Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado

Facultad de Ciencias Contables

Unidad de Posgrado

La teoría del portafolio de Markowitz, determinación y evaluación del conjunto de carteras eficientes en la Bolsa de Valores de Lima. período 1997-2005

TESIS

Para optar el Grado Académico de Doctor en Ciencias Contables y Empresariales

AUTOR

Antonio Gustavo LAFOSSE BENAVIDES

ASESOR

Víctor Manuel GIUDICE BACA

Lima, Perú

2007

Referencia bibliográfica

Lafosse, A. (2007). *La teoría del portafolio de Markowitz, determinación y evaluación del conjunto de carteras eficientes en la Bolsa de Valores de Lima. período 1997-2005*. Tesis para optar grado de Doctor en Ciencias Contables y Empresariales. Unidad de Posgrado, Facultad de Ciencias Contables, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

DEDICATORIA:

A Dios que pone en mí, el sentimiento de afecto y realización en el estudio de temas asociados a mi profesión

A mi esposa Frida por sus permanentes palabras de apoyo y estimulo, las que incentivan una mayor dedicación y esfuerzo en la búsqueda de nuestros objetivos

A mis hijos Antonio y Gustavo, fuente inagotable de inspiración

AGRADECIMIENTOS:

Al Profesor e Investigador Doctor Victor Giudice Baca por el interés mostrado en la presente investigación, a sus invalorables sugerencias y su apoyo total como asesor de la presente tesis.

Al Doctor Ernesto Polar Falcón por su apoyo en el presente trabajo, así como por cada una de sus sugerencias

Al Doctor Alfonso Ugarte, maestro y amigo por su permanente apoyo, e insistencia en la elaboración del presente trabajo

A todos mis colegas que de alguna manera con sus sugerencias enriquecieron la presente investigación

A la Comisión Nacional Supervisora de Empresas y Valores (CONASEV), a la Bolsa de Valores de Lima, por la información brindada que fue necesaria para la elaboración del presente trabajo.

ÍNDICE DE TEMAS

PRESENTACIÓN

Dentro de los cambios más significativos que se vienen realizando en las últimas décadas de forma rápida y sostenida es el proceso de globalización, el cual permite la integración de los mercados a nivel mundial. Esta integración no sólo incluye la libre movilidad de bienes, servicios, tecnología, sino también la libre entrada de flujos de capitales, lo que afectará nuestros mercados financieros, y por ende las decisiones de inversión de los diferentes agentes económicos.

La inversión en los mercados de capitales, por parte de los fondos de pensiones, los fondos mutuos, bancos e inversionistas en general requiere de ciertas estrategias de inversión, en donde los capitales traten de alcanzar la máxima rentabilidad al mínimo riesgo, o viceversa el mínimo riesgo dado ciertos niveles de rentabilidad, para cumplir este objetivo una de las estrategias más conocidas es la de diversificar una cartera de activos. Pero ¿Como diversificar? ¿En que proporciones se debe invertir en una cartera? Obviamente no se puede diversificar por diversificar, esto sería una diversificación ingenua o superflua que no cumple con los objetivos planteados de minimizar riesgos, maximizando rentabilidad. Es aquí donde Nace la Teoría de Markowitz y explica la forma de hacerlo utilizando para ello conceptos estadísticos para medir la rentabilidad (Esperanza matemática), el riesgo (la Varianza), y lo más importante la relación existente entre las rentabilidades de dos activos (Covarianza). La presente investigación muestra una aplicación de la teoría del portafolio de Markowitz al caso de la Bolsa de valores de Lima

El presente trabajo se ha dividido en ocho capítulos de los cuales el Capítulo I nos muestra los aspectos metodológicos de la investigación, con la descripción del problema, los objetivos de la investigación, la hipótesis planteada, la información a usarse, etc.

En los capítulos II, III, IV, V y VI esta contenido el Marco Teórico, en el Capítulo II se hace una aproximación de las distintas teorías y corrientes filosóficas en cuanto a la valorización de acciones.

En el capítulo III se aborda el comportamiento de un inversor en condiciones sin riesgo.

En el capítulos IV vemos el análisis de los títulos de manera individual, identificando su rentabilidad, riesgo y su grado de relación con otros activos.

En el capítulo V se hace un análisis de los portafolios, mostrando como se mide su rentabilidad riesgo y mostrando como diversificando de manera eficiente se pueden obtener portafolios inclusive sin riesgo en un contexto de incertidumbre.

En el capítulo VI se muestra la última fase de la gestión de carteras que es la elección de la cartera óptima, la que dependerá de la subjetividad del inversionista.

En el Capítulo VII se presentan los resultados de la aplicación de la teoría de Markowitz al caso de la Bolsa de Valores de Lima, señalando los portafolios eficientes, para finalmente en el capítulo VIII hacer un análisis e interpretación de los resultados obtenidos. En los ocho capítulos desarrollados llegamos a importantes conclusiones, como resultado final de la investigación.

ABSTRACT

Nowadays the entire world is living within a context of change characterized by the universal integration of the financial operations. Over the last few decades, the world has been holding a globalization process, it allows the whole integration of the markets around the planet. This integration involves technology, the free entrance of capitals, free movements of goods and services. The financial markets have always been particularly sensitive to these changes, therefore, all decisions of investment from different economic agents are also affected, for these changes.

Investments in capital markets such as mutual funds, pension funds, banks and general investors require some strategies of investment, where capitals try to reach the higher return minimizing risk or vice versa, the minimum risk to one level of return. To accomplish this objective one of the most known strategies is diversifying a portfolio of assets. But, how diversify? How to pick stocks? Which percentage to choose in order to minimizing risks and maximizing returns?

Obviously, it is wrong diversify anyway. You have to know as diversify. For this reason, Markowitz created The theory of portfolio to explain the best way to reach this objective. Working with statistics methods to measure returns (Expected Value), the risk (the Variance) and the most important of all the relation between two assets (Covariance).

The current research work shows up an application from the Portfolio Theory of Markowitz to the Lima Stock Exchange.

This investigation has been divided into eight chapters.

Chapter I is about the methodology of investigation, the statement of the hypothesis, the description of the problem, the reason of the investigation, and the analysis of information to be used etc.

In the chapters two, three, four, five and six is presented the theoretical frame. In Chapter two, we studied the principal approaches about investing in stocks

In chapter III, we approach, investor's behavior without risks conditions.

In Chapter IV, is presented the analysis of securities in an independent way, identifying its return- risk and the relation with others assets.

In Chapter V, it is studied a portfolio analysis, showing how to measure its return- risk and how to diversify in the best way. We can get portfolios even without risk in an uncertainly context.

In Chapter VI, It is shown the last phase of the management portfolio, is the election of the optimum portfolio, it will rely on the subjectivity of investor.

In Chapter VII, It is presented the results of the application from the Portfolio Theory to the Lima Stocks Exchange, showing the most efficient portfolio.

In Chapter VIII, It is analyzed and evaluated the results of the present research work

At the end of the current research work, it is presented the analysis and interpretation of the results. This investigation draws valuable conclusions as a final result of the research and the work is supplemented with some recommendations that are considered pertinent for the achievement of the formulated objectives.

INTRODUCCIÓN

La inversión en bolsa es una actividad que atrae a muchos profanos, entre ellos gerentes, empleados públicos, estudiantes, desempleados, amas de casa, etc., los que se ven intrigados por el juego de la bolsa. Siempre ha existido y existirá la curiosidad de saber ¿Qué es la bolsa? ¿En qué consiste la misma? ¿Se gana tanto dinero como dicen y presumen algunos?. Siempre ha existido la interrogante de saber si son ciertas las historias referidas a personajes que pasaron por la bolsa e hicieron grandes fortunas, y otros que perdieron las mismas, habiéndolos llevado a la ruina y en algunos casos hasta el suicidio. Se dice que un conde francés en el siglo dieciocho empeñó a su mujer obsesionado por que se le había presentado la oportunidad de su vida en la bolsa, asimismo se conoce muchos casos de otros personajes que fascinados por el juego de la bolsa apostaron toda su riqueza, creyendo que estaban haciendo buenas inversiones, los resultados han sido diferentes, en algunos casos la fortuna los favoreció, mientras que en otros la ruina ha sido el resultado de una mala inversión en bolsa. Esto ha llevado a muchos estudiosos a que dediquen una gran cantidad de tiempo a buscar la manera de encontrar la fórmula, o la estrategia que permita jugar en la bolsa, y tener éxito en ella, labor que en la actualidad es realizada por muchos investigadores, inversionistas, etc. entre los que se encuentran los gestores de cartera.

La búsqueda de distintos métodos, o estrategias, que permitan predecir el futuro de las cotizaciones de las acciones y por tanto el momento más adecuado para comprar o vender acciones, es uno de los objetivos en que los seres humanos han dedicado más su tiempo, dinero y esfuerzo, sean estos inversionistas privados, inversionistas institucionales, consultores, etc. Esta búsqueda de la varita mágica ha generado una gran variedad de métodos, unos científicos, otros muchos más descabellados, que lindan con lo esotérico y lo místico. Muchos inversionistas proyectan el comportamiento de los precios en la bolsa, en función del clima, el movimiento de los astros, consultando espíritus, leyendo el tarot etc. mientras que otros mediante procedimientos científicos, los que tienen que ver con el comportamiento económico de las empresas, el comportamiento de los precios en el mercado bursátil, la rapidez con que se traslada la información, etc.

1.) <u>LA TEORÍA DEL PORTAFOLIO DE MARKOWITZ</u>

Es en este contexto que nace la teoría de la cartera, donde Harry Markowitz es considerado el padre de la "teoría de la cartera", dicha teoría nace de su artículo titulado "Portfolio Selection", publicado en 1952 y posteriormente ampliado en forma de libro en 1959 "Portfolio Selection, Efficient Diversification of Investment"([1]), hasta la fecha de publicación del artículo de Markowitz no existía argumentos rigurosos para determinar **como diversificar**

[1] Markowitz,Portfolio Selection: Efficient diversification of Investment. John Willey and Sons, Inc. New York 1959.

una cartera técnicamente eficiente o como constituir una inversión en diferentes activos y en que proporción hacerlo, de tal manera que:

a) Para cada nivel de riesgo nos brinde la máxima rentabilidad
b) Para cada nivel de rentabilidad nos de el mínimo riesgo

Se debe tener en cuenta que no basta diversificar por diversificar, para hacer una inversión correcta, al diversificar de manera arbitraria , ingenua o superflua, sino se debe invertir en las proporciones exactas bajo los criterios de Markowitz, de lo contrario no se alcanza la máxima rentabilidad para un nivel de riesgo. En síntesis la obra de Markowitz revoluciono las finanzas proveyendo de un criterio de diversificación de carteras el cual es universalmente aceptado.

2) <u>ETAPAS EN LA GESTIÓN DE CARTERAS</u>

Según Markowitz La gestión de portafolios se puede dividir en tres etapas, cada una de ellas con objetivos diferentes

2,1) Análisis de Títulos
2,2) Análisis de Carteras
2.3) Elección de la Cartera

2.1) <u>ANÁLISIS DE TÍTULOS</u>

Harry Markowitz parte del análisis individual de los títulos considerando para ello tres indicadores estadísticos:

A) LA RENTABILIDAD DEL TÍTULO: Se toma al valor esperado de las rentabilidades de una acción como un indicador de la rentabilidad esperada de la acción. Este es una información que se obtiene de la realidad, por lo que escapa a la subjetividad del inversionista**.**

B) EL RIESGO DE UN TÍTULO: Se toma la varianza o la desviación estándar de manera indistinta de las rentabilidades de una acción como indicador de riesgo de una acción. Este es una información que se obtiene de la realidad, por lo que al igual que la rentabilidad la medida del riesgo escapa a la subjetividad del inversionista**.**

C) CORRELACIÓN ENTRE LAS RENTABILIDADES DE DOS TÍTULOS: Se toma a la Covarianza entre las rentabilidades de dos títulos como una medida de la relación que existe entre las rentabilidades de dos acciones Este es una información que se obtiene de la realidad, por lo que al igual que la rentabilidad y la medida del riesgo, la medida de la correlación entre las rentabilidades de dos activos escapa a la subjetividad del inversionista**.**

Todo lo referente al análisis de títulos lo investigaremos en el **capítulo IV** de la presente investigación.

2.2). ANÁLISIS DE CARTERAS

El análisis de cartera se inicia tomando como insumos los datos obtenidos en el análisis de títulos (los valores esperados de la rentabilidad, la desviación estándar de las mismas, así como todas las covarianzas posibles entre los activos que se quiere incluir en los portafolios). En esta etapa de la Gestión de cartera, se obtiene los portafolios eficientes mediante la utilización de métodos de tipo matemático, los que se detallan en los anexos de la presente investigación, en donde cada portafolio eficiente cumplirá la característica de:

a) Para cada nivel de riesgo nos brinde la máxima rentabilidad

b) Para cada nivel de rentabilidad nos de el mínimo riesgo

Se debe señalar que los portafolios hallados no son uno sino infinitos, y al conjunto de estos portafolios se les llama el CONJUNTO DE CARTERAS EFICIENTES. Este es una información que se obtiene de la realidad, puesto que se trabaja con todos los insumos provenientes del análisis de títulos, es por ello que la obtención del conjunto de carteras eficientes, escapan a la subjetividad del inversionista. Todo lo referente al análisis de carteras se investiga en el **capítulo V** de la presente investigación.

2.3) ELECCIÓN DE LA CARTERA ÓPTIMA

Una vez determinado el conjunto de portafolio eficiente, que esta constituida por infinitas carteras, viene la pregunta ¿Qué portafolio escogerá determinado inversionista? La respuesta a esta pregunta se analiza en esta fase de la gestión de cartera y dependerá íntegramente del grado de tolerancia al riesgo por parte del inversionista (si es amante al riesgo, o si es adverso al riesgo), es decir un determinado inversor preferirá una cartera con mayor rentabilidad, por supuesto asumiendo más riesgo, pues de esta manera se siente más cómodo, sin embargo un segundo inversionista preferirá tal vez otro portafolio que ofrezca menos rentabilidad pero también asume un menor riesgo, de esta manera este segundo inversor se sentirá más cómodo con este portafolio, dependerá pues del grado de animadversión al riego de cada inversor.

Esta etapa a diferencia de las dos anteriores dependerá de la subjetividad del inversor. Todo lo referente a la elección de la cartera óptima en el análisis de carteras se investiga en el **capítulo VI** de la presente investigación

3.) <u>BOLSA DE VALORES DE LIMA Y EVALUACIÓN EMPÍRICA DE LA TEORÍA DE LA CARTERA DE MARKOWITZ</u>

Previo al análisis y formación de carteras, según los métodos de Markowitz, vamos a describir brevemente el rol de la Bolsa de Valores de Lima y lo que representa para la economía peruana.

3.1) <u>BOLSA DE VALORES DE LIMA</u>

La Bolsa de Valores de Lima es considerada por muchos como una institución que refleja la marcha real de la economía. Es un indicador inmejorable de todo lo que ocurre. La subida o bajada en el precio de las acciones no es una casualidad. Aunque algunos la consideran un mero instrumento de especulación para ganar dinero, el mercado de valores cumple una labor fundamental dentro del sistema financiero.

<u>FINES DE LA BOLSA DE VALORES DE LIMA</u>

Los fines de la Bolsa de Valores de Lima son facilitar la negociación de valores mobiliarios y otros productos bursátil, brindando a sus miembros los servicios, sistemas y mecanismos adecuados, para que ello se realice en forma justa, competitiva, ordenada, continua y transparente.

<u>FUNCIONES DE LA BOLSA DE VALORES</u>

Según su estatuto la Bolsa de Valores tiene las siguientes funciones:

a. Proporcionar a sus asociados los locales, sistemas y mecanismos que les permitan, en sus diarias negociaciones, disponer de información transparente de las propuestas de compra y venta de los valores, la imparcial ejecución de las órdenes respectivas y la liquidación eficiente de sus operaciones.
b. Fomentar las negociaciones de valores, realizando las actividades y brindando los servicios para ello, de manera de procurar el desarrollo creciente del mercado.
c. Inscribir, con arreglo a las disposiciones legales y reglamentarias, valores para su negociación en Bolsa, y registrarlos.
d. Ofrecer información al público sobre los Agentes de Intermediación y las operaciones bursátiles.
e. Divulgar y mantener a disposición del público información sobre la cotización de los valores, así como de la marcha economía y los eventos trascendentes de los emisores.
f. Velar porque sus asociados y quienes los representen actúen de acuerdo con los principios de la ética comercial, las disposiciones legales, reglamentarias y estatutarias que les sean aplicables.
g. Publicar informes de la situación del Mercado de Valores y otras informaciones sobre la actividad bursátil.
h. Certificar la cotización de los valores negociados en Bolsa.
i. Investigar continuamente acerca de las nuevas facilidades y productos que puedan ser ofrecidos, tanto a los inversionistas actuales y potenciales cuanto a los emisores, proponiendo a la CONASEV, cuando corresponda, su introducción en la negociación bursátil.
j. Establecer otros servicios que sean afines y compatibles.
k. Practicar los demás actos que sean necesarios para la satisfacción de su finalidad.

l. Constituir subsidiarias para los fines que determine la Asamblea General de Asociados; y, las demás que le asignen las disposiciones legales y este estatuto.

INSTRUMENTOS NEGOCIADOS

La Rueda de Bolsa es la sesión diaria en la cual las Sociedades Agentes de Bolsa y Agentes de Bolsa transan operaciones de compra y venta de valores, previamente inscritos en los registros de la Bolsa de Valores, bajo diversas modalidades. Es el mecanismo tradicional de negociación de valores.

Los valores que pueden negociarse en este mercado pueden ser de rentas variables o representativas de deuda.

ACCIONES

Son títulos nominativos que representan una participación en el capital de las sociedades anónimas, las mismas que ofrecen una rentabilidad variable, determinada tanto por las utilidades que reparte la empresa en dividendos en efectivo y/o en acciones liberadas, como por la ganancia (o pérdida) lograda por el alza (o baja) en la cotización de la acción en bolsa. Pueden ser transferidas libremente.

ACCIONES COMUNES O DE CAPITAL

Son emitidas por las Sociedades Anónimas, y representan una parte alícuota del capital de una empresa dedicada al ejercicio de una actividad económica. Estos valores otorgan el derecho a recibir utilidades, a votar en las Juntas de Accionistas y eventualmente, al patrimonio resultante en caso de liquidación. Asimismo, estas acciones conceden a su titular la calidad de socio, dándole el derecho a participar en las decisiones de la empresa.

ACCIONES DE INVERSIÓN

Fueron creadas en 1977, tuvo como fin darle a cada trabajador una participación en el patrimonio de la empresa. Estas acciones atribuyen a su titular los siguientes derechos: Participar en la distribución de dividendos, Mantener su proporción existente en la Cuenta Acciones de Inversión en caso de aumento del capital social por nuevos aportes.

CERTIFICADOS DE SUSCRIPCIÓN PREFERENTE

Representan el derecho de preferencia de los accionistas de empresas registradas en Bolsa a suscribir nuevas acciones en caso de aumentos de capital por aportes en efectivo. Si bien el derecho de suscripción se da tanto para los accionistas del capital como de inversión, sólo los primeros obtienen este Certificado pudiendo negociarlo y transferir ese derecho a terceras personas.

OBLIGACIONES

Son valores representativos de deuda que pagan un interés que se calcula usando un procedimiento determinado desde la emisión del título.

BONOS

Son obligaciones emitidas a plazos mayores de un año. Normalmente, el comprador del bono obtiene pagos periódicos de intereses y cobra el valor nominal del mismo en la fecha de vencimiento, mientras que el emisor recibe recursos financieros líquidos al momento de la colocación.

LETRAS HIPOTECARIAS

Son instrumentos financieros que pueden ser emitidos por entidades bancarias y financieras, que cuenten con la respectiva autorización de la

Superintendencia de Banca y Seguros (SBS), con la finalidad de otorgar créditos de largo plazo para financiar la construcción o adquisición de viviendas, respaldados con la primera hipoteca del bien adquirido.

CERTIFICADOS DE DEPÓSITO DEL BANCO CENTRAL DE RESERVA:

Son títulos emitidos en moneda nacional por el Banco Central de Reserva del Perú (BCRP) con fines de regulación monetaria. Es emitido al portador, se puede negociar libremente en el mercado secundario y tiene un plazo de vencimiento que normalmente va de cuatro a doce semanas. Su colocación es mediante subasta pública en la que pueden participar las empresas bancarias, financieras y de seguros, las Administradoras Privadas de Fondos de Pensiones y otras entidades del sistema financiero.

CERTIFICADOS DE DEPÓSITO

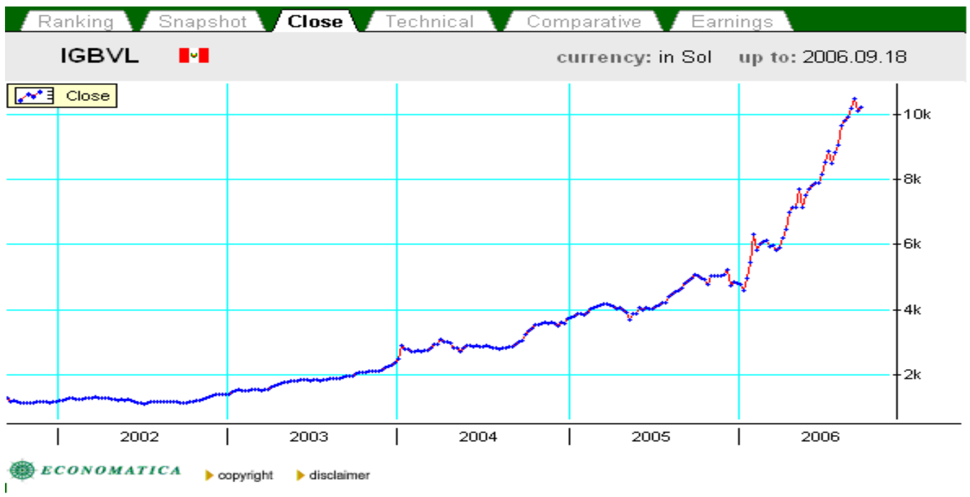
Documento negociable que certifica un depósito de dinero en una institución financiera, normalmente a plazo fijo y con una tasa de interés. No puede ser cobrado hasta el vencimiento y es libremente negociable.

LETRAS DE CAMBIO

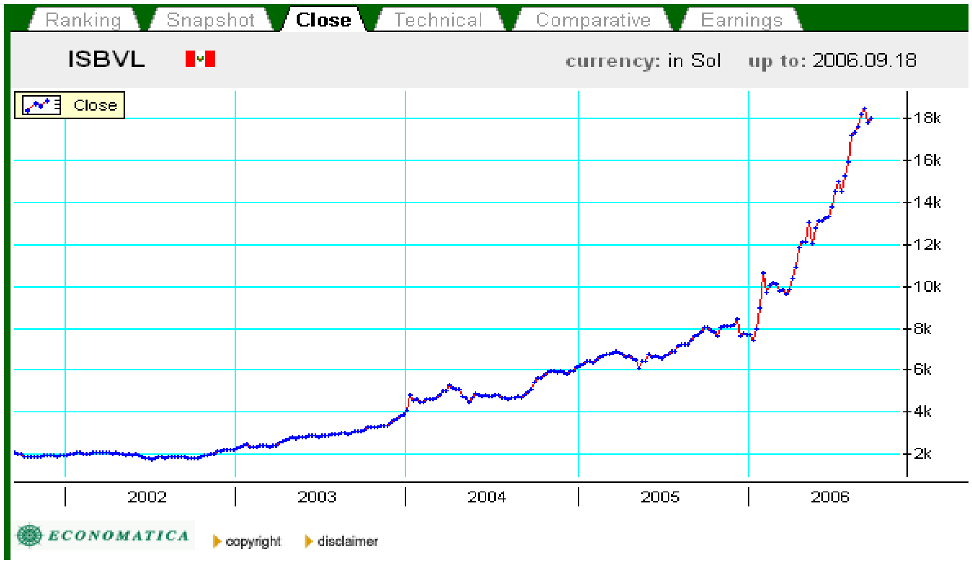
Son títulos que contienen una promesa incondicional de pago, mediante la cual el girador se compromete a hacer pagar por un tercero, aceptante, el monto indicado en el documento a la persona a la orden de la cual se emite el mismo,

<u>INDICADORES DE LA BOLSA DE VALORES</u>

ÍNDICE GENERAL DE BOLSA DE VALORES DE LIMA (IGBVL): Refleja la tendencia promedio de las cotizaciones de las principales acciones inscritas en Bolsa, en función de una cartera seleccionada, que actualmente representa a las 35 acciones más negociadas del mercado.



ÍNDICE SELECTIVO DE LA BOLSA DE VALORES DE LIMA (ISBVL): A partir de julio de 1993, se viene calculando el Índice Selectivo de la Bolsa de Valores de Lima (ISBVL), indicador que mide las variaciones de las cotizaciones de las 15 Acciones más representativas de la Bolsa de Valores de Lima. Este índice permite mostrar la tendencia del mercado bursátil en términos de los cambios que se producen en los precios de las 15 acciones más representativas. Al igual que el IGBVL, la base es de 100 y tiene fecha el 30 de diciembre de 1991.



3.2) EVALUACIÓN EMPÍRICA

Posterior al análisis de gestión de cartera se ha procedido a obtener y evaluar el conjunto de carteras eficientes para el caso de las acciones que cotizan en la Bolsa de Valores de Lima, para ello se tomó ocho acciones, se ha realizado un análisis de títulos de los mismos y se ha determinado el conjunto de carteras eficientes mediante los procedimientos matemáticos explicados en el Anexo I, asimismo se ha simulado una estrategia de inversión, con el fin de contrastar las hipótesis y asimismo cumplir con los objetivos trazados en la presente investigación. De los ocho capítulos desarrollados se llega a conclusiones valiosas como resultado final de la investigación y se complementa el trabajo con algunas recomendaciones que se consideran pertinentes para el logro de los objetivos formulados.

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO METODOLÓGICO

I.1) TEORÍA DEL PORTAFOLIO DE MARKOWITZ

Actualmente vivimos en un mundo globalizado, donde la característica principal de este sistema es la libre entrada y salida de mercancías, de conocimientos y de capitales, es en este contexto donde los inversionistas institucionales buscan colocar su dinero en las mejores plazas buscando para ello maximizar su rentabilidad, y asimismo minimizar el riesgo de sus inversiones. Es aquí donde los especialistas se planten preguntas tales como ¿cuáles deben ser los lineamientos o estrategia a seguir en la inversión en acciones? ¿Cuál va ser el criterio de constituir un portafolio bien diversificado? ¿Cómo diversificar las acciones? ¿Bajo que criterio? ¿Es una simple diversificación o existe algún criterio especial? es ahí en donde se observa la magnitud de los aportes Teoría del Portafolio de Markowitz. Es conocido el refrán de "no poner todos los huevos en una misma canasta", refrán que refleja la idea que un inversionista no debería apostar toda su riqueza a una sola posibilidad, sino más bien debería diversificar su inversión para así de esta manera minimizar el riesgo de perder su inversión inicial, esto mismo ocurrirá a un inversor en condiciones de incertidumbre donde no debería comprar una acción, sino distintas clases de acciones. Según Markowitz no basta simplemente diversificar por diversificar (diversificación ingenua o superflua) sino se debe diversificar de tal manera que los portafolios o carteras a constituirse ofrezcan menos riesgo inclusive que los activos tratados de manera individual, es decir tratar de obtener los portafolios óptimos en el sentido que para cada nivel de rentabilidad ofrezcan el mínimo riesgo (pueden haber muchos portafolios que ofrezcan esa misma rentabilidad pero a un mayor riesgo), o que para cada nivel de riesgo ofrezcan la máxima rentabilidad (puede haber muchos portafolios con un mínimo nivel de riesgo pero a costo de perder rentabilidad). Esta técnica para determinar los portafolios óptimos se convierte en un arte, la búsqueda de las proporciones correctas en que se debe invertir un capital, con el fin de disminuir la probabilidad de una pérdida. A este conjunto de **portafolios diversificados óptimamente** según el criterio de la teoría del portafolio de Markowitz y que hace que el inversionista minimice la posibilidad de perder es lo que se denomina como "CARTERAS EFICIENTES O CARTERAS EFICACES", entendiéndose por ésta a aquellos conjuntos de acciones que para una rentabilidad dada ofrece el mínimo riesgo y asimismo para un riesgo dado ofrece la máxima rentabilidad.

Una vez que ya se conoce la idea de cartera eficiente cabe las siguientes interrogantes ¿Cómo determinar dicha cartera eficiente? ¿Existe una o muchas? ¿Cuál es la proporción correcta en que se debe invertir en cada acción para hacer una cartera eficiente? ¿Existe algún procedimiento que me lleve a la obtención de una cartera eficiente? ¿ La cartera elegida depende de las preferencias hacia el riesgo por parte de un inversionista?

"La teoría de la cartera de Markowitz nace como una respuesta a estas inquietudes, elaborada inicialmente en un articulo en 1952, para posteriormente ser presentada como un libro[1], explica de una manera sumamente rigurosa las distintas formas o distintos procedimientos de obtener una cartera eficiente. Cabe destacar que en los últimos años esta teoría se

[1] Portfolio Selection, efficient diversification of investments, Cowles Foundation for Research in Economics at Yale University.1959.

ha ido enriqueciendo por los distintos aportes tanto de Tobin [2], Sharpe [3], Fama ([4]) y Lintner ([5]) entre otros.

I.2) PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Vivimos en un mundo intrínsecamente incierto, los precios del petróleo se disparan, los inmuebles en Estados Unidos suben a niveles exorbitantes, se escucha de guerras y rumores de guerras en todo el mundo, ataques terroristas en distintos lugares del mundo, etc. Toda esta información lleva a que la inversión financiera se torne incierta en cuanto a donde y como invertir, donde los resultados de la inversión en acciones no están garantizados, por un lado la evolución del precio de las acciones muchas veces es al alza y otras a la baja lo que produce grandes ganancias y en otras oportunidades grandes pérdidas, es en este contexto de incertidumbre donde los inversionistas buscan diversificar sus inversiones (no poner todos los huevos en la misma canasta), a fin de minimizar riesgos.

Cuando hablamos de la Bolsa de Valores[6] y pensamos en la inversión de acciones tenemos el mismo escenario caracterizado por la incertidumbre y en donde se nos plantea en primer lugar el problema de cómo diversificar las diferentes acciones que cotizan en la Bolsa de Valores, **es decir saber cual es el conjunto de portafolios eficientes** (que minimicen riesgo dado un nivel de rentabilidad, o que maximicen rentabilidad dado un nivel de riesgo),es decir el conocer los porcentajes en que debe participar cada

[2] J. Tobin "Liquity, Preference as behavior toward risk". Review of Economics Studies. 1958
[3] W. Sharpe. "A Simplified Model for Portfolio Analysis". Management Science 1963
[4] Fama, Eugene. "The behavior of stock markets prices". Journal of Business 1965.
[5] John, lintner, “Security Price, Risk and maximal gains from diversification”,Journalof Finance
[6] Margarita Gieseke, “La Bolsa de valores en Lima”, Bolsa de Valores de Lima , 1997

acción en un portafolio, buscando siempre obtener la máxima rentabilidad con el mínimo riesgo, tal como lo plantea la teoría del portafolio de Markowitz.

Asimismo se nos plantea un segundo problema, que es el de saber, una vez determinados dichos portafolios **si los mismos nos sirven como estrategias de inversión en el largo plazo,** o deberíamos desechar la idea de diversificación y buscar otra técnica de inversión

I.3) OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

3.1 OBJETIVO GENERAL

a) La presente investigación busca determinar el conjunto de carteras eficientes según el criterio de la teoría del portafolio de Markowitz, en la Bolsa de Valores de Lima durante el período 1997-2005.

b) Una vez determinados los distintos portafolios se evaluará su comportamiento, como estrategia de inversión

3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

a) Describir el análisis de títulos para la formación de portafolios
b) Describir el análisis de carteras y mostrar como se reduce el riesgo mediante la diversificación
c) Describir la teoría de la elección de la cartera
d) Describir las distintas técnicas para determinar portafolios eficientes según el criterio de Markowitz

I.4) JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

Las conclusiones presentadas en el presente trabajo de investigación serán de gran utilidad a los distintos agentes económicos inversionistas en general, administradores de fondos de pensiones, fondos mutuos, seguros, bancos, sociedades agentes de bolsa, profesores universitarios, estudiantes y en general cualquier estudioso de las finanzas dado que ayudará a la mejor asignación de recursos por parte de los mismos minimizando riesgos, dado que el presente trabajo describe los distintos métodos de diversificación, sus ventajas, siendo este un tema novedoso y asimismo útil al aplicarlos al caso de la Bolsa de Valores de Lima.

Por último debo mencionar la enorme satisfacción personal que me ha dado el realizar la presente investigación habiendo encontrado en ella una fuente de conocimientos y de realización personal, razón más que suficiente para justificar la presente investigación.

I.5) PLANTEAMIENTO DE HIPÓTESIS

5.1 HIPÓTESIS GENERAL

La aplicación de la Teoría del portafolio de Markowitz a la Bolsa de Valores de Lima en el período 1997-2005 nos sirve como criterio para la elaboración de carteras eficientes y asimismo nos sirve como estrategia de inversión en el Largo plazo

5.2 HIPÓTESIS ESPECÍFICAS

1) Las técnicas provenientes de la teoría del portafolio de Markowitz nos brindan un conjunto de carteras eficientes al aplicarlas al caso de la Bolsa de Valores de Lima

2) Las carteras eficientes obtenidas de la utilización de las técnicas propuestas por Markowitz nos sirven como una estrategia de inversión en el largo plazo.

I.6) METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

6.1 TIPO DE INVESTIGACIÓN

Para conseguir los objetivos de la presente investigación se utiliza como Instrumento de análisis la programación cuadrática, que nos sirve para minimizar una función objetivo (el riesgo del portafolio) sujeta a restricciones (rentabilidades de los portafolios) con el fin de determinar el conjunto de carteras eficientes bajo el criterio de MarKowitz.

6.2 ANÁLISIS DE LOS DATOS

A) Se tomará información anual respecto a la rentabilidad de **ocho acciones que están incluidas en el índice selectivo de la Bolsa de Valores** de Lima

(Las cuales explican gran parte del movimiento bursátil)

B) La información a tomarse en cuenta son las cotizaciones de las acciones, la entrega de dividendos en efectivo, la entrega de dividendos en acciones, cambios de valor nominal, ampliaciones y reducciones de capital, en general cualquier evento que afecte a la rentabilidad de las acciones

C) La serie de datos corresponde al período 1997-2005

D) La periodicidad de los datos es anual

E) La información será obtenida de la Bolsa de Valores de Lima, así como de la Comisión Nacional Supervisora de Empresas y Valores (CONASEV) en sus diferentes publicaciones.

6.3 VARIABLES

VARIABLES INDEPENDIENTES

La rentabilidad y riesgo de las acciones, lo que se obtendrá en base a las cotizaciones de las mismas

VARIABLES DEPENDIENTES

El conjunto de carteras eficientes según el criterio de Markowitz, para cada nivel de rentabilidad dado, o si se quiere el conjunto de carteras eficientes según el criterio de Markowitz para cada nivel de riesgo

6.4 SECUENCIA METODOLÓGICA

6.4.1 Recolección de la información de las distintas publicaciones de la Bolsa de Valores de lima, CONASEV, y otras instituciones afines.
6.4.2 Depuración de la información, eliminando la información contradictoria o poco confiable
6.4.3 Determinación de las rentabilidades de las acciones
6.4.4 Determinación del riesgo de las acciones
6.4.5 Determinación de la Covariabilidad de las acciones
6.4.6 Determinación de las carteras eficientes según el criterio de Markowitz
6.4.7 Evaluación de los Resultados hallados
6.4.8. Análisis e Interpretación de los Resultados
6.4.9 Conclusiones y Recomendaciones

El trabajo ha sido dividido en 8 capítulos, en los cuales se toca las siguientes materias: En el primer capítulo se toca consideraciones de tipo metodológico, tal como se esta explicando.

Los capítulos II al VI constituyen nuestro Marco Teórico en donde en el capítulo II se expone un enfoque de otras teorías alternativas, en el capítulo III se toca el tema de las inversiones en un contexto de certidumbre completa o lo que es lo mismo en un contexto sin riesgo.

En los capítulos IV, V y VI nos introducimos al análisis de la inversión en un contexto de incertidumbre, explicando en el capítulo IV el análisis de títulos, de manera independiente, (sin tener en cuenta la combinación de ellos o la formación de carteras) como se mide su rentabilidad y riesgo y cual es la relación que existe entre las rentabilidades de dichos títulos

En el capítulo V se hace un análisis de las carteras en sí, en este capítulo se muestra con claridad la eficiencia de la teoría de Markowitz y como un inversor sabiendo combinar perfectamente activos puede hacer desaparecer el riesgo, inclusive pudiéndose inclusive allegar a hacer que una inversión no tener ningún riesgo.

Una vez determinadas todas las carteras eficientes o que cumplen con el criterio de Markowitz, en el capítulo VI nos ocupamos de la elección de la cartera óptima, lo que dependerá de la subjetividad de cada inversionista, su grado de tolerancia al riesgo.

Luego en el capítulo VII se analizan los resultados de la presente investigación con la determinación del conjunto de carteras eficientes para el caso de la Bolsa de Valores de Lima durante el Período 1997-2005, aplicando las técnicas propuestas por Harry Markowitz.

En el capítulo VIII se evaluaran dichos resultados contrastando con las hipótesis planteadas en la investigación, haciendo un análisis del riesgo para ciertas carteras, y evaluando las carteras halladas como una posible estrategia de inversión, mostrando las conclusiones a que se ha llegado en la presente investigación

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

DISTINTAS TEORÍAS Y CORRIENTES DOCTRINALES Y FILOSÓFICAS RESPECTO A LA INVERSIÓN

II.1) DISTINTOS ENFOQUES TEÓRICOS RESPECTO A LA INVERSIÓN EN ACCIONES

La Teoría del Portafolio de Markowitz[1] genera un gran interés entre los financistas, intelectuales, profesores universitarios, estudiantes, etc. debido a su revolucionaria concepción de la diversificación usando para ello herramientas no sólo de tipo financiero, sino añadiendo herramientas de tipo estadístico, matemático y económico, paradójicamente este tema ha sido poco tocado en estudios recientes, por lo que en la presente investigación nos propondremos abarcar este tema a fin de evaluar dicha teoría al aplicarla al caso de la Bolsa De Valores de Lima. Para entender el real significado de la teoría del Portafolio de Markowitz empezaremos detallando las distintas teorías que tratan de explicar el comportamiento de las cotizaciones y por ende las estrategias de inversión a seguir según los postulados de cada escuela para posteriormente enmarcar la Teoría del Portafolio de Markowitz dentro de estas escuelas[2] Entre las principales teorías que explican el comportamiento de las cotizaciones en los mercados bursátiles tenemos:

---

[1] Harry Markowitz. "Portfolio Selection". Journal of Finance 1952

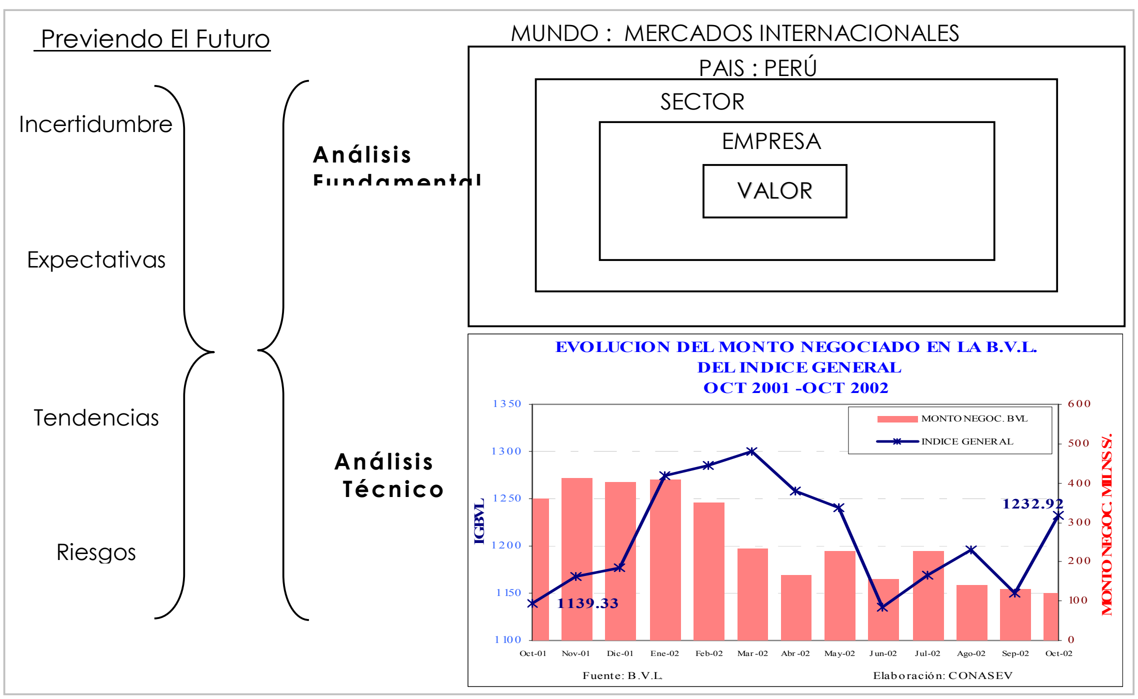
[2] Fred W. Frailey, "How to pick stocks", Kiplinger Book, 1997

- La Escuela Fundamentalista
- La Escuela Técnica
- La Escuela basada en la teoría de los Mercados Eficientes

II.2 ANÁLISIS FUNDAMENTAL

El análisis fundamental esta determinada por un conjunto de técnicas que tratan de predecir el comportamiento de las cotizaciones en base a la situación financiera y económica de una empresa, la que constituye el fundamento de la empresa, situación que según los defensores de este enfoque explica el comportamiento de las cotizaciones.[3] Este tipo de análisis nos provee de dos técnicas poderosas que nos sirven como herramienta en la selección de valores:

- El Análisis Top Down
- El Análisis Bottom Up



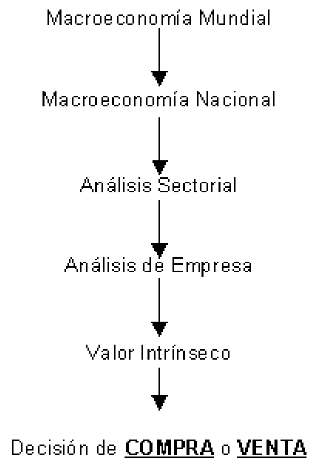
[3] Benjamin Graham, "El Inversor Inteligente",Gráficas COFAS, 4A Edición, 1999

ANÁLISIS TOP-DOWN (DE ARRIBA A ABAJO)

Este análisis recoge a todos aquellos inversores que comienzan su toma de decisiones partiendo de la visión más amplia del mercado, para ir descendiendo en la cadena de análisis, hasta llegar a la visión más concreta de análisis, la cual es la empresa objeto de estudio. Es decir pasan de un análisis del contexto global o general (contexto macroeconómico), a un contexto de análisis de la empresa (contexto macroeconómico). El Análisis Top-Down centra su atención en indicadores macroeconómicos tales como

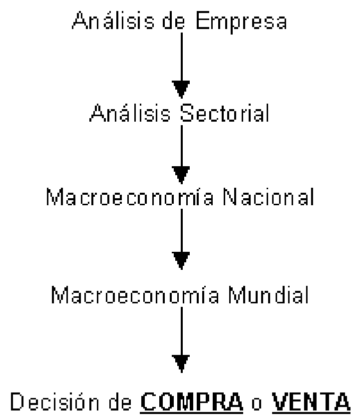
- El Producto Bruto Interno y su tasa de crecimiento.
- La inflación en la Economía.
- Déficit en la Balanza de Cuenta Corriente.
- Nivel de Reservas Internacionales.
- Situación del tipo de cambio
- Estabilidad Política, Social y Jurídica
- El Riesgo - País

En general este tipo de análisis es utilizado por los grandes fondos internacionales que buscan colocar sus excedentes en distintos países, por lo tanto se debe hacer un análisis de la situación a nivel macroeconómico de cada país. En la medida que un país cumpla con tener buenos indicadores será visto como un país en donde se puede invertir.



ANÁLISIS BOTTOM-UP (DE ABAJO A ARRIBA)

Como enfoque alternativo al anteriormente citado, tenemos el criterio de empezar el análisis por lo más concreto que es la situación económica y financiera de la empresa. Este enfoque, no reniega del conocimiento de la situación macroeconómica, aunque da prioridad al análisis de las empresas como objeto de estudio de oportunidades del mercado financiero. Las carteras se fundamentan en su formación, en base a decisiones relacionadas con el comportamiento de las empresas y no a nivel macroeconómico Se fija en los indicadores de la empresa tales como: EEFF, Flujos de Caja, Ratios Financieros, etc. este tipo de análisis responde a la pregunta: ¿Cuál es la situación de la empresa? ¿Cómo esta funcionando la empresa? Una vez analizado el detalle, y en función del interés del analista, éste irá ascendiendo en la cadena del análisis, en sentido contrario al enfoque dado por el análisis "Top-Down".



Este tipo de análisis es usado fundamentalmente por medianos y pequeños inversionistas que tienden a invertir en las bolsas locales. Una vez que una acción es valorizada se determina su valor intrínseco (lo que debería valer en el mercado) y se compara con el valor de mercado en dicho momento. Si el valor de mercado es mayor al valor intrínseco entonces la acción estará sobrevaluada y no será una buena opción para el inversionista. Viceversa si el valor de mercado es menor al valor intrínseco entonces la acción de dicha empresa estará subvaluada barata y es una buena opción para el inversionista. Dentro del análisis BOTTOM UP existe dos enfoques referidos a la valorización de acciones.

- Métodos basados en el valor patrimonial de la empresa
-Métodos basados en la capacidad de generar utilidades o en el rendimiento de las empresas

Tanto el análisis Bottom Up, como Top Down se basan en el mismo principio.

”Conociendo como se van a comportar las finanzas de las empresas (nivel de utilidades, patrimonio, crecimiento, política de dividendos, etc.), o del país (crecimiento económico, reservas internacionales, inflación, etc.) es posible anticiparse al mercado, lo que beneficiará a los inversionistas en acciones".

II.3 ANÁLISIS TÉCNICO

Esta escuela centra su análisis en el comportamiento del mercado mediante figuras gráficas e indicadores estadísticos, que tratan de anticipar el comportamiento de las cotizaciones de las acciones. Los Técnicos no toman en cuenta ni aún a la empresa ni a los indicadores macroeconómico. Bajo este tipo de análisis se sostiene que no importa si una empresa está bien o mal, lo relevante es estudiar la evolución del mercado (es decir, mientras se pueda comprar a un precio bajo y vender a un precio más alto). [4]

Los defensores de este enfoque, llamados inicialmente "Chartistas", posteriormente "Técnicos", no buscan determinar el valor intrínseco de una acción en base a las finanzas de la empresa, y sostienen que la cotización de una acción no depende de los fundamentos de las empresas sino también del humor, de los caprichos del mercado, de la psicología de los distintos agentes económicos y muchas veces de la irracionalidad de los mismos inversionistas. Los técnicos sostienen que el trabajo que hacen los fundamentalistas no sirve, por que el mercado interioriza toda la información en forma instantánea de tal manera que todo pronóstico echo por el fundamentalista ya estará incluido en las cotizaciones de las acciones y por lo tanto no se podrá obtener beneficios de dicho análisis, asimismo afirman que el mercado tiene memoria, o lo que es lo mismo que las tendencias se repiten lo que los lleva a la utilización de gráficos e indicadores estadísticos para poder anticiparse al mercado.

---

[4] Robert D. Edwards, "Technical Analysis of Stock trends", New York Institute of Finance,1992

II.4 ANÁLISIS DE MERCADOS EFICIENTES

En economía e entiende por eficiencia a la correcta asignación de recursos, sin embargo para la teoría de los mercados eficientes, el concepto de eficiencia tiene una significación distinta, esta relacionado a los mercados financieros y a la velocidad con que se transmite toda la información en dichos mercados. En la medida que todo tipo de información se transmita de manera instantánea entonces hablando de mercados eficientes. Existen 3 versiones de la teoría de los mercados eficientes.[5]

Eficiencia Fuerte Un mercado es eficiente en esta versión cuando toda información se refleja en el precio de los valores de manera instantánea, cabe destacar que la teoría de los mercados eficientes considera tres tipos de información:

PRIVADA: información de dentro de la empresa manejada sólo por los directores y gerentes de la empresa (Insiders)

PÚBLICA: información que llega al público en general, por ejemplo Estados Financieros, Flujo de Caja, etc.

INFORMACIÓN REFERIDA A LOS PRECIOS ANTERIORES (HISTÓRICA): información relacionada con el comportamiento de los precios, volúmenes transados, frecuencia de negociación, etc.

En esta versión fuerte los tres tipos de información se transmiten de manera inmediata al mercado, por lo tanto cualquier inversionista que trate de aprovecharse de la nueva información, (incluyendo los insiders)

[5] Burton G. Malkiel, "Un Paseo Aleatorio por Wall Street" Alianza Editorial, 1997

no podrá obtener ganancias extraordinarias (provenientes de dicha información) Por lo tanto ni el análisis fundamental (que se basa en información pública), ni la teoría del análisis técnico (que se basa en la información histórica relacionada a cotizaciones y volúmenes transados, etc.) nos sirven como estrategia de inversión puesto que el mercado ya anticipo la información y no habrá manera de aprovecharse de ella.

Eficiencia Semifuerte: En esta versión de la teoría de los mercados eficientes la información que se transmite instantáneamente es la pública y la histórica, no así la información privada por lo que los únicos agentes económicos que pueden obtener ganancias extraordinarias provenientes de dicha información son los insiders o aquellos que manejan la información privada, por lo tanto esta versión niega la eficacia tanto del análisis fundamental (que se maneja en base a información pública) y del análisis técnico (que se basa en información relacionada con las cotizaciones y volúmenes transados en el mercado), dado que no se pueden anticipar al mercado por que el mercado ya interiorizo o anticipo dicha información.

Eficiencia Débil: En esta versión de la teoría de los mercados eficientes solo se interioriza la información referida al nivel de os precios de las acciones (cualquier inversionista sensato se fija en las cotizaciones pasadas y los volúmenes transados anteriormente), En este enfoque de los mercados eficientes no sólo los insiders pueden obtener ganancias extraordinarias, sino aquellos agentes económicos que manejan información pública (Estados Financieros, Nuevas inversiones de las empresas, etc.) es decir la teoría de los mercado eficientes validan el análisis fundamental, y por otro lado niega la bondad del análisis técnico.

CAPITULO III

DECISIONES DE INVERSIÓN EN UN ESCENARIO DONDE NO EXISTE RIESGO

En esta primera parte de la investigación se explica como se comportaría un inversor en un escenario donde existe certeza absoluta, entendiéndose la idea de certeza absoluta como aquella en que el inversor conoce con precisión toda la información económica referida o relacionada a su inversión (sus rentas futuras, la rentabilidad esperada de los acciones, etc.), por lo tanto no existe riesgo de que ocurra un evento inesperado.

En el presente capítulo se desarrolla el análisis del comportamiento del inversor en el contexto de certeza absoluta donde analizaremos 3 escenarios de manera separada:

a) Existe un mercado perfecto de capitales y en donde no existen inversiones físicas o reales.

b) No existan mercados de capital y en donde existen inversiones físicas o reales

c) Existe un mercado perfecto de capitales e igualmente hay inversiones físicas o reales
d) Finalmente se verá el caso de algunas imperfecciones en el mercado de capitales y como afectarían éstas a la conducta del inversor.

Antes de iniciar el análisis concerniente a los distintos puntos mencionados anteriormente creo importante discutir brevemente algunos supuestos del análisis. El primer supuesto importante es **la existencia de mercados perfectos de capitales**

¿Qué significa un mercado perfecto de capitales dentro del contexto de nuestra investigación? Para entender el concepto de mercado perfecto de capitales se debe cumplir con las siguientes características

A) Donde exista libre afluencia de los mismos sin considerar ningún tipo de restricción tanto para la entrada como para la salida de dichos capitales, este mercado está constituido por lo tanto por todos los agentes económicos los cuales tienen libre acceso a prestar como a pedir prestado, así como a comprar o vender cualquier activo financiero o título-valor.
B) En segundo lugar un mercado perfecto de capitales exige que no exista distorsiones en cuanto a la formación de precios, por lo que el precio en dicho mercado estará fijado por la oferta y la demanda del mismo.

Si bien el supuesto de un mercado perfecto de capitales es artificial, sin embargo es importante tratar la conducta de un inversor bajo este supuesto, puesto que es la piedra angular del marco conceptual a utilizarse en los futuros capítulos, el cual nos ayudará a entender mejor el comportamiento de un inversionista. Una consecuencia de este supuesto es el que exista un precio único para los distintos activos financieros, el cual refleja la real carestía del mismo, en el caso del dinero, esto significará que no exista tanto tasas de interés activa y pasiva en el sistema sino una sola tasa de interés tanto para prestar como para pedir prestado.

Un segundo supuesto que se hará por motivos de simplificación es **la existencia de un solo activo financiero en el mercado de capitales, "dinero",** es decir el mercado de capitales será el mercado de dinero, donde el inversionista sólo pueda invertir en este activo, asimismo en este contexto se supone que no existe ninguna oportunidad de inversión en el sector real de la economía, fuera del mercado perfecto de capitales

Este supuesto nos lleva a que en el caso en que no exista oportunidades de inversión (sección III.1), la única manera de <u>Ahorrar</u> en el mercado de capitales será en el mercado de dinero por consiguiente hemos de considerar la acción de ahorrar como un mismo acto que el de <u>Invertir</u> que consistirá en prestar dinero (lo mismo es ahorrarlo o invertirlo) y a cambio de ello recibir su capital inicial más los respectivos intereses.

Un tercer supuesto importante en el esquema a presentar es que **los costos de transacción son nulos,** esto con el fin de simplificar el análisis, a subes que no afecta las conclusiones del mismo.
Por último se supondrá que **la tasa de interés es real, positiva**, para esto consideraremos que no existe inflación y la tasa de interés es positiva, supuesto bastante lógico teniendo en cuenta que los inversores buscan tener una rentabilidad real (por encima de la inflación). Hechas estas consideraciones pasemos al análisis respectivo.

III.1) COMPORTAMIENTO DE UN INVERSOR EN CONDICIONES DE CERTEZA ABSOLUTA DONDE EXISTE UN MERCADO PERFECTO DE CAPITALES Y NO EXISTE INVERSIONES FÍSICAS O REALES

El comportamiento de un inversor en un escenario donde exista un mercado perfecto de capitales, pleno conocimiento del futuro y donde no hay oportunidades de inversión física está condicionado principalmente y de manera simplificada por:

a) La renta actual.
b) Las rentas futuras,
c) La tasa de interés, (rentabilidad del dinero, que como hemos supuesto es el único activo en el que se puede invertir)
d) Gustos y Preferencias del inversor,

Las variaciones tanto de la renta actual, futura y de la tasa de interés afectan a la riqueza de la persona y de esta manera se ven afectadas las decisiones del inversor (vía riqueza). Es en este contexto que enfocaremos las principales razones que llevan a tomar una decisión racional al inversor

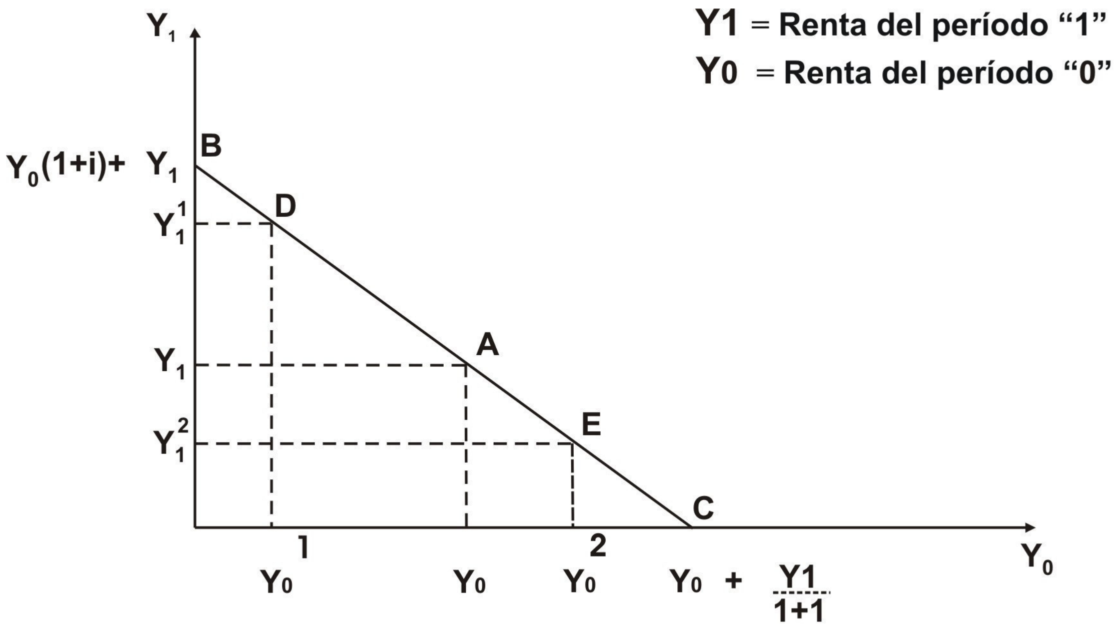
A) LA RIQUEZA COMO RESTRICCIÓN PRESUPUESTARIA

Un agente económico obtendrá un flujo de renta en el tiempo, la cual la podemos describir como $\sum Y_t$ donde Y_t es la renta del período " t ", siendo ésta su riqueza en el tiempo.

Bajo condiciones de certeza absoluta este poseedor de riqueza conocerá tanto su renta actual (Y_0), como sus rentas futuras (Y_1, Y_2, Y_3 ....) asimismo la tasa de interés de mercado que la denominaremos " i ".

Vamos a suponer con fines prácticos sólo 2 períodos: el período "cero" (período actual) y el período "uno" (período futuro) por consiguiente cualquier poseedor de riqueza conocerá su renta en el período cero (Y_0) y su renta en el período uno (Y_1), la tasa de interés " i " también es conocida, una vez establecido el pleno conocimiento del horizonte económico que se le presenta al respectivo agente económico cabe la pregunta ¿cuál es la cantidad máxima de dinero que puede tener en el período "cero" o en el período "uno" dado que el mercado de capitales es perfecto?...La respuesta a esta pregunta se ve más claramente con la ayuda del Gráfico 3.1

GRÁFICO 3.1



<u>**Estructura de Renta de un Agente Económico**</u>

Supongamos inicialmente a un inversionista que tiene ingresos ciertos de Y_0 en el período "cero" e Y_1 para el período "uno" (se ubica en el punto "A" del Gráfico 3.1), dado que existe un mercado perfecto de capitales dicha persona puede obtener distintas combinaciones de ingresos en el periodo "cero" y "uno" tanto prestando dinero como pidiendo prestado, dichas combinaciones se reflejan en la recta "BC" del Gráfico 3.1, recta a la que se denomina **RESTRICCION PRESUPUESTARIA**. (La riqueza de cada agente económico se constituye como restricción presupuestaría) Veamos de qué manera se obtienen dichas combinaciones.

Si este agente económico prestase toda su renta para de esta manera obtener una mayor cantidad de dinero en el futuro (período "uno"), suponiendo que a esta persona le interesaría tener la máxima cantidad de dinero en el período "uno", podría obtener $Y_0(1+i) + Y_1$ (punto "B" del Gráfico 3.1), donde Y_0 (1+i) es la renta que obtendría en el período "uno", fruto de sus ahorros en el período "cero" más sus respectivos intereses, mientras que Y_1 es la renta ya conocida del período "uno", sumadas ambas nos da la máxima cantidad de ingresos que puede tener dicho inversor en el período "uno".

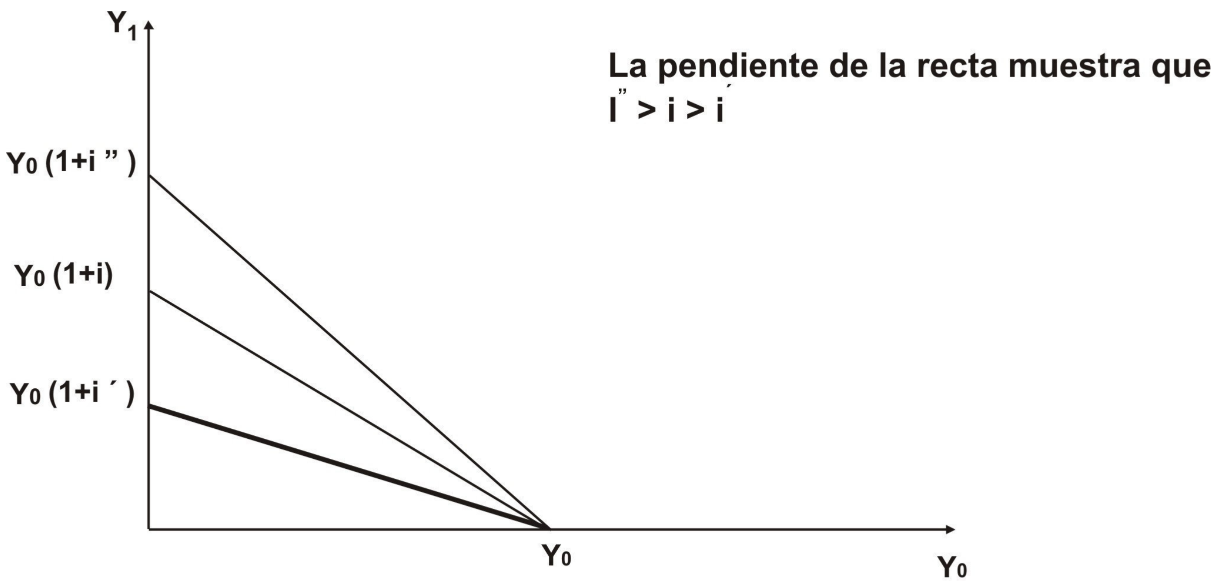
Por otro lado si éste agente económico desea hacer líquida toda su riqueza en el período "cero", la máxima cantidad de ingresos que obtendría para el período "cero" sería $Y_0+(Y_1/(1+i))$, punto "C" del Gráfico 3.1, donde Y_0 es la renta ya conocida del período "cero" mientras que $Y_1/(1+i)$ es la renta que va a obtener en el período "cero" pidiendo prestado y que se va a pagar con la renta ya conocida del período "uno".

Se ve pues que se ha generado una estructura de renta como lo muestra el Gráfico 3.1 donde la recta "BC" o restricción presupuestaria recoge todas las posibles combinaciones de ingresos en el período "cero" y en el período "uno" que podemos obtener prestando o pidiendo prestado. Todos los puntos por encima de la recta de presupuesto son inalcanzables, mientras todos los puntos por debajo de dicha recta son factibles.

Cabe resaltar que cualquier punto que se encuentre a la izquierda del punto "A" (el punto "D" en el Gráfico 3.1) refleja que el poseedor de riqueza es un Ahorrador-Inversor, puesto que ha prestado dinero por el monto $Y^1_0 - Y_0$ para obtener $Y^1_1 - Y_1$ (lo que prestó más los respectivos intereses), igualmente cualquier punto que se encuentre a la derecha del punto "A", (el punto "E" en el Gráfico 3.1) refleja que el poseedor de riqueza es un Desahorrador-Desinversor, puesto que a pedido prestado dinero por el monto $Y^2_0 - Y_0$ para pagar posteriormente $Y_1 - Y^2_1$ (lo que pidió prestado más los respectivos intereses), en nuestra investigación hemos de poner nuestra atención en la conducta del Ahorrador-Inversor que es el tema de nuestro estudio.

Volviendo a la recta de presupuesto, ésta se puede definir por su pendiente y por el punto de intersección con la abscisa, siendo ésta $Y_0 + (Y_1/(1+i))$ que no es otra cosa que el valor actual de sus rentas, o sea la riqueza del inversor. (Se define riqueza como el valor actual de los ingresos de una persona en el tiempo), **es pues la riqueza de cada persona la que determina su estructura de renta**, asimismo la pendiente de la recta será mayor que la unidad debido al hecho que estamos considerando tasas de interés positiva, como se está en el caso de un Ahorrador-Inversor, un incremento en la tasa de interés hará que la riqueza de dicho inversor se incremente, viceversa una caída de la tasa de la interés reducirá la riqueza de dicho inversor. (Ver Gráfico 3.2).

GRÁFICO 3.2



Efecto de las variaciones de las tasas de interés en la riqueza de un Ahorrador - Inversor.

Si determinamos la ecuación de la pendiente de la recta de presupuesto en el punto A será:

$$m = \frac{Y_1 - 0}{Y_0 - Y_0 - \frac{Y_1}{1+i}} = -\frac{Y_1(1+i)}{Y_1} = -(1+i)$$

Que representa la unidad más la tasa de interés del mercado y es de signo negativo reflejando la relación inversa entre Y_0 e Y_1, (dadas las rentas del período presente y futuro para poseer una renta más alta en el período presente es necesario reducir la renta del período futuro). Se ve pues que la recta de presupuesto o restricción presupuestaria refleja todas las posibles formas de hacer líquida la riqueza en el tiempo ¿Qué es lo que hace decidirse en nuestro modelo a un ahorrador-inversor por un punto específico de dicha recta?, la respuesta se ve más adelante.

B) PREFERENCIAS INTERTEMPORALES

Se considera a las preferencias intertemporales de un consumidor, como aquellas que miden las preferencias entre el consumo presente y el consumo futuro de un inversor, si prefiere el consumo presente será un prestatario, mientras que si prefiere el consumo futuro será un prestamista o un Inversor-Ahorrador tal cual lo hemos mencionado anteriormente. Esta combinación entre consumo presente y consumo futuro que es subjetiva están ligadas a un nivel de satisfacción que obtiene cada inversor, la que se puede ilustrar mediante una función de utilidad en donde:

$$U = f(C_0, C_1 .... C_t) \text{ del período "t".}$$

En donde

U = Nivel de Utilidad que alcanza cada inversionista

C_t = Consumo del período “t”

Se define esta función de utilidad en relación al consumo en el tiempo por parte de cualquier agente económico, donde el grado de satisfacción que alcanza dicho agente dependerá de las distintas combinaciones de consumo intertemporal.

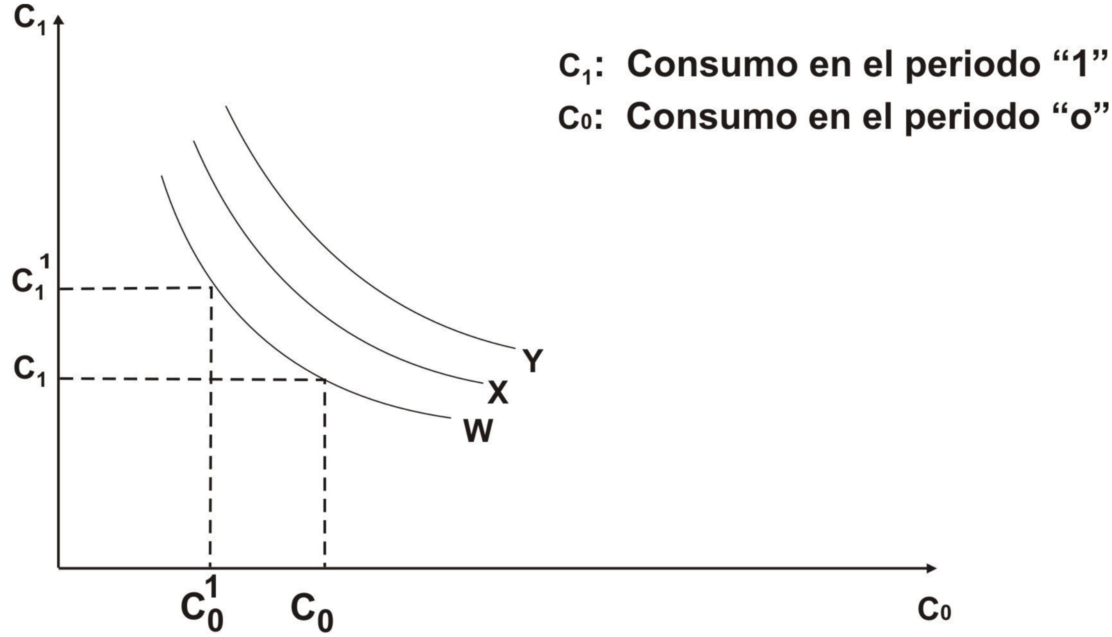
Siguiendo con el supuesto de que existen sólo 2 períodos tenemos:

$$U = f(C_0, C_1).$$

A partir de esta función de utilidad se derivan los mapas de curvas de indiferencia que están formados por todos los puntos o combinaciones donde la utilidad total se mantiene constante, es decir el consumidor se siente indiferente entre 2 puntos cualquiera de una curva de indiferencia, puesto que en ambos puntos su nivel de satisfacción es el mismo (Ver Gráfico 3.3). Dichas curvas de indiferencia tienen las siguientes características:

1) Las curvas de indiferencia no tienen pendiente positiva.
2) Las curvas de indiferencia no pueden intersectarse.
3) Las curvas de indiferencia pasan por cada punto del espacio de consumo intertemporal.
4) Las curvas de indiferencia son convexas hacia el origen.

GRÁFICO 3.3



Mapa de Curvas de Indiferencia

Cabe resaltar que todas las curvas de indiferencia que se encuentran hacia la derecha o hacia arriba de otra curva de indiferencia serán preferidas pues se conseguirá un mayor grado de satisfacción o lo que es lo mismo mayores niveles de utilidad. **ES DECIR UN CONSUMIDOR BUSCARA UBICARSE EN LA CURVA DE INDIFERENCIA MAS ELEVADA.**

Otro concepto importante que nace del presente análisis es **"LA TASA DE PREFERENCIA INTERTEMPORAL"** que es la tasa a la cual un consumidor está dispuesto a sustituir consumo futuro por consumo presente, manteniendo su mismo nivel de utilidad, este concepto está dado por la pendiente de la curva de indiferencia, y la denotaremos por la letra "ρ" (tasa de preferencia intertemporal). Volviendo al Gráfico 3.3, este consumidor estará dispuesto a sacrificar C^1_1 - C_1 unidades de consumo futuro a cambio de C^1_0 - C_0 de consumo presente por consiguiente:

$$\frac{C^1_1 - C_1}{C^1_1 - C_0} = -(1+\rho)$$

Donde la tasa de preferencia intertemporal "ρ" significa el porcentaje que está dispuesto a añadir a una unidad de consumo futuro con el fin de intercambiarlo por una unidad de consumo presente.

Por otro lado al analizar el Gráfico 3.3 nos damos cuenta que a medida que poseemos más de un bien estamos dispuestos a entregar menos por dicho bien, (por el bien que poseemos abundantemente), dado que la pendiente de las curvas de indiferencia cada vez se hace menor, o lo que es lo mismo la tasa de preferencia intertemporal se hace menor, esto no es más que otra manifestación de "LA LEY DE LA UTILIDAD MARGINAL DECRECIENTE", la cual nos señala que a medida de que tenemos más de un bien entonces lo valoramos menos, o lo que es lo mismo nos proporciona menos satisfacción o utilidad, lo que en la realidad resulta completamente cierto.

Hemos analizado la estructura de la renta de un Ahorrador-Inversor, así como las preferencias intertemporales de un consumidor. Veamos pues como estos dos temas se fusionan para determinar cuáles son las razones por la cual un ahorrador-inversor se ubica en determinado punto de su estructura de renta, o mejor dicho para determinar las razones por la que un agente económico decide ahorrar, invertir o consumir.

C) MAXIMIZACIÓN DE LA FUNCIÓN UTILIDAD

Se ha visto por un lado las "ρ" o tasa de preferencias intertemporales de un consumidor y asimismo se ha visto que lo que busca es maximizar su función de utilidad, (maximizar su nivel de satisfacción) pero a su vez para obtener dicha maximización el consumidor estará sujeto a la restricción de que el valor presente de su consumo a lo largo de su vida no puede superar el valor presente de su renta total en la vida (el gasto total a través de toda su vida no puede exceder sus rentas), esto supone que todo el ahorro a través del tiempo se gasta completamente. Esta restricción nos dice:

$$\sum_{0}^{t} \frac{Y_t}{(1+i)^t} = \sum_{0}^{t} \frac{C_t}{(1+i)^t}$$

Donde: $C_t =$ Consumo en el período "t"

$Y_t =$ Rentas en el período "t"

T = Duración esperada de vida del consumidor.

I = Tasa de interés.

Esto siempre se cumple dado que estamos suponiendo que dicho consumidor conoce con certeza sus rentas futuras y por consiguiente las consumirá totalmente a lo largo de su vida, lo que hace que su estructura de renta se convierta en su estructura de consumo (La razón central de poseer rentas no es otra que la de poder consumirlas en algún tiempo futuro) y por ende en la restricción presupuestaria de dicho consumidor

Si generalizamos nuestro estudio a 2 períodos resulta:

$$Y_0 + \frac{Y_1}{1+i} = C_0 + \frac{C_1}{1+i}$$

Riqueza total = Consumo total

Operando con esta ecuación resulta:

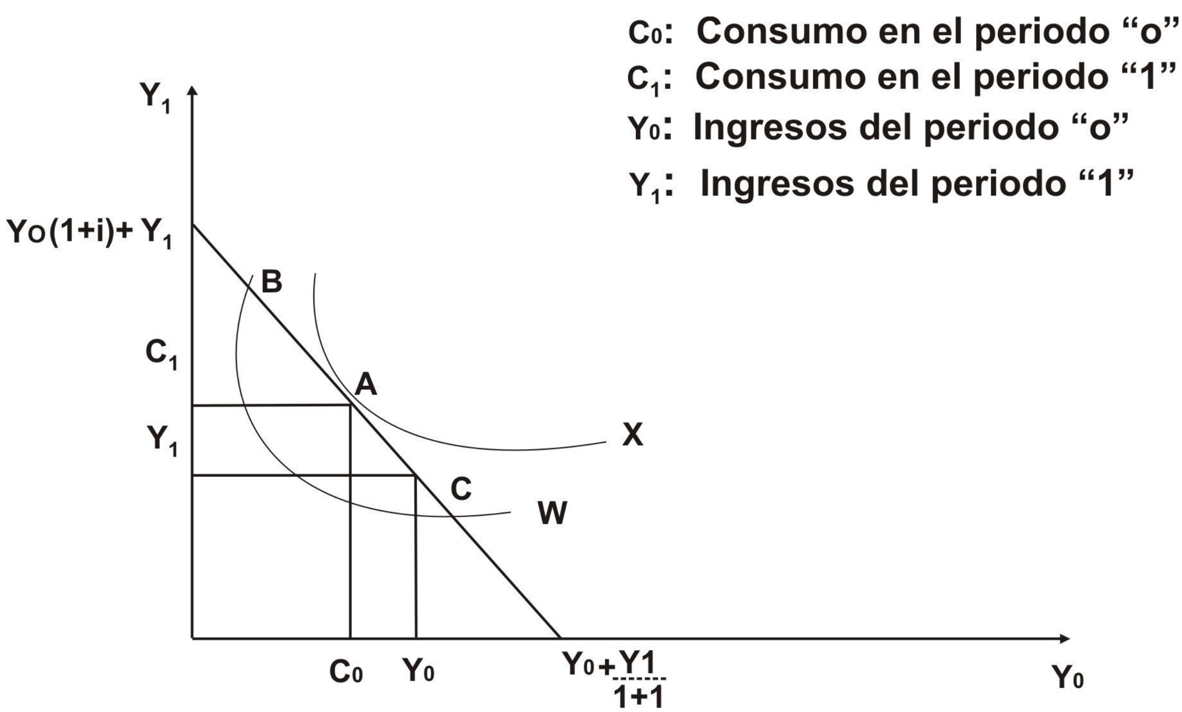
$$Y_0 - C_0 = \frac{-(Y_1 - C_1)}{1+i}$$

$$S_0 = -\frac{S_1}{1+i}$$

Es decir el ahorro en el período "cero" será igual al desahorro en el período "uno" (consumo por encima del ingreso).

Una vez establecido la estructura de renta como la restricción presupuestaria de un consumidor, faltaría solamente determinar cuál es el punto donde un consumidor se ubicara y en donde decida cuanto consumir hoy y cuanto consumir en el futuro, para esto determinaremos la condición de maximización que hace máxima la utilidad, o satisfacción del consumidor, para derivar esta relación nos ayudaremos del Gráfico 3.4.

GRÁFICO 3.4



<u>Maximización de la Utilidad</u>

Un consumidor conoce sus ingresos ciertos Y_0 e Y_1 para el período "cero" y "uno", asimismo sabe que puede alcanzar cualquier punto dentro de la estructura de consumo (recta de presupuesto) prestando o pidiendo prestado, se ve claramente que el punto "A" del Gráfico 3.4 será el punto donde se ubicará el consumidor puesto que ahí maximizará su utilidad, dado que se alcanza la curva de indiferencia más elevada, no se ubicará en el punto "B" del mismo gráfico puesto que la valoración marginal que se le da al consumo en el período "cero" $(1+\rho)$, es mayor que el costo marginal de obtenerlo $(1+i)$, por consiguiente dicho consumidor se sentirá incentivado a seguir consumiendo en el período "cero", igualmente en el punto "C" del mismo gráfico la valorización marginal que se le da al consumo presente $(1+\rho)$ será menor al costo marginal $(1+i)$, por lo que reducirá su consumo presente y lo hará hasta el punto en que la valorización marginal sea igual al costo marginal de dicho consumo o sea:

$$-\ (1+\rho) = -\ (1+i)$$

$$\rho = i$$

Que es la condición de maximización de la utilidad.

En el Gráfico 3.4 vemos que este consumidor tendrá una renta Y_0 en el período "cero" pero su consumo C_0 en el mismo período será menor que su renta, lo que le permitirá ahorrar $(Y_0\text{-}C_0)$ por lo que recibirá $(Y_0\text{-}C_0)\ (1+i)$, lo cual le permitirá financiar su consumo futuro.

Concluimos pues que el consumidor maximizará su función utilidad en el punto "A" del Gráfico 3.4 donde $\rho = i$ (condición de maximización) que es el punto donde se alcanza la curva de indiferencia más elevada, asimismo se ve claramente que si existiese otras formas de ahorrar mas rentables el inversor al existir certeza absoluta se decidirá por esta forma, desechando por completo la primera (y con el todos los inversores) **NO TENIENDO SENTIDO LA DIVERSIFICACIÓN DE SUS INVERSIONES** al existir certeza absoluta de las rentabilidades futuras.

III.2) COMPORTAMIENTO DE UN INVERSOR EN CONDICIONES DE CERTEZA ABSOLUTA DONDE NO EXISTE MERCADOS PERFECTOS DE CAPITAL Y EXISTEN INVERSIONES FÍSICAS O REALES.

Antes de empezar el estudio del comportamiento de un inversor en condiciones de certeza absoluta donde no existe un mercado de capitales y donde existen inversiones físicas o reales es necesario esclarecer algunos conceptos.

Toda la teoría neoclásica del capital trata el concepto de inversión física o real, como aquella inversión donde existe un incremento en el stock de capital, con la respectiva acumulación de activos fijos, o lo que es lo mismo nueva adquisición de bienes de capital por parte de una empresa o persona con el fin de obtener utilidades. En el análisis respectivo no haremos ninguna modificación a dicho planteamiento y trabajaremos con el concepto de **inversión física o real entendiendo por ésta aquella inversión que se refleja en nuevas compras de bienes de capital y que ofrecen una rentabilidad cierta ,** En esta sección del presente capítulo analizaremos los resultados en cuanto a las razones que afectan el comportamiento de un inversor bajo un escenario de certeza absoluta, donde a diferencia del caso anterior no existe un mercado de capitales y sólo existen inversiones físicas o reales. Vamos a empezar el análisis suponiendo a un inversor que posee una cartera de proyectos los cuales son independientes, y que las inversiones son perfectamente divisibles.

Al igual que en la sección III.1 este inversor tiene una restricción presupuestaria la cual se explicará posteriormente, igualmente posee una función de utilidad de donde se deriva su respectivo mapa de curvas de indiferencia, el problema pues se resumirá en hallar las respectivas condiciones de maximización, pasemos pues al análisis respectivo.

A) LA FRONTERA DE POSIBILIDADES DE INVERSIÓN COMO RESTRICCIÓN PRESUPUESTARIA

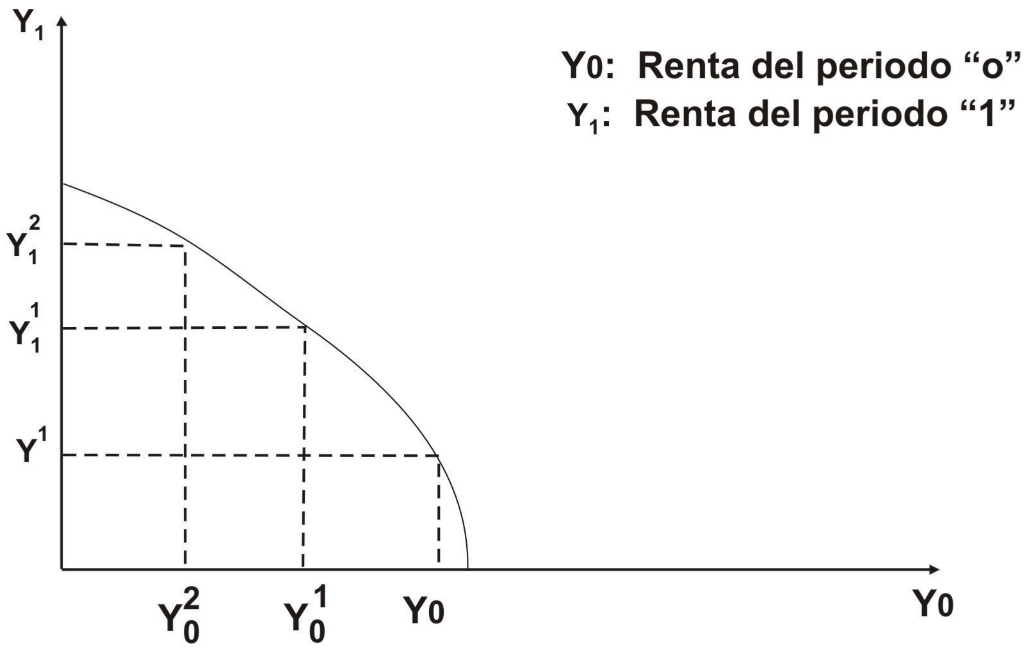
Vamos ha analizar como obtenemos la recta de presupuesto o estructura de renta en el presente modelo, para esto supondremos inicialmente que el inversor prioriza todos los proyectos empezando con el más rentable hasta el menos rentable e invierte en el mismo orden, de tal forma que:

PROYECTOS	TASA DE RENTABILIDAD
PROYECTO 1	r_1
PROYECTO 2	r_2
PROYECTO 3	r_3
.	.

Donde $r_1 > r_2 > r_3$ .... $> r_n$ y representa la tasa de rentabilidad de cada proyecto

Es decir ante una misma inversión en el período "cero", la tasa de rentabilidad de la misma irá disminuyendo, esto es así pues se escogerá inicialmente los proyectos más rentables hasta que estos se agoten; luego los menos rentables y así sucesivamente, esto se ve más claramente con la ayuda del Gráfico 3.5

GRÁFICO 3.5



<u>Curva de Posibilidades de Inversión o Estructura de Renta en un Modelo donde no existen mercados de Capital y hay oportunidades de Inversión</u>

Supongamos a un tenedor de riqueza el cual posee una dotación inicial de renta Y_0 para el período "cero" e Y_1 para el período "1". Si se invierte $Y^1{}_0$ - Y_0 en el proyecto 1 obtendría $Y^1{}_1$ - Y_1 lo que implicaría una rentabilidad de:

$$\frac{Y^1{}_1 - Y_1}{Y^1{}_0 - Y_0} = 1 + r_1$$

Donde r_1 es la rentabilidad del primer proyecto, posteriormente al agotarse el proyecto 1 se invierte el mismo $Y^1{}_0 - Y_0 = Y^2{}_0 - Y^1{}_0$ en el proyecto 2 esto dará una rentabilidad igual a:

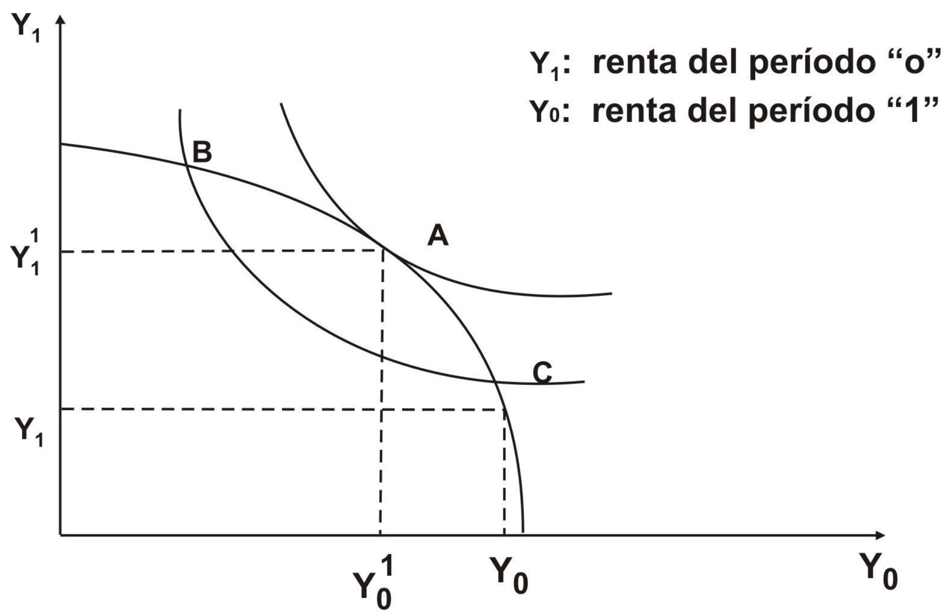
$$\frac{Y^2{}_1 - Y^1{}_1}{Y^2{}_0 - Y^1{}_0} = 1 + r_2$$

que es la rentabilidad del proyecto 2, donde $r_1 > r_2$, si proseguimos haciendo el mismo ejercicio obtendremos que las rentabilidades de los distintos proyectos se harán cada vez menores, lo que hace que la curva del Gráfico 3.5 sea cóncava hacia el origen, a esta curva se le denomina **CURVA DE POSIBILIDADES DE INVERSIÓN** o estructura de renta de un poseedor de riqueza en un modelo donde existe certeza absoluta, inversión física o real y no hay un mercado de capitales, esta curva es análoga a la recta de presupuesto de la que nos referimos en la sección III.1, esta curva refleja todos los puntos alcanzables para un poseedor de riqueza de rentas en el período "cero" y rentas en el período "uno". La pendiente de dicha curva mide la rentabilidad del ultimo activo, asimismo esta curva de posibilidades de inversión, se convierte en curva de posibilidades de consumo, dado que se ha supuesto que en el tiempo el valor del consumo real no puede superar al de su riqueza, la cual se gastará totalmente a través del tiempo, esto hará que la curva de posibilidades de inversión se convierta en la restricción presupuestaria del poseedor de riqueza.

B) CONDICIONES DE MAXIMIZACIÓN

En el punto "A" se ha señalado la curva de posibilidades de inversión como la restricción presupuestaria de un inversor, por otro lado éste mismo inversor posee una función de utilidad $U = f(C_0, C_1)$ la cual trata de maximizar. Al igual que en el caso anterior se maximizará cuando la tasa de preferencia intertemporal "ρ" sea igual a la tasa de rentabilidad del último activo "r", veamos esto con la ayuda del Gráfico 3.6

GRÁFICO 3.6



Maximización de la utilidad

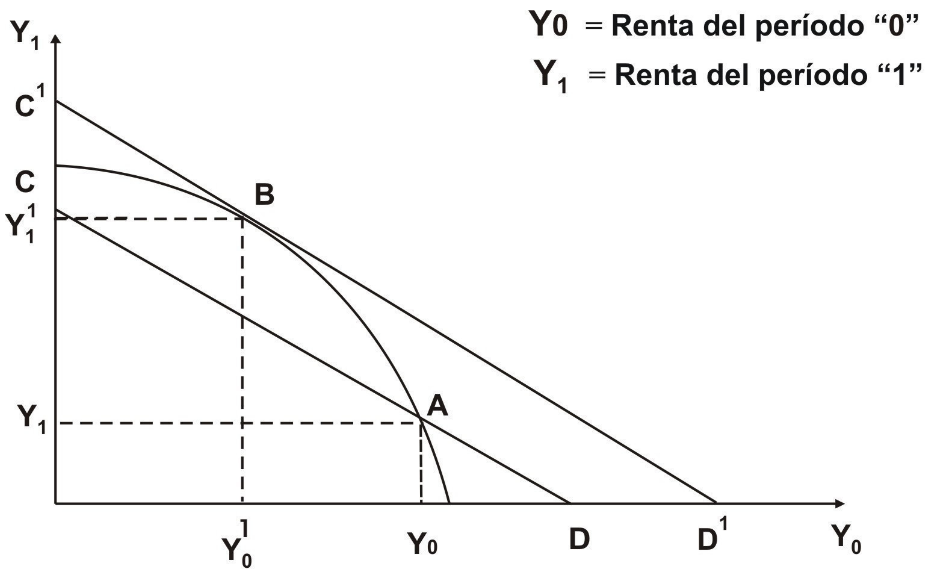
Supongamos que el poseedor de riqueza tiene una dotación inicial de Y_0 para el período "cero" e Y_1 para el período "uno", este inversor no elegirá el punto "B" del Gráfico 3.6, puesto que la valoración marginal que se le da al consumo en el período "cero" es mayor que la rentabilidad del último activo ($\rho > r$), por lo que el agente económico reducirá la inversión para de ésta manera alcanzar una curva de indiferencia más alta, igualmente éste poseedor de riqueza no maximizará su función de utilidad en el punto "C" del Gráfico 3.6 puesto que la rentabilidad que brinda el último activo es mayor a la tasa de preferencia intertemporal por el consumo ($r > \rho$) en el período "cero", por consiguiente, el inversor se sentirá incentivado a seguir invirtiendo hasta el punto en que $\rho= r$ o sea hasta que la tasa de preferencia intertemporal sea igual a la rentabilidad del último activo la cual es la condición de maximización de utilidad para cualquier agente económico, en un escenario de certeza absoluta, inexistencia de un mercado de capitales, con oportunidades de inversión.

III.3) COMPORTAMIENTO DE UN INVERSOR EN UN AMBIENTE DE CERTEZA ABSOLUTA DONDE EXISTE UN MERCADO PERFECTO DE CAPITALES Y HAY INVERSIONES FÍSICAS O REALES

Acercándonos más a la realidad y luego de haber analizado el caso del comportamiento de un inversor en un mercado perfecto de capitales, y asimismo donde hay oportunidades de inversión física o real en los puntos III.1 y III.2, juntamos estos dos supuestos para el análisis respectivo.

Vamos a iniciar el presente análisis suponiendo a un agente económico tenedor de riqueza el cual tiene que decidir ante distintas alternativas de inversión real, por un lado tiene una serie de proyectos los cuales están debidamente priorizados en función de su rentabilidad tal como se vio en la sección III.2 (hay oportunidades de inversión física , las cuales tienen una rentabilidad cierta o segura), y asimismo tiene la posibilidad de prestar su capital o dinero el cual será devuelto con los respectivos intereses (existe un mercado perfecto de capitales tal como se vio en la sección III.1) ¿Qué alternativa habrá de tomar y en base a qué criterios?. Al igual que los casos anteriores este agente económico trata de maximizar su función de utilidad sujeto a una restricción presupuestaria, nos ayudaremos en la explicación respectiva con ayuda del Gráfico 3.7

GRÁFICO 3.7



Restricción presupuestaria en el caso que exista oportunidades de inversión y un Mercado Perfecto de Capitales

A) RESTRICCIÓN PRESUPUESTARIA

Tenemos a un inversor el cual posee una dotación inicial de Y_0 como renta para el período "cero" e Y_1 como renta para el período "uno" (punto "A" en el Gráfico 3.7), este punto está ubicado sobre la curva de posibilidades de inversión (al igual que en el punto III.2), y asimismo sobre este punto pasa la recta "CD" donde la pendiente de dicha recta representa la tasa de interés del mercado más la unidad la cual hemos denominado "ĩ", esta recta es la recta de presupuesto o restricción presupuestaria en la sección III.1. Si en este instante el inversor se decidiese a comprar activos reales se ubicaría sobre la curva de posibilidades de inversión, siendo ésta su restricción presupuestaria, igualmente si el inversor se decidiese a prestar o a pedir prestado, su restricción presupuestaria será la recta "CD" como se ha visto en la sección III.1

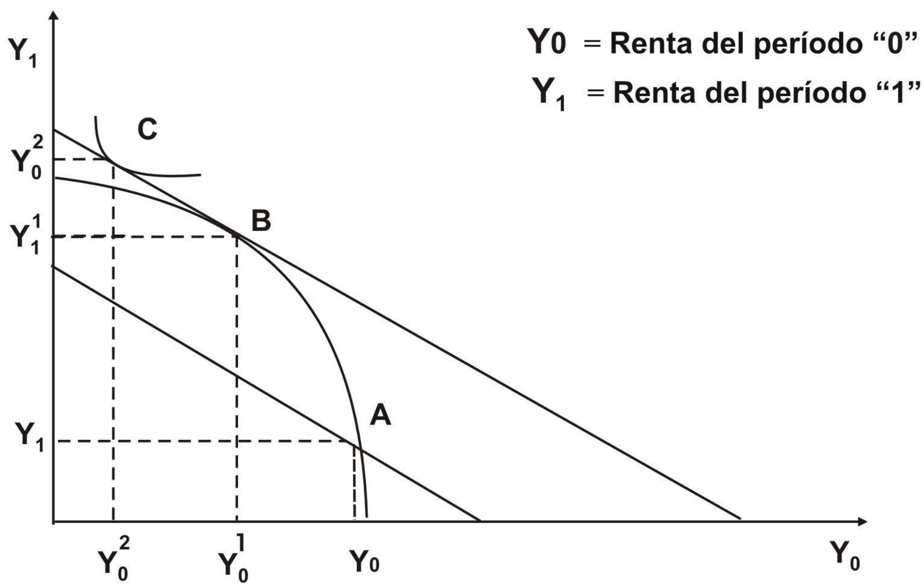
Dado que existe un mercado perfecto de capitales y conjuntamente hay posibilidades de inversión, ésta implicaría que cualquier inversor se podría ubicar en la recta "C^1D^1" (paralela a la recta CD), veamos como:

Esto se puede conseguir invirtiendo Y^1_0 - Y_0 donde la rentabilidad de los activos reales es mayor que la tasa de interés del mercado (r > i) hasta llegar al punto "B" en el Gráfico 3.7 donde r = i, en ese momento no conviene ya seguir invirtiendo más en activos reales, puesto que a partir de dicho momento la tasa de interés será mayor que la rentabilidad de las inversiones reales. Una vez ubicados en el punto "B" tanto prestando como pidiendo prestado se puede ubicar en la recta "C^1D^1" paralela a la recta "CD" donde su pendiente representa la tasa de interés del mercado, vemos pues que de esta manera la recta "C^1D^1" nos señala todas las posibilidades combinaciones de máxima renta en el período "cero" y período "uno" que se pueden alcanzar y por ende ésta sería la restricción presupuestaria a que estaría sujeto cualquier inversor. Se ve pues que éste inversor estaría en una situación superior al caso en que existe solo un mercado perfecto de capitales o que sólo existan oportunidades de inversión, porque podrá ubicarse en una curva de indiferencia más elevada.

B) MAXIMIZACIÓN DE UTILIDAD EN UN ESCENARIO DE CERTEZA ABSOLUTA, MERCADO PERFECTO DE CAPITALES Y DONDE HAY POSIBILIDADES DE INVERSIÓN

Igual que en los casos anteriores un inversor maximizará en el punto en que la valoración marginal que le da al consumo en el período presente ("ρ") es igual al costo marginal de dicho consumo o sea: $\rho = i$, en este caso cabe añadir que para poder ubicarse en la restricción presupuestaria o recta "C^1D^1" en el Gráfico 3.7 se ha tenido que invertir hasta el punto en que $r = i$ por consiguiente la condición para que un tenedor de riqueza maximice su utilidad será $r = i = \rho$ donde $r = i$ implica que el agente económico ha invertido en todos los activos financieros con una rentabilidad mayor a la tasa de interés del mercado "i", y asimismo la igualdad $i = \rho$ nos indica que el inversor está ubicado en la restricción presupuestaria, ("C^1D^1" en Gráfico 3.7). Esto se puede ver claramente en el Gráfico 3.8 donde este agente económico invertirá $Y^1_0 - Y_0$ en activos reales hasta que $r = i$ puesto que en todo ese rango la rentabilidad que brinda la inversión financiera será mayor a las tasas de interés, luego de ubicarse en el punto "B" del Gráfico 3.8 este inversor prestará $Y^2_0 - Y^1_0$ para ubicarse en el punto "C" del mismo gráfico donde la valoración marginal del consumo presente es igual a la tasa de rentabilidad de la inversión financiera e igualmente a la tasa de interés o sea $r = i = \rho$ (condición de maximización) donde se alcanza el nivel de utilidad más elevada.

GRÁFICO 3.8



Maximación de la utilidad cuando existe un Mercado Perfecto de Capitales y oportunidades de Inversión

Cabe señalar que el comportamiento del inversor en condiciones de certeza siempre estará ligado a la ley de la mayor rentabilidad, por ejemplo en el escenario visto se tomará todos los proyectos de más alta rentabilidad luego la de menos rentabilidad y así sucesivamente hasta que estos igualen a la tasa de interés ($r = i$), luego de eso se desechará la inversión física o real puesto que la tasa de interés de mercado proporcionará una mayor rentabilidad. O sea en un mundo en que se conocen los resultados que brindan las inversiones, así como la tasa de interés, cualquier poseedor de riqueza maximizará su función de utilidad invirtiendo en el proyecto más rentable y cambiará de activo o diversificará sólo en el caso en que el activo más rentable se agote. **EN UN MUNDO DE CERTEZA NO CABE PUES LA IDEA DE DIVERSIFICACION PORQUE SIEMPRE SE INVERTIRA EN EL ACTIVO QUE MUESTRE UNA MAYOR TASA DE RENTABILIDAD.**

III.4) DISTORSIONES EN EL MERCADO DE CAPITALES

Hasta ahora se ha analizado el caso en que el mercado de capitales es perfecto, sabemos que en la realidad este supuesto es artificial sin embargo demostraremos que esto no modifica las conclusiones en cuanto al comportamiento de un inversor, en un ambiente de certidumbre.

Esto se explica de una manera más detallada tomando algunos casos en que no existía un mercado perfecto de capitales y para ello vamos a considerar las siguientes situaciones:

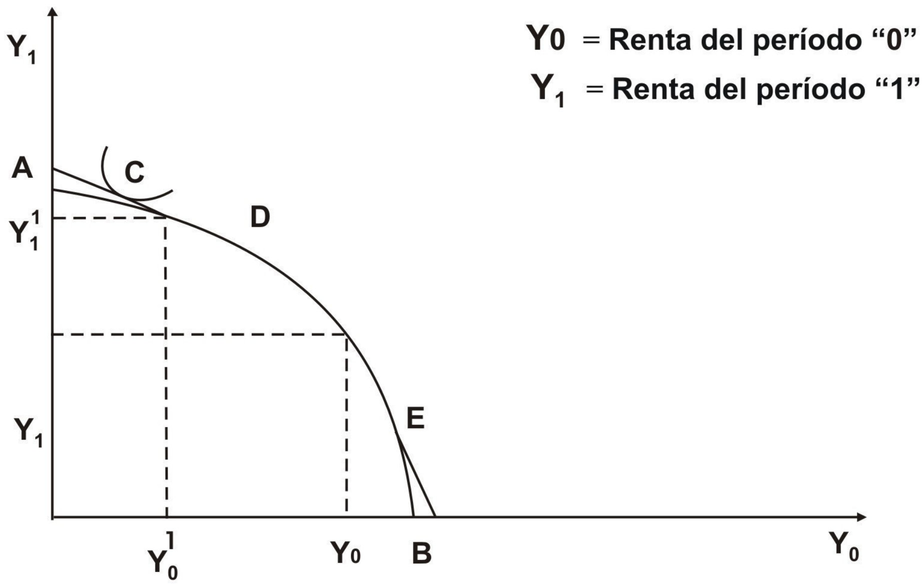
a) Tasas de interés diferenciados para prestatarios y prestamistas.
b) Existencia de costos de transacción.

Podríamos añadir muchas más restricciones al modelo planteado en las secciones anteriores pero lo que nos interesa es manifestar que las conclusiones de dichos modelos no se ven afectados por la variación de los supuestos.

A) TASAS DE INTERÉS DIFERENCIADAS

Sabemos que un inversor tratará siempre de maximizar su función de utilidad y esto se dará cuando $i = r = \rho$ (ver sección III.3) ¿Cómo se verá afectada la restricción presupuestaria ante diferentes tasas de interés para el prestamista como para el que pide prestado, donde $i_a > i_p$? Nos ayudaremos del Gráfico 3.9 para explicar esto,

GRÁFICO 3.9



Restricción presupuesaria y Maximización de la utilidad ante tasas de interés diferentes.

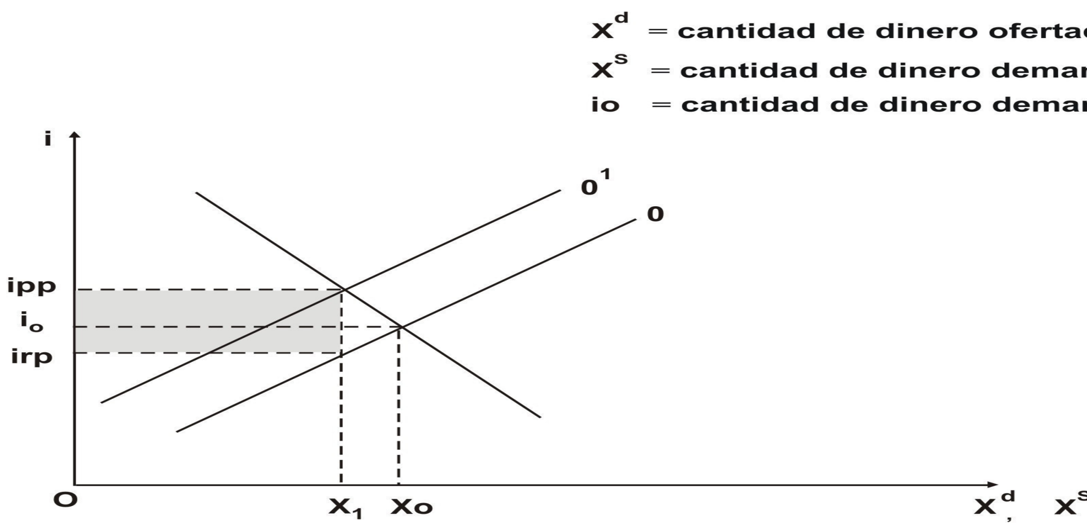
Vemos en dicho gráfico las posibilidades de consumo han variado dado que la línea de posibilidades de consumo para el inversor se ha convertido en la línea envolvente "ADEB" del Gráfico 3.9 donde la pendiente de la recta "AD" es menor a la pendiente de la recta "EB" lo que refleja el hecho de que la tasa de interés pasiva será menor que la tasa de interés activa. Se ve pues que la única variación con respecto a la existencia de un mercado perfecto de capitales es en la forma de la línea de posibilidades de consumo o restricción presupuestaria, donde el inversor tendrá que ubicarse para de ésta manera maximizar su función utilidad. En el Gráfico 3.9 se ilustra como se comportaría un inversionista. Supongamos que este inversor tiene la dotación inicial Y_0, Y_1, comenzará a invertir hasta el punto "D" del Gráfico 3.9 donde la rentabilidad de los activos financieros se hace igual a la tasa de interés pasivo (r= ip) a partir de ese momento los activos financieros se hace menos rentable a la tasa de interés pasiva por consiguiente comienza a prestar hasta el punto en que la tasa de interés pasiva se iguale la tasa de preferencia intertemporal ""ρ" (punto "C" en el Gráfico 3.9) donde este inversor maximizará su función de utilidad y se cumplirá con la condición de : $ip = r = \rho$

Llegamos pues a la misma conclusión a la que arribamos en el caso de un mercado perfecto de capitales donde el inversionista maximizará su función de utilidad cuando $\rho = i = r$, si bien en el caso de tasas de interés diferenciadas hay muchas variantes en cuanto a la conducta del inversor, sin embargo las conclusiones del análisis no se ven afectadas por la variación de los supuestos.

B) EXISTENCIA DE COSTOS DE TRANSACCIÓN

Se ha señalado que una de las principales características de un mercado perfecto de capitales es la inexistencia de costos de transacción, sin embargo sabemos que en el mundo real estos existen y el rol que toman en cualquier transacción financiera es bastante grande. ¿Cómo afecta esto las conclusiones del análisis inicial?

GRÁFICO 3.10



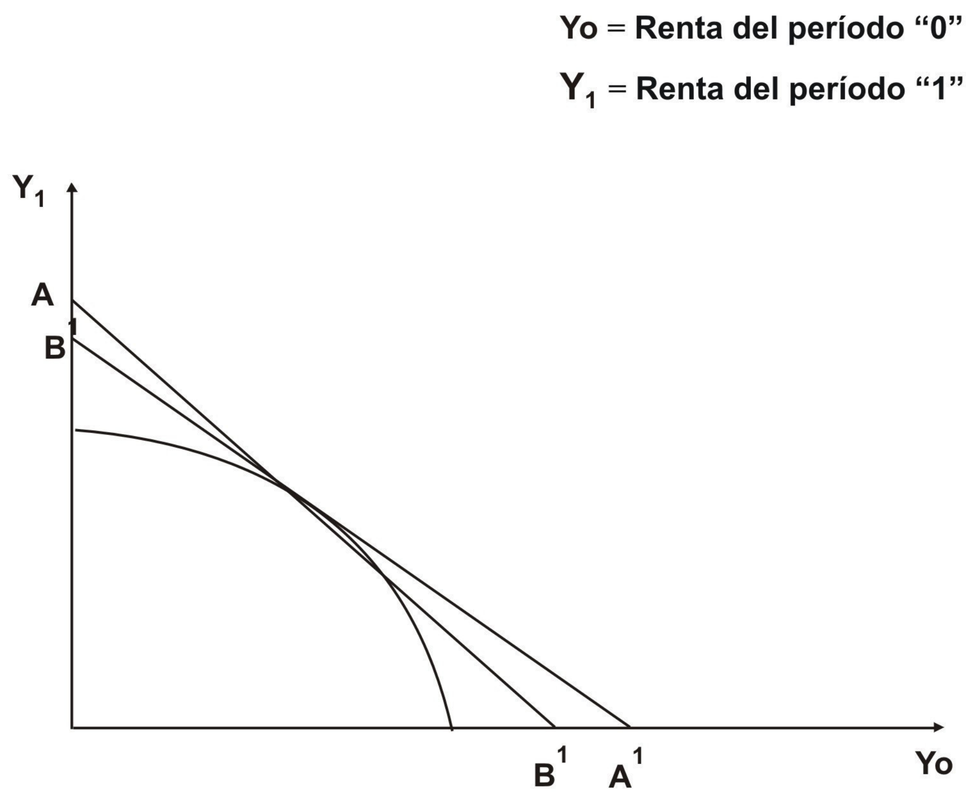
<u>Efecto de la Existencia de Costos de Transacción en un mercado libre</u>

Supongamos que el precio del dinero en el mercado está dado tal como se muestra el Gráfico 3.10 , por la intersección de las curvas de oferta y demanda, en cuyo caso sin la existencia de costos de transacción sería i_0, sin embargo los costos de transacción afectarán la curva de oferta trasladando ésta hacia la izquierda, puesto que se ofrecerá la misma cantidad de dinero a una tasa de interés más alta (puesto que se tiene que incluir los costos de transacción), por otro lado a esta nueva tasa de interés (ipp) en el Gráfico 3.10 se reducirá la cantidad demandada hasta x_1 por consiguiente se generará una tasa de interés pagada por el prestatario (ipp) y una tasa de interés recibida por el prestamista (irp), la diferencia de ambas tasas de interés multiplicada por la cantidad transada X_1 nos da una aproximación de lo que sería una medida inicial de los costos de transacción que en el Gráfico 3.10 estaría enmarcado por el área sombreada es decir ox_1 (ipp - irp).

Para ver el efecto de los costos de transacción en nuestro análisis inicial veamos el Gráfico 3.11 donde se muestra como varía la restricción presupuestaria por efecto de los costos de transacción. Vemos que la curva de posibilidades de consumo se ha reducido de "AA^1" a"BB^1" esto debido a que el prestamista recibirá una tasa de interés menor a la que habría sin costos de transacción, y por otro lado el prestatario tendrá que pagar una tasa de interés mayor por un préstamo. Vemos pues que al igual que en los casos anteriores un inversor maximizará su función de utilidad cuando $i = r = \rho$. Una vez más se llega a la misma conclusión en cuanto al comportamiento de inversor en condiciones de certidumbre puesto que se maximizará la utilidad de dicho inversor cuando $i = r = \rho$.

Concluimos este capítulo diciendo que en un ambiente de certidumbre las decisiones de un inversor están en función de la riqueza de los inversionistas, sus preferencias , asimismo la lógica para maximizar su función de utilidad será dirigirse a aquella inversión (sea dinero o inversión real) que brinde mayor rentabilidad, no teniendo lugar en este contexto la diversificación, lógica que difiere del comportamiento de un inversor en condiciones de incertidumbre la cual se analizará en los siguientes capítulo.

GRÁFICO 3.11



Restricción presupuestaria de un inversor cuando existen costos de transacción

CAPÍTULO IV

LA TEORÍA DE MARKOWITZ: ANÁLISIS DE TÍTULOS

Vimos en el capítulo anterior que cuando existe certeza absoluta en cuanto los niveles de rentabilidad de los diferentes activos financieros, **no tiene ningún sentido el diversificar las inversiones, puesto que siempre se invertirá en el activo que sea más rentable, puesto que la ganancia es segura (dado que existe certidumbre),** sin embargo, en el presente capítulo nos acercamos más a la realidad y veremos un escenario incierto en donde las inversiones en acciones, no nos ofrecen ganancias ciertas, es decir no hay certidumbre de un resultado cierto sino más bien ofrecen distintas posibles tasas de rentabilidad donde el inversor no conoce cuál será el rédito del título y asimismo puede haber ganancia como pérdida, en este contexto donde existe incertidumbre y donde no se conocen las tasas de rentabilidad con certeza, la idea de **DIVERSIFICAR** diferentes acciones surge como un mecanismo necesario y útil para cualquier inversor, asimismo la teoría de Markowitz se convierte en una poderosa herramienta en la búsqueda de portafolios eficientes. A manera de ilustración veamos porque la diversificación nos minimiza el riesgo de la pérdida total de una inversión: supongamos un inversor que tiene la posibilidad de elegir entre 2 activos financieros o títulos-valor, llamémosle "X" e "Y" a dichos activos, cada uno de estos con una posibilidad de éxito de 50% y de fracaso de 50% .¿Qué pasaría, si el inversor no diversifica y juega todo su capital a un solo activo ? la posibilidad de perder <u>todo</u> su dinero será de 50%, mientras que si este inversor juega la mitad de su capital en cada activo (diversifica), entonces la posibilidad de perder todo su capital será de 25%, es decir diversificando ha minimizado el riesgo de una posible quiebra, es en este sentido que decimos que en condiciones de incertidumbre diversificar distintas inversiones resulta útil, puesto que se minimiza el riesgo de una posible pérdida. En este instante cabe la siguiente objeción, ¿Qué si bien con la diversificación se minimiza la posibilidad de pérdida, sin embargo también se minimiza las posibilidades de ganancias extraordinarias? esto es verdad pero hay que tener presente que la diversificación de ciertos títulos-valor la aplicará un inversor "promedio", con cierta animadversión al riesgo y no aquel inversor que todo lo apuesta a una sola posibilidad, ya que no es el caso más común, es decir la diversificación supone **"AVERSION AL RIESGO"** por parte del inversionista, supuesto que lo desarrollaremos más adelante en el capítulo VI

Una vez que ya se ha determinado la importancia de diversificar distintas inversiones financieras se plantea el problema de la búsqueda de un portafolio ideal, es ahí donde nace la " teoría del portafolio de Markowitz " como respuesta a dicha inquietud donde se analiza la conducta del inversor en condiciones de incertidumbre, la racionalidad de éste, así como sus restricciones en la búsqueda de una "cartera o portafolio óptimo".

La teoría de Markowitz sostiene así mismo que **no basta combinar o diversificar los activos financieros de cualquier manera,** sino que hay métodos donde se busca que dichas carteras lleven el mínimo riesgo para determinado nivel de rentabilidad, es decir no basta diversificar por diversificar, sino hacerlo de la manera más apropiada de tal manera que se alcance el máximo de rentabilidad, para determinado nivel de riesgo, asimismo Markowitz define a una cartera diversificada eficientemente cuando:

1) Para una rentabilidad esperada de dicha cartera ésta ofrece el mínimo riesgo.
2) Para un riesgo dado de dicha cartera ésta ofrece la más alta rentabilidad.

Una cartera que cumple con esas condiciones se dice que es una **"CARTERA EFICAZ O EFICIENTE"**. Markowitz divide la gestión de cartera en tres fases, la primera de ellas consiste en el análisis de los distintos títulos, de manera individual que conforman una cartera, análisis que se verá en el presente capítulo. La segunda fase analizarlas distintos procedimientos o formas de obtener ese conjunto de carteras eficientes (Capítulo V de la presente investigación), las formas en que se deben combinar dichos títulos-valores para conformar carteras eficientes, y la tercera fase consiste en analizar cual es la racionalidad de un inversor para la elección de una cartera entre todas las carteras eficientes (elección de la "cartera óptima"), lo que veremos en el capítulo VI. Una vez pues esbozado la relación existente entre INCERTIDUMBRE Y DIVERSIFICACION por un lado y DIVERSIFICACION CON TEORIA DE LA CARTERA por otro pasamos a explicar ésta.

IV. 1) INTRODUCCION A LA TEORIA DE MARKOWITZ

Harry Markowitz es considerado el padre de la "teoría de la cartera", dicha teoría nace de su artículo titulado "Portfolio Selection", publicado en 1952 y posteriormente ampliado en forma de libro en 1959 "Portfolio Selection, Efficient Diversification of Investment"([1]), hasta la fecha de publicación del

[1] Markowitz,Portfolio Selection: Efficient diversification of Investment. John Willey and Sons, Inc. New York 1959.

artículo de Markowitz, no existía argumentos rigurosos para justificar la diversificación de una cartera, todos eran argumentos ad-hoc.

Para Markowitz, la conducta de un inversor en condiciones de incertidumbre para efectos de la elección de un portafolio puede ser dividida en 3 actividades:

1) Análisis de los títulos financieros o valores.
2) Análisis de los portafolios obtenidos.
3) Elección del portafolio óptimo.

Según Markowitz el primer punto considera **<u>El ánalisis de todos los títulos</u>** por separado donde cada inversor debe tener un pronóstico de la rentabilidad que espera para cada título-valor y asimismo del riesgo que involucra el invertir en dicho activo, más adelante se verá que conceptos estadísticos se utilizan para medir la rentabilidad esperada así como el riesgo probable de un título. Una vez que se ha ejecutado el análisis de todos los títulos valores que pueden formar una cartera probable se pasa al **<u>Análisis de Cartera</u>**, este análisis consiste en la aplicación de ciertas reglas o métodos de búsqueda de una serie de carteras eficientes (se entiende por cartera eficiente aquella que está constituida por títulos que obedecen a una diversificación eficiente) como diría Sharpe ([2]) "Un portafolio es definido como eficiente (sí y sólo sí) éste ofrece la más alta rentabilidad esperada que cualquier otra cartera con el mismo nivel de riesgo", en el análisis de cartera se busca predicciones sobre la rentabilidad y el riesgo de las diversas carteras, esto basado en las proyecciones de rentabilidad y riesgo de los distintos títulos y asimismo a la

---

[2] William Sharpe, Analysis Portfolio "Journal Financ. and Quant. Analysis". Jun 1967. Pg.77

interrelación que existen entre éstos, si bien en la primera actividad se requiere la capacidad de un visionario, sin embargo en esta segunda actividad que es el análisis de cartera se requiere conocimientos técnicos para formar los "portafolios eficientes", luego de tener una serie de portafolios eficientes veremos Por cuál se decide el inversor, la respuesta a esta pregunta corresponde a la tercera actividad relacionada con la gestión de cartera que es **La elección de la cartera óptima**, cabe adelantar que esto dependerá de las características del inversionista, si este es una persona segura ("adversa al riesgo") elegirá una determinada cartera, pero si es una persona arriesgada ("amante al riesgo") elegirá otra cartera, dependerá pues de sus preferencias. "la teoría de la cartera" como cualquier teoría trata de explicar la realidad, para esto se basa en supuestos simples sumamente racionales, esta teoría se puede utilizar tanto de manera normativa como de manera positiva, es claro que la "teoría de la cartera de Markowitz" se utiliza mayormente de manera normativa, es decir como una guía para la acción de como debe actuar un inversionista para formar su portafolio, esto no resta que pueda ser utilizada de manera "positiva". Sharpe ([3]) al respecto nos dice "Markowitz no sugirió que la gente actualmente se comporte así y que seleccione su portafolio resolviendo complicados problemas matemáticos, lo que Markowitz sugirió es que la gente debería seleccionar su portafolio de esa manera", es decir el énfasis es puesto en la utilidad que brinda esta teoría desde el punto de vista normativo, cabe destacar que si bien esta teoría fue hecha para formar portafolios en el mercado de valores, (que es como la usaremos en la presente investigación), sin embargo esta teoría puede utilizarse de más maneras siempre que existan rentabilidades y riesgos, donde el caso de su aplicación al mercado de valores es sólo una variante. Concluimos esta sección señalando que existen

[3] William Sharpe. "op cit". pg.77

tres etapas para la determinación de una cartera o portafolio según la teoría de Markowitz.

1) Análisis de los títulos que potencialmente podrían conformar los portafolios
2) Determinación de las carteras eficientes según el criterio de Markowitz
3) Elección de la cartera eficiente

IV.2) ANÁLISIS DE TÍTULOS

El análisis de títulos es el primer paso para el análisis de cartera y trata de contestar a la pregunta ¿Qué información se debe tener sobre un valor para formar una cartera? La información requerida tiene que ver con los tres siguientes factores.

A. La rentabilidad de la empresa
B. El riesgo
C. Similitud de tendencias entre las rentabilidades de las acciones

RENTABILIDAD Y RIESGO DE UN TÍTULO EN UN ESCENARIO DE INCERTIDUNBRE

Como se mencionó anteriormente la elaboración de un portafolio eficiente se basa en el análisis de los títulos-valor por separado, éste análisis de los títulos-valor nos debe dar como resultado una medida de la posible rentabilidad de los valores, así como del riesgo en que se incurre al comprar los mismos, dado que estamos en condiciones de incertidumbre y debemos prever resultados de los distintos títulos-valor, este análisis se puede hacer desde dos puntos de vista diferentes.

A) EXPECTATIVAS ADAPTATIVAS:

Bajo este punto de vista se ha de suponer que LOS RESULTADOS FUTUROS VAN A COMPORTARSE DE LA MISMA MANERA QUE SE HAN COMPORTADO EN EL PASADO, por consiguiente se usará una serie de datos históricos tanto de la rentabilidad como del riesgo de los distintos títulos-valor.

B) EXPECTATIVAS RACIONALES:

Un análisis bajo el punto de vista de expectativas racionales INCLUYE TODA INFORMACIÓN NUEVA QUE POSEE EL ANALISTA DE TÍTULOS-VALOR, por consiguiente su expectativa será más racional en el sentido que se está incluyendo nuevas variables para así de esta manera tener una mejor estimación de la rentabilidad y riesgo de los distintos títulos-valor.

Markowitz en su teoría trabaja bajo la óptica de Expectativas Adaptativas, tomando como base para sus proyecciones, los datos históricos de los distintos título-valor, lo cual no quita que también se pueda aplicar bajo la óptica de "las expectativas racionales". Markowitz señala que el ambiente de incertidumbre se caracteriza en que si un analista desea proyectar determinada variable entonces pueden existir distintos resultados para dicha variable los cuales cada uno de ellos tienen una probabilidad de ocurrencia dada, tomemos el ejemplo de el caso concreto de un título-valor "A", estas son las posibles rentabilidades a obtener y sus respectivas probabilidades :

RENTABILIDAD DEL ACTIVO	***PROBABILIDADES DE OCURRENCIA***
R_1	$P(r_1)$
R_2	$P(r_2)$
R_3	$P(r_3)$
.	.
.	.
r_n	$P(r_n)$

En donde r_1, r_2,..........,r_n son las posibles rentabilidades que puede obtener un título y $P(r_1)$, $P(r_2)$,.........., $P(r_n)$ son las distintas probabilidades de que ocurra o suceda dicha rentabilidad, asimismo "n" es el número de posibles rentabilidades para el activo "A", a esta experiencia se le denomina **"FENOMENO ALEATORIO"** (fortuito o al azar), entendiendo por este a un fenómeno de la realidad, que siempre sus resultados no son conocidos y donde a cada posible resultado se le asigna una probabilidad de ocurrencia (estadísticamente se estaría hablando del espacio muestral total), de esta definición nacen dos conceptos, primero el de **"evento aleatorio"** que es un subconjunto del fenómeno aleatorio, por ejemplo, que el activo "A" tenga una rentabilidad igual a r_2 y segundo **"la probabilidad del evento aleatorio"** que es la posibilidad que el analista de títulos le asigna a determinado evento aleatorio, por el momento no nos interesa saber cómo se obtiene esa probabilidad, si de manera objetiva (independiente de la opinión del analista de valores) o si de manera subjetiva donde existe cierta influencia de lo que cree que va a suceder en el futuro el citado analista, por otro lado la suma de las probabilidades es siempre 1 (el número total de posibilidades no puede ser mayor al 100%).

Todo fenómeno aleatorio donde a cada evento aleatorio corresponda una determinada probabilidad se le denomina "variable aleatoria", por ejemplo: la rentabilidad de un título es una variable aleatoria dado que a cada posible resultado (evento aleatorio) se le ha asignado determinada probabilidad, asimismo estas forman una distribución de probabilidades, este concepto es sumamente importante dentro del análisis de títulos-valores puesto que se considera la rentabilidad de un título o valor como una variable aleatoria donde a cada posible resultado se le asigna una probabilidad de ocurrencia, y las predicciones tanto de la rentabilidad, como del riesgo se harán en función de dicha variable,

IV.2.1 RENTABILIDAD DE UNA ACCIÓN

Markowitz aplica la siguiente definición de rentabilidad para una acción.

$$r = \frac{P_1 - P_0 + Div}{P_0}$$

Donde:

r = rentabilidad de una acción

P_1 = Precio final o Valor de mercado final.

P_0 = Precio inicial o Valor de mercado inicial.

$P_1 - P_0$ = Ganancia de Capital

Div. = Dividendos

VALOR DE MERCADO DE UNA ACCIÓN

Se debe entender por valor de mercado nos referimos al valor resultante de la interacción entre la oferta y demanda por determinada acción, donde por un lado tenemos una inmensa cantidad de compradores o demandantes, pugnando por obtener acciones al menor precio posible, y por otro a los vendedores u oferentes tratando de vender acciones al mejor precio posible. La interacción entre las decisiones de los compradores y vendedores de manera libre hace que se fije un precio, donde para el caso de las acciones el mercado, por excelencia son las Bolsas de Valores. Estos mercados deben cumplir entre sus principales características las siguientes:

A) TRANSPARENTE: El manejo de la información respecto a los activos que se negocian debe ser abundante y poco costosa.

B) PERFECTO: En la medida, que las características de este activo sean más homogéneos decimos que el mercado es más perfecto. Para el caso de las acciones estamos hablando de mercados homogéneos.

C) AMPLIO: Se dice que un mercado es amplio cuando incluye muchos activos financieros

D) ABIERTO: Un mercado es abierto, en la medida que existan menos restricciones a la entrada y salida de activos.

El valor de mercado se relaciona con las expectativas de compradores y vendedores, así como con la subjetividad de los mismos (muchas veces sin guardar relación con el rendimiento de la empresa). En algunas oportunidades se comporta aparentemente de manera irracional, obedeciendo a la avaricia, ambiciones y a los temores de los inversionistas. El día de hoy una acción puede tener un valor de $20,0 y mañana esa misma acción valer $ 4,0 por que las expectativas de la gente cambian de un día para otro. En la presente investigación se ha tomado a las cotizaciones registradas en la Bolsa de Valores de Lima como el valor de mercado de las respectivas acciones.

Markowitz parte del hecho que la rentabilidad de un título es una variable aleatoria donde cada posible resultado tiene su debida probabilidad de ocurrencia. Veamos el caso del ejemplo anterior:

RENTABILIDAD DEL ACTIVO	***PROBABILIDADES DE OCURRENCIA***
r_1	$P(r_1)$
r_2	$P(r_2)$
r_3	$P(r_3)$
.	.
.	.
r_n	$P(r_n)$

La teoría del portafolio utiliza a una medida de tendencia central como proyección de la rentabilidad esperada, dicha medida es el VALOR ESPERADO O ESPERANZA MATEMÁTICA de dicha distribución. Esta se define por:

$$E(r_i)=\sum_{n=1}^{n} r_n \, p(r_n)$$

Donde r_n : rentabilidad posible de un activo.

$p(r_n)$: probabilidades de la rentabilidad de un activo.

n : número de posibles resultados para este título

Una consideración importante es que muchas veces el valor de mercado (o el precio de las acciones) sufre ciertas modificaciones sin embargo la rentabilidad no cambia. En esta parte de la investigación mostraremos como se comporta el valor de mercado de una acción, ante diversas decisiones de tipo, empresarial. En el mundo bursátil, es imprescindible el conocimiento de estas relaciones, puesto que afectan al valor de mercado de manera directa. Las principales decisiones empresariales que analizaremos y su efecto en el valor de mercado de una acción son:

A) Entrega de Dividendos en Efectivo
B) Entrega de Dividendos en Acciones
C) Cambio de Valor Nominal
D) Aportes de Capital
E) Reducción de Capital

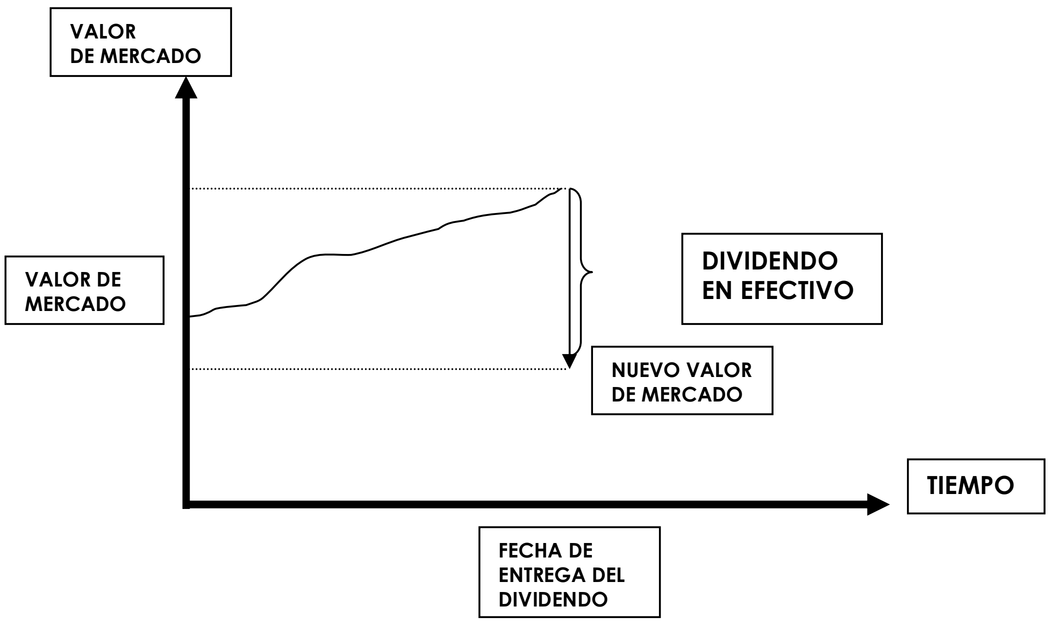
A) ENTREGA DE DIVIDENDOS EN EFECTIVO

El valor de mercado se ve afectado cuando la empresa distribuye dividendos en efectivo. La lógica de esta modificación se debe a que un inversionista en igualdad de condiciones esta dispuesto a pagar más por una acción que le otorga un dividendo en efectivo, que por la misma acción sin el beneficio del dividendo en efectivo, por lo tanto al día siguiente de efectuada la distribución, el valor de mercado se reduce exactamente en el monto del dividendo entregado (puesto que el comprador de la acción, no recibe el dividendo).

NUEVO VALOR DE MERCADO = VALOR DE MERCADO – DIVIDENDO

Parecería que un inversionista ha perdido rentabilidad pero no es así por que esto se compensa exactamente con el monto del efectivo. En este caso pues la fórmula de rentabilidad no sufre ninguna variación

GRÁFICAMENTE:



B) ENTREGA DE DIVIDENDOS EN ACCIONES

Al igual que en el caso anterior el valor de mercado de una acción se ve afectado por una política de distribución de dividendos en acciones. La lógica de este cambio es exactamente el mismo que en el caso de entrega de dividendos en efectivo. Un inversionista esta dispuesto a pagar más por una acción que le va a otorgar un dividendo en acciones, que la misma acción sin el dividendo en acciones, por lo tanto al día siguiente de efectuada la distribución, el valor de mercado se reduce exactamente en el porcentaje del dividendo entregado (puesto que ya no se tiene derecho a éste). El nuevo valor de mercado del total de acciones estará dado por:

$$NVM = \frac{CAPITALIZACIÓN\ BURSATIL}{No\ DE\ ACCIONES + \%\ NUEVAS\ ACC.} \text{..........(1)}$$

Dividiendo entre No DE ACCIONES

$$NVM = \frac{VALOR\ DE\ MERCADO}{1 + \%\ NUEVAS\ ACC.} \text{....................................(2)}$$

Se entiende por capitalización bursátil, el valor de mercado que tienen el total de acciones de una empresa. De tal manera que:

C.B = No x VM

Donde:

C.B: Capitalización Bursátil
No: Número de acciones de la empresa
VM: Valor de Mercado de la acción.

En este caso para el cálculo de la rentabilidad se tendría que modificar la fórmula anterior. La nueva fórmula será:

$$r = \frac{P_1 \quad (1 + A\%) \quad - \quad P_0 \quad + Div}{P_0}$$

Donde:

P_1 = Precio final o Valor de mercado final.

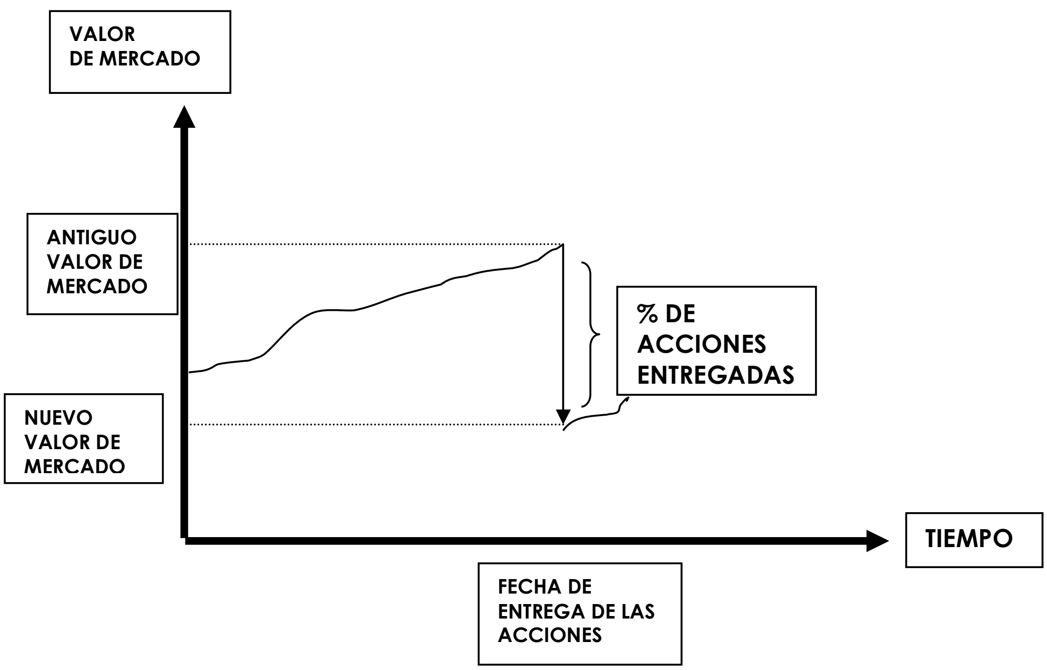
P_0 = Precio inicial o Valor de mercado inicial.

$P_1 - P_0$ = Ganancia de Capital

Div. = Dividendos

A% = Porcentaje de acciones liberadas entregadas

Gráficamente



C) CAMBIO DE VALOR NOMINAL

El cambio de valor nominal, por parte de la empresa, al igual que en los dos casos anteriores, hace que se modifique el valor de mercado de la empresa de tal manera que:

$$NVM = \frac{CAPIT.BÚRSATIL}{\frac{VNa}{VNn} X \ Na} = \frac{CAP.BÚRSATIL \ x \ VNn}{Na \ X \ VNa} = VM \ X \ \frac{VNn}{VNa} .....(1)$$

Donde:

VNa: Valor Nominal Antiguo

VNn: Valor Nominal nuevo

Na: Número de acciones antes del cambio de valor nominal.

NVM: Valor de mercado después del cambio de valor nominal.

El cambio del valor de mercado obedece a que las acciones, dejan de tener el mismo porcentaje de participación en el patrimonio de la empresa. Recordemos que el cambio de valor nominal significa una reducción (o aumento) en el número de acciones de la empresa, manteniéndose constante el capital social y el patrimonio de la empresa, lo que se traduce en una mayor o menor participación de sus acciones. Dado que el valor de mercado del patrimonio esta dado por la capitalización bursátil de la empresa, por lo tanto el valor de mercado varía proporcionalmente a este cambio en el porcentaje de participación de cada acción. Esto nuevamente afectará la fórmula para calcular la rentabilidad, la nueva fórmula sería:

$$r = \frac{P_1 \left({}^{VNa}\!/_{VNn} \right) - P_0 + Div}{P_0}$$

Donde:

P_1 = Precio final o Valor de mercado final.

P_0 = Precio inicial o Valor de mercado inicial.

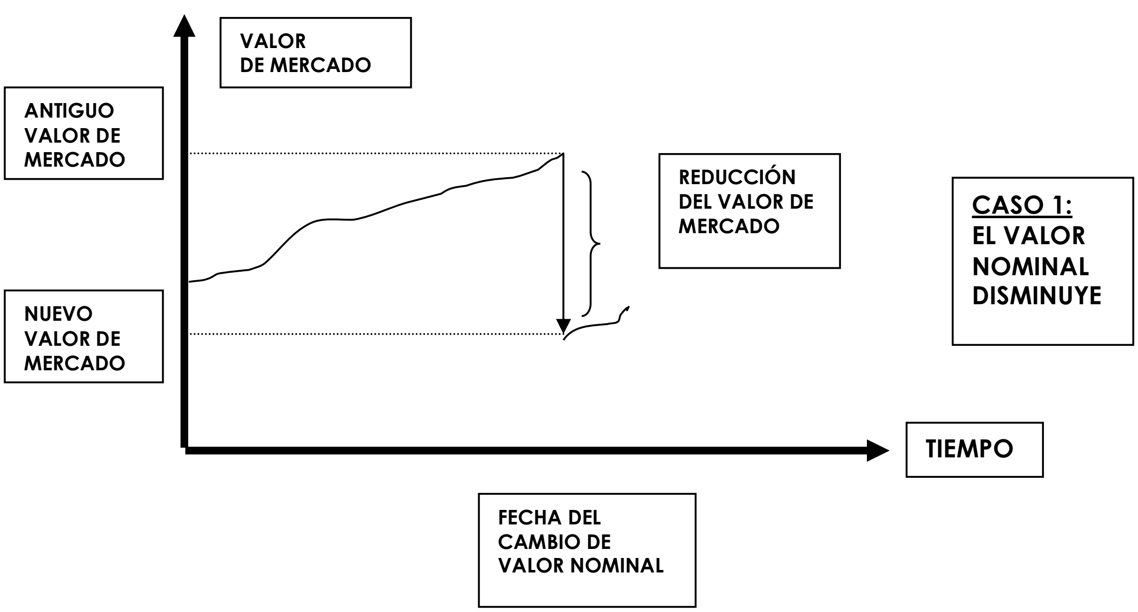
$P_1 - P_0$ = Ganancia de Capital

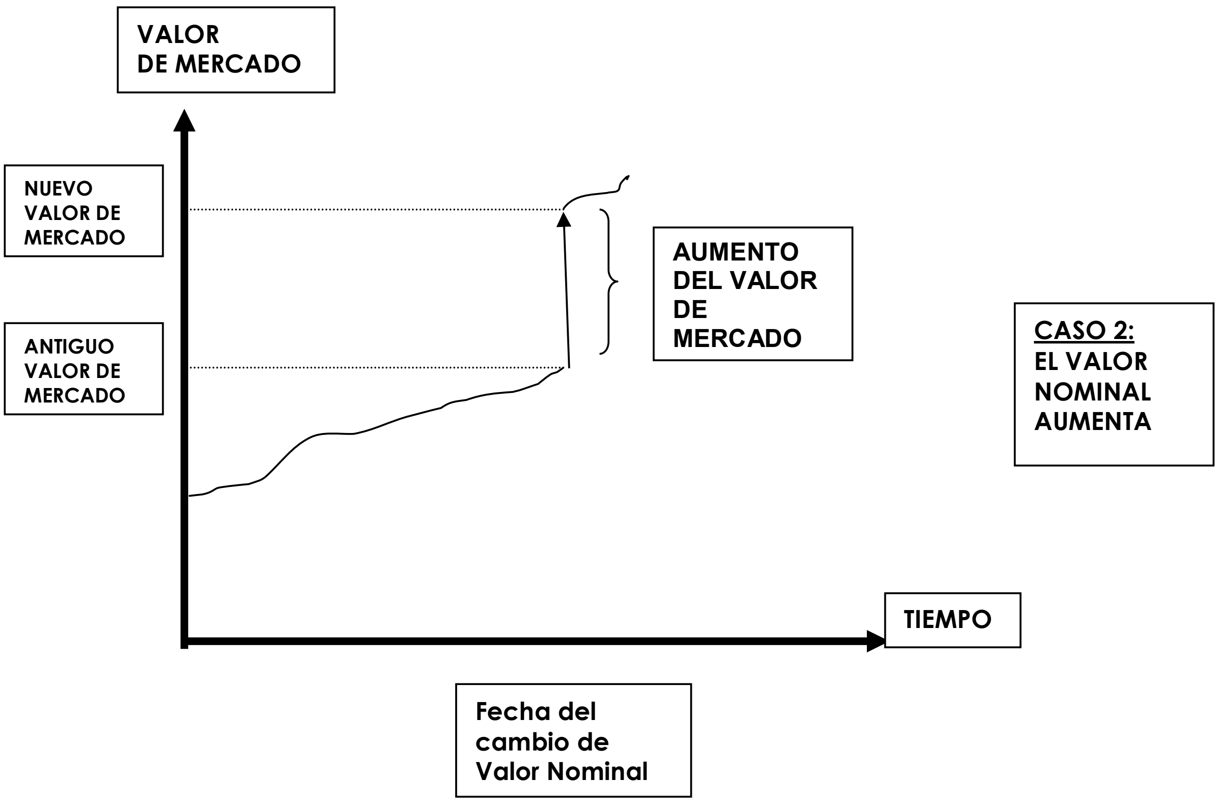
Div. = Dividendos

VNa = Valor Nominal Antiguo

VNn = Valor Nominal Nuevo

Gráficamente:





D) APORTE DE CAPITAL

Al igual que los casos anteriores, un aporte de capital hace que el valor de mercado de una empresa se modifique, donde el nuevo valor de mercado estará dado por la fórmula:

$$NVM = \frac{\dfrac{CAP.\,BURSATIL}{No} + \dfrac{NAo\ x\ Ps}{No}}{\dfrac{No}{No} + \dfrac{NAo}{No}} = \frac{VM + \%NA\ x\ Ps}{1 + \%NA} \quad .....(1)$$

Donde:

Ps: Precio de suscripción

NAo: Número de nuevas acciones emitidas por concepto de aportes de capital

No: Número de acciones antes del aporte de capital

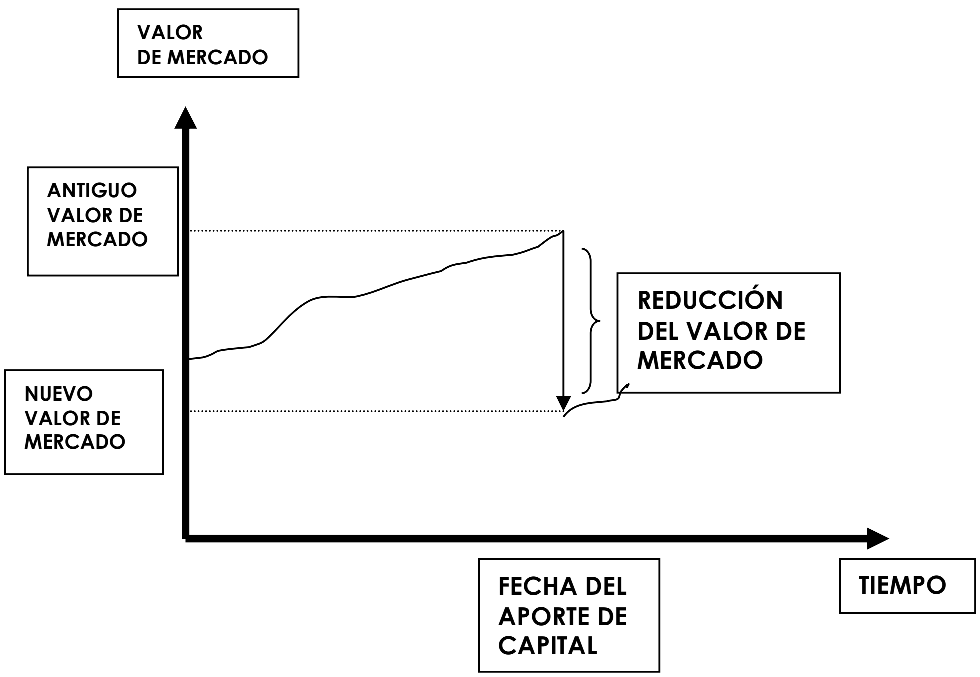
CAP, BÚRSATIL: Capitalización Bursátil antes del aporte de capital

NVM: Nuevo valor de mercado

%NA: incremento porcentual de acciones en relación a las existentes antes del aporte de capital. Esto al igual que los dos casos anteriores modificará la fórmula de rentabilidad en el período que se esta calculando. La nueva fórmula será:

$$r = \frac{P_1 \quad (1 + A\%) - A\% Ps - P_0 + Div}{P_0}$$

Gráficamente:



El efecto de un aumento de capital será una disminución del valor de mercado, tal como lo demuestra la relación anterior, y se observa en el gráfico anterior.

E) REDUCCIÓN DE CAPITAL

La última decisión empresarial a estudiarse, es la reducción de capital. ¿Cómo afecta esta reducción de capital al valor de mercado de una acción?

La respuesta a esta pregunta es que, al reducirse el capital, y el patrimonio seguir teniendo el mismo valor, entonces el nuevo Valor de Mercado se incrementa, de tal manera que:

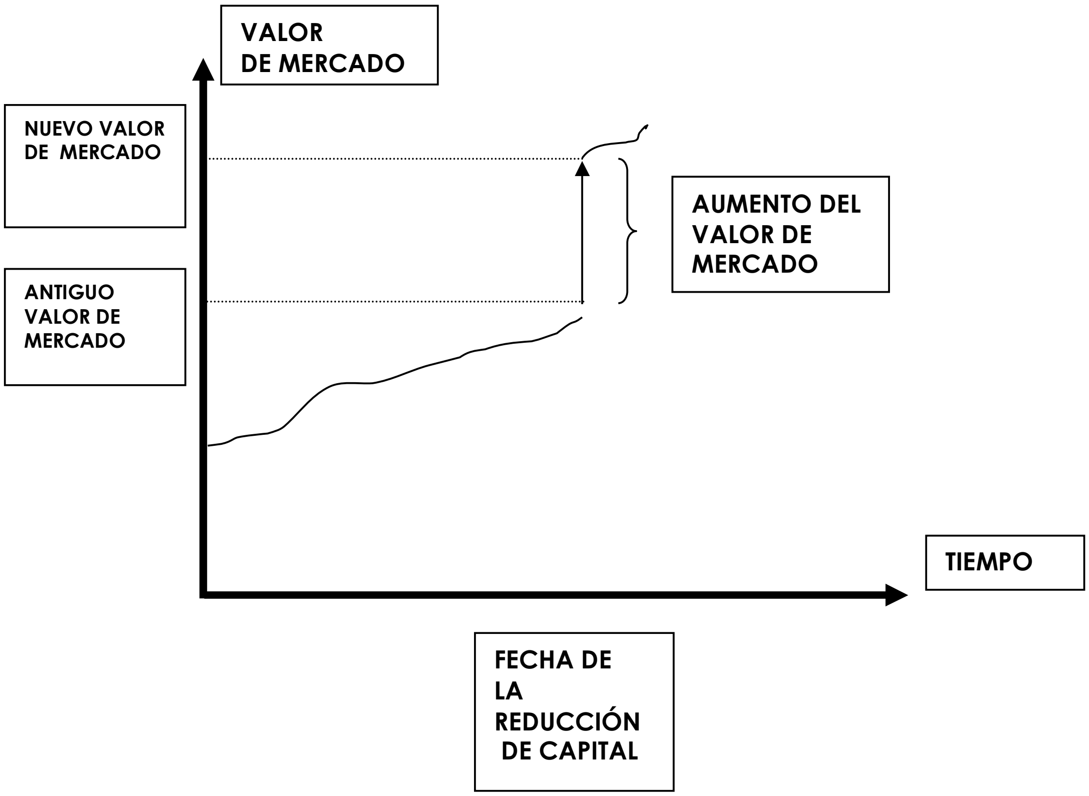
$$NVM \quad = \quad \frac{CAPITALIZ.\ BURSÁTIL}{No - NAr}$$

Dividiendo entre No resulta

$$NVM \quad = \quad \frac{VALOR\ DE\ MERCADO}{1 - \%\ REDUCC.}$$

Donde R% = Porcentaje de acciones que se reduce el patrimonio de una empresa.

Gráficamente



De donde la nueva fórmula para obtener la rentabilidad de una acción será:

$$r = \frac{P_1 \quad (1 - R\%) - P_0 + Div}{P_0}$$

<u>Concluimos pues el análisis de rentabilidad teniendo en cuenta que la teoría del portafolio utiliza a una medida de tendencia central como proyección de</u>

<u>la rentabilidad esperada, dicha medida es el VALOR ESPERADO O ESPERANZA MATEMÁTICA de las rentabilidades de las acciones. Donde esta se define por:</u>

$$E(r_i) = \sum_{n=1}^{n} r_n \, p(r_n)$$

Donde r_n : rentabilidad posible de un activo.

$p(r_n)$: probabilidades de la rentabilidad posible de un activo.

n : número de posibles resultados para este título

IV.2.2. PREDICCION DEL RIESGO DE UN TITULO-VALOR

¿Cómo medir la incertidumbre o riesgo de un activo? Markowitz soluciona este problema utilizando una medida de dispersión "la desviación estándar" de las rentabilidades de un título. La desviación estándar se le conoce por el signo " σ " del alfabeto griego y se le define de la siguiente manera:

$$\sigma = \sqrt{\Sigma(r_n - E(r_n))^2 \, p(r_n)}$$

Donde: r_n : rentabilidad posible de un activo

$E(r_n)$: Esperanza de la rentabilidad de un activo

$P(r_n)$: Probabilidad de que ocurra la rentabilidad n para un activo.

Cabe resaltar que el término dentro de la raíz se le define como

Varianza:

$$\sigma^2 = \Sigma(r_n - E(r_n))^2 p(r_n)$$

Al igual que la desviación estándar, es una medida de dispersión, en la que en la presente investigación se utilizarán ambas de manera alternativa como una medida del riesgo. Vamos a asumir que para fines de la presente investigación el significado de "riesgo" es el mismo que se puede dar a " Dispersión " entendiendo ésta como la desviación promedio de un conjunto de datos con respecto a la media de dichos datos. Una de las bondades de este indicador es que se puede medir en las mismas unidades en que esta expresada la media, así por ejemplo si la media esta expresada en años, entonces la desviación estándar se expresará en años, si la media esta expresada en kilos, entonces la desviación estándar se expresará en kilos, para el caso de la teoría del portafolio de Markowitz, dado que las rentabilidades se expresan en tantos por ciento, por lo tanto la desviación estándar también se expresará en tantos por ciento.

Una objeción que se le hace a la desviación estándar como medida del riesgo es que mide las desviaciones promedio de la rentabilidad con respecto a la esperanza o valor esperado, tanto de los valores que están por encima o por debajo del promedio. ¿Por qué considerar las desviaciones que están por encima del promedio, si éstas no representan riesgo de pérdida al inversor, entendiendo por riesgo a la posibilidad que se produzca un daño, lesión o una pérdida? ¿No sería mejor medir al riesgo si consideramos sólo las desviaciones de los resultados inferiores a la media, resultado que se conoce con el nombre de Semivarianza?, la objeción es perfectamente válida, sin embargo

Markowitz considera que trabajando con la desviación estándar se obtienen la mismas carteras, teniendo a su favor que la desviación estándar es un indicador mucho más conocido con propiedades conocidas.

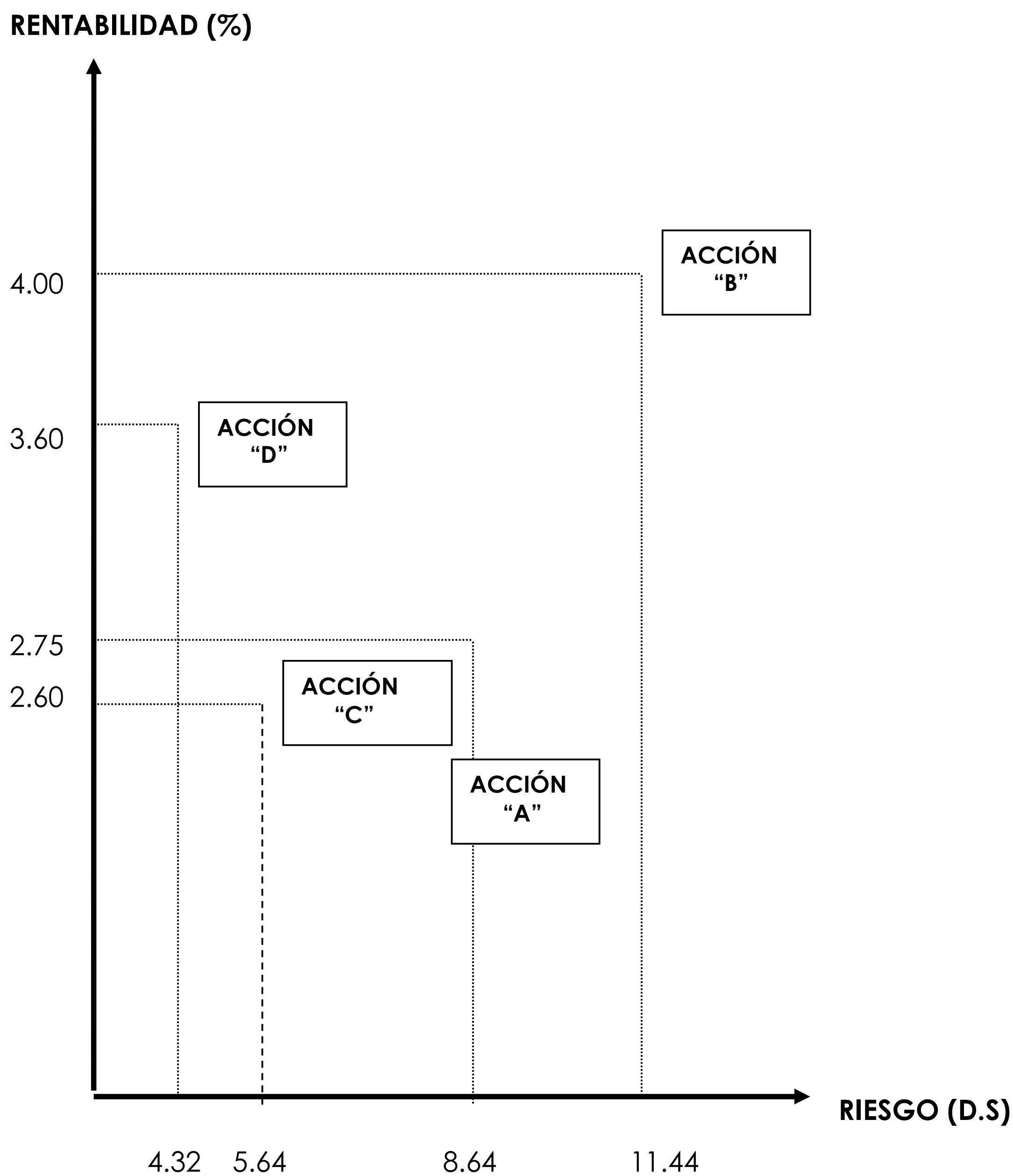
IV.2.3 DIAGRAMA RENTABILIDAD-RIESGO

De las dos secciones anteriores nos llevamos el mensaje de que el analista de títulos debe proveer de 2 datos importantes para cada título o valor, el valor esperado de la rentabilidad como una medida de la rentabilidad esperada y la desviación estándar como una medida del riesgo de dicho activo. Supongamos tengamos 4 acciones "A", "B", "C", Y "D" las cuales han mostrado las siguientes rentabilidades durante cinco períodos consecutivos, en cuyo caso su rentabilidad esperada (medida por la esperanza de la rentabilidad de los 5 períodos anteriores) y su riesgo

Se muestran en el cuadro siguiente.

ACCIONES	**PERÍODO 1**	**PERÍODO 2**	**PERÍODO 3**	**PERÍODO 4**	**PERÍODO 5**	**RENTABILIDAD ESPERADA (ESPERANZA)**	**RIESGO (DESVIACIÓN ESTÁNDAR)**
"A"	10%	-12%	6%	7%	11%	2.75%	8.64%
"B"	-12%	-5%	18%	4%	15%	4.00%	11.44%
"C"	6%	-2%	-6%	6%	9%	2.60'%	5.64%
"D"	3%	3%	5%	4%	8%	3.60%	4.32%

El cuadro nos muestra que la acción que nos ofrece una mayor rentabilidad será la acción "B", con una rentabilidad esperada de 4 %, (medida por la esperanza matemática de todas sus rentabilidades anteriores), sin embargo la misma acción "B" es la mas riesgosa siendo su riesgo de 11.44% (medida por la desviación estándar de los datos correspondientes a las rentabilidades anteriores). Estos datos se pueden graficar en un diagrama riesgo-rentabilidad que nos muestre los distintos riesgos y rentabilidades de las distintas acciones.



El Diagrama Riesgo- Rentabilidad nos muestra todas las opciones de riesgo y rentabilidad que nos ofrecen cada una de las diferentes acciones, si invirtiésemos solamente en cada una de ellas, asimismo estos datos nos sirven como insumos para la formación de carteras según la teoría de Markowitz.

TÍTULOS SUPERIORES E INFERIORES

El Diagrama riesgo-rentabilidad nos muestra dos consideraciones:

a) La primera consideración es la existencia de títulos que en condiciones normales deben ser preferidos por los inversionistas. Por ejemplo en el diagrama rentabilidad-riesgo visto anteriormente la acción "D" debe ser preferida a las acciones "A" y "C", puesto que ofrecen una mayor rentabilidad y un menor riesgo. En condiciones normales, donde los inversionistas sean racionales y exista completa información estos escogerán el activo "D" en relación a los activos "A" y "C". A este tipo de activos se les denomina **DOMINANTES**, mientras que a los activos "A" Y "C" se les denomina **DOMINADOS,** en este caso el activo "B" también será un título dominante puesto que ofrece una alta rentabilidad y no existe otro activo que ofrezca la misma rentabilidad (o mayor) a un nivel de riesgo menor.

b) La segunda consideración que nos muestra el diagrama riesgo-rentabilidad es que entre el titulo "B" Y "D", el título "B" muestra una mayor rentabilidad, (un beneficio para el inversor), pero a su vez un mayor riesgo (un mal para el inversor), mientras que el título "D" muestra una menor rentabilidad (menor beneficio) y menor riesgo (menos mal para el inversor) ¿Cuál activo escogerá un inversor?.La respuesta dependerá de la subjetividad del inversor. Algunos escogerán el activo más riesgoso, los llamados amantes al riesgo, mientras que otros escogerán el activo menos riesgoso, los llamados adversos al riesgo, tema que tocaremos en el capítulo V de la presente investigación.

IV.2.4 MEDIDAS DE SIMILITUD DE LA TENDENCIA

COVARIANZA

Un último dato que debemos tener previo al análisis de carteras y tal vez el más importante es la <u>COVARIANZA</u> entre las rentabilidades de dos acciones. La Covarianza mide de alguna manera la similitud en el comportamiento de las rentabilidades de dos acciones, En la medida que la covarianza sea positiva el comportamiento de la rentabilidad de las acciones será mas parecida, mientras que si la Covarianza es negativa, el comportamiento de las rentabilidades de las dos acciones tendrán un comportamiento en sentido contrario. La teoría de Markowitz muestra todo su poderío en la medida que las Covarianzas de las rentabilidades de las acciones sean mas negativas, es decir el poder de la diversificación se hará mayor tal como se analiza en el capítulo siguiente. La definición de Covarianza es la siguiente:

$$Cov(r_a r_b) = \sum_{i=1}^{i=n} (r_{ia} - E(r_a))(r_{ib} - E(r_b))p_i$$

Donde:

r_a = rentabilidad del activo “a”

r_b = rentabilidad del activo “b”

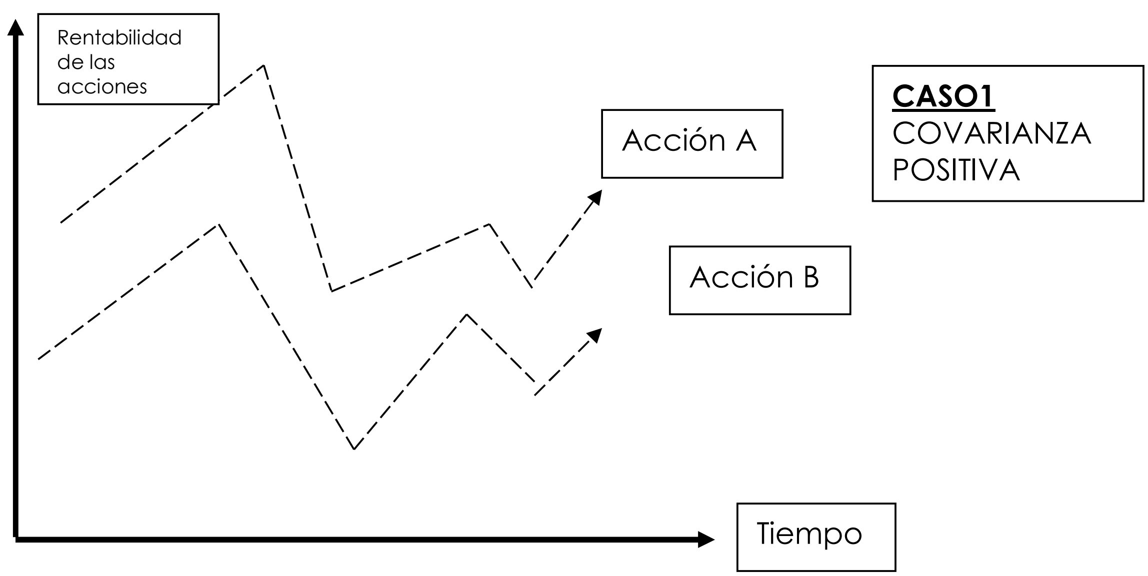
$E(r_a)$ = Esperanza de la rentabilidad del activo “a”

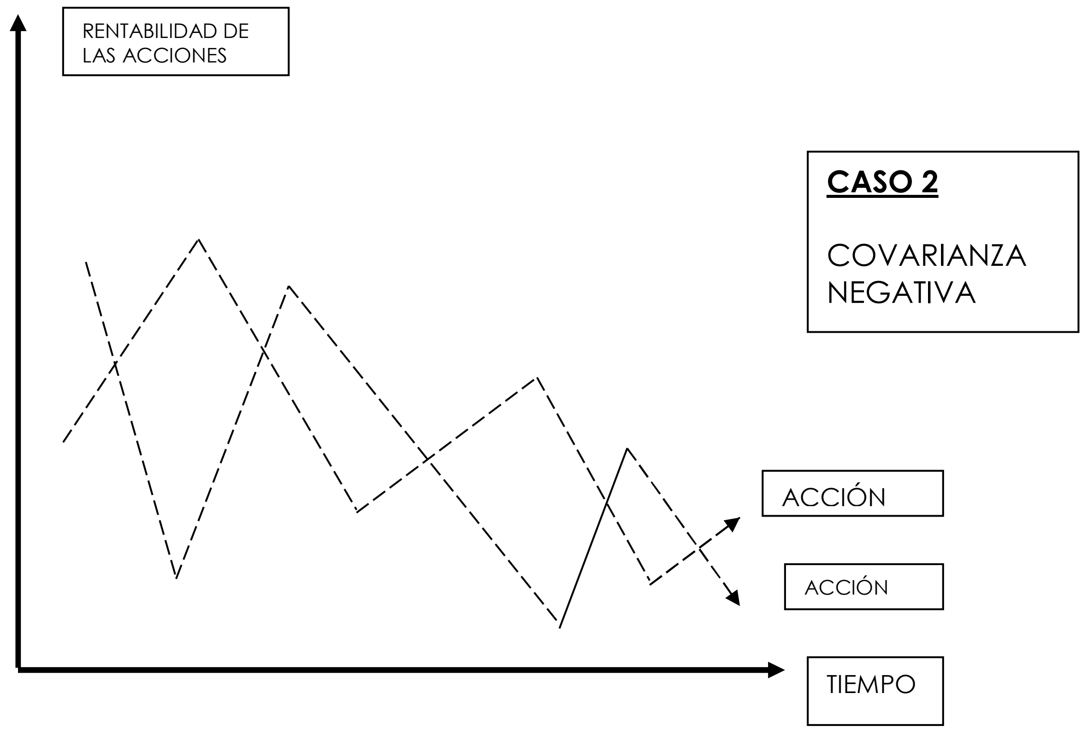
$E(r_b)$ = Esperanza de la rentabilidad del activo “b”

P_i = probabilidad de ocurrencia

La Covarianza también puede ser expresada en términos de la esperanza matemática

$$Cov(r_a r_b) = E[(r_a - E(r_a))(r_b - E(r_b))]$$





GRADO DE CORRELACIÓN

Una segunda medida de la similitud de las tendencias es el grado de correlación, concepto muy similar al de Covarianza y que mide exactamente lo mismo, la similitud en el comportamiento de las rentabilidades de los activos. El grado de correlación al igual que la Covarianza cuando es negativa muestra que no hay similitud en el comportamiento de las rentabilidades de dos activos, mientras que si es positivo muestra que efectivamente si hay una similitud en el comportamiento entre las rentabilidades de dos activos. A diferencia de la Covarianza, el grado de correlación tiene la ventaja de estar comprendido entre los valores de –1 y 1.

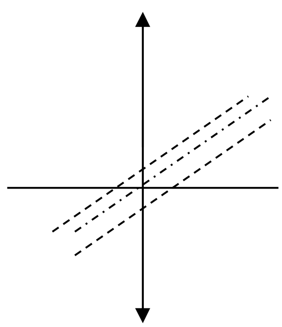
Cuando más cercano sea el valor del grado de correlación a –1 implica que no existe una relación en el comportamiento entre las rentabilidades de los dos activos, viceversa cuando el valor es cercano a +1 entonces existe una relación en el comportamiento de las rentabilidades de los dos activos. La fórmula para este indicador estadístico es:

$$Grado\ de\ coorrelación\ (g.c_{A,B}) = \frac{COV(R_A, R_B)}{\sigma_A \sigma_B}$$

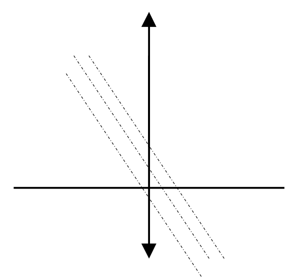
O lo que es lo mismo

$$COV(R_A, R_B) = gc_{A,B}\ \sigma_A \sigma_B$$

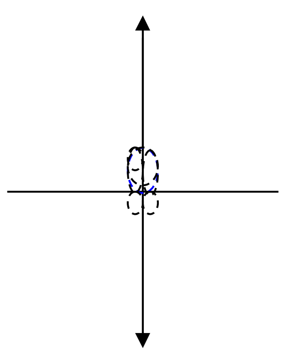
i) Grado de correlación positiva (+)



ii) Grado de correlación negativa (-)



iii) Grado de correlación cercano a cero (0)



A diferencia de la Covarianza, el grado de correlación tiene la ventaja que sus valores varían entre –1 y +1. Cuando su valor es –1 implica que la correlación entre las rentabilidades de dos activos es perfectamente negativa. (Siempre van en sentido contrario) Viceversa, cuando el grado de correlación es +1, implica que la correlación entre las rentabilidades de los dos activos es perfectamente positiva (siempre van en el mismo sentido). La teoría del portafolio de Markowitz busca activos que tengan una correlación negativa, la explicación se da en el siguiente capítulo.

IV.2.5 ANÁLISIS DE TÍTULOS Y ANÁLISIS DE CARTERA

De todo lo expuesto anteriormente en el presente capítulo nos quedamos con el mensaje que la información necesaria para construir portafolios, proveniente del análisis de títulos que hemos detallado puede ser resumida de tal forma que para un portafolio de "n" activos se requiere

1) "n" rentabilidades esperadas, cada una correspondiente a un activo, ya hemos visto que la esperanza matemática es el indicador estadístico a utilizarse en la teoría de Markowitz

2) "n" medidas del riesgo, cada una correspondiente a un activo, como se vio anteriormente Markowitz utiliza de manera indistinta la desviación estándar y la varianza como una medida del riesgo de una acción

3) La Covarianza entre todos los activos ("n" en nuestro caso) que nos sirvan para constituir un portafolio. el número de covarianzas necesarias sería:

Cov(1,1) Cov(1,2)..Cov(1,n)
Cov(2,1) Cov(2,2)……………………………………………Cov(2,n)
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
Cov (n,1) Cov(n,2)……………………………………………..Cov(n.n)

Aparentemente se requeriría n^2 Covarianzas, pero sabemos que :

1) Cov(X,Y) = Cov (Y,X) (VER ANEXO ESTADÍSTICO)
2) Cov(X,X) = Var (X) (VER ANEXO ESTADÍSTICO). Dada que la varianza de la rentabilidad de un activo ya esta contabilizada en el punto 2, el número de Covarianzas necesarias para la formación de un portafolio de "n" elementos sería:

$$NUMERO\ DE\ COVARIANZAS = \frac{N^2 - N}{2}$$

Sumando los datos de los puntos 1,2 y 3 resulta que para la formación de un portafolio de "n" elementos se requiere:
* "n" Esperanzas matemáticas
* "n" varianzas

$n^2 - n$ covarianzas

De donde resulta que el número de datos para constituir un portafolio de "n" activos es: $\frac{n^2 - 3n}{2}$

Una vez que tenemos esta información referida a los títulos de manera individual a cada acción que se quiere incluir en un portafolio, pasamos a realizar el análisis de carteras lo que se vera en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO V

ANÁLISIS DE CARTERA

El análisis de una cartera toma como insumos el análisis de títulos o valores vistos en el capítulo anterior donde teníamos la información de las $E(r_i)$ (Esperanza de la rentabilidad de cada activo) y σ_i (desviación estándar de la distribución de probabilidades de las distintas rentabilidades de cada título-valor), como medidas de la rentabilidad esperada de las acciones y del riesgo de las mismas. Asimismo tenemos las Covarianzas entre las rentabilidades de distintos títulos $COV(r_i r_j)$ como un indicador de la relación que existe entre las rentabilidades de 2 títulos. Ya vimos como se obtenían estos datos los cuales nos servirán para formar portafolios en esta parte de la investigación.

V.1) DEFINICIÓN DE PORTAFOLIO

Un portafolio es una inversión que se hace no sólo en un activo sino en diferentes activos. Por ejemplo se invierte una cantidad de dinero de S/. 250 000 en acciones tipo "A", S/. 100 000 en acciones tipo "B", y S/. 150 000 en acciones tipo "C". Este será un portafolio constituido por el 50% de la inversión en acciones tipo "A", 20% en acciones tipo "B" y 30% en acciones tipo "C". Formalmente podemos decir que un portafolio es la inversión que hace en diferentes activos.

$$INVERSIÓN\ INICIAL = \sum P_i N_i = P_1 N_1 + P_2 N_2 + \dots\dots\dots\dots + P_N N_N$$

Donde

Pi = Precios del activo i

Ni = Número de títulos i que se compran

Dividiendo entre la Inversión Inicial resulta:

$$= \frac{P_1 N_1}{\sum P_i N_i} + \frac{P_2 N_2}{\sum P_i N_i} + \text{...............................} = \frac{P_n N_n}{\sum P_i N_i}$$

Hacemos $w_i = \frac{P_i N_i}{\sum P_i N_i}$

De donde resulta $1 = w_1 + w_2 + \text{................} + w_n$

Donde los **Wi son las proporciones en que se invierte en determinados activos dentro de un portafolio**. Si bien esta ecuación es muy simple sin embargo estas proporciones juegan un rol importantísimo en la teoría del portafolio de Markowitz puesto que son las incógnitas que debemos elegir a fin de determinar portafolios eficientes, concepto que se explicara posteriormente. Cabe señalar que en nuestra investigación vamos a hablar solamente de acciones por lo que trataremos de manera indistinta el término título con el de acciones.

V.2) <u>RENTABILIDAD DE UN PORTAFOLIO</u>

Vamos a definir la rentabilidad de un portafolio inicialmente sólo para **el caso de dos activos,** para luego extender nuestro análisis a un portafolio con más de dos activos

$$\underline{E(r_c) = w_1 E(r_1) + w_2 E(r_2)}$$

Donde $E(r_i)$: Esperanza de la rentabilidad del título "i".

W_i : Peso o porcentaje dentro de la cartera del título "i".

$E(r_c)$: Esperanza de la rentabilidad de la cartera

A riesgo de caer en una excesiva simplicidad, pero con el fin de hacer la exposición más didáctica tomemos el siguiente ejemplo. Supongamos que se tiene el siguiente comportamiento de 2 acciones

PERÍODO	RENTABILIDAD DE LA ACCIÓN A	RENTABILIDAD DE LA ACCIÓN B
2001	1%	10%
2002	5%	2%
2003	2%	8%
2004	3%	6%
2005	4%	4%
Rentabilidad Esperada	**3%**	**6%**
Riesgo	**1.41%**	**2.83%**
COVARIANZA (A,B)	**-4**	**-4**

Toda esta información la hemos obtenido del análisis de títulos vista en el capítulo anterior

A) Supongamos que tomemos el portafolio constituida por W1=1/2 y W2 =1/2

Si aplicamos la fórmula de la rentabilidad de una cartera tendremos.

$E(rc) = (1/2)(3\%)+(1/2)(6\%) = 4.5\%$

Que es el promedio de los resultados que ha tenido este portafolio entre los años 2001 al 2005. Verifiquemos

PERÍODO	**FÓRMULA**	**RENTABILIDAD DEL PORTAFOLIO**
2001	(1/2)(1%)+(1/2)(10%)=	5.5%
2002	(1/2)(5%)+(1/2)(2%)=	3.5%
2003	(1/2)(2%)+(1/2)(8%)=	5%
2004	(1/2)(3%)+(1/2)(6%)=	4.5%
2005	(1/2)(4%)+(1/2)(4%)=	4%
RENTABILIDAD ESPERADA		**4.5%**

B) Supongamos que tomemos el portafolio constituida por W1=1/4 y W2 =3/4

Si aplicamos la fórmula de la rentabilidad de una cartera tendremos.

E(rc) = (1/4)(3%)+(3/4)(6%) = 5.25%. Resultado que se interpreta como el promedio de la rentabilidad de dicho portafolio en los 5 años

PERÍODO	**FÓRMULA**	**RENTABILIDAD DEL PORTAFOLIO**
2001	(1/4)(1%)+(3/4)(10%)=	7.75%
2002	(1/4)(5%)+(3/4)(2%)=	2.75%
2003	(1/4)(2%)+(3/4)(8%)=	6.5%
2004	(1/4)(3%)+(3/4)(6%)=	5.25%
2005	(1/4)(4%)+(3/4)(4%)=	4%
RENTABILIDAD ESPERADA		**5.25%**

C) Supongamos que tomemos el portafolio constituida por W1=3/4 y W2 =1/4

Si aplicamos la fórmula de la rentabilidad de una cartera tendremos.

E(rc) = (3/4)(3%)+(1/4)(6%) = 3.75%. Resultado que se interpreta como el promedio de dichos portafolios en los 5 años

PERÍODO	FÓRMULA	RENTABILIDAD DEL PORTAFOLIO
2001	(3/4)(1%)+(1/4)(10%)=	3.25%
2002	(3/4)(5%)+(1/4)(2%)=	4.25%
2003	(3/4)(2%)+(1/4)(8%)=	3.5%
2004	(3/4)(3%)+(1/4)(6%)=	3.75
2005	(3/4)(4%)+(1/4)(4%)=	4%
RENTABILIDAD ESPERADA		**3.75%**

D) Supongamos que tomemos el portafolio constituida por W1=1 y W2 =0

Si aplicamos la fórmula de la rentabilidad de una cartera tendremos.

E(rc) = (1)(3%)+(0)(6%) = 3.0% , donde este portafolio esta constituido íntegramente por el activo A. Al igual que los casos anteriores este resultado se interpreta como el promedio de dichos portafolios en los 5 años

PERÍODO	FÓRMULA	RENTABILIDAD DEL PORTAFOLIO
2001	(1)(1%)+(0)(10%)=	1%
2002	(1)(5%)+(0)(2%)=	5%
2003	(1)(2%)+(0)(8%)=	2%
2004	(1)(3%)+(0)(6%)=	3%
2005	(1)(4%)+(0)(4%)=	4%
RENTABILIDAD ESPERADA		**3%**

E) Supongamos que tomemos el portafolio constituida por W1=0 y W2 =1

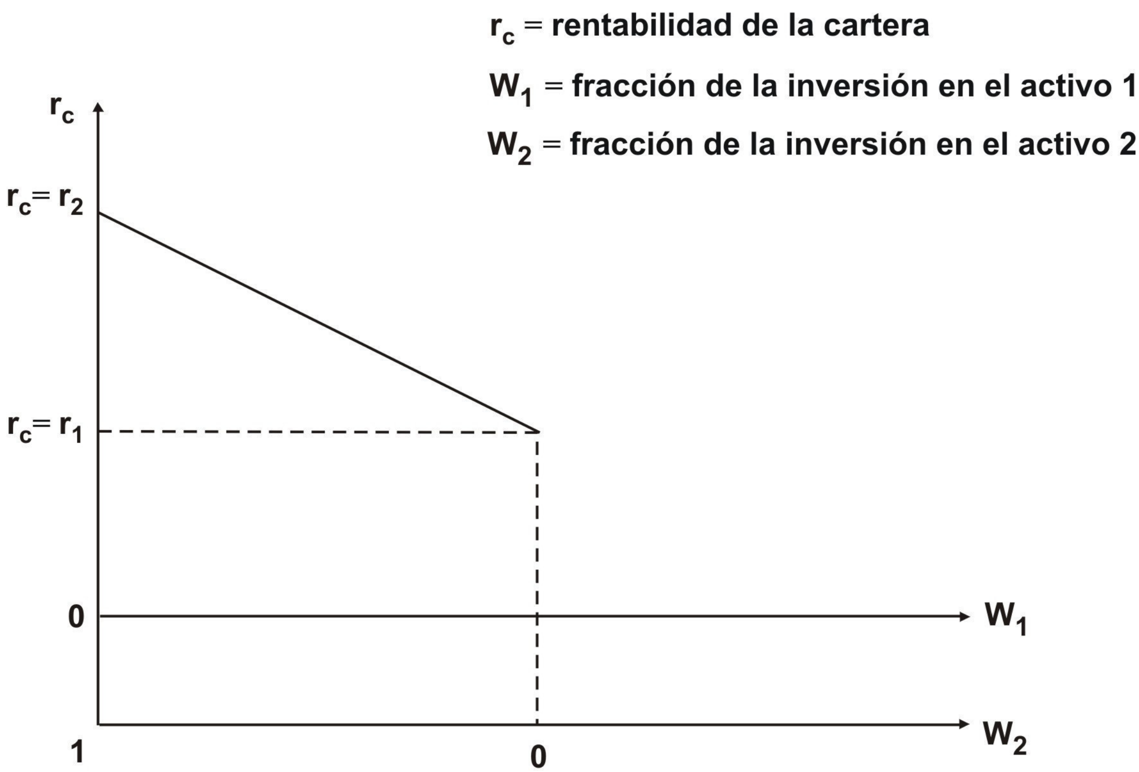
Si aplicamos la fórmula de la rentabilidad de una cartera tendremos.

E(rc) = (0)(3%)+(1)(6%) = 6%, Resultado que se interpreta como el promedio de dichos portafolios en los 5 años

PERÍODO	FÓRMULA	RENTABILIDAD DEL PORTAFOLIO
2001	(0)(1%)+(1)(10%)=	10%
2002	(0)(5%)+(1)(2%)=	2%
2003	(0)(2%)+(1)(8%)=	8%
2004	(0)(3%)+(1)(6%)=	6%
2005	(0)(4%)+(1)(4%)=	4%
RENTABILIDAD ESPERADA		**6.0%**

Vemos pues que la rentabilidad de una cartera no es más que el promedio ponderado de las rentabilidades esperadas de los títulos. Vemos que la relación entre la rentabilidad de la cartera y la proporción invertida en un activo es lineal (sólo es necesario la proporción de la inversión en un solo activo puesto que dado w_1 implica w_2 = 1-w_1 es decir w_2 está determinado de antemano), esto se ve con la ayuda del Gráfico V.1

GRÁFICO V.1



<u>Relación entre la rentabilidad de una cartera y la proporción de la Inversión en un título: caso de 2 títulos-valor</u>

V.3) RIESGO DE UN PORTAFOLIO

Al igual que en el caso de un título seguimos la definición de riesgo entendiendo ésta como "dispersión de resultados" o "variabilidad de los rendimientos" de la cartera, vamos a seguir suponiendo una cartera de sólo 2 activos para entender mejor el concepto de dispersión estándar de una cartera. La fórmula de la varianza de la cartera será:

$$\sigma^2 (r_C) = E\,(r_C - E(r_C))^2$$

Donde $\sigma^{2\,2}(r_C)$: Varianza de la cartera

$E(r_C)$: Esperanza de la rentabilidad de la cartera.

r_C : Valor probable de la rentabilidad de la cartera.

Operando tenemos que :

$$\sigma^2 (r_C) = E\,(r_C - E(r_C)\,)^2$$
$$= E\,(w_1r_1 + w_2r_2 - E(w_1r_1+w_2r_2)\,)^2$$

Donde: w_1 : proporción de la inversión en el título 1

w_2 : proporción de la cartera en el título 2

r_1 : valor posible del título 1

r_2 : valor posible del título 2

Usando las propiedades de la esperanza matemática tenemos:

$$\sigma^2 (r_C) = E(w_1r_1 + w_2r_2 - w_1E(r_1) - w_2E(r_2)\,)^2$$

$$= E(w_1(r_1-E(r_1)) + w_2(r_2-E(r_2))^2$$
$$= E(w_1^2(r_1-E(r_1))^2 + w_2^2 (r_2-E(r_2))^2+2 w_1 w_2 (r_1 - E(r_1)) (r_2 - E(r_2)))$$
$$= w_1^2 E(r_1 - E(r_1))^2 + w_2^2 E(r_2-E(r_2))^2+ 2w_1w_2 E(r_1 - E(r_1)) (r_2 - E(r_2))$$

Donde $E(r_1 - E(r_1))^2 = \sigma^2{}_1$ = Varianza de la rentabilidad del activo 1

$E(r_2-E(r_2))^2 = \sigma^2{}_2$ = Varianza de la rentabilidad del activo 2

$E(r_1 - E(r_1)) \; E(r_2 - E(r_2)) = COV(r_1 r_2)$ = Covarianza entre los activos 1 y 2

Lo que implica :

$$\sigma^2 \; (r_c) = w^2{}_1 \sigma^2{}_1 + w^2{}_2 \sigma^2{}_2 + 2w_1w_2 Cov(r_1,r_2)$$

De donde se obtiene la importante conclusión que para obtener el riesgo de una cartera, es necesario conocer la **COVARIANZA** entre los títulos de los que se quiere conformar dicha cartera. Asimismo cabe destacar que la fórmula anterior corresponde a la varianza de dicha cartera, siendo la raíz de esta la desviación estándar que como se mencionó anteriormente se usa de manera alternativa como una medida de riesgo:

$$\sigma(r_c) = \sqrt{W^2{}_1\sigma^2{}_1 + W^2{}_2\sigma^2{}_2 + 2W_1W_2COV(r_1r_2)}$$

Lo que nos da una medida para determinar el riesgo de un portafolio para el caso de carteras compuestas con 2 activos. Vamos a seguir con el ejemplo visto en el punto V.2 a fin de determinar los riesgos de los diferentes portafolios. (Sus respectivas desviaciones estándar).

A) Supongamos que tomemos el portafolio constituida por W1=1/2 y W2 =1/2

Si aplicamos la fórmula del riesgo de una cartera tendremos.

$$\sigma(r_c) = \sqrt{(1/2)^2(1.41\%)^2 + (1/2)^2(2.83)^2 + 2(1/2)(1/2)(-4)} = 0.71\%$$

Este dato es la desviación estándar de las rentabilidades de dicho portafolio. Veamos

PERÍODO	**FÓRMULA**	**RENTABILIDAD DEL PORTAFOLIO**
2001	(1/2)(1%)+(1/2)(10%)=	5.5%
2002	(1/2)(5%)+(1/2)(2%)=	3.5%
2003	(1/2)(2%)+(1/2)(8%)=	5%
2004	(1/2)(3%)+(1/2)(6%)=	4.5%
2005	(1/2)(4%)+(1/2)(4%)=	4%
RIESGO DESVIACIÓN ESTÁNDAR		**0.71%**

B) Supongamos que tomemos el portafolio constituida por W1=1/4 y W2 =3/4

Si aplicamos la fórmula del riesgo de una cartera tendremos.

$$\sigma(r_c) = \sqrt{(1/4)^2(1.41\%)^2 + (3/4)^2(2.83)^2 + 2(1/4)(3/4)(-4)} = 1.77\%$$

Donde este dato del riesgo se interpreta como la desviación estándar de las rentabilidades del portafolio

PERÍODO	FÓRMULA	RENTABILIDAD DEL PORTAFOLIO
2001	(1/4)(1%)+(3/4)(10%)=	7.75%
2002	(1/4)(5%)+(3/4)(2%)=	2.75%
2003	(1/4)(2%)+(3/4)(8%)=	6.5%
2004	(1/4)(3%)+(3/4)(6%)=	5.25%
2005	(1/4)(4%)+(3/4)(4%)=	4%
RIESGO DESVIACIÓN ESTÁNDAR		**1.77%**

C) Supongamos que tomemos el portafolio constituida por W1=3/4 y W2 =1/4 Si aplicamos la fórmula del riesgo de una cartera tendremos.

$$\sigma(r_c) = \sqrt{(3/4)^2(1.41\%)^2 + (1/4)^2(2.83)^2 + 2(3/4)(1/4)(-4)} = 0.35\%$$

Donde este dato del riesgo se interpreta como la desviación estándar de las rentabilidades del portafolio

PERÍODO	FÓRMULA	RENTABILIDAD DEL PORTAFOLIO
2001	(3/4)(1%)+(1/4)(10%)=	3.25%
2002	(3/4)(5%)+(1/4)(2%)=	4.25%
2003	(3/4)(2%)+(1/4)(8%)=	3.5%
2004	(3/4)(3%)+(1/4)(6%)=	3.75
2005	(3/4)(4%)+(1/4)(4%)=	4%
RIESGO DESVIACIÓN ESTÁNDARD		**0.35%**

D) Supongamos que tomemos el portafolio constituida por W1=1 y W2 =0
Si aplicamos la fórmula del riesgo de una cartera tendremos.

$\sigma(r_c) = \sqrt{(1)^2(1.41\%)^2 + (0)^2(2.83)^2 + 2(1)(0)(-4)}$ = 1.41%

Donde este dato del riesgo se interpreta como la desviación estándar de las rentabilidades del portafolio

PERÍODO	FÓRMULA	RENTABILIDAD DEL PORTAFOLIO
2001	(1)(1%)+(0)(10%)=	1%
2002	(1)(5%)+(0)(2%)=	5%
2003	(1)(2%)+(0)(8%)=	2%
2004	(1)(3%)+(0)(6%)=	3%
2005	(1)(4%)+(0)(4%)=	4%
RIESGO DESVIACIÓN ESTÁNDAR		**1.41%**

E) Supongamos que tomemos el portafolio constituida por W1=0 y W2 =1
Si aplicamos la fórmula del riesgo de una cartera tendremos.

$\sigma(r_c) = \sqrt{(0)^2(1.41\%)^2 + (1)^2(2.83)^2 + 2(0)(1(-4)}$ = 2.83%

Donde este dato del riesgo se interpreta como la desviación estándar de las rentabilidades del portafolio

PERÍODO	FÓRMULA	RENTABILIDAD DEL PORTAFOLIO
2001	(0)(1%)+(1)(10%)=	10%
2002	(0)(5%)+(1)(2%)=	2%
2003	(0)(2%)+(1)(8%)=	8%
2004	(0)(3%)+(1)(6%)=	6%
2005	(0)(4%)+(1)(4%)=	4%
RIESGO DESVIACIÓN ESTÁNDAR		**2.83%**

V.4) PORTAFOLIOS EFICIENTES

Hasta ahora hemos visto las definiciones de rentabilidad y riesgo correspondiente a un portafolio, sin embargo no se ha dicho nada en cuanto a que portafolio escoger, y que es lo que Markowitz llama portafolios eficientes. ¿cuáles son los porcentajes óptimos que un inversor debe escoger? ¿cómo determino esa cartera?. Para contestar esas preguntas vamos a seguir con nuestro ejemplo de 2 acciones. Supóngase que se invierte de manera aleatoria en un portafolio constituido con W1 = 2/3 y W2=1/3. De acuerdo con la visto, en el punto anterior la rentabilidad de este portafolio estará dado por

E(rc) = (2/3)(3%)+(1/3)(6%) = 4%

PERÍODO	FÓRMULA	RENTABILIDAD DEL PORTAFOLIO
2001	(2/3)(1%)+(1/3)(10%)=	4%
2002	(2/3)(5%)+(1/3)(2%)=	4%
2003	(2/3)(2%)+(1/3)(8%)=	4%
2004	(2/3)(3%)+(1/3)(6%)=	4%
2005	(2/3)(4%)+(1/3)(4%)=	4%
RENTABILIDAD ESPERADA		**4.0%**

Y el riesgo será

$$\sigma(r_c) = \sqrt{(2/3)^2(1.41\%)^2 + (1/3)^2(2.83)^2 + 2(2/3)(1/3)(-4)}$$ **=** 0 %

PERÍODO	FÓRMULA	RENTABILIDAD DEL PORTAFOLIO
2001	(2/3)(1%)+(1/3)(10%)=	4%
2002	(2/3)(5%)+(1/3)(2%)=	4%
2003	(2/3)(2%)+(1/3)(8%)=	4%
2004	(2/3)(3%)+(1/3)(6%)=	4%
2005	(2/3)(4%)+(1/3)(4%)=	4%
RIESGO DESVIACIÓN ETÁNDAR		**0.0%**

¡¡Como es posible que combinando de una manera optima , el portafolio de dos activos riesgosos no tenga ningún riesgo ¡¡. Para entender esto replanteamos la fórmula del riesgo de tal manera que:

$$\sigma^2(r_c) = w^2_1\sigma^2_1 + w^2_2\sigma^2_2 + 2w_1w_2Cov(r_1,r_2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Sabemos además que:

$$\sigma^2_1 = E(r_1-E(r_1))^2 = E(r_1 -E(r_1))\ (r_1 -E(r_1))=Cov(r_1,r_1)$$

$$\sigma^2_2 = E(r_2 -E(r_2))^2 = E(r_2 -E(r_2))\ (r_2 -E(r_2))=Cov(r_2,r_2)$$

Sustituyendo en la fórmula 1

$$\sigma^2(r_c) = w^2_1Cov(r_1,r_1)+w^2_2Cov(r_2,r_2)+2w_1w_2Cov(r_1,r_2)$$

$$\sigma^2(r_c) = \sum_{i=1}^{i=2} w_i^2\, cov(r_i,r_j) + \sum_{i=1}^{i=2}\sum_{j=1}^{j=2} w_i w_j\, cov(r_i,r_j)$$

(Para i=j) (Para i $\neq$ j)

$$\sigma^2(r_c) = \sum_{i=1}^{i=2}\sum_{j=1}^{j=2} w_i w_j\, cov(r_i,r_j) + \sum_{i=1}^{i=2}\sum_{j=1}^{j=2} w_i w_j\, Cov(r_i,r_j)$$

(Para i=j) (Para i$\neq$ j)

$$\sigma^2(r_c) = \sum_{i=1}^{i=2}\sum_{j=1}^{j=2} w_i\, w_j\, cov(r_i, r_j) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Donde debe resaltarse que la expresión anterior puede expresarse también en términos del grado o coeficiente de correlación sabiendo que:

$$\sigma_i \sigma_j\, g.c_{i,j} = COV(r_i r_j)$$

Donde $g.c_{i,j}$ = grado de correlación entre i y j.

De donde resulta que para el caso de una cartera de 2 activos el riesgo se puede medir por la fórmula

$$\sigma^2\ (r_C) = w^2{}_1\ \sigma^2{}_1 + w_2\ \sigma^2{}_2 + 2\, w_1\, w_2\ \sigma^2{}_1\ \sigma^2{}_2\ g.c_{1,2}$$

A diferencia de la fórmula anterior, el riesgo de un portafolio se expresa, ya no en función de la Covarianza sino en función del grado de correlación. Lo que nos indica que si $g.c_{1,2}$ es grande por consiguiente el riesgo de la cartera es grande, o viceversa si $g.c_{1,2}$ es pequeña, cero o negativa el riesgo de la cartera se hace menor, **esto es en sí la <u>esencia</u> de la diversificación puesto que cuando las rentabilidades de los distintos activos estén menos correlacionados el riesgo será menor puesto que si se pierde en un título se ganará en otro (puesto que no hay un grado de correlación entre sus rentabilidades) y de esta manera se minimizará el riesgo de una pérdida**. En el ejemplo que vimos anteriormente, anterior ocurrió la desaparición del riesgo por que el grado de correlación entre los activos de A y B era de –1.

$$\uparrow \sigma(r_c) = \sqrt{W^2{}_1\sigma^2{}_1 + W^2{}_2\sigma^2{}_2 + 2W_1W_2\sigma_1\sigma_2 gc_{1,2}} \uparrow$$

A mayor Grado de Correlación entre dos activos, entonces el riesgo es mayor

Que pasa si $g.c_{1,2}$ = 1

la fórmula se convierte en :

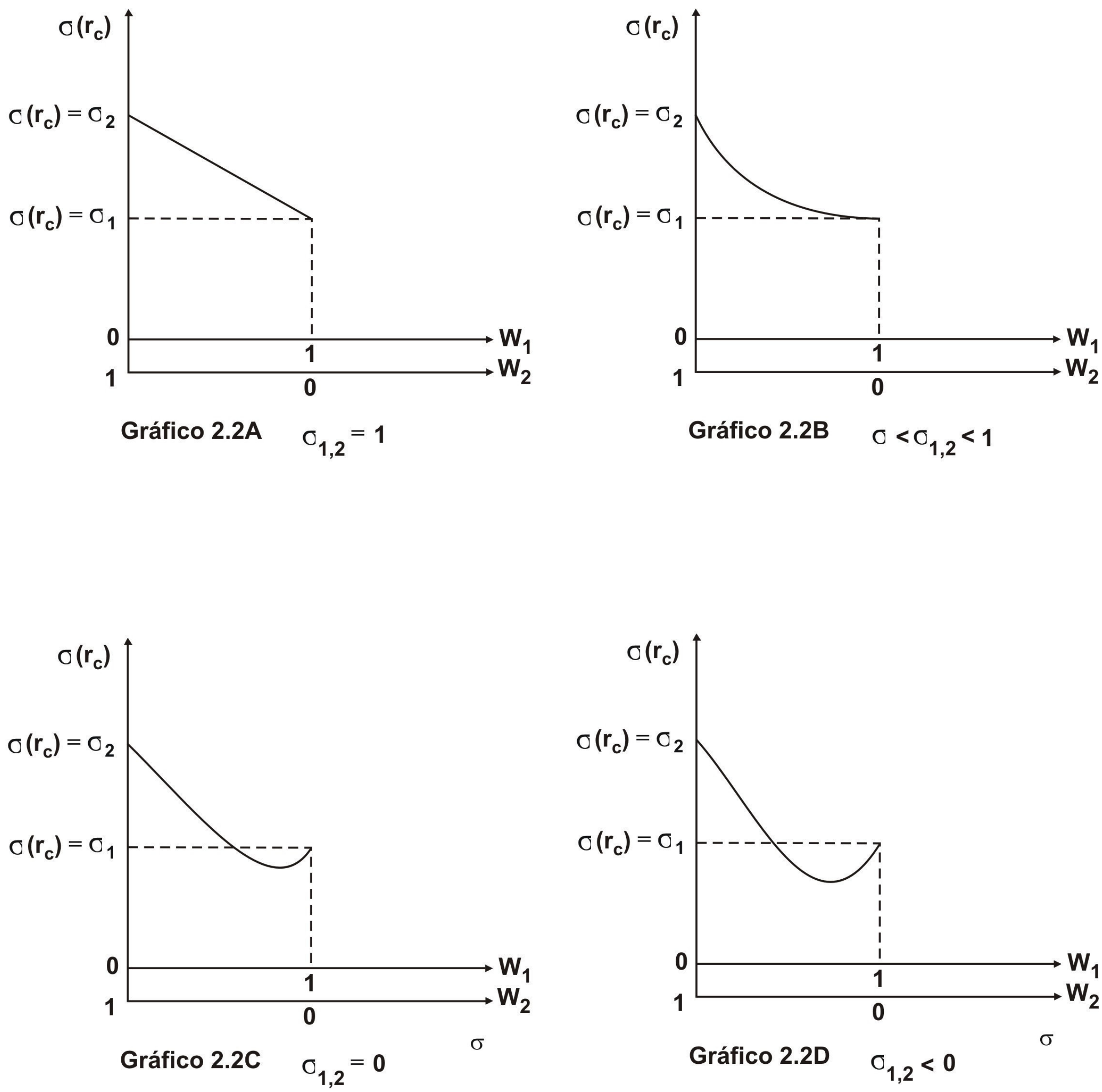
$$\sigma^2(r_c) = W^2{}_1\sigma^2{}_1 + W^2{}_2\sigma^2{}_2 + 2W_1W_2\sigma_1\sigma_2$$

$$\sigma^2(r_c) = (W_1\sigma_1 + W_2\sigma_2)^2$$

$$\sigma(r_c) = W_1\sigma_1 + W_2\sigma_2$$

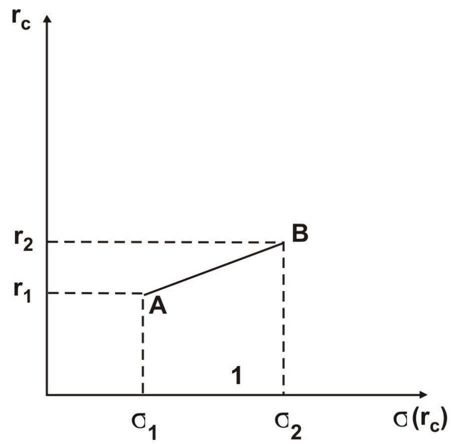
Donde existe una relación lineal entre el riesgo de la cartera y la proporción invertida en un título-valor esto se ve más claro con la ayuda del Gráfico V.2 en la figura 2.2a). En los casos donde $g.c_{1,2} \neq +1$ la relación entre el riesgo y la proporción invertida deja de ser lineal, esto se ve claramente con la ayuda de los Gráficos 2.2.b, 2.2c y 2.2d. Una vez que ya hemos determinado la relación que existe entre la rentabilidad de una cartera, el riesgo de una cartera y la respectiva proporción invertida en un título-valor pasamos a juntar en un solo gráfico, tanto la rentabilidad como el riesgo de la cartera, esto se aprecia en el Gráfico V.3.

GRÁFICO V.2



Relaciones entre el riesgo de una cartera y la fracción de la inversión hecha en un título ante distintos grados de correlación: Caso de dos títulos

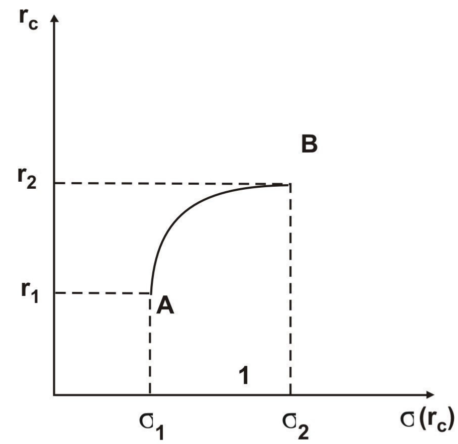
GRÁFICO V.3



$W_1 = 1$ $W_1 = 0$
$W_2 = 0$ $W_2 = 1$

Cuando $\sigma_{1,2} = 1$

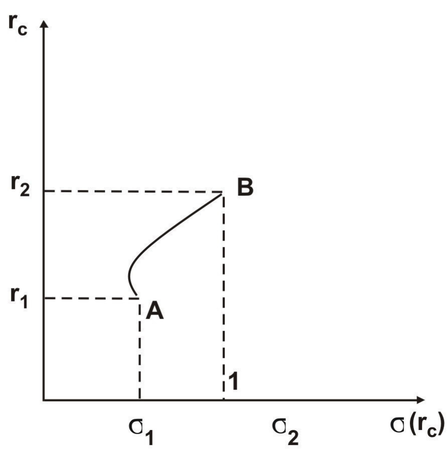
GRAFICO A



$W_1 = 1$ $W_1 = 0$
$W_2 = 0$ $W_2 = 1$

Cuando $0 < \sigma_{1,2} < 1$

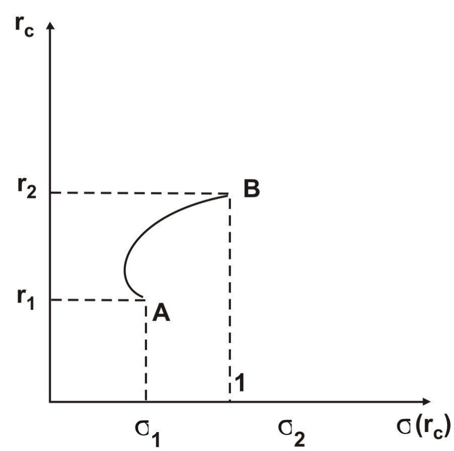
GRAFICO B



$W_1 = 1$ $W_1 = 0$
$W_2 = 0$ $W_2 = 1$

Cuando $\sigma_{1,2} = 0$

GRAFICO C



$W_1 = 1$ $W_1 = 0$
$W_2 = 0$ $W_2 = 1$

Cuando $\sigma_{1,2} < 0$

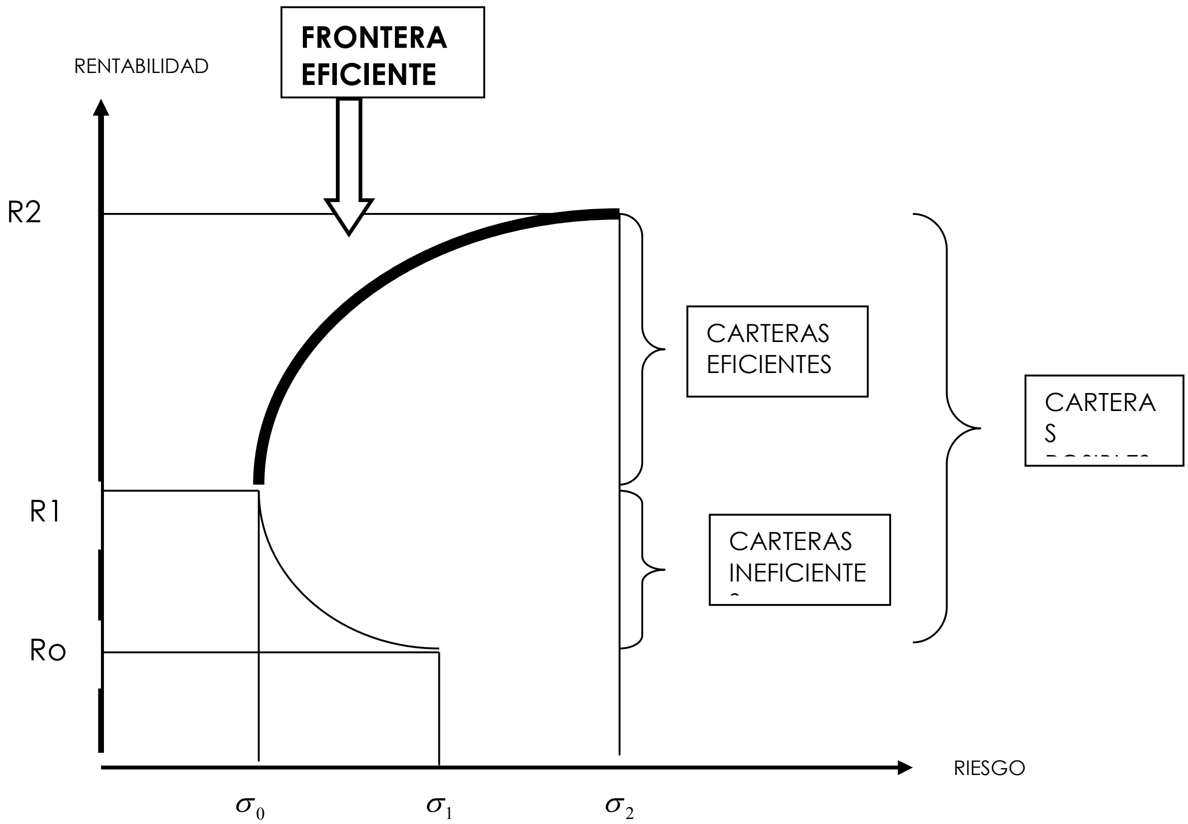
GRAFICO D

Frontera eficiente ante distintos grados de correlación

La curva de cada gráfico muestra los valores de r_c (rentabilidad) y $\sigma(r_c)$ (riesgo) que hacen máxima la rentabilidad para un nivel de riesgo, viceversa hacen mínimo el riesgo para un nivel de rentabilidad, que es justamente el criterio de Markowitz de lo que es un portafolio eficiente

Una vez que ya se ha obtenido las distintas posibles combinaciones de r_c y $\sigma(r_c)$ de esta cartera **SE DEFINE A LA FRONTERA EFICIENTE COMO EL CONJUNTO DE CARTERAS QUE CUMPLE CON EL CRITERIO DE DIVERSIFICACION EFICIENTE SEGUN MARKOWITZ,** es decir aquellas carteras que para una rentabilidad dada ofrecen el mínimo riesgo y asimismo para un riesgo dado ofrecen la máxima rentabilidad, a este conjunto de carteras se les conoce como carteras eficaces o eficientes, así por ejemplo en el Gráfico V.3, figuras A y B todas las combinaciones que son posibles forman parte de la frontera eficiente, por lo tanto son carteras potencialmente elegibles, para el caso de las figuras C y D la frontera eficiente será sólo el conjunto de combinaciones posibles de r_c y $\sigma(r_c)$ ubicados en la envolvente superior tal como se observa en el gráfico V.4

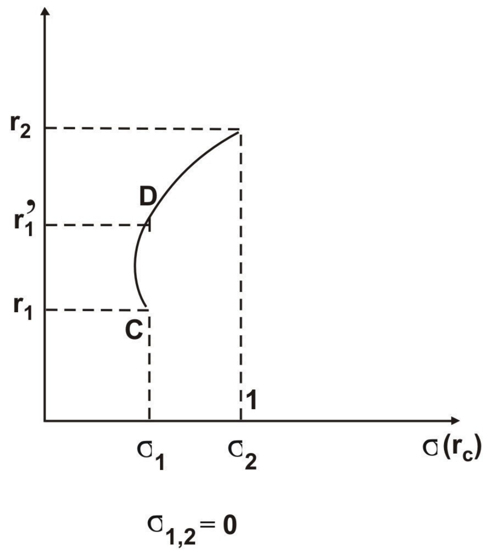
GRÁFICO V.4

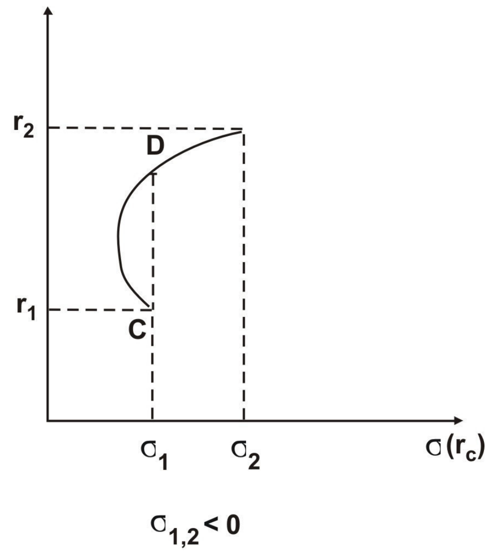


CONJUNTO DE CARTERAS EFICIENTES

En el Gráfico V.5 la parte sombreada indica la frontera eficiente en estos casos, fíjese que por ejemplo el punto "C" no pertenece al conjunto de carteras eficientes puesto que se puede obtener una cartera con el mismo riesgo y una mayor rentabilidad, (Cartera "D" en el Gráfico V.5)

GRÁFICO V.5

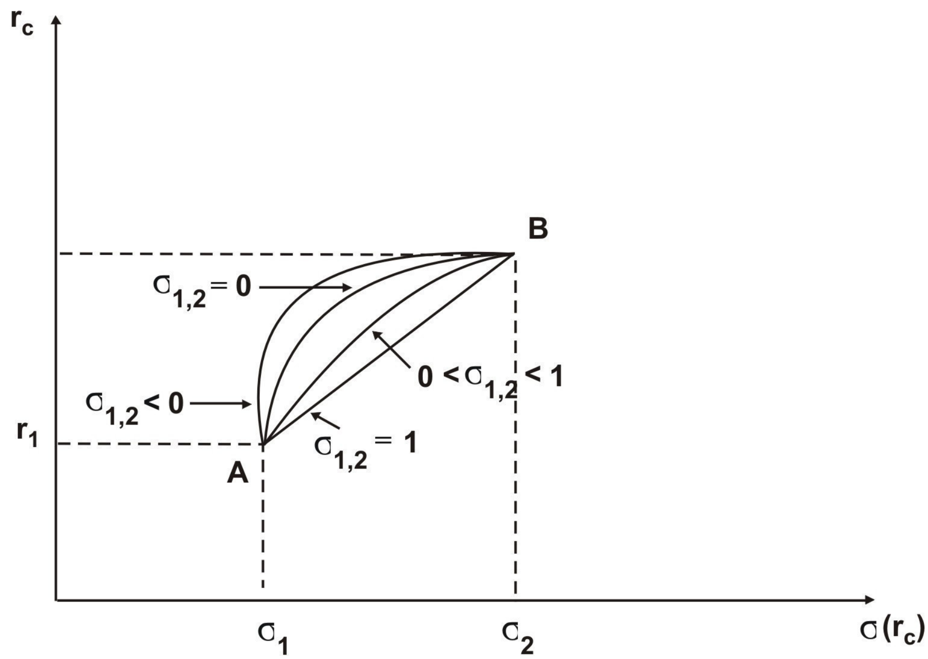




Conjunto de carteras eficientes cuando $\sigma_{1,2} = 0$ y $\sigma_{1,2} < 0$

¿De qué forma es la frontera eficiente? La frontera eficiente será convexa a lo largo de su frontera eficaz o sea "sobresaldrá hacia afuera", esto dependerá del grado de correlación que exista entre los valores tal como lo muestra el Gráfico V.6

GRÁFICO V.6



Distintas formas de la frontera eficiente

Vemos pues que no basta diversificar por diversificar sino que hay que hacerlo de manera eficiente ubicando siempre nuestra cartera en la "frontera eficiente", la gran incógnita es encontrar los porcentajes que hacen una cartera eficiente, la forma de determinar estos porcentajes se detallan en el Anexo I de la presente investigación. Éste análisis puede generalizarse a más de 2 activos, sin perder rigurosidad.

V.5) <u>ANÁLISIS DE CARTERAS EFICIENTES PARA EL CASO DE CARTERAS CONFORMADAS CON MAS DE DOS ACTIVOS</u>

Al igual que para el caso de dos activos empezaremos nuestro análisis definiendo rentabilidad y riesgo para una cartera compuesta por "n" activos.

1) RENTABILIDAD DE UN PORTAFOLIO DE MAS DE DOS ACTIVOS

Recordemos que la rentabilidad para dos activos estaba dada por la fórmula

$$\underline{E(r_c) = w_1 E(r_1) + w_2 E(r_2)}$$

Para el caso de "n" activos hacemos extensiva esta fórmula, teniendo como resultado:

$$\underline{E(r_c) = w_1 E(r_1) + w_2 E(r_2) + w_3 E(r_3) + \dots\dots\dots\dots + w_n E(r_n)}$$

No es más que una generalización de la fórmula anterior de rentabilidad y nos señala que la rentabilidad esperada de un portafolio es el promedio de las rentabilidades de cada activo ponderada por los porcentaje de participación en la Inversión.

2) RIESGO DE UN PORTAFOLIO DE MAS DE DOS ACTIVOS

Cuando hicimos el análisis del riesgo de una cartera de dos activos teníamos:

$$\sigma^2 (r_c) = w^2{}_1 \sigma^2{}_1 + w^2{}_2 \sigma^2{}_2 + 2w_1 w_2 Cov(r_1, r_2)$$

Que también se puede expresar de la siguiente manera

$$\sigma^2(r_c) = w_1 w_1 COV(r_1 r_1) + w_1 w_2 COV(r_1 r_2) + w_2 w_1 COV(r_2 r_1) + w_2 w_2 COV(r_2 r_2)$$

$$\sigma^2(r_c) = w_1 w_1 COV(r_1 r_1) + w_1 w_2 COV(r_1 r_2) = \sum_{j=1}^{j=2} w_1 w_j COV(r_1 r_j) + ...$$

$$.... \quad + w_2 w_1 COV(r_2 r_1) + w_2 w_2 COV(r_2 r_2) = \sum_{j=1}^{j=2} w_2 w_j COV(r_2 r_j)$$

O lo que es lo mismo

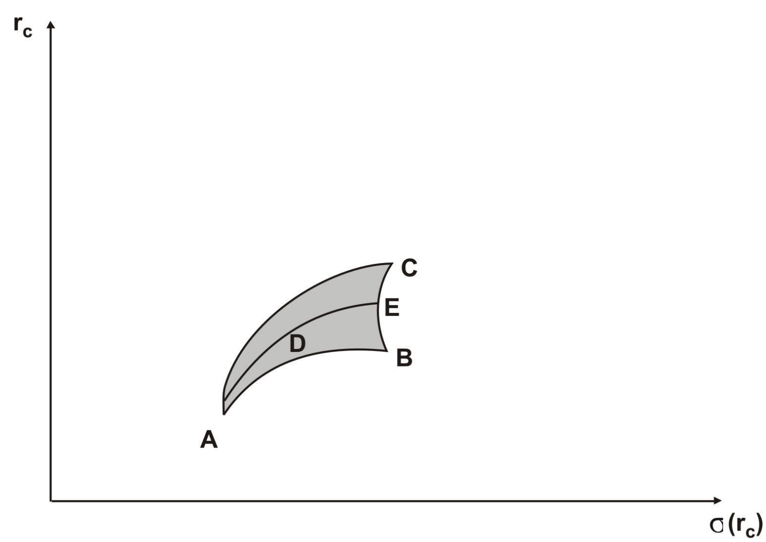
$$\underline{\sigma^2(r_c) = \sum_{i=1}^{i=2} \sum_{j=1}^{j=2} w_i w_j COV(r_i r_j)}$$

Generalizando esta fórmula para más de 2 activos, supongamos para "n" activos, que es el caso que estamos viendo resulta:

$$\sigma^2(r_c) = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} w_i w_j cov(r_i, r_j)$$

No obstante lo aparentemente engorroso de la fórmula, los conceptos de cartera eficiente son exactamente igual. En el Gráfico V.7 vemos una cartera compuesta por 3 activos : los activos "A","B" y "C" donde las curvas "AB","BC" y "AC" corresponden a las fronteras eficientes entre dichos títulos tal como se describió anteriormente, en este instante caben las preguntas ¿Cuál es el conjunto de distintas carteras que se puede obtener? y ¿Cuál es el conjunto de carteras eficientes?. La respuesta a la primera inquietud, es la zona sombreada entre los activos "A", "B" y "C" tal como lo muestra el Gráfico V.7

GRÁFICO V.7



Conjunto Factible y Frontera eficiente para caso de una cartera de mas de dos valores

Supongamos que tenemos la cartera "D" la cual está constituida por el activo "A" y por la cartera "E" que a su vez es una combinación de los activos "B" y "C"(al estar dentro de la curva "BC"). Vemos pues que el punto "D" es un punto factible y así como este punto cualquier punto comprendido en la zona sombreada entre los activos "A", "B" y "C" se puede obtener con distintas combinaciones de títulos es por ello que la zona sombreada entre los activos "A","B" y "C" define el conjunto factible de carteras posibles.

Al igual que el caso de 2 títulos **la frontera eficiente será la envolvente en la parte superior de dicha curva y constituye todas las posibles carteras a elegirse,** en el caso que la cartera esté constituida con 2 o más activos se hace más notorio las ventajas de una diversificación eficiente puesto que las posibles combinaciones entre los distintos títulos son mayores y por lo tanto la cantidad de carteras a elegir.

En este punto se ha determinado de manera explícita qué es lo que constituye una cartera eficiente, y por ende las combinaciones de riesgo y rentabilidad que debe buscar un inversionista en una cartera, los distintos procedimientos para obtener dichas carteras se analizan en el Anexo I.

V.6) DETERMINACIÓN DE LA FRONTERA EFICIENTE CUANDO EXISTE UN ACTIVO SIN RIESGO

Se ha visto como se forma el conjunto de carteras eficientes teniendo en cuenta que todos los activos admiten riesgo, en esta sección vamos a analizar como cambiaría el análisis si añadimos un activo que provee una rentabilidad cierta, para esto vamos a ejemplificar el caso de 2 activos "1" y "2", **donde el activo "1" tiene una rentabilidad cierta r_1.**

La rentabilidad de la cartera al igual que en el caso donde no existía un activo sin riesgo será:

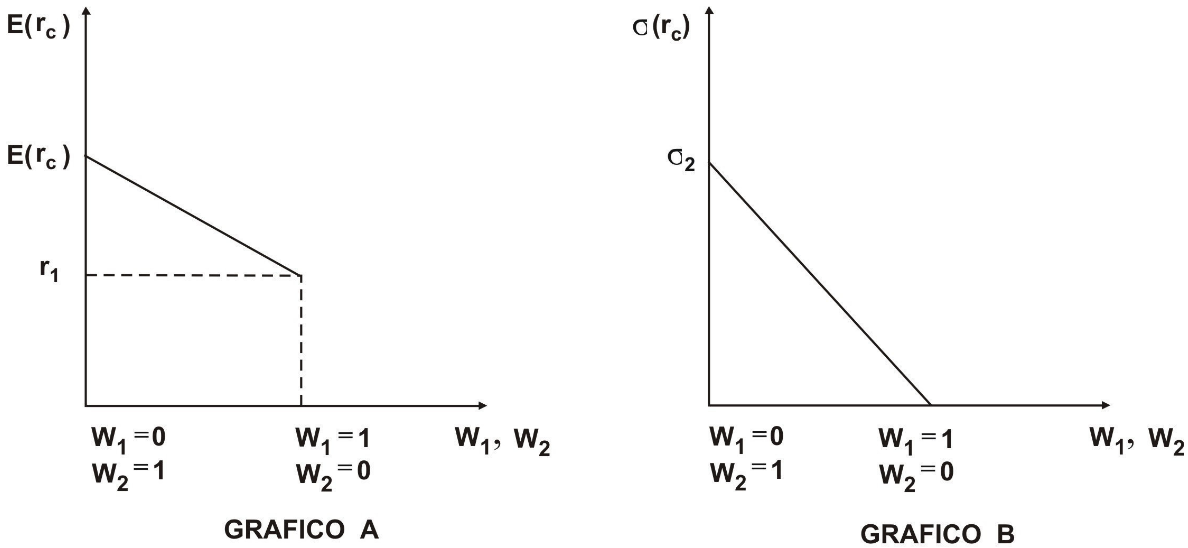
$$E(r_C) = w_1 E(r_1) + w_2 E(r_2)$$

Dado que la Esperanza de una constante es la constante tenemos:

$$E(r_C) = w_1 r_1 + w_2 E(r_2)$$

Es decir existe una relación lineal entre W_1, W_2 y la $E(r_C)$, tal como se aprecia en el Gráfico V.8-A

GRÁFICO V.8



Relación entre las proporciones invertidas en una cartera con un activo sin riesgo con sus respectivas rentabilidades así como riesgos

El riesgo de una cartera estará dado por:

$$\sigma^2(r_c) = W^2_1 \ \sigma^2_1 + W^2_2 \ \sigma^2_2 + 2W_1W_2Cov\ (r_1,r_2)$$

Como el activo 1 tiene una rentabilidad cierta entonces:

$$\sigma^2_1 = E(r_1 - E(r_1))^{\ 2} = 0$$

$$Cov\ (r_1,r_2) = E(r_1 - E(r_1))(r_2 - E(r_2)) = 0$$

Sustituyendo en la ecuación de la varianza de la cartera resulta:

$\sigma^2(r_c)$ = W^2_1 σ^2_1 + W^2_2 σ^2_2 + 2 W_1 W_2 Cov (r_1,r_2)

$\sigma^2(r_c)$ = W^2_1 x 0+ W^2_2 σ^2_2 + 2 W_1 W_2 x 0

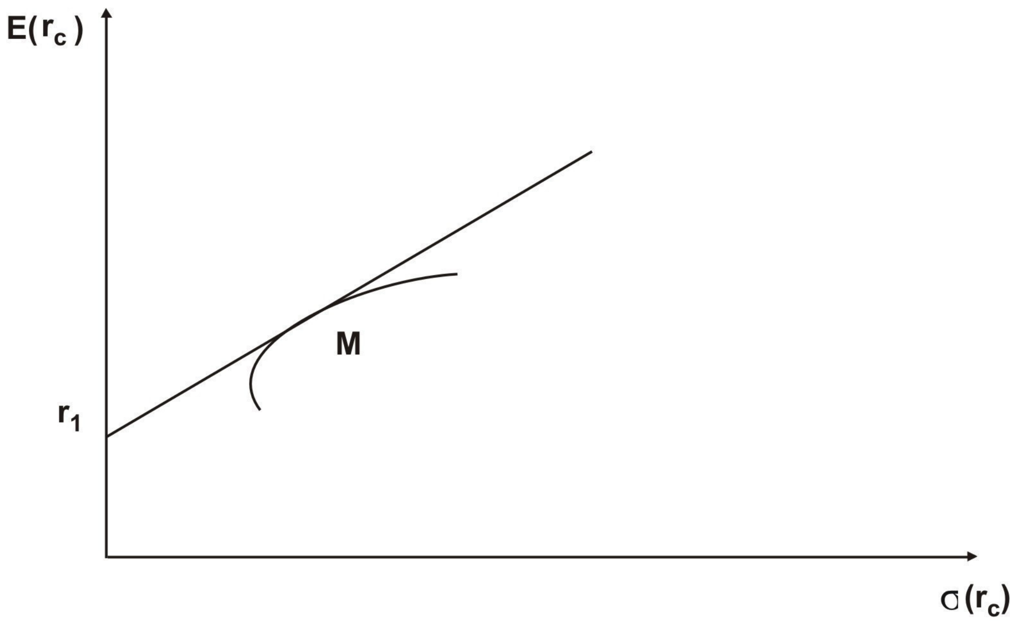
$\sigma^2(r_c)$ = W^2_2 s^2_2

σ (r_c) = W_2 s_2

Vemos que para el caso de una cartera donde exista un activo sin riesgo también hay una relación lineal entre la fracción invertida en un activo y el riesgo de la cartera, esto se aprecia mucho mejor en el Gráfico V.8-B

Si unimos los Gráficos V.8-A y V.8-B vemos que la frontera eficiente para el caso de la existencia de un activo sin riesgo se ha convertido en una línea recta, a dicha recta se le conoce como **RECTA DE MERCADO DE CAPITALES** y un inversionista se puede ubicar en cualquier punto de dicha recta combinando el activo sin riesgo y la cartera ubicada en el punto "M" del Gráfico V.9 en el punto r_1 el inversor compra sólo el activo sin riesgo, entre r_1 y "M" invierte algo en la cartera "M" y otra parte en el activo sin riesgo, en puntos situados por encima de "M" el inversionista pide prestamos invirtiendo todo en la cartera "M". A la cartera "M" se le denomina **"CARTERA OPTIMA DE TITULOS CON RIESGO " O "CARTERA DE MERCADO"** dada la importancia que tiene en la elección de la mejor cartera, cuando existe un activo sin riesgo en el mercado.

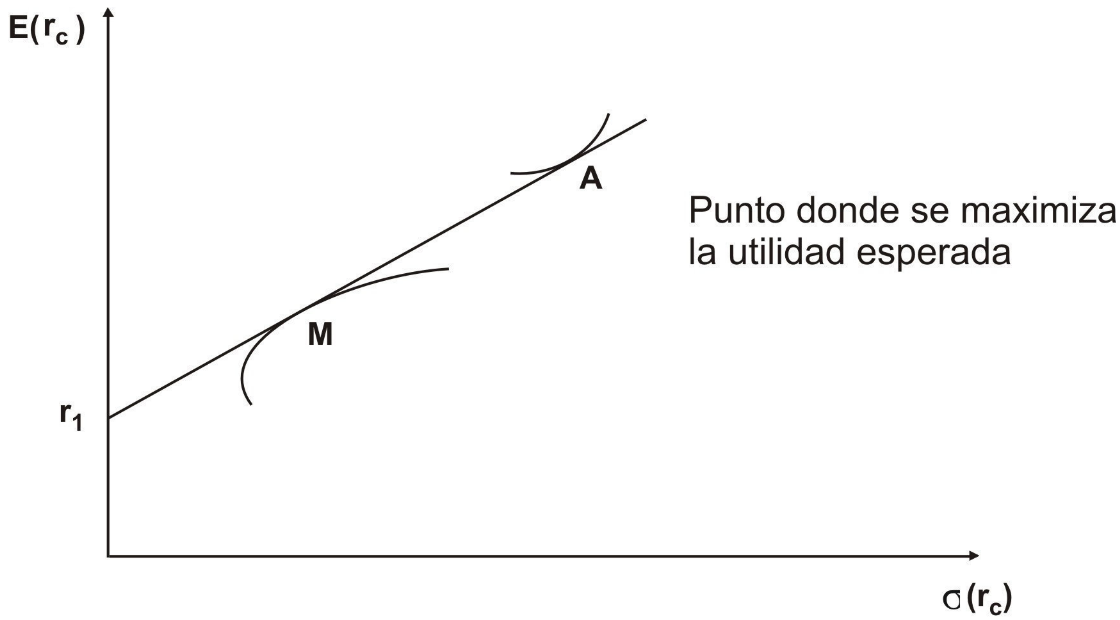
GRÁFICO V.9



Recta del Mercado de Capitales o cojunto de carteras eficientes ante la existencia de un activo sin riesgo

La existencia de esta "cartera del mercado" simplifica grandemente la selección de una cartera puesto que sólo se necesita decidir cuanto ha de invertirse en el activo sin riesgo, y cuanto en la cartera de mercado. Una vez que se ha determinado la nueva frontera eficiente en el caso en que el mercado brinde un activo sin riesgo el inversor se ubicará en el punto donde maximice su utilidad esperada tal como lo muestra el Gráfico V.10. Cabe ahora la pregunta ¿Qué es lo que determina la elección de "una" u "otra" cartera? Esto se verá en el capítulo siguiente

GRÁFICO V.10



Elección de la cartera óptima en un contexto donde existe un activo sin riesgo

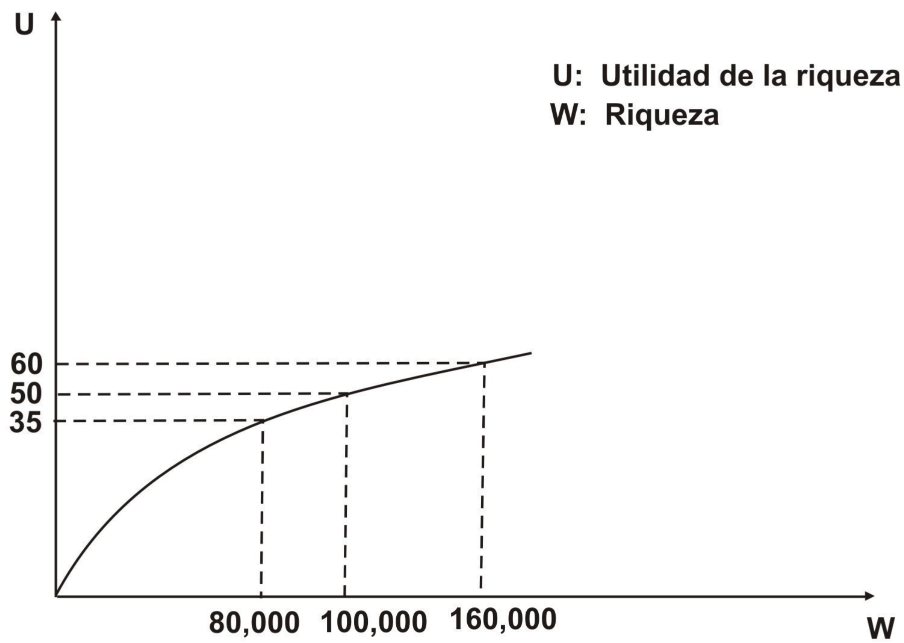
CAPÍTULO VI
ELECCIÓN DE LA CARTERA ÓPTIMA

Para determinar cuáles son las razones por la cual determinado inversor se decide por tales inversiones o por determinada cartera (dentro de toda la "frontera eficiente") es necesario conocer las preferencias de cada inversor, estas preferencias nos revelan las distintas formas como se comportan determinados inversores y son estudiados por la teoría de la utilidad de la riqueza.

VI.1) TEORÍA DE LA UTILIDAD DE LA RIQUEZA

Esta teoría nos dice que a medida que una persona incrementa su nivel de riqueza dicha persona obtendrá más satisfacción, mayor utilidad por dicha riqueza, esto es obvio dado que la riqueza es un bien, sin embargo una característica importante que esta teoría nos muestra es que la utilidad que nos da la riqueza crece a una tasa decreciente (Ley de la Utilidad Marginal Decreciente), es decir los diez primeros soles que se reciban nos darán una determinada utilidad, los posteriores diez soles una menor utilidad y así sucesivamente, esto es así dado que los ingresos obtenidos inicialmente servirán para cubrir necesidades básicas, a medida que vayamos cubriendo dichas necesidades básicas los montos marginales de ingreso nos proporcionarán niveles menores de satisfacción o utilidad marginal (ver Gráfico VI.1).

GRÁFICO VI.1



Utilidad Marginal decreciente por la Riqueza

Un inversor también puede tener una utilidad marginal creciente por la riqueza, pero no es el caso más general, una consecuencia de que la utilidad marginal de la riqueza sea decreciente es que el inversionista tenga **"AVERSION AL RIESGO"**, veamos porque.

Supongamos que una persona tiene un stock de riqueza de $100,000 y que con dicho nivel de riqueza alcanza un nivel de satisfacción de 50 útiles (**medida arbitraria de la utilidad**), un incremento de la riqueza de $20,000 (es decir de $100,000 a $120,000) proporcionará un incremento en la utilidad de 10 útiles, igualmente una reducción de $20,000 en su riqueza hará que la utilidad disminuye no en 10 útiles sino en una cantidad mayor, por ejemplo 15 útiles como consecuencia de que la utilidad marginal de la riqueza es decreciente, es decir a éste inversor la pérdida de $20,000 le causará más "sufrimiento" que la "felicidad" de ganar $20,000, esto es así dado que la pérdida de satisfacción (quince útiles) se reduce en una cantidad mayor, a la satisfacción que obtendría de ganar, (diez útiles) por consiguiente si a éste inversionista se le ofrecen 2 opciones:

a) que no invierta
b) que invierta $20,000 con la probabilidad de 50% de éxito y 50% de pérdida de su capital.

En ambas opciones la ganancias esperada será la misma, (la esperanza matemática de la rentabilidad en ambos casos es cero) <u>pero lo que explica la conducta del inversor no es la rentabilidad esperada sino la utilidad esperada, de las distintas opciones.</u>

En la primera opción la utilidad esperada será <u>cero</u> puesto que no invertirá en nada y en la segunda opción será:

$$(0.5)\ (-15) + (0.5) + (10) = -2.5$$

Por consiguiente se preferirá la primera opción puesto que la utilidad esperada es mayor en esta opción.
Si identificamos la acción de invertir como una opción con riesgo que nos brinda una rentabilidad esperada y si identificamos la acción de no invertir como una acción sin riesgo y que nos brinda la misma rentabilidad esperada, y si como hemos visto preferimos la acción sin riesgo ante iguales rentabilidades esperadas entonces estamos en el caso de **"AVERSION AL RIESGO"**, donde se considera al riesgo un mal, y esto es consecuencia de que la utilidad marginal por la riqueza es decreciente, supuesto que utilizaremos al hablar de las preferencias de cada inversor.

VI.2) <u>PREFERENCIAS DEL INVERSOR</u>

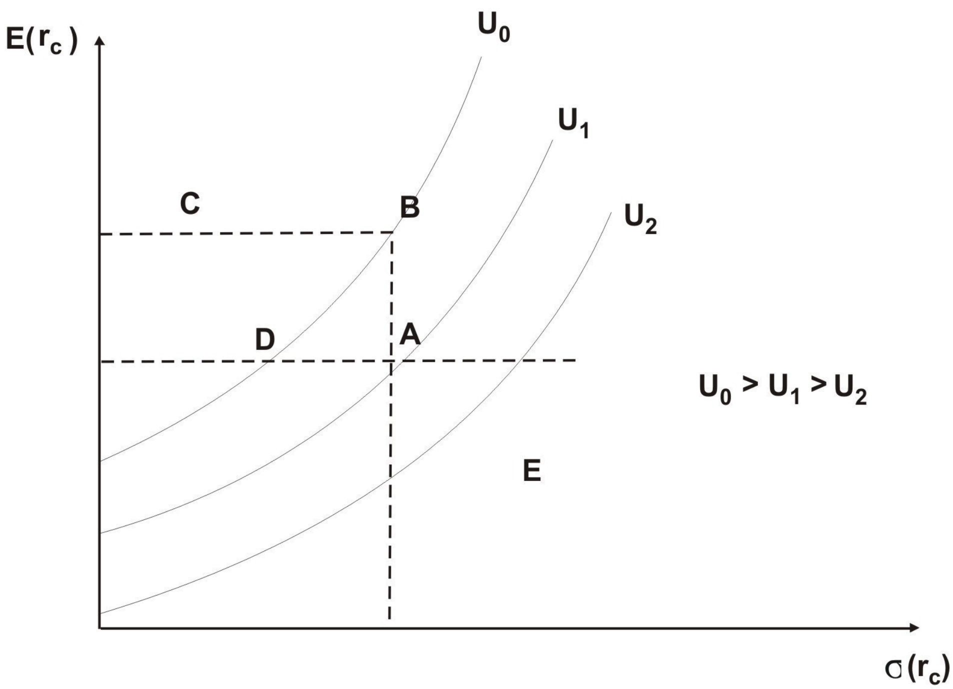
El hecho de haber supuesto que los inversores sean adversos al riesgo hace que este sea un "mal", por otro lado la rentabilidad de una cartera se considera un "bien", esto nos conlleva a ciertos postulados en cuanto a la conducta de un inversor.

1) Dada 2 carteras que ofrecen la misma rentabilidad se preferirá aquella que tenga menos riesgo.

2) Dada 2 carteras con el mismo riesgo se preferirá aquella que ofrezca la más alta rentabilidad.

3) Dada 2 carteras cualesquiera se prefieren aquellas que ofrezcan la más alta rentabilidad y a su vez menor riesgo. El significado de estos postulados se ve más claramente con ayuda del Gráfico VI.2.

GRÁFICO VI.2



Curvas de Indiferencias de un Inversor

En dicho Gráfico consideramos en el eje de las abscisas la rentabilidad esperada y en el eje de las ordenadas la desviación estándar de las rentabilidades de cada cartera como una medida del riesgo de dicha cartera. De este gráfico se puede deducir que:

a) La cartera "A" es preferida a la cartera "E" (postulado 3)
b) La cartera "B" es preferida a "A" (postulado 2)
c) La cartera "C" es preferida a "A" (postulado 3)
d) La cartera "D" es preferida a "A" (postulado 1)

En ese mismo gráfico se puede desarrollar la idea de curvas de indiferencia o curvas de iso-utilidad definiendo a éstas como todas las posibles combinaciones de riesgo y rentabilidad que brindan en mismo nivel de utilidad esperada. Estas curvas tienen las siguientes características:

a) Tienen pendiente positiva: esto es así puesto que un inversionista para mantenerse en el mismo nivel de utilidad esperada, aceptará mayor riesgo (que es un mal) sólo a cambio de una mayor rentabilidad.

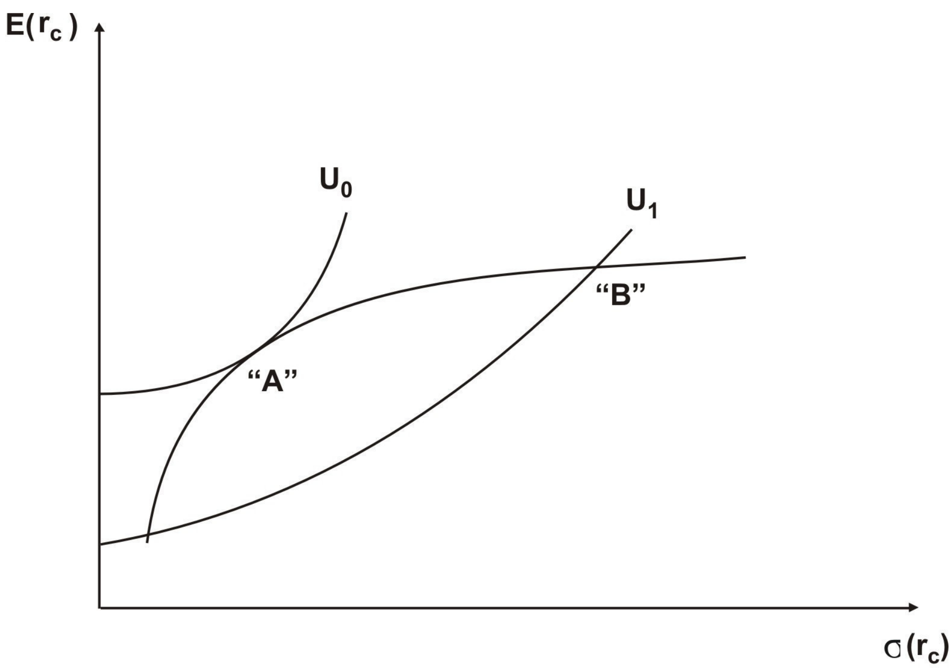
b) La pendiente es de forma creciente: esto ocurre dado que un inversionista a medida que asume un mayor riesgo exige una tasa de rentabilidad creciente, dado que el riesgo acumulado es cada vez mayor (ver nuevamente Gráfico VI.2)

Estas curvas de indiferencia cumplen con los postulados de la elección racional es decir, no se cortan, el número de curvas de indiferencia es ilimitado, etc. En esta sección hemos visto como se forman las curvas de indiferencia de un inversor adverso al riesgo, anteriormente se analizó como se forma la frontera eficiente o conjunto de carteras eficientes, tenemos pues todos los elementos para determinar la elección de la cartera óptima.

VI.3) ELECCIÓN DE LA CARTERA ÓPTIMA

Dada la restricción de una frontera eficiente y las preferencias de un inversor este buscará maximizar la utilidad esperada y esto ocurrirá ubicándose en la curva de indiferencia más alta alcanzable (Ver Gráfico VI.3)

GRÁFICO VI.3



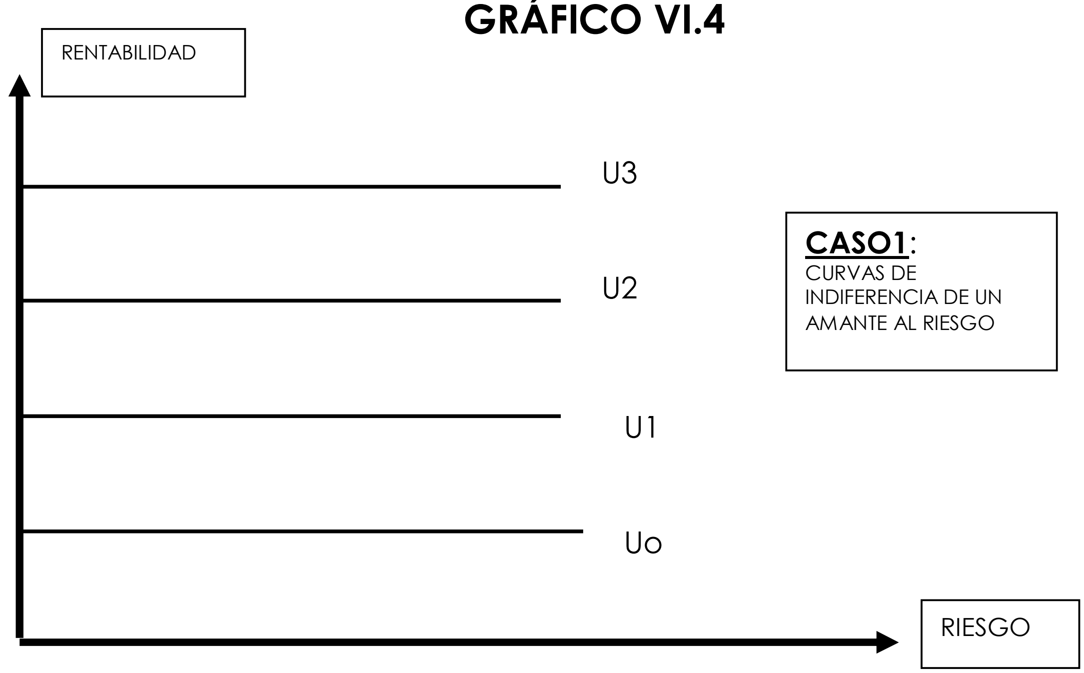
Elección de la cartera óptima

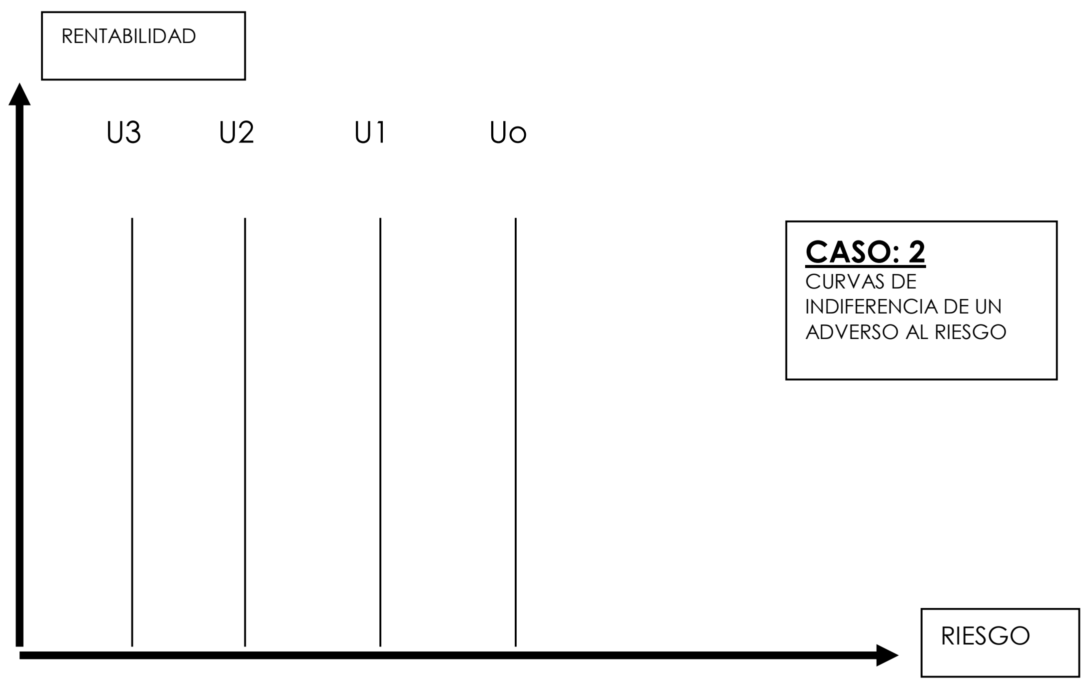
Vemos que la cartera óptima será "A" en el Gráfico VI.3, no se elegirá "B" a pesar de ser una cartera eficiente dado que con esa cartera el inversor no alcanza la máxima utilidad esperada ($U_1<U_0$ en el Gráfico VI.3).

Concluimos esta sección diciendo que en condiciones de incertidumbre la elección de una cartera óptima se hará en función de la maximización de la utilidad esperada que pueda alcanzar dicho inversionista, para esto es necesario conocer la frontera eficiente o conjunto de carteras eficientes (de ahí la importancia del análisis de cartera) y asimismo las preferencias de cada inversor para poder de esta manera elegir la "cartera óptima" para cada inversor.

Vemos pues que para la elaboración de una cartera, es necesario en primer lugar tener proyecciones de la rentabilidad y desviación estándar de los distintos activos de los cuales se piensa conformar una cartera así como las covarianzas entre los distintos activos, una vez obtenidos estos datos se busca el conjunto de carteras que obedezcan al criterio de eficiencia de Markowitz. Una vemos que tenemos estos elementos hallamos el conjunto de carteras eficientes, (la frontera eficiente), las cuales se determinan mediante los procedimientos que se exponen en los respectivos anexos. Una vez determinadas estas la elección de la cartera por parte de un inversionista depende de su grado de aversión al riesgo (si es amante al riesgo o si es adverso al riesgo), para que elija la cartera optima,

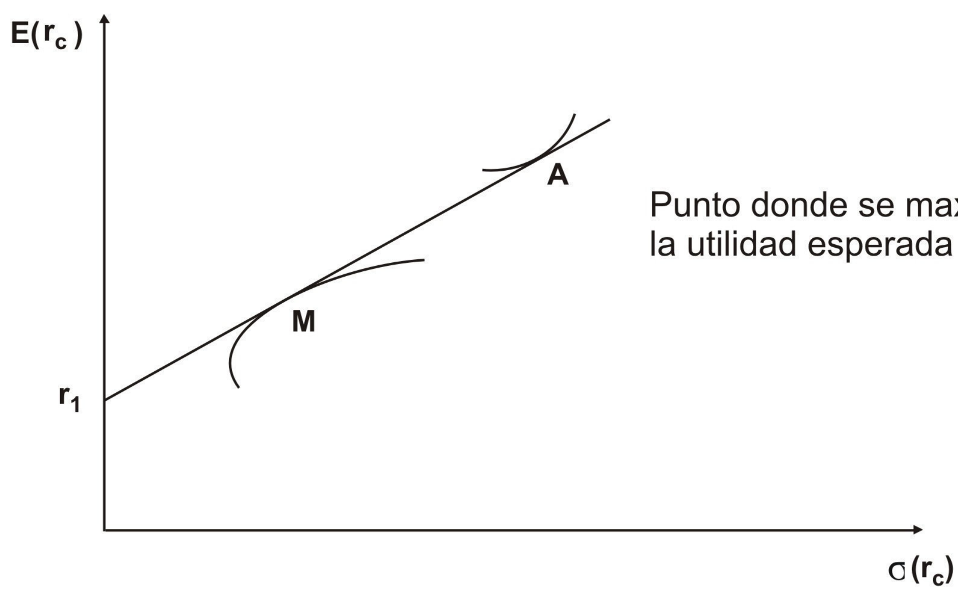
GRÁFICO VI.4


RENTABILIDAD
U3
U2
U1
Uo
CASO1:
CURVAS DE
INDIFERENCIA DE UN
AMANTE AL RIESGO
RIESGO


RENTABILIDAD
U3
U2
U1
Uo
CASO: 2
CURVAS DE
INDIFERENCIA DE UN
ADVERSO AL RIESGO
RIESGO

Dicho grado de aversión al riesgo dependerá de la función de utilidad de cada inversor. En el gráfico VI.5 se ve que cartera escogerá un inversor para el caso de carteras donde existe un activo sin riesgo.

GRÁFICO VI.5



Elección de la cartera óptima en un contexto donde existe un activo sin riesgo

CAPÍTULO VII

EVALUACIÓN EMPÍRICA DE LA TEORÍA DEL PORTAFOLIO DE MARKOWITZ AL CASO DE LA BOLSA DE VALORES DE LIMA

A fin de evaluar la teoría del portafolio de Markowitz, al caso de La Bolsa de Valores de Lima se han tomado ocho acciones elegidas al azar, todas ellas incluidas en la canasta que sirve para la elaboración del Índice General Bursátil de la Bolsa de Valores de Lima.

Se han elegido tres acciones del sector minero, una acción del sector financiero, una acción del sector servicios públicos, una acción del sector diversas y dos acciones del sector industrial. Las acciones elegidas son:

1. BANCO DE CREDITO	SECTOR FINANCIERO
2. GRAÑA Y MONTERO	SECTOR DIVERSAS
3. EDEGEL	SECTOR SERVICIOS PÚBLICOS
4. AUSTRAL	SECTOR INDUSTRIAL
5. ACEROS AREQUIPA	SECTOR INDUSTRIAL
6. ATACOCHA-INVERSIÓN	SECTOR MINERÍA
7. VOLCÁN-COMÚN	SECTOR MINERÍA
8. MINSUR-INVERSIÓN	SECTOR MINERÍA

Se debe indicar que en el presente trabajo a dichas acciones las reconoceremos con los siguientes números

1. BANCO DE CREDITO	ACCIÓN 1
2. GRAÑA Y MONTERO	ACCIÓN 2
3. EDEGEL	ACCIÓN 3
4. AUSTRAL	ACCIÓN 4
5. ACEROS AREQUIPA	ACCIÓN 5
6. ATACOCHA-INVERSIÓN	ACCIÓN 6
7. VOLCÁN-COMÚN	ACCIÓN 7
8. MINSUR-INVERSIÓN	ACCIÓN 8

El período de análisis está comprendido entre los años 1997 y 2005, comprendiendo dos períodos, uno con una tendencia bajista, entre los años 1997 y 2001, y otro con una tendencia alcista comprendida entre los años 2001 y 2005. La rentabilidad se ha medido en soles y con una periodicidad anual.

VII.1) ANÁLISIS DE LA RENTABILIDAD Y EL RIESGO DE LAS EMPRESAS

1) BANCO DE CRÉDITO

El BANCO DE CRÉDITO es una sociedad anónima constituida el tres de abril de 1889, cuyo objeto social es favorecer el desarrollo de las actividades comerciales y productivas en el Perú, con este fin esta facultado a captar y colocar recursos financieros y efectuar todo tipo de servicios bancarios y operaciones que corresponden a los bancos múltiples. El 20 de Octubre de

1995, Credicorp Ltd (constituida en las Bermudas) adquirió el 90.8% del Banco mediante oferta pública

Las rentabilidades obtenidas por el Banco de Crédito durante el período 1997-2005 son las siguientes:

BANCO DE CRÉDITO

PERÍODO	RENTABILIDADES ANUALES
1997	12.7%
1998	-35.4%
1999	57%
2000	-47.2%
2001	30.1%
2002	42.2%
2003	35.1%
2004	48.2%
2005	116.0%

De acuerdo a lo explicado por Markowitz una buena estimación de la rentabilidad esperada es el valor esperado de las rentabilidades, por lo tanto:

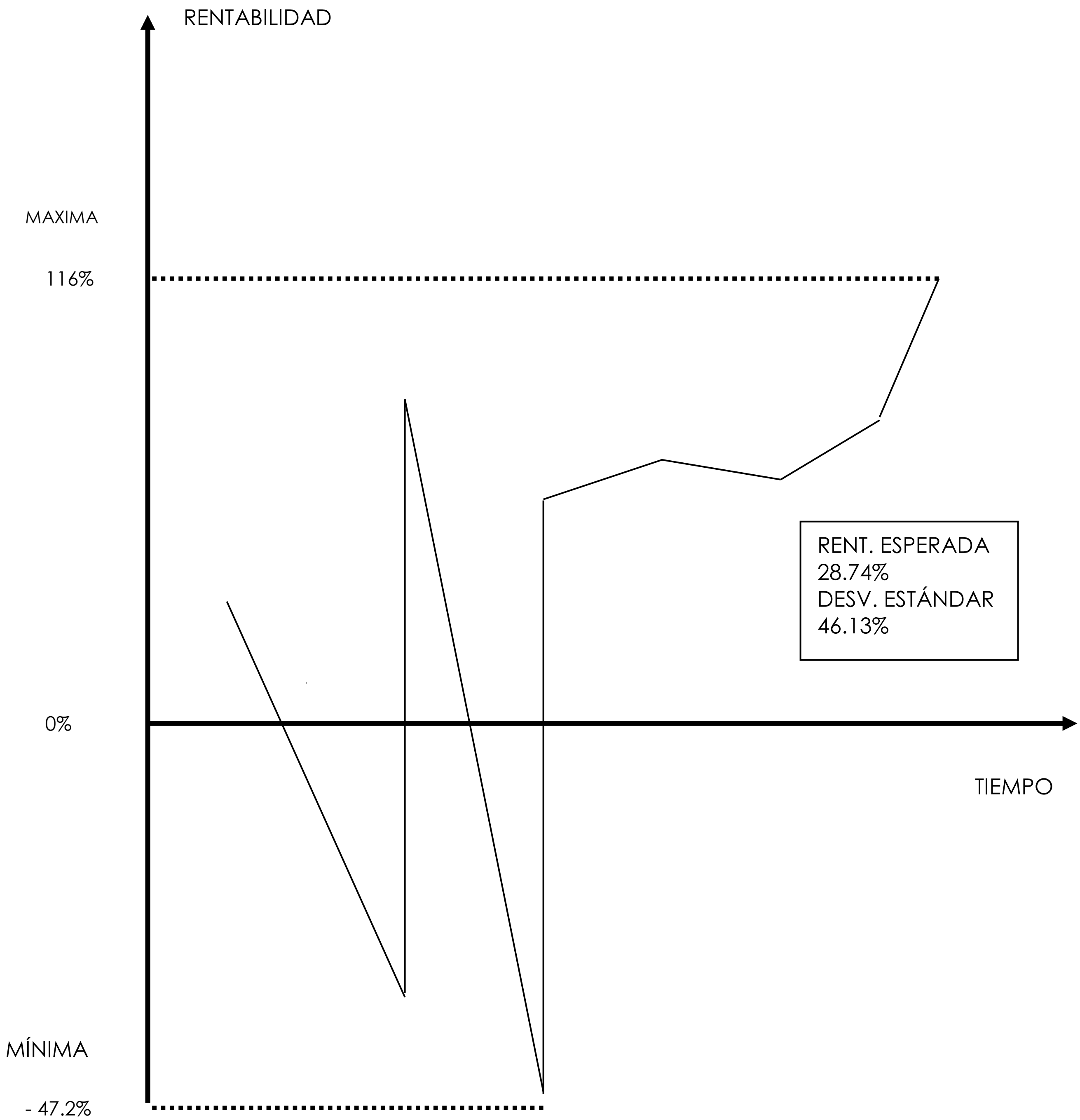
ESPERANZA DE LA RENTABILIDAD = 28.7%

Asimismo, tomamos la desviación estándar como una medida del riesgo de la acción de donde resulta:

DESVIACIÓN ESTÁNDAR (MEDIDA DEL RIESGO) = 46.13%

GRÁFICO VII.1

EVOLUCIÓN DE LA RENTABILIDAD DEL BANCO DE CRÉDITO



2) GRAÑA Y MONTERO S.A.A.

La empresa GRAÑA Y MONTERO realiza inversiones en empresas afiliadas y subsidiarias constituyéndose en la empresa holding del Grupo Graña y Montero, siendo su actividad principal la promoción, construcción y gerencia de proyectos de inversión en el área inmobiliaria. Adicionalmente presta servicios de asesoría

Las rentabilidades obtenidas por Graña y Montero S.A.A. durante el período 1997-2005 son las siguientes:

GRAÑA Y MONTERO S.A.A.

PERÍODO	RENTABILIDADES ANUALES
1997	-16.4%
1998	-20.6%
1999	-14.0%
2000	-68.3%
2001	-50.0%
2002	-27.3%
2003	312.5%
2004	157.6%
2005	-2.3%

De acuerdo a lo explicado por Markowitz una buena estimación de la rentabilidad esperada es el valor esperado de las rentabilidades, por lo tanto:

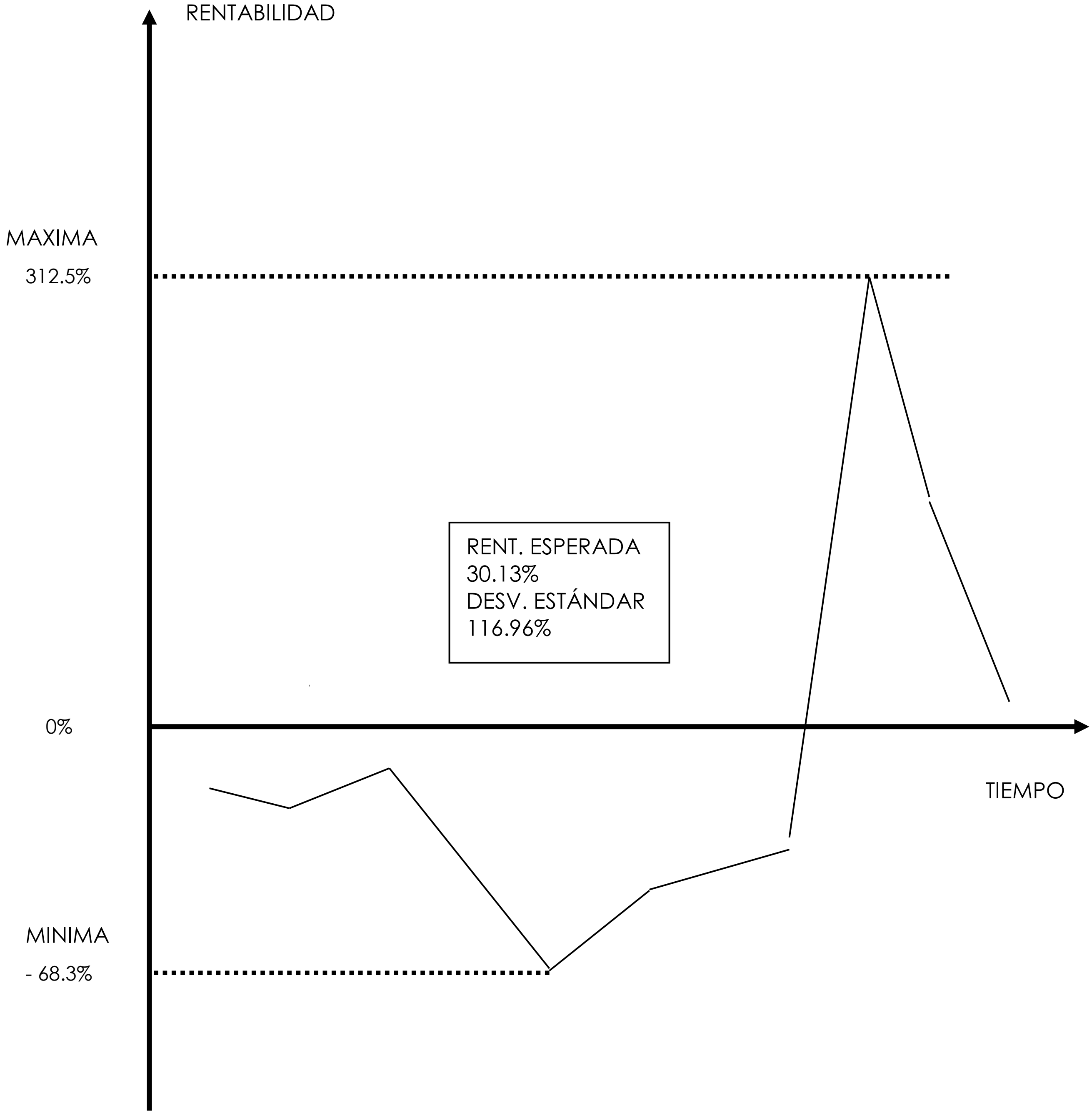
ESPERANZA DE LA RENTABILIDAD = 30.1%

Asimismo, tomamos la desviación estándar como una medida del riesgo de la acción de donde resulta:

DESVIACIÓN ESTÁNDAR (MEDIDA DEL RIESGO) = 117.0%

GRÁFICO VII.2

EVOLUCIÓN DE LA RENTABILIDAD DE GRAÑA Y MONTERO S.A.A.



3) EDEGEL S.A.A.

La empresa EDEGEL S.A.A. se dedica a la generación y a la venta de energía eléctrica
Las rentabilidades obtenidas por EDEGEL S.A.A. durante el período 1997-2005 son las siguientes:

EDEGEL S.A.A.

PERÍODO	RENTABILIDADES ANUALES
1997	-8.9%
1998	-24.8%
1999	0.0%
2000	32.8%
2001	6.3%
2002	36.4%
2003	38.0%
2004	45.3%
2005	-8.7%

De acuerdo a lo explicado por Markowitz una buena estimación de la rentabilidad esperada es el valor esperado de las rentabilidades, por lo tanto:

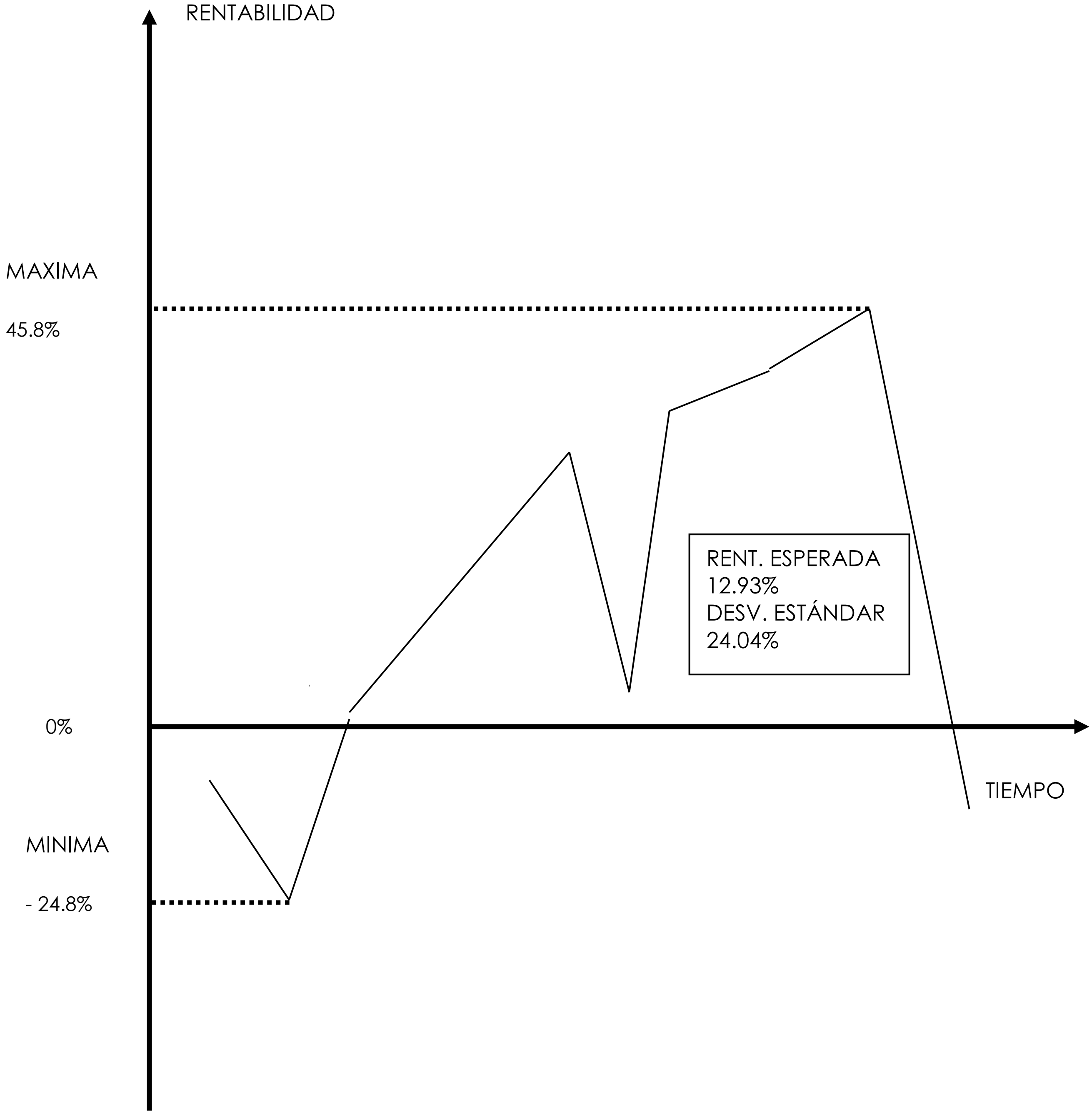
ESPERANZA DE LA RENTABILIDAD = 12.9%

Asimismo, tomamos la desviación estándar como una medida del riesgo de la acción de donde resulta:

DESVIACIÓN ESTÁNDAR (MEDIDA DEL RIESGO)= 24.0%

GRÁFICO VII.3

EVOLUCIÓN DE LA RENTABILIDAD DE EDEGEL S.A.A.



4) AUSTRAL S.A.A.

Empresa peruana dedicada a la extracción de pescado y producción de derivados de pescado. La costa peruana es uno de los mares más ricos del mundo y provee una enorme oferta de pescados.

Las rentabilidades obtenidas por AUSTRAL durante el período 1997-2005 son las siguientes:

AUSTRAL S.A.A.

PERÍODO	RENTABILIDADES ANUALES
1997	-19.4%
1998	-39.8%
1999	-73.0%
2000	-70.0%
2001	-28.6%
2002	-40.0%
2003	110.0%
2004	28.6%
2005	137.8%

De acuerdo a lo explicado por Markowitz una buena estimación de la rentabilidad esperada es el valor esperado de las rentabilidades, por lo tanto:

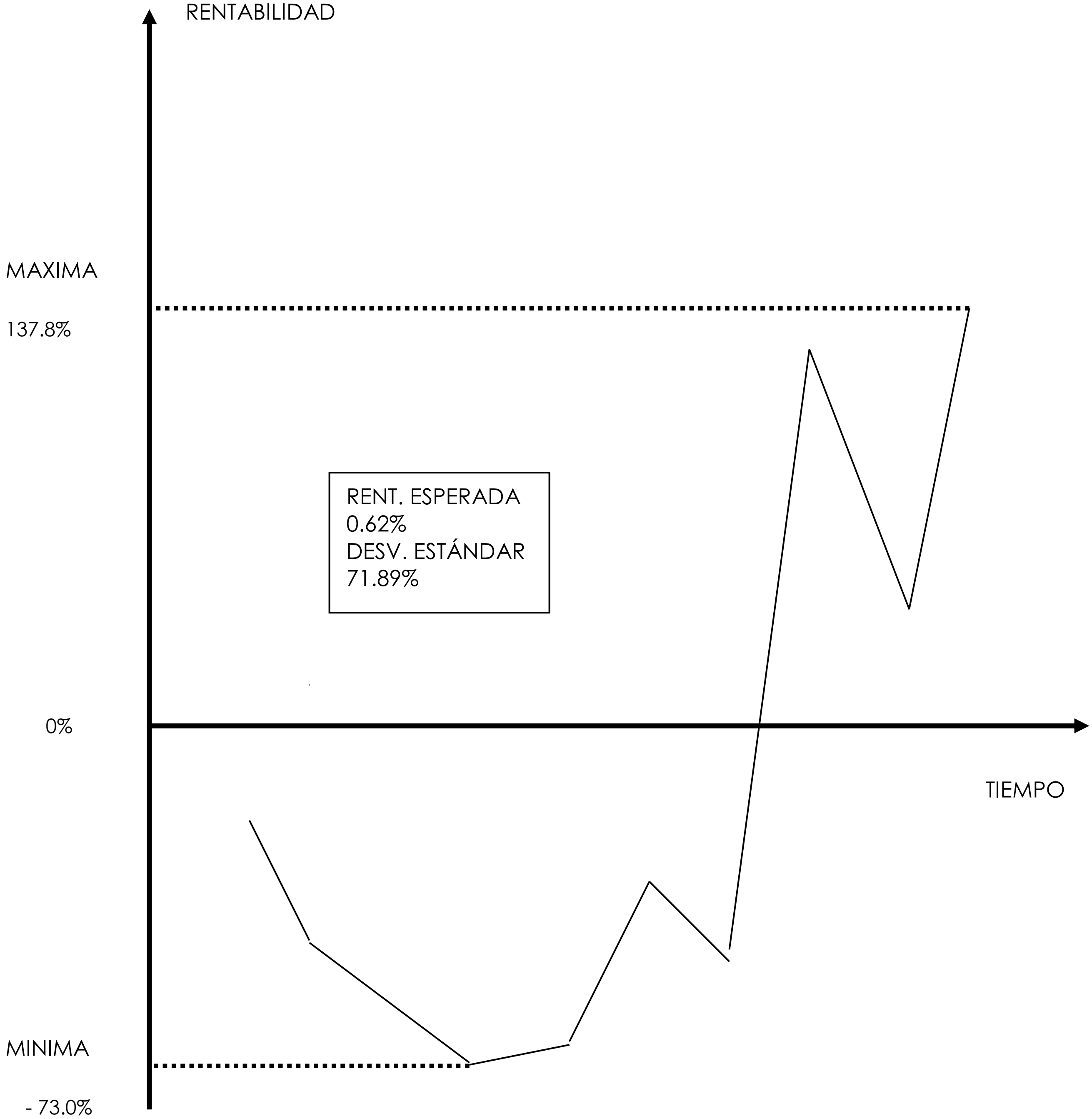
ESPERANZA DE LA RENTABILIDAD = 0.6%

Asimismo, tomamos la desviación estándar como una medida del riesgo de la acción de donde resulta:

DESVIACIÓN ESTÁNDAR (MEDIDA DEL RIESGO) = 71.9%

GRÁFICO VII.4

EVOLUCIÓN DE LA RENTABILIDAD DE AUSTRAL



5) CORPORACIÓN ACEROS AREQUIPA S. A.

Empresa que se dedica a la fabricación de productos primarios de hierro y acero.

Las rentabilidades obtenidas por LA CORPORACIÓN ACEROS AREQUIPA durante el período 1997-2005 son las siguientes:

ACEROS AREQUIPA S. A.

PERÍODO	RENTABILIDADES ANUALES
1997	118.1%
1998	-34..6%
1999	-20.1%
2000	45.7%
2001	47.0%
2002	27.7%
2003	47.5%
2004	219.5%
2005	-6.3%

De acuerdo a lo explicado por Markowitz una buena estimación de la rentabilidad esperada es el valor esperado de las rentabilidades, por lo tanto:

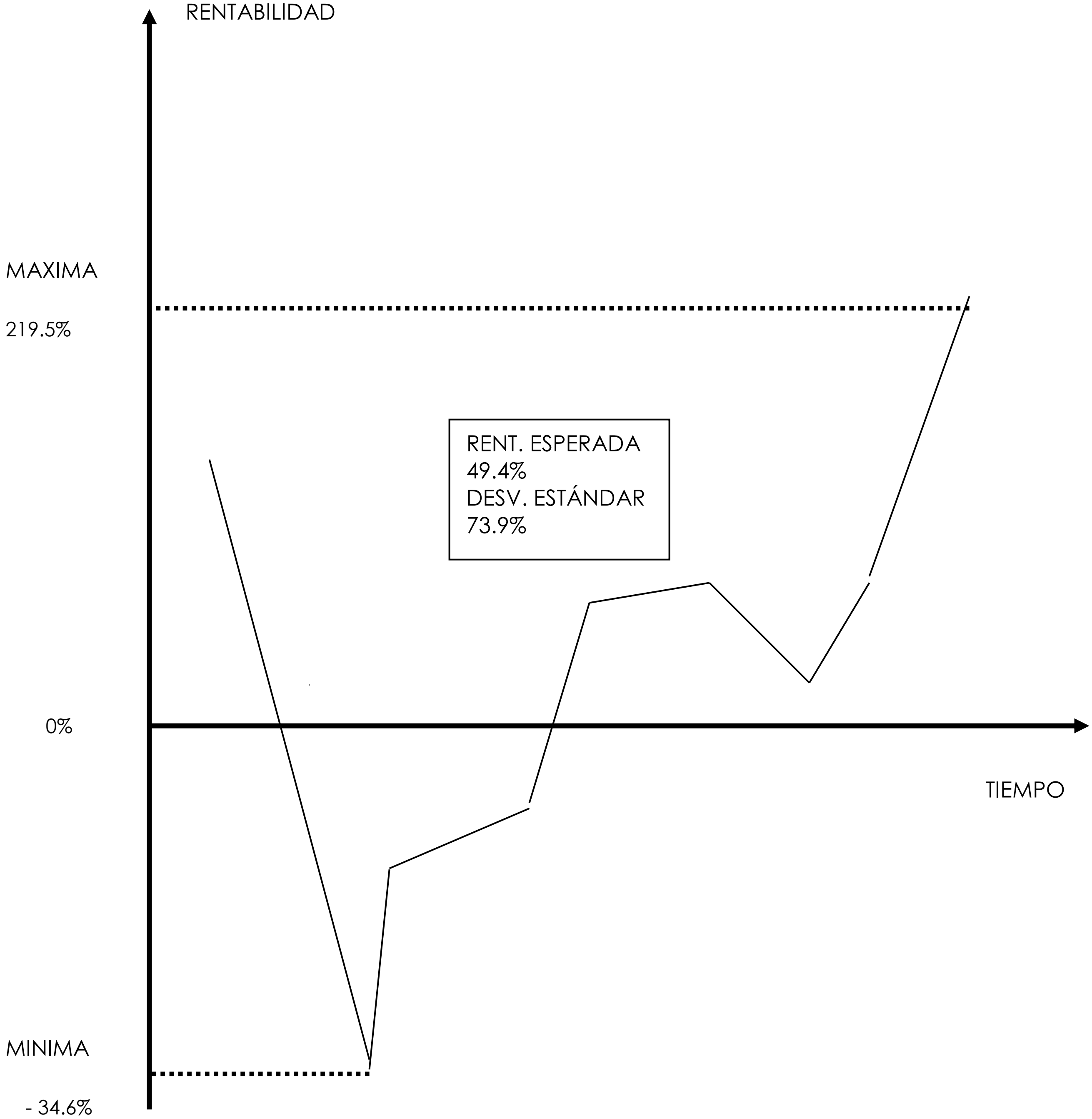
ESPERANZA DE LA RENTABILIDAD = 49.4%

Asimismo, tomamos la desviación estándar como una medida del riesgo de la acción de donde resulta:

DESVIACIÓN ESTÁNDAR (MEDIDA DEL RIESGO) = 73.9%

GRÁFICO VII.5

EVOLUCIÓN DE LA RENTABILIDAD DE ACEROS AREQUIPA



6) COMPAÑÍA MINERA ATACOCHA S. A.

Empresa que se dedica a la explotación y aprovechamiento de todas las minas o demás concesiones de las que sea titular o arrendataria.

Las rentabilidades obtenidas por las acciones de inversión de LA COMPAÑÍA MINERA ATACOCHA durante el período 1997-2005 son las siguientes:

ATACOCHA S. A. - INVERSIONES

PERÍODO	RENTABILIDADES ANUALES
1997	101.3%
1998	-21.2%
1999	-10.0%
2000	-62.5%
2001	-48.1%
2002	68.8%
2003	369,0%
2004	104.9%
2005	45.6%

De acuerdo a lo explicado por Markowitz una buena estimación de la rentabilidad esperada es el valor esperado de las rentabilidades, por lo tanto:

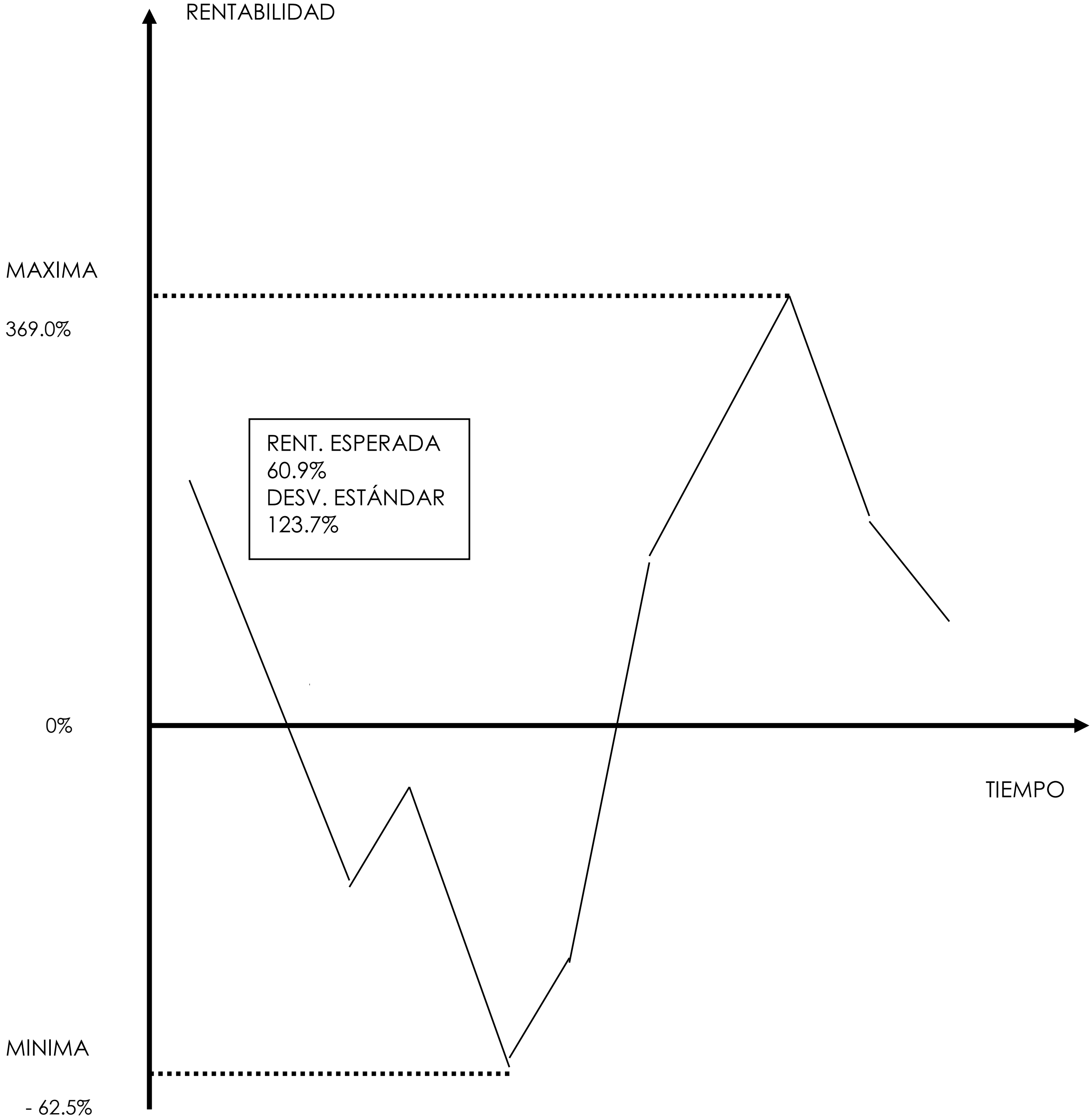
ESPERANZA DE LA RENTABILIDAD = 60.9%

Asimismo, tomamos la desviación estándar como una medida del riesgo de la acción de donde resulta:

DESVIACIÓN ESTÁNDAR (MEDIDA DEL RIESGO) = 123.7%

GRÁFICO VII.6

EVOLUCIÓN DE LA RENTABILIDAD DE ATACOCHA-INVERSIONES



7) COMPAÑÍA MINERA VOLCAN S. A.

Empresa que se dedica a la extracción de minerales metalíferos no ferrosos excepto minerales de Uranio.

Las rentabilidades obtenidas por las acciones comunes de LA COMPAÑÍA MINERA VOLCAN S.A. durante el período 1997-2005 son las siguientes:

VOLCAN S. A. ACCIONES COMUNES

PERÍODO	RENTABILIDADES ANUALES
1997	683.6%
1998	-52.2%
1999	93.1%
2000	-2.0%
2001	48.4%
2002	-67.1%
2003	17.4%
2004	86.4%
2005	52.3%

De acuerdo a lo explicado por Markowitz una buena estimación de la rentabilidad esperada es el valor esperado de las rentabilidades, por lo tanto:

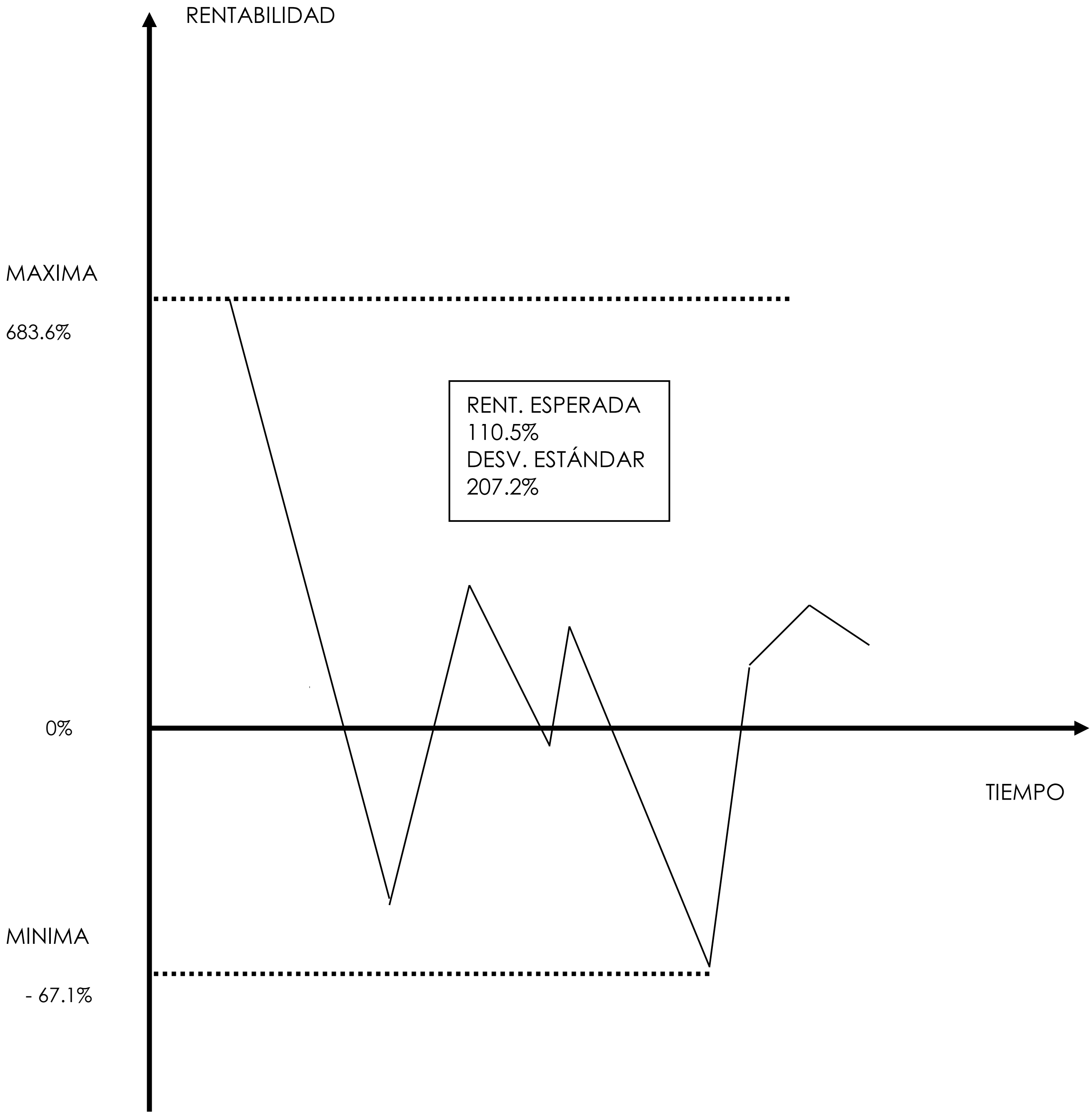
ESPERANZA DE LA RENTABILIDAD = 110.5%

Asimismo, tomamos la desviación estándar como una medida del riesgo de la acción de donde resulta:

DESVIACIÓN ESTÁNDAR (MEDIDA DEL RIESGO) = 207.2%

GRÁFICO VII.7

EVOLUCIÓN DE LA RENTABILIDAD DE VOLCAN-COMUNES



8) COMPAÑÍA MINERA DEL SUR- ACCIONES DE INVERSIÓN

Empresa que se dedica a todas las actividades propias de la actividad minera incluyendo explotación, comercialización y ventas
Las rentabilidades obtenidas por las acciones de inversión de LA COMPAÑÍA MINERA DEL SUR (MINSUR) durante el período 1997-2005 son las siguientes:

MINSUR S. A. – ACCIONES DE INVERSION

PERÍODO	RENTABILIDADES ANUALES
1997	-34.6%
1998	15.8%
1999	63.3%
2000	-19.7%
2001	-17.1%
2002	106.0%
2003	75.8%
2004	62.7%
2005	-14.4%

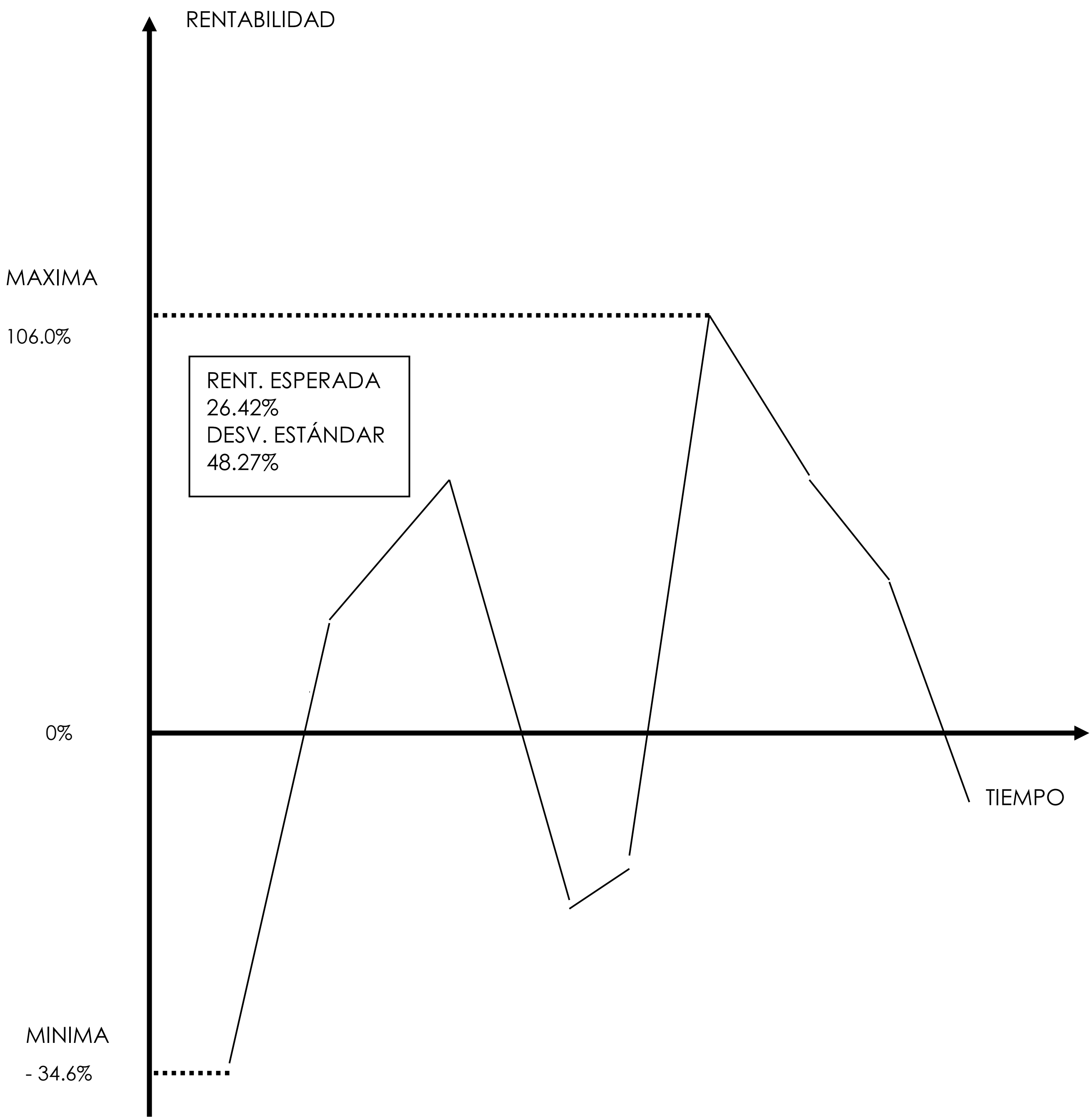
De acuerdo a lo explicado por Markowitz una buena estimación de la rentabilidad esperada es el valor esperado de las rentabilidades, por lo tanto:
ESPERANZA DE LA RENTABILIDAD = 26.4%

Asimismo, tomamos la desviación estándar como una medida del riesgo de la acción de donde resulta:

DESVIACIÓN ESTÁNDAR (MEDIDA DEL RIESGO) = 148.3%

GRÁFICO VII.8

EVOLUCIÓN DE LA RENTABILIDAD DE MINSUR-INVERSIONES



Del análisis de títulos resulta que los activos más rentables en el período 1997-2005 han sido

RANKING DE RENTABILIDAD	**ACCIÓN**	**RENTABILIDAD**
1º	VOLCAN	110.5%
2º	ATACOCHA	60.9%
3º	ACEROS AREQUIPA	49.4%
4º	GRAÑA Y MONTERO	30.1%
5º	BANCO DE CREDITO	28.7%
6º	MINSUR	26.4%
7º	EDEGEL	12.9%
8º	AUSTRAL	0.6%

Igualmente si hacemos un ranking de las más riesgosas, medido el riesgo por la desviación estándar:

RANKING DE RIESGO	**ACCIÓN**	**RIESGO**
1º	VOLCAN	207.2%
2º	ATACOCHA	123.7%
3º	GRAÑA Y MONTERO	117.0%
4º	ACEROS AREQUIPA	73.9%
5º	AUSTRAL	71.9%
6º	MINSUR	48.3%
7º	BANCO DE CREDITO	46.1%
8º	EDEGEL	24.0%

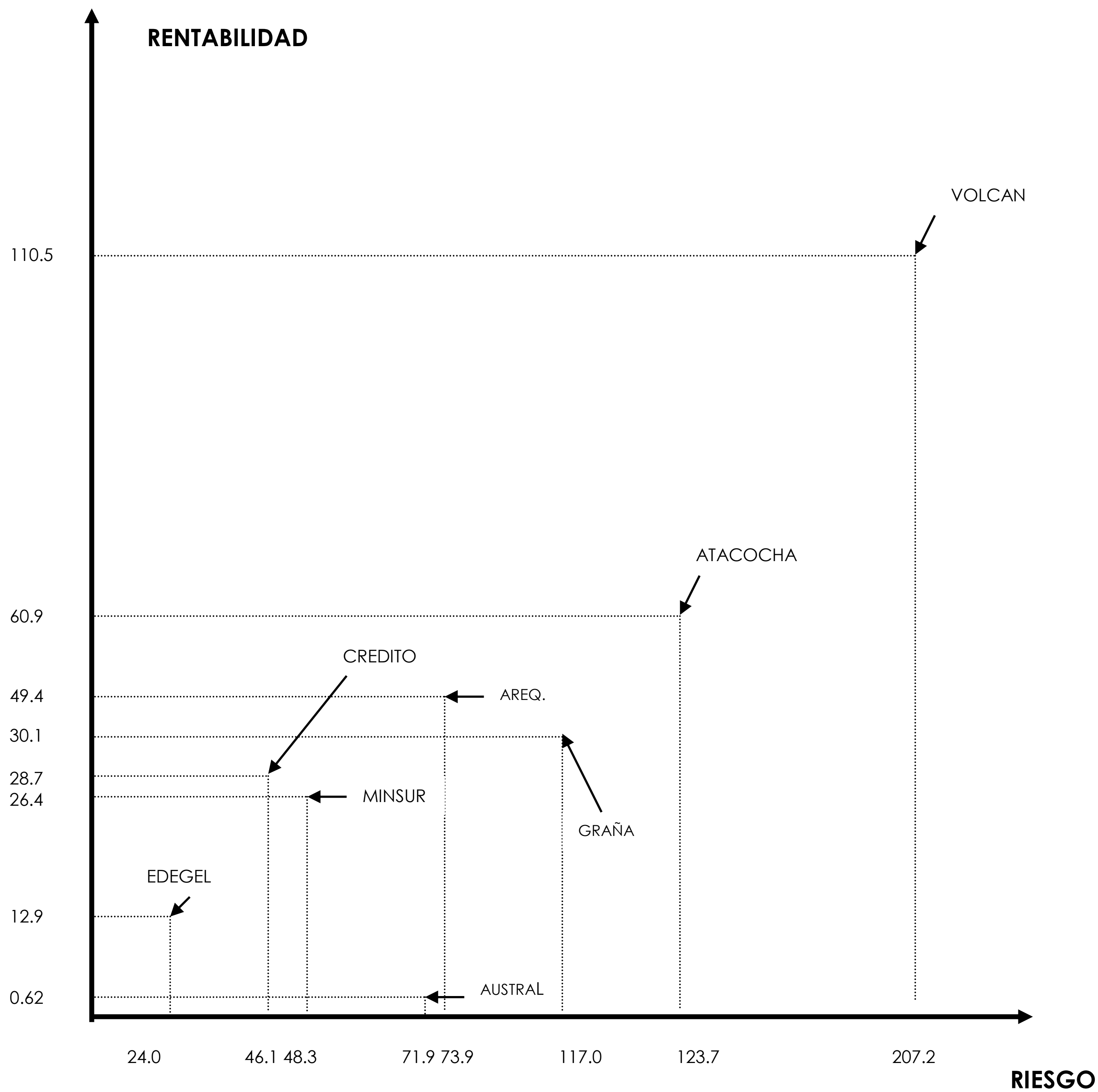
Encontramos que de la muestra tomada en el presente estudio, las acciones de VOLCAN, son las mas rentables en el período 1997-2005, con una rentabilidad de 110.5% promedio anual, pero a su vez las más riesgosas, con una desviación estándar de 207.2%, Seguidas por las acciones de ATACOCHA con una rentabilidad promedio de 60.9% anual, siendo estas acciones las segundas más riesgosas con una desviación estándar de 123.7%.

Las acciones menos rentables son las de la empresa AUSTRAL con una rentabilidad de 0.6% anual, y una desviación estándar de 71.9%, seguidas por la s acciones de la empresa EDEGEL que ofrecen una rentabilidad de 12.9% anual, debiéndose señalar que estas acciones son las que han mostrado un menor riesgo siendo su desviación estándar de 24.0%

Se observa que todas las acciones en el largo plazo han mostrado un crecimiento positivo, lo que avala la teoría fundamental que en el largo plazo las cotizaciones de las acciones deben reflejar el crecimiento de la economía (donde un componente de este crecimiento son las ganancias de las empresas)

GRÁFICO VII.9

DIAGRAMA RENTABILIDAD RIESGO



El diagrama rentabilidad- riesgo nos muestra que cinco de la s acciones estudiadas son títulos superiores Y tres son títulos inferiores

TITULOS SUPERIORES

Los títulos superiores son

1. EDEGEL
2. BANCO DE CREDITO
3. ACEROS AREQUIPA
4. ATACOCHA-INVERSIONES
5. VOLCAN-COMUNES

Esto es así puesto que para cada nivel de riesgo de cada uno de los títulos superiores, no se encuentra una mayor rentabilidad (si un inversionista quiere mayor rentabilidad tiene que asumir un mayor riesgo). LOS TÍTULOS SUPERIORES SON IMPORTANTES TENERLOS EN CUENTA POR QUE NOS BRINDAN LA MÁXIMA RENTABILIDAD QUE NOS OFRECE EL MERCADO SI INVERTIMOS EN ACTIVOS DE MANERA INDIVIDUAL SIN CONSIDERAR LA DIVERSIFICACIÓN, COMO UNA ESTRATEGIA PARA MINIMIZAR RIESGO, LO QUE CONSIDERAMOS UN ERROR PUESTO QUE DIVERSIFICANDO ALCANZAREMOS MAYORES NIVELES DE RENTABILIDAD DADO LOS MISMOS NIVELES DE RIESGO. LO QUE DEMOSTRAREMOS POSTERIORMENTE.

En nuestra investigación **EDEGEL** ofrece un rentabilidad de 12.9% y un riesgo de 24,0%, es decir cualquier inversionista que quiera obtener una mayor rentabilidad a 12.9% deberá necesariamente arriesgar mas (Por ejemplo comprar acciones del BANCO DE CRÉDITO, que ofrecen un mayor rentabilidad pero a un mayor riesgo) o lo que es lo mismo cualquier inversionista que quiera asumir un riesgo menor a 12.9% tendrá que sacrificar rentabilidad (Por ejemplo depositar su dinero en el banco, donde le ofrecen un menor riesgo pero también una menor rentabilidad). POR LO TANTO, DADO UN RIESGO DE 24.0% LA MÁXIMA RENTABILIDAD QUE SE PUEDE OBTENER SI SE INVIERTE EN ACTIVOS DE MANERA INDIVIDUAL (SIN CONSIDERAR LA DIVERSIFICACIÓN) ES 12.9%, O LO QUE ES LO MISMO, DADA UNA RENTABILIDAD DE 12.9% EL MÍNIMO RIESGO QUE OFRECE EL MERCADO ES DE 24.0%, Esto es en esencia el espíritu de lo que nos muestra los títulos superiores

El segundo título superior que encontramos en nuestra investigación es **EL BANCO DE CRÉDITO**, el cual ofrece un rentabilidad de 28.7% y un riesgo de 46.1%, es decir cualquier inversionista que quiera obtener una mayor rentabilidad a 28.7% deberá necesariamente arriesgar mas (Por ejemplo comprar acciones de la empresa ATACOCHA, que ofrecen una mayor rentabilidad pero a un mayor riesgo) o lo que es lo mismo cualquier inversionista que quiera asumir un riesgo menor a 46.1% tendrá que sacrificar rentabilidad.(Por ejemplo comprar acciones de EDEGEL, donde se le ofrecen un menor riesgo pero también una menor rentabilidad). POR LO TANTO, DADO UN RIESGO DE 46.1% LA MÁXIMA RENTABILIDAD QUE SE PUEDE OBTENER SI SE INVIERTE EN ACTIVOS DE DE MANERA INDIVIDUAL (SIN CONSIDERAR LA DIVERSIFICACIÓN) ES 28.7%, O LO QUE ES LO MISMO, DADA UNA RENTABILIDAD DE 28.7% EL MÍNIMO RIESGO QUE OFRECE EL MERCADO ES DE 46.1%.

El tercer título superior que encontramos en nuestra investigación es **ACEROS AREQUIPA**, el cual ofrece un rentabilidad de 49.4% y un riesgo de 73.9%, es decir cualquier inversionista que quiera obtener una mayor rentabilidad a

49.4% deberá necesariamente arriesgar mas (Por ejemplo comprar acciones de la empresa ATACOCHA, que ofrecen una mayor rentabilidad pero a un mayor riesgo) o lo que es lo mismo cualquier inversionista que quiera asumir un riesgo menor a 73.9% tendrá que sacrificar rentabilidad.(Por ejemplo comprar acciones de EDEGEL, donde se le ofrecen un menor riesgo pero también una menor rentabilidad). POR LO TANTO, DADO UN RIESGO DE 73.9% LA MÁXIMA RENTABILIDAD QUE SE PUEDE OBTENER SI SE INVIERTE EN ACTIVOS DE DE MANERA INDIVIDUAL (SIN CONSIDERAR LA DIVERSIFICACIÓN) ES 49.4%, O LO QUE ES LO MISMO, DADA UNA RENTABILIDAD DE 49.4% EL MÍNIMO RIESGO QUE OFRECE EL MERCADO ES DE 73.9%.

El cuarto título superior que encontramos en nuestra investigación son las acciones de la empresa **ATACOCHA**, el cual ofrece un rentabilidad de 60.9% y un riesgo de 123.7%, es decir cualquier inversionista que quiera obtener una mayor rentabilidad a 60.9% deberá necesariamente arriesgar mas (Por ejemplo comprar acciones de la empresa VOLCAN, que ofrecen una mayor rentabilidad pero a un mayor riesgo) o lo que es lo mismo cualquier inversionista que quiera asumir un riesgo menor a 123.7% tendrá que sacrificar rentabilidad.(Por ejemplo comprar acciones del BANCO DE CREDITO, donde se le ofrecen un menor riesgo pero también una menor rentabilidad). POR LO TANTO, DADO UN RIESGO DE 123.7% LA MÁXIMA RENTABILIDAD QUE SE PUEDE OBTENER SI SE INVIERTE EN ACTIVOS DE MANERA INDIVIDUAL (SIN CONSIDERAR LA DIVERSIFICACIÓN) ES 60.9%, O LO QUE ES LO MISMO, DADA UNA RENTABILIDAD DE 60.9% EL MÍNIMO RIESGO QUE OFRECE EL MERCADO ES DE 123.7%.

El Quinto título superior que encontramos en nuestra investigación son las acciones de la empresa **VOLCAN**, las cuales ofrece un rentabilidad de 110.5% y un riesgo de 207.2%, es decir cualquier inversionista que quiera obtener una mayor rentabilidad a 110.5% deberá necesariamente arriesgar mas, en nuestra investigación VOLCAN es el activo más rentable y más riesgosos que se obtiene o lo que es lo mismo cualquier inversionista que quiera asumir un riesgo menor a 207.16% tendrá que sacrificar rentabilidad. (Por ejemplo comprar acciones de ATACOCHA, donde se le ofrecen un menor riesgo pero también una menor rentabilidad). POR LO TANTO, DADO UN RIESGO DE 207.2% LA MÁXIMA RENTABILIDAD QUE SE PUEDE OBTENER SI SE INVIERTE EN ACTIVOS DE MANERA INDIVIDUAL (SIN CONSIDERAR LA DIVERSIFICACIÓN) ES 110.5%, O LO QUE ES LO MISMO, DADA UNA RENTABILIDAD DE 110.5% EL MÍNIMO RIESGO QUE OFRECE EL MERCADO ES DE 207.2%.

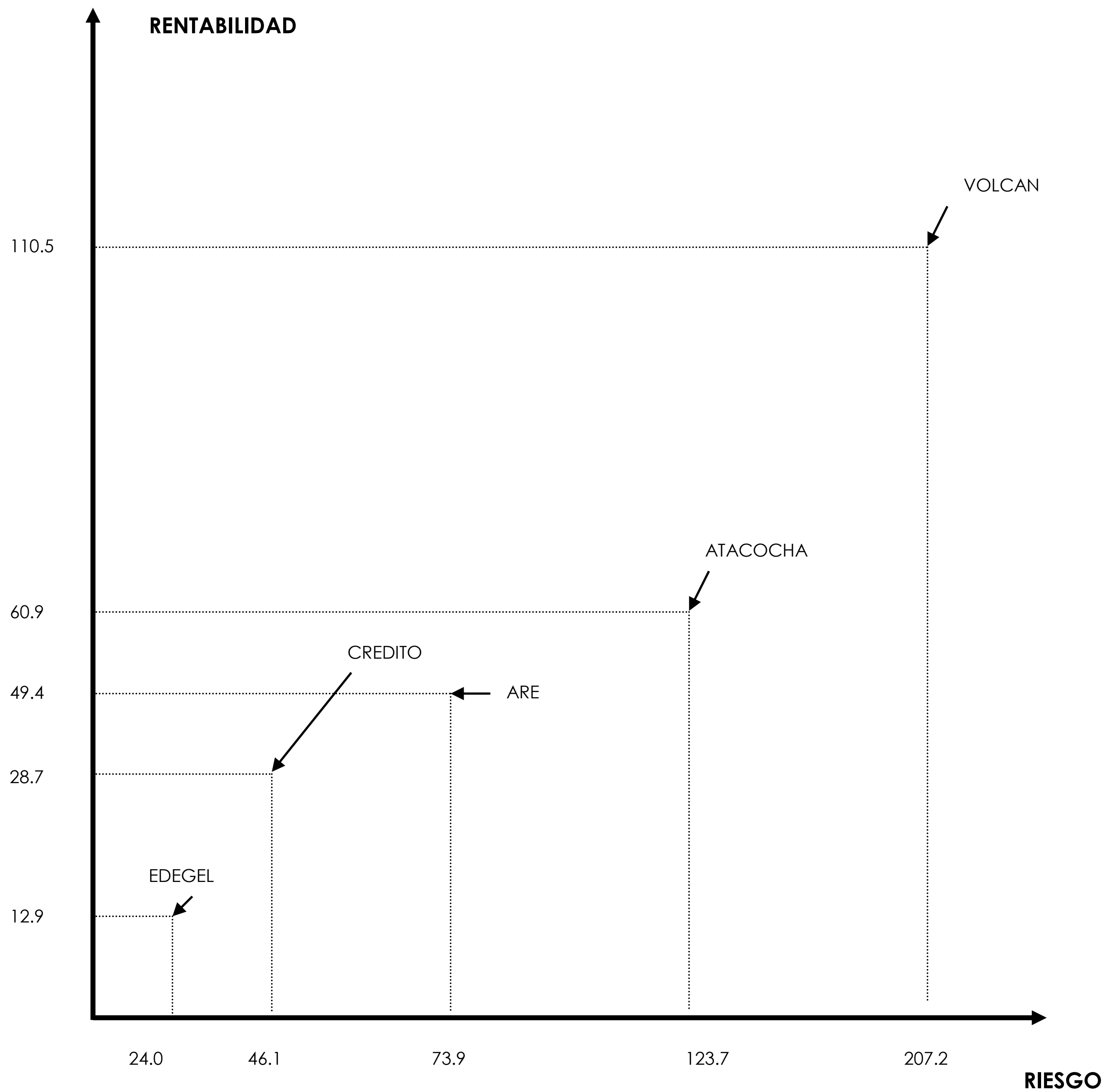
En esta parte de la investigación no quedamos con el mensaje que tenemos cinco acciones superiores con las siguientes características:

ACCIONES SUPERIORES

ACCIONES	**RENTABILIDAD ANUAL**	**RIESGO**
EDEGEL	12.9%	24.0%
BANCO DE CREDITO	28.7%	46.1%
ACEROS AREQUIPA	49.4%	73.9%
ATACOCHA	60.9%	123.7%
VOLCAN	110.5%	207.2%

GRÁFICO VII.10

RENTABILIDAD Y RIESGO DE LOS TÍTULOS SUPERIORES



TITULOS INFERIORES

Los títulos inferiores encontrados en la presente investigación son:

1. MINSUR
2. AUSTRAL
3. GRAÑA Y MONTERO

En el caso de MINSUR, cuyas acciones presentan una rentabilidad de 26.4% y un riesgo de 48.3%, este título es inferior por que el mercado nos ofrece un título con mayor rentabilidad y menor riesgo como es el caso del BANCO DE CREDITO que nos ofrece una rentabilidad de 28.7%, asumiendo un menor riesgo de 46.1%.

Para el caso de GRAÑA Y MONTERO, cuyas acciones presentan una rentabilidad de 30.1% y un riesgo de 117.0%, este título es inferior por que el mercado nos ofrece un título con mayor rentabilidad y menor riesgo como es el caso del ACEROS AREQUIPA que nos ofrece una rentabilidad de 49.4%, asumiendo un menor riesgo de 73.9%.

Finalmente el caso de AUSTRAL, cuyas acciones presentan una rentabilidad de 0.6% y un riesgo de 71.9%, este título es inferior por que el mercado nos ofrece un título con mayor rentabilidad y menor riesgo como es el caso del BANCO DE CREDITO que nos ofrece una rentabilidad de 28.7%, asumiendo un menor riesgo de 46.1%.

Parecería, inapropiado usar estos títulos en el análisis de cartera, dado que existen títulos que ofrecen mayor rentabilidad y menor riesgo, pero esto no sería correcto puesto que falta hacer el análisis de sus tendencias, o lo que es lo mismo el grado de cavariabilidad que tienen estas acciones, con el resto de valores, utilizados en la presente investigación.

VII.2) ANÁLISIS DE LA COVARIANZA Y EL GRADO DE CORRELACIÓN ENTRE LAS RENTABILIDADES DE LAS ACCIONES

Tal como se explico anteriormente a fin de obtener el conjunto de carteras eficientes, no sólo basta tener una aproximación de la rentabilidad y riesgo de los activos de manera individual, sino también saber el grado de covariabilidad que existe entre los mismos, para lo cual tomaremos los indicadores vistos en el Capítulo III, o sea la Covarianza y el Grado de Correlación entre los activos estudiados, veamos los resultados de determinar dichos indicadores:

MATRIZ DE COVARIANZAS

	N=1	N=2	N=3	N=4	N=5	N=6	N=7	N=8
COV(1,N)	2128.13	1199.09	11.63	2091.11	82.78	1491.56	276.26	519.40
COV(2,N)	1199.09	13680.63	1403.81	5317.70	3209.57	13215.88	-2953.07	2788.76
COV(3,N)	11.63	1403.81	577.90	159.09	962.74	1229.76	-1204.96	643.45
COV(4,N)	2091.11	5317.70	159.09	5167.85	584.45	5793.35	-1215.04	116.50
COV(5,N)	82.78	3209.57	962.74	584.45	5459.60	2544.16	6119.37	115.13
COV(6,N)	1491.56	13215.88	1229.76	5973.35	2544.16	15296.23	3244.34	2698.92
COV(7,N)	276.26	-2953.07	-1204.96	-1215.04	6119.37	3244.34	42916.61	-3615.89
COV(8,N)	519.40	2788.76	643.45	116.50	115.13	2698.92	-3615.89	2330.14

Sabemos que:

ACCIÓN 1= BANCO DE CRÉDITO, ACCIÓN 2= GRAÑA Y MONTERO, ACCIÓN 3 = EDEGEL, ACCIÓN 4 = AUSTRAL, ACCIÓN 5 = ACEROS AREQUIPA, ACCIÓN 6 = ATACOCHA, ACCIÓN 7= VOLCAN, ACCIÓN 8= MINSUR.

MATRIZ DE GRADOS DE CORRELACIÓN

	N=1	N=2	N=3	N=4	N=5	N=6	N=7	N=8
G.C.(1,N)	1.000	0.222	0.010	0.631	0.024	0.261	0.029	0.233
G,C.(2,N)	0.222	1.000	0.499	0.632	0.371	0.914	-0.122	0.494
G.C.(3,N)	0.010	0.499	1.000	0.092	0.542	0.414	-0.242	0.554
G.C.(4,N)	0.631	0.632	0.092	1.000	0.110	0.652	-0.082	0.034
G.C.(5,N)	0.024	0.371	0.542	0.110	1.000	0.278	0.400	0.032
G.C.(6,N)	0.261	0.914	0.414	0.652	0.278	1.000	0.127	0.452
G.C.(7,N)	0.029	-0.122	-0.242	-0.082	0.400	0.127	1.000	-0.362
G.C.(8,N)	0.233	0.494	0.554	0.034	0.032	0.452	-0.362	1.000

1) ANÁLISIS DE LA COVARIANZA DEL BANCO DE CREDITO

El análisis del grado de correlación entre la rentabilidad del BANCO DE CREDITO y el resto de acciones nos muestra que la acción con que tienen una mayor grado de correlación es con AUSTRAL, siendo su grado de correlación de 0.631, (ESTO NOS INDICA QUE NO SERÍA RECOMENDABLE CONSTITUIR PORTAFOLIOS CON ESTAS DOS ACCIONES PUESTO QUE LA DIVERSIFICACIÓN NO ES TAN EFICAZ EN RELACION A CUANDO LOS ACTIVOS TIENEN UN GRADO DE CORRELACIÓN PEQUEÑO, MEJOR AUN NEGATIVO), mientras que el menor grado de correlación es con ACEROS AREQUIPA, siendo esta de 0.024, (CUMPLE LAS CONDICIONES PARA CONSTITUIR PORTAFOLIOS). En general las acciones del BANCO DE CREDITO se pueden considerar un buen activo para constituir una cartera dado que los grados de correlación que posee son bajos con el resto de las acciones, tal como se observa en el cuadro anterior

2) ANÁLISIS DE LA COVARIANZA DE LAS ACCIONES DE GRAÑA Y MONTERO

El análisis del grado de correlación entre la rentabilidad de GRAÑA Y MONTERO y el resto de acciones nos muestra que la acción con que tienen una mayor grado de correlación es con ATACOCHA, siendo su grado de correlación de 0.914, mientras que el menor grado de correlación es con VOLCAN, siendo esta de –0.012, (CUMPLE LAS CONDICIONES PARA CONSTITUIR PORTAFOLIOS PUESTO QUE LO QUE SE BUSCA SON ACCIONES QUE TENGAN UN GRADO DE CORRELACION NEGATIVA). En general las acciones de la empresa GRAÑA Y MONTERO no cumple con los requisitos para constituir una cartera dado que los grados de correlación que posee son relativamente altos con el resto de las acciones, a excepción de su covariabilidad con VOLCAN, tal como se observa en el cuadro que muestra los grados de correlación

3) ANÁLISIS DE LA COVARIANZA DE LAS ACCIONES DE EDEGEL

El análisis del grado de correlación entre la rentabilidad de EDEGEL y el resto de acciones nos muestra que la acción con que tienen un mayor grado de correlación es con MINSUR, siendo su grado de correlación de 0.554, mientras que el menor grado de correlación es con VOLCAN, siendo esta de –0.242. En general se observa que las acciones de la empresa EDEGEL cumple con los requisitos para constituir una cartera dado que los grados de correlación que posee son relativamente bajos con el resto de las acciones, tal como se observa en el cuadro que muestra los grados de correlación.

4) ANÁLISIS DE LA COVARIANZA DE LAS ACCIONES DE AUSTRAL

El análisis del grado de correlación entre la rentabilidad de AUSTRAL y el resto de acciones nos muestra que la acción con que tienen un mayor grado de correlación es con ATACOCHA, siendo su grado de correlación de 0.652, mientras que el menor grado de correlación es con VOLCAN, siendo esta de –0.082. En general se observa que las acciones de la empresa AUSTRAL no cumplen con los requisitos para constituir una cartera dado que los grados de correlación que posee son relativamente altos con el resto de las acciones, a excepción de su correlación con VOLCAN, tal como se observa en el cuadro que muestra los grados de correlación

5) ANÁLISIS DE LA COVARIANZA DE LAS ACCIONES DE ACERO AREQUIPA

El análisis del grado de correlación entre la rentabilidad de ACEROS AREQUIPA y el resto de acciones nos muestra que la acción con que tienen una mayor grado de correlación es con EDEGEL, siendo su grado de correlación de 0.542, mientras que el menor grado de correlación es con EL BANCO DE CREDITO, siendo esta de 0.024, En general se observa que las acciones de la empresa ACEROS AREQUIPA cumplen con los requisitos para constituir una cartera dado que los grados de correlación que posee son relativamente bajos con el resto de las acciones, tal como se observa en el cuadro que muestra los grados de correlación

6) ANÁLISIS DE LA COVARIANZA DE LAS ACCIONES DE ATACOCHA

El análisis del grado de correlación entre la rentabilidad de ATACOCHA y el resto de acciones nos muestra que la acción con que tienen una mayor grado de correlación es con GRAÑAY MONTERO, siendo su grado de correlación de 0.914, mientras que el menor grado de correlación es con EL VOLCAN, siendo esta de 0.127, En general se observa que las acciones de la empresa ATACOCHA no cumplen con los requisitos para constituir una cartera dado que los grados de correlación que posee son relativamente bajos con el resto de las acciones, tal como se observa en el cuadro que muestra los grados de correlación

7) ANÁLISIS DE LA COVARIANZA DE LAS ACCIONES DE VOLCAN

El análisis del grado de correlación entre la rentabilidad de VOLCAN y el resto de acciones nos muestra que la acción con que tienen una mayor grado de correlación es con ACEROS AREQUIPA, siendo su grado de correlación de 0.4, mientras que el menor grado de correlación es con MINSUR, siendo esta de -0.362, En general se observa que las acciones de la empresa VOLCAN cumplen con los requisitos para constituir una cartera dado que los grados de correlación que posee son relativamente bajos con el resto de las acciones, mas aun es la empresa con menores grados de correlación, como se observa en el cuadro que muestra los grados de correlación.

8) ANÁLISIS DE LA COVARIANZA DE LAS ACCIONES DE MINSUR

El análisis del grado de correlación entre la rentabilidad de las acciones de MINSUR y el resto de acciones nos muestra que la acción con que tienen una mayor grado de correlación es con EDEGEL, siendo su grado de correlación de 0.554, mientras que el menor grado de correlación es con VOLCAN, siendo esta de –0.362, En general se observa que las acciones de la empresa MINSUR cumplen con los requisitos para constituir una cartera dado que los grados de correlación que posee son relativamente bajos con el resto de las acciones.

VII.3) DETERMINACIÓN DE LA FRONTERA EFICIENTE

Una vez realizado el análisis de títulos visto en los puntos VII.1 y VII.2, pasamos a determinar la frontera eficiente, para ello utilizaremos como instrumento la programación cuadrática, método que se explica en los anexos. Al aplicarlo al universo de nuestras acciones encontramos nueve tramos claramente constituidos, empezando desde los tramos más riesgosos a los tramos menos riesgosos.

PRIMER INTERVALO (φ MAYOR A 1600.0)

Encontramos que en este primer tramo esta compuesto por sólo un activo el activo 7, o sea VOLCAN, que como sabemos es el activo más rentable, esta afirmación es casi tautológica en el sentido que un amante del riesgo si quiere asumir una gran dosis de riesgo bastara con invertir todo su dinero en la acción VOLCAN. Las ecuaciones de comportamiento de las acciones son las siguientes

$W1 = 0 + 0 \varphi$

$W2 = 0 + 0 \varphi$

$W3 = 0 + 0 \varphi$

$W4 = 0 + 0 \varphi$

$W5 = 0 + 0 \varphi$

$W6 = 0 + 0 \varphi$

$W7 = 1 + 0 \varphi$

$W8 = 0 + 0 \varphi$

En este intervalo la máxima rentabilidad a obtenerse es la que ofrece VOLCAN, la que asciende a 110.5% y el riesgo a asumirse en este intervalo es de 207.2% que es el riesgo que asumimos de invertir todo en VOLCAN

Esta situación se da hasta que φ toma un valor de 1600.0 (recuérdese que φ es un indicador del riesgo), donde cambian las ecuaciones de comportamiento siendo esta **LA PRIMERA CARTERA** de esquina, la cual esta constituida de la siguiente manera

$W1 = 0$

$W2 = 0$

$W3 = 0$

$W4 = 0$

$W5 = 0$

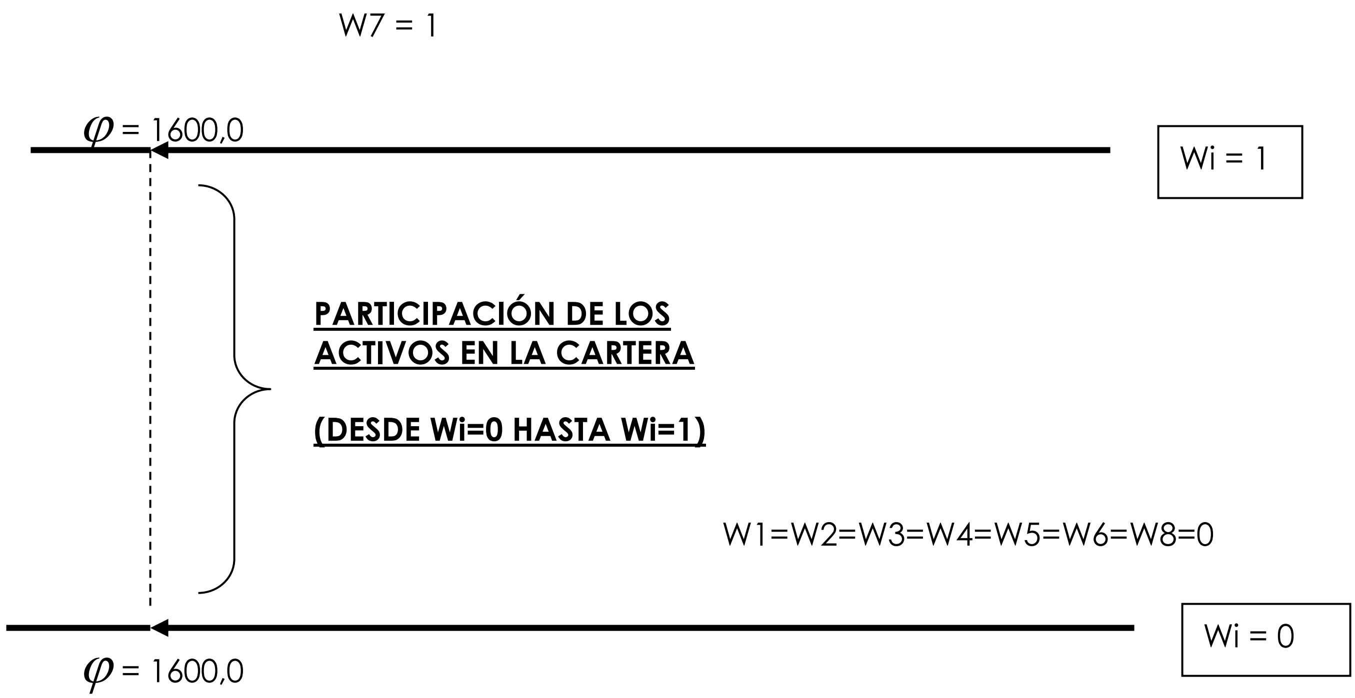
$W6 = 0$

$W7 = 1$

$W8 = 0$

GRÁFICO VII.11

EVOLUCION DE LAS CARTERAS EFICIENTES EN EL PRIMER INTERVALO



SEGUNDO INTERVALO (φ MAYOR A 688.6 Y MENOR A 1600.0)

Encontramos que en este segundo intervalo la frontera eficiente esta compuesta por dos activos el activo 7, o sea VOLCAN, y el activo 6, o sea ATACOCHA. Las ecuaciones de comportamiento de las acciones son las siguientes

$W1 = 0 + 0\ \varphi$

$W2 = 0 + 0\ \varphi$

$W3 = 0 + 0\ \varphi$

$W4 = 0 + 0\ \varphi$

$W5 = 0 + 0\ \varphi$

$W6 = 0,7670 - 0,0005\varphi$

$W7 = 0,2330 + 0,0005\varphi$

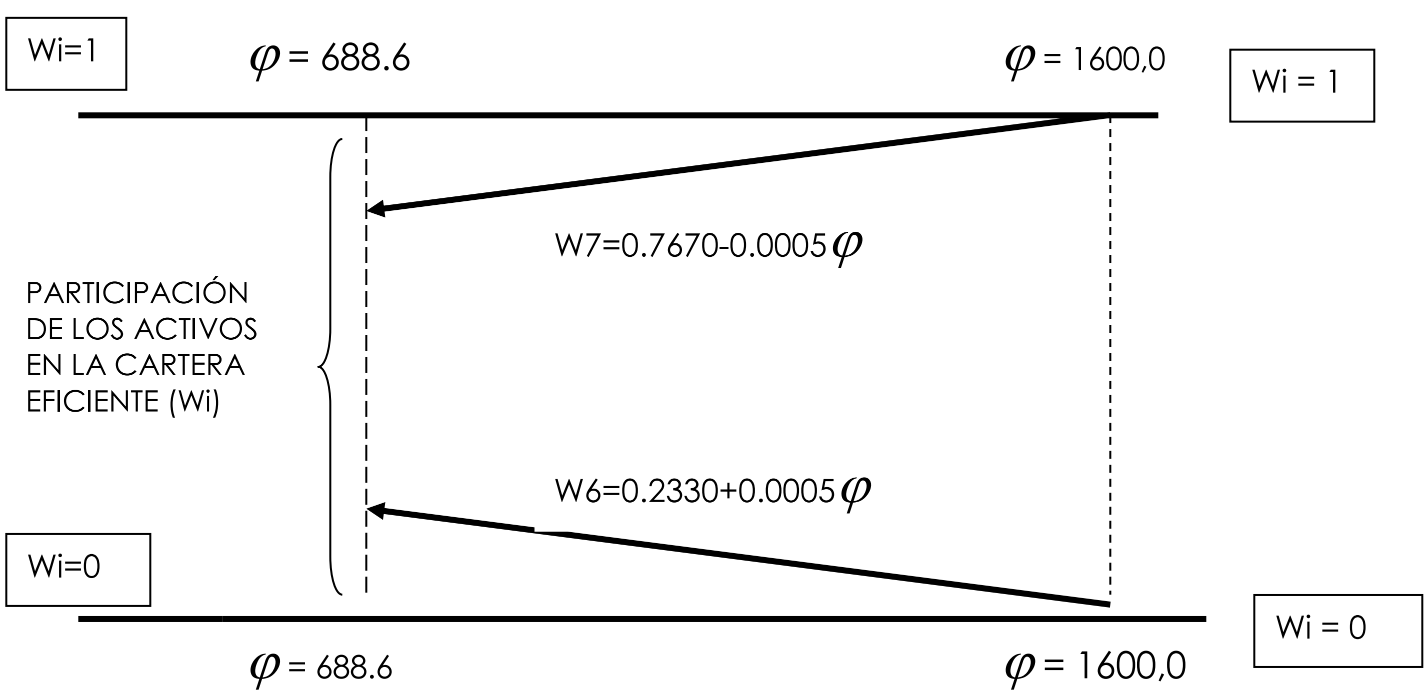
$W8 = 0 + 0 \ \varphi$

Donde se observa que en la medida que φ cae (el riesgo disminuye) la participación en VOLCAN disminuye mientras que la participación en ATACOCHA aumenta tal como se muestra en el siguiente gráfico:

GRÁFICO VII.12

EVOLUCION DE LAS CARTERAS EFICIENTES EN EL SEGUNDO INTERVALO

(φ MAYOR A 688.6 Y MENOR A 1600.0)



En este intervalo la máxima rentabilidad a obtenerse es la que ofrece VOLCAN, la que asciende a 110.5%, con un riesgo de 207.2%, mientras que la mínima rentabilidad que se obtiene en este intervalo es de 88.8% con un riesgo de 134.6%, lo que sucede cuando φ toma un valor de 688.6, es decir en **LA SEGUNDA CARTERA DE ESQUINA**, la cual esta constituida de la siguiente manera

W1 = 0

W2 = 0

W3 = 0

W4 = 0

W5 = 0

W6 = 43,7%

W7 = 56,3%

W8 = 0

Sí hacemos un análisis de la rentabilidad de dicha cartera resulta:

Rent. 1997 = (0.437)(101.3%) + (0.563) (683.6%) = 429.2%

Rent. 1998 = (0.437)(-21.2%) + (0.563) (-52.2%) = -38.7%

Rent. 1999 = (0.437)(-10%) + (0.563) (93.1%) = 48.1%

Rent. 2000 = (0.437)(-62.5%) + (0.563) (-2%) = -28.4%

Rent. 2001 = (0.437)(-48.1%) + (0.563) (48.4%) = 6.2%

Rent. 2002 = (0.437)(68.8%) + (0.563) (67.1%) = 67.8%

Rent. 2003 = (0.437)(369%) + (0.563) (17.4%) = 171.0%

Rent. 2004 = (0.437)(104.9%) + (0.563) (86.4%) = 94.5%

Rent. 2005 = (0.437)(45.6%) + (0.563) (52.3%) = 49.4%

Donde la rentabilidad que ofrece dicha cartera eficiente es justamente 88.8%, con un riesgo de 134.6%

TERCER INTERVALO (φ MAYOR A 433.5 Y MENOR A 688.6)

Encontramos que en este tercer intervalo la frontera eficiente esta compuesta por tres activos el activo 7, o sea VOLCAN, el activo 6, o sea ATACOCHA. Y el activo 5 o sea ACEROS AREQUIPA. Las ecuaciones de comportamiento de las acciones son las siguientes

W1 = 0 + 0 φ

W2 = 0 + 0 φ

W3 = 0 + 0 φ

W4 = 0 + 0 φ

W5 = 0.8323 –0.0012 φ

W6 = 0,1861 + 0,0004φ

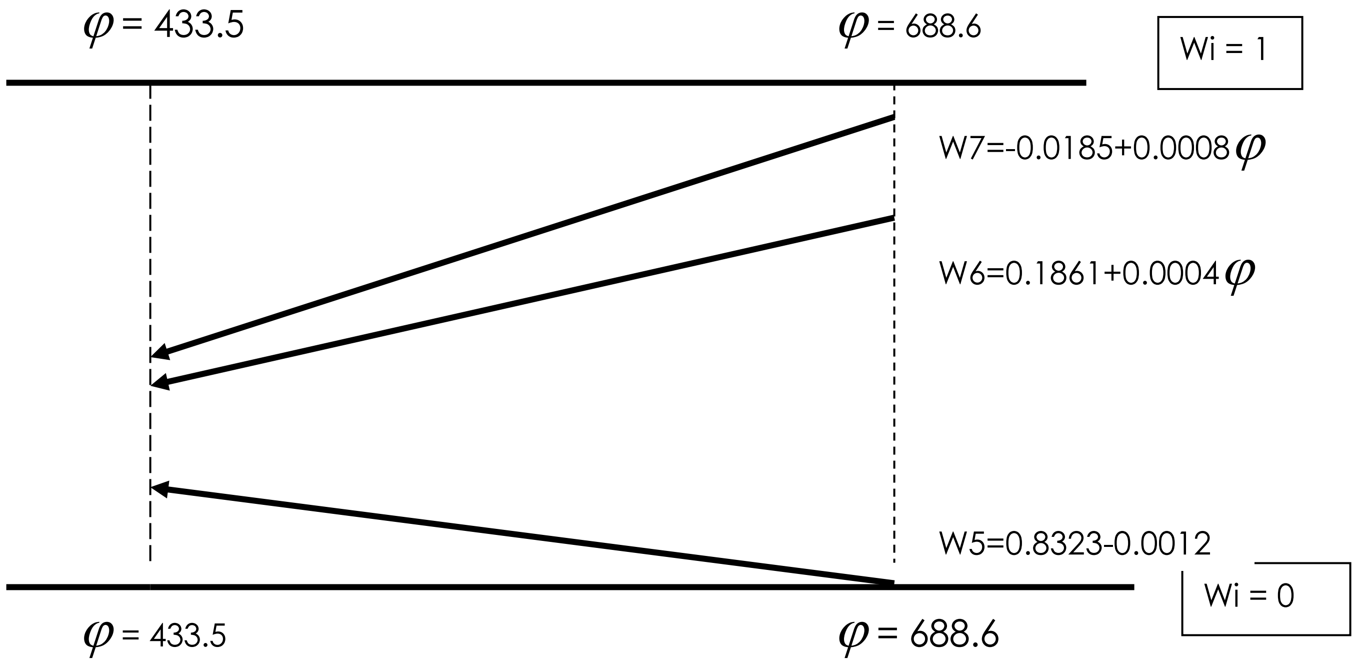
W7 = -0.0185 + 0,0008φ

W8 = 0 + 0 φ

Donde se observa que en la medida que φ cae (el riesgo disminuye) la participación en VOLCAN y ATACOCHA disminuyen mientras que la participación en ACEROS AREQUIPA aumenta tal como se muestra en el siguiente gráfico.

GRÁFICO VII.13

EVOLUCION DE LAS CARTERAS EFICIENTES EN EL TERCER INTERVALO (φ MAYOR A 433.5 Y MENOR 688.6)



En este intervalo la máxima rentabilidad a obtenerse es la que ofrece la cartera formada con el 43.7% de ATACOCHA y el 56.3% de VOLCAN, (la segunda cartera de esquina) con una rentabilidad de 88.8%, con un riesgo de 134.6%, mientras que la mínima rentabilidad que se obtiene en este intervalo es de 74.6% con un riesgo de 100.7%, lo que sucede cuando φ toma un valor de 433.54, es decir en **LA TERCERA CARTERA DE ESQUINA**, la cual esta constituida de la siguiente manera

W1 = 0

W2 = 0

W3 = 0

W4 = 0

W5 = 30.8%

W6 = 34.4%

W7 = 34.8%

W8 = 0

Sí hacemos un análisis de la rentabilidad de dicha cartera resulta:

Rent. 1997 = (0.308)(118.1%) + (0.3440) (101.3%)+(0.348)(683.6%) = 309.1%

Rent. 1998 = (0.308)(-34.6%) + (0.3440) (-21.2%)+(0.348)(-52.2%) = -36.1%

Rent. 1999 = (0.308)(-20.1%) + (0.3440) (-10%)+(0.348)(93.1%) = 22.8 %

Rent. 2000 = (0.308)(45.7%) + (0.3440) (-62.5 %)+(0.348)(-2%) = -8.1 %

Rent. 2001 = (0.308)(47%) + (0.3440) (-48.1 %)+(0.348)(48.4 %) = 14.8%

Rent. 2002 = (0.308)(27.7%) + (0.3440) (68.8%)+(0.348)(67.1%) = 55.6%

Rent. 2003 = (0.308)(47.5%) + (0.3440) (369%)+(0.348)(17.4%) = 147.6%

Rent. 2004 = (0.308)(219.5%) + (0.3440) (104.9%)+(0.348)(86.4 %) = 133.8%

Rent. 2005 = (0.308)(-6.3 %) + (0.3440) (45.6%)+(0.348)(52.3%) = 31.9%

Donde la rentabilidad esperada de esta cartera es justamente 74.6% y el riesgo es de 100.7%

CUARTO INTERVALO (φ MAYOR A 309.6 Y MENOR A 433.5)

Encontramos que en este cuarto intervalo, la frontera eficiente esta compuesta por cuatro activos el activo 7, o sea VOLCAN, el activo 6, o sea ATACOCHA. El activo 5 o sea ACEROS AREQUIPA., y en este tramo se incluye las acciones de inversión de la empresa MINSUR Las ecuaciones de comportamiento de las acciones son las siguientes

W1 = 0 + 0 φ

W2 = 0 + 0 φ

W3 = 0 + 0 φ

W4 = 0 + 0 φ

$W5 = 0.1908 + 0.0003\ \varphi$

$W6 = -0{,}1064 + 0{,}0010\varphi$

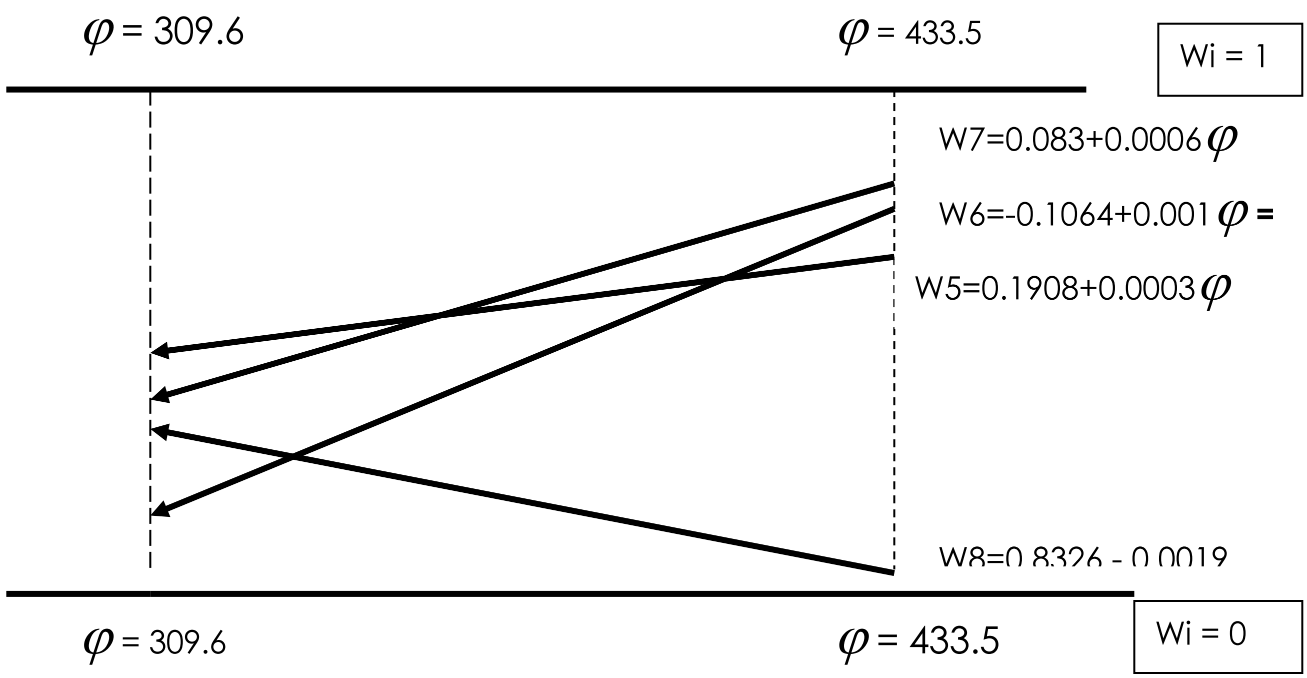
$W7 = 0.083 + 0{,}0006\varphi$

$W8 = 0.8326 - 0.0019\ \varphi$

Donde se observa que en la medida que φ cae (el riesgo disminuye) la participación en VOLCAN, ATACOCHA y ACEROS AREQUIPA disminuyen mientras que la participación en MINSUR aumenta tal como se muestra en el siguiente gráfico

GRÁFICO VII.14

EVOLUCION DE LAS CARTERAS EFICIENTES EN EL CUARTO INTERVALO (φ MAYOR A 309.6 Y MENOR A 433.5)



En este intervalo la máxima rentabilidad a obtenerse es la que ofrece la cartera formada con el 30.8% de ACEROS AREQUIPA, EL 34.4% DE ATACOCHA y el 34.8% de VOLCAN, (la tercera cartera de esquina) con una rentabilidad de 74.6%, y un riesgo de 100.7%, mientras que la mínima rentabilidad que se obtiene en este intervalo es de 63.0% con un riesgo de 76.5%, lo que sucede cuando φ toma un valor de 309.6, es decir en **LA CUARTA CARTERA DE ESQUINA,** la cual esta constituida de la siguiente manera

W1 = 0

W2 = 0

W3 = 0

W4 = 0

W5 = 27.5%

W6 = 21.5%

W7 = 27.2%

W8 = 23.8%

Sí hacemos un análisis de la rentabilidad de dicha cartera resulta:

Rent. 1997=(0.275)(118.1%)+(0.215)(101.3%)+(0.272)(683.6%)+(0.238)(-34.6%)
= 232.0%

Rent. 1998 = (0.275)(-34.6%) + (0.215) (-21.2%)+(0.272)(-52.2%) +(0.238)(15.8%)
= -24.5%

Rent. 1999 = (0.275)(-20.1%) + (0.215) (-10%)+(0.272)(93.1%)+(0.238)(63.3%)
= 32.7%

Rent. 2000 = (0.275)(45.7%) + (0.215) (-62.5 %)+(0.272)(-2%) +(0.238)(-19.7%)
= -6.1%

Rent. 2001 = (0.275)(47%) + (0.215) (-48.1 %)+(0.272)(48.4 %)+(0.238)(-17.1%)
= 11.7%

Rent. 2002 = (0.275)(27.7%) + (0.215) (68.8%)+(0.272)(67.1%) +(0.238)(106%)
= 65.9%

Rent. 2003 = (0.275)(47.5%)+(0.215) (369%)+(0.272)(17.4%)+(0.238)(75.8%)
= 115.2%

Rent. 2004=(0.275)(219.5%)+ (0.215) (104.9%)+(0.272)(86.4%) +(0.238)(62.7%) = 121.3%

Rent. 2005 = (0.275)(-6.3 %)+(0.215)(45.6%)+(0.2721)(52.3%) +(0.238)(-14.4%)
= 18.9%

Donde la rentabilidad esperada de esta cartera es justamente 63.0% y el riesgo de 76.5%

QUINTO INTERVALO (φ MAYOR A 98.8 Y MENOR A 309.6)

Encontramos que en este quinto intervalo, la frontera eficiente esta compuesta por cinco activos el activo 7, o sea VOLCAN, el activo 6, o sea ATACOCHA. El activo 5 o sea ACEROS AREQUIPA. El activo 8 MINSUR y en este tramo se incluye el activo 1, o sea las acciones del BANCO DE CREDITO. Las ecuaciones de comportamiento de las acciones son las siguientes

W1 = 0.3863 – 0.0012 φ

W2 = 0 + 0 φ

W3 = 0 + 0 φ

W4 = 0 + 0 φ

W5 = 0.11518 + 0.0004 φ

W6 = -0.1009 + 0.0010φ

W7 = 0.0492 + 0,0007φ

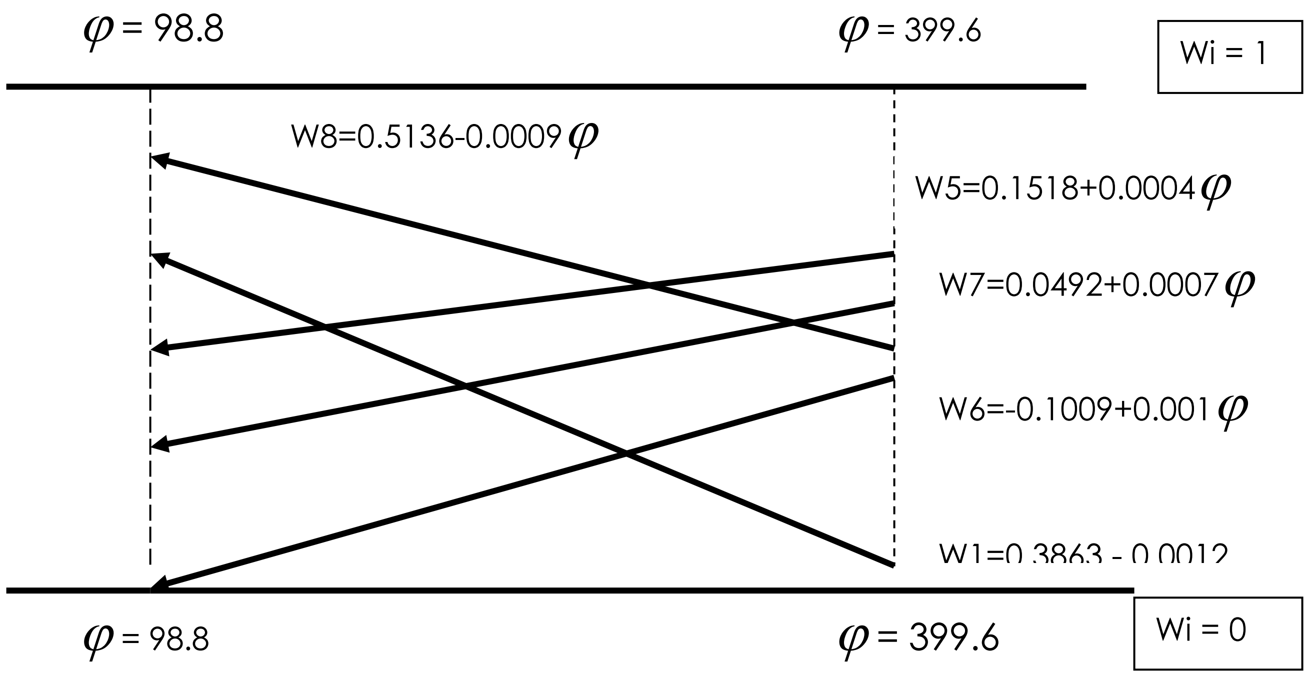
$W8 = 0.5136 - 0.0009\ \varphi$

Donde se observa que en la medida que φ cae (el riesgo disminuye) la participación en VOLCAN, ATACOCHA y ACEROS AREQUIPA disminuyen mientras que la participación de las acciones de MINSUR y del BANCO DE CREDITO aumenta tal como se muestra en el siguiente gráfico

GRÁFICO VII.15

EVOLUCION DE LAS CARTERAS EFICIENTES EN EL QUINTO INTERVALO

(φ MAYOR A 98.8 Y MENOR A 399.6)



En este intervalo la máxima rentabilidad a obtenerse es la que ofrece la cartera formada con el 27.5% de ACEROS AREQUIPA, EL 21.5% DE ATACOCHA , el 23.8% de MINSUR y el 27.2% de VOLCAN, (la cuarta cartera de esquina) con una rentabilidad de 63.0%, con un riesgo de 76.5%, mientras que la mínima rentabilidad que se obtiene en este intervalo es de 41.5% con un riesgo de 38.2%, lo que sucede cuando φ toma un valor de 98.8, es decir en **LA QUINTA CARTERA DE ESQUINA**, la cual esta constituida de la siguiente manera

W1 = 26.3%

W2 = 0

W3 = 0

W4 = 0

W5 = 19.1%

W6 = 0

W7 = 12.0%

W8 = 42.6%

Sí hacemos un análisis de la rentabilidad de dicha cartera resulta:

Rent.1997=(0.191)(118.1%)+(0.263)(12.7%)+(0.12)(683.6%)+(0.426)(-34.6%)

= 93.2%

Rent. 1998 = (0.191)(-34.6%) + (0.263) (-35.4%)+(0.12)(-52.2%) +(0.426)(15.8%)

= -15.5%

Rent. 1999 = (0.191)(-20.1%) + (0.263) (57%)+(0.12)(93.1%)+(0.426)(63.3%)

= 49.3%

Rent. 2000 = (0.191)(45.7%) + (0.263) (-47.2%)+(0.12)(-2%) +(0.426)(-19.7%)

= -12.3%

Rent. 2001 = (0.191)(47%) + (0.263) (30.1%)+(0.12)(48.4 %)+(0.426)(-17.1%)

= 15.4%

Rent. 2002 = (0.191)(27.7%) + (0.263) (42.2%)+(0.12)(67.1%) +(0.426)(106%)
= 69.6%

Rent. 2003 = (0.191)(47.5%) + (0.263) (35.1%)+(0.12)(17.4%)+(0.426)(75.8%)
= 52.7%

Rent. 2004=(0.191)(219.5%)+ (0.263) (48.2%)+(0.12)(86.4%) +(0.426)(62.7%) = 91.7%

Rent. 2005 = (0.191)(-6.3 %)+(0.263)(116%)+(0.12)(52.3%) +(0.426)(-14.4%)
= 29.4%

Donde la rentabilidad esperada de esta cartera es justamente 41.5% y el riesgo de 38.2%

SEXTO INTERVALO (φ MAYOR A 71.9 Y MENOR A 98.8)

Encontramos que en este sexto intervalo, la frontera eficiente esta compuesta por cuatro activos el activo 7, o sea VOLCAN, el activo 5 o sea ACEROS AREQUIPA. el activo 8 MINSUR y el activo 1, o sea las acciones del BANCO DE CREDITO. Las ecuaciones de comportamiento de las acciones son las siguientes

W1 = 0.3921 – 0.0013 φ

W2 = 0 + 0 φ

W3 = 0 + 0 φ

W4 = 0 + 0 φ

W5 = 0.1391 + 0.0005 φ

W6 = 0+ 0φ

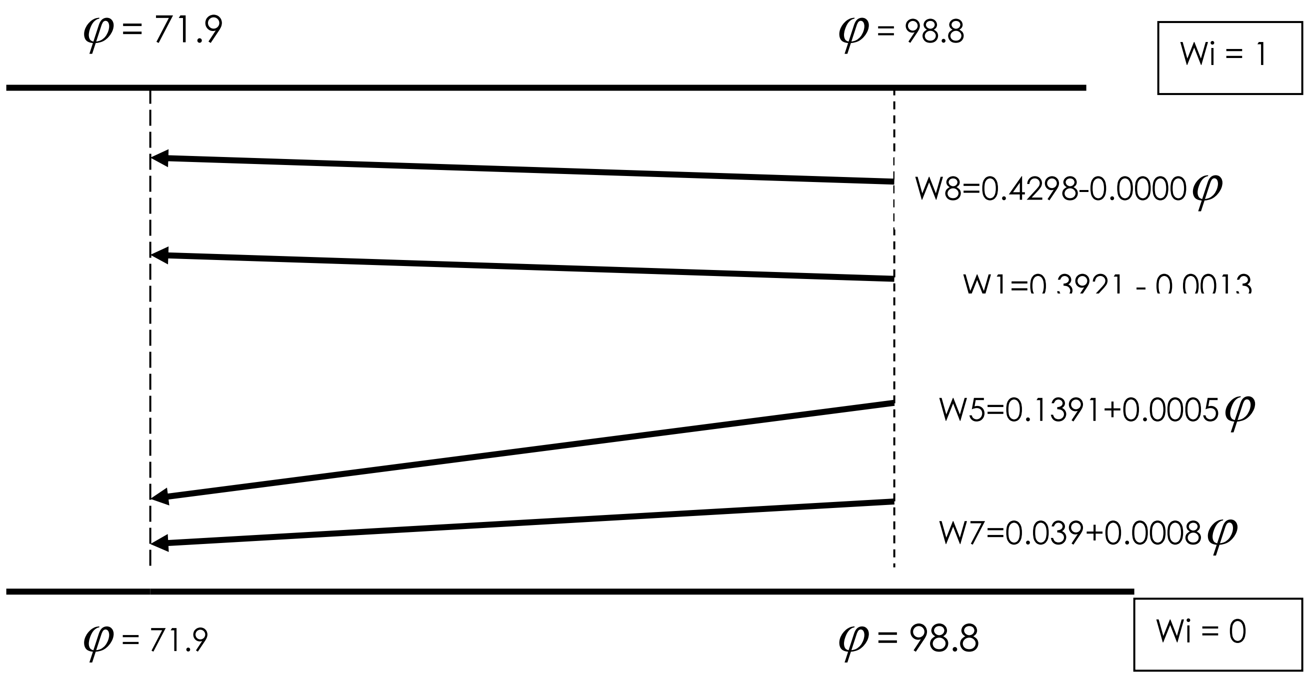
W7 = 0.039 + 0,0008φ

W8 = 0.1298 - 0.0000 φ

Donde se observa que en la medida que φ cae (el riesgo disminuye) la participación en VOLCAN y ACEROS AREQUIPA disminuyen mientras que la participación de las acciones de MINSUR y del BANCO DE CREDITO aumenta tal como se muestra en el siguiente gráfico

GRÁFICO VII.16

EVOLUCION DE LAS CARTERAS EFICIENTES EN EL SEXTO INTERVALO (φ MAYOR A 71.86 Y MENOR A 98.83)



En este intervalo la máxima rentabilidad a obtenerse es la que ofrece la cartera formada con el 19.1% de ACEROS AREQUIPA, EL 26.3% DEL BANCO DE CRÉDITO , el 42.6% de MINSUR y el 12.0% de VOLCAN, (la quinta cartera de esquina) con una rentabilidad de 41.5%, con un riesgo de 38.2%, mientras que la mínima rentabilidad que se obtiene en este intervalo es de 39.4% con un riesgo de 35.8%, lo que sucede cuando φ toma un valor de 71.9 es decir en **LA SEXTA CARTERA DE ESQUINA.** , la cual esta constituida de la siguiente manera

W1 = 29.8%

W2 = 0

W3 = 0

W4 = 0

W5 = 17.7%

W6 = 0

W7 = 9.8%

W8 = 42.7%

Sí hacemos un análisis de la rentabilidad de dicha cartera resulta:

Rent.1997=(0.177)(118.1%)+(0.298)(12.7%)+(0.098)(683.6%)+(0.427)(-34.6%)
= 77.0%

Rent. 1998 = (0.177)(-34.6%) + (0.298) (-35.4%)+(0.098)(-52.2%) +(0.427)(15.8%)
= -15.0%

Rent. 1999 = (0.177)(-20.1%) + (0.298) (57%)+(0.098)(93.1%)+(0.427)(63.3%)
= 49.6%

Rent. 2000 = (0.177)(45.7%) + (0.298) (-47.2%)+(0.098)(-2%) +(0.427)(-19.7%)
= -14.6%

Rent. 2001 = (0.177)(47%) + (0.298) (30.1%)+(0.098)(48.4 %)+(0.427)(-17.1%)
= 14.7%

Rent. 2002 = (0.177)(27.7%) + (0.298) (42.2%)+(0.098)(67.1%) +(0.427)(106%)
= 69.3%

Rent. 2003 = (0.177)(47.5%) + (0.298) (35.1%)+(0.098)(17.4%)+(0.427)(75.8%)

= 52.9%

Rent. 2004=(0.177)(219.5%)+ (0.298) (48.2%)+(0.098)(86.4%) +(0.427)(62.7%)

= 88.4%

Rent. 2005 = (0.177)(-6.3 %)+(0.298)(116%)+(0.098)(52.3%) +(0.427)(-14.4%)

= 32.5%

Donde la rentabilidad esperada de esta cartera es justamente 39.4% y el riesgo de 35.8%

SÉTIMO INTERVALO (φ MAYOR A 38.1 Y MENOR A 71.9)

Encontramos que en este sétimo intervalo, la frontera eficiente esta compuesta por cinco activos el activo 7, o sea VOLCAN, el activo 5 o sea ACEROS AREQUIPA. el activo 8 MINSUR el activo 1, o sea las acciones del BANCO DE CREDITO, incluyéndose en este tramo las acciones de EDEGEL, es decir el activo 3, Las ecuaciones de comportamiento de las acciones son las siguientes

W1 = 0.1637 + 0.0019 φ

W2 = 0 + 0 φ

W3 = 1.09340 – 0.0152 φ

W4 = 0 + 0 φ

W5 = -0.2002 + 0.0052 φ

W6 = 0+ 0φ

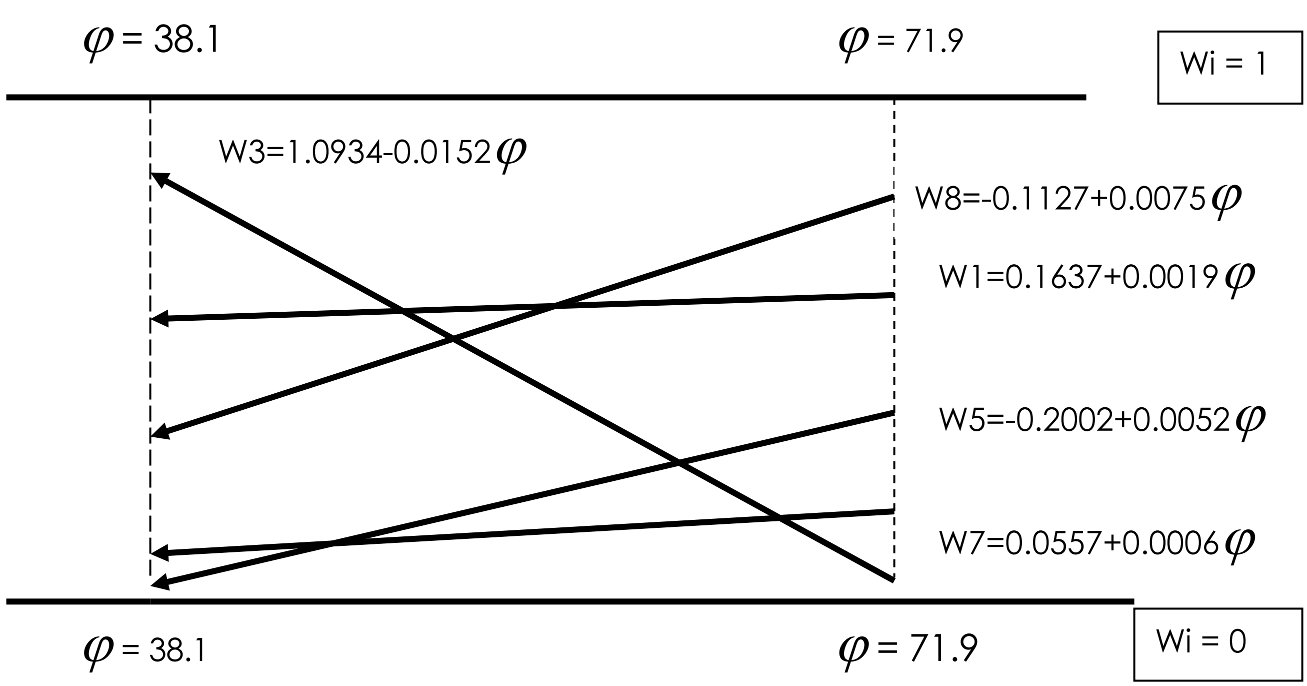
W7 = 0.0557 + 0,0006φ

$W8 = -0.1127 + 0.0075\ \varphi$

Donde se observa que en la medida que φ cae (el riesgo disminuye) la participación en las acciones de VOLCAN, EL BANCO DE CREDITO, ACEROS AREQUIPA y MINSUR disminuyen mientras que la participación de las acciones de EDEGEL aumentan tal como se muestra en el siguiente gráfico

GRÁFICO VII.17

EVOLUCION DE LAS CARTERAS EFICIENTES EN EL SÉTIMO INTERVALO (φ MAYOR A 38.1 Y MENOR A 71.9)



En este intervalo la máxima rentabilidad a obtenerse es la que ofrece la cartera formada con el 17.7% de ACEROS AREQUIPA, EL 9.8% DEL BANCO DE

CRÉDITO , el 42.7% de MINSUR y el 9.8% de VOLCAN, (la sexta cartera de esquina) con una rentabilidad de 39.4%, con un riesgo de 35.4%, mientras que la mínima rentabilidad que se obtiene en este intervalo es de 26.6% con un riesgo de 24.0%, lo que sucede cuando φ toma un valor de 38.1 es decir en LA **SÉTIMA CARTERA DE ESQUINA**, la cual esta constituida de la siguiente manera

W1 = 23.5%

W2 = 0

W3 = 51.3%

W4 = 0

W5 = 0

W6 = 0

W7 = 7.8%

W8 = 17.4%

Sí hacemos un análisis de la rentabilidad de dicha cartera resulta:

Rent.1997=(0.513)(-8.9%)+(0.235)(12.7%)+(0.078)(683.6%)+(0.174)(-34.6%)
= 45.9%

Rent. 1998 = (0.513)(-24.8%) + (0.235) (-35.4%)+(0.078)(-52.2%) +(0.174)(15.8%)
= -22.4%

Rent. 1999 = (0.513)(0%) + (0.235) (57%)+(0.078)(93.1%)+(0.174)(63.3%)
= 31.7%

Rent. 2000 = (0.513)(32.8%) + (0.235) (-47.2%)+(0.078)(-2%) +(0.174)(-19.7%)
= 2.1%

Rent. 2001 = (0.513)(6.3%) + (0.235) (30.1%)+(0.078)(48.4 %)+(0.174)(-17.1%)
= 11.1%

Rent. 2002 = (0.513)(36.4%) + (0.235) (42.2%)+(0.078)(67.1%) +(0.174)(106%)

= 52.3%

Rent. 2003 = (0.513)(38%) + (0.235) (35.1%)+(0.078)(17.4%)+(0.174)(75.8%)

= 42.3%

Rent. 2004=(0.513)(45.3%)+ (0.235) (48.2%)+(0.078)(86.4%) +(0.174)(62.7%)

= 52.2%

Rent. 2005 = (0.513)(-8.7 %)+(0.235)(116%)+(0.078)(52.3%) +(0.174)(-14.4%)

= 24.2%

Donde la rentabilidad esperada de esta cartera es justamente 26.6% y el riesgo de 24.0%

OCTAVO INTERVALO (φ MAYOR A 9.0 Y MENOR A 38.1)

Encontramos que en este octavo intervalo, la frontera eficiente esta compuesta por cuatro activos el activo 7, VOLCAN, el activo 8 MINSUR, el activo 1, BANCO DE CREDITO, y el activo 3 EDEGEL. Las ecuaciones de comportamiento de las acciones son las siguientes

W1 = 0.1992 + 0.0009 φ

W2 = 0 + 0 φ

W3 = 0.8271 – 0.0082 φ

W4 = 0 + 0 φ

W5 = 0 + 0 φ

W6 = 0+ 0φ

W7 = 0.0271+ 0,0013φ

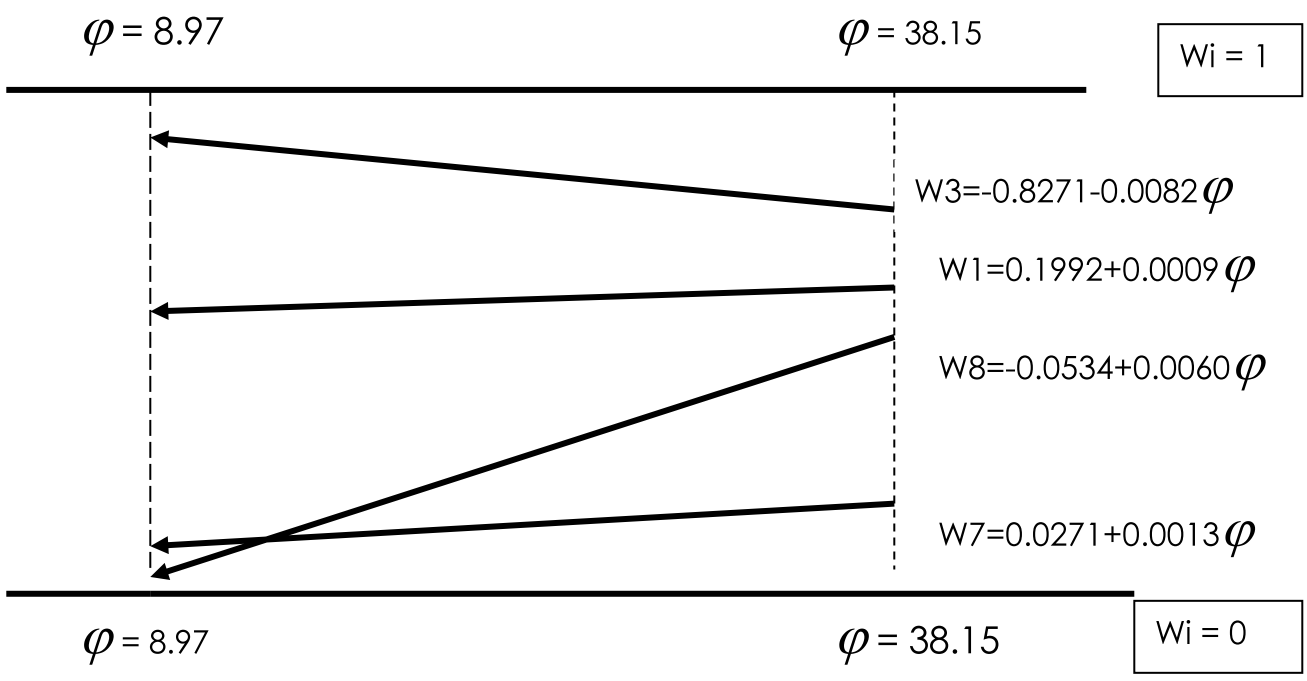
W8 = -0.0534 + 0.006 φ

Donde se observa que en la medida que φ cae (el riesgo disminuye) la participación en las acciones de VOLCAN, EL BANCO DE CREDITO, y MINSUR disminuyen mientras que la participación de las acciones de EDEGEL aumentan tal como se muestra en el siguiente gráfico.

GRÁFICO VII.18

EVOLUCION DE LAS CARTERAS EFICIENTES EN EL OCTAVO INTERVALO

(φ MAYOR A 8.97 Y MENOR A 38.15)



En este intervalo la máxima rentabilidad a obtenerse es la que ofrece la cartera formada con EL 23.5% DEL BANCO DE CRÉDITO , el 17.4% de MINSUR y el 7.8% de VOLCAN, y el 51.3% de EDEGEL (la sétima cartera de esquina) con una rentabilidad de 26.6%, con un riesgo de 24.4%, mientras que la mínima rentabilidad que se obtiene en este intervalo es de 20.0% con un riesgo de 20.6%, lo que sucede cuando φ toma un valor de 8.97, es decir en **LA OCTAVA CARTERA DE ESQUINA** , la cual esta constituida de la siguiente manera.

W1 = 20.8%

W2 = 0

W3 = 75.3%

W4 = 0

W5 = 0

W6 = 0

W7 = 3.9%

W8 = 0

Sí hacemos un análisis de la rentabilidad de dicha cartera resulta:

Rent.1997=(0.753)(-8.9%)+(0.208)(12.7%)+(0.039)(683.6%) = 22.7%

Rent. 1998 = (0.753)(-24.8%) + (0.208) (-35.4%)+(0.039)(-52.2%) = -28.1%

Rent. 1999 = (0.753)(0%) + (0.208) (57%)+(0.039)(93.1%) = 15.5%

Rent. 2000 = (0.753)(32.8%) + (0.208) (-47.2%)+(0.039)(-2%)= 14.8%

Rent. 2001 = (0.753)(6.3%) + (0.208) (30.1%)+(0.039)(48.4 %)= 12.9%

Rent. 2002 = (0.753)(36.4%) + (0.208) (42.2%)+(0.039)(67.1%)= 38.8%

Rent. 2003 = (0.753)(38%) + (0.208) (35.1%)+(0.039)(17.4%)= 36.6%

Rent. 2004=(0.753)(45.3%)+ (0.208) (48.2%)+(0.039)(86.4%) = 47.5%

Rent. 2005 = (0.753)(-8.7 %)+(0.208)(116%)+(0.039)(52.3%)= 19.6%

Donde la rentabilidad esperada de esta cartera es justamente 20,0% y el riesgo de 20,6%

NOVENO INTERVALO (φ MAYOR A 0 Y MENOR A 9.0)

Encontramos que en este noveno y último intervalo, la frontera eficiente esta compuesta por tres activos el activo 7, VOLCAN, el activo 1, BANCO DE CREDITO, y el activo 3 EDEGEL. Las ecuaciones de comportamiento de las acciones son las siguientes

W1 = 0.1878 + 0.0022 φ

W2 = 0 + 0 φ

W3 = 0.7817 – 0.0032 φ

W4 = 0 + 0 φ

W5 = 0 + 0 φ

W6 = 0+ 0φ

W7 = 0.0305+ 0,0010φ

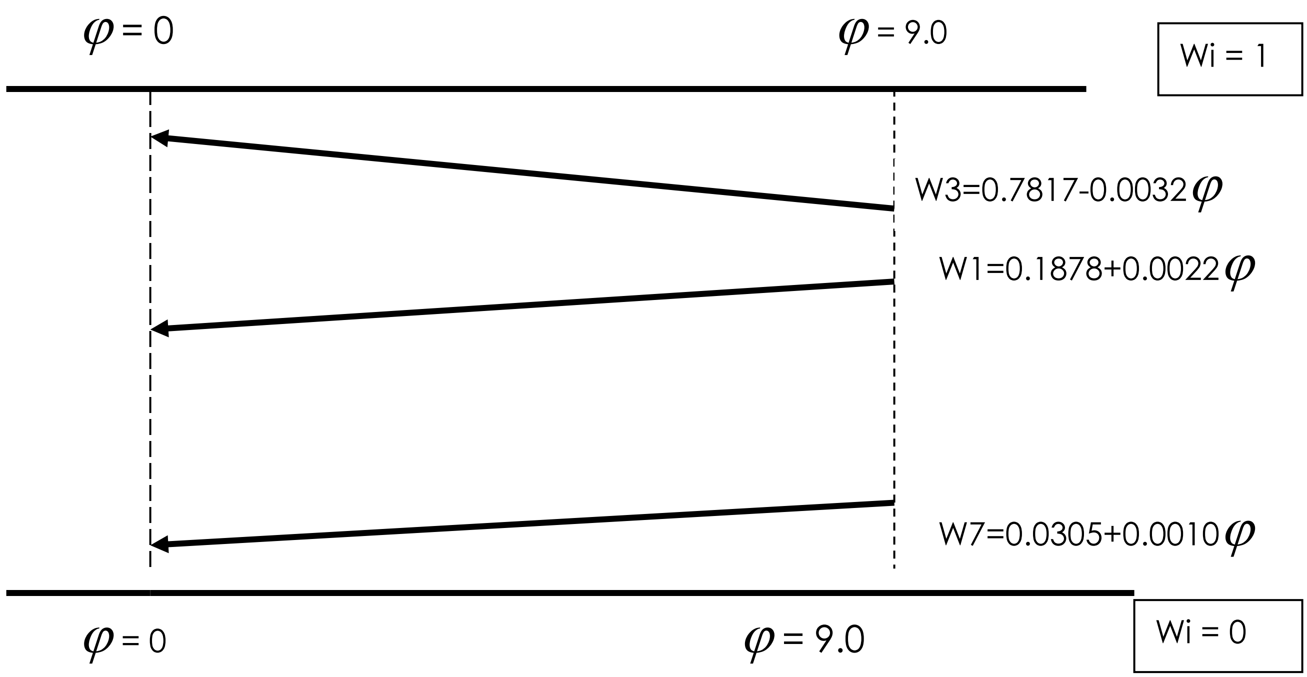
W8 = 0+ 0 φ

Donde se observa que en la medida que φ cae (el riesgo disminuye) la participación en las acciones de VOLCAN, y BANCO DE CREDITO, disminuyen mientras que la participación de las acciones de EDEGEL aumentan tal como se muestra en el siguiente gráfico.

GRÁFICO VII.19

EVOLUCION DE LAS CARTERAS EFICIENTES EN EL OCTAVO INTERVALO

(φ MAYOR A 0 Y MENOR A 9.0)



En este intervalo la máxima rentabilidad a obtenerse es la que ofrece la cartera formada con EL 20.8% DEL BANCO DE CRÉDITO , el 3.9% de VOLCAN, y el 75.3% de EDEGEL (la octava cartera de esquina) con una rentabilidad de 20.0%, con un riesgo de 20.6%, mientras que la mínima rentabilidad que se obtiene en este intervalo es de 18.9% con un riesgo de 20.4%, lo que sucede cuando φ toma un valor de 0, esta cartera es **LA CARTERA DE MINIMA**

VARIANZA (CMV) Al haber obtenido el valor de 0 para φ implica que el procedimiento para hallar las carteras eficientes ha terminado . LA CARTERA DE MINIMA VARIANZA (CMV) esta constituida de la siguiente manera:

W1 = 18,8%

W2 = 0

W3 = 78.2%

W4 = 0

W5 = 0

W6 = 0

W7 = 3.0%

W8 = 0

Sí hacemos un análisis de la rentabilidad de la CARTERA DE MINIMA VARIANZA resulta:

Rent.1997=(0.782)(-8.9%)+(0.188)(12.7%)+(0.03)(683.6%) = 16.3%

Rent. 1998 = (0.782)(-24.8%) + (0.188) (-35.4%)+(0.03)(-52.2%) = -27.6%

Rent. 1999 = (0.782)(0%) + (0.188) (57%)+(0.03)(93.1%) = 13.5%

Rent. 2000 = (0.782)(32.8%) + (0.188) (-47.2%)+(0.03)(-2%)= 16.7%

Rent. 2001 = (0.782)(6.3%) + (0.188) (30.1%)+(0.03)(48.4 %)= 12.1%

Rent. 2002 = (0.782)(36.4%) + (0.188) (42.2%)+(0.03)(67.1%)= 38.4%

Rent. 2003 = (0.782)(38%) + (0.188) (35.1%)+(0.03)(17.4%)= 36.8%

Rent. 2004=(0.782)(45.3%)+ (0.188) (48.2%)+(0.03)(86.4%) = 47.1%

Rent. 2005 = (0.782)(-8.7 %)+(0.188)(116%)+(0.03)(52.3%)= 16.6%

Donde de esta manera se confirma que la rentabilidad esperada de LA CARTERA DE MINIMA VARIANZA es justamente 18.9 y el riesgo es de 20,4%

Luego de haber realizado todo el proceso de determinación del conjunto de carteras eficaces podemos resumir la información en el siguiente cuadro

INTERVALO	**PRIMERO**
COMPOSICIÓN DE LA CARTERA DE ESQUINA REFERIDA A EStE INTERVALO	VOLCAN
RANGO DE φ	MAS DE φ = 1600.0
ECUACIONES PARA HALLAR LAS CARTERAS EFICACES	W7= 1+0φ
RANGO DE RENTABILIDAD EN EL INTERVALO	110.5%
RANGO DE RIESGO EN EL INTERVALO	207.2%
CONFORMACIÓN DE LA CARTERA DE ESQUINA	W7=1
RELACIÓN CON LA CARTERA ANTERIOR	ESTA CARTERA ESTA CONSTITIDA SÓLO POR VOLCAN

INTERVALO	**SEGUNDO**
COMPOSICIÓN DE LA CARTERA DE ESQUINA REFERIDA A ESTE INTERVALO	VOLCAN ATACOCHA
RANGO DE φ	DE φ = 1600.0 A φ = 688.6
ECUACIONES PARA HALLAR LAS CARTERAS EFICACES	W6= 0.7670-0.0005φ W7=0.2330+0.0005φ
RANGO DE RENTABILIDAD EN EL	DE 110.5% A 88.8%

INTERVALO	
RANGO DE RIESGO EN EL INTERVALO	DE 207.2% A 134.6%
CONFORMACIÓN DE LA CARTERA DE ESQUINA	W6=43.7% W7=56.3%
RELACIÓN CON LA CARTERA ANTERIOR	INGRESÓ ATACOCHA

INTERVALO	**TERCERO**
COMPOSICIÓN DE LA CARTERA DE ESQUINA REFERIDA A ESTE INTERVALO	VOLCAN, ATACOCHA Y ACEROS AREQUIPA
RANGO DE φ	DE φ = 688.6 A φ =433.5
ECUACIONES PARA HALLAR LAS CARTERAS EFICACES	W5=0.8323-0.0012φ W6= 0.1861+0.0004φ W7=-0.0185+0.0008φ
RANGO DE RENTABILIDAD EN EL INTERVALO	DE 88.8% A 74.6%
RANGO DE RIESGO EN EL INTERVALO	DE 134.6% A 100.7%
CONFORMACIÓN DE LA CARTERA DE ESQUINA	W5=30.8% W6=34.4% W5=34.8%
RELACIÓN CON LA CARTERA ANTERIOR	INGRESÓ ACEROS AREQUIPA

INTERVALO	**CUARTO**
COMPOSICIÓN DE LA CARTERA DE	VOLCAN, ATACOCHA, ACEROS

ESQUINA REFERIDA A ES INTERVALO	AREQUIPA Y MINSUR
RANGO DE φ	DE φ = 433.5 A φ =309.6
ECUACIONES PARA HALLAR LAS CARTERAS EFICACES	$W5=0.1908+0.0003\varphi$ $W6= -0.1064+0.0010\varphi$ $W7=0.0830+0.0006\varphi$ $W8=0.8326-0.0019\varphi$
RANGO DE RENTABILIDAD EN EL INTERVALO	DE 74.6% A 63,0%
RANGO DE RIESGO EN EL INTERVALO	DE 100.7% A 76.5%
CONFORMACIÓN DE LA CARTERA DE ESQUINA	W5=27.5% W6=21.5% W7=27.2% W8=23.8%
RELACIÓN CON LA CARTERA ANTERIOR	INGRESÓ MINSUR

INTERVALO	**QUINTO**
COMPOSICIÓN DE LA CARTERA DE ESQUINA REFERIDA A ES TE INTERVALO	VOLCAN, ATACOCHA, ACEROS AREQUIPA, MINSUR Y BANCO DE CREDITO
RANGO DE φ	DE φ = 309.6 A φ =98.8
ECUACIONES PARA HALLAR LAS CARTERAS EFICACES	$W1=0.3863-0.0012\varphi$ $W5=0.1518+0.0004\varphi$ $W6= -0.1009+0.0010\varphi$

	W7=0.0492+0.0007 φ W8=0.5136-0.0009 φ
RANGO DE RENTABILIDAD EN EL INTERVALO	DE 63,0% A 41.5%
RANGO DE RIESGO EN EL INTERVALO	DE 76.5% A 38.2%
CONFORMACIÓN DE LA CARTERA DE ESQUINA	W1=26.3% W5=19.1% W7=12,0% W8=42.6%
RELACIÓN CON LA CARTERA ANTERIOR	INGRESÓ BANCO DE CREDITO

INTERVALO	**SEXTO**
COMPOSICIÓN DE LA CARTERA DE ESQUINA REFERIDA A ESTE INTERVALO	VOLCAN, ACEROS AREQUIPA, MINSUR Y BANCO DE CREDITO
RANGO DE φ	DE φ = 98.8 A φ =71.9
ECUACIONES PARA HALLAR LAS CARTERAS EFICACES	W1=0.3921-0.0013 φ W5=0.1391+0.0005 φ W7=0.0390+0.0008 φ W8=0.4298+0.0000 φ
RANGO DE RENTABILIDAD EN EL INTERVALO	DE 41.5% A 39.4%
RANGO DE RIESGO EN EL INTERVALO	DE 38.2% A 35.8%
CONFORMACIÓN DE LA CARTERA DE ESQUINA	W1=29.8% W5=17.7%

	W7=9.8% W8=42.7%
RELACIÓN CON LA CARTERA ANTERIOR	SALIÓ ATACOCHA

INTERVALO	**SÉTIMO**
COMPOSICIÓN DE LA CARTERA DE ESQUINA REFERIDA A ESTE INTERVALO	VOLCAN, ACEROS AREQUIPA, MINSUR, BANCO DE CREDITO Y EDEGEL
RANGO DE φ	DE φ = 71.9 A φ =38.1
ECUACIONES PARA HALLAR LAS CARTERAS EFICACES	$W1=0.1637+0.0019\varphi$ $W3=1.0934-0.0152\varphi$ $W5=-0.2002+0.0052\varphi$ $W7=0.0557+0.0006\varphi$ $W8= -0.1127+0.0075\varphi$
RANGO DE RENTABILIDAD EN EL INTERVALO	DE 39.4% A 26.6%
RANGO DE RIESGO EN EL INTERVALO	DE 35.8% A 24.0%
CONFORMACIÓN DE LA CARTERA DE ESQUINA	W1=23.5% W3=51.3% W7=7.8% W8=17.4%

RELACIÓN CON LA CARTERA ANTERIOR	INGRESA EDEGEL

INTERVALO	**OCTAVO**
COMPOSICIÓN DE LA CARTERA DE ESQUINA REFERIDA A ESTE INTERVALO	VOLCAN, MINSUR, BANCO DE CREDITO Y EDEGEL
RANGO DE φ	DE φ = 38.1 A φ =9.0
ECUACIONES PARA HALLAR LAS CARTERAS EFICACES	$W1=0.1992+0.0009\varphi$ $W3=0.8271-0.0082\varphi$ $W7=0.0271+0.0013\varphi$ $W8= -0.0534+0.0060\varphi$
RANGO DE RENTABILIDAD EN EL INTERVALO	DE 26.6% A 20.0%
RANGO DE RIESGO EN EL INTERVALO	DE 24.0% A 20.6%
CONFORMACIÓN DE LA CARTERA DE ESQUINA	W1=20.8% W3=75.3% W7=3.9%
RELACIÓN CON LA CARTERA ANTERIOR	SALIÓ ACEROS AREQUIPA

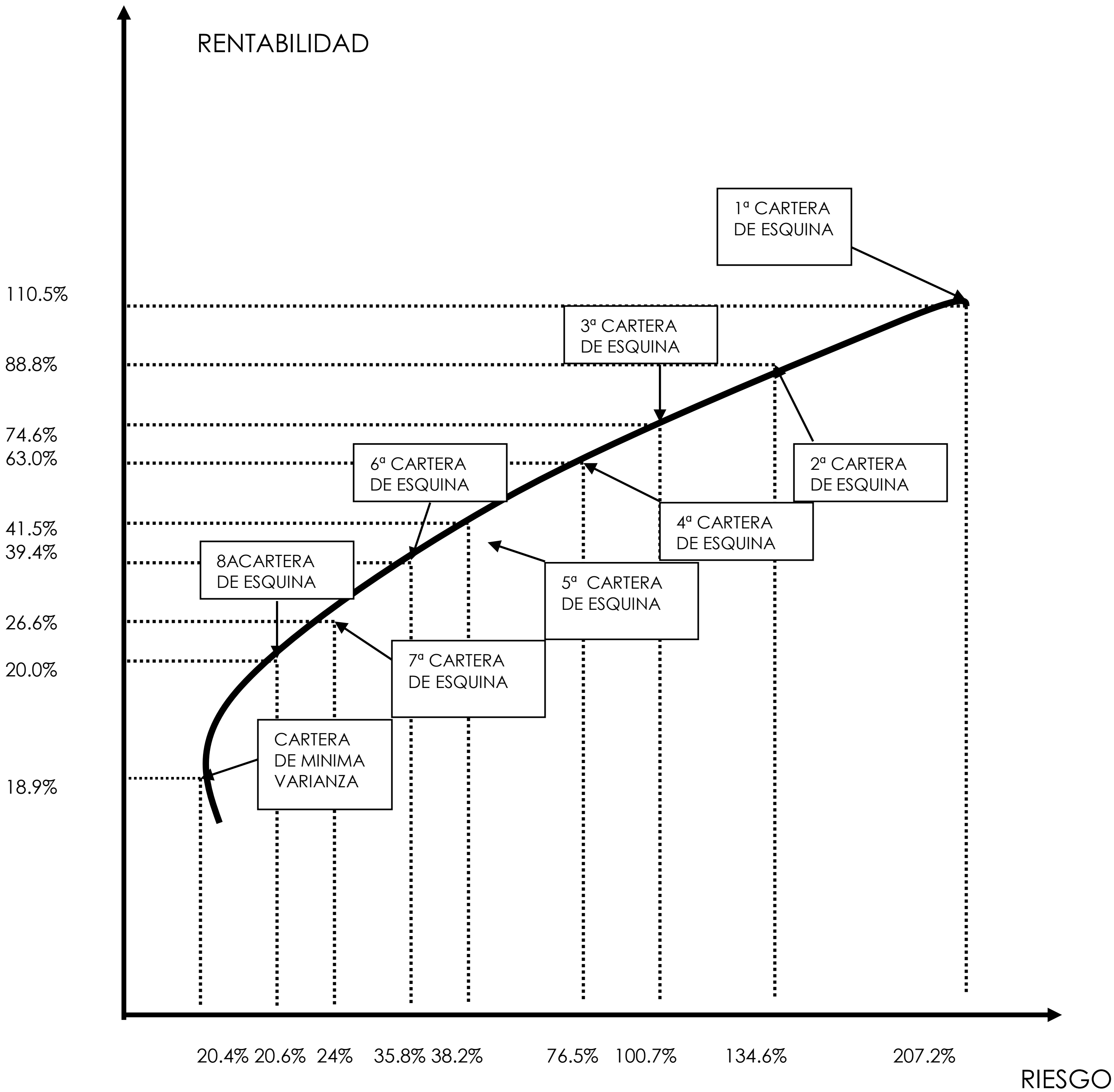
INTERVALO	**NOVENO**
COMPOSICIÓN DE LA CARTERA DE ESQUINA REFERIDA A ESTE INTERVALO	VOLCAN, BANCO DE CREDITO Y EDEGEL
RANGO DE φ	DE φ = 9.0 A φ =0.0
ECUACIONES PARA HALLAR LAS	$W1=0.1878+0.0022\varphi$

CARTERAS EFICACES	W3=0.7817-0.0032φ W7=0.0305+0.0010φ
RANGO DE RENTABILIDAD EN EL INTERVALO	DE 20.0% A 18.9%
RANGO DE RIESGO EN EL INTERVALO	DE 20.6% A 20.4%
CONFORMACIÓN DE LA CARTERA DE ESQUINA	W1=18.8% W3=78.2% W7=3.0%
RELACIÓN CON LA CARTERA ANTERIOR	SALIÓ MINSUR

La obtención del conjunto de carteras eficientes, analizadas en el cuadro anterior, nos da como resultado la frontera eficiente, la que también se puede describir gráficamente. Veamos

GRÁFICO VII.20

FRONTERA EFICIENTE PARA EL CASO DE LA BOLSA DE VALORES DE LIMA



En el gráfico anterior se muestran solamente, las carteras de esquina pero debe quedar en claro que la línea sombreada (frontera eficiente) es perfectamente alcanzable aplicando las ecuaciones que hemos hallado anteriormente, sabiendo que para cada nivel de riesgo existe una cartera tal que maximiza la rentabilidad, o lo que es lo mismo para cada nivel de rentabilidad existe un nivel mínimo de riesgo. A la luz de esta verdad vamos a interpretar nuestros resultados a fin de contrastar nuestras hipótesis de trabajo

CAPÍTULO VII

EVALUACIÓN EMPÍRICA DE LA TEORÍA DEL PORTAFOLIO DE MARKOWITZ AL CASO DE LA BOLSA DE VALORES DE LIMA

RECOMENDACIONES

1) El Mercado de Capitales se constituye en un pilar importantísimo para poder alcanzar, niveles de crecimiento económico y con ello niveles de bienestar económico en la población, trasladando recursos de un lado, de los agentes superávitarios a los agentes deficitarios, buscando con ello incrementar los niveles de inversión real en la economía, lo que conlleva a mejores niveles salariales, así como a incrementar el empleo en el Perú. El Rol del Estado no consiste en aplicar políticas asistencialitas, ni exagerar el gasto corriente dentro del presupuesto de la República, las que en determinados momentos pueden ser beneficiosas, sino también en crear y fomentar la infraestructura en carreteras, educación, salud, etc. mediante la inversión pública, sin embargo durante el año 2006 está alcanzó sólo el 2.9% del Producto Bruto Interno, a todas luces insuficiente para conseguir tasas de crecimiento mayores, de ahí la necesidad que dicha inversión debe ser complementada con la Inversión Privada, por lo que se debería facilitar la misma la que se ha demostrado es el único canal para salir del subdesarrollo de ahí **la recomendación de fomentar el desarrollo de los Mercados de Capitales** en donde los agentes económicos tengan acceso al capital, no solo vía intermediación indirecta, (sistema bancario y no bancario) sino de manera directa, mediante emisión de instrumentos financieros por parte de las empresas , a fin de poder proveerse de recursos.

2) Una de las condiciones para que un Mercado de Capitales sea desarrollado es que exista TRANSPARENCIA entendiéndose esta

por el derecho de cualquier inversionista a obtener toda la información relacionada con la inversión a realizarse, conocer las transacciones realizadas en el mercado de capitales, así como los hechos de importancia de las empresas que puedan afectar las cotizaciones de las acciones en la bolsa, **por lo que se recomienda mejorar los niveles de transparencia en los Mercados de Capitales, es decir tener a la mano la mayor disponibilidad de información posible asimilable.** En la actualidad existe información, sin embargo esta muchas veces no suple las expectativas de los inversionistas, en la presente investigación se trato de medir las rentabilidades de las acciones de manera individual, las que para ser determinadas con exactitud se debe conocer ciertos hechos de importancia tales como los cambio de valor nominal, la entrega de dividendos en efectivo, la entrega de dividendos en acciones, ampliaciones de capital, reducciones de capital, etc. Información que no se encuentra fácilmente, es difícil de obtener, por lo que al no hallarse toda la información completa, se tamo datos ya elaborados como el Índice de de Lucratividad que aparece en los boletines diarios de la Bolsa de Valores de Lima.

3) La Transparencia en los Mercados de Capitales, no sólo esta relacionado a la obtención de información de los hechos de las empresas en donde se quiere invertir, sino también esta relacionado con el conocimiento de técnicas para invertir, las cuales todo Asesor en Inversiones, o Especialista debe conocer, para de esta manera tomar las mejores decisiones en cuanto a asignación de recursos. Si bien son temas especializados, sin embargo son más que necesarios como lo demuestra la presente investigación, el no conocer dichas técnicas implica asumir riesgos innecesarios a los potenciales inversionista. **Por lo tanto se recomienda la difusión, propagación y el mayor conocimiento de**

estos criterios con el fin de que los inversionistas o los especialistas tomen las mejores decisiones y no asuman riesgos innecesarios

Por un lado tenemos el conocimiento de las técnicas provenientes del Análisis Fundamental, las que basan sus pronósticos en el comportamiento de las empresas, el Análisis Bottom Up y el de la economía o Análisis Top-Down, (tal como se explico en la presente investigación), tomando en cuenta a indicadores como El crecimiento del Producto Bruto Interno, La Inflación, El Nivel de Reservas Internacionales en un país, Política de tipo de cambio, el Riesgo-País, etc. A nivel Macroeconómico, mientras que se deberían difundir indicadores como el ratio Valor de Mercado sobre Valor Contable, Métodos de Valorización, basado en Flujos de Caja por acción, con el fin de determinar los valores intrínsecos de las diferentes acciones, etc. Los cuales ayudaran a la mejor toma de inversiones de los diferentes agentes económicos en nuestra sociedad.

En segundo lugar tenemos que se debe difundir las técnicas provenientes del Análisis Técnico, (que basa su estudio más en las tendencias o el comportamiento del mercado) conociendo indicadores como medias móviles, osciladores, momentos, etc.

Finalmente, las técnicas provenientes de la Teoría de los Mercados Eficientes, deberían ser difundidas y promocionadas tanto por las Instituciones relacionadas al Mercado de Capitales (Bolsa de Valores de Lima, CONASEV, etc), así como por toda la comunidad científica, con el fin de proveer mayor información y conocimiento al inversor.

4) A la luz de los resultados de la presente investigación se hace evidente la tremenda utilidad de la Diversificación. Es conocido el

refrán de no poner todos los huevos en la misma canasta, lo cual es correcto, sin embargo no se trata de diversificar por diversificar, (tal como se ve en la presente investigación), cayendo en el error que comprar distintas acciones es suficiente para diversificar, o comprar acciones de distintos sectores es una inversión más segura que invertir en sólo acciones lo cual es completamente falso, pues de esta manera lo único que se consigue una diversificación ingenua o superflua sin considerar los parámetros que considera LA TEORÍA DE LA CARTERA DE MARKOWITZ, es decir midiendo la rentabilidad con el indicador del Valor Esperado, el riesgo mediante La Desviación Estándar de las rentabilidades y la correlación entre las rentabilidades de las acciones mediante el Grado de Correlación, o la Covarianza de las rentabilidades de las acciones, los que nos provee de un conjunto de carteras eficientes (tal como se ve en la presente investigación) donde para cada nivel de riesgo se alcanza la máxima rentabilidad, o para cada nivel de rentabilidad se obtiene el mínimo riesgo, **Por lo que se recomienda utilizar los métodos basados en la "Teoría de la Cartera de Markowitz", tal como se ve en la presente investigación.**

5) A los **INVERSIONISTAS ADVERSOS AL RIESGO** y que quiera invertir en la Bolsa de Valores de Lima, los vamos a dividir en 3 GRUPOS de inversionistas:

GRUPO 1: Con una Muy Fuerte animadversión al riesgo, se tolera un riesgo entre 20,4% y 20,6%
GRUPO 2: Con una Normal animadversión al riesgo, se tolera un riesgo entre 20,6% y 24,0%
GRUPO 3: Con una Débil animadversión al riesgo, se tolera un riesgo entre 24,0% y 35,8%

Al Primer Grupo (inversionistas con una fuerte animadversión al riesgo): A la luz de la presente investigación se le recomienda tomar posiciones en portafolios constituidos por acciones del BANCO DE CRÉDITO, EDEGEL y la empresa VOLCAN con participaciones de 18,8%, 78,2% y 3,0% respectivamente donde se obtendría una rentabilidad esperada de 18,9%, y un riesgo de 20,4%, (La cartera de mínima varianza), pudiendo estos portafolios variar en sus participaciones hasta límites de 20,8%, para EL BANCO DE CRÉDITO, 75,3% para EDEGEL Y 3,9% para VOLCAN, portafolio que brinda una rentabilidad de 20,0% y una riesgo de 20,6%.

INVERSIONISTAS ADVERSOS AL RIESGO

GRUPO I

RECOMENDACIONES PARA INVERSIONISTAS CON UNA FUERTE ANIMADVERSIÓN AL RIESGO

PORTAFOLIOS	PORCENTAJES (LÍMITE INFERIOR)	*PORCENTAJES (LÍMITE SUPERIOR)*
BANCO DE CREDITO EDEGEL VOLCAN	18.8% 78.2% 3.0%	*20.8%* *75.3%* *3.9%*
RENTABILIDAD ESPERADA	18.9%	*20.0%*
RIESGO	*20.4%*	*20.6%*

Al Segundo Grupo (inversionistas con una normal animadversión al riesgo): A la luz de la presente investigación se les recomienda tomar posiciones en portafolios constituidos por acciones del BANCO DE CRÉDITO, EDEGEL , la empresa VOLCAN y MINSUR con participaciones de 20,8%, 75,3%, 3,9% y 0,0% respectivamente donde se obtendría una rentabilidad esperada de 20,0%, y un riesgo de 20,6%, pudiendo estos portafolios ser variables hasta el límite de 23,5%, para EL BANCO DE CRÉDITO, 51,3% para EDEGEL, 7,8% para VOLCAN, y 17,4% para MINSUR portafolio que brinda una rentabilidad de 26,6% y una riesgo de 24,0%.

INVERSIONISTAS ADVERSOS AL RIESGO

GRUPO II

RECOMENDACIONES PARA INVERSIONISTAS CON UNA NORMAL ANIMADVERSIÓN AL RIESGO

PORTAFOLIOS	PORCENTAJES (LÍMITE INFERIOR)	*PORCENTAJES (LÍMITE SUPERIOR)*
BANCO DE CREDITO	20.8%	*23.5%*
EDEGEL	75.3%	*51.3%*
VOLCAN	3.9%	*7.8%*
MINSUR	0.0%	*17.4%*
RENTABILIDAD ESPERADA	20.0%	26.6%
RIESGO	*20.6%*	*24.0%*

Al Tercer Grupo (inversionistas con una débil animadversión al riesgo): A la luz de la presente investigación se les recomienda tomar posiciones en portafolios constituidos por acciones del BANCO DE CRÉDITO, EDEGEL, VOLCAN, ACEROS AREQUIPA y MINSUR, con participaciones de 23,5%, 51,3%, 7,8% 0,0% Y 17,4% respectivamente donde se obtendría una rentabilidad esperada de 26,6%, y un riesgo de 24,0%, pudiendo estos portafolios ser variables hasta los límites de 29,8% , para EL BANCO DE CRÉDITO, 0% para EDEGEL Y 9,8% para VOLCAN, 17,7% para ACEROS

AREQUIPA, Y 42,7% para MINSUR, portafolio que brinda una rentabilidad de 39,4% y una riesgo de 35,8%.

INVERSIONISTAS ADVERSOS AL RIESGO

GRUPO III

RECOMENDACIONES PARA INVERSIONISTAS CON UNA DÉBIL ANIMADVERSIÓN AL RIESGO

PORTAFOLIOS	PORCENTAJES (LÍMITE INFERIOR)	*PORCENTAJES (LÍMITE SUPERIOR)*
BANCO DE CREDITO	23.5%	*29.8%*
EDEGEL	51.3%	*0.0%*
VOLCAN	7.8%	*9.8%*
MINSUR	17.4%	*42.7%*
ACEROS AREQUIPA	0.0%	*17.7%*
RENTABILIDAD ESPERADA	26.6%	*39.4%*
RIESGO	*24.0 %*	*35.8%*

6) A los **INVERSIONISTAS CON UNA TOLERANCIA NORMAL AL RIESGO** y que quiera invertir en la Bolsa de Valores de Lima, los vamos a dividir en 3 GRUPOS de inversionistas:

GRUPO 1: Con una baja tolerancia al riesgo, se tolera un riesgo entre 35,8% y 38,2%

GRUPO 2: Con una tolerancia normal al riesgo, se tolera un riesgo entre 38,2% y 76,5%

GRUPO 3: Con una alta tolerancia al riesgo, se tolera un riesgo entre 76,5% y 100,7%

Al Primer Grupo (inversionistas con una baja tolerancia al riesgo): A la luz de la presente investigación se le recomienda tomar posiciones en portafolios constituidos por acciones del BANCO DE CRÉDITO, VOLCAN MINSUR Y ACEROS AREQUIPA con participaciones de 29,8%, 9,8%. 42,7% y 16,7% respectivamente donde se obtendría una rentabilidad esperada de 39,4%, y un riesgo de 35,8%, pudiendo estos portafolios ser variables hasta los límites de 26,3%, para EL BANCO DE CRÉDITO, 12,0% para VOLCAN, 42,6% para MINSUR Y 19,1% para ACEROS AREQUIPA portafolio que brinda una rentabilidad de 41,5% y una riesgo de 38,2%.

INVERSIONISTAS CON UNA TOLERANCIA NORMAL AL RIESGO

GRUPO I

RECOMENDACIONES PARA INVERSIONISTAS CON UNA BAJA TOLERANCIA AL RIESGO

PORTAFOLIOS	PORCENTAJES (LÍMITE INFERIOR)	*PORCENTAJES (LÍMITE SUPERIOR)*
BANCO DE CREDITO VOLCAN MINSUR ACEROS AREQUIPA	29.8% 9.8% 42.7% 17.7%	*26.3%* *12.0%* *42.6%* *19.1%*
RENTABILIDAD ESPERADA	39.4%	*41.5%*
RIESGO	*35.8%*	*38.2%*

Al Segundo Grupo (inversionistas con una tolerancia normal al riesgo): A la luz de la presente investigación se le recomienda tomar posiciones en portafolios constituidos se les recomienda tomar posiciones en portafolios constituidos por acciones del BANCO DE CRÉDITO, VOLCAN, MINSUR, ACEROS AREQUIPA y ATACOCHA, con participaciones de 26,3%, 12,0%, 42,6%, 19,1% y 0,0% respectivamente donde se obtendría una rentabilidad esperada de 41,5%, y un riesgo de 38,2%, pudiendo estos portafolios ser variables hasta limites de 0,0.% , para EL BANCO DE CRÉDITO, 27,2% para VOLCAN, 23,8% para MINSUR, 27,5% para ACEROS AREQUIPA, Y 21,5% para ATACOCHA, portafolio que brinda una rentabilidad de 63,0% y una riesgo de 76,5%.

INVERSIONISTAS CON UNA TOLERANCIA NORMAL AL RIESGO

GRUPO II

RECOMENDACIONES PARA INVERSIONISTAS CON UNA TOLERANCIA NORMAL AL RIESGO

PORTAFOLIOS	PORCENTAJES (LÍMITE INFERIOR)	*PORCENTAJES (LÍMITE SUPERIOR)*
BANCO DE CREDITO	26.3	*0%*
VOLCAN	12.0%	*27.2%*
MINSUR	42.6%	*23.8%*
ACEROS AREQUIPA	19.1%	*27.5%*
ATACOCHA	0.0%	*21.5%*
RENTABILIDAD ESPERADA	41.5%	*63.0%*
RIESGO	*38.2%*	*76.5%*

Al Tercer Grupo (inversionistas con una alta tolerancia al riesgo): A la luz de la presente investigación se le recomienda tomar posiciones en portafolios constituidos se les recomienda tomar posiciones en portafolios constituidos por acciones de VOLCAN, MINSUR, ACEROS AREQUIPA y ATACOCHA con participaciones de 27,2% 23,8%, 27,5%, y 21,5% respectivamente donde se obtendría una rentabilidad esperada de 63,0%, y un riesgo de 76,5%, pudiendo estos portafolios ser variables hasta límites de 34,8% para VOLCAN, 0% para MINSUR, 30.8% para ACEROS AREQUIPA Y 34.4% para la empresa ATACOCHA, portafolio que brinda una rentabilidad de 74,6% y una riesgo de 100,7%.

INVERSIONISTAS CON UNA TOLERANCIA NORMAL AL RIESGO

GRUPO III

RECOMENDACIONES PARA INVERSIONISTAS CON UNA ALTA TOLERANCIA AL RIESGO

PORTAFOLIOS	PORCENTAJES (LÍMITE INFERIOR)	*PORCENTAJES (LÍMITE SUPERIOR)*
VOLCAN	27.2%	*34.8%*
MINSUR	23.8%	*0.0%*
ACEROS AREQUIPA	27.5%	*30.8%*
ATACOCHA	21.5%	*34.4%*
RENTABILIDAD ESPERADA	63.0%	*74.6%*
RIESGO	*76.5%*	*100.7%*

7) A los **INVERSIONISTAS AMANTES AL RIESGO** y que quiera invertir en la Bolsa de Valores de Lima, los vamos a dividir en 3 GRUPOS de inversionistas:

GRUPO 1: Con una tendencia fuerte hacia el riesgo, se tolera un riesgo entre 100,7% y 134,4%
GRUPO 2: Con una tendencia muy fuerte hacia el riesgo, se tolera un riesgo entre 134,4% y menor a 207,2%
GRUPO 3: Con una tendencia extremadamente fuerte hacia el riesgo, se tolera un riesgo de 207,2 % (no se diversifica)

Al Primer Grupo (inversionistas con una tendencia fuerte hacia el riesgo): A la luz de la presente investigación se le recomienda tomar posiciones en portafolios constituidos por acciones de VOLCAN, ACEROS AREQUIPA y ATACOCHA con participaciones de 34,8%, 30,8% y 34,4% respectivamente donde se obtendría una rentabilidad esperada de 74,6% y un riesgo de 100,7%, pudiendo estos portafolios ser variables hasta limites de 56,3% VOLCAN, 0% para ACEROS AREQUIPA y 43,7% para ATACOCHA, portafolio que brinda una rentabilidad de 88,8% y una riesgo de 134,4%.

INVERSIONISTAS AMANTES AL RIESGO

GRUPO I

RECOMENDACIONES PARA INVERSIONISTAS CON UNA TENDENCIA FUERTE HACIA EL RIESGO

PORTAFOLIOS	PORCENTAJES (LÍMITE INFERIOR)	*PORCENTAJES (LÍMITE SUPERIOR)*
VOLCAN ACEROS AREQUIPA ATACOCHA	34.8% 30.8% 34.4%	*56.3%* *0%* *43.7%*
RENTABILIDAD ESPERADA	*74.6%*	*88.8%*
RIESGO	*100.7%*	*134.4%*

Al Segundo grupo (inversionistas con una tendencia muy fuerte hacia el riesgo): A la luz de la presente investigación se le recomienda tomar posiciones en portafolios constituidos por acciones de VOLCAN y ATACOCHA con participaciones de 56,3% y 43,7% respectivamente donde se obtendría una rentabilidad esperada de 88,8%, y un riesgo de 134,4%, pudiendo estos portafolios ser variables hasta el límite de 100,0% para VOLCAN y 0% para ATACOCHA portafolio que brinda una rentabilidad de 110,5% y un riesgo de 207,2%.

INVERSIONISTAS AMANTES AL RIESGO

GRUPO II

RECOMENDACIONES PARA INVERSIONISTAS CON UNA TENDENCIA MUY FUERTE HACIA EL RIESGO

PORTAFOLIOS	PORCENTAJES (LÍMITE INFERIOR)	*PORCENTAJES (LÍMITE SUPERIOR)*
VOLCAN ATACOCHA	56.3% 43.7%	*100%* *0%*
RENTABILIDAD ESPERADA	88.8%	*110.5%*
RIESGO	*134.4%*	*207.2%*

Al Tercer grupo (inversionistas con una tendencia extremadamente muy fuerte hacia el riesgo): A la luz de la presente investigación se le recomienda tomar posiciones en un solo portafolio constituidos por acciones de VOLCAN en un 100,0% lo que les brindará una rentabilidad de 110,5% y un riesgo de 207,2%.

INVERSIONISTAS AMANTES AL RIESGO

GRUPO III

RECOMENDACIONES PARA INVERSIONISTAS CON UNA TENDENCIA EXTREMADAMENTE FUERTE HACIA EL RIESGO

PORTAFOLIOS	PORCENTAJES (LÍMITE INFERIOR)	*PORCENTAJES (LÍMITESUPERIOR)*
VOLCAN	100%	*100%*
RENTABILIDAD ESPERADA	110.5%	*110.5%*
RIESGO	*207.2%*	*207.2%*

Es decir para esta clase de inversionista no cabe la diversificación, dado que tiene una tendencia extremadamente fuerte hacia el riesgo.

B I B L I O G R A F I A

ALLEN PAULOS, “Un matemático invierte en la Bolsa “, Matemas 2003

ASWATH DAMODARAN, “Security analysis for Investment and Corporate Finance”, John Wiley, 1994

BOLETÍN LA BOLSA DE VALORES DE LIMA “ Bolsa de la Valores de LIma", 1997-2006

BOOT, JOHN, "Quadratic Programming", North-Holland Publishing Company, Amsterdam Holland, 1964.

BURTON G. MALKIEL, “A Random Walk Down Wall Street”, Alianza Editorial, 1990

COHEN KALMAN, AND POGUE JERRY "An Empirical Evaluation of Alternative portfolio-Selection Models", Journal of Business, Vol 40 No 1, Abril 1967.

DE LA ROCHA JULIO, “Rentabilidad Bursátil, Evidencia Empírica” Centro de Investigaciones Económicas y sociales de la Universidad de Lima”1988

DE LARA ALFONSO, “ Medición y control de riesgos financieros”, Limusa, 2002

DEWEY, DONALD, "Teoría Moderna del Capital", Herreros Hermanos,Sucs, México, 1967.

DOOD PETER, The Stock Market Theories and Evidence”, Richard D. Irwin, 1985

DURBAN, SALVADOR "La Empresa ante el Riesgo", Iberico Europea de Ediciones,S.A., Madrid España, 1983.

ELTON J. EDWIN, “Modern Portfolio Theory and Investment análisis” John Wiley, 1995

FAMA, EUGENE, "The Behavior of Stock Markets Prices", Journal of Business, 1965.

FISHER JORDAN, “ Security analysis and portfolio management”, Prentice-Hall 1979

FONSECA, MIGUEL, “Análisis de Inversiones, evaluación de acciones y selección de cartera” 1989

FRANCIS J. C, “Análisis y Gestión de carteras de valores”, Prentice-Hall, 1971

FRIEDMAN, MILTON "The Utility Analysis of Choices involving Risk", The Journal of Political Economy, Vol LVI No 4, Agosto 1948.

GOMEZ BEZARES FERNANDO, “Valoración de acciones en la bolsa española”, Biblioteca de gestión, 1994

HERNANDEZ, HUGO, "Bolsa de Valores", Qolcani, Lima Perú, Tomo I, 1986.

HERNANDEZ HUGO, "Política de Dividendos de las Empresas inscritas en Bolsa", Qolcani, Lima Perú, Tomo II, 1986.

JORION PHILIPPE, “Valor en Riesgo”, Limusa, 2000

LITTLEJOHN GEORGE, “Systemic Risk facing the world Financial Institutions”. Financial Publishing, 1996

MAO, JAMES "Análisis Financiero", El Ateneo, Argentina, 1980.

MARKOWITZ, HARRY, "Portfolio Selection", Journal of Finance, 1952.

MARKOWITZ, HARRY, "Portfolio, Selection. Efficient Diversification of Investment", John Willey and Sons. Inc., New York 1959.

MARQUEZ JAVIER, “Carteras de Inversión”, Limusa, 1976

PARZAN, MANUEL, "Teoría Moderna de Probabilidades y sus Aplicaciones", Editorial Lamusa México, 1976.

SHARPE WILLIAM, "Analysis Portfolio", Journal Finance and Quant Analysis, Junio 1967.

SHARPE WILLIAM, "A Simplified Model for Portfolios Analysis", Management Science, 1963.

SHARPE WILLIAM, “Investments”, Prentice may Inc, 1976

STEINER BOB, “Conceptos esenciales del Mercado financiero”, Pearson Education, 2002

SOLDEVILLA, EMILIO "Decisiones Empresariales con Riesgo e Incertidumbre", Hispano Europea, España, 1984.

TOBIN JAMES, "Liquidity Preference as Behavior Toward Risk", Review of Economics Studies, 1958.

WILLIAMS, EDWARD "Investment Analysis", Prentice-Hall, Englewood Cliffs,N.J., 1974.

WOLVE, PHILIP, "The Simplex Method for Quadratic Programming", Econometrica Vol 27 No 3,Junio 1959.

ANEXO I

TÉCNICAS DE ELABORACIÓN DE UNA CARTERA

METODOS MATEMÁTICOS

Los métodos matemáticos para la obtención de una cartera eficiente se obtiene mediante operaciones de cálculo matricial y diferencial, entre los principales métodos tenemos:

1) Obtención del conjunto de carteras eficientes calculando el mínimo de una función objetivo sin considerar las ecuaciones del mapa de indiferencia del inversor.

2) Obtención del conjunto de carteras eficientes calculando el mínimo de una función objetivo considerando las ecuaciones del mapa de indiferencia del inversor.

3) Obtención del conjunto de carteras eficientes por métodos de programación matemática.

I.1) OBTENCIÓN DE UNA CARTERA EFICAZ CALCULANDO EL MÍNIMO DE UNA FUNCIÓN OBJETIVO DE LAGRANGE SIN CONSIDERAR LAS ECUACIONES DEL MAPA DE INDIFERENCIA DE UN INVERSOR

Sabemos por el capítulo IV que la varianza de una cartera es:

$$\sigma^2(r_c) = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=n} W_i W_j Cov(r_i, r_j) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

El problema consiste en minimizar el riesgo de una cartera (que está dado por la varianza de dicha cartera), sujeto a un nivel de rentabilidad dado que como se vio en el capítulo IV, está definida como :

$$E(r_c) = \sum_{i=1}^{i=n} W_i E(r_i) \ldots\ldots\ldots (2)$$

Asimismo se debe cumplir que:

$$\sum_{i=1}^{i=n} W_i = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Es decir la suma de todas las proporciones invertidas en cada uno de los activos sea uno. Esto se soluciona planteando una función objetivo de Lagrange, donde se busca minimizar dicha función sujeta a las restricciones (2) y (3). o sea, minimizar la función Z que se define:

$$Z = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=n} W_i W_j Cov(r_i, r_j)$$

(varianza de la cartera)
Sujeto a:

$$1)\sum_{i=1}^{i=n} W_i E(r_i) = E(r_c)$$

$$2)\quad \sum_{i=1}^{i=n} W_i = 1$$

De donde resulta la función objetivo

$$Z = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=n} W_i W_j Cov(r_i, r_j) + \lambda_1 (\sum_{i=1}^{i=n} W_i E(r_i) - E(r_c)) + \lambda_2 (\sum W_i - 1)$$

Por lo que para minimizar dicha función hacemos:

$$\frac{\delta Z}{\delta W_i} = \frac{\delta Z}{\lambda_1} = \frac{\delta Z}{\delta \lambda_2} = 0$$

para i=1,2.....................n (número de activos),esto nos da como resultado:

$$(1)\frac{\delta Z}{\delta W_1} = 2W_1 Cov(r_1, r_1) + ...+ 2W_n Cov(r_1, r_n) + \lambda_2 + \lambda_1 E(r_1) = 0$$

$$(2)\ \frac{\delta Z}{\delta W_2} = 2W_1 Cov(r_2, r_1) + ... + 2W_n Cov(r_2, r_n) + \lambda_2 + \lambda_1 E(r_2) = 0$$

....

....

....

....

$$(n)\ \frac{\delta Z}{\delta W_n} = 2W_1 Cov(r_n, r_1) + ... + 2W_n Cov(r_n, r_n) + \lambda_2 + \lambda_1 E(r_n) = 0$$

$$(n+1)\ \frac{\delta Z}{\delta \lambda_1} = W_1 E(r_1) + W_2 E(r_2) + ... \quad .... \quad . + W_n E(r_n) - E(r_c) = 0$$

$$(n+2)\ \frac{\delta Z}{\delta \lambda_2} = W_1 + W_2 + ... \quad .... \quad .... \quad .... + W_n - 1 = 0$$

Donde se ha generado un sistema de n+2 ecuaciones que escribiéndolos de manera matricial resulta:

$$\begin{bmatrix} 2Cov(r_1,r_1)....2Cov(r_1,r_n) & E(r_1) & 1 \\ 2Cov(r_2,r_1)....2Cov(r_2,r_n) & E(r_2) & 1 \\ .... & . & . \\ .... & . & . \\ 2Cov(r_n,r_1)....2Cov(r_n,r_n) & E(r_n) & 1 \\ 1.......................................1 & 0 & 0 \\ E(r_1)..........................E(r_n) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ . \\ . \\ W_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \\ 1 \\ E(r_c) \end{bmatrix}$$

La solución a este sistema de ecuaciones determina a la cartera de mínima varianza para una rentabilidad dada, vamos a llamar a la matriz de coeficientes Z, al vector de los pesos lo llamaremos W y por último al valor de las constantes K, por Lo que de la igualdad matricial anterior resulta:

$$Z\ W = K$$

Multiplicando esta expresión por la inversa de Z

$$Z^{-1}\ Z\ W = Z^{-1}\ K$$

$$I\ W = Z^{-1}\ K$$

$$W = Z^{-1}\ K$$

De donde W incluye todos los pesos de la cartera de mínima varianza para un valor determinado de $E(r_i)$.

La solución a este sistema de ecuaciones nos dará:

$$W_1 = a_1 + b_1\ E(r_c)$$
$$W_2 = a_2 + b_2\ E(r_c)$$
$$. \quad . \quad . \quad .$$
$$. \quad . \quad . \quad .$$
$$W_n = a_n + b_n\ E(r_c)$$

Donde los W_n dependerán de la rentabilidad de la cartera, o sea las $E(r_c)$, nótese que los valores a_n,b_n son los mismos para cada tipo de rentabilidad, es decir se pueden conocer sus valores sin necesidad de conocer los valores de $E(r_c)$, luego de tener dichas ecuaciones se sustituyen con la rentabilidad que se quiera y se obtendrán los pesos o participación correspondientes a cada activo para un nivel dado de rentabilidad, y así de esta manera obtener el portafolio o cartera de mínima varianza.

Luego de determinar la cartera de mínima varianza para distintos niveles de rentabilidad esperada, se obtiene pues el conjunto de carteras o portafolios eficientes.

I.2) OBTENCIÓN DE UNA CARTERA EFICAZ CALCULANDO EL MÍNIMO DE UNA FUNCIÓN OBJETIVO DE LAGRANGE CONSIDERANDO LAS ECUACIONES DEL MAPA DE INDIFERENCIA DE UN INVERSOR

Se ha visto que un inversor trata de alcanzar la curva de indiferencia más alta tal como se muestra en el capítulo iv, en esta sección vamos a suponer que todas las curvas de indiferencia de un inversor son de forma lineal de tal manera que $E(r_C) = a+b\ \sigma^2\ (r_C)$ tal como se ve en el Gráfico A-1.

Despejando $\sigma^2\ (r_C)$ en el mismo gráfico tenemos:

$$\sigma^2\ (r_C) = +\alpha + \phi E(r_C)$$

donde:

$$\alpha = -a/b$$

$$\phi = 1/b$$

Para una persona sumamente adversa al riesgo implicará que ϕ tome un valor cercano al cero y a viceversa cuando ϕ sea sumamente grande implicará que el inversor es amante al riesgo.

El Gráfico A-1 nos muestra que mientras α sea menor la curva de indiferencia correspondiente será más elevada y por consiguiente decir que un inversor esta maximizando su utilidad es sinónimo de decir que dicho inversor esta minimizando α, por lo que dicho inversor buscará minimizar dicha variable, objetivo que se puede plantear en forma matemática de la siguiente manera.

Minimizar $\alpha = \sigma^2$ (r_c) - ϕ E(r_c)

Sujeto a:

$\sum$ W_i = 1

Al igual que en el caso anterior la función objetivo de Lagrange será:

$$\text{MIN } Z = \_\varnothing E(r_c) + \sigma^2(r_c) + \lambda_1(1 - \sum_{i=1}^{i=n} W_i)$$

Donde:

$$\sum_{i=1}^{i=N} W_i E(r_i) = E(r_c)$$

$$\sigma^2(r_c) = \sum_{i=1}^{i=N} \sum_{j=1}^{j=N} W_i W_j Cov(r_i, r_j)$$

Donde "n" es el número de activos que se quiere diversificar. Al igual que en la sección A.1 se opera derivando con respecto a W_i e igualando a cero de donde resulta:

$$\frac{\delta Z}{\delta W_1} = -\phi E(r_1) + 2W_1 Cov(r_1, r_1) + ... + 2W_n Cov(r_1, r_n) - \lambda_1 = 0$$

$$\frac{\delta Z}{\delta W_2} = \_\phi E(r_2) + 2W_1 cov(r_2, r_1) + ... + 2W_N Cov(r_2, r_N) - \lambda_1 = 0$$

....

$$\frac{\delta Z}{\delta W_n} = \_\phi E(r_n) + 2W_1 Cov(r_n, r_1) + ... + 2W_n Cov(r_n, r_n) - \lambda_1 = 0$$

$$\frac{\delta Z}{\delta \lambda_1} = 1 - W_1 - W_2 - .....W_n = 0$$

De donde se ha obtenido un sistema de n+1 ecuaciones el cual puede ser expresado en forma matricial de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} 2Cov(r_1,r_1)....2Cov(r_1,r_n) & -1 \\ 2Cov(r_2,r_1)....2Cov(r_2,r_n) & -1 \\ .... & . \\ .... & . \\ 2Cov(r_n,r_1)....2Cov(r_n,r_n) & -1 \\ 1.......................................1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ . \\ . \\ W_n \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi E(r_1) \\ \phi E(r_2) \\ . \\ . \\ \phi E(r_n) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si llamamos a la matriz de covarianzas Z, al de las incógnitas o pesos correspondientes a cada activo financiero W_i y al de las constantes K tenemos Entonces:

Z W = K

De donde: Z^{-1} Z W = Z $^{-1}$ K

I W = Z $^{-1}$ K

W = Z $^{-1}$ K

De donde W se determina multiplicando la matriz Z $^{-1}$ por K

Si hacemos

$$Z^{-1} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \cdots\cdots Z_{1n} & Z_{1,n+1} \\ Z_{21} & Z_{22} \cdots\cdots Z_{2n} & Z_{2,n+1} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ Z_{n+1,1} & Z_{n+1,2} \cdots Z_{n+1,n} & Z_{n+1,n+1} \end{bmatrix} W = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ . \\ . \\ W_n \\ \lambda_1 \end{bmatrix} K = \begin{bmatrix} \phi E(r_1) \\ \phi E(r_2) \\ . \\ . \\ \phi E(r_n) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ . \\ . \\ W_n \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \cdots Z_{1n} & Z_{1,n+1} \\ Z_{21} & Z_{22} \cdots Z_{2n} & Z_{2,n+1} \\ .. & .. & .. \\ .. & .. & .. \\ Z_{n1} & Z_{n2} \cdots Z_{n,n} & Z_{n,n+1} \\ Z_{n+1,1} & Z_{n+1,2} \cdots Z_{n+1,n} & Z_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi E(r_1) \\ \phi E(r_2) \\ . \\ . \\ \phi E(r_n) \\ 1 \end{bmatrix}$$

De donde:

$$\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ . \\ . \\ W_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \cdots Z_{1,n} \\ Z_{21} & Z_{22} \cdots Z_{2,n} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots\cdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} \cdots Z_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi E(r_1) \\ \phi E(r_2) \\ . \\ . \\ \phi E(r_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{1,n+1} \\ Z_{2,n+1} \\ . \\ . \\ Z_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

Y además:

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} Z_{n+1,1} & Z_{n+1,2} \cdots Z_{n+1,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi E(r_1) \\ \phi E(r_2) \\ . \\ . \\ . \\ . \\ \phi E(r_n) \end{bmatrix} + Z_{n+1,n+1}$$

o lo que es lo mismo:

$$\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ . \\ . \\ . \\ W_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \cdots Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} \cdots Z_{2n} \\ .. & \cdots\cdots \\ .. & \cdots\cdots \\ .. & \cdots\cdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} \cdots Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(r_1) \\ E(r_2) \\ . \\ . \\ . \\ E(r_n) \end{bmatrix} \phi + \begin{bmatrix} Z_{1,n+1} \\ Z_{2,n+1} \\ . \\ . \\ . \\ Z_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

Y además:

$$[\lambda_1] = [Z_{n+1,1} \quad Z_{n+1,2} \cdots\cdots Z_{n+1,n}] \begin{bmatrix} E(r_1) \\ E(r_2) \\ . \\ . \\ . \\ . \\ E(r_n) \end{bmatrix} \phi + Z_{n+1,n+1}$$

Expresándolo en notación matricial

$$W = K'\phi + \overline{K}$$
$$W = \overline{K} + K'\phi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1a)$$
$$\lambda_1 = \overline{K_\lambda}\phi + K_{\lambda'}\phi \ldots\ldots\ldots\ldots (1b)$$

Donde:

$$\overline{K} = \begin{bmatrix} Z_{1,n+1} \\ Z_{2,n+1} \\ . \\ . \\ . \\ Z_{n,n+1} \end{bmatrix} \overline{K_\lambda} = Z_{n+1,n+1} \; K' = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \cdots Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} \cdots Z_{2n} \\ .. & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ .. & \ldots\ldots\ldots \\ .. & \ldots\ldots\ldots \\ Z_{n1} & Z_{n2} \cdots Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(r_1) \\ E(r_2) \\ . \\ . \\ . \\ E(r_n) \end{bmatrix}$$

$$K_{\lambda'} = \left[Z_{n+1,1} \cdots\cdots Z_{n+1,n} \right] \begin{bmatrix} E(r_1) \\ E(r_2) \\ . \\ . \\ . \\ E(r_n) \end{bmatrix}$$

Donde la ecuación (1ª) y (1b) nos dice que K,, K ', $K_{\lambda}, K'_{\lambda}$ son constantes y existen una relación lineal entre ϕ y W, esto se ve mejor con la ayuda del Gráfico A-2

Se ve pues que bastará con resolver la ecuación 1ª y 1b para determinar el conjunto de carteras eficientes para cada valor de ϕ, bastará pues con asignarle valores a ϕ que serán desde cero (adverso al riesgo), hasta infinito (amante al riesgo) y quedará resuelto el problema de la determinación de una cartera eficiente para determinado valor de ϕ.

Cabe destacar que este análisis no variará en el caso que se añada un título sin riesgo. Veamos porque. Un título sin riesgo tiene las siguientes características: (hemos de suponer que el título sin riesgo es el título "1").

Cov (r_1,r_1) = 0…………….............................(1)
Cov (r_1,r_2) = Cov(r_2,r_1) = 0………..................(2)

....…....................

....

Cov (r_1,r_n) = Cov(r_n,r_1) = 0..………… ....(n)
E (r_1) = r_1...(n+1)

Donde r_1 es la rentabilidad cierta que brinda el activo sin riesgo o sea el activo "1".
Como se dijo anteriormente el procedimiento es exactamente igual al caso en que no existiese un activo sin riesgo, esto nos lleva al igual que el caso anterior a plantear un sistema de n+1 ecuaciones.

$$\begin{bmatrix} 2Cov(r_1,r_1)....2Cov(r_1,r_n) & -1 \\ 2Cov(r_2,r_1)....2Cov(r_2,r_n) & -1 \\ .... & . \\ .... & . \\ 2Cov(r_n,r_1)....2Cov(r_n,r_n) & -1 \\ 1.................................1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ . \\ . \\ W_n \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi E(r_1) \\ \phi E(r_2) \\ . \\ . \\ \phi E(r_n) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo (1)y (2)...........(n+1) resulta

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.................................0 & -1 \\ 0 & 2Cov(r_2,r_2)....2Cov(r_2,r_n) & -1 \\ .... & .... & .. \\ .... & .... & .. \\ 0 & 2Cov(r_2,r_n)....2Cov(r_n,r_n) & -1 \\ 1 & 1.................................1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ . \\ . \\ W_n \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi r_1 \\ \phi E(r_2) \\ . \\ . \\ \phi E(r_n) \\ 1 \end{bmatrix}$$

De la primera ecuación resulta:

$$-\lambda_1 = \phi\, r_1$$

Sustituyendo esta igualdad desde la ecuación (2) hasta la ecuación (n)
$2\ Cov(r_i,r_2)\ W_2 + ... + 2\ Cov(r_i,r_n)\ W_n - \lambda_1 = \phi\, E(r_i)$

(ecuación 2 hasta ecuación n)

$2\ Cov\ (r_i,r_2)\ W_2 + ... + 2\ Cov(r_i,r_n)\ W_n + \phi r_1 = \phi E(r_i)$

$2\ Cov\ (r_i,r_2)\ W_2 + ... + 2\ Cov(r_i,r_n)\ W_n = \phi (E(r_i) - r_1)$

Escribiéndolo en forma matricial resulta:

$$\begin{bmatrix} 2Cov(r_2,r_2)....2Cov(r_2,r_n) \\ .... \\ .... \\ .... \\ 2Cov(r_n,r_2)....2Cov(r_n,r_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_2 \\ . \\ . \\ . \\ W_n \end{bmatrix} = \phi \begin{bmatrix} E(r_2) - r_1 \\ E(r_3) - r_1 \\ . \\ . \\ E(r_n) - r_1 \end{bmatrix}$$

Donde al igual que en el caso anterior representa un sistema de ecuaciones de n-1 incógnitas ($W_2....W_n$) donde el valor de W_1 se determinará por diferencia dado que:

$$\sum_{i=1}^{i=n} W_i = 1$$

Al igual que el caso anterior llamaremos a la matriz de coeficientes Z, al de incógnitas W y al de constantes K, de donde resulta:

$ZW = K$

$Z^{-1}ZW = Z^{-1} K$

$IW = Z^{-1} K$

$W = Z^{-1} K$

$$\begin{bmatrix} W_2 \\ . \\ . \\ . \\ W_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{22} \cdots Z_{2n} \\ Z_{32} \cdots Z_{3n} \\ . \\ . \\ Z_{n2} \cdots Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (E(r_2) - r_1)\phi \\ (E(r_3) - r_1)\phi \\ . \\ . \\ (E(r_n) - r_1)\phi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} W_2 \\ . \\ . \\ . \\ W_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{22} \cdots Z_{2n} \\ Z_{32} \cdots Z_{3n} \\ . \\ . \\ Z_{n2} \cdots Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (E(r_2) - r_1) \\ (E(r_3) - r_1 \\ . \\ . \\ (E(r_n) - r_1) \end{bmatrix} \phi$$

Expresándolo matricialmente:

W = K ‘ ϕ

Donde

$$K' = \begin{bmatrix} Z_{22} \cdots Z_{2n} \\ Z_{32} \cdots Z_{3n} \\ . \\ . \\ Z_{n2} \cdots Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(r_2) - r_1 \\ E(r_3 - r_1 \\ . \\ . \\ E(r_n) - r_1 \end{bmatrix} \quad y\, W = \begin{bmatrix} W_2 \\ . \\ . \\ . \\ W_n \end{bmatrix}$$

$W = K'\phi$

Donde:

$W_2 = \phi\ K'_2$

$W_3 = \phi\ K'_3$

…............

.........…....

$W_n = \phi\ K'_n$

Por lo que bastará con asignarle un valor a ϕ y se determinará la cartera eficiente. Se ve pues que los métodos de elaboración de una cartera eficaz que son matemáticos son confiables, a estos métodos de elaboración de carteras eficientes se le puede añadir muchas restricciones de igualdad y seguirán siendo útiles, sólo se le agregará las restricciones respectivas en la función objetivo y se procederá a solucionarse.

Cuando las restricciones no son de igualdad los procedimientos matemáticos no servirán de manera directa sino que estos problemas se solucionarán mediante algoritmos de programación matemática como se verá en la siguiente sección.

I.3) METODOS DE PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA

Los métodos matemáticos son útiles para la determinación de carteras eficientes, sin embargo cuando se trata de hallar una cartera eficiente y asimismo legítima, es decir que todos los valores de W_i sean positivos es necesario acudir a la programación matemática.

La programación matemática puede dividirse en 2 grandes campos, la programación lineal y no lineal.

La primera de ellas resuelve problemas de asignación de recursos cuando la función objetivo es lineal así como sus restricciones, en el caso que la función objetivo o algunas de sus restricciones sea no lineal entonces se solucionará por medio de la programación no lineal para el caso específico de la determinación de un portafolio eficiente y asimismo **LEGITIMO** (todos los $W_i \geq 0$) el problema se resuelve por medio de la programación no lineal

Para hallar "una cartera legítima" el problema consiste en minimizar la función Z (tal como se vio en el Anexo A.2) de tal manera que:

$$Z = - \phi \; E(r_C) + \sigma^2 \; (r_C)$$

Sujeto a:

1) $\sum_{i=1}^{i=n} W_i = 1$

2) $W_i \geq 0$

Donde:

$$E(r_C) = \sum_{i=1}^{i=n} W_i \, E(r_C)$$

$$\sigma^2(r_c) = \sum_{i=1}^{i=n} W_i W_j Cov(r_i, r_j)$$

Vemos que a diferencia del Anexo A.2 se añade la restricción (2), este es un problema donde la función objetivo es cuadrática con restricciones lineales, tal como se mencionó anteriormente este problema se resuelve por medio de la programación no lineal.

Para el caso de la determinación de una cartera legítima, la solución puede ser hallada aplicando distintos métodos de programación no lineal, nosotros usaremos el algoritmo basado en las condiciones de Kuhn- Tucker cabe resaltar que estos resultados serán completamente diferentes a los obtenidos hasta ahora, esto se entenderá mejor con la ayuda del Gráfico A-3.

El Gráfico A-3 nos muestra que existe una relación lineal entre los distintos valores de ϕ y W_i (tal como se vio en el anexo A.2), sin embargo esta relación varía dentro de ciertos intervalos (ϕ_1 ,ϕ_2 ,ϕ_3 en el Gráfico A-3). A las carteras que se forman en dichos puntos se les denomina **"CARTERAS DE ESQUINAS O CARTERAS SINGULARES"**, cualquier cartera que éste entre dos carteras singulares será una combinación de dichas carteras y asimismo la cartera cuando ϕ = 0 también es una cartera de esquina.

El problema consiste pues en determinar los W_i correspondientes para cada intervalo así como para cartera de esquina. La técnica para hallar la solución a dicho problema de maximización está basado en las condiciones de Kuhn-Tucker y se detalla a continuación.

ALGORITMO BASADO EN LAS CONDICIONES DE KUHN-TUCKER

PASO 1 :

Este algoritmo empieza buscando la cartera para el primer intervalo (cuando ϕ es un número muy grande).

Esta cartera será aquella que nos brinde la máxima rentabilidad (asimismo es la cartera de más alto riesgo) que cumpla con las restricciones 1) y 2). Este es un problema simple donde lo que se busca es maximizar $E(r_C)$ sujeto a $\sum$ W_i=1 y W_i i≥ 0, dado que $E(r_C) = \sum W_1 E(r_i)$ esto es un problema donde tanto la función objetivo así como sus restricciones son lineales por consiguiente la solución se determina por medio de la programación lineal. Más aún, se puede adelantar que la solución será una cartera de un solo activo y éste será el de más alta rentabilidad. No debe perderse de vista que esta cartera es la cartera legítima cuando ϕ tiende al infinito (es decir a la cartera que se elegirá cuando el inversionista es una persona amante al riesgo).

PASO 2 :

Para determinar esta "cartera legítima" (que de antemano ya sabemos que está compuesta por un solo activo y es el de más alta rentabilidad) se toma la matriz de covarianzas originales, (tal como se vio en el Anexo A.2) dado que ya sabemos que la cartera cuando ϕ es un número muy grande está compuesta de un sólo activo, añadimos estas restricciones a la matriz de covarianzas originales, o sea:

Matriz original de covarianzas:

$$\begin{bmatrix} 2Cov(r_1,r_1)....2Cov(r_1,r_n) & -1 \\ .... & . \\ .... & . \\ 2COv(r_n,r_1)....2Cov(r_n,r_n) & -1 \\ 1..1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ . \\ . \\ W_n \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi E(r_1) \\ . \\ . \\ \phi E(r_n) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se convierte en:

$$
\begin{bmatrix}
1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0 & 0 \\
0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0 & 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & . \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & . \\
2Cov(r_i, r_1)\ldots Cov(r_i, r_n) & -1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & . \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & . \\
0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 & 0 \\
1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
W_1 \\ W_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ W_n \\ \lambda_1
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ 0 \\ . \\ . \\ \phi E(r_i) \\ 0 \\ . \\ 0 \\ 1
\end{bmatrix}
$$

que representa el sistema de ecuaciones para el primer intervalo cuya solución nos dará los distintos valores para W_i que como ya sabemos de antemano está constituida por el activo de más alta rentabilidad, bastará con solucionar, el sistema de ecuaciones anterior para demostrar dicha afirmación. Asimismo esta solución se puede expresar de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
W_i &= \overline{K_i} + K_{i'}\phi \\
\lambda &= \overline{K_\lambda} + K_{\lambda'}\phi
\end{aligned}
$$

Donde para el caso específico de este intervalo (cuando ϕ es demasiado grande), para los activos que están fuera de la cartera $K_1 = 0$ y $K'_1 = 0$ (todos los activos menos el más rentable) mientras que los que están dentro de la cartera (el activo más rentable) $K_1 = 1$ y K ' = 0

Cabe ahora la interrogante ¿Cómo encontrar o determinar el nuevo punto donde varíe esta situación? Para responder a esta pregunta nos ayudaremos de las condiciones de Kuhn-Tucker.

CONDICIONES DE KUHN-TUCKER

Las condiciones de Kuhn-Tucker nos dice que dada una función a minimizar f(x) con restricciones tales como que $L_i \leq X_i \leq L_s$ donde L_i y L_s representan el límite inferior y el límite superior que pueden tomar los distintos valores de X entonces al derivar dicha función e igualar a cero y despejar las "X_s" existen 3 posibilidades.

1) Los valores de las X'$_s$ están dentro del intervalo, en este caso se trabaja de tal manera como si no hubiese restricción, es decir los valores que toman "X" cuando äy/äx=0 serán los mismos.
2) Los valores de las X'$_s$ están por debajo del intervalo, entonces los valores que se le asignarán a las X'$_s$ serán las del límite inferior.
   o sea

   $X_i = L_i$

Una observación sumamente importante, es que en este punto que está a la derecha de donde se minimizaría en caso de no existir restricciones:

dY / dX > 0

esto se ve mejor con la ayuda del Gráfico A-4

3) Los valores de las X'$_s$ están por encima del intervalo entonces los valores que se le asignará a las X'$_s$ será las del límite superior es decir

   $X_i = L_s$

   En este punto

   dY/dX < 0 (ver Grafico A-4)

PASO 3:

Aplicando las condiciones de Kuhn-Tucker a la elección de un portafolio óptimo resulta que :

Dada la cartera inicial (aquella que es legítima para el primer intervalo y que está constituido solamente por el activo más rentable) para todos los títulos que están fuera de la cartera, es decir que se les ha asignado el valor 0 (límite inferior) se cumple.

$$\begin{bmatrix} \delta Z/\delta W_1 \\ . \\ . \\ . \\ \delta Z/\delta W_n \\ \delta Z/\delta \lambda_1 \end{bmatrix} > 0$$

O lo que es lo mismo:

$$\begin{bmatrix} 2Cov(r_1,r_1)....2Cov(r_1,r_n) & -1 \\ .... & . \\ .... & . \\ .... & . \\ 2Cov(r_n,r_1)....2Cov(r_n,r_n) & -1 \\ 1......................................1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ . \\ . \\ . \\ W_n \\ \lambda_1 \end{bmatrix} - \phi \begin{bmatrix} E(r_1) \\ . \\ . \\ . \\ . \\ E(r_n) \end{bmatrix} > 0$$

Dado que estamos hablando de los títulos que están fuera del portafolio dentro de este intervalo entonces

$dZ / dW_i = 2W_1Cov(r_i,r_1)+2W_2Cov(r_i,r_2)+..+2W_NCov(r_i,r_N)$-?$_1$-?$E(r_i)>0$

Dado que:

$W_1 = 0$, $W_2 = 0$ ...W_A=1....W_N = 0 esta expresión se convierte en:

$$\frac{\delta Z}{\delta W_1} = 2W_A Cov(r_1, r_A) - \overline{K_\lambda} - K_{\lambda'}\phi - E(r_i)\phi > 0$$

Donde "A" es el activo de más alta rentabilidad y asimismo es el único activo que compone "el portafolio legítimo" en este primer intervalo.

Expresado matricialmente resulta:

$$\begin{bmatrix} \delta Z/\delta W_1 \\ \delta Z/\delta W_2 \\ . \\ . \\ . \\ \delta Z/\delta W_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2Cov(r_1, r_A) - \overline{K_\lambda} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ 2Cov(r_n, r_A) - \overline{K_\lambda} \end{bmatrix} - \phi \begin{bmatrix} E(r_1) - `K_\lambda \\ . \\ . \\ . \\ . \\ E(r_n) - `K_\lambda \end{bmatrix}$$

O sea:

$$\frac{\delta Z}{\delta W_i} = \overline{P_i} + P_{i'}\phi > 0$$

(condiciones de Kuhn -Tucker)

PASO 4 :

Una vez que tenemos las derivadas de todos los títulos fuera de la cartera y que sabemos por las condiciones de Kuhn-Tucker que son mayores a cero, se igualan a cero y se determina cada valor P_1 y P'_1 para cada uno de estos títulos.

PASO 5 :

Para determinar cual es el punto en que variará la composición de la cartera entonces la $\Delta Z / \Delta Wi$ luego de igualar a 0 (situación en que los títulos dejan de estar fuera de la cartera y entra) y de hallar los valores Pi y P'i

$$\delta Z / \delta W_i = 0$$
$$\overline{P_i} + P_{i'} \phi = 0$$
$$\phi_c = - \overline{P_i} / P_{i'}$$

Donde ϕ_C es el punto crítico para cada título que no está dentro de la cartera y es el punto crítico puesto que en ese punto debe ser considerado dentro del portafolio legítimo.

Luego de tener todos los ϕ_C de todos los títulos (se sobreentiende que están fuera de la cartera) se toma el ϕ_C mayor (dado que la cartera inicial consideraba un ϕ demasiado grande) esto nos indicará 2 cuestiones importantes.

1) Este es el punto donde habrá que variar la conformación del portafolio legítimo, es decir será una cartera de esquina o cartera singular.
2) En este punto se introduce el activo donde se halló el ϕ_C más alto, es decir la variación en la conformación de la cartera legítima será introduciendo el activo donde el ϕ_C es el más alto.

PASO 6 :

Una vez determinado el punto ϕ_C más alto que será el punto donde variará la conformación del portafolio legítimo (punto donde se le añadirá o restará un título), se plantea un nuevo sistema de ecuaciones que incluye al nuevo activo dentro de la conformación de la cartera en este segundo intervalo. Es decir la matriz

$$\begin{bmatrix} 1.......................0 \\ ....0 \\ .... \\ .... \\ 2Cov(r_A,r_1).....-1 \\ .... \\ 0.......................0 \\ 1.......................0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ W_n \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ E(r_i) \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se convierte en la nueva matriz, (vamos a suponer que el título 1 es el que tiene más alto ϕ_C).

$$\begin{bmatrix} 2Cov(r_1,r_1)....2Cov(r_1,r_n) & -1 \\ 0..........0 & 0 \\ .... & . \\ .... & . \\ 2Cov(r_A,r_1).....2Cov(r_A,r_n) & -1 \\ .... & . \\ 0..........1 & 0 \\ 1..........1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ W_n \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi E(r_1) \\ 0 \\ . \\ \phi E(r_A) \\ 0 \\ . \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Donde la solución de este sistema de ecuaciones nos dará la composición del portafolio legítimo para el segundo intervalo.

PASO 7:

Luego de haber determinado las nuevas ecuaciones y su solución en el proceso se hace reiterativo repitiendo los pasos 3 hasta 6 para hallar la nueva cartera de esquina, hasta el punto en que ϕ_C sea 0 que será la cartera de mínima varianza. El algoritmo basado en las condiciones de Kuhn-Tucker se explica en el Gráfico A5.

ANEXO II

PROPIEDADES DE ESPERANZA MATEMÁTICA

1. La esperanza de una constante es igual a la constante.

$$E[C] = C$$

Donde C: constante

2. La esperanza de una constante multiplicada por una variable es igual a la constante multiplicada por la esperanza de la variable.

$$E[c\ X] = c\ E[X]$$

Donde c: constante
X: Variable Aleatoria

3. La esperanza de la suma de dos variables X mas Y es igual a la esperanza de X mas la esperanza de Y

$$\underline{E[X + Y] = E[X] + E[Y]}$$

Donde X e Y : variables aleatorias

4. La esperanza de una constante (b) multiplicada por una variable (X) mas una constante (c) es igual a la constante (b) multiplicada por la esperanza de la variable (X) mas una constante.

$$\underline{E[b\,X + c] = b\,E[X] + C}$$

Donde
 b y c : constantes
 X: variable aleatoria

5. La Covarianza entre X e Y es igual a la Covarianza entre Y e X

$$COV\,(X,Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}(X_i - E(X_i))(Y_i - E(Y_i))$$

$$COV\,(X,Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}(Y_i - E(Y_i))(X_i - E(X_i))$$

$$COV\,(X,Y) = COV(Y,X)$$

6. l a covarianza entre X y X es igual a la varianza de X

$$COV\ (X,Y) = {}^{1}\!/_{n} \sum_{i=1}^{i=n} (X_i - E(X_i))(Y_i - E(Y_i))$$

$$COV\ (X,X) = {}^{1}\!/_{n} \sum_{i=1}^{i=n} (X_i - E(X_i))(X_i - E(X_i))$$

$$COV\ (X,Y) = {}^{1}\!/_{n} \sum_{i=1}^{i=n} ((X_i - E(X_i)))^2$$

$$COV\ (X,Y) = VAR(X)$$