UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

FACULTAD DE LETRAS Y CIENCIAS HUMANAS

E.A.P. DE FILOSOFÍA

Análisis lógico de la paradoja de Epiménides

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciada en Filosofía

AUTOR

Rafael Félix Mora Ramirez

Lima - Perú

2014

AGRADECIMIENTOS

Aprecio la excelsa educación recibida en la Facultad de Letras y Ciencias Humanas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Específicamente, debido a mi orientación vocacional, estoy profundamente adeudado con los cursos de Física, Lógica I y II, Teorías de la Verdad, Historia de la Ciencia, Metodología de la Investigación Científica y Epistemología. También, debo manifestar que esta investigación fue financiada oportunamente con el apoyo del Fondo de Promoción de Trabajo de Tesis de Pregrado del VRI-UNMSM (Código N. ° E.3.10). Sin su respaldo, hubiera sido difícil llevar a cabo esta investigación sobre lógica contemporánea.

Agradezco el afecto incondicional de mi familia (sobre todo el de mi madre Ana María Ramirez Egúzquiza), y la fidelidad de mis amigos. Asimismo, resulta oportuno referirme de manera especial a dos grupos de estudios que me han albergado para poder desarrollar mis investigaciones: *Sentido y Referencia* y *Rickhary Warmi*. El primero se especializa en Filosofía Analítica y el segundo trata sobre Estudios de Género. Además, debo mencionar a Miguel León Untiveros que me ha esgrimido varias observaciones críticas y constructivas.

Finalmente, quisiera expresar mi gratitud al Dr. Óscar García por el asesoramiento continuo brindado a lo largo de todos estos meses de intenso trabajo. De no contar con su activa participación, sus consejos y su aliento todos los argumentos aquí presentados no pasarían de ser una pura materia sin forma.

ÍNDICE DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Durante largo tiempo, hasta hoy inclusive, gran parte de los filósofos y lógicos, salvo excepciones, han considerado como un ejemplo de contradicción problemática a la paradoja de *El Mentiroso*. Los estudios recientes indican que no estuvieron equivocados. Aquí específicamente no hay lugar a discusión y se podría decir que existe el consenso que asevera que la paradoja de *El Mentiroso* es un típico caso de razonamiento contradictorio, una proposición cuyo valor de verdad no está del todo claro a pesar de las apariencias.

La admiración y asombro que causa la paradoja de *El Mentiroso* es de tal dimensión que permite afirmar algunas sentencias que ya no deberían ser repetidas más por su evidente falsedad o falta de justificación. Una de esas afirmaciones consiste en sostener que la paradoja de Epiménides[1] es un caso semejante y comparable a la paradoja de *El Mentiroso*. Estas opiniones las notamos en obras como las de José Ferrater Mora (1994), Saúl Kripke (1997) y Eduardo Barrio (1998) en las que se menciona a la paradoja de Epiménides como un caso similar a la paradoja de *El Mentiroso*. Esta convicción será la que discutiremos a lo largo de este trabajo. Sin embargo, algunos autores también han sugerido la relevancia de este asunto. Por ejemplo, mientras que Gerold Sthal (1956) propone estudiar la paradojicidad del *Epiménides* sin usar herramientas complejas como la

[1] La prístina paradoja de Epiménides aparece formulada en el Nuevo Testamento, específicamente en la *Carta a Tito* escrita por Pablo (2001). Esta sostiene que Epiménides, el cretense, una vez dijo: “Todos los cretenses son mentirosos”. ¿Es verdad o mentira esto? Designaremos a la expresión lingüística entrecomillada indistintamente con el nombre “paradoja de Epiménides” o, más brevemente, con el de *Epiménides*.

teoría de tipos, otros pensadores como W. V. O. Quine (1976)[2], Karl Popper (1997), Susan Haack (1982) y Stephen Cole Kleene (1974) indican que en un nivel estrictamente lógico el *Epiménides* no resulta siendo realmente una paradoja como lo es la de *El Mentiroso*. Esto es muy interesante pero no satisface los requisitos formales que toda investigación rigurosamente lógica debiera poseer. Por ello, en esta oportunidad contribuiremos a la discusión expresando con rigor, mediante técnicas lógicas, la simbolización de la supuesta paradoja así como las deducciones que hacen posible demostrar la contradicción presente en ella que, sin embargo, no llega a constituir una auténtica paradoja *per se*.

Si bien es cierto que la paradoja de Epiménides es contradictoria cuando afirmamos su enunciado "Todos los cretenses son mentirosos"; pues a partir de la hipótesis de su verdad se concluye su falsedad, no se puede decir lo mismo cuando suponemos la falsedad de este enunciado porque, en este caso, no se genera contradicción alguna. Valga decir que para lograr demostrar lógicamente lo anterior se debe pensar en cuantificar sobre proposiciones, lo cual involucra una complicada tarea en cuanto al significado de la cuantificación pero, a la vez, una comprensible labor en cuanto a leyes deductivas lógicas de segundo grado. Sin embargo, a pesar de esta posible y sencilla demostración, se sigue afirmando que la paradoja de *El Mentiroso* encuentra una de sus instanciaciones en el *Epiménides*, o lo que es lo mismo, que el *Epiménides* es un tipo de paradoja de *El Mentiroso*. Por estos motivos, las interrogantes que se propondrán responder en esta ocasión serán las siguientes:

---

[2] Dice Quine en *The Ways of Paradox:* "Actualmente, la paradoja de Epiménides está desprestigiada; posee lagunas. Quizás algunos cretenses fueron mentirosos, como Epiménides, y otros no lo fueron; quizás Epiménides fue un mentiroso que ocasionalmente decía la verdad; en cualquiera de los casos resulta que la contradicción desaparece. (…)" (1976: 8)

1.-¿Es la paradoja de Epiménides un caso que ejemplifica la paradoja de *El Mentiroso*?

2.-¿Cómo así es paradójica el *Epiménides*?

3.-¿En qué sentido resulta ser contradictoria dicha paradoja y en qué sentido resulta no serlo?

4.-¿Puede justificarse la cuantificación tanto sobre individuos como sobre las mismas proposiciones?

5.-¿Resulta viable el recurso a la cuantificación sobre proposiciones a nivel lógico?

6.-¿Es posible que la paradoja de el *Epiménides* pueda ser considerada paradójica (al menos en ciertas circunstancias) como la de *El Mentiroso*?

Esta investigación tiene cinco partes. En la primera, se busca brindar una definición satisfactoria de *paradoja* mediante el discernimiento de otros conceptos relacionados tales como: *antinomia*, *aporía* y *falacia*.

En la segunda parte, se intenta justificar el uso de una cuantificación especial que se realizará sobre las proposiciones para aplicarla en próximas deducciones. Al fundamentar la cuantificación sobre las proposiciones, se podrá tener conocimiento de las implicancias que supone este procedimiento inscrito en el terreno de un tipo particular de lógica de segundo grado.

En la parte tercera, se analizará lógicamente la paradoja de *El Mentiroso* así como algunas de sus más conocidas variantes, para luego establecer la familia de paradojas de *El Mentiroso* legadas por la tradición lógica y filosófica. A pesar de que es posible explicar en lenguaje natural el problema lógico de la paradoja de *El Mentiroso*, queremos demostrar la contradicción presente en esta paradoja mediante técnicas formales rigurosas y comprensibles.

En la cuarta parte, se hará lo propio con la paradoja de Epiménides haciendo una comparación entre ella y la de *El Mentiroso* para luego dejar en claro el estatus no paradójico del *Epiménides*.

En la quinta y última parte, una vez que hemos comparado *El Mentiroso* con el *Epiménides* y habiendo logrado desestimar el carácter paradójico del segundo caso, vamos a determinar las condiciones que hacen del *Epiménides* una contradicción como la de *El Mentiroso*, es decir, en términos modales, nos tocaría investigar en qué mundo posible el *Epiménides* lograría ser paradójica sin más. Al plantear las posibilidades para que el *Epiménides* sea considerado una paradoja *per se*, se ingresará de manera básica en el territorio teórico de la lógica modal para poder hablar de contradicciones necesarias y contradicciones posibles.

El presente trabajo de investigación encuentra asidero en la lógica moderna propuesta por Gottlob Frege, mejorada a nivel simbólico por Bertrand Russell y Alfred North Whitehead; y sometida a revisión por Ludwig Wittgenstein. Es preciso indicar que más que lógica pura se intenta elaborar una reflexión en el marco de la filosofía de la lógica (disciplina dedicada a la investigación de los fundamentos de la lógica). Esto no evita, obviamente, que se tenga que usar una lógica tanto de primer como de segundo grado, así como de la lógica modal.

Como ya hemos mencionado, los temas desarrollados en esta investigación son propios de la filosofía de la lógica. Esto, sin embargo, debe ser enfocado desde la orientación de la Filosofía Analítica que considera al lenguaje como una herramienta de análisis sumamente valiosa. Además, la Filosofía Analítica es la única forma de hacer filosofía que garantiza un análisis exhaustivo de la lógica misma, al ser sus principales fundadores (Frege, Russell y Wittgenstein) indiscutibles lógicos de elevado calibre. Por ello, tendremos por principales virtudes: el rigor, la exactitud, la precisión y la claridad; para poder establecer una argumentación no solo válida, sino también sólida.

Sólo resta que comencemos a desarrollar nuestra tesis. Esperamos que las siguientes líneas no carezcan de consistencia e interés tanto para el investigador cultivado como para el interesado principiante deseoso de conocer la lógica de manera filosófica.

CAPÍTULO I

PARADOJA: DEFINICIÓN Y CARACTERÍSTICAS

> "Pero no hace falta pensar mal de la paradoja, porque la paradoja es la pasión del pensamiento y el pensador sin paradoja es como el amante sin pasión: un mediocre modelo. (…), pero el hombre comedido y formal que por la mañana va a su despacho y por la tarde a casa, pensará probablemente que es una exageración (…) ¿Cómo podría ocurrírsele que cae continuamente cuando camina derecho tras su nariz?"
>
> **SÖRENAABYE KIERKEGAARD**

Empezamos esta investigación señalando que solo nos ocupamos de la paradoja de *El Mentiroso*. Sabemos que existen otras pero no las estudiaremos en esta ocasión. Así pues, tanto la definición como las características de las paradojas se van a referir a esta paradoja de manera exclusiva.

1.1. *Falacia* y *paradoja*

Por medio de la estructura de explicación que se suele usar para poder exponer el significado del término *falacia*[3], buscamos también proporcionar una manera de comprender al vocablo *paradoja*. Consideramos que esto es posible porque ambos tipos de conceptos son de índole lógica. Así pues, una primera nota que señalaremos es que

[3] Como aparece en el texto *Elementos de Lógica* de Óscar García (2012: 28-43). García Zárate procede a explicar el significado del término *falacia* siguiendo una estrategia de cuatro pasos:
1) Distingue entre falacia y otros términos asociados con esta.
2) Indica el sentido coloquial del mismo y, enseguida, su sentido técnico.
3) Señala la importancia de su estudio.
4) Clasifica las mismas en base a ciertos criterios.

comparten la singularidad de presentarse como tipos especiales de argumentos[4]. Mientras que las falacias son razonamientos *psicológicamente persuasivos* pero *lógicamente defectuosos*, las paradojas pueden definirse como razonamientos que son *lógicamente impecables* pero *psicológicamente extraños* porque, si bien en una paradoja se procede con rigor lógico, sin embargo, se llega a resultados que son: o bien, absurdos (según la creencia común); o bien, contradictorios (atentando así contra un principio lógico clásico).[5] Asimismo, como segundo aspecto que tienen en común ambos conceptos podemos decir que mientras que la falacia puede ser explicada tanto en un sentido coloquial (creencia extendida aunque falsa) como en un sentido técnico (razonamiento que pretende persuadir sobre alguna cuestión y que oculta algún error); igualmente, una paradoja también se puede explicar en un sentido coloquial (sentencia inverosímil, increíble y/o contradictoria) y en un sentido técnico (tipos especiales de contradicción en las que la suposición de la verdad de una oración implica su falsedad, del mismo modo que la suposición de la falsedad de la misma implica su verdad). Continuando con las similitudes, en tercer lugar, sostenemos que mientras que la falacia suele estar asociada a los términos *paralogismo* y *sofisma*; la paradoja comúnmente se le vincula a los términos *aporía* y *antinomia*. Finalmente, la conocida clasificación de las falacias en: atingentes y ambiguas; puede ser vista como semejante a la clasificación de las paradojas en: semánticas y lógicas.

[4] Un argumento es un tipo de discurso cuya estructura asocia dos elementos básicos:
1) El conjunto de las premisas (que pueden ser una o más de una)
2) El conjunto de la conclusión (que es única)
Un argumento puede ser, entre otras cosas, válido (cuando conserva la relación de consecuencia lógica) o inválido (cuando no la conserva).

[5] En otras palabras, mientras que la falacia es un argumento en el que la relación de consecuencia lógica no tiene éxito, la paradoja es un argumento en el que, si bien hay consecuencia lógica, no obstante, exhibe inconsistencia, es decir, contradicción lógica.

En lo que sigue, desarrollaremos el concepto de *paradoja*. Nos ocuparemos de la noción, el sentido coloquial y técnico así como la importancia del estudio y la clasificación de las *paradojas*.

1.2. Noción de *paradoja*

El término "paradoja" viene del griego $\pi\alpha\rho\alpha\delta o\xi o\zeta - o\nu$. Como sustantivo,significa etimológicamente: más allá, o "contrario a la opinión" (Blánquez, 1985: 1097), o a lo convencionalmente aceptado. Asimismo, siguiendo a Ferrater Mora (1994: 2693), la paradoja es "(…) un acontecimiento que parece asombroso que pueda ser tal como se dice que es (…)". Como adjetivo, la palabra *paradójico (a)* funciona como sinónima de "inesperado, increíble, extraño, maravilloso, raro, singular y extraordinario" (Pabón, 1997: 450).

1.2.1. *Paradoja* en sentido coloquial

Coloquialmente, el término "paradoja" designa a aquella sentencia inverosímil, increíble y/o contradictoria que va en contra de lo común, que es opuesta a lo que se cree, que se opone a lo que se toma por verdadero. Así, las paradojas, en tanto sentencias, son expresiones breves que encierran contradicción o generan sorpresa por lo absurdo de su contenido.

En la literatura, la paradoja, en tanto figura retórica, consiste en la unión de dos ideas que, aparentemente, en un principio parecen imposibles de coincidir. Esta figura retórica utiliza conceptos que, a pesar de ser contradictorios entre sí, poseen un valor significativo si son interpretados de cierto modo. Así, la paradoja se configura como una expresión contraria a la lógica y a la forma común de pensar. En este caso tratamos con *expresiones paradójicas*. La singularidad de estas paradojas reside en el hecho de que poseen un nivel más profundo de sentido y significado que no se revela a primera vista, pero que, cuando lo hace, proporciona una imagen asombrosa, llamativa e interesante. Sirven, además, para resaltar una idea, mostrar un contraste, hacer una frase humorística o invitar al lector al pensamiento y la reflexión. A continuación, mostraremos ejemplos de *expresiones paradójicas*:

1-Paredes altas no hacen palacio; arcas llenas, no hace a un rey.

2-Sueño despierto cada día... Y cada noche sueño que despierto.

3-Todos somos iguales, pero unos más iguales que otros.

4-Si quieres paz, prepárate para la guerra.

5-No hay mal que por bien no venga.

6-El hombre es como el oso mientras más feo, más hermoso.

7-Mi intento de fracasar fracasó.

8-Me da pena ser tan cruel.

9-Dios ha muerto. (Nietzsche)

10-Caminante no hay camino, se hace camino al andar.

11-Muero por vivir y no vivo más que para morir.

12-¡Qué estúpido fui al pensar que era estúpido!

13-La única vez que me equivoqué fue cuando pensé que me había equivocado.

14-Es de mala suerte ser supersticioso.

15-Voy a hacer una marcha en contra de todas las marchas.

16-Mira al avaro, en sus riquezas, pobre.

17-Cuando murió el Sócrates real, nació el Sócrates leyenda.

18-Está prohibido prohibir.

19-Soy ateo gracias a Dios.

20-Solo sé que nada sé. (Sócrates)

21-Elegí no elegir.

22-Hay sumas que restan.

23-Lo barato sale caro.

24-En mi debilidad está mi fortaleza.

25-Lo único constante en la vida es el cambio.

26-Del amor al odio hay tan solo un paso.

27-Nunca digas nunca.

28-Toda regla tiene excepciones.

29-Bajamos y no bajamos al mismo río, nosotros mismos somos y no somos.[6]

30-La enfermedad convierte en dulce la salud, el hambre convierte en dulce la saciedad, y la fatiga convierte en dulce el descanso.

31-El camino que sube y el camino que baja son un único y mismo camino.

32-En el círculo son comunes el fin y el principio.

33-El Dios es día y noche, es invierno y verano, es guerra y paz, es saciedad y hambre.

[6] Las expresiones paradójicas desde 29 hasta 38 pertenecen a Heráclito.

34-La misma cosa son el viviente y el muerto, el despierto y el durmiente, el joven y el viejo, porque estas cosas, al cambiarse, son aquellas, y a su vez aquéllas, al cambiarse, son estas.

35-El Uno, el único sabio, no quiere y quiere ser llamado Zeus.

36-Uno para mí es como diez mil con tal que sea el mejor.

37-Inmortales mortales, mortales inmortales, viviendo la muerte de aquéllos, muriendo la vida de aquéllos.

38-Ni siquiera se conocería el nombre de la justicia, si no existiese la ofensa.

39-Recuerdo su cálido abrazo, sus cálidas manos, su cálida despedida para no vernos más. Y cuando la encontré, su cálida mirada me congeló.

40-Señor gerente, la empresa está trabajando perfectamente bien, tanto, que tengo la impresión de que algo está mal.

41-Tengo todo: "El auto más caro, la ropa del mejor diseñador, paseo con la mujer más hermosa… sin embargo, mi vida es vacía: tengo que trabajar en algo que no me gusta, escuchar a una mujer borracha de vanidad, rodeado de gente que sólo me rodea para ver qué provecho saca de mi; ahogándome en un disfraz que no me puedo quitar en todo el día. Tengo todo y no tengo nada".

42-Se ha crucificado al hijo de Dios, no nos avergoncemos de ello porque es degradante. Ha muerto el hijo de Dios, es plenamente creíble porque es insensato. Ha resucitado de la tumba; es seguro porque es imposible. Creo porque es absurdo. (Tertuliano)

43-Dios mío, si tú hubieras sido hombre, hoy supieras ser Dios; pero tú, que estuviste siempre bien, no sientes nada de tu creación. Y el hombre sí te sufre: el Dios es él. (Vallejo)

En el poema "*El amor*" de González Prada, podemos ver una paradoja tras otra.[7] Lo mismo ocurre en el "*Canto Coral a Túpac Amaru*" de Alejandro Romualdo. [8] Es fácil percatarse así de cómo los literatos (al tener una virtuosa capacidad de jugar con las palabras) usan paradojas como figuras literarias para generar estupor y reflexión en el público lector.

1.2.2. *Paradoja* en sentido técnico

En sentido técnico, la definición de García Zárate reza del siguiente modo: "Las paradojas son tipos especiales de contradicción [aquella dada por una oración] cuya verdad implica su falsedad, del mismo modo que su falsedad implica su verdad" (2007: 233). Por este singular rasgo es que es plausible señalar que la paradoja asombra, toda vez que nos enfrenta a la formulación de un enunciado absurdo, en relación con el cual extrañamente parece no ser posible señalar la causa que explique porqué adopta dicha forma. Esta

[7] "Si eres un bien arrebatado al cielo / ¿Por qué las dudas, el gemido, / el llanto, la desconfianza, el torcedor quebranto, / las turbias noches de febril desvelo? / Si eres un mal en el terrestre suelo / ¿Por qué los goces, la sonrisa, el canto, / las esperanzas, el glorioso encanto, / las visiones de paz y de consuelo? / Si eres nieve, ¿por qué tus vivas llamas? / Si eres llama, ¿por qué tu hielo inerte? / Si eres sombra, ¿por qué la luz derramas? / ¿Por qué la sombra, si eres luz querida? / Si eres vida, ¿por qué me das la muerte? / Si eres muerte, ¿por qué me das la vida?"

[8]Lo harán volar con dinamita. / En masa, lo cargarán, lo arrastrarán. / A golpes le llenarán de pólvora la boca. Lo volarán: / ¡Y no podrán matarlo! / Le pondrán de cabeza / sus deseos, sus dientes y gritos. / Lo patearán a toda furia. Luego, lo sangrarán: / ¡Y no podrán matarlo! / Coronarán con sangre su cabeza; / sus pómulos con golpes. Y con clavos sus costillas. / Le harán morder el polvo. Lo golpearán: / ¡Y no podrán matarlo! / Le sacarán los sueños y los ojos. / Querrán descuartizarlo grito a grito. / Lo escupirán. Y a golpe de matanza lo clavarán: / ¡Y no podrán matarlo! / Lo pondrán en el centro de la plaza, / boca arriba mirando el infinito. / Le amarrarán los miembros. A la mala, tirarán: / ¡Y no podrán matarlo! / Querrán volarlo y no podrán volarlo. / Querrán romperlo y no podrán romperlo. / Querrán matarlo y no podrán matarlo. / Querrán descuartizarlo, triturarlo, mancharlo, pisotearlo, desarmarlo. / Querrán volarlo y no podrán volarlo. / Querrán romperlo y no podrán romperlo. / Querrán matarlo y no podrán matarlo. / Al tercer día de sus sufrimientos, cuando se crea todo consumado, / gritando ¡LIBERTAD! sobre la tierra, ha de volver, / ¡Y no podrán matarlo! (Romualdo, 1958)

definición funciona para el caso de la paradoja de *El Mentiroso* y otras versiones análogas que, de acuerdo a Tarski, podemos generar, tales como:

a) la paradoja de la satisfacción: "La función proposicional X no satisface a X"[9];

b) la paradoja de Grelling: "Las palabras heterológicas X no se refieren a X"[10]; y

c) la paradoja de Richard-Berry: "El *definiendum* X no define a X"[11].

---

[9] "(…) Para obtener una antinomia partir de la noción de satisfacción, construimos la siguiente expresión:
La función proposicional X no satisface a X.
Surge una contradicción cuando consideramos la cuestión de si esta expresión, que es claramente una función proposicional se satisface a sí misma o no." (Tarski, 1997: 85-86)

[10] La paradoja de Grelling registrada en el trabajo de Leonard Nelson y Kurt Grelling, "*Bemerkungenzu den Paradoxien von Russell und Burali-Forti*", y también en "*Teoría de Conjuntos"* del mismo Grelling (1943: 115-116) es también conocida como la 'paradoja de los términos heterológicos'. Según ella, muchas expresiones del lenguaje corriente pueden dividirse en autológicas y heterológicas. Expresiones autológicas son las que se refieren a sí mismas, esto es, expresiones de la forma: '*t* ' es *t*. Ejemplos de ellas en español son: 'breve' (que es breve); 'escrito en español' (que está escrito en español); 'impreso en negro' (que está impreso en negro); 'consta de cuatro palabras' (que consta de cuatro palabras). Expresiones heterológicas son las que no se refieren a sí mismas, esto es expresiones de la forma: '*t* ' no es *t*. Ejemplos de ellas son: 'escrito en francés' (que no está escrito en francés); 'impreso en rojo' (que no está impreso en rojo); 'consta de dos palabras' (que no consta de dos palabras). En medio de estas expresiones, el problema que se plantea es el siguiente: ¿El término 'heterológico' es heterológico o autológico?

[11] Podemos entender al *definiendum* como aquello que se quiere explicar mediante la definición. En cambio, el *definiens* es la expresión que se utiliza para definir a una palabra. Para comprender esta paradoja hay que revisar la paradoja de Richard y luego la Berry. Comencemos con la primera:
"La paradoja de Richard consiste en lo que equivale al siguiente problema ¿cómo ha de bastar un sistema de lógica simbólica en el que el conjunto de todas las fórmulas tiene el número transfinito $\aleph_0$ para la discusión y desarrollo de una rama de las matemáticas que maneje conjuntos cuyo número transfinito sea mayor que $\aleph_0$? Y, en particular, ¿cómo podemos ni siquiera hablar del conjunto de los números reales cuyo número transfinito $\aleph_1$ se ha demostrado que es mayor que $\aleph_0$?" (Northrop, 1949: 280) $\aleph_0$ es el número de números naturales y racionales. Presumiblemente, $\aleph_1$ es el número de números reales.
Por otro lado, la paradoja de Berry nace de la consideración de la posibilidad de dar a la "antinomia Ricardeana", una nueva forma, que la hace aun más embarazosa. También se la denomina "paradoja de las palabras". Tradicionalmente se la suele formular de la manera siguiente. Si suponemos que una palabra no debe contener más de 20 letras, estaremos seguros de que se obtendrá un número finito perfectamente determinado de tales palabras. Oraciones a lo más con 12 de estas palabras son también en número finito. En español solo una pequeña parte de dichas oraciones tienen sentido; de las cuales otra pequeña parte nuevamente define números naturales. Pues bien, estamos en condiciones de demostrar que no hay número natural que no se pueda definir con 12 palabras. Si se dan tales números se tendrá entre ellos uno mínimo. Pero la definición: *el menor número natural, que no se puede definir con doce palabras*, consta exactamente de doce palabras. Tal número mínimo no existe. Por lo tanto, todo número natural se puede definir con doce palabras. (Grelling,

En tales casos, surgirán contradicciones cuando consideremos si dichas oraciones son verdaderas o no. Ahora bien, examinemos la paradoja del *Mentiroso*: supongamos que existe una oración que afirma de sí misma que es falsa.

Hipótesis:

1) *La oración 1) es falsa.*

Problema: ¿es verdadera o es falsa la oración 1)?

Por un lado, si 1) es verdadera, entonces se cumple lo que dice. Pero, si lo que dice se cumple, entonces 1) es falsa. Es decir, si 1) es verdadera, entonces 1) es falsa.

Por otro lado, si 1) es falsa, entonces lo que dice dicha oración se confirmaría. Pero, si se confirma lo dicho por esa oración, entonces 1) es verdadera. Es decir, si 1) es falsa, entonces 1) es verdadera.

Si bien toda paradoja es una contradicción, no toda contradicción es una paradoja. Por esto, una contradicción del tipo "La nieve es blanca y la nieve no es blanca", al no establecer una relación de doble implicación de antecedente a consecuente y viceversa, y al

---

1943: 117-118). Advirtamos que esta paradoja tiene una conclusión desajustada con la realidad, pues no es ilícito definir números naturales con 13, 48 o hasta más palabras.
Ahora bien, la expresión "El *definiendum* X no define a X" es una generalización de la paradoja de Berry (que a su vez se basa en la de Richard) en la que x significa "*el menor número natural, que no se puede definir con doce palabras*".

no contener esa cuota de asombro propia de una paradoja, no constituye un ejemplo de esta. De acuerdo a Karl Popper (1997: 34) en *La defensa del Racionalismo*:

> "A las paradojas se les llama a veces "contradicciones". Pero esto quizás sea un tanto desorientador. Una contradicción ordinaria (o algo que se contradice a sí mismo) es simplemente una afirmación falsa desde el punto de vista lógico, como: "Platón era feliz ayer y no era feliz ayer". Si suponemos que tal enunciado es falso, no se suscita ninguna dificultad. Pero de una paradoja no podemos suponer no que es verdadera *ni que es falsa*, sin meternos en dificultades."

Notamos que, suponiendo que el enunciado paradójico es verdadero o falso, en ambos casos, llegamos una contradicción que nos obliga a sostener que dicho enunciado no puede ser ni verdadero ni falso.

Hay que decir que, en contraposición con el sentido coloquial de la paradoja que la define como la sentencia inverosímil, increíble y contradictoria que va en contra de lo común, al definir técnicamente una paradoja como aquel ente lingüístico cuya verdad implica su verdad y viceversa; se está considerando a la paradoja desde el aspecto del proceso racional que la genera. Así, es el razonamiento, como aquel proceso de la inferencia que pone en juego reglas lógicas, el elemento principal que permite identificar a la paradoja. En esta línea de pensamiento, Jonathan Vogel define a la paradoja sosteniendo que es un argumento de premisas aceptables pero con una conclusión inaceptable (Dancy y Sosa, 1992: 324). Por ejemplo, en el caso de la paradoja de *El Mentiroso* las premisas aceptables serían:

1) Todo enunciado que tiene significado es verdadero o falso.

2) La oración que dice de sí misma que es falsa tiene significado.

y, la conclusión inaceptable sería:

C) Si la oración que dice de sí misma que es falsa, es verdadera entonces dicha oración es falsa, y si dicha oración es falsa, entonces ella misma sería verdadera.

Michael Clark en "El gran libro de las paradojas" (2009) sostiene que, a decir de Mark Sainsbury, una paradoja es un argumento en el que una conclusión aparentemente inaceptable se deriva, mediante un razonamiento aparentemente aceptable, a partir de premisas también aparentemente aceptables. Algo semejante dice Roger Scruton (2003) cuando afirma que una paradoja es un argumento que conduce por etapas racionales a una contradicción a partir de premisas intuitivamente aceptables.[12] También, según Alberto Clemente de la Torre en *Física Cuántica para filó-sofos*: "(…) la palabra [paradoja] [implica] (…) llegar a una conclusión evidentemente falsa o absurda por un razonamiento aparentemente correcto (…)" (2000: 98). Más específicamente, de acuerdo con Piotr Łukowski (2011), en una paradoja concurren tres cosas:

[12] Pero no podemos decir que se dé una paradoja siempre que haya argumentos a favor de conclusiones incompatibles, pues, de lo contrario, todo asunto controvertido adquiriría carácter paradójico. Lo característico de tales paradojas es el hecho de que los argumentos divergentes son simétricos (es decir, se da tanto $p \rightarrow q$, como $q \rightarrow p$), lo que hace que la oposición resulte especialmente desconcertante.

1.- Se han utilizado correctamente las reglas de la inferencia.

2.- Se ha formulado adecuadamente el razonamiento.

3.- Hay la certeza de que nuestras opiniones son, hasta el momento, racionales.

Y sucede que, a pesar de lo anterior, se llega a una contradicción. Por lo tanto, la paradoja es un argumento legalmente correcto que, sin embargo, deviene en una contradicción.

A partir de las últimas citas se puede colegir que la paradoja se concentra en la relación entre la aparente corrección de las premisas y el proceso deductivo, y la notoria problematicidad de la conclusión. Hay paradoja cuando llegamos mediante una demostración correcta a un resultado definitivamente absurdo[13]. Siendo así, lo primero que se le ocurriría a un lógico sería revisar el proceso deductivo *aparentemente correcto* tratando de encontrar alguna falla. De ahí que Russell sospeche que las paradojas deban ser atenuadas mediante la identificación de cierto principio de *círculo vicioso* en las demostraciones. Incluso, según Morris Kline (2000: 246), el matemático abocado al tema de los fundamentos de su ciencia "(…) quería creer que las [paradojas] podían ser resueltas

---

[13] Con esto, quiero decir que en una paradoja no hay un problema de aplicación de las reglas lógicas, no hay un problema de corrección o validez. Lo que hay es una conclusión inconsistente. Sin embargo, ante esta irregularidad los lógicos pueden suponer: o bien, que las premisas aceptadas deben ser problemáticas; o bien, que las reglas lógicas usadas deben ser cuestionables. Si no tuvieran éxito en probar estas hipótesis, solo les queda examinar la paradoja desde una lógica no-clásica que rechace la validez del principio de no contradicción.

(…)” revisando minuciosamente la prueba que la justifica para hacer cambios en la lógica del sistema deductivo.

1.2.3. *Paradoja*, *aporía* y *antinomia*

Con frecuencia se usan como sinónimos de *paradoja* los términos *aporía* y *antinomia*. Sin embargo, a fin de lograr mayor claridad distinguiremos estos conceptos.

1.2.3.1. *Aporía*

Etimológicamente, *aporía* proviene de la voz: *a* (sin) y *poro* (salida) y significa, en sentido figurado, callejón sin salida, atasco, o nudo del cual no se puede salir. Por ello, se llama *aporía* a cualquier problema difícil que se plantea cuando estamos tratando de ampliar nuestro conocimiento de un asunto, y que amenaza seriamente obstaculizar nuestro mayor progreso. Por ejemplo, podemos mencionar las conocidas catorce aporías de Aristóteles que se aparecen en su *Metafísica* (1998). Veamos solo la primera:

El problema que se plantea es el de si corresponde a una ciencia o a más de una ciencia estudiar en conjunto las cuatro causas (material, formal, eficiente y final)[14]. Esta aporía se despliega del siguiente modo:

[14] Asumiremos que T_1 se refiere a la hipótesis “Corresponde a una sola ciencia estudiar las cuatro causas”, mientras que T_2 alude a “Corresponde a más de una ciencia estudiar las cuatro causas”.

PROPUESTA

No parece posible que una misma ciencia estudie todos los tipos de causas, ya que

a) tales géneros no tienen nada en común, y
b) no todos los tipos de causas se dan en todos los tipos de realidad: así, para las realidades inmóviles (como los objetos matemáticos) no hay ni principio del movimiento (causa eficiente) ni "para-qué" o causa final (y, por tanto, si la sabiduría se ocupara de tales realidades, no caerían bajo su conocimiento estos dos tipos de causas).

Formalmente:

$(A\wedge \sim B)\rightarrow \sim T_1$

CONTRAPROPUESTA

Si ciencias distintas se ocuparan de los distintos tipos de causas, ¿a cuál de las distintas ciencias correspondería el título de *sabiduría*? En efecto, tal título parecería apropiado

a) tanto para la ciencia que estudie la causa final,
b) como para la que estudie la causa formal (el qué-es),
c) como para la que estudie la causa productora del movimiento (causa eficiente).

Formalmente:

$(A \wedge B \wedge C) \rightarrow \sim T_2$

En el caso de la aporía planteada, el problema surge cuando a partir de cualquiera de las dos opciones que parecen plausibles aceptar, ocurre que en cualquiera de los casos nos vemos enfrentados con otros problemas, dudas o incertidumbres que reclaman una solución satisfactoria. Es decir, en una aporía las pruebas correspondientes a una hipótesis o a su negación, se enfrentan con distintos problemas que dificultan su inmediata decisión.

1.2.3.2. *Antinomia*

Etimológicamente, *antinomia* procede del griego $\alpha\nu\tau\iota\nu o\mu\iota\alpha - \alpha\varsigma$ y es un vocablo jurídico que significa "contradicción en la leyes" (Yarza, 1988: 85). Inmanuel Kant (1984: 315) entendió la antinomia como una dificultad conceptual inevitable, pero necesaria en el ámbito de la razón pura. La *antinomia* se da cuando somos capaces de defender, o demostrar, tanto una proposición como su contradictoria, pero en ella no podemos hallar error de demostración alguno. Según Inmanuel Kant, la antinomia es una oposición legal que expone los conflictos de la razón en su apariencia deslumbradora, pero falsa, como una idea que no puede conciliarse con ningún hecho. Esperamos a la larga poder resolver la antinomia, a través de una cuidadosa reflexión y análisis, o por la detección de algún error. Por ejemplo, es muy sabido que Kant fue uno de los primeros en hablar de ellas en su obra *Crítica de la Razón Pura* (1984) cuando planteó cuatro antinomias. Éste es para Kant el primer conflicto de las ideas trascendentales:

TESIS

El mundo tiene un comienzo en el tiempo y con respecto al espacio también está encerrado entre límites.

DEMOSTRACIÓN

En efecto, supongamos que el mundo no tenga comienzo en el tiempo: siendo así, hasta cualquier momento dado habrá transcurrido una eternidad y, en consecuencia, habrá transcurrido una infinita serie de estados de las cosas del mundo que se suceden unos a otros. Ahora bien, la infinidad de una serie consiste en que no puede completarse nunca por medio de sucesivas síntesis. Por lo tanto, es imposible una serie cósmica infinita transcurrida y, en consecuencia, un comienzo del mundo es condición necesaria de su existencia, que es lo que había que demostrar primero. Formalmente:

$P \rightarrow A$

ANTITESIS

El mundo no tiene comienzo ni límites en el espacio, sino que es infinito tanto en el tiempo como en el espacio.

DEMOSTRACIÓN

En efecto, pongamos que tenga un comienzo. Como el comienzo es una existencia que va precedida de un tiempo en que no existe la cosa, es preciso que haya precedido un tiempo en el que el mundo no fuera, o sea, un tiempo vacío. Ahora bien, en un tiempo vacío no es posible que nazca cosa alguna, porque ninguna parte de tal tiempo tiene, ante otra, condición distintiva alguna de la existencia de preferencia la de la no existencia (tanto si se admite que nace por sí misma como por otra causa). Por consiguiente, aunque en el mundo pueden comenzar varias series de cosas, el mundo mismo no puede tener comienzo y, por lo tanto, es infinito respecto del tiempo pasado. Formalmente:

$Q \rightarrow \sim A$

Como notamos esta primera antinomia de la razón pura trata de demostrar tanto la tesis: "*el mundo tiene un principio en el tiempo*" como la antítesis: "*el mundo no tiene principio sino que es infinito*". La antinomia, frente a un problema determinado, se desdobla en tesis y antítesis. Tanto la tesis como la antítesis tienen una demostración, pero aparte del problema planteado no se expresan otros problemas concernientes a las deducciones efectuadas a partir de las premisas aceptadas. Solo se considera que hay una contradicción porque tanto tesis como antítesis pueden demostrarse, pero, a diferencia de la aporía, no se sugiere que aparecen otros problemas al aceptar una de las dos opciones disponibles. Asimismo, mientras que la antinomia establece dos premisas contradictorias entre sí que están respaldadas por demostraciones de distinta índole y con diferentes premisas, la paradoja se levanta sobre premisas opuestas entre sí, pero que utilizan el mismo tipo de explicación tanto en un caso como en otro.

1.2.4. Importancia del estudio de las paradojas[15]

Todo profesor de filosofía que esté comenzando a desarrollar su labor docente siempre tendrá problemas para lograr concentrar la atención de sus pupilos en un aspecto concreto de la lección. Así pues, se hace necesario tener un *as* bajo la manga para poder llamar su atención con el fin no solo de amenizar la clase sino también para que puedan razonar como jugando con un rompecabezas.

Estando en una clase de lógica o introducción a la filosofía cualquiera que escuche la formulación de una paradoja siente una inmediata necesidad de encontrarle una falla o,

---

[15] Las paradojas han llevado a la creación de nuevas áreas del conocimiento, como el análisis matemático, la teoría de conjuntos, las lógicas paraconsistentes, entre otras. Y en ello radica la importancia de su investigación. Por ejemplo, en 1851 se publicó "Las Paradojas del Infinito" de Bernard Bolzano. En esta obra se analiza, entre otras, la siguiente serie:
$R = a - a + a - a + a - a + a - \ldots$
Agrupemos sus elementos de dos en dos.
$R = (a-a)+(a-a)+(a-a)+(a-a)+\ldots$
$R = 0 + 0 + 0 + \ldots$
$R = 0$
Obtenemos que la serie convergente es igual a "0". Pero si los agrupamos de 2 en 2 a partir del segundo término –a, llegamos a otros resultados
$R = a \ -a + a \ -a + a \ -a + a - \ldots$
$R = a - \ (a-a) - (a-a) - (a-a) - (a-a) - \ldots$
$R = a - 0 - 0 - 0 - \ldots$
$R = a$
Ahora concluimos que la serie convergente es igual a "a". Finalmente, podemos organizarla de otra manera
$R = a \ -a \ + \ a \ -a + a \ -a + a - \ldots$
$R = a \ - (a \ -a + a \ -a + a - \ldots)$
$R = a - R$
$R = a/2$
He aquí, pues, una serie infinita cuya suma de términos tiene más de un posible resultado. Este problema motivaría el desarrollo del análisis infinitesimal así como la aclaración del concepto de límite de una sucesión no monótona alternante u oscilante.

en caso que no haya tal, buscarle una solución que desvanezca su aspecto problemático. A continuación, presentaremos un caso en el que se pretende presentar una manera en la que un docente puede preparar el clima de una clase de filosofía en la época medieval:

> "Estimados alumnos, en la época medieval se planteó y fundamentó la idea de que uno de los rasgos de Dios es que Él es todopoderoso. Esto significa que Dios todo lo puede conseguir por su gran poder. Pero no todos creían en la existencia de Dios. Es más, algunos ateos planteaban la siguiente cuestión: considerando que Dios es todopoderoso ¿puede Dios crear una piedra tan grande que no sea capaz de cargar él mismo? Si puede crear la piedra, ya no la podría cargar; por ende, ya no sería todopoderoso (recuerda que si la puede cargar entonces no sería lo suficientemente grande). Si no puede crear dicha piedra, ya no sería todopoderoso. Por lo tanto, ya cree o no cree la piedra, Dios en ningún caso es todopoderoso ¿qué piensan del razonamiento anterior también conocido como *paradoja de Dios y la piedra*?".

Ante la paradoja anterior los alumnos harán uso de todas sus herramientas intelectuales con el fin de conseguir responder al reto planteado. Por ello, se entiende el impacto que causan las paradojas cuando son narradas pues invitan a poner en juego todo el ingenio y la capacidad mental de quien las comprenda. Sin embargo, más que un juego consideramos que la paradoja es un elemento esencial de la filosofía misma. Y no solo se trata de reproducir paradojas que otros han realizado sino, más que nada, lo que se busca es elaborar uno mismo sus propias paradojas. Por eso, la filosofía sería definida como un lenguaje de paradojas. Como podemos leer en el epígrafe, aquel pensador que no tenga una paradoja será análogo a un amante que no tenga sentimientos. Por definición, el que ama ha de tener sentimientos de amor. Análogamente, el que piensa, e incluso estudia una carrera de filosofía, ha de tener paradojas filosóficas. Esto sucede porque siempre el que filosofa más que estar preparado para recibir las opiniones de los demás, debe ser el primero en plantearse sus propias críticas. Así, se entiende por qué fue necesario y no algo casual que Parménides y su discípulo Zenón construyeran las muy conocidas paradojas del movimiento (como la paradoja de Aquiles y la tortuga)[16], que Aristóteles planteara sus callejones sin salida (conocidos con el nombre de *aporías*) y que, hasta Kant, explicara sus contradicciones de la razón pura (llamadas *antinomias*, por él mismo).

1.2.5. Clasificación de paradojas

W. V. O. Quine en *The Ways of Paradox* (1976) en base a la definición técnica de paradoja que hemos proporcionado (es decir, un argumento de premisas aceptables pero con una conclusión inaceptable) nos propone una división de las paradojas en: *verídicas*, *falsídicas* y *antinomias*; con el fin de distinguir algunos detalles que tienen varios casos específicos de paradojas.

Quine habla de 'paradojas verídicas' -en la cuales lo que se pretende establecer es verdadero- y de 'paradojas falsídicas' –en las cuales lo que se pretende establecer es falso-. Los términos 'verídico' y 'falsídico' provienen del latín *veridicus* y *falsidicus* y atribuyen verdad (realidad) o falsedad (ilusión) a los sustantivos que califican. Estos términos tienen

[16] Según Aristóteles en la *Física* al respecto de las paradojas eleáticas: "Cuatro son los argumentos de Zenón sobre el movimiento que crean dificultades a los que tratan de resolver los problemas que plantean". Como un caso particular de este tipo de razonamientos hagamos memoria de la paradoja de Aquiles y la Tortuga en boca del Estagirita: "El segundo argumento es el llamado "Aquiles". Es éste: el corredor más lento no será nunca alcanzado por el más rápido, pues es necesario que el perseguidor llegue primero al lugar de donde partió el perseguido, de tal modo que el más lento estará siempre un poco más adelante." (Barnes, 1992: 326)
Reescribe Borges su exposición: "Aquiles, símbolo de rapidez, tiene que alcanzar la tortuga, símbolo de morosidad. Aquiles corre diez veces más ligero que la tortuga y le da diez metros de ventaja. Aquiles corre esos diez metros, la tortuga corre uno; Aquiles corre ese metro, la tortuga corre un decímetro; Aquiles corre ese decímetro, la tortuga corre un centímetro; Aquiles corre ese centímetro, la tortuga un milímetro; Aquiles el milímetro, la tortuga un décimo de milímetro, y así infinitamente, de modo que Aquiles puede correr para siempre sin alcanzarla. Así la paradoja inmortal." (1966: 114)

cierta relación con el concepto de validez lógica.

Según Quine, aquellas paradojas en las que la presuposición de la existencia de ciertas entidades conduce a una contradicción serán denominadas *paradojas verídicas*, puesto que este tipo de paradojas se presentan cuando la afirmación que nos resulta inicialmente absurda, notamos luego que es verdadera, al comprender el razonamiento que la justifica. En algunos casos, la paradoja verídica se constituye como una reducción al absurdo que al tener la forma lógica: $P \rightarrow (Q \wedge \sim Q)$ culmina en $\sim P$. Esto ocurre en los casos de la familia argumental de paradojas de Russell.[17]

---

[17] La paradoja de Galileo (1945: 57-59), planteada en sus *Diálogos sobre dos nuevas ciencias* Galileo (1945: 57-59) sostiene la aparente falta de consistencia en la relación entre números naturales y números cuadrados. Da la impresión de que hay más números enteros (1,2,3,…) que cuadrados de dichos números (1,4,9,…). Pero es posible emparejar los números enteros con sus cuadrados:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**…**
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	
1	**4**	**9**	**16**	**25**	**36**	**49**	**64**	**…**

Sin embargo, si consideramos que los cuadrados son parte de los naturales y que el todo es siempre mayor que la parte, entonces podemos concluir que los naturales serán más que los cuadrados. No obstante, podemos darnos cuenta de que ambos tipos de número son infinitos (en la misma medida). Así, llegamos a la idea de que la parte es igual que el todo, lo cual es contradictorio con nuestro sentido común. Sin embargo, hay que notar que la relación entre estos dos conjuntos de números nada tiene de aparente o engañosa puesto que, en verdad, dichos conjuntos son igual de numerosos, es decir, tienen la misma cantidad de elementos.

Otros ejemplos de paradojas verídicas está constituida por la familia argumental de paradojas de Russell y estas son: la paradoja del barbero, la paradoja del alcalde y la del catálogo. Todas estas son versiones populares de la conocida paradoja de Russell. En lo que sigue, explicaremos los elementos de la familia argumental de Russell:

a) Paradoja del barbero.

Es una popularización de la paradoja de Russell que hace alusión a un barbero que, por norma, *afeita a todas aquellas personas de la aldea que no se afeitan a sí mismas* y sólo a aquéllas. La pregunta desconcertante es *¿se afeita el barbero a sí mismo?* Se plantea entonces una difícil situación circular y contradictoria.

1) Si suponemos que el barbero se afeita a sí mismo, como es un habitante del lugar que se afeita a sí mismo, no debería ser afeitado por el barbero y, por consiguiente, no debería ser afeitado por sí mismo. Así pues, si suponemos que es afeitado por él mismo, entonces afirmamos que no debería ser afeitado por sí mismo.

Otras veces, nuestras sospechas están totalmente fundadas y esa alerta de que alguna mala información se ha dejado filtrar no debe ser descartada, sino que tenemos todo el derecho de iniciar una investigación que nos permita estar seguros de que teníamos razón al atribuirle toda la responsabilidad a tal o cual premisa o regla deductiva. Ya Quine bautizó esta última situación con el nombre de *paradoja falsídica*, puesto que se trata de un razonamiento que no solo aparenta ser falaz, sino que lo es. Notemos que este tipo de paradojas falsídicas se constituirán como argumentos incorrectos que, además, pretenderán

---

2) Si suponemos que el barbero no se afeita a sí mismo, según la norma aceptada, debería ser afeitado por el barbero; es decir, debería ser afeitado por sí mismo. De nuevo se presenta el conflicto, ya que si el barbero no se afeita a sí mismo, debería ser afeitado por sí mismo.

b) Paradoja de los catálogos.

Según la paradoja de los catálogos, partiendo de la base de que toda biblioteca tiene un catálogo (o bibliografía), se comprueba que en algunos casos estos catálogos *se incluyen a sí mismos* como libros de la biblioteca, y en otros casos, no. Supongamos ahora que quisiéramos construir una suerte de supercatálogo (o superbibliografía). Específicamente, queremos hacer un catálogo de todos aquellos catálogos que no se incluyen a sí mismos como libros de sus respectivas bibliotecas. Reflexionando un poco nos daremos cuenta que, se nos plantea un problema en el momento de incluir o no al supercatálogo mismo en nuestro supercatálogo. Razonemos. En tanto estamos catalogando los catálogos que no se incluyen a sí mismos deberíamos incluirlo. No obstante, el catálogo sería erróneo por incluir un catálogo que sí se incluye a sí mismo. Pero, si a consecuencia de éste razonamiento, decidimos no incluirlo, incurriríamos en el error de construir un catálogo incompleto, en el que faltaría precisamente el catálogo que estamos haciendo, que por no incluirse a sí mismo debería ser incluido.

c) Paradoja de los alcaldes.

De acuerdo a la paradoja de los alcaldes, todo distrito ha de tener un alcalde, y no puede haber dos distritos que tengan el mismo alcalde. Sucede a veces que el alcalde no reside en su propio distrito. Supongamos que se promulga una ley en la cual se delimita un área especial S, exclusivamente para aquéllos alcaldes que no residen en su propio distrito, y se obliga a todos esos alcaldes a residir allí. Supóngase, por añadidura, que hay tantos alcaldes no-residentes, que S ha de ser constituido en distrito. La pregunta conflictiva es ¿dónde residirá el alcalde de S? Existen dos posibilidades: que el alcalde resida en su propio distrito y que el alcalde no resida en su propio distrito.

1) Si el alcalde reside en su propio distrito, que es el distrito de los alcaldes, ya que allí solo residen los que no residen en su propio distrito, no debería residir en el distrito de los alcaldes.

2) Si el alcalde no reside en su propio distrito, que es el de los alcaldes, ya que allí solo residen los que no residen en su propio distrito, debería residir en el distrito de los alcaldes.

tener la apariencia de ser válidos. En resumen, la paradoja falsídica es un argumento inválido del cual se concluyen sólo cosas falsas (Ferrater Mora, 1994: 2693)[18].

Finalmente, tenemos a la antinomia. Esta presenta tal contradicción interna que, por un lado, tiene una conclusión inaceptable, pero, por el otro, somos incapaces de descubrir en dónde se halla el error. La presencia de *antinomias* nos obliga a cambiar nuestros esquemas conceptuales, principios lógicos y axiomas. Dentro de esta clasificación, la antinomia es la que vendría a ser llamada paradoja propiamente dicha. [19] [20]

---

[18] En 1847, Augustus De Morgan publica su texto Lógica Formal o el cálculo de inferencia y demuestra que 2=1. Supongamos que x=1. Luego, multiplicando ambos miembros de la igualdad por x, obtenemos: $x^2=x$. Ahora, restemos 1 a cada lado de la nueva igualdad: $x^2-1=x-1$. Enseguida, dividamos ambos miembros por x-1, y nos queda: x+1=1. Finalmente, como ya sabíamos que x=1, solo reemplazamos x y así nos queda que 2=1. Debemos considerar que aquí existe un claro engaño, pues no podemos dividir por x-1, pues x-1=0, y la división por cero no existe. A estas paradojas en las que algo extraño se sostiene por una falsa demostración se suele llamar paradoja falsídica.
Por ejemplo, las paradojas de Zenón, como, por mencionar uno, el caso de Aquiles y la tortuga, (Kirk, Raven, y Schofield, 1983: 389), las antinomias de Kant (1984: 315), de Epiménides (Pablo, 2001: 1193-1194), la del montón (o sorites), la de Protágoras (o de los abogados) y algunos casos de la familia de paradojas del *Mentiroso* (paradoja del puente, dilema de los caníbales y dilema del cocodrilo) pueden ser interpretadas como paradojas falsídicas. Todas las paradojas aludidas son explicadas en este trabajo a excepción de la del montón que mencionaremos enseguida.
Esta paradoja es también llamada *paradoja sorita* a partir de la palabra griega para montón o cúmulo (*soros*). Nos inclinamos a pensar que, si cierto número n de granos de arena constituye un montón, éste no dejará de ser un montón por el hecho de sacarle un grano. Luego, ∀n (n es un montón → n-1 es un montón). De esto, aplicando la fórmula en forma recurrente, se deduce inmediatamente que, si cualquier número de granos de arena forman un montón, tiene que ocurrir lo mismo con los números más bajos hasta llegar a cero. Por el contrario, si un número n de granos no son un montón, tampoco lo son n+1; es decir, ∀n (n es un montón → n+1 es un montón). Con esto se obtiene el resultado opuesto, es decir, que si cualquier número de granos de arena no son un montón, lo mismo tiene que ser verdad para todos los números superiores, hasta el infinito. De estas dos conclusiones se deduce que cualquier colección de granos es y no es un montón. Pero claramente nos damos cuenta que se intenta asumir que pequeñas diferencias en una serie continua de sucesos son irrelevantes, o que posiciones extremas, conectadas por pequeñas diferencias intermedias, son la misma cosa porque no podemos establecer un límite objetivo para el cambio. A esto también se le conoce como *falacia del continuum.*

[19] Como ejemplos de antinomias podemos mencionar a las paradojas de *El Mentiroso*, de Grelling y de Russell. Como las dos primeras las explicamos en este trabajo, nos ocuparemos de la última. Al respecto de la clásica paradoja de Bertrand Russell de la Teoría Lógica de las Clases podemos decir que fue descubierta por Zermelo en 1900 y un año más tarde, redescubierta independientemente, por Russell, quien la publicó. Se ha solido considerarla como una paradoja de la Teoría de

Precisamente, Tarski hace un especial estudio sobre las antinomias. Según *Verdad y Prueba* en la literatura en cuanto a las antinomias se pueden encontrar dos enfoques enteramente opuestos. Un primer enfoque consiste en pasarlas por alto, para enfrentarlas como sofismas[21], como juegos que no son serios, sino maliciosos y que tienen como fin principal mostrar la inteligencia de quien las formula[22]. De acuerdo con el segundo enfoque, las antinomias constituyen un elemento muy importante del pensamiento humano, deben aparecer una y otra vez en las actividades intelectuales y su presencia es la fuente básica del progreso científico[23]. Sin embargo, Tarski (2000: 205-206) prefiere ubicarse en un punto intermedio. Él no puede reconciliarse con antinomias eternas, pero tampoco puede darse el lujo de despreciarlas:

> "(…) El surgimiento de una antinomia es para mí un signo de enfermedad. Comenzando con premisas que parecen intuitivamente obvias, empleando formas de razonamiento

---

Conjuntos debido a la confusión del concepto de conjunto con el concepto fregeano de clase (o extensión de un concepto). La fundamentación lógica de la Aritmética por Frege se basaba en el supuesto de que para cada propiedad o condición $\varphi(x)$, expresable en el lenguaje, existe la clase de todas las cosas que tienen esa propiedad o cumplen esa condición. Sucumbiendo a la confusión señalada, dicha clase se representa con el mismo símbolo que el conjunto de todas las x que cumplen la condición $\varphi(x)$, a saber, $\{x / \varphi(x)\}$. Naturalmente, los objetos de esta clase satisfacen la condición que la define, es decir, $(\forall z)\ (z \in \{x / \varphi(x)\} \leftrightarrow \varphi(z))$; donde alentamos la confusión utilizando el símbolo $\in$ para significar la pertenencia a una clase fregeana. Ciertamente hay clases que no se pertenecen a sí mismas, esto es clases x tales que $x \notin x$; por ejemplo, la clase de todas las moscas no es una mosca. Russell se preguntó por la clase de todas las clases que cumplen esa condición, la clase r = $\{x / x \notin x\}$ de todas las clases que no se pertenecen a sí mismas. La suposición de que esta clase existe produce inmediatamente una contradicción. En efecto,
$(\forall z)\ (z \in \{x / x \notin x\} \leftrightarrow z \notin z)$.

[20] A continuación, trataremos la clasificación que hace Tarski de las paradojas. Por ello, abandonamos la anterior definición de antinomia, puesto que, dentro de la clasificación de Quine, las antinomias, frente a las paradojas verídicas y falsídicas, vendrían a ser los casos de paradojas más graves y preocupantes. Es decir, según Quine, las paradojas realmente importantes son las antinomias. Pero, para Tarski todos los casos mencionados son antinomias. Pero existen tres enfoques sobre el asunto.

[21]Es decir, falacias formuladas con la intención de engañar.

[22]Estas son las paradojas falsídicas de Quine.

[23]Estas son las paradojas verídicas de Quine.

> intuitivamente ciertas, una antinomia nos lleva a un sin sentido, una contradicción. Siempre que esto sucede, tenemos que someter nuestras formas de pensamiento a una revisión, para rechazar algunas de las premisas en que creíamos o para mejorar algunas de las formas de argumentos que empleamos. Hacemos esto con la esperanza no sólo de que la antigua antinomia sea dejada de lado sino [para] que no surja otra. Con este fin probamos nuestros sistemas de pensamiento reformados mediante todos los medios posibles y primero que nada, tratamos de reconstruir la anterior antinomia en la nueva estructura (…)"

Como sugiere la cita, Tarski prefiere ponerse al medio de esta pugna entre el enfoque de las antinomias como falacias y el otro enfoque que sostiene que ellas hacen avanzar la ciencia. Su postura instala un tercer enfoque. El enfoque tarskiano califica a la antinomia como *un signo de enfermedad*. De acuerdo a él, en las teorías axiomáticas que se ven afectadas por la contradicción, no basta resolver aisladamente la paradoja, también es necesario trabajar el sistema axiomático entero, de tal manera que nos garantice que no vuelva a surgir otra paradoja similar. El aspecto chocante de las paradojas nos obliga a abandonar la lógica bivalente del sí o no (verdadero o falso, el *tertium non datur*), modificar el principio del tercio excluido, el de no contradicción y hasta el significado del signo de la negación dentro de otra lógica no convencional. [24] [25]

Son estas últimas paradojas las que vendrían a ser el objeto de serio estudio de parte tanto de lógicos y matemáticos como de epistemólogos y filósofos en general. Es aquí que podemos presentar la clasificación que hace Ramsey de las paradojas porque se aplica únicamente a este tipo de paradojas que Quine y Tarski llaman *antinomias*. Frank Plumpton Ramsey (1931: 1-61) en su ensayo titulado *Fundamentos de Matemáticas* dividió a las

[24] Sobre esto último, existe un trabajo de Noelia De Marco (2007) que habla sobre una negación fuerte que aplicada a una proposición indeterminada produce otra también indeterminada, y una negación débil que aplicada a una proposición indeterminada produce una proposición verdadera.
[25] Como ejemplos de estos casos tenemos: la paradoja de *El Mentiroso* de Eubúlides, el sistema de oraciones de la Tarjeta de Jourdain, el 'Libro Antinómico de Tarski', la paradoja de Yablo (1993), las versiones de Haack, las de Quine y la versión reforzada.

paradojas en dos, a saber, ‘paradojas lógicas’ (o de teoría de conjuntos) y ‘paradojas epistemológicas’ (o semánticas). Según Kleene (1974: 51):

> “Ramsey (…) observó que las antinomias lógicas son (aparentemente) detenidas por la jerarquía simple de tipos, y en cuanto a las [paradojas] semánticas, se previene de que surjan dentro del lenguaje simbólico por la ausencia en éste de medios requeridos para referirse a expresiones del mismo lenguaje. (…)”.

A la cabeza de cada tipo de paradojas se encontraban la paradoja de Russell, y la paradoja del *Mentiroso* (las cuales actuaban como condiciones sin las cuales no se garantizaba la consistencia de teorías formales o semánticas, respectivamente). El primer grupo de paradojas involucran esencialmente conceptos de la *Teoría de Conjuntos* (y también conceptos lógico-matemáticos) tales como: clase, pertenencia, número ordinal, procedimiento diagonal, conjunto potencia, etc., y como ejemplos de ellos tenemos: la paradoja de Russell, la de Cantor[26] y la de Burali-Forti[27], por mencionar algunos casos. El

---

[26] La paradoja del máximo número cardinal de la Teoría intuitiva de Conjuntos fue descubierta por Georg Cantor y luego comunicada por éste a Dedekind en una carta escrita en 1899. Con ella se demuestra la inexistencia del conjunto universal U aplicando la prueba por reducción al absurdo. Este es el argumento paradójico de Cantor. Supuesta la existencia del conjunto universal U, por un lado, se plantea que como U incluye a todos los conjuntos, U también incluirá a su propio conjunto potencia Pot (U), es decir,

I) $(\mathrm{Pot}\ (U) \subseteq U)$.

Pero, la cardinalidad de un subconjunto X de Y es siempre menor o igual que la cardinalidad de Y. Ésta es la relación entre inclusión y cardinalidad de dos conjuntos cualesquiera:

$(\forall X)\ (\forall Y)\ ((X \subseteq Y) \rightarrow (\mathrm{Card}(X) \leq \mathrm{Card}(Y)))$.

Por lo tanto, mediante la ejemplificación universal de la anterior fórmula obtendremos la condicional

$(\mathrm{Pot}(U) \subseteq U) \rightarrow (\mathrm{Card}(\mathrm{Pot}(U)) \leq \mathrm{Card}(U))$

y por Modus Ponens entre esta fórmula y la primera (I) de todo el razonamiento, obtenemos la siguiente fórmula:

$\mathrm{Card}(\mathrm{Pot}(U)) \leq \mathrm{Card}(U)$ ……… (1)

Por otro lado, por el Teorema de Cantor que indica que

$(\forall X)\ (\mathrm{Card}(\mathrm{Pot}(X)) > \mathrm{Card}(X))$

tendremos que

$\mathrm{Card}(\mathrm{Pot}(U)) > \mathrm{Card}(U)$………… (2)

Vemos que, tanto (1) como (2) son dos resultados que se contradicen.

[27] La paradoja de Burali-Forti fue publicada por su autor en 1897 en *“Una questione sui numeri transfiniti”*, sin embargo, Georg Cantor en 1895 en *The Founding of the Theory of Transfinite*

segundo grupo de paradojas involucran conceptos “semánticos”, conceptos “epistemológicos” (como el mismo Ramsey propuso) y también conceptos “lingüísticos” (como aseguró originalmente Peano refiriéndose a la paradoja de Richard) tales como: falso, falso de, definible y, en fin, términos empíricos no lógicos. Como ejemplos de este segundo grupo tenemos: la paradoja del Mentiroso y sus variantes, la paradoja de Grelling (o de Weyl) (Ramsey, 1931: 20-21), la de Richard y la de Berry.

1.3. Características de las paradojas

La definición técnica de *paradoja* formulada por García Zárate (2007: 199) es muy útil cuando se trata de investigar a la paradoja del *Mentiroso*. Este caso de paradoja tiene algunas propiedades que pasamos a estudiar en seguida. La primera es la de **autorreferencia**, que es la propiedad de un escrito, oración, proposición u otro ente de similares características de mencionarse a sí mismo mediante sus propios signos aludiendo a una determinada característica suya. Esta propiedad forma parte de muchas paradojas lógicas, pero no todas las oraciones autorreferidas son paradójicas, por ejemplo:

Numbers, ya la había advertido. Es la llamada “paradoja del mayor ordinal”, y al igual que su hermana cantoriana, dicha prueba se construirá por el método de la reducción al absurdo, que demuestra la inexistencia de los conjuntos universales de ordinales.
La paradoja que expondremos a continuación se conoce con el nombre de paradoja “Burali-Fortiana” (Grelling, 1943: 116-117). Por una parte, todo conjunto de números de orden es bien ordenado. Veamos el conjunto de todos los números de orden, que llamaremos Ω; él mismo también deberá ser bien ordenado y, por lo tanto, deberá tener un menor elemento y ya que Ω+1 es un número ordinal, éste (que está incluido en Ω por definición) podrá ser menor, es decir, $\Omega+1 \leq \Omega$. Por otra parte, habíamos demostrado la proposición de que para todo conjunto de números de orden se da uno que no está contenido en él y que es mayor. Refiramos esta proposición al conjunto Ω; se sigue de aquí que existe un número ordinal, el cual es mayor que cualquiera contenido en Ω; este número no es otro naturalmente que el tipo de orden de Ω+1. Por lo tanto, $\Omega+1 > \Omega$. He aquí una abierta contradicción, pues hay un número ordinal que es menor y mayor o igual y mayor que su precedente. (Ferrater Mora, 1994: 2693).

A) “Esta oración tiene cinco palabras”

es una oración autorreferida pero verdadera. Esto ocurre debido a que, si bien esa oración es autorreferente, también es fundada. La paradoja debe ser autorreferente e infundada semánticamente (como ocurre en las paradojas del *Mentiroso*) o, por lo menos, infundada sintácticamente (como ocurre en las paradojas de Russell). Excepcionalmente, es posible formular la paradoja de *El Mentiroso* sin autorreferencia pero esto es discutible (Yablo, 1993).[28]

La autorreferencia está presente en la paradoja del *Mentiroso*. Pero también existen casos de autorreferencia indirecta como ocurre en casos tales como la tarjeta de Jourdain, el libro antinómico de Tarski, y en otras versiones divulgadas por Kripke. La autorreferencia indirecta ocurre cuando se utiliza una sucesión de oraciones cada una de las cuales se refiere a la siguiente mediante la mención de su verdad con excepción de la última que afirma que la primera oración de la sucesión es falsa. Entonces, cuando se comienza a suponer si la primera oración es verdadera o falsa, se pasa de oración en oración hasta llegar a la última que, por mencionar a la primera, provoca un *loop* o *bucle* haciéndonos regresar hasta el inicio del proceso deductivo, pero contradiciéndonos con relación a la suposición inicial. Las oraciones de los sistemas que utilizan la autorreferencia indirecta serán consideradas como las premisas del argumento paradójico. Veamos estos dos

[28] Sin embargo, a decir de Beall (2001) la paradoja de Yablo sí posee autorreferencia. Por un lado, Yablo sostiene que, a diferencia de otras versiones del mentiroso, esta paradoja no contiene autorreferencias, dado que cada oración versa sobre las que la siguen y nunca sobre sí misma. Sin embargo, por otra parte, toda oración de la paradoja parece autorreferencial implícitamente, dado que “todas las oraciones siguientes” debe entenderse en cada caso como “todas las oraciones que siguen a ésta”. Esto último es lo que sostiene Beall para probar que la referida paradoja sí es autorreferente.

ejemplos siguientes que presentan dos sistemas de oraciones. El primer sistema S_1 contiene 4 oraciones y el segundo sistema S_2 contiene 3 oraciones. Para poder obtener situaciones paradójicas será suficiente suponer la verdad o falsedad de (1) para llegar a concluir lo contrario a lo que se ha supuesto. Sin embargo, no es necesario comenzar a hacer suposiciones con (1). Podemos hacer suposiciones con (2), (3) o (4) si fuera el caso.

SISTEMA 1 (S_1)	**SISTEMA 2 (S_2)**
(1) La oración (2) es verdadera.	(1) La oración (2) es verdadera.
(2) La oración (3) es verdadera.	(2) La oración (3) es verdadera.
(3) La oración (4) es verdadera.	(3) La oración (1) es falsa.
(4) La oración (1) es falsa.	

El primer sistema oracional de 4 oraciones y el segundo sistema oracional de 3 oraciones serán situaciones en las que se generan tantas paradojas como oraciones existan.

Como podemos apreciar, la propiedad de la autorreferencia se cumple para las paradojas que juegan con conceptos semánticos tales como el de la verdad.

En segundo lugar, tenemos la **circularidad**. La circularidad es una especie de defecto de las que adolecen algunas definiciones, explicaciones o demostraciones. Según Tarski, al respecto de una buena definición (aquella relación bicondicional que se establece entre el *definiendum* (la palabra que se quiere definir, lo desconocido) y el *definiens* (las palabras que utilizamos para definir el *definiendum*, lo conocido)): “En particular, no deberá aparecer en el *definiens*, ni la constante que se trata de definir, ni ninguna expresión definida con su ayuda; en tales casos la definición no sería correcta, contendría un defecto al que denominamos círculo vicioso en la definición” (1951: 53). Veamos un caso:

(*definiendum*)	↔	(*definiens*)
Un burro	es	un asno
Un asno	es	un onagro
Un onagro	es	un jumento
Un jumento	es	un pollino
Un pollino	es	un burro

En esta situación, se está tratando de definir una primera cosa (un burro) en función de otra segunda cosa (un asno) que, a su vez, se define en función de un tercero (un onagro) que, a su vez, se define en un función de un cuarto (un jumento) que, a su vez, se define en un función de un quinto (un pollino) que supone que ya está definida la primera cosa (un burro), por lo que volvemos al punto de partida, como si estuviéramos describiendo un círculo.

En el caso de la paradoja del mentiroso, si tenemos la oración A que dice que ella misma es falsa, es decir,

(A) A es falsa,

entonces, si A es falsa, entonces A es verdadera, y si A es verdadera, entonces A es falsa, y si A es falsa, entonces A es verdadera, y si… y entramos, así, en un regreso *ad infinitum*.

Formalicemos esto que hemos llamado *regreso al infinito*. Según García Zárate, 'a' será una paradoja cuando

$(Va \rightarrow Fa) \wedge (Fa \rightarrow Va)$

o, en términos abreviados, cuando

$(Va \leftrightarrow Fa)$

Esta incómoda situación argumental se origina cuando suponemos que, por ejemplo, A se deduce de B, B se deduce de C, C se deduce de D, … , X se deduce de Y, Y se deduce de Z y Z se deduce de A. Por lo tanto, A se deduce de A.

Formalmente diríamos:

B // ∴ A,

C // ∴ B,

D // ∴ C,

E // ∴ D,

F // ∴ E,

G // ∴ F

, … ,

Y // ∴ X,

Z // ∴ Y,

A //∴ Z.

Por lo tanto,

A //∴ A.

Y volvemos a estar al principio, pero estrictamente nunca nos detenemos. La anterior sucesión de argumentos cada uno de los cuales parte de una única premisa que es la conclusión del siguiente argumento, se reduce a una única expresión, a saber, una que refleja el *círculo vicioso*, según la cual es un error de razonamiento comenzar a deducir a partir de lo que es preciso demostrar. Esta expresión es

A // ∴ A

o

$A \rightarrow A$

Esto mismo ocurre en las paradojas tipo 'Mentiroso' en las que podemos llegar a deducir, mediante la conmutatividad y el silogismo hipotético puro,[29] que $(Va \rightarrow Va) \wedge (Fa \rightarrow Fa)$ partiendo de $(Va \rightarrow Fa) \wedge (Fa \rightarrow Va)$, donde a ={"Esta oración es falsa"}.

Pero, la circularidad no solo es un atributo de las definiciones y los argumentos (o las demostraciones) sino que también lo es de los conceptos. Por ejemplo, el concepto de verdad, (tal y como fue enfocado por Alfred Tarski considerándolo como restricción clave de una consistente teoría semántica de la verdad a la paradoja del *Mentiroso*) resulta circular bajo el análisis de Anil Gupta y Nuel Belnap (Gupta y Belnap, 1993). Además, no solo la verdad resulta ser un concepto circular. Ejemplos de otros conceptos circulares son: referencia, satisfacción, designación, definición, y otros. Resulta una oportuna coincidencia que gran parte de estos conceptos circulares aparezcan en la formulación de algunas paradojas lógicas. Por ejemplo, la versión de Yablo de la paradoja del *Mentiroso* hace uso tan sólo de la referencia; además, las versiones de Tarski de la paradoja del *Mentiroso* utilizan los conceptos de satisfacción, designación y definición. Subyace a la propuesta de Belnap y Gupta la idea de que hay dos tipos de conceptos: los conceptos ordinarios, cuyas condiciones de aplicación nos permiten separar en dos grupos excluyentes a sus objetos: los objetos a los que se aplican y los objetos a los que no se aplican[30]; y los conceptos circulares, que no tienen condiciones de aplicación definida[31]. En este último caso

[29] Regla del silogismo hipotético puro: $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$.
[30] Por ejemplo, el concepto "pesado" determina el ámbito de cosas pesadas y no pesadas.
[31] Por ejemplo, el concepto "nada" no determina el ámbito de cosas que nada son y cosas que no son nada. En este caso, el ámbito de cosas que nada son no tiene sentido porque si algo es una cosa automáticamente deja de ser nada. Algo semejante ocurre con el concepto "infinito". Este concepto no implica una dicotomía entre lo que es finito y lo que es infinito porque lo infinito puede ser entendido como una colección infinita tanto de cosas finitas como infinitas. Por ejemplo, la

necesitamos una conjetura inicial acerca de la extensión del concepto circular para decidir cuáles son los objetos a los que se aplica y cuáles no. Podría suceder en el mejor de los casos, que objetos de un grupo se encuentren dentro del grupo que no les corresponde, o en el peor de los casos, que esos objetos tengan todas las razones para estar tanto en un grupo como en otro sin importar la naturaleza opuesta de estos grupos. De acuerdo a Eduardo Barrio (2007): "(…) la extensión de los conceptos circulares sólo puede ser establecida de manera hipotética y bajo ciertas circunstancias esas hipótesis pueden generar un comportamiento patológico. (…)".

En tercer y último lugar, la **contradicción** se configura como el ingrediente principal que toda paradoja debe poseer. Como ya hemos dicho antes, toda paradoja es una contradicción, pero no toda contradicción es una paradoja. Habría que agregar que, si bien una contradicción es una proposición molecular que es falsa para cualquier valor de verdad de sus proposiciones componentes, la paradoja tiene albergado un problema en lo que toca a la determinación de su valor de verdad. Estudiemos la paradoja de *El Mentiroso*:

a. a es falsa

, formalmente,

a. F(a)

---

colección de números naturales tiene elementos finitos pero la colección de distintos tipos de números tiene finitos elementos infinitos.

Si suponemos que a es verdadera, es decir, $V(a)$, se concluye que $F(a)$

b. $V(a) \rightarrow F(a)$

Dado que se contradice la suposición, tenemos que concluir que

c. $\sim V(a)$

Pero, si suponemos que $F(a)$, entonces se concluye que $V(a)$

d. $F(a) \rightarrow V(a)$

puesto que se contradice la suposición, tenemos que concluir que

e. $\sim F(a)$

además, en base a la equivalencia $\sim F(a) = V(a)$, obtenemos que

f. $V(a)$

Esto significa que la paradoja es un enunciado

-que si es verdadero, entonces es falso. (Por b.)

-que si es falso, entonces es verdadero. (Por d.)

-que no es ni verdadero ni falso. (Por c. y e.)

-que es verdadero y falso. (Por f. y a.)

Por este motivo podemos entender lo que dice Kripke en *Esbozo de una teoría de la verdad*:

> "Aun los expertos más sutiles pueden ser incapaces de evitar proferencias que conducen a paradojas. Se cuenta que Russell preguntó en una ocasión a Moore si siempre decía la verdad y que consideró la respuesta negativa de Moore como la única falsedad emitida por Moore. No hay duda de que nadie ha tenido un olfato más fino para las paradojas que Russell. Sin embargo, es obvio que no se percató de que si, como él pensaba, todas las otras proferencias de Moore eran verdaderas, la respuesta negativa de Moore no sólo era falsa, sino paradójica". (Kripke, 1997: 112)

Cuando Kripke dice que el enunciado de Moore no solo era falso sino paradójico lo que nos está diciendo es que la paradoja es un ente lingüístico que no tiene un valor de verdad específico y determinado.

CAPÍTULO II

PARA UNA CUANTIFICACIÓN SUSTITUCIONAL

> "4.461 La proposición muestra lo que dice; la tautología y la contradicción, que no dicen nada.
> La tautología carece de posibilidades veritativas, dado que es incondicionalmente verdadera; y la contradicción no es verdadera en condición alguna.
> Tautología y contradicción carecen de sentido.
> (Como el punto del que parten dos flechas en dirección opuesta.)
> (Nada sé, p. ej., sobre el tiempo si sé que llueve o no llueve.)"
>
> **LUDWIG WITTGENSTEIN**

Tras haber explorado el concepto de *paradoja* ahora nos proponemos fundamentar la cuantificacional sustitucional la misma que nos ubicará en el terreno de la lógica de segundo grado. Esta parte de la investigación inicia con preocupaciones ontológicas pero concluye con resultados lógicos prácticos.

La ontología como disciplina de la filosofía se encarga de investigar, elucidar y problematizar el tema del ser: lo que existe, lo que hay en el mundo. Mediante el lenguaje natural es posible rastrear lo que existe en la realidad en tanto que una de las funciones del lenguaje consiste en expresar algún conocimiento sobre el mundo externo, y este conocimiento solo tiene sentido si ya se ha establecido una realidad de la cual provenga. Pero, el lenguaje que se especializa en ser objetivo (reflejando el mundo tal como es) es el lenguaje científico. Por ende, será en este lenguaje donde podremos abrir una posible vía para la investigación del ser.

El lenguaje científico puede ser entendido como un lenguaje formalizado. Esto significa que tendrá las características de: claridad, univocidad, rigor, especificidad, etc. Justamente, estas son las características propias del lenguaje lógico. De ahí que la lógica pueda servir como base para fundamentar el ámbito de lo existente en el campo de la ciencia.

Aquel elemento que hace alusión al ser (la existencia, lo que hay o lo que es) es el cuantificador existencial, según lo dicho por Ferrater Mora en *Sobre el llamado "compromiso ontológico"*:

> "Si se pregunta "¿Qué hay en la mesa redonda?", puede responderse: "Hay una rosa roja". Ahora bien, (…) los lógicos y filósofos (…) entienden esta respuesta en términos de cuantificación existencial, hasta el punto de que expresan (o simbolizan) del mismo modo "Hay una rosa roja", "Hay algo que es una rosa roja", "Hay por lo menos una rosa roja" y hasta, si nos apuran "Algunas rosas son rojas" y "Existe una rosa roja" (…)". (1967: 190)

De manera más clara, Roger Scruton en *Filosofía Moderna* nos dice algo similar:

> "(…) la existencia es un cuantificador: decir que *hay* una montaña dorada es decir que los conceptos *dorada* y *montaña* se instancian por algún objeto. (Más simplemente, es decir que hay una *x,* tal que es dorada y una montaña). Todas las preguntas acerca del Ser se pueden reducir a preguntas respecto a cuantificadores. ¿Sobre qué clases de entidad se extiende el rango de nuestros cuantificadores?" (2003: 143)

Entonces, será a partir del análisis del significado o interpretación de los cuantificadores donde dará inicio la investigación del tema del ser con la pretensión de llegar a fundamentar un tipo de cuantificación que nos sea de ayuda para próximas derivaciones.

2.1. Cuantificadores

El cuantificador es un símbolo empleado en el contexto de la lógica predicativa para determinar el conjunto de individuos que satisface un predicado. Su mismo nombre alude a la idea de contar, de determinar la cantidad de elementos que se mueven bajo un dominio dado. Se conocen como cuantificadores "*estándar*" a dos tipos específicos de términos: el cuantificador universal y el cuantificador existencial. Existe un cuantificador derivado que es el descriptor, y, finalmente, incluso se puede hablar específicamente de un individuo, a lo más un individuo, y al menos un individuo, etc. Veamos estos casos uno por uno.

2.1.1. Cuantificador universal

El primer cuantificador se simboliza "$\forall x$" y se asocia con los términos "todos", "cada uno", "cualquiera", "los", "el 100%" y otros de esta clase (se dice que el símbolo mismo, es decir, la "A" invertida proviene del inglés "All" que significa "todo"). Además, un cuantificador universal antepuesto a una función proposicional indica que la totalidad de los miembros de un conjunto –o dominio de interpretación– satisface un predicado (García Zárate, 2007: 225). Por ejemplo, el siguiente enunciado

(1) Todos son lógicos

se representa así

(1') $(\forall x)\ L(x)$

Además, se puede observar que dicho cuantificador equivale a la siguiente conjunción sucesiva:

$(\forall x)\ L(x) \leftrightarrow L(a) \land L(b) \land L(c) \land L(d) \land ...$

Esta fórmula refleja la manera en la que funciona el mencionado símbolo: busca referirse a aquellos objetos que, simultáneamente, cumplan una propiedad. (Haack, 1982: 61)

2.1.2. Cuantificador existencial

El segundo cuantificador se simboliza "∃x" y alude a expresiones del tipo "algunos", "hay", "alguien", "existe", "ciertos", "varios", "muchos", "pocos", "el 30%" etc. (se dice que el símbolo mismo, es decir, la "E" invertida proviene del inglés "Existence" que significa "existencia"). Asimismo, un cuantificador existencial colocado ante una función proposicional cuya variable resulte ligada por este cuantificador señala que el conjunto de individuos que satisface un predicado contiene al menos un miembro (García Zárate, 2007: 225). Por ejemplo,

(2) Algunos son filósofos

se representa así

(2') $(\exists x)\ F(x)$

Además, se puede observar que dicho cuantificador es igual a una disyunción sucesiva

$(\exists x)\ F(x) \leftrightarrow F(a) \lor F(b) \lor F(c) \lor F(d) \lor \ldots$

Esta simbolización representa el funcionamiento de dicho operador: sirve para hacer alusión a varios objetos que pueden o no pueden poseer un mismo atributo. (Haack, 1982: 61)

Resulta apropiado mencionar que los cuantificadores “estándar” o “básicos” pueden interdefinirse mediante la regla de intercambio de cuantificadores (IC) que enseguida mencionamos:

1. $(\forall x)\ F(x) \quad \leftrightarrow \quad \sim (\exists x) \sim F(x)$
2. $(\forall x) \sim F(x) \leftrightarrow \quad \sim (\exists x)\ F(x)$
3. $(\exists x)\ F(x) \quad \leftrightarrow \quad \sim (\forall x) \sim F(x)$
4. $(\exists x) \sim F(x) \leftrightarrow \quad \sim (\forall x)\ F(x)$

Esta interrelación sirve para indicar que estos símbolos se hayan vinculados entre sí. Específicamente, para pasar de una proposición cuantificada a su equivalente se niegan tanto el cuantificador como la función proposicional sobre la que opera, y también se permutan los símbolos “$\forall$” y “$\exists$” entre sí.

2.1.3. Descripción definida

Además de los ya mencionados cuantificadores, en el lenguaje de primer orden se puede plantear al descriptor como un cuantificador derivado construido en base a los, ya mencionados, cuantificadores estándar (Frápolli, 2007: 155). La descripción definida es un artificio ideado por Russell para reelaborar un enunciado anulando toda expresión involucrada en el enunciado original que pretenda nombrar una entidad de naturaleza controvertida, de tal manera que no puede seguir pensándose que la significatividad de un enunciado presuponga el ser de aquella entidad (recordaremos esto más adelante cuando mencionemos la cuantificación objetual de Quine)[32]. Además de ser una estrategia argumentativa, la descripción definida tiene la propiedad de hacer referencia solo a un individuo específico. En términos formales, el descriptor que se simboliza mediante "ι" se lee "el único individuo que (tal-y-cual)". Pongamos un ejemplo:

(3) El hombre que viste ayer

este enunciado, usando los cuantificadores estándar, se simboliza así:

[32] En palabras de Lorenzano: "¿Qué se niega cuando se dice que no existe Pegaso, ni unicornios, o no hay ningún rey de Francia? ¿Cómo hablar de un objeto inexistente, si no existe? La estrategia de Russell es transformar esas expresiones en otras en las cuales desaparece la referencia a los objetos nombrados. Transcribe, entonces, "El actual rey de Francia", que en su interpretación lógica es un existencial singular del que se supone que tiene referencia directa, en un existencial general que diga "Algo es rey de Francia" -en notación lógica $(\exists x)\ P(x)$-. De esta manera la referencia directa desaparece, pues la expresión ya no se refiere a un presunto rey de Francia, sino a que algo –una variable "x" ligada existencialmente– sea rey de Francia o Pegaso." (2004)

(3')$(\exists x)(\forall y)$ $[P(y)\leftrightarrow(y=x)]$, donde "ser visto ayer" será considerado como la propiedad P, y se lee:

"Existe *x* para todo *y* tal que *y* tiene la propiedad *P* si y solo si *y* es *x*".

Además, utilizando el "descriptor" esta expresión puede abreviarse así:

(3'') ιy P(y)

que se lee:

"El único hombre *y* que viste ayer".[33]

Debemos mencionar que la expresión anterior analizada no es una proposición sino un sujeto, un nombre, una constante individual algo especial a la que le falta agregarle una propiedad para que se convierta en una proposición de la cual quepa predicar con sentido que es verdadera o falsa. Por ello, debemos advertir que el operador iota (ι) no es un cuantificador existencial. Esta idea la podemos encontrar en Priest quien afirma que "(…) las descripciones son nombres, no cuantificadores. Esto es, se refieren a objetos (…)" (2006: 43). Es decir, la descripción definida *per se* no puede ser considerada al mismo nivel que un cuantificador, porque es fácil darse cuenta que cuando "$\forall$" y "$\exists$" se aplican a

[33]Frápolli lo explica del siguiente modo: "Una descripción como "El hombre que viste ayer" sirve para decir que hay un hombre y solo uno al que tú viste ayer, esto es, que hay exactamente un individuo que cumple esa condición, y esto se expresa combinando el cuantificador existencial, que corresponde a la parte de "hay uno", y el cuantificador universal, que corresponde a la parte de "sólo uno" (…)". (2007: 155)

funciones proposicionales se generan proposiciones, pero cuando "*ι*" se aplica a las mismas funciones proposicionales no produce proposición alguna que sea capaz de ser considerada verdadera o falsa, sino que solo origina nombres de ciertos objetos particulares. Quizás por este motivo resulte difícil aceptar que la descripción definida pueda ser considerada una constante lógica como lo son los cuantificadores normalmente conocidos o los operadores lógicos.

2.1.4. Cuantificación específica

Ahora bien, a estas alturas que ya sabemos cómo decir algo sobre un solo individuo podremos investigar cómo decir lo mismo pero sobre cierto número específico de individuos. Estudiemos los siguientes casos, dispuestos en orden pedagógico, y encontrados en el texto *Introducción a la lógica* de GAMUT (2004: 110-111).

0) No hay x tales que Ax

0*) $\sim(\exists x)\ A(x)$

1) Hay al menos un x tal que Ax

1*) $(\exists x)\ A(x)$

2) Hay al menos dos x (diferentes) tales que Ax

2*) $(\exists x)\ (\exists y)\ [x \neq y \wedge A(x) \wedge A(y)]$

3) Hay al menos tres x (diferentes) tales que Ax

3*) $(\exists x)\ (\exists y)\ (\exists z)\ [(x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge A(x) \wedge A(y) \wedge A(z)]$[34]

4) Hay a lo mucho un x tal que Ax

4*) $(\forall x)\ (\forall y)\ \{[A(x) \wedge A(y)] \rightarrow x=y\}$

5) Hay a lo mucho dos x (diferentes) tales que Ax

5*) $(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ \{[A(x) \wedge A(y) \wedge A(z)] \rightarrow (x=y \vee x=z \vee y=z)\}$

6) Hay a lo mucho tres x (diferentes) tales que Ax

6*) $(\forall w)\ (\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ \{[A(w) \wedge A(x) \wedge A(y) \wedge A(z)] \rightarrow (w=x \vee w=y \vee w=z \vee x=y \vee x=z \vee y=z)\}$[35]

7) El único x tal que Ax

7*) $(\exists x)\ (\forall y)\ [A(y) \leftrightarrow y=x]$

8) Los únicos dos x tal que Ax

8*) $(\exists x)\ (\exists y)\ \{\ x \neq y \wedge (\forall z)\ [\ A(z) \leftrightarrow (\ z=x \vee z=y\ )\ ]\ \}$

[34] En estos tres casos (del 1) al 3)) lo que se dice es que “Hay al menos”. Específicamente, en este caso 3), se habla sobre “siquiera tres diferentes elementos”, es decir, “mínimamente tres objetos”.

[35] En estos 3 casos consecutivos (del 4) al 6)) lo que se dice es que “Hay a lo mucho”. Específicamente, en este caso 6), se habla sobre “a lo más tres objetos”, es decir, “máximamente tres elementos”.

9) Los únicos tres x tal que Ax

9*) $(\exists x)\ (\exists y)\ (\exists z)\ \{\ x\neq y \wedge x\neq z \wedge (\forall w)\ [\ A(w)\leftrightarrow (\ w=x \vee w=y \vee w=z)\ ]\ \}$ [36]

2.1.5. Balance

Como hemos podido ver, los cuantificadores nos ayudan a establecer un ámbito del universo de individuos a los cuales se le aplica algún predicado. Podemos hablar de: todos, algunos, al menos uno, a lo más uno, sólo uno, sólo dos, etc. y decir que estos cumplen con una propiedad determinada. Así, pues, parece plausible sostener que los cuantificadores son vehículos para establecer la existencia, al menos numérica, de ciertos objetos sugeridos por el significado de la proposición que los alberga. Esta idea es interesante porque permite vislumbrar la relación entre cuantificadores y ontología o, en otros términos, entre lógica y realidad. Mejor aún, es enterarnos que, un filósofo-lógico de la talla de Quine, tuvo ciertos reparos en relación a las posibilidades de que la lógica pueda ser utilizada para expresar conceptos básicos acerca de la metafísica u ontología. Este será el tema de la próxima sección.

2.2. La interpretación de los cuantificadores

En la explicación anterior sobre los cuantificadores se han tomado ciertas licencias que ahora deben ser problematizadas. El asunto que se pasó por alto fue acerca del modo en el que los cuantificadores son leídos o entendidos. Este es un tema controversial que asoma

[36] Desde el 7) hasta el 9), se han mostrado casos donde se aluden a cantidades exactas de individuos que tienen tal o cual propiedad.

cuando se trata de fijar el tipo de universo que supone el uso y comprensión de los mismos cuantificadores. A este respecto el filósofo norteamericano Willard van Orman Quine fue pionero al llamar la atención sobre esta materia indicando que involucra el establecimiento de cierto compromiso metafísico u ontológico desde la lógica. Básicamente, la cuestión estriba en determinar: ¿qué presupuestos envuelve el significado de una fórmula cuantificada?, ¿qué es aquello que estamos cuantificando cuando se usa la fórmula, por ejemplo, $(\forall x)\ P(x)$?, ¿serán objetos como números, nombres o términos?, ¿podrían tratarse de creencias, conceptos, propiedades o proposiciones? En relación a este problema se han establecido dos tipos de interpretaciones sobre los cuantificadores: la objetual y la sustitucional. En lo que sigue, vamos a explicar cada una de estas consideraciones filosóficas sobre la cuantificación.

2.2.1. La interpretación objetual y el relativismo ontológico

Esta visión de los cuantificadores ha sido sustentada por Davidson pero aparece con mayor énfasis en Quine. La interpretación objetual afirma que "$(\forall x)\ P(x)$" significa que todo objeto del universo tiene la propiedad P; mientras que "$(\exists x)\ P(x)$" significa que hay al menos un objeto del universo que es P. [37]

[37] Salguero propone otra explicación de este asunto: "Entendemos por cuantificación objetual la interpretación clásica según la cual un enunciado cuantificado existencialmente es verdadero si y sólo si podemos mostrar un individuo perteneciente al universo de nuestro discurso tal que este individuo tenga la propiedad o propiedades que se le asignaban a la variable ligada. Esto es, si y sólo si hay realmente algo que es como se declara en el enunciado que cae bajo el alcance del cuantificador. Paralelamente, un enunciado cuantificado universalmente es verdadero según la interpretación objetual de la cuantificación si y sólo si podemos mostrar que todos los individuos del dominio tienen la propiedad o propiedades que se le asignaban a la variable ligada. Es decir, si y sólo si todos los individuos del universo de discurso son como se declara en el enunciado que cae bajo el alcance del cuantificador." (2010: 126)

Notemos que esta lectura del cuantificador apela a los valores de las variables que son objetos incluidos en el ámbito significativo de las variables, de ahí que esta interpretación se llame "objetual" por hacer referencia a objetos de los que hablan las teorías científicas, es decir, todo queda definido por el mismo lenguaje que se considera. Recordemos las palabras de Quine:

> "Creo que nuestra aceptación de una ontología es en principio análoga a nuestra aceptación de una teoría científica, de un sistema de física, por ejemplo: en la medida, por lo menos, en que somos razonables, adoptamos el más sencillo esquema conceptual en el cual sea posible incluir y ordenar los desordenados fragmentos de la experiencia en bruto. Nuestra ontología queda determinada en cuanto fijamos el esquema conceptual más general que debe ordenar la ciencia en el sentido más amplio; y las consideraciones que determinan la construcción razonable de una parte de aquel sistema conceptual – la parte biológica, por ejemplo, o la física – son de la misma clase que las consideraciones que determinan una construcción razonable del todo. Cualquiera que sea la extensión en la cual puede decirse que la adopción de un sistema de teoría científica es una cuestión de lenguaje, en esa misma medida – y no más – puede decirse que lo es también la adopción de una ontología." (Quine, 2002: 56)

Esto mismo asegura Scruton quien afirma que con esta idea Quine nos está invitando a ver el lenguaje como un tipo de teoría, cuyo objetivo es ordenar la experiencia generando predicciones confiables. Esta teoría nos obliga a "cuantificar" ciertos objetos y así ligar las variables unidas a los predicados: como cuando decimos que *hay* elefantes. Sin embargo, en algunos casos es posible usar cuantificadores, aun cuando no sean indispensables para obtener la mejor teoría de la experiencia. (Por ejemplo, se pueden cuantificar entidades de ficción, como que "Hay un príncipe indeciso en Dinamarca". Para describir el mundo conocido, eso no es necesario). Su uso se restringe a cuando, en el curso de construir una teoría, ésta nos obliga a cuantificar algún predicado. Sin embargo, la posición ontológica a la que arriba Quine sería de tipo coherentista porque la existencia para él sería "teórico-relativa". Podemos decir que existen los elefantes, las brujas o los dioses, en forma relativa a la teoría que los requieren. Sólo se puede especificar lo que existe en el contexto de una teoría. Y la teoría que es útil para un objetivo puede no serlo para otro. (Scruton, 2003: 143-144). Desde la perspectiva de Piscoya:

> "W. O. Quine destaca la necesidad que tienen los seres humanos de explicar los objetos de su experiencia en función de sus necesidades prácticas y teóricas.
>
> Para lograr este objetivo construyen lenguajes y esquemas conceptuales que afirman la existencia de objetos físicos, en unos casos, y de objetos ideales en otros casos. De esa manera, por ejemplo, para explicar los objetos físicos que observamos o que diseñamos, Platón sostuvo la tesis de la existencia de un mundo ideal de objetos matemáticos, respecto de los cuales los objetos del llamado *mundo real* son proyecciones o sombras. Consecuentemente, dentro de la tesis de Platón, si se pregunta qué es lo que realmente existe, la respuesta sería los objetos ideales del reino de las formas. Según Quine, no cabe discutir con Platón qué objetos son los que realmente existen, pues cada filosofía y cada teoría científica inventa los objetos que más se ajustan a la naturaleza de su planteamiento, de la misma manera como los llamados hombres primitivos crearon las divinidades y entidades sobrenaturales que les permitieron explicar mejor los hechos de su experiencia, como los terremotos, las tormentas, la guerra, el amor, etc. Ese sería el sentido utilitario o pragmático de recurrir a divinidades como Zeus, Poseidón, Vulcano, Marte, Afrodita, etc.
>
> Sin embargo, no solo el mundo de las ideas de Platón sería un mito según el punto de vista de Quine, también son construcciones míticas los objetos que estudian las teorías científicas contemporáneas, como la mecánica cuántica o la biología molecular. Así, los conceptos de electrón, protón, neutrón, virus y retrovirus no serían otra cosa que mitos más eficientes que los griegos, romanos o amazónicos para explicar y predecir la experiencia humana en la sociedad contemporánea. Y esto sería así porque según Quine no hay manera de conocer la realidad tal y como es independientemente de nuestra experiencia. Consecuentemente, todo lo que podemos hacer es construir mitos, los cuales vendrían a ser las entidades físicas y matemáticas que nos ayudan a conducirnos en el mundo que experimentamos de la manera más útil posible. Desde esta perspectiva, la construcción de objetos míticos es una función inherente a la actividad racional y lo único que diferencia a las teorías científicas contemporáneas de las leyendas amazónicas o maorís es que las primeras son construcciones más sofisticadas y más útiles, razón por las que habría que preferirlas" (Piscoya,1999:37-38)

Reforcemos este punto de "relatividad ontológica" con García Encinas:

> "(…) Quine es (…) poderoso ejemplo de cómo la lógica es guía en metafísica. La lógica clásica-simbólica (…) está en la base de todos sus principios y tesis ontológicos. La lógica (…) es (…) un pilar del *corpus* de conocimiento general. La máxima de Quine, según la cual, ser es ser el valor de una variable ligada, a pesar de su folclórica formulación, no es más que el principio según el cual uno se compromete con todas aquellas entidades que aparecen como sujeto de predicación en los enunciados de la teoría –del tipo que ésta sea, matemático, ético, físico… - que uno acepta como verdadera. Por ejemplo, si en el lenguaje

lógico uno trata como variables las letras para predicados (P, Q, R …) o para enunciados (p, q, r, s …) entonces se compromete con una ontología de objetos abstractos, propiedades, relaciones y proposiciones. (…) La ontología es relativa a una teoría, a un lenguaje. (…)" (García Encinas, 2006: 98-99)

Como vemos en la cita anterior, la idea base presentada por Quine para sustentar esta interpretación se encuentra expresada en su eslogan: "Ser es ser el valor de una variable", con el cual se introduce el criterio del compromiso ontológico que es un test acerca de qué tipos de cosas hay según una teoría. Este criterio afirma que: "Las entidades de una clase dada son asumidas por una teoría si y solo si alguna de ellas ha de ser incluida entre los valores de las variables para que los enunciados afirmados en la teoría sean verdaderos". Esto quiere decir que la realidad vendrá determinada por aquellos objetos que resulten ser los valores de las variables contenidas en los teoremas de la teoría científica y que los hacen verdaderos. Sobre este punto Quine nos advierte la distinción entre establecer lo que sabemos que hay y lo que una teoría dice que hay:

"¿Cómo podemos juzgar entre ontologías rivales? Evidentemente, la respuesta no viene dada por la fórmula semántica "Ser es ser el valor de una variable"; esta fórmula, por el contrario, sirve más bien para examinar la conformidad de una observación dada o de una doctrina con un determinado criterio ontológico previo. Si atendemos a las variables ligadas en conexión con la ontología no es para saber lo que hay, sino para saber lo que una determinada observación o doctrina, nuestra o de otro, *dice* que hay; y éste es muy precisamente un problema de lenguaje, mientras la cuestión ¿qué hay? es de muy otro linaje" (Quine, 2002: 55)

Para finalizar, pongamos algunos ejemplos del uso de la cuantificación objetual:

1) Los ángulos opuestos de algunos polígonos son iguales.

1*) $(\exists x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ \{[P(x) \wedge A(yx) \wedge A(zx) \wedge O(yz)] \rightarrow y=z\}$,

donde P=ser polígono, A=ser ángulo de, O=ser el opuesto de.

Esta fórmula se lee:

“Para algunos x, para todo *y* y z, tal que, si x es un polígono, *y* es ángulo de x, z es ángulo de x, y los ángulos *y* y z son opuestos, entonces *y* y z son iguales”.

(Ejemplo sacado de Llanos (2003: 205-206))

2) *Principio de Acción-Reacción*

Para toda fuerza existe otra fuerza igual y opuesta.

2*) $(\forall x)\{ [F(x) \rightarrow (\exists y) [F(y) \wedge y=x \wedge Oyx)] \}$,

donde F=ser fuerza, O=ser opuesta a.

Esta fórmula se lee:

“Para todo x, tal que si x es fuerza, entonces existe un y, tal que y es fuerza, igual y opuesta a x”.

(Ejemplo sacado de Llanos (2003: 209))

3) Rommel es el zorro del desierto.

3*) $(\exists x) (\{Z(x) \wedge (\forall y) [Z(y) \rightarrow y=x] \} \wedge x=r)$

Esta fórmula se lee:

“Al menos alguien era el zorro del desierto, a lo sumo alguien era el zorro del desierto y ese alguien era Rommel”.

(Ejemplo sacado de Tomasini (2004: 90))

4) El lucero de la mañana es el lucero de la tarde.

4*) $(\exists x) (\exists z) (\{ [L(x) \wedge (\forall y) (L(y) \rightarrow x=y\ ] \wedge [T(z) \wedge (\forall w) (T(w) \rightarrow z=w)] \} \wedge x=z)$

(Ejemplo sacado de Tomasini (2004: 143))

5) Hay un único ser que todo lo engendra o transforma, pero que no es engendrado ni transformado.

5*) $(\exists x) \{ (\forall y) [(\forall z) (E(xz) \vee T(xz)) \leftrightarrow x=y] \wedge \sim(\exists v) [v \neq x \wedge (E(vx) \vee T(vx))] \}$

(Ejemplo sacado de Manzano y Huertas (2004: 276))

2.2.2. La interpretación sustitucional

En contraste con la interpretación objetual, tenemos la interpretación sustitucional de los cuantificadores defendida por Benson Mates y Ruth B. Marcus. Esta interpretación asegura que "$(\forall x)Px$" significa que todo término del lenguaje L que sea una instancia aceptable de sustitución para x produce, cuando se lo sustituye por x en esa fórmula, una oración verdadera (en otras palabras, significa que todas las instancias de "P…" son verdaderas); mientras que "$(\exists x)Px$" significa que hay al menos un término de L que cuando se lo sustituye por x en esa fórmula da como resultado una oración verdadera (o sea, significa que al menos una instancia de sustitución de "P…" es verdadera). En otras palabras Salguero nos dice lo mismo:

> "La interpretación sustitucional de la cuantificación (…) supone que un enunciado cuantificado existencialmente es verdadero si y sólo si es verdadero algún caso de sustitución de la variable ligada por un nombre propio. De igual modo, será verdadero un enunciado cuantificado universalmente si y sólo si todas las instancias del enunciado que cae bajo el alcance del cuantificador obtenidas al sustituir la variable ligada por un nombre propio son verdaderas." (2010: 126)

Igualmente, con otros términos García Marqués nos dice algo semejante:

> "Según la interpretación substitucional de las variables, debemos admitir que hay objetos a los que nos referimos o que son los valores de dichas variables. Ciertamente, según Quine, no sabemos qué son "en sí" tales objetos, pero nosotros, con nuestro lenguaje, hablamos de ellos y los suponemos. Es decir, dado un lenguaje determinado, estamos dispuestos a admitir como objetos aquellos que puedan sustituir a nuestras variables" (2006: 238)

Se puede constatar que en esta lectura se apela a los sustituyentes de las variables que son expresiones por las que pueden ser sustituidas las variables, de ahí el nombre de sustitucional. Podemos advertir que esta interpretación no involucra una posición ontológica porque las condiciones de verdad de las instancias apropiadas de sustitución no implican algún esclarecimiento sobre la realidad. Asimismo, es preciso indicar que con esta cuantificación nos valemos de una interpretación que atribuye denotaciones a constantes que pertenecen al vocabulario de un lenguaje lógico determinado. Por ello, se dirá que "Todos son amigables" es verdadera solo en caso de que toda sustitución del espacio en blanco de "… es amigable" por el nombre de un ser humano individual resulte en una oración verdadera; y "Alguien es amigable" es verdadera solo si hay al menos un nombre tal que al colocarlo en el espacio en blanco de "… es amigable" resulte en una oración verdadera.

Si comparamos esta interpretación con la visión objetual de los cuantificadores nos damos cuenta que, en este caso, no tocamos el dominio de discurso para darle sentido al significado de los cuantificadores, y solo accedemos a ese dominio mediante una interpretación de una constante que haga verdadera a una proposición singular. Además, tampoco se usan variables individuales para que funcionen como espacio temporal de atribuciones de denotaciones en su dominio respectivo que permitan el valor veritativo de una función proposicional que contenga dicha variable.

Para finalizar pongamos algunos ejemplos del uso de la cuantificación sustitucional:

1) Al menos una instancia de sustitución de “F… $\vee$ ~ F…” es verdadera.

1*) $(\exists x)\ [F(x) \vee \sim F(x)]$

Como podemos apreciar esta lectura no nos obliga aceptar que hay al menos un objeto que es F o no es F, lo cual va en contra de la idea de que la lógica toca el tema de que algo exista.[38]

2) Hay una instancia verdadera de sustitución de “… entonces no …”.

2*) $(\exists p)\ (p \rightarrow \sim p)$

(Ejemplo tomado de Haack (1982: 73))

3) Todas las instancias de sustitución del esquema ‘… $\vee$ ~…’ son verdaderas.

3*) $(\forall p)\ (p \vee \sim p)$

(Ejemplo tomado de Barrio (2004: 199))

4) Todo enunciado p es verdadero si y solo si p.

4*) ($\forall$p) (el enunciado p es verdadero $\longleftrightarrow$ p)

(Ejemplo formalizado de García Suárez (2011: 271))

5) El que haya un objeto mayor que 7 es algo necesario.

5*) $\blacksquare\ (\exists x)\ (x>7)$

(Ejemplo tomado de García Suárez (2011: 361))

[38] Esto no debe sorprendernos, porque la lógica es un tipo de conocimiento racional que no se involucra con la realidad empírica.

6) Tanto los chinos como los rusos son hombres

6*) $(\exists H)\ [H(x) \wedge H(y)]$

Con este ejemplo propuesto por Ferrater Mora:

> "(…) no decimos todavía que haya algo que sea un hombre; o si los rusos y los chinos son hombres, no decimos que haya rusos ni chinos. Si hay rusos y chinos, y si son hombres, entonces hay hombres. Pero a menos que se cuantifique existencialmente el "algo" del que se dice que es un hombre, no habrá compromiso óntico respecto a hombres" (1967: 211).

Es decir, la cuantificación de segundo orden no produce el compromiso óntico referido porque la propiedad "ser hombre" no tiene asegurada la existencia de objetos que la tengan. Esto se asocia con la idea de las funciones (hoy diríamos, predicados) que para Frege son entidades particularmente incompletas o insaturadas que determinan un objeto (valor de verdad) sólo cuando éste se acompaña de otro.

2.2.3. Balance

Cada una de estas posturas tiene sus ventajas y sus desventajas. Por un lado, Quine optaría por la interpretación objetual que le adjudica roles ontológicos plenos a los cuantificadores y las variables. En términos de Quine:

> "Cuando decimos que hay números primos mayores que un millón nos comprometemos con una ontología que contiene números; cuando decimos que hay centauros nos obligamos a sostener una ontología que contiene centauros; y cuando decimos que Pegaso es, nos sometemos a una ontología que contiene a Pegaso. En cambio, no nos atamos a una ontología que contenga a Pegaso o al autor de *Waverley* o a la redonda cúpula cuadrada de Berkeley College cuando decimos que Pegaso no es, que el autor de *Waverley* o la cúpula en cuestión no son. No debemos seguir trabajando bajo la ilusión de que la significatividad de un enunciado que contiene un término singular presupone una entidad nombrada por el término en cuestión. Un término singular no necesita nombrar para ser significativo" (Quine, 2002: 47).

Por ello, la lógica de primer grado sería considerada por Quine como la notación canónica de la ciencia para expresar todo aquello que las teorías científicas permiten decir que existe. Sin embargo, la preferencia quineana perjudica el uso de operadores epistémicos o modales (es decir, intensionales). Nos dice Quine:

> "La posibilidad, igual que las demás modalidades – necesidad, imposibilidad, contingencia-, suscita problemas; no deseo aconsejar que nos volvamos de espaldas a ellas. Pero, por lo menos, podemos limitar las modalidades a enunciados completos. Podemos aplicar el adverbio "posiblemente" a un enunciado en su conjunto y podremos sin duda tener nuestras preocupaciones a propósito del análisis semántico de ese uso del adverbio; pero poco progreso real podemos esperar para ese análisis por el procedimiento de ampliar nuestro universo hasta incluir las llamadas entidades posibles. Me temo que el principal motivo de esa expansión del universo sea simplemente la vieja noción de que Pegaso, por ejemplo, tiene que ser, pues de otro modo resultaría un sinsentido decir que no es" (Quine, 2002: 42-43).

Frápolli y Romero explican que la razón por la cual se rechaza cuantificar en lógica modal es porque la referencia en este caso no está dirigida a un objeto específico (es decir, tiene referencia opaca) y no cumple con la sustitución de la identidad *salva veritate*:

> "La noción de *significado*, como dice Quine (…), carece de criterios de aplicación y es, por ello, inaceptable en la elaboración de una teoría que proporcione conocimiento auténtico. A diferencia de las clases, es difícil establecer la identidad de las intensiones, la forma más elaborada de *significado* a la que Quine se enfrenta. Si no hay criterio de identidad para las intensiones, éstas no pueden ser entidades pues, según Quine, no hay entidad sin identidad. El criterio para identificar clases depende exclusivamente de sus miembros: dos clases son la misma si, y solo si, tienen los mismos miembros. Sin embargo, este criterio no sirve para la identificación de intensiones pues para su identificación se precisa de nociones modales: dos atributos son el mismo si, y solo si, son lógicamente equivalentes o, dicho de otro modo, si, y solo si, su equivalente es una verdad lógica o necesaria, una verdad en todo mundo posible. Esto requiere saber o poder establecer qué proposiciones son verdaderas en todos los mundos posibles cuando todo lo que se puede saber es, según Quine, que lo son en este mundo. No se pueden establecer verdades necesarias. Los sistemas modales no tienen una aplicación legítima. De hecho, una de las grandes dificultades de la aplicación de los sistemas modales al lenguaje es que conduce a inferencias no válidas cuando las expresiones aparecen en contextos opacos, contextos en lo que no se pueden intercambiar idénticos pues pueden variar su valor de verdad. Son opacos aquellos contextos en los que no se pueden intercambiar idénticos pues pueden variar su valor de verdad. Son opacos aquellos contextos oracionales en el que un término tiene una función autónoma que impide que pueda sustituirse *salva veritate* por un término coextensivo. Las falacias producidas en

los contextos modales muestran ejemplos de opacidad. El argumento de Quine es, en líneas generales, el siguiente. El enunciado (A)

(A) Necesariamente 9>7

es verdadero, mientras que el enunciado (B)

(B) Necesariamente el número de los planetas del sistema solar es >7

es un enunciado falso. Sin embargo, de (A) se sigue (B) si es el caso que (C)

(C) 9= el número de los planetas del sistema solar

por el Principio de sustitutividad, principio que permite pasar de las premisas "Pa" y "a=b" a "Pb". De ahí que apelar a una noción modal como criterio de identificación del significado o de la intensión sea más que dudoso" (1998: 143)

Particularmente, la cuantificación en lógica modal a decir de Quine nos compromete con el esencialismo que supone la idea de propiedades que tengan que cumplirse en todos los mundos posibles, es decir, universales, los cuales para Quine son rechazados considerando su explícito nominalismo (Beuchot, 1986: 12). Además, la lógica de segundo orden que cuantifica sobre predicados también se encontraría en dificultades al hacer alusión no a objetos propiamente dichos sino a proposiciones, propiedades o conjuntos que constituyen una generalidad que necesita del receptáculo de un sujeto para poder tener existencia [39].

[39] Se considera a Quine un nominalista en vista que los universales o entidades abstractas son rechazados por él por tomar en cuenta que solo los individuos incluidos entre los valores de variables tienen cierta realidad que les sirve de soporte. Sin embargo, su postura evoluciona y, posteriormente, logra aceptar que los conjuntos o clases en tanto entidades abstractas son objetos legítimos de las matemáticas debido a que las teorías físicas que utilizan herramientas matemáticas hacen posible hacer revisables por la experiencia los entes lógicos y formales que dejan de ser espectrales y toman carnadura de lo empírico (Lorenzano, 2004). Este argumento recibe el nombre de la indispensabilidad de las entidades abstractas y relaciona la aceptación de dichas entidades con el éxito de las teorías en las cuales resulta inevitable su presencia. Para esta línea de argumentación las entidades abstractas son indispensables para hacer lógica, metalógica y hasta ciencia empírica. (Barrio, 2004: 210)

Por otro lado, Ruth B. Marcus estimaría la interpretación sustitucional como la más adecuada. Según su apreciación, las variables están en vez de términos de un lenguaje particular. Esto supone la introducción del nivel del lenguaje al que haga referencia la interpretación y este nivel se situaría entre las fórmulas cuantificadas y el mundo. Con ello se logra reducir los problemas que plantea la visión de Quine porque permite ligar variables de cualquier categoría gramatical sea modal o epistémica. Siendo así, la cuantificación de segundo orden no tendría problemas (e incluso se podría cuantificar sobre las mismas proposiciones). Esto último resulta beneficioso no solo para la lógica sino para la filosofía de la lógica, e incluso para la misma epistemología. Finalmente, cuantificar sobre proposiciones permite elaborar de manera adecuada teorías sobre la verdad así como teorías que expliquen las difíciles relaciones escondidas en las paradojas lógicas como la de Epiménides que nos permitimos expresar formalmente en un lenguaje lógico de segundo grado para concluir:

1) Una expresión es dicha por Epiménides y esta expresión es la frase "Todo lo que es dicho por un cretense, es falso".

1*) $P(q) \wedge q = (\forall y)\ [C(y) \rightarrow F(y)]$

CAPÍTULO III

LA PARADOJA DE *EL MENTIROSO* Y SUS VARIANTES

> "El mejor aporte que hoy puede hacerse en nuestro medio a la lógica es ayudar a perfeccionar antes que nada el dominio de sus medios instrumentales y aparato simbólico, para que a la postre, cuando sobrevengan problemas verdaderamente serios que le son propios, aquéllos se realicen sobre la base de un saber proveniente del oficio y no de un amasijo de ocurrencias sin sustento."
>
> **JUAN BAUTISTA FERRO**

La antigua paradoja de *El Mentiroso* formulada por Eubúlides tiene hoy en día un numeroso grupo de versiones que le son afines. Sin embargo, debido a la naturaleza de la estructura del argumento estas versiones son susceptibles de ser divididas en dos grupos: la familia oracional de paradojas de *El Mentiroso* y la familia argumental de paradojas de *El Mentiroso*. El primer grupo consta de argumentos cuya única premisa es una oración solitaria o una secuencia de 2 o más oraciones. Las versiones oracionales de esta popular paradoja griega varían en idioma, uso (o desuso) de autorreferencia o cuantificadores y número de oraciones consideradas como premisas. Este grupo último resulta muy útil en el contexto del análisis semántico o la teoría de modelos de la lógica matemática. El otro grupo está conformado por argumentos cuya estructura es diferente y que consta de tres premisas: una identidad, un condicional y una conjunción. Este grupo de argumentos recogidos de la tradición se caracteriza principalmente por hacer uso del lenguaje natural.

3.1. Familia oracional de *El Mentiroso*

Antes de dar comienzo a la exposición de las diversas variantes o formas de *El Mentiroso*, explicaré cuál es la dinámica de estas familias. La familia de *El Mentiroso* tiene dos tipos de presentación: la familia oracional y la familia argumental. Mientras que la oración autorreferida que se atribuye ser falsa ("Esta oración es falsa") está incluida en el grupo de la familia oracional, el razonamiento que se desarrolla a partir del planteo de Eubúlides está incluido en el grupo de la familia argumental. Esto explica el hecho de que la paradoja de *El Mentiroso* tenga una versión argumental, y una oracional. Además, existen algunos problemas que se presentan cuando analizamos con más cuidado estas familias. Por ejemplo, las paradojas oracionales tienen las propiedades de infundación (o autorreferencia infundada), circularidad y contradicción. Una especie de propiedad hereditaria hace posible que el sujeto de la premisa con forma de identidad de los argumentos paradójicos también tenga las propiedades de circularidad y contradicción. La diferencia más interesante es que la familia oracional presenta autorreferencias paradójicas, mientras que la familia argumental por ser sólo una materialización de lo formal no presenta problemas de autorreferencia infundada.

La versión oracional más difundida del *Mentiroso* se construye sobre un lenguaje crudamente autorreferencial:

(1) Alguna persona dice "Lo que digo ahora es falso".

La pregunta problemática es: "¿Es falsa o verdadera la oración (1)?". [40]

[40] A esta paradoja Quine también la llama *pseudoménica* (1976: 9).

Resulta sumamente sencillo demostrar que lo dicho por ese alguien es tanto falso como verdadero. Supongamos que A es la proposición "yo miento". Ahora bien, si es verdad que yo miento, entonces hago afirmaciones falsas y, como yo digo A, entonces A es falsa. Pero si es falso que miento, entonces digo la verdad y, como yo digo A, entonces A es verdadera. Notamos que esta oración cuya verdad implica su falsedad y cuya falsedad implica su verdad, cumple con el requisito indispensable para ser considerada una paradoja lógica. Además, esta paradoja ha recibido revisiones y reelaboraciones por parte de Susan Haack y W. V. O. Quine lo que la hace muy atractiva para los filósofos.

3.1. 1. Versión de Haack

Susan Haack (1982: 173-174) en *Filosofías de las Lógicas* trata esta versión de la paradoja de *El Mentiroso* considerando solamente el aspecto formal de la misma y dejando de lado el uso de predicados veritativos. La versión que presentamos a continuación está basada en la propuesta de Haack, pero ha sido modificada de tal modo que la premisa sea única puesto que ella prefiere utilizar dos y hasta tres premisas, algo a nuestro parecer innecesario. Como ya hemos anotado, la formulación más simple de la paradoja de *El Mentiroso* es la siguiente: "Esta oración es falsa". En este caso hemos necesitado utilizar una oración más larga y más compleja. El argumento de la paradoja de *El Mentiroso* es éste:

1. La oración numerada con 1 es la oración “Toda oración numerada con 1 está negada”. POR LO TANTO, la oración numerada con 1 es verdadera syss[41] es falsa.

Hemos utilizado la siguiente abreviatura: el nombre *r* de “la oración numerada con 1”, además de los predicados veritativos correspondientes a la falsedad y la verdad, es decir, *V* o *F*. También nos valemos del esquema deflacionista D y de sus consecuencias teoremáticas[42]. A nivel de reglas de deducción, hemos considerado conveniente hacer uso de la regla que rige las identidades (I) (Suppes, 1979: 144), según la cual si **S** es una fórmula abierta, de **S** y $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2$ es posible deducir **T**, siempre que **T** resulte de **S** por

---

[41] Abreviatura para ‘si y sólo si’, v. g., ‘↔’.

[42] Según la perspectiva tradicional (o substantiva) existen varias propuestas para la explicación de la verdad. Todas ellas tienen en común la idea fundamental de que la verdad tiene una naturaleza sustantiva comparable a los conceptos de gravedad, peso o masa. Por esto mismo, todas estas propuestas pueden ser calificadas de inflacionarias porque al suponer que hay alguna propiedad substantiva que es la verdad – la correspondencia con la realidad, la coherencia con un cierto conjunto de creencias, la verificabilidad en un experimento, las consecuencias útiles- sucumben a una teoría que suplementa innecesariamente el esquema
(E) La proposición de que *p* es verdadera si y solo si *p*
con algún principio de la forma
(I) Una proposición *p* (juicio, creencia, oración, etc.) es verdadera si y solo si *p* es *F*
en el que la propiedad F es alguna propiedad substantiva, sólida. (García Suárez, 2011, 293). Así, el deflacionismo no sería tradicional en tanto no ofrece a la verdad como una propiedad y si lo hiciera no se trataría de una propiedad substantiva u ordinaria.

Una teoría deflacionista de la verdad o bien mantiene la postura fuerte que niega que la verdad sea una propiedad (como la teoría de la redundancia de Ramsey para quien la verdad es un predicado vacuo que no aporta nada al contenido de una proposición) o al menos mantiene la postura más débil que niega que la verdad sea una propiedad substantiva u ordinaria (como la teoría minimalista de Horwich). En cualquier caso, el esquema deflacionista (D) es el siguiente:

(D) La proposición de que *p* es verdadera ↔ *p*. (García Zárate, 2006)
Además, la expresión (D) es reducible a estas otras expresiones:
(D)*: $V(p) \rightarrow p$
(D)**: $\sim p \rightarrow F(p)$
(D)***: $F(p) \rightarrow \sim p$
(D)****: $p \rightarrow V(p)$
Marino Llanos sugiere dejar en claro que estos cuatro esquemas sean explícitamente incorporados entre las premisas del argumento en desarrollo. Para no hacer más engorrosa la deducción indicaremos que estos esquemas no son tautologías sino que más bien son premisas adicionables al cuerpo de premisas de la versión de Haack de *El Mentiroso* (o de *El Epiménides*).

reemplazo de una o más incidencias de $\mathbf{t}_1$, en **S**, por $\mathbf{t}_2$. También hacemos uso de la intuitiva propiedad transitiva de la identidad según la cual: "Si una cosa *a* es igual a otra cosa *b*, y si esta otra cosa *b* es igual a una tercera cosa *c*, entonces la cosa *a* es igual a la tercera cosa *c*", en símbolos: $(a = b \wedge b = c) \rightarrow (a = c)$. Aplicaremos una prueba condicional doble.

1. $r = (\forall y)\ [(r = y) \rightarrow \sim y]$	// ∴ $V(r) \leftrightarrow F(r)$
2. $V\ (r)$	// ∴ F(r)
3. $V((\forall y)[(r = y) \rightarrow \sim y])$	2 y 1 Regla de las identidades
4. $(\forall y)[(r = y) \rightarrow \sim y]$	3 y (D)* Modus Ponens
5. $r = (\forall y)[(r = y) \rightarrow \sim y] \rightarrow \sim(\forall y)\ [(r = y) \rightarrow \sim y]$	
	4 Ejemplificación Universal
6. $\sim(\forall y)[(r = y) \rightarrow \sim y]$	1 y 5 Modus Ponens
7. $F\ ((\forall y)[(r = y) \rightarrow \sim y])$	6 y (D)** Modus Ponens
8. $F\ (r)$	7 y 1 Regla de las identidades
9. $V\ (r) \rightarrow F\ (r)$	2-8 Prueba Condicional
10. $F\ (r)$	// ∴ V (r)
11. $F\ ((\forall y)[(r = y) \rightarrow \sim y])$	10 y 1 Regla de las identidades
12. $\sim(\forall y)[(r = y) \rightarrow \sim y]$	11 y (D)*** Modus Ponens
13. $\sim\sim(\exists y)\ \sim[(r = y) \rightarrow \sim y]$	12 Intercambio de cuantificadores
14. $(\exists y)\ \sim[(r = y) \rightarrow \sim y]$	13 Doble negación
15. $(\exists y)\ [(r = y) \wedge y]$	14 Def. condicional, De Morgan y Doble Negación
16. $(r = \alpha) \wedge \alpha$	15 Ejemplificación Existencial

17. α	16 Simplificación
18. $r = \alpha$	16 Simplificación
19. $V(\alpha)$	17 y (D)**** Modus Ponens
20. $V(r)$	19 y 18 Regla de las identidades
21. $F(r) \rightarrow V(r)$	10-20 Prueba Condicional
22. $[V(r) \rightarrow F(r)] \land [F(r) \rightarrow V(r)]$	9 y 21 Conjunción
23. $V(r) \leftrightarrow F(r)$	22 Definición bicondicional

3.1. 2. Versiones de Quine

Hofstadter en su libro *Godel, Escher, Bach: Un Eterno y Grácil Bucle* propone varias versiones que Quine expuso en *The Ways of Paradox*, dos de las cuales trataré tan solo para mostrar cómo todas se reducen a la versión más difundida, a saber: "Esta oración es falsa". Estas versiones aplican el '*quinereamiento'* [43] (Hofstadter, 1987: 481-488), es decir, el procedimiento utilizado para construir oraciones que consiste en hacer preceder una frase por su cita, convirtiendo en un nombre o sustantivo lo entrecomillado y estableciendo la función de predicado de la frase sin entrecomillar.

Primer ejemplo: A="B"B= *"produce falsedad cuando es precedida por su cita" produce falsedad cuando es precedida por su cita* (Hofstadter, 1987: 555). Esta oración

[43] Hofstadter (1987: 481-488) denomina '*quinereamiento*' a la operación que expone Quine (1976) en *The Ways of Paradox, and Other Essays*.

dice de sí misma que es falsa, pues lo que está entrecomillas ("B") está en mención, es decir funciona como un nombre; y ya que este nombre es idéntico a la misma oración A podemos entrecomillarla y aplicarle el *quineramiento* "n" veces para obtener " … " " "B" B " B " B …"…B que evidencia la propiedad del regreso al infinito de la circularidad. Esta otra versión llamada francés-español, aplica el mismo principio del *quinereamiento* pero relativo a un idioma. Segundo ejemplo: *"est une expression qui, quand elle est précédée de sa traducction, mise entre guillemets, dansa la langue provenant de l´autrecôté des Pyrénées, crée une fausseté" es una expresión que, cuando es precedida por su traducción, puesta entre comillas, a la lengua procedente del otro lado de los Pirineos, produce una falsedad.* (Hofstadter, 1987: 558). Es fácil percatarse que el caso anterior produce una paradoja puesto que de ser verdad lo que plantea genera algo falso.

3.1.3. Paradoja reforzada de *El Mentiroso*

También llamada *Mentiroso Fortalecido*. Con respecto a la paradoja anterior, podemos revocar el supuesto de que toda aseveración es verdadera o falsa. Así, aceptaremos que hay oraciones que son neutras porque no poseen ninguno de los dos valores veritativos clásicos. Incluso así, la paradoja puede reformularse partiendo de la declaración:

(MR1) Estoy aseverando un enunciado que es falso o neutro[44]

Evidentemente, si (MR1) es falsa, es verdadera; si (MR1) es neutro, es verdadera, y si (MR1) es verdadera, es falso o neutro. Esta consecuencia viola, o bien el principio de no

[44] Esta será llamada la paradoja reforzada de *El Mentiroso* puesto que no afirma solamente su propia falsedad, sino también su neutralidad.

contradicción, válido bajo el nuevo régimen para las aseveraciones que no son neutras, o bien la definición de "aseveración neutra", según la cual no es posible que estas sean verdaderas.

Con más simplicidad podemos elaborar otra versión más simple de esta paradoja partiendo de la declaración:

(MR2) Estoy haciendo una aseveración neutra

Ésta es verdadera si y solo si es neutra y viola la definición de neutro.

3.1. 4. Tarjeta de Jourdain

En la paradoja de la Tarjeta de Philip Edward Bertrand Jourdain se presenta una tarjeta en uno de cuyos lados esta escrita la oración:

(1) *Al dorso de esta tarjeta hay una oración verdadera*

Se da la vuelta a la tarjeta y se lee lo siguiente:

(2) *Al dorso de esta tarjeta hay una oración falsa*

La única forma genérica de esta paradoja es

(X) La oración (X + (-1) (X-1)) tiene la propiedad de ser Y, donde si X=1, Y es "verdadera", y si X=2, Y es "falsa".

A continuación, recurriremos a una doble argumentación comenzando con A para luego seguir con B.

I. Argumento A:

Si (1) es verdadera, entonces (2) tiene que ser verdadera, y, por lo tanto, (1) tiene que ser falsa. [V(1)→ F(1)].

Si (1) es falsa, entonces (2) tiene que ser falsa y, por lo tanto, (1) tiene que ser verdadera. [F(1)→ V(1)].

II. Argumento B:

Si (2) es verdadera, entonces (1) tiene que ser falsa, y, por lo tanto, (2) tiene que ser falsa. [(V(2)→ F(2)].

Si (2) es falsa, entonces (1) tiene que ser verdadera, y por lo tanto (2) tiene que ser verdadera. [F(2)→ V(2)].

En consecuencia, tenemos dos situaciones paradójicas que se apoyan entre sí:

(1) es verdadera si y solo si (1) es falsa.

[V(1) ↔ F(1)]

(2) es falsa si y solo si (2) es verdadera.

[F(2) ↔ V(2)]

3.1. 5. Libro antinómico de Tarski

Siguiendo a Alfred Tarski (2000: 203-205), podemos construir una paradoja de 100 oraciones:

> "(…) Imaginemos (…) un libro de 100 páginas, con sólo una oración impresa en cada página.
> En la página 1 leemos:
> *La oración impresa en la página 2 de este libro es verdadera*
> En la página 2 leemos:
> *La oración impresa en la página 3 de este libro es verdadera*
> Esto se repite hasta la página 99. Sin embargo, en la página 100 la última página de este libro encontramos:
> *La oración impresa en la página 1 de este libro es falsa.*
> Asumamos que la oración impresa en la página 1 es realmente falsa. Mediante un argumento que no es complicado pero es muy largo y requiere hojear todo el libro, concluimos que nuestra suposición está equivocada. De igual manera asumimos ahora que la oración impresa en la página 1 es verdadera y mediante un argumento que es tan simple y largo como el original, nos convencemos que la nueva suposición está equivocada. Así pues nuevamente nos enfrentamos a una antinomia.(…)"

La forma lógica del libro antinómico de Tarski es ésta:

(1): (2) es verdadera

(2): (3) es verdadera

(3): (4) es verdadera

…

(98): (99) es verdadera

(99): (100) es verdadera

(100): (1) es falsa

La forma lógica correspondiente que reduce todas las premisas a una sola será:

(X) La oración (X+1+(-100/99!)(X-1)(X-2)…(X-99)) tiene la propiedad de ser Y, donde si X=1, X=2, …, X=99, Y es el predicado "verdadera"; pero si X=100, Y es el predicado "falsa".

Cualquier oración de esta secuencia es verdadera y falsa independientemente de las hipótesis acerca de su valor de verdad. Pero no todos los libros construidos con reglas análogas a las tarskianas serán paradójicos. Habrá libros sólo contradictorios y no antinómicos. Por ejemplo, imaginemos que en alguna parte de cierto libro, digamos en la página 1, se dice que la oración de la página 3 es verdadera, mientras que en alguna otra página, digamos en la 2, se dice que la misma oración es falsa. A partir de esta información no se puede concluir que nuestro libro es "antinómico", solamente podemos sacar como conclusión que una de las oraciones de la página 1 ó 2 debe ser falsa. Solo surge una antinomia siempre que podemos mostrar que una de las oraciones del libro es verdadera y falsa, independiente de cualquier suposición concerniente a la verdad o falsedad de las oraciones restantes.

3.1. 6. Paradoja de Yablo

Inventemos una versión paradójica de infinitas oraciones de la paradoja del *Mentiroso*, por ejemplo, tomemos *El Libro de Arena* de Jorge Luis Borges (1975), es decir, un libro de infinitas páginas e imaginemos que solo tiene escrita una oración por cara. Si trabajamos sobre la condición de que cada oración de cada página tendrá escrita la oración:

"Todas las oraciones impresas en las páginas sucesivas de este libro son falsas",

tendremos una paradoja y también una versión libresca de la paradoja de Yablo (1993: 152-251), la misma que será expuesta de manera pura a continuación. Dada la existencia del concepto de infinito en este argumento, sería recomendable utilizar números ordinales transfinitos que sirvan para señalar los pasos de la prueba que se podrían desarrollar a partir del paso ω +1, es decir un paso después del infinitésimopaso.

Este es el argumento que queremos formalizar lógicamente.

1. La primera oración dice que las siguientes son falsas.
2. La segunda oración dice que las siguientes son falsas.
3. La tercera oración dice que las siguientes son falsas

…

α. La alfésima oración dice que las siguientes son falsas.

$\alpha + 1$. La alfésima primera oración dice que las siguientes son falsas.

…

ω. … Por lo tanto, la primera oración es falsa y verdadera.

Ahora, representaremos en símbolos la anterior paradoja:

1. $p_1 = F(p_2) \wedge F(p_3) \wedge F(p_4) \wedge \ldots$

2. $p_2 = F(p_3) \wedge F(p_4) \wedge F(p_5) \wedge \ldots$

3. $p_3 = F(p_4) \wedge F(p_5) \wedge F(p_6) \wedge \ldots$

…

α. $p_\alpha = F(p_{\alpha+1}) \wedge F(p_{\alpha+2}) \wedge F(p_{\alpha+3}) \wedge \ldots$

$\alpha + 1$. $p_{\alpha+1} = F(p_{\alpha+2}) \wedge F(p_{\alpha+3}) \wedge F(p_{\alpha+4}) \wedge \ldots$

…

ω. … // $\therefore F(p_1) \wedge V(p_1)$

Hemos de advertir que no solo p_1 es paradójica sino que todas las oraciones del sistema (p_2, p_3, p_4, etc.) también lo son.

3.2. Familia argumental de *El Mentiroso*

La prístina paradoja de *El Mentiroso* data del siglo IV a. c. y según Popper, Tarski, Mosterín y Torreti su autor responde al nombre de Eubúlides, un lógico griego de origen oscuro [45]. Esta paradoja tradicional es formulada mediante una pregunta típicamente lógica

[45] Tarski (2000) en la página 205 de "*Verdad y Prueba*" asegura que Eubúlides fue el autor de esta vieja paradoja (que atormentó tanto a muchos antiguos lógicos griegos ocasionando incluso la muerte prematura de uno de ellos: Philetas de Cos). Sin embargo, al parecer, éste griego tenia doble

que exige desarrollar un razonamiento con sus premisas y conclusiones. Eubúlides planteó lo siguiente: "Un hombre afirma: "Miento" ¿Dice mentira o dice verdad?". Antes de tratar los aspectos puramente lógicos de esta paradoja, sería conveniente distinguir la mentira de la equivocación. La mentira es una información falsa que alguien dice sabiendo conscientemente que es falsa. En cambio, la equivocación consiste en una información falsa que alguien dice sin saber que es falsa. Pareciera que la pregunta fuera acerca de la intensión del protagonista de la paradoja. No obstante, este caso no es el que realmente ocurre. La diferencia entre estos dos conceptos estriba en si el conocimiento de la persona abarca o no el valor de verdad de la oración que está pronunciando. Esta distinción me parece superflua y, para este caso, podemos salir del paso, interpretando la pregunta "¿dice mentira o dice verdad?" de la paradoja de Eubúlides como una disyunción de oraciones contradictorias, es decir, la mentira será considerada simplemente un sinónimo total de falsedad. Ahora bien, recordemos que el dilema es un argumento de tres premisas que plantea la posibilidad de escoger entre dos opciones excluyentes que tienen las mismas consecuencias. Las dos condicionales de las premisas de este argumento tienen el mismo consecuente, y sus antecedentes son una fórmula y su negación. La tercera premisa es una disyunción que tiene la forma del principio del tercio excluso. La conclusión es la misma fórmula que aparece en los consecuentes de los condicionales de las premisas. La forma lógica del dilema resulta ser un caso particular de la regla del dilema constructivo, según el

---

nacionalidad, pues Mosterín y Torreti (2002: 437) escriben: "La paradoja del mentiroso, descubierta por Eubúlides de Mileto (s. IV a. c.)". Mientras que Popper (1983: 368) deja entrever que podría ser de Megara: "la [paradoja] del mentiroso [es] la versión megárica de la paradoja de *Epiménides*". Si vemos un mapa de Grecia Antigua notaremos que un ancho mar separa a estas dos ciudades y si consideramos también que Megara fue el nombre de varias ciudades de Grecia, la oscuridad acerca del origen del autor de la paradoja del *Mentiroso* se haría más que evidente.

cual si tenemos dos condicionales y la disyunción de sus antecedentes podemos concluir la disyunción de sus consecuentes:

$[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s) \wedge (p \vee q)] \rightarrow (r \vee s)$.

Si en la anterior fórmula hacemos $r=s=w=w \vee w$, y $p=a$, $q=\sim a$ obtendremos la forma lógica de un dilema:

$[(a \rightarrow w) \wedge (\sim a \rightarrow w) \wedge (a \vee \sim a)] \rightarrow (w)$.

Podemos hallar la misma forma lógica en el siguiente dilema válido construido para demostrar que lo dicho por el hombre es mentira: “Si lo que dice ese hombre es verdadero, entonces, (en virtud de su significado) lo dicho por él es una mentira, pero si lo que dice ese hombre no es verdadero, entonces (por necesidad lógica) lo que dijo ha de ser mentira. Además, lo que dice ese hombre es verdadero o no lo es. Por lo tanto, lo dicho por ese hombre es mentira”. Para enfrentarnos a este dilema necesitamos construir un contradilema. El contradilema es otro dilema cuya conclusión es opuesta a la del dilema que se está tratando de refutar. Si en la forma lógica del dilema constructivo hacemos

$r=s=\sim w=\sim w \vee \sim w$,

y

$p=t,\ q=\sim t$

obtendremos la forma lógica del contradilema respectivo:

$$[(t\rightarrow \sim w) \wedge (\sim t\rightarrow \sim w) \wedge (t\vee\sim t)] \rightarrow \sim w.$$

Podemos hallar la misma forma lógica en el siguiente contradilema válido construido para demostrar que lo dicho por el hombre es verdad: "Si lo que dijo ese hombre es falso, entonces (en virtud de su significado) lo dicho por él es verdadero, pero si lo dicho por él no es falso, entonces (por necesidad) ha de ser verdadero. Además, lo que dijo ese hombre es falso o no lo es. Por lo tanto, lo que dijo él es verdadero." En conclusión, podemos afirmar que ésta es una auténtica paradoja lógica porque hemos podido construir a partir de su planteo tanto un dilema como un contradilema igualmente derivables a pesar de ser enteramente contradictorios entre sí. En este sentido, este enunciado deberá tener forma tautológica y contradictoria a la vez, o lo que es lo mismo deberá permitirnos construir tanto dilemas como contradilemas igualmente aceptables y válidos. Luego, si alguien declara: (1) *Estoy mintiendo*, declara una oración paradójica: que es verdadera si y sólo si es falsa, que si es falsa, es verdadera y que si es verdadera, es falsa, que es verdadera y falsa, que es tautológica y contradictoria y que desemboca en dilema y contradilemas. Por lo tanto, si postulamos que toda oración formulada en correcto castellano es verdadera o falsa, existe a lo menos una, a saber, la oración (1), que es falsa y verdadera a la vez, en violación flagrante del principio de no contradicción. Es necesario anotar que la oración (1) por convención ha heredado el mismo nombre de la paradoja que la alberga, por ello la oración de *El Mentiroso* suele confundirse con el argumento paradójico.

Esta segunda parte tiene la intención de fundar la familia argumental de paradojas de *El Mentiroso*. Discutiremos la existencia de argumentos tradicionales que reproducen la misma estructura descubierta en el desarrollo de la paradoja de *El Mentiroso*. Por ejemplo, si la premisa q = φ(r) pertenece al argumento de una versión de *El Mentiroso*, entonces la conclusión de dicho argumento será $V(q) \leftrightarrow F(q)$. Este grupo de versiones argumentales de *El Mentiroso* aunque no hace uso de la autorreferencia tampoco usa la simple referencia. La circularidad y la contradicción, en cambio, no dejan de estar presentes en $V(q) \leftrightarrow F(q)$. Estos argumentos son más afines a la legendaria versión más tradicional inmortalizada por Eubúlides, porque las conclusiones contradictorias emergen gracias a los dilemas y contradilemas nacidos de caóticos enfrentamientos entre pactos-contratos y principios lógicos.

La paradoja del Quijote o de Cervantes, la paradoja de los caníbales de Godement, el dilema del cocodrilo y la paradoja (o dilema) de Protágoras son algunos ejemplos de paradojas que no hacen uso de la autorreferencia infundada, y, además, se presentan argumentativamente como dilemas y contradilemas. Otra forma de presentación de estos argumentos es la circularidad contradictoria. En estos casos, si la oración "q" es falsa, entonces esa oración es verdadera. Por otra parte, si la oración es verdadera, entonces la oración será falsa. Formalmente, tenemos que: $[F(q) \rightarrow V(q)] \wedge [V(q) \rightarrow F(q)]$, donde "q = oración paradójica". Nuestro principal propósito será el de mostrar como todo un conjunto de paradojas pueden estar incluidos en un mismo tipo. Por ello, formularemos cuatro paradojas para que sea más visible su forma lógica común, pero solo desarrollaremos y expresaremos de manera particular la paradoja de Protágoras.

3.2. 1. Paradoja del Quijote

También es llamada la paradoja de Miguel de Cervantes Saavedra (también conocida como *El puente*) y se narra, en la segunda parte de *El Ingenioso Hidalgo Don Quijote de la Mancha.* Se dice que, apenas Sancho Panza logró ser alcalde de Barataria, tuvo que resolver una consulta jurídica inmediata que un forastero planteó detalladamente de la siguiente manera:

> "-Señor, un caudaloso río dividía dos términos de un mismo señorío […] Sobre este río estaba una puente, y al cabo de ella, una horca y una como casa de audiencia, en la cual habían de ordinario cuatro jueces, que juzgaban la ley que puso el dueño del río, de la puente, y del señorío, que era en esta forma: "Si alguno pasare por esta puente de una parte a otra, ha de jurar primero adónde y a qué va; y si jurare verdad, déjenle pasar; y si dijere mentira, muera por ello ahorcado en la horca que allí se muestra, sin remisión alguna". Sabida esta ley y la rigurosa condición de ella, pasaban muchos, y luego, en lo que juraban se echaba de ver que decían verdad, y los jueces los dejaban pasar libremente. Sucedió, pues, que tomando juramento a un hombre, juró y dijo que para el juramento que hacía, que iba a morir en aquella horca que allí estaba, y no otra cosa. Repararon los jueces en el juramento y dijeron: "Si a este hombre le dejamos pasar libremente, mintió en su juramento y, conforme a la ley debe morir, y si le ahorcamos, él juró que iba a morir en aquella horca y, habiendo jurado verdad, por la misma ley debe ser libre. Pídese a vuestra merced, señor gobernador, qué harán los jueces…"

Desde un punto de vista lógico, no se puede tomar una decisión, ya que si la oración "Voy a morir en la horca que allí está" es falsa, entonces debe ser colgado, lo cual implica que la oración es verdadera. $F(t) \rightarrow V(t)$.

Por otra parte, si la oración es verdadera, entonces lo deben dejar pasar por el puente, pero cuando esto suceda la oración será falsa. $V(t) \rightarrow F(t)$. Ahora, formalmente, precisemos este argumento paradójico mediante un lenguaje más claro.

1. Lo que dice el pasante es la oración "Voy a morir en la horca".
2. Si la oración antedicha es verdadera, el pasante no morirá en la horca, y si no muere en la horca, entonces pasará por el puente.
3. Si la oración antedicha es falsa, el pasante morirá en la horca.

Por lo tanto, lo que dice el pasante es verdadero si y solo si es falso.

Formalicemos esta paradoja mediante el lenguaje de la lógica de segundo grado con identidad. Esta es la notación utilizada: "*t*" es la abreviatura de lo dicho por el pasante, *m* es el significado de lo dicho por el pasante o sea la oración "Voy a morir en la horca", *p* es el significado de la oración "Voy a pasar por el puente". "*F*" indicará la propiedad de ser una falsedad o mentira, y "*V*" la propiedad de ser verdadera.

1. $t=m$
2. $[\ V(t) \rightarrow \sim m\ ] \wedge (\ \sim m \rightarrow p\ )$
3. $F(t) \rightarrow m$ $\quad\quad$ $// \therefore V(t) \leftrightarrow F(t)$

3.2. 2. Dilema de los caníbales

En su conocida obra titulada "*Álgebra*", Godement (1967: 586) enuncia el dilema de los caníbales en la forma siguiente:

> "Los caníbales de una tribu están a punto de comerse un misionero. Deseando demostrarle su respeto a la dignidad y a la libertad humana, los caníbales proponen al misionero que decida él mismo su suerte, haciendo una corta declaración: Si ésta es verdadera, lo servirán asado, y, en caso contrario, lo servirán hervido. ¿Qué debe decir el misionero para salvar su vida? (según CERVANTES)"

He aquí la circularidad: si la oración "Seré hervido" es falsa, entonces debe ser hervido, lo cual hace que la oración sea verdadera por el pacto. $F(q) \rightarrow V(q)$. Por otra parte, si la oración es verdadera, entonces lo servirán asado, pero cuando esto suceda la oración, por el pacto, será falsa. $V(q) \rightarrow F(q)$. Nuevamente, advirtamos la fórmula $V(q) \leftrightarrow F(q)$, donde q= "Seré hervido". Es necesario recalcar que hasta el mismo Kleene (1974, p. 46) nos dice que "una forma de este enigma ocurre en "Don Quijote" ". Si algún misionero dijera: "Seré hervido" para invocar el *bucle milagroso*, se salvará de ser engullido por estos caníbales. Sin embargo, parece que de todas maneras va a morir diga lo que diga. Este el argumento reinterpretado.

1. Lo que dice el misionero es la oración "Seré hervido".

2. Si la oración antedicha es verdadera, el misionero no será hervido, y si no es hervido, entonces es asado.

3. Si la oración antedicha es falsa, el misionero será hervido.

POR LO TANTO, lo que lo que dice el misionero es verdadero si y solo si es falso.

Formalicemos esta paradoja con la siguiente notación: "*q*"es la oración que pronuncia el misionero. Hemos abreviado la propiedad "*H*" que indica la propiedad ser hervido así como la propiedad "*A*" que indica la propiedad de ser asado. La constante utilizada será la del misionero, representado con "*e*". "*F*" indicará la propiedad de ser una falsedad o mentira, y "*V*" la propiedad de ser verdadera.

1. $q = H(e)$
2. $[V(q) \rightarrow {\sim}H(e)] \wedge [{\sim}H(e) \rightarrow A(e)]$
3. $F(q) \rightarrow H(e)$ $\quad // \therefore V(q) \leftrightarrow F(q)$

3.2. 3. Dilema del cocodrilo

Stephen Cole Kleene re-escribió el antiguo dilema del cocodrilo en su conocida obra *Introducción a la Metamatemática*: "En el antiguo "dilema del cocodrilo", un cocodrilo ha robado un niño [evidentemente para comérselo]. El cocodrilo promete al padre devolverle su hijo, a condición de que *adivine por conjetura si el animal le devolverá o no el niño*. ¿Qué haría el cocodrilo si el padre conjeturase que el niño no le sería devuelto?" (Kleene, 1974, p. 46). Veamos la circularidad: si la oración "No me devolverás a mi hijo" es falsa, entonces debe el niño será engullido por el cocodrilo en virtud del pacto entre padre y reptil, lo cual implica que la oración es verdadera. $F(s) \rightarrow V(s)$. Por otra parte, si la oración es verdadera, entonces lo deben devolver a su padre, pero cuando esto suceda la oración será falsa. $V(s) \rightarrow F(s)$. Hasta aquí la situación paradójica del *bucle* o *loop*. Ahora, formalizaremos la solución paradójica del dilema antedicho:

1. Lo que dice el padre es la oración "Te comerás a mi hijo".

2. Si la frase antedicha es verdadera, el cocodrilo no se comerá a su hijo, y si no se come al niño, entonces lo devuelve.

3. Si la frase antedicha es falsa, el cocodrilo se comerá a su hijo.

POR LO TANTO, lo que lo que dice el padre es verdadero si y solo si es falso.

Aclararemos la notación utilizada. Hemos abreviado la propiedad "*C*" que indica la propiedad relacional diádica o binaria del comer que un individuo tiene con su respectiva cena. "D" es la relación de devolución que se establece entre el que devuelve y lo devuelto. Las constantes utilizadas serán el cocodrilo representado con "*k*", y el hijo representando con "*h*". "*F*" indicará la propiedad de ser una falsedad o mentira, y "*V*" la propiedad de ser verdadera.

1. $s = C(k,h)$

2. $[V(s) \rightarrow \sim C(k,h)] \wedge [\sim C(k,h) \rightarrow D(k,h)]$

3. $F(s) \rightarrow C(k,h) \qquad // \therefore V(s) \leftrightarrow F(s)$

3.2. 4. Paradoja de Protágoras[46]

Se sostiene que Protágoras era un profesor que transmitía sus conocimientos a los hijos de las familias ricas de Grecia a cambio de grandes sumas de dinero. Los cursos eran rápidos y

[46] De acuerdo a nuestra investigación, la paradoja de Protágoras (o *El abogado*) mantiene una estrecha relación con la paradoja de *El puente*. Y, dado que *El puente* forma parte de las variantes de *El Mentiroso*, entonces la paradoja de *El abogado* será también parte de la familia de *El Mentiroso*.

eficaces, y entre las enseñanzas gran parte la ocupaba la abogacía o retórica, “saber” cuyo nombre en ese tiempo era el de ‘arte de argüir ante los tribunales’. (Copi y Cohen, 2001: 314) Según Diógenes Laercio (1985: 204):

> “Pactó Protágoras con su discípulo Evatlo de enseñarle la oratoria forense por cierta paga, con la condición de que el discípulo daría de entrada la mitad de aquel tanto, y la otra mitad luego que defendiese algún pleito y lo ganase. Como se pasase mucho tiempo sin verificarse la condición pactada, pidió Protágoras el resto de la deuda, a lo que Evatlo satisfizo diciendo que todavía no había ganado ni orado causa alguna. Pero no se aquietó Protágoras, antes le puso pleito sobre ello; y hallándose ambos ante los jueces, dijo Protágoras: -Sábete, oh necio joven, que de cualquier modo que este pleito salga, debes pagarme; pues si te condenan a ello, me habrás de pagar por sentencia; y si te libran, me pagarás por nuestro pacto.- A esto respondió Evatlo: - Sabed también vos, oh sabio maestro, que por todo lo mismo no debo yo pagaros; pues si los jueces me absuelven, quedo libre por sentencia; y si pierdo el pleito, lo quedo por nuestro pacto.“

Reconstruyamos el argumento. Un día, a Protágoras se le presentó un joven que quería aprender abogacía, y le manifestó que no tenía dinero para pagarle por su enseñanza, pero que le pagaría después, apenas hubiera ganado su primer juicio, condición que fue aceptada por Protágoras. De esta manera, quedó celebrado un convenio entre ambos. Pasó mucho tiempo y nadie hacía uso de los servicios del nuevo abogado y, por lo tanto, todavía no había ganado ningún juicio. Entonces, frente a esa situación Protágoras amenazó a su discípulo diciendo que le abriría un proceso judicial para obligarle a pagar por sus servicios, a lo que el discípulo le contestó a su maestro diciendo que no le iba a pagar aun cuando le ganara en el juicio. Ante tal respuesta, Protágoras argumentó como sigue:

“Si yo te gano, entonces tú me pagas porque así dispone la ley. Si yo pierdo, entonces tú me pagas en virtud de nuestro convenio.”

Es decir, Protágoras le dijo al discípulo: "*Ya sea que yo gane o pierda, en cualquier caso tú me vas a pagar*".

A lo que el discípulo replicó argumentando como sigue: "*Si yo le gano, entonces no le pago porque así dispone la ley. Si yo pierdo, entonces no le pago por nuestro convenio.*"

Es decir, el discípulo le dijo al maestro: "Y*a sea que yo gane o pierda, en cualquier caso yo no le pago*".

La solución que defendió Leibniz de una variante muy conocida de la paradoja protagórica (que estampó en su tesis doctoral) hacía ver al problema en cuestión como una falsa paradoja ya que su resolución era demasiado fácil. De acuerdo al precursor de la lógica moderna el tribunal no debería fallar a favor de Protágoras. Si lo hiciera, cometería una injusticia, dado que Evatlo aún no ha ganado ningún caso (ni lo habría ganado después del fallo). Por supuesto, si, como debe ser, falla a favor de Evatlo, el pacto obligaría a Evatlo a pagar, dado que acaba de ganar un caso y, si no paga, Protágoras podrá demandarle otra vez, proceso que, casi con seguridad, ganaría. En esto, Protágoras tendría razón. (Clark, 2009: 13-14)

A pesar de que el intento de solución de Leibniz es del todo muy ingenioso, creemos que podemos usar el lenguaje deóntico no tanto para dar respuesta al problema de esta paradoja (que no es el tema central de esta tesis) como sí para poder apreciar la manera en la que esta paradoja se conecta con la paradoja de *El puente*. La diferencia primordial está en que en *El puente* solo hay un argumentador que mediante su aserción introduce la paradoja, en cambio, en la paradoja de Protágoras existen dos posiciones contrapuestas válidas desde el punto de vista de los involucrados. En el caso que nos interesa, lo paradójico será que el tribunal favorezca tanto al acusado como al demandante. Formularemos la paradoja en lenguaje natural:

1. Si el tribunal favorece a Evatlo, entonces Evatlo gana el juicio y es obligatorio que Evatlo le pague los honorarios
2. Si es obligatorio que Evatlo pague los honorarios, entonces el tribunal está favoreciendo a Protágoras
3. Si el tribunal está favoreciendo a Protágoras, entonces Evatlo no gana el juicio y no es obligatorio que Evatlo le pague los honorarios
4. Si no es obligatorio que Evatlo le pague los honorarios, entonces el tribunal favorece a Evatlo
5. El hecho de que el tribunal favorezca a Protágoras equivale a que el tribunal no favorezca a Evatlo.

Ahora bien, para formalizar en argumento anterior los símbolos de lo que nos valdremos serán los siguientes. La propiedad "*F*" indica la relación de favorecer que un tribunal (t) mantiene con otro; sea "*e*" (Evatlo) y "*p*" (Protágoras). "*G"*es la relación que alguien establece al ganar un juicio "*j*". "*O*" es la propiedad de ser obligatorio. "*P*" es la propiedad de pagar los honorarios.

1. $F(t,e) \rightarrow \{G(e,j) \wedge O[P(e)]\}$

2. $O[P(e)] \rightarrow F(t,p)$

3. $F(t,p) \rightarrow \{\sim G(e,j) \wedge \sim O[P(e)]\}$

4. $\sim O[P(e)] \rightarrow F(t,e)$

5. $F(t,p) = \sim F(t,e)$ // $\therefore$ $F(t,p) \wedge F(t,e)$

CAPÍTULO IV

LA PARADOJA DE EPIMÉNIDES

"Amigo de Platón pero más amigo de la verdad"

ARISTÓTELES

"Enemigo de Platón pero más enemigo de la falsedad"

ALFRED TARSKI

A continuación, demostraré que no hay razones suficientes para sostener que la paradoja de Epiménides es realmente una *paradoja*. Tanto Ferrater Mora (1994: 2694), como Saúl Kripke (1997: 110) identifican la paradoja de Epiménides y la de *El Mentiroso*. Esto me parece discutible. Pero, la paradoja del Epiménides tampoco es una variante de la paradoja de *El Mentiroso*, ni es análoga a la de la Tarjeta de Jourdain o a la de Grelling. Sin embargo, si bien Eduardo Barrio (1998: 46) describe la paradoja de Epiménides como una variante de la del Mentiroso, sólo razona la paradoja partiendo de la verdad de lo dicho por Epiménides para derivar su falsedad, no a la inversa y sólo la menciona como una variante de *El Mentiroso* por su estrecho parecido lingüístico. Por este motivo, el *Epiménides* no debería ser comparado con la paradoja de *El Mentiroso*, pues esta última sí es un real y serio problema lógico; mientras que el *Epiménides* no pasa de ser un enigma solucionable mediante reglas lógicas.

4.1. Análisis lógico de la paradoja de Epiménides

En la Carta a Tito escrita por San Pablo en el Nuevo Testamento de la Biblia pueden leerse estas líneas: “Dijo uno de ellos [Epiménides], propio profeta o adivino de esos mismos isleños: Son los Cretenses siempre mentirosos (…). Este testimonio es verdadero”. Esta paradoja puede ser considerada como una paradoja tipo argumento y como una paradoja tipo oración, sólo que no es paradójica *per se* en ninguno de los dos sentidos. Este sería la versión argumental de esta paradoja:

1. Una expresión es dicha por Epiménides. $[P(q)]$
2. Esta expresión es la frase “Todo lo que es dicho por un cretense, es falso”. $\{q=(\forall y)[C(y)\rightarrow F(y)]\}$
3. Si una expresión es dicha por Epiménides, entonces es dicha por un cretense. $[P(q)\rightarrow C(q)]$.

Por lo tanto, lo que Epiménides dice es verdadero si y solo si es falso. $[V(q)\leftrightarrow F(q)]$

De modo resumido, se conoce a la paradoja de Epiménides como la expresión oracional: “Todos los cretenses son mentirosos” (que llamaremos *q*) dicha por Epiménides de Creta. Algunos filósofos y lógicos piensan que esta paradoja es como la de *El Mentiroso*. Y dado, que la paradoja es aquella cuya verdad implica su falsedad así como cuya falsedad implica su verdad, tendríamos que probar que si la oración de Epiménides es verdadera, entonces es falsa y que si la oración de Epiménides es falsa entonces es verdadera. Con esta prueba podríamos establecer una equivalencia con la paradoja de *El*

Mentiroso. El detalle es que solamente podemos probar que $V(q) \rightarrow F(q)$ y no que $V(q) \leftrightarrow F(q)$.

La falsa analogía entre esta paradoja y la de *El Mentiroso* nos obliga a probar que si la oración de Epiménides es verdadera, entonces es falsa y que si la oración de Epiménides es falsa entonces es verdadera. Pero, solamente podemos probar que $V(q) \rightarrow F(q)$. Postulemos, metalógicamente, la siguiente afirmación: "Si tenemos un consistente cuerpo de premisas "z" entonces podemos afirmar que solo podemos derivar, o solo la fórmula B, o solo $\neg B$. Para demostrar la imposibilidad de demostración de una conclusión $\neg B$ (y, en consecuencia la demostrabilidad de B) a partir de cierto cuerpo de premisas "z", bastará con mostrar que sólo se puede llegar a $\sim B$ por métodos erróneos". Siguiendo este postulado y haciendo que $\sim B=$"$F(q) \rightarrow V(q)$, donde q= 'Todos los cretenses son mentirosos' ", podemos demostrar la imposibilidad de demostración de $F(q) \rightarrow V(q)$ a partir del cuerpo de tres premisas $z = \{P(q) \wedge q=(\forall y)[C(y) \rightarrow F(y)] \wedge [P(q) \rightarrow C(q)]\}$. Como sabemos la fórmula $F(q) \rightarrow V(q)$ puede ser reducida a $V(q)$, y por lo tanto, con el argumento anterior habremos demostrado la imposibilidad de demostración de $V(q)$, y derivadamente la demostrabilidad de $F(q)$.

Como una oración no paradójica que es, la de Epiménides es, en términos de la *Teoría de Puntos Fijos* de Saúl Kripke (1997), una oración no fundada con valor de verdad en el punto fijo intrínseco, es decir, la oración de Epiménides es una oración que tiene valor de verdad para la interpretación que evite la contradicción. Específicamente, dicha oración solo puede ser consistente, si asumimos su falsedad, pues si suponemos su verdad concluiremos su falsedad. En este sentido, la paradoja de Epiménides resulta ser igual a los principios lógicos autorreferidos y el principio de verificación que se caracterizan por tener un punto fijo intrínseco que los hacen verdaderos o falsos por razones formales[47]. Asimismo, la paradoja de Epiménides se revela como una seudoparadoja (Stahl, 1971: 94-96) por ser un argumento que cae en una falacia. De este modo, la paradoja de Epiménides se revela como una falacia informal del *continuum* (García Damborenea, 2000: 236) que comete el falaz proceder de creer que posiciones extremas son lo mismo (ya que si se supone que la oración dicha por Epiménides es verdadera, entonces se concluye que es falsa, pero de ahí si se pretende hacer creer que lo mismo ocurre si se supone que la mencionada oración es falsa, a saber, que derivará en una falsedad, entonces caemos en una falacia), y es también una falacia formal basada en una errada regla lógica de primer orden que llamaré "Falacia de Aristóteles" (1998: 202, 1012b 15-17) [48] la cual sostiene que la negación de "Todos las cosas son verdaderas" es "Todas las cosas son falsas" y no su correspondiente "Algunas cosas no son verdaderas".

Primero, probaremos la primera parte de esta paradoja. Es decir, demostraremos que

$\{P(q) \wedge q=(\forall y)[C(y)\rightarrow F(y)] \wedge [P(q)\rightarrow C(q)]\} \rightarrow [V(q) \rightarrow F(q)]$

[47] Un principio lógico autorreferido sería la expresión: "El principio del tercio excluso es, o bien verdadero, o bien falso". Como podemos apreciar, el principio del tercio excluso (que sostiene que toda proposición es verdadera o falsa sin haber una tercera opción) puede aplicarse a sí mismo para probar su propia validez. El principio de verificación establece que toda proposición solo tendrá significado si puede ser comprobable mediante la experiencia. Sin embargo, el mismo principio no puede ser sometido a comprobación, por lo cual perdería significado y verdad.

[48] "(…) quien afirma que todas las cosas son verdaderas convierte en verdadero también el enunciado contrario al suyo [este enunciado sería "Todas las cosas son falsas"] y, por tanto, convierte el suyo propio en no verdadero (…)".

1. $P(q)$	
2. $q = (\forall y)[C(y) \rightarrow F(y)]$	
3. $P(q) \rightarrow C(q)$	// $\therefore V(q) \rightarrow F(q)$
4. $V(q)$	// $\therefore F(q)$
5. $V(\ (\forall y)[C(y) \rightarrow F(y)]\ )$	2 y 4 Regla de las identidades
6. $(\forall y)[C(y) \rightarrow F(y)]$	5 y (D)* Modus Ponens
7. $C(q) \rightarrow F(q)$	6 Ejemplificación Universal
8. $P(q) \rightarrow F(q)$	3 y 7 Silogismo Hipotético
9. $F(q)$	1 y 8 Modus Ponens
10. $V(q) \rightarrow F(q)$	4-9 Prueba condicional

La anterior demostración ha sido la prueba de la primera “parte” de la conclusión de la paradoja de Epiménides.

Enseguida, ensayaremos una “prueba” de la segunda parte de la conclusión de la paradoja de Epiménides para luego revisarla y corregirla. Es decir, intentaremos probar que

$$\{P(q) \wedge q=(\forall y)[C(y) \rightarrow F(y)] \wedge P(q) \rightarrow C(q)\} \rightarrow [F(q) \rightarrow V(q)]$$

1. $P(q)$	
2. $q=(\forall y)[C(y)\rightarrow F(y)]$	
3. $P(q)\rightarrow C(q)$	// $\therefore F(q) \rightarrow V(q)$
4. $F(q)$	// $\therefore V(q)$
5. $F((\forall y)[C(y)\rightarrow F(y)])$	4 y 2 Regla de las identidades
6. $\sim(\forall y)[C(y)\rightarrow F(y)]$	5 y (D)*** Modus Ponens
7. $\sim\sim(\exists y)\sim[C(y) \rightarrow F(y)]$	6 Intercambio de cuantificadores
8. $(\exists y)\sim[C(y) \rightarrow F(y)]$	7 Doble Negación
9. $\sim[C(q) \rightarrow F(q)]$	8 Ejemplificación existencial
10. $C(q) \wedge \sim F(q)$	9 Def. del condicional y De Morgan
11. $\sim F(q)$	10 Simplificación
12. $\sim\sim q$	11 y (D)** Modus Tollens
13. q	12 Doble Negación
14. $V(q)$	13 y (D)**** Modus Ponens
15. $F(q) \rightarrow V(q)$	4-14 Prueba condicional

Si analizamos con detenimiento el paso 9 de esta última prueba, nos daremos cuenta del error en el que se cae inconscientemente al afirmar que la paradoja de Epiménides es verdadera si y solo si es falsa: no podemos emplear constantes al hacer la ejemplificación existencial (Suppes, 1979: 138). Hacer semejante atrocidad lógica sería como deducir que Michifuz es negro, porque algunos gatos son negros y porque Michifuz es un gato. Volviendo al análisis lógico dejado de lado líneas ha, la prueba del segundo argumento la seguiremos desarrollando desde donde fue notado el desliz, es decir, desde el paso 9 y deduciremos solo lo que se puede deducir.

9. $\sim[C(\alpha) \rightarrow F(\alpha)]$	8 Ejemplificación existencial
10. $C(\alpha) \wedge \sim F(\alpha)$	9 Def. del condicional y De Morgan
11. $\sim F(\alpha)$	10 Simplificación
12. $\sim\sim \alpha$	11 y (D)** Modus Tollens
13. α	12 Doble Negación
14. $V(\alpha)$	13 y (D)**** Modus Ponens
15. $\exists z\, V(z)$	15 Generalización existencial
16. $F(q) \rightarrow (\exists z)\, V(z)$	4-16 Prueba condicional

Con esto probamos que no es posible pasar de F(q) a V(q). Si q es falsa entonces algunas expresiones son verdaderas. Por ende, la segunda parte de la paradoja no logra producirse. Tan solo tenemos algo así como “media” paradoja.

Finalizaremos esta parte de nuestra investigación expresando el problema en cuestión en palabras más sencillas. En la paradoja de *El Mentiroso*, se sostiene que alguien dice “Lo que digo es mentira”. Si suponemos que lo dicho por esa persona es verdadero, entonces concluiremos que es falso, puesto que si es verdad que lo dicho por esta persona es falso, entonces su enunciado sería falso. Y, si suponemos que lo dicho por esa persona es falso, entonces concluiremos que es verdadero, puesto que al suponer que ese enunciado es falso estaríamos confirmando el contenido del enunciado “Lo que digo es mentira”, y esto conduciría a pensar que, a pesar de nuestra hipótesis, es verdadero. Es decir, si ese enunciado es verdadero, entonces es falso y si es falso, entonces es verdadero. Esta incómoda situación, veremos enseguida, no ocurre en la paradoja de Epiménides.

Formularemos, ahora, la paradoja de Epimémides. Epiménides, el cretense, dijo que todos los cretenses son mentirosos. Pues bien, si lo dicho por Epiménides es verdad, entonces tenemos que su enunciado es mentira, puesto que él mismo es un cretense y así él estaría diciendo mentiras. Sin embargo, si lo dicho por Epiménides es falso, entonces no podemos decir que su enunciado sea verdad, puesto que si no es cierto que "Todos los cretenses son mentirosos" entonces "No todo cretense es mentiroso". Es decir, sólo algunos cretenses no son mentirosos. Pero, dentro de este grupo de cretenses que no son mentirosos no tenemos porque incluir al mismo Epiménides. Podría como no podría estar incluido. Por todo esto, de la suposición de falsedad del enunciado del cretense no se puede concluir su verdad. Esta es la razón por la cual el enunciado de Epiménides no se constituye en una paradoja como sí ocurre con el enunciado de *El Mentiroso*.

CAPÍTULO V

ANÁLISIS MODAL DE LA PARADOJA DE EPIMÉNIDES

> “Le aconsejo […] querido amigo,
> seguir primero el Curso de Lógica.
> Allí le peinarán debidamente el espíritu,
> se lo calzarán en botas de tortura,
> de suerte que se deslice con más tiento
> por el sendero del pensar
> y no se tuerza acá y allá
> y se descarríe.
> […]
> En realidad, la fábrica de pensamientos
> es como la obra maestra del tejedor:
> A un golpe de pedal se mueven mil hilos,
> suben y bajan las devanaderas,
> corren invisibles los cabos,
> y un golpecito solo fragua miles de combinaciones.
> Así también el filósofo aparece
> y nos demuestra cómo se debe proceder:
> lo primero tiene que ser así, lo segundo asá,
> y de ahí se deriva lo tercero y lo cuarto,
> y si no existiera lo primero y lo segundo,
> no tendríamos nunca lo tercero y lo cuarto.
> Así lo aprecian los discípulos por doquier,
> pero ninguno ha llegado a ser tejedor.
> Quien aspira a conocer y describir algo vivo,
> busca ante todo desentrañar el espíritu;
> tiene entonces las partes en sus manos
> Y sólo falta, ¡por desgracia!, el lazo espiritual”.
>
> **JOHANN WOLFGANG VON, GOETHE**

En esta última parte de la tesis, haré una distinción entre contradicciones necesarias y contradicciones posibles. Esto se logrará usando la herramienta de la lógica modal la cual nos permitirá comprender porqué la paradoja de Epiménides pasa por paradoja cuando en realidad ya hemos demostrado que no lo es.

5.1. Introducción a la lógica modal

De acuerdo a Deaño (2001: 313-318), la lógica clásica es una lógica puramente asertótica. Esto quiere decir que

1) las proposiciones solo pueden tener dos valores veritativos, y

2) las proposiciones son o bien verdaderas a secar, o bien falsas a secas, sin matices.

Esto implica que no se admiten valores intermedios y que tampoco puede matizarse la verdad o falsedad de una proposición, añadiendo, por ejemplo, es verdad pero… o es falso pero…. Esto último significa que no se aceptan modalidades de esa verdad o de esa falsedad. Ahora bien, la lógica que se ocupa de esos matices se conoce como "lógica modal".

La lógica modal puede ser entendida en sentido restringido y en sentido amplio[49]. El sentido restringido de la lógica modal es el sentido clásico. Así, la lógica modal se ocuparía solo de las llamadas "modalidades aléticas" o modalidades de verdad. Estas son: "necesario", "posible", "imposible" y "contingente". Por ende, la lógica modal alética estudia las relaciones de inferencia entre enunciados modificados por algunos de estas modalidades. Esta es la lógica de la que nos ocuparemos en este trabajo.

[49] La lógica modal en sentido amplio se compone de modalidades diversas. Así, tenemos la lógica deóntica, la lógica epistémica y la lógica temporal.

La base de este sistema lógico consiste en considerar que las proposiciones pueden no sólo ser verdaderas o falsas, sino que son verdaderas o falsas de distintos modos, es decir, con matices**.** Así, una proposición puede ser verdadera sin más, o falsa sin más. Pero también puede ocurrir que la proposición tenga que ser verdadera, esto es, que no pueda ser falsa y, a la inversa, que sea falsa y que no pueda ser verdadera. Por ejemplo:

1) "Sócrates conversaba mucho de filosofía" es verdadera de un modo contingente; mientras que
2) "Sócrates era filósofo o no es cierto que era filósofo" es verdadera de un modo necesario.

Análogamente,

3) "Sócrates murió por tomar vino" es falsa pero posible; mientras que
4) "2+3=6" es falsa pero imposible. [50]

Así, entendemos que en la lógica modal actual la necesidad, posibilidad, contingencia e imposibilidad son modalidades. Los operadores modales que se van a introducir a continuación representan estos conceptos:

[50] Estos ejemplos fueron tomados de Orayen (2005: 290).

□p: p es necesaria[51]

◊p: p es posible

Ip: p es imposible[52]

Cp: p es contingente[53]

La lógica modal nace con Aristóteles. El comprendió que las nociones modales desempeñan un papel decisivo en la validez de ciertos tipos de inferencia. Por ello, podemos sostener que Aristóteles fue el fundador de la lógica modal. Los lógicos medievales establecieron la distinción entre modalidades *de dicto*, que se refieren al enunciado entero, como cuando decimos que es necesario que todos los A sean B, y modalidades *dere*, que se refieren al verbo, como cuando decimos que todos los A son necesariamente B.

[51] Por ejemplo: "Mi padre biológico es mayor que yo". Esta proposición no solo es verdadera sino necesariamente verdadera pues no puede ocurrir lo contrario, a saber, que mi progenitor sea menor que yo. Entonces, si una proposición tiene que ser verdadera, diremos que es necesariamente verdadera porque si algo es necesario, seguro que ocurre. No es posible que lo necesario no ocurra. La necesidad es una modalidad que afecta a las proposiciones y puede definirse en función de la posibilidad. En lógica modal:
$\Box\varphi$, se lee: es necesario que φ. Esta proposición es imposible que sea falsa.
[52] Si es necesariamente falsa, diremos que es imposible. Por ejemplo: "El triángulo tiene 20 lados". Notamos que es necesariamente falsa, es decir, imposible. Si una proposición puede ser verdadera, es decir, si no es imposible, diremos que es posible (de ahí que todas las proposiciones necesarias sean posibles, pero no a la inversa). Entonces, si algo es posible, puede ocurrir, es decir, no es seguro que no ocurra. La posibilidad es una modalidad que afecta a las proposiciones y puede definirse en función de la necesidad. En lógica modal:
◊ φ, se lee: es posible que φ . Esta proposición es imposible que sea necesaria.
[53] Si no es necesaria ni imposible, la proposición es contingente(es decir, unas proposiciones serán verdaderas y otras falsas). Por ejemplo, "La botella tiene tapa". Notamos que la botella podría tener tapa como no tenerla. Por ello, esta proposición es contingente. La contingencia es una modalidad que afecta a proposiciones y puede definirse en función de la necesidad o de la posibilidad. Sea P una proposición. Es contingente que P si y solo si es posible que P y es posible que no P. Equivalentemente, es contingente que P si y solo si no es necesario que P y no es necesario que no P.

Con ayuda de la negación, todas las nociones modales pueden reducirse a una. Y esa noción única puede ser, o bien la noción de necesidad, o bien la noción de posibilidad. Si tomamos como primitiva la noción de necesidad, tendremos entonces (Orayen, 2005: 291):

$\Box p$

$\Diamond p =_{def} \sim\Box\sim p$

$Ip =_{def} \Box\sim p$

$Cp =_{def} \sim\Box p \land \sim\Box\sim p$

Si tomamos como primitiva la noción de posibilidad, tendremos entonces (Deaño, 2001: 315):

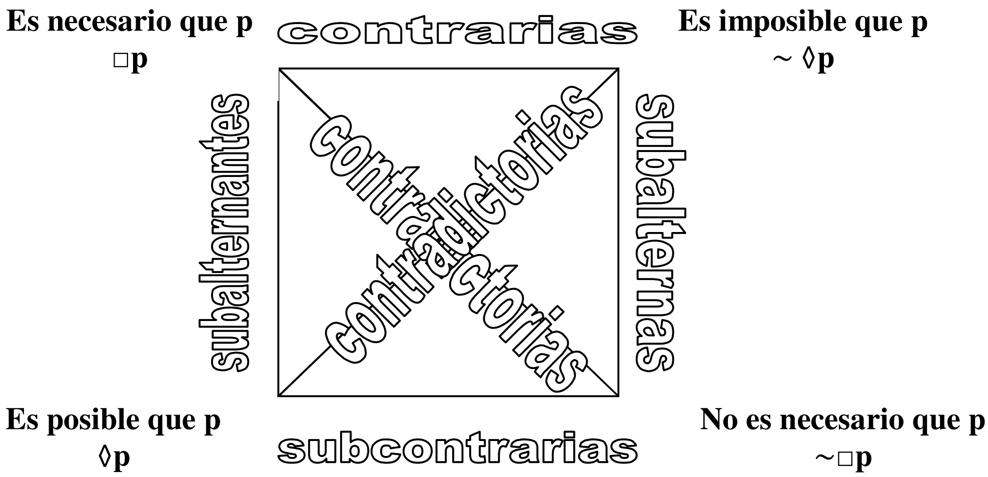
$\Diamond p$

$\Box p =_{def} \sim\Diamond\sim p$

$Ip =_{def} \sim\Diamond p$

$Cp =_{def} \Diamond\sim p \land \Diamond p$

En un sistema modal, por lo tanto, podría introducirse □ o ◊ como símbolo primitivo. Para recordar las relaciones lógicas entre expresiones modales podemos recurrir al conocido Cuadro de Boecio para la modalidad.



Algunas de las leyes de la lógica modal proposicional son las siguientes:

(1) $p \rightarrow \Diamond p$ [54]

(2) $\Box p \rightarrow p$

(3) $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$

(4) $\sim \Diamond (p \vee q) \leftrightarrow (\sim \Diamond p \wedge \sim \Diamond q)$

(5) $\Diamond (p \vee q) \leftrightarrow (\Diamond p \vee \Diamond q)$

(6) $(\Box p \vee \Box q) \rightarrow \Box (p \vee q)$

(7) $\Diamond (p \wedge q) \leftrightarrow (\Diamond p \wedge \Diamond q)$

La lógica puede entenderse como un sistema lógico específico en el que se estudian las relaciones de inferencia entre proposiciones modificadas por operadores modales. Así lo

[54] $p \rightarrow \Diamond p$, (lo real es posible (*ab esse ad posse valet consequentia*, como decían los medievales)).

entendieron Aristóteles y los lógicos de la Baja Edad Media. Pero, también la lógica modal puede entenderse como el estudio de la noción de necesidad lógica.

Por ejemplo, según Aristóteles la inferencia válida en general es aquel discurso en el que si sus premisas son verdaderas, necesariamente lo es también la conclusión. Es decir, cuando es imposible que sus premisas sean verdaderas y su conclusión falsa, la inferencia es válida. Aclaremos esto: no es que en una inferencia válida la conclusión sea verdadera de manera necesaria. Lo que afirmamos es que es necesario que sea verdadera si las premisas lo son. La necesidad se refiere al nexo entre premisas y conclusión. Por consiguiente, se trata de que

$\Box\ \{[(p \rightarrow q) \land p] \rightarrow q\}$, donde el operador $\Box$ afecta directamente al condicional que representa el paso de las premisas a la conclusión.

Entonces, nos encontramos con que el "objeto formal" de la lógica solo puede ser definido recurriendo a nociones modales.

Según Orayen (2005: 300), C. I. Lewis es el responsable que haber marcado el comienzo de la lógica modal en su forma moderna. En la lógica proposicional de los *Principia Mathematica* se usa el condicional material, también llamado por Russell y Whitehead "implicación material". Pero, según Lewis la noción básica de la lógica (la relación de deducibilidad: "q es deducible de p", o "q se sigue formalmente de p") es tan central e importante como para representarlo mediante un condicional, símbolo de una relación excesivamente débil.

Para hacerle frente a la “implicación material”, Lewis forja la “implicación estricta”. Su objetivo es el de construir un cálculo en el que “p implica q” sea sinónimo de “q es deducible de p”. Esto pretende porque, en la lógica clásica el uso del conector condicional se nota ciertos defectos que Lewis prefiere evitar.

El punto de partida de las investigaciones de Lewis en lógica modal, fue la observación de que hay una implicación distinta de la material, más fuerte que ella, y con diferentes leyes formales. Lewis la llamó “implicación estricta” y le asigno el siguiente símbolo “$\succ$”. Lewis publicó un sistema axiomático para la implicación estricta en su libro *A Survey of Symbolic Logic*, por este motivo se sostiene que C. I. Lewis es el padre de la lógica modal moderna (Orayen, 2005: 301).

Puede leerse “$p \succ q$” de varias maneras alternativas: “p implica estricta o necesariamente q”, o también “q se sigue de p”. Esta lectura sugiere que la implicación estricta es la implicación lógica y, $p \succ q$ puede definirse así:

$p \succ q =_{def} \Box (p \to q)$

O de manera equivalente

$p \succ q =_{def} \sim \Diamond (p \wedge \sim q)$

Es decir, p implica lógicamente a q si y solo si no es lógicamente posible que p sea verdadero y q falso. Lo esencial es la presencia, en la definición, de la noción modal de posibilidad. Desde luego, si una proposición implica estrictamente a otra también la implica materialmente (es decir, también es verdadero el condicional formado por ellos). Así pues, se cumple

$(p \succ q) \succ (p \rightarrow q)$

Pero, la inversa no se cumple.

5.2. Semántica de los mundos posibles

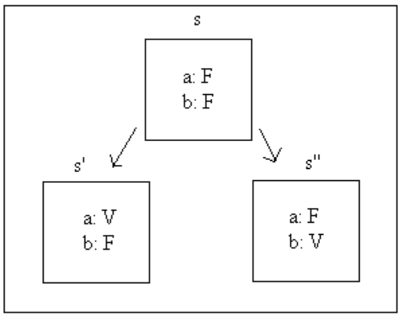
Para Priest (2000: 63-65) la moderna comprensión estándar de los operadores modales sostiene que cada situación s, viene acompañada de un montón de posibilidades, es decir, situaciones que son tan posibles de ser definitivas hasta donde llega s; digamos, situaciones que pueden surgir sin violar las leyes de la física. Por lo tanto, si s es la situación en la que ahora me encuentro (estar en Perú), mi estadía en Japón dentro de una semana es una situación posible; mientras que mi estadía en *Alfa Centauri* (a más de cuatro años luz de distancia) no lo es. Según Leibniz, los lógicos llaman con frecuencia a estas situaciones posibles, mundos posibles.

Trelles (2001: 24-25) considera que el mundo real en tanto existe es posible, por lo tanto es un mundo posible.[55] Pero claramente no todo mundo posible es real. Y si los otros mundos posibles no son el mundo real queda pendiente la cuestión de determinar donde se ubican. Los mundos posibles, no actuales, no están localizados en ningún lugar en el espacio físico. Ellos están localizados, si lo están, en el espacio conceptual; o, más bien, en el espacio lógico, para usar un concepto wittgensteinniano. Sin embargo, más adelante, en la parte 3, discutiremos esta tesis.

Ahora bien, decir que ◊a (es posible el caso de que a) es verdadero en s, es decir, que a es de hecho verdadero en al menos uno de los mundos posibles asociados con s. Y decir que □a (es necesariamente el caso de que a) es verdadero en s, es como decir que a es verdadero en todos los mundos posibles asociados con s. Esto sucede, pues ◊ y □ no son funciones de verdad. Porque a y b podrían tener el mismo valor de verdad en s, digamos F, pero podrían tener diferentes valores de verdad en los mundos asociados con s. Por ejemplo, a podría ser cierto en uno de ellos (digamos s'), pero b podría no ser cierto en ninguno de ellos.

Veamos un ejemplo de una situación de mundos posibles:

[55] Recordemos la siguiente fórmula $p \rightarrow \Diamond p$ que considera que si algo es real, entonces es posible.

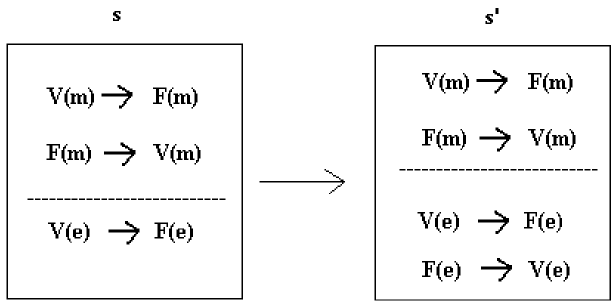


El valor de verdad en el mundo s de □a es falso, pues a es falso en el mundo s y en s''. El valor de verdad en el mundo s de ◊b es verdadero, pues b es verdadero en s''. El valor de verdad en s de ◊(a ∧ b) es falso pues, en ningún mundo ocurre que esa conjunción sea verdadera.

5.2. 1. El caso de la paradoja de Epiménides

Como ya hemos visto la paradoja de *El Mentiroso* y la de Epiménides no son equivalentes. La paradoja de *El Mentiroso* es definitivamente una paradoja que no tiene un valor de verdad determinado. En cambio, la paradoja de Epiménides puede ser "resuelta" considerando que tan solo es media paradoja y no una paradoja completa como la de *El Mentiroso*.

Pensemos en los mundos posibles para entender lo que queremos explicar. Vamos a postular que existen dos mundos posibles. El primer mundo es el nuestro en el que los cretenses conformaron una población con varios cientos de habitantes en los tiempos de Epiménides. Desde este mundo podemos acceder al segundo mundo. El segundo mundo es aquel en donde Epiménides es el único cretense que existió porque una guerra, una peste o un desastre natural arrasaron con todos sus paisanos.



En el primer mundo posible (s), el nuestro, la expresión de Epiménides "Todos los cretenses son mentirosos" no resulta ser una verdadera paradoja mientras que la de *El Mentiroso* si lo es. Es decir, en el mundo 1 no ocurre que una paradoja sea equivalente a la otra. Formalmente:

~ (La paradoja de El Mentiroso = La paradoja de Epiménides)

Pero, sólo en un caso especial (el segundo mundo: s') podemos decir que "Todos los cretenses son mentirosos" es verdadera y falsa a la vez (como la oración de *El Mentiroso*). Esto solo ocurrirá si asumimos que sólo existe un único cretense, a saber, Epiménides. Esto sucederá debido a que si sólo existe un cretense, podemos suponer falsa a la oración de Epiménides y esto no impediría que también la negación de la oración del profeta "Algunos cretenses son honestos" sea verdadera por la sencilla razón de que si el referente de "algunos" y "todos" es único, v. g. Epiménides, entonces pasar de una premisa existencial a una universal no representaría falacia alguna. Sin embargo, el dato de que Epiménides es el único habitante de su isla altera el esquema original de premisas y cambia el argumento de Epiménides por otro muy distinto. No obstante, la idea era mostrar que el *Epiménides* puede llegar a ser una paradoja como la de *El Mentiroso* solo asumiendo ciertas condiciones específicas y especiales. Es decir, en el mundo s' ocurre que una paradoja sea equivalente a la otra. Formalmente:

(La paradoja del Mentiroso = La paradoja de Epiménides)

A partir del anterior argumento se concluye que el *Epiménides* es una contradicción paradójica solo en algunos mundos posibles, pero no en todos. Mientras que la paradoja de *El Mentiroso* es una contradicción necesaria en todos los mundos posibles, en cambio, el *Epiménides* es una contradicción posible que ocurre solo en determinados mundos posibles. Formalmente:

$\Box\ [V(m) \leftrightarrow F(m)]$, donde m = *El Mentiroso*

Pero,

$\Diamond\ [V(e) \leftrightarrow F(e)]$, donde e = *El Epiménides*

CONCLUSIONES

1. La *falacia* y la *paradoja* comparten algunas similitudes. Por ejemplo, ambos conceptos aluden a razonamientos, ambos tienen un sentido coloquial y un sentido técnico en el que pueden ser entendidos, y ambos poseen razones por la que ser estudiados: identificar fallas en los argumentos (en el caso de las falacias) y dar solución a los mismos (en el caso de las paradojas).

2. La *aporía* surge por argumentos que parten de premisas contradictorias dando lugar a distintas contradicciones.

3. La *antinomia* aparece cuando tanto una proposición como su contradictoria tienen una demostración.

4. La paradoja se define como aquel argumento que tiene premisas aceptables, una demostración correcta pero una conclusión inaceptable.

5. La interpretación objetual afirma que "$(\forall x)\ P(x)$" significa que todo objeto del universo tiene la propiedad P; mientras que "$(\exists x)\ P(x)$" significa que hay al menos un objeto del universo que es P.

6. La interpretación sustitucional afirma que "$(\forall x)Px$" significa que todas las instancias de "P…" son verdaderas; mientras que "$(\exists x)Px$" significa que al menos una instancia de sustitución de "P…" es verdadera.

7. Ruth B. Marcus estimaría la interpretación sustitucional como la más adecuada en comparación con la interpretación objetual. Esta interpretación permite ligar variables de cualquier categoría gramatical sea modal o epistémica. Asimismo, la cuantificación de

segundo orden no tendría problemas (e incluso se podría cuantificar sobre las mismas proposiciones).

8. La familia de paradojas de *El Mentiroso* puede ser entendida en dos niveles. Por un lado, tenemos el nivel argumentativo y por otro lado, el nivel oracional.

9. La paradoja de *El Mentiroso* tiene las propiedades de: autorreferencia, circularidad y contradicción.

10. La 'Tarjeta de Jourdain', el 'Libro Antinómico de Tarski', la paradoja de Yablo, etc. son variedades de la paradoja de *El Mentiroso*.

11. La paradoja de Epiménides es una oración infundada (con punto fijo intrínseco) que resulta siendo solo falsa.

12. La paradoja de Epiménides se revela como una seudoparadoja por ser un argumento que cae en una falacia.

13. La paradoja de *El Mentiroso* es una contradicción necesaria en todos los mundos posibles, pero la de Epiménides es una contradicción que solo ocurre en algunos mundos posibles.

BIBLIOGRAFÍA

ARISTÓTELES. (1998). *Metafísica.* Madrid: Gredos.

BARNES, J. (1992). *Los presocráticos.* Madrid: Cátedra.

BARRIO, E. (1998). *La Verdad Desestructurada.* Buenos Aires: Eudeba.

……………(2004). "Entidades Abstractas". En: R. Orayen y A. Moretti. *Filosofía de la lógica*. Madrid: Trotta, 195-215.

BEALL, J. C. (2001). "Is Yablo's paradox non-circular?". En: *Analysis*, vol. 61, 176-187

BEUCHOT, M. (1986). "Sobre la distinción entre 'esencia' y 'accidente' ". En: *Contextos*, Nº 8, 7-20.

BLÁNQUEZ, A. (1985). *Diccionario Latino-Español*. Barcelona: Sopena.

BOCHENSKI, I. (1968). *Historia de la lógica formal*. Madrid: Gredos.

BORGES, J. (1966). "La perpetua carrera de Aquiles y la Tortuga". En: J. Borges. *Discusión*. Buenos Aires: EMECÉ, 113-120.

…………… (1975). *El Libro de Arena.* Buenos Aires: EMECÉ.

CAMACHO, L. (2005). *Lógica Simbólica Básica*. México: LIMUSA.

CERVANTES, M. (1995). *El Ingenioso Hidalgo Don Quijote de la Mancha*. Madrid: Cátedra.

CLARK, M. (2009). *El gran libro de las paradojas*. Madrid: Gredos.

COPI, I. y C. COHEN. (2001). *Introducción a la lógica*. México: LIMUSA.

DANCY, J. y E. SOSA (comp.) (1992). *A Companion to Epistemology.* Massachussets: Blackwell.

DEAÑO, A. (2001). *Introducción a la lógica formal.* 1ra. Reimpresión, Madrid: Alianza Editorial.

DE LA TORRE, A. (2000). *Física Cuántica para filó-sofos.* México: FCE.

DE MARCO, N. (2007) "Kripke y el abandono de la bivalencia: límites de la negación no-clásica". Disponible en: http://www.accionfilosofica.com/misc/1198921669art.doc

DIÓGENES LAERCIO. (1985). *Vidas, opiniones y sentencias de los Filósofos más ilustres*. Barcelona: Ed. Teorema.

FERRATER MORA, J. (1967). "Sobre el llamado 'compromiso ontológico'". En: *Diánoia,* Vol 13, Nº 13, 185-220.

……………(1994). *Diccionario de Filosofía.* T. IV. Barcelona: Ariel.

FERRO, J. (1966). *Procedimientos decisorios para fórmulas monádicas de primer grado.* Tesis para optar por el grado de Dr. Lima: UNMSM.

FRÁPOLLI, M. (2007). "Cuantificadores". En: *Filosofía de la lógica*. Madrid: Tecnos.

FRÁPOLLI, M. y E. ROMERO. (1998). *Una aproximación a la filosofía del lenguaje.* Madrid: Síntesis.

GALILEI, G. (1945). *Diálogos acerca de dos nuevas ciencias*. Buenos Aires: Losada.

GAMUT, L. T. F. (2004). *Introducción a la lógica*. 2da. reimpresión. Buenos Aires: Eudeba.

GARCÍA DAMBORENEA, R. (2000). *Uso de razón. Diccionario de falacias*. Madrid: Biblioteca Nueva.

GARCÍA ENCINAS, M. (2006). "¿Metafísica Analítica?". En: *Límite. Revista de Filosofía y Psicología*, Volumen 1, Nº 14, 87-107.

GARCÍA MARQUÉS, A. (2006). "La desactivación de la ontología en W. Quine". En: *Thémata. Revista de Filosofía.* Núm. 37, 237-249.

GARCÍA SUÁREZ, A. (2011). *Modos de Significar: una introducción temática a la filosofía del lenguaje*. 2da. edición, Madrid: Tecnos.

GARCÍA ZÁRATE, Ó. (2006). *Deflacionismo y Minimalismo*. Tesis para optar por el grado de Dr. Lima: UNMSM.

…………… (2012). *Elementos de Lógica*. Lima: UNMSM.

GODEMENT, R. (1967). *Álgebra*. Madrid: Ed. Tecnos.

GRELLING, K. (1943). *Teoría de los Conjuntos.* México: Logos de México.

GUPTA, A. y N. BELNAP.(1993). *The Revision Theory of Truth.* Cambridge: MIT Press.

HAACK, S. (1982). *Filosofía de las lógicas*. Madrid: Cátedra.

HART, W. (2007). “Les Liaisons dangereuses”. En: I Curso Internacional de Filosofía: “Epistemología y Metodología de las Ciencias”. 2 abril - 4 mayo de 2007, UNMSM. Originalmente en: Andrew Irving (ed.), *Philosophy of mathematics*, XI Vol. de *The Handbook of the Philosophy of Science*, Ámsterdam, North-Holland/ Elsevier. (En prensa.)

HILBERT, D. y W. ACKERMANN. (1962). *Elementos de Lógica Teórica.* Madrid: Tecnos.

HOFSTADTER, D. (1987). *Gödel, Escher, Bach: Un Eterno y Grácil Bucle*. Barcelona: Tusquets.

KANT, I. (1984). *Crítica de la Razón Pura.* Buenos Aires: Orbis.

KIERKEGAARD, S. (1997). *Migajas filosóficas*. Madrid: Bolla.

KIRK, G.*et. al.* (1983). *Los Filósofos Presocráticos.*Madrid: Gredos.

KLEENE, S. (1974). *Introducción a la Metamatemática*. Madrid: Tecnos.

KLINE, M. (2000). *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre*. México: S. XXI.

KRIPKE, S. (1997). “Esbozo de una teoría de la verdad”. En: Juan Antonio Nicolás y María José Frápolli (eds.), *Teorías de la Verdad en el siglo XX*. Madrid: Tecnos, 1997, 109-143.

LLANOS, M. (2003). *Lógica Jurídica*. Lima: Logos.

LORENZANO, C. (2004). “El nominalismo de Quine”. En: *Epistemología e Historia de la Ciencia* , P. García y P. Morey (eds.), XIV, UNC, 328-337.

ŁUKOWSKI, P. (2011). *Paradoxes.* University of Łódz: Springer.

MANZANO, M. y A. HUERTAS. (2004). *Lógica para principiantes*. Madrid: Alianza Editorial.

MOSTERÍN, J. y R. TORRETI. (2002). *Diccionario de Lógica y Filosofía de la Ciencia.* Madrid: Alianza Editorial.

NORTHROP, E. (1949). *Paradojas Matemáticas.* México: UTEHA.

ORAYEN, R. (2005). “Lógica modal”. En: *Lógica* de C. E. Alchourrón (Editor), Madrid: Editorial Trotta, 289-322.

PABÓN, J. (1997). *Diccionario Manual Griego-Español*. Barcelona: VOX.

PABLO. (2001). “Carta a Tito”. En: *Sagrada Biblia*. Barcelona: Cultural S.A., 1193-1194.

PELLETIER, F. y E. ZALTA. (2000). “How to Say Goodbye to the Third Man”. En: *Noûs*, 34/2, June, 165-202.

PISCOYA, L. (1995). *Investigación Científica y Educacional: un enfoque epistemológico.* Lima: Amaru.

……………(1999). *Filosofía*. Lima: Metrocolor.

POPPER, K. (1997). “La Defensa del Racionalismo”. En: David Miller (comp.), *Popper. Escritos selectos.* México: FCE, 32-48.

…………… (1962). *La lógica de la investigación científica.* Madrid: Tecnos.

…………… (1983). “Autorreferencia y significado en el lenguaje común”. En: Karl R. Popper, *Conjeturas y Refutaciones*. Barcelona: Paidós, 367-374.

PRIEST, G. (2006). *Una brevísima introducción a la lógica.* México: Océano.

QUINE, W. V. (1976). “The Ways of Paradox”. En: *The Ways of Paradox and Other Essays*. Cambridge: Harvard University Press, 3-20.

……………(2002). “Acerca de lo que hay”. En: *Desde un punto de vista lógico.* Barcelona: Paidós, 39-60.

RAMSEY, F. (1931). “Foundations of Mathematics”. En: *The Foundations of Mathematics and others Logical Essays.*New York: Harcourt Brace and Company,1-61.

ROMUALDO, A. (1958). *Edición extraordinaria*. Lima: Ediciones de Cuadernos Trimestrales de poesía.

RUSSELL, B. (1983). *Los principios de la matemática*. Madrid: Espasa-Calpe.

SALGUERO, F. (2010). “Lo que hay y lo que no hay o cómo estar a favor de Quine estando contra él”. En: *Liber Amicorum Ángel Nepomuceno*. Sevilla: Fénix, 117-132.

SCRUTON, R. (2003). *Filosofía Moderna: una introducción sinóptica.* 3era. edición, Santiago de Chile: Cuatro Vientos.

STAHL, G. (1956). *Introducción a la Lógica Simbólica*. Santiago: Universitaria.

…………… (1971). *Al explorar lo infinito*. Santiago: Universitaria.

SUPPES, P. (1979). *Introducción a la Lógica Simbólica.* México: CECSA.

TARSKI, A. (1997). "La concepción semántica de la verdad y los fundamentos de la semántica". En: J. Nicolás y M. Frápolli, *Teorías de la verdad en el siglo XX*. Madrid: Tecnos, 63-108.

…………… (2000). "Verdad y Prueba". En: L. Piscoya, *Tópicos en Epistemología*. Lima: UIGV, 191-230.

TOMASINI, A. (2004). *Filosofía Analítica: un panorama.* Barcelona: Plaza y Valdés.

TRELLES, Ó. (2001). *Apuntes de lógica modal.* Lima: PUCP.

YABLO, S. (1993). "Paradox without Self-Reference". En: *Analysis,* N° 53, 251-252.

YARZA, F. (1988). *Diccionario Griego-Español*. Barcelona: Sopena.

WITTGENSTEIN, L. (1957). *Tractatus logico-philosophicus*. Madrid: Revista de Occidente.