A \wedge A^0\text{ , en que }A^0\text{ es la abreviación de }\sim(A \wedge \sim A)$$

Utilizando los simbolismos $A^n = A^{0000\ldots.0}$ en que "0" aparece n veces y $A^{(n)} = A^1 \wedge A^2 \wedge \ldots \wedge A^n$, se define un conjunto russelliano para cada jerarquía de C_n $(1 \leq n < \omega)$:

---

[82] Se cuenta una curiosa anécdota al respecto. Bertrand Russell le habría increpado a Meinong que su teoría admite enunciados contradictorios tales como "El cuadrado que no es cuadrado es cuadrado" y "El cuadrado que no es cuadrado no es cuadrado". Ante esto el propio Meinong le respondió sosteniendo que ciertos principios lógicos no son válidos en ciertas ontologías, en particular, que el Principio de no Contradicción no es válido en el dominio de los objetos imposibles, o sea, de los objetos contradictorios. (Palau, 2002: 160)
De este modo, podemos entender que la lógica paraconsistente también se aplica a la ontología, la disciplina de las características más generales de lo que existe. Si se usa la lógica tradicional como lógica de la ontología, entre los objetos existentes no se encuentran, automáticamente, ciertos objetos "inconsistentes" como, por ejemplo, el conjunto de Russell. Sin embargo, cuando recurrimos a una lógica paraconsistente todo cambia. Como se sabe, hay teorías de conjuntos donde el conjunto de Russell "existe". Luego, una ontología fundada en una lógica paraconsistente, puede, en principio, contener objetos contradictorios. Aceptar o no esa tesis implica, obviamente, que se argumente en profundidad y se analice los cimientos tantos de la lógica como de la ontología. En cierto sentido, se puede sustentar que mientras más débil sea nuestra lógica, más rica será nuestra ontología. (Da Costa y Lewin, 1995: 198-199)
[83] En este caso, ⊥ y T se refieren a cualquier fórmula reducible a una contradicción y una tautología respectivamente.
[84] NF es un sistema lógico que Quine construye en su artículo "Nueva fundamentación de la lógica matemática". (Quine, 2002: 131-155)

$$(3)\ R_0 = \{x / x \notin x \wedge (x \in x)^0\}$$

Empleando las jerarquías de C_n (para n>1), y realizando las correspondientes adaptaciones de detalle, se obtienen los sistemas NF_1, NF_2, …. , NF_ω. Cada uno de estos sistemas es una teoría inconsistente de los conjuntos, pero no trivial. En NF_1 se puede derivar R_0, es decir, se obtiene la paradoja de Russell, que no trivializa el sistema. En NF_2 se puede derivar R_1, que trivizaliza NF_1 pero no NF_2, y así sucesivamente. (Miró Quesada, 1988: 608-610)

3. 2. Balance final: distintas interpretaciones de la paradoja de Russell

La paradoja de Russell ha recibido diversas lecturas de parte de las escuelas que buscan fundamentar la matemática. Dentro del logicismo, el propio Russell consideró que se trata de una expresión carente de significado. Por ello, sugirió adoptar una teoría lógica que permita estipular cuándo una fórmula tiene o no significado. Esta es la teoría de los tipos. El axiomatismo de Zermelo consideró que hacía falta un sistema de axiomas que fuera susceptible de no dar lugar a contradicción. Entonces, esta expresión para Zermelo tendría su origen en una improvisada teoría elaborada intuitivamente y sin rigor alguno. El intuicionismo asumió que las paradojas aparecen por la asunción sin más de determinados principios y reglas que no son válidos del todo. Por este motivo, la lógica intuicionista buscó modelar el correcto razonamiento matemático mediante un sistema axiomático que prohibiera el tercio excluso, la reducción al absurdo y la doble negación. El formalismo de Hilbert buscó estudiar la matemática como teoría para determinarla dentro de los cánones de la consistencia. Así, consideró que la paradoja de Russell podría ser desecha mediante una revisión minuciosa de la teoría y sus fundamentos. El platonismo de Gödel minimizó la aparición de paradojas en la teoría de conjuntos. Según él, estas solo eran ilusiones sobre los objetos matemáticos que podían ser claramente explicadas de la misma manera en la lo son las ilusiones ópticas sobre los objetos físicos. Finalmente, desde el dialeteísmo de Priest puede asumirse que la paradoja es algo que no debe excluido del ámbito de lo real. Así, se afirma que existen contradicciones verdaderas que pueden ser analizadas desde una lógica paraconsistente.

CONCLUSIONES

1. La paradoja de Russell acerca de las clases nace de una serie de consideraciones con respecto a las investigaciones de Frege y Cantor.

2. Russell conoció la paradoja de *El Mentiroso* y la relacionó con su propia paradoja.

3. El principio del círculo vicioso establecido por Russell intenta funcionar como una solución filosófica general aplicable a todo tipo de paradoja.

4. La paradoja de Russell puede ser derivada a partir de la paradoja de Cantor.

5. La paradoja de Russell acerca de las clases resulta ser una paradoja más fácil de comprender a nivel intuitivo en comparación con las de Cantor y Burali-Forti.

6. La paradoja de Russell es una paradoja semántica.

7. Podemos clasificar a las paradojas relacionadas con la paradoja de Russell en tres grupos: la familia de paradojas matemáticas, la familia oracional y la familia argumental de Russell.

8. La tarea de explicar el sentido de la paradoja de Russell se constituye como un reto al cual se enfrentan todos los que hacen filosofía de la matemática.

9. Varias escuelas de pensadores intentan solucionar la paradoja de Russell mediante diferentes propuestas.

10. La paradoja de Russell motiva la creación de lógicas distintas a la clásica como la lógica intuicionista de Heyting y la paraconsistente de Da Costa.

REFERENCIAS

BENITO SANTOS, S. (2007). *Estudio de la paradoja del Mentiroso y afines*. UNED.

BETH, E. (1975). *Las paradojas de la lógica*. Valencia: Universidad de Valencia

BLANCHÉ, R. (1965). *La axiomática*. México: UNAM.

BOCHENSKI, I. M. (1985). *Historia de la Lógica formal*. Madrid: Gredos.

BORGES, J. (1978). "La doctrina de los ciclos". En: *Historia de la eternidad*. Madrid, Alianza Editorial, 1978, 81-94.

BUNGE, M. (1996). *Intuición y Razón.* Buenos Aires: Editorial Sudamericana.

CANTOR, G. (2011). *Fundamentos de la teoría de los números transfinitos.* En: S. Hawking (ed.), *Dios creó los números*, Barcelona: Crítica, 835-908.

CASSINI, A. (2006). *El juego de los principios. Una introducción al método axiomático.* Buenos Aires: A.Z Editora.

CASTRO ALBANO, J. (2015). "La paradoja de Russell". En: *Paradojas, Paradojas, y más Paradojas*. Barrio, E. (ed), London: College Pu. (en prensa)

CASTRO CHAHID, I. y J. Pérez Alcázar. (2003). "Las paradojas en Matemáticas". En: *Universitas Scientarum,* Vol. 8, 2003, 25-37. Disponible en: http://www.javeriana.edu.co/Facultades/Ciencias/universitas/MATEMATICAS/5-paradojas.pdf

CERVANTES SAAVEDRA, M. (1995). *El Ingenioso Hidalgo Don Quijote de la Mancha*. Madrid: Ediciones Cátedra.

CLARK, M. (2009). *El gran libro de las paradojas*. Madrid: Gredos.

COFFA, A. (1979). "The humble origins of Russell's paradox". En: *Russell*, 33-34: 31-38.

COHEN, M. (1965). *Introducción a la lógica*. México: FCE.

COPI, I. (1995). *Lógica simbólica*. México: CECSA.

DA COSTA, N. y R. Lewin (1995) "Lógica Paraconsistente". En *Lógica* Carlos E. Alchourrón (Ed.), 1era. Reimpresión, Madrid: Trotta, 185-204.

ECHEVERRÍA, J. (1998). *Filosofía de la ciencia*. Madrid: Akal.

LAERCIO, D. (1985). *Vidas, opiniones y sentencias de los Filósofos más ilustres*. Barcelona: Ed. Teorema.

FERRATER MORA, J. (1964). *Diccionario de Filosofía*. Buenos Aires: Sudamericana.

FERRATER MORA, J. y H. Leblanc. (1992). *Lógica Matemática*. México: FCE.

FERREIRÓS, J. (2000). "¿Antinomia o trivialidad? La paradoja de Russell". En: *Las matemáticas del siglo XX. Una mirada en 101 artículos.* Coord. Antonio Martinón Cejas. Tenerife: Universidad de La Laguna, 59-64.

FERREIRÓS, J. (2012). "Certezas e hipótesis: perspectivas históricas y naturalistas sobre la matemática". En: Anna Estany, *Filosofía de las ciencias naturales, sociales y matemáticas*. Madrid, Trotta, 45-74.

FIELD, H. (s.a.). "Solving the Paradoxes, Escaping Revenge". Disponible en: http://philosophy.fas.nyu.edu/docs/IO/1158/revengetex3.pdf

FRÁPOLLI, M. y E. Romero. (1998). *Una aproximación a la Filosofía del lenguaje*. Madrid: Síntesis

GALILEI, G. (1945). *Diálogos acerca de dos nuevas ciencias*. Buenos Aires: Losada.

GAMUT, L. T. F. (2006). *Introducción a la lógica*. Buenos Aires: Eudeba.

GARCIADIEGO, A. (1992). *Bertrand Russell y los orígenes de las "paradojas" de la teoría de conjuntos*. Madrid: Alianza Editorial.

GARCÍA ZÁRATE, Ó. (2007). *Lógica*. Lima: CEPREDIM.

GARCÍA ZÁRATE, Ó. (2012). *Elementos de Lógica*. Lima: Visual Press.

GARRIDO, M. (2005). *Lógica simbólica*. Madrid: Tecnos.

GÖDEL, K. (1981a). "Sobre sentencias formalmente indecidibles de *Principia Mathematica* y sistemas afines*"* publicado en sus *Obras completas*. Madrid, Alianza Editorial, 1981, 55-89.

GÖDEL, K. (1981b). "La Lógica Matemática de Russell*"* publicado en sus *Obras completas*. Madrid, Alianza Editorial, 1981, 295-327.

GÖDEL, K. (1990). *Collected Works.* Tomo II, Oxford: Oxford University Press.

GRATTAN-GUINNESS, I. (1977). *Dear Russell – Dear Jourdain*. Duckworth.

GRATTAN-GUINNESS, I. (1978). "How Bertrand Russell discovered his paradox". En: *Historia Mathematica,* 5: 127-137.

GRELLING, K. (1943). *Teoría de los Conjuntos.* México: Logos de México.

HAACK, S. (1982). *Filosofía de las lógicas*. Madrid: Cátedra.

HUNTER, G. (1981). *Metalógica. Introducción a la metateoría de la lógica clásica de primer orden*. Madrid: Paraninfo.

HILBERT, D. (1993). *Fundamentos de las matemáticas*. México: UNAM.

HILBERT, D. y W. Ackermann (1962). *Elementos de Lógica Teórica.* Madrid: Tecnos.

IRVINE, A. and H. Deutsch. (2014). "Russell's Paradox". En: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2014 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/win2014/entries/russell-paradox/>.

KILMISTER, C. W. (1992). *Russell.* México: FCE.

KLEENE, S. C. (1974). *Introducción a la Metamatemática*. Madrid: Tecnos.

KLINE, M. (2000). *Matemáticas: la pérdida de la certidumbre.* México: Siglo veintiuno.

KNEALE, W. y M. Kneale (1980). *El desarrollo de la lógica*. Madrid: Tecnos.

KRIPKE, S. (1997). "Esbozo de una teoría de la verdad". En: Juan Antonio Nicolás y María José Frápolli (eds.), *Teorías de la Verdad en el siglo XX*. Madrid: Tecnos, 1997, 109-143.

LLANOS VILLAJUAN, M. (2003). *Lógica Jurídica*. Lima: Logos.

MADRID, C. (2013). *Hilbert. Las bases de la matemática. En el principio fue el axioma*. Navarra: RBA.

MANZANO, M. y A. Huertas. (2004). *Lógica para principiantes*. Madrid: Alianza Editorial.

MATES, B. (1979). *Lógica Matemática Elemental*. Madrid: Tecnos.

MIRÓ QUESADA, F. (1963). *Apuntes para una teoría de la razón*. Lima: UNMSM.

MIRÓ QUESADA, F. (1980). *Lógica I: Filosofía de las matemáticas*. Lima: Ignacio Prado Pastor.

MIRÓ QUESADA, F. (1982). "El mito de la invalidación intuicionista del *Tertium non datur*". En: *Dianoia*, Vol. 28, N° 28, 1982, 117-127.

MIRÓ QUESADA, F. (1988). "La lógica paraconsistente y el problema de la racionalidad de la lógica". En: Francisco Miró Quesada y Roque Carrión (eds.), *Antología de la lógica en América Latina*. Madrid: Fundación Banco Exterior, 1988, 593-622.

MORA, R. (2013). “La lógica hegeliana desde la lógica paraconsistente”. En: *Revista de Filosofía en el Perú. Pensamiento e Ideas*. Año 2, Nº 4, diciembre 2013, 139-152. Disponible en: http://refperu.com/REFP%204%20diciembre%202013%20Revista%20completa.pdf

MORA, R. (2014a). *Análisis lógico de la paradoja de Epiménides*. Tesis de Licenciatura. Lima: UNMSM.

MORA, R. (2014b). “Análisis lógico de la paradoja de Protágoras”. En: *Tesis*, Año VIII, N° 7, Dic. 2014, Lima: UNMSM, 53-74.

MOSTERÍN, J. (1980). *Teoría Axiomática de Conjuntos*. Barcelona: Ariel.

MOSTERÍN, J. (2000). *Los lógicos*. Madrid: Espasa Calpe.

MOSTERÍN, J. y R. Torreti (2002). *Diccionario de Lógica y Filosofía de la Ciencia.* Madrid: Alianza Editorial.

NAGEL, E. y J. Newman (1960). *Gödel's Proof.* New York: New York University Press.

NORTHROP, E. P. (1949). *Paradojas Matemáticas.* México: UTEHA.

PALAU, G. (2002). *Introducción filosófica a las lógicas no clásicas*. Barcelona: Gedisa.

PAVÓN, J. M. (1973). *Diccionario manual griego*. *Griego clásico-español.* 7ma edición, Barcelona: Vox.

PICOLLO, L. (2007). “Teoría de Ordinales”. Disponible en: http://www.accionfilosofica.com/misc/1178398215crs.doc

PIÑEIRO, G. (2012). *Gödel. Los teoremas de incompletud*. *La intuición tiene su lógica*. Navarra: RBA.

PISCOYA, L. (1995). *Investigación científica y educacional*. Lima: Amaru.

PISCOYA, L. (1999). *Filosofía.* Lima: Metrocolor.

PISCOYA, L. (2009). *Tópicos en Epistemología*. Lima: UIGV.

PRIEST, G. (s.a.). “Paraconsistency and Dialetheism”. En: *Handbook of the History and Philosophy of Logic*, D. Gabbay y J. Woods (eds.).

QUINE, W. V. O. (2002). *Desde un punto de vista lógico.* Barcelona: Paidós.

QUINE, W. V. O. (1998). *Filosofía de la lógica.* Madrid: Alianza Editorial.

RAMSEY, F. P. (1968). “Los Fundamentos de la Matemática”. En: R. Braithwaite, (ed.), *Los Fundamentos de la Matemática y otros ensayos sobre lógica*. Santiago: Universidad de Chile, 1-59.

RODRÍGUEZ, F. (2007). “Filosofía general y filosofía de la matemática en Gödel”. En: *Analítica*, N° 1, año 1, Lima, 20007, 167-186.

ROSENTAL, M. y P. Judin. (1965). Diccionario filosófico. Lima: Ediciones Universo.

RUSSELL, B y A. N. Whitehead (1910). *Principia Mathematica*. Vol. 1. Londres: Cambridge.

RUSSELL, B. (1968). *La autobiografía de Bertrand Russell*, *1914-1944.* Madrid: Aguilar.

RUSSELL, B. (1976). *La evolución de mi pensamiento filosófico.* Madrid: Alianza Editorial.

RUSSELL, B. (1983). *Los principios de la matemática.* Madrid: Espasa-Calpe.

RUSSELL, B. (1986). “La filosofía del atomismo lógico”. En: Javier Muguerza (ed.) *La concepción analítica de la filosofía.* Madrid: Alianza Editorial, 1986, 139-251.

RUSSELL, B. (1949). “Las matemáticas y los metafísicos”. En: *Misticismo y Lógica y otros ensayos.* Buenos Aires: Paidós, 80-100.

SARTORIO, A. (2000). *Conjuntos e Infinitos*. Buenos Aires: EUDEBA.

SIERRA CASIANO, F. (2012). *Paraconsistencia, dialeteísmo y argumentos de centralidad contra la revisión de la lógica*. México: UNAM.

SORENSEN, R. (2007). *Breve historia de la paradoja*. *La filosofía y los laberintos de la mente*. Barcelona: Tusquets.

SPELTINI, C. *et. al.* (2006). “La epistemología de Reichenbach aplicada al desarrollo de trabajos prácticos contextualizados (TPC)”. En: *Ciência & Educação*, Vol. 12, Nº 1, 1-12.

SCRUTON, R. (2003). *Filosofía Moderna: una introducción sinóptica*. 3era. edición, Santiago de Chile: Cuatro Vientos.

TARSKI, A. (1997). “La Concepción Semántica de la Verdad y los Fundamentos de la Semántica”, publicado en: J. A. Nicolás y M. J. Frápoli, *Teorías de la verdad en el siglo XX*. Madrid: Tecnos, 63-108.

TOMASINI, A. (2016). “Aporías, antinomias y el infinito: la crítica de Russell a Zenón y Kant”. Publicado originalmente en *Mathesis*, vol. VI, No. 13, México, 1990. Disponible en: http://www.filosoficas.unam.mx/~tomasini/ENSAYOS/Aporias.pdf

TORRETI, R. (1998). *El paraíso de Cantor*. Santiago: Universitaria.