UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

E.A.P DE MATEMATICA

Un teorema de reducción de singularidades para campos holomorfos 3-dimensionales

TESIS

para Optar el título profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Luis Javier Vásquez Serpa

Lima-Perú

2009

UN TEOREMA DE REDUCCIÓN DE SINGULARIDADES PARA CAMPOS HOLOMORFOS 3-DIMENSIONALES

Luis Javier Vásquez Serpa

Tesis presentada a condición del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas, de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el Título profesional de Licenciado en Matemáticas.

Aprobada por:

....
Dr. Edgar Vera Saravia
Presidente

....
Mg. Tomás Nuñez Lay
Miembro

....
Dr. Renato Mario Benazic Tomé
Miembro Asesor

Lima - Perú

Diciembre -2009

FICHA CATALOGRÁFICA

LUIS JAVIER VÁSQUEZ SERPA

Un Teorema de Reducción de Singularidades para Campos Holomorfos 3-Dimensionales, (Lima) 2009.
IX, 74p., 29,7 cm, (UNMSM, Licenciado en Matemática, 2009).
Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas. UNMSM/F. de CM.

Dedicatoria

A mis queridísimos padres Julia y Jorge,
con mucho cariño y eterno agradecimiento
pues a ellos es a quien me debo.

Agradecimientos

- Agradezco a mis padres por el apoyo firme constante y por la confianza que tienen en mí, a mis hermanos por entenderme como estudiante de matemáticas.

- Agradezco a mi asesor, el Dr. Renato Benazic Tomé, por la formación académica que recibí en el pregrado y por el apoyo como orientador durante el desarrollo de la tesis.

- Agradezco al Vicerrectorado de Investigación de mi universidad, mi alma mater, por el apoyo económico durante el desarrollo de la tesis.

- Finalmente agradezco de manera implícita a todas las personas que me apoyaron en época de estudiamte, durante el pregrado.

RESUMEN

UN TEOREMA DE REDUCCIÓN DE SINGULARIDADES PARA CAMPOS HOLOMORFOS 3-DIMENSIONALES

LUIS JAVIER VÁSQUEZ SERPA

Diciembre - 2009

Orientador	:	Dr. Renato Mario Benazic Tomé.
Título Obtenido	:	Licenciado en Matemática.

En el presente trabajo, consideremos campos vectoriales holomorfos de dimensión compleja 3 definidos en una vecindad de un punto p, donde p es una singularidad aislada, *dicrítica* o no. Es conocido que para campos holomorfos sobre un abierto de $\mathbb{C}^2$ que despúes de un número finito de blowing-up's en los puntos singulares, la foliación asociada a dicho campo es transformada en una foliación que posee un número finito de singularidades, todas ellas irreducibles (*Teorema de Seidenberg*). En este trabajo se extiende el *Teorema de Seidenberg* para campos holomorfos sobre un abierto de $\mathbb{C}^3$, es decir, resolvemos el problema de *desingularización sobre campos holomorfos 3-dimensiónales*, restringiéndonos en el caso de que sea una *singularidad absolutamente aislada*.

Palabras claves : Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Complejas, Foliación Holomorfa Singular, Reducción de Singularidades, Desingularización, Blow-up, Sistemas Dinámicos, Dinámica Compleja, Singularidad Absolutamnete Aislada.

ABSTRACT

A THEOREM OF REDUCTION OF SINGULARITIES FOR 3-DIMENSIONAL HOLOMORPHIC FIELDS

LUIS JAVIER VÁSQUEZ SERPA

December - 2009

Adviser	:	Dr. Renato Mario Benazic Tomé.
Obtained Title	:	Licenciado en Matemática.

In this paper, we consider holomorphic vector fields of complex dimension 3 defined in a neighborhood of a point p, where p is an isolated singularity, dicrítica or not. It is known that for holomorphic fields over an open set of $\mathbb{C}^2$ that after a finite number of blowing-up's in the singular points, the foliation associated to this field is transformed into a foliation that has a finite number of singularities, all irreducible (Seidenberg Theorem). This paper extends the Seidenberg theorem for holomorphic fields over an open set of $\mathbb{C}^3$, i.e., we solve the problem of desingularización over 3-dimensional holomorphic fields, restricting in the case that it is an absolutely isolated singularity.

Keywords: Ordinary Differential Equations Complex, Holomorphic Singular Foliation, Reduction of Singularities, Desingularización, Blow-up, Dynamical Systems, Complex Dynamics, Absolutamnete Isolated Singularity.

Índice general

1. Introducción **1**

2. Preliminares **4**

2.1. Funciones Holomorfas de Varias Variables Complejas 4

2.2. Campos Vectoriales Holomorfos y Sistemas de Ecuaciones Diferenciales 7

2.2.1. Sistemas Lineales Complejos 12

2.2.2. Campos Holomorfos con Parte Lineal No Nula 17

2.3. Variedades Complejas 21

3. Transformado Estricto de Funciones Holomorfas **25**

3.1. El Espacio Proyectivo Complejo $\mathbb{C}P(n)$ 25

3.2. El Blow-up Centrado en el $0 \in \mathbb{C}^n$ 27

3.3. Curvas Planas Proyectivas 33

3.4. Transformado Estricto de Foliaciones 33

3.5. Singularidad Dicrítica 38

4. Caracterización de una Singularidad Dicrítica en $0 \in \mathbb{C}^n$ **39**

5. El Número de Milnor de un Campo Vectorial Holomorfo **46**

5.1. Índice de Intersección 46

5.2. El Número de Milnor de un Campo Vectorial Holomorfo 3-Dimensional 48

6. Parte Central: Prueba del Teorema **64**

6.1. Singularidad Absolutamente Aislada 65

6.2. Teorema de Reducción 70

Bibliografía **73**

Capítulo 1

Introducción

Las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) es una de las disciplinas más importantes de las matemáticas, es bien utilizado para modelar fenómenos de otras ramas de la ciencia (Física, Biología, Química, Ecología, Economía, Ingeniería, etc.), por tal motivo las EDO ocupa un amplio lugar en la investigación científica. Por otro lado es bién conocido que en la mayoria de problemas no es posible obtener de manera explícita la solución de una EDO, gracias a Henri Poinacaré, se crearon otras técnicas, que consiste en ver como se comporta las soluciones, desde el punto de vista cualitativo (geométricamente). La Teoría de los Sistemas Dinámicos se encarga de entender el comportamuiento cualitativo de las soluciones de una EDO. Las soluciones de una EDO en una vencidad de un punto regular (punto que no anula al campo que genera la EDO) son de geometría sencilla, el gran problema es saber como se comporta las soluciones de una EDO en una vecindad de un punto singular (punto que anula al campo que genera la EDO). Para saber dicho comportamiento se emplean una gran herramienta matemática (Topologia Diferencial, Análisis en Varias Variables Reales y Complejas, Topología Algebraica, entre otras). El estudio de Foliaciones Holomorfas generada por las soluciones de una EDO, debido a un campo vectorial holomorfo, en la actualidad es un gran tema de investigación científica.

Sean $\mathcal{M}^n$ una variedad compleja de dimensión n, $\mathcal{F}$ una foliación holomorfa singular por curvas sobre $\mathcal{M}^n$ y $p \in \mathcal{M}^n$ una singularidad aislada de la foliación $\mathcal{F}$. Sea Z el campo vectorial que genera la foliación alrededor del punto p (ver [6], [10]), en una carta (U, φ) de $\mathcal{M}^n$ tal que $p \in U$ y $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{C}^n$. Fijando coordenadas en esta carta, el campo Z se expresa como:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

donde $Z_1,\ Z_2, ..., Z_n \in \mathcal{O}_{n,p}$ (aquí $\mathcal{O}_{n,p}$ es el anillo de gérmenes de las funciones holomorfas en p) y $m.c.d.(Z_1, Z_2, ..., Z_n) = 1$. Denotaremos por $\mathcal{F}_Z$ a esta foliación, el cual coincide con la foliación $\mathcal{F}$. Como $p \in U$ es una singularidad aislada de Z, entonces existe una veciendad abierta U_p de p en la que $p \in U_p$ es la única singularidad y los demas puntos de $U_p - \{p\}$ son puntos regulares, por el Teorema del Flujo Tubular (ver [10]) tenemos que las órbitas alrededor de un punto regular pueden "ser enderezadas" mediante una conjugación analítica local, entonces ya sabemos como se comporta localmente. Lo interesante sería ver qué pasa alrededor de un punto singular p, i.e como se comporta las órbitas alrededor del punto p.

Si el campo Z tiene parte lineal no nula (i.e. $DZ(p) \neq 0$) y viendo que propiedades tienen los autovalores de $DZ(p)$, podemos usar algún Teorema de Linealización (de Poincaré, de Siegel, etc. según sea el caso). Que nos dice que el campo Z es localmente equivalente a su parte lineal $DZ(p)$ en una vecindad del punto p y por lo tanto podremos saber como se comportan las órbitas en una vecindad del punto singular p. Sin embargo si el campo Z tiene parte lineal nula (i.e. $DZ(p) = 0$), ya no podemos usar los teoremas de Linealización pues no existe la parte lineal; en estos casos se usa una herramienta conocida como Blow-up.

En dimensión $n = 2$, es conocido que después de un número finito de blowing-up's en los puntos singulares, la foliación $\mathcal{F}_Z$ es transformada en una foliación $\mathcal{F}_Z^*$ que posee un número finito de singularidades, todas ellas simples (*Teorema de Seiden-*

berg), (ver [3], [4]). Esto significa que si $p^* \in Sing(\mathcal{F}_Z^*)$, entonces $\mathcal{F}_Z^*$ es localmente generada por un campo vectorial holomorfo Z^* que tiene parte lineal con autovalores 1 y λ, donde $\lambda \notin \mathbb{Q}^+$ ($\mathbb{Q}^+$ es el conjunto de los números racionales positivos).

En este trabajo se obtiene un teorema de reducción de singularidades (una extensión del teorema de Seindenberg a dimensión $n = 3$). El teorema consiste en que después de un número finito de blow-ups, la foliación $\mathcal{F}_Z$ es transformada en una foliación $\mathcal{F}_Z^*$ que posee un número finito de singularidades, todas ellas irreducibles.

En el segundo capítulo se enunciaran conceptos y resultados de los diferentes cursos de la carrera, que serán usados en el presente trabajo.

En el tercer capítulo se describe el proceso de Blow-up. Se analiza los tranformados estrictos de la foliación $\mathcal{F}_Z$ mediante el Blow-up. Se da la defínción de Singularidad Dicrítica.y no Dicrítica.

En el cuarto capítulo se da una caracterización de una dingularidad Dicrítica.

En el quinto capítulo se obtiene, para el caso $n = 3$, una formula que relaciona el número de Milnor de la singularidad original con los números de Milnor de las singularidades del transformado estricto. Con este resultado extendemos lo obtenido en [3] y [4] para $n = 2$.

Finalmente, en el sexto capítulo, se presenta la mencionada generalización del Teorema de Seindenberg; es decir se resuelve el problema de desingularización, con la hipotesis natural de asumir que en cada etapa del Blow-up, el conjunto singular de la foliación levanta por el Pull-Back (transformado estricto de $\mathcal{F}_Z$) tenga codimensión 3. La principal herramineta para demostrar este teorema será una fórmula (*Teoremas 5.2.3 y 5.2.4*) que se da en el capítulo 5. Este plan de trabajo funciona porque las singularidades del transformado estricto son aisladas por hipotesis.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se introducirán conceptos y resultados de carácter general que serán utilizados a los largo de la tesis. Ver referencias [9], [16], [7], [2], [10] y [13].

Denotaremos por $\mathbb{C}$ al cuerpo de los números complejos y $\mathbb{C}^n$ al espacio vectorial complejo $\{x = (x_1, ..., x_n); x_1, ..., x_n \in \mathbb{C}\}$.

Para cada $x \in \mathbb{C}^n$, consideremos la base canónica $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ del espacio tangente $T_x\mathbb{C}^{\ n}$ de $\mathbb{C}^n$ en x, que por definición es el espacio vectorial $\{x\} \times \mathbb{C}^n$.

2.1. Funciones Holomorfas de Varias Variables Complejas

Denotaremos por $\mathbb{C}^n$ al conjunto de todas las n-uplas $(n \geq 1)$ de números complejos, es decir

$$\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, ..., z_n);\ z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}\} = \underbrace{\mathbb{C} \times ... \times \mathbb{C}}_{n\text{-veces}}.$$

Los elementos $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$ son llamados *puntos* de $\mathbb{C}^n$ y los números complejos $z_1, ..., z_n$ son llamados *coordenadas complejas* de z. Haciendo $z_j = x_j + iy_j$ (donde $x_j = \mathrm{Re}(z_j)$, $y_j = \mathrm{Im}(y_j)$), podemos expresar $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$ como

$$z = (x_1, y_1, ..., x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

De esta manera $\mathbb{C}^n$ puede ser considerado como $\mathbb{R}^{2n}$ y en este caso $x_1, y_1, ..., x_n, y_n$ son llamados las *coordenadas reales* de z.

Sean $z = (z_1, ..., z_n)$ y $w = (w_1, ..., w_n)$ puntos de $\mathbb{C}^n$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Definimos la suma de z y w como

$$z + w = (z_1 + w_1, ..., z_n + w_n)$$

y el producto de α por z como

$$\alpha z = (\alpha z_1, ..., \alpha z_n).$$

Es inmediato ver que con esta operaciones $\mathbb{C}^n$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión (compleja) n.

Dotaremos a $\mathbb{C}^n$ de la topología producto. Un *polidisco abierto* (resp. *cerrado*) en $\mathbb{C}^n$ de centro $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{C}^n$ y *poliradio* $r = (r_1, ..., r_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$, denotado por $\Delta(a, r)$ (resp. $\Delta[a, r]$), es el conjunto definido por

$$\Delta(a, r) = \{z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n; |z_j - a_j| < r_j, \forall 1 \leq j \leq n\}$$
$$(\text{resp. } \Delta[a, r] = \{z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n; |z_j - a_j| \leq r_j, \forall 1 \leq j \leq n\})\,.$$

Observe que

$$\Delta(a, r) = D_{r_1}(a_1) \times ... \times D_{r_n}(a_n) \;\text{ y }\; \Delta[a, r] = D_{r_1}[a_1] \times ... \times D_{r_n}[a_n],$$

donde $D_{r_j}(a_j)$ es el disco abierto y $D_{r_j}[a_j]$ es el disco cerrado en los complejos.

Es claro que $\mathbb{C}^n$ dotado de la topología cuya base es generada por los polidiscos abiertos es un espacio topológico equivalente a $\mathbb{R}^{2n}$ dotado de la topología cuya base generada por las bolas abiertas. De esta manera, todos los resultados conocidos de la topología de los espacios euclidianos $\mathbb{R}^{2n}$ pueden ser aplicados a $\mathbb{C}^n$.

Definición 2.1.1 *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un abierto y $f : U \to \mathbb{C}$. Decimos que f es una función holomorfa en $a = (a_1, ..., a_n) \in U$ si y sólo si existe un polidisco Δ centrado en a tal que la función f tiene una expansión en serie de potencias*

$$f(z) = \sum_{q_1,\ldots,q_n=0}^{\infty} c_{q_1,\ldots,q_n}(z_1 - a_1)^{q_1} \cdots (z_n - a_n)^{q_n} \tag{2.1}$$

la cual es convergente para todo $z \in \Delta$.

Decimos que f es *holomorfa* en U si y sólo si f es holomorfa en a, para todo $a \in U$.

El conjunto de todas las funciones holomorfas en U será denotado por $\mathcal{O}(U)$.

Para simplificar las notaciones, es conveniente introducir la noción de multi-índices. Un *multi-índice de dimensión n,* es una n-upla de enteros no negativos $Q = (q_1, ..., q_n)$. Su norma $|Q|$ se define como $|Q| = q_1 + \cdots + q_n$.

Sea $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$ y $Q = (q_1, ..., q_n)$ un multi-índice, definimos

$$z^Q = z_1^{q_1}, ..., z_n^{q_n}.$$

Con estas notaciones (2.1) se escribe

$$f(z) = \sum_{|Q|=0}^{\infty} c_Q(z - a)^Q, \ \forall z \in \Delta.$$

Sea $f \in \mathcal{O}(U)$, entonces para todo $a \in U$, existe $R = (R_1, ..., R_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ poliradio tal que $f(z) = \sum_{|Q|=0}^{\infty} c_Q(z - a)^Q$, $\forall z \in \Delta(a, R)$, consideremos $r = (r_1, ..., r_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ poliradio con $0 < r_j < R_j$ para todo $1 \leq j \leq n$, de la teoría de varias variables complejas (ver [9]), $\sum_{|Q|=0}^{\infty} c_Q(z - a)^Q$ converge absoluta y uniformemente a $f(z)$, para todo $z \in \Delta[a, r]$, reordenando tenemos:

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{|Q|=m} c_Q(z - a)^Q \right) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(z), \ \forall z \in \Delta[a, r], \tag{2.2}$$

donde $P_m(z) = \sum\limits_{|Q|=m} c_Q(z-a)^Q$ es un polinomio homogéneo de grado m en las variables $z_1, ..., z_n$.

Observe que, de (2.2), como P_m es continuo en $\Delta[a,r]$ y $\sum\limits_{m=0}^{k} P_m(z) \to f(z)$ uniformemente en $\Delta[a,r]$, concluimos que f es continua en $\Delta[a,r]$. En particular, f es continua en a.

Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un abierto y $F : U \to \mathbb{C}^m$ una función. Podemos asociar a F m-funciones $f_1, ..., f_m : U \to \mathbb{C}$ llamadas las *funciones coordenadas* de F. Decimos que F es holomorfa en $a \in U$ (resp. en U) si y sólo si cada una de las funciones coordenadas $f_1, ..., f_m$ son holomorfas en $a \in U$ (resp. en U).

2.2. Campos Vectoriales Holomorfos y Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

Definición 2.2.1 *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un abierto. Un campo vectorial holomorfo en U es una función holomorfa*

$$\begin{aligned} Z: \ U &\to \mathbb{C}^n \\ z &\mapsto Z(z) = (Z_1(z), ..., Z_n(z)) \end{aligned}$$

tal que si $z \in U$ entonces $Z(z)$ es un vector cuyo punto de aplicación es z.

Notación 2.2.1 *Denotaremos por $\mathcal{X}(U)$ al conjunto de todos los campos vectoriales holomorfos definidos en U.*

Las funciones Z_i serán llamadas *componentes o coordenadas de Z*, como las Z_i son funciones holomorfas de varias variables complejas definidas en una vecindad de p

contenida en U, entonces existe un polidisco $\triangle(p,r)$ tal que ellas tienen un desarrollo en series de potencias alrededor del $p \in U$, si consideramos el polidisco compacto $\triangle[p,r/2]$, entonces las series de potencias convergen absoluta y uniformemente, de esta manera las series de potencias no se alteran si reordenamos sus términos, así obtenemos una serie de polinomios homogéneos

$$Z_i(z_1,...,z_n) = \sum_{k\geq 0} Z_k^i(z_1,...,z_n), (1 \leq i \leq n),$$

donde los $Z_k^i(z_1,...,z_n)$, $(1 \leq i \leq n)$ son polinomios homogéneos de grado k en n variables complejas.

Definición 2.2.2 *El orden de Z_i en $p \in U$ es el menor número entero ν_i tal que $Z_k^i \equiv 0$, para todo $k < \nu_i$ y $Z_{\nu_i}^i \not\equiv 0$ y lo denotamos por $ord_p(Z_i) = \nu_i$.*

Definición 2.2.3 *La multiplicidad algebraica de la foliación $\mathcal{F}_Z$ (o del campo Z) en el punto $p \in U$, denotada por $m_p(\mathcal{F}_Z)$ (o simplemente por $m_p(Z)$) es el mínimo de los órdenes $ord_p(Z_i)$, i.e $m_p(Z) = \text{mín}\{ord_p(Z_i); 1 \leq i \leq n\}$.*

Definición 2.2.4 *Un punto $p \in U$ es llamado punto singular de Z si y sólo si $Z(z) = 0$, caso contrario, decimos que p es un punto regular de Z.*

Notación 2.2.2 *Denotaremos por $Sing(Z)$ al conjunto de todos los puntos singulares de Z.*

Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un abierto, $Z \in \mathcal{X}(U)$, $z_0 \in U$ entonces Z se expresa como

$$Z(z) = \left(\sum_{|Q|=0}^{\infty} c_{1Q}(z-z_0)^Q, ..., \sum_{|Q|=0}^{\infty} c_{nQ}(z-z_0)^Q \right). \tag{2.3}$$

Definición 2.2.5 *Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos el k-jet o Jet de orden k de Z en el punto z_0, denotado por $J^k_{z_0}(Z)$, se define como:*

$$J^k_{z_0}(Z) = \left(\sum_{|Q|=0}^{k} c_{1Q}(z - z_0)^Q, ..., \sum_{|Q|=0}^{k} c_{nQ}(z - z_0)^Q \right). \tag{2.4}$$

Observaciones:

1. Un punto $z_0 \in Sing(Z)$ si y sólo si $J^0_{z_0}(Z) = (0, ..., 0)$ si y sólo si $m_p(Z) \geq 1$.

2. Si $z_0 \in Sing(Z)$ entonces $J^1_{z_0}(Z) = DZ(z_0)$, la cual es llamada la *parte lineal* de Z.

Definición 2.2.6 *Un punto $p \in U$ es llamado* ***irreducible*** *si y sólo si $m_p(Z) = 1$ y la parte lineal de Z en p (i.e $DZ(p)$) tiene al menos un autovalor no nulo.*

Definición 2.2.7 *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un abierto y $Z \in \mathcal{X}(U)$. Dada la Ecuación Diferencial Ordinaria (E.D.O), asociada al campo vectorial holomorfo Z*

$$z' = Z(z). \tag{2.5}$$

Por una solución de la EDO (2.5) se entenderá una función holomorfa $\varphi : D \to U$, donde $D \subseteq \mathbb{C}$ es un disco abierto, tal que

$$\varphi'(T) = Z(\varphi(T)), \ \forall T \in D.$$

Definición 2.2.8 *Sean $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un abierto, $Z \in \mathcal{X}(U)$, $z_0 \in U$ y $T_0 \in \mathbb{C}$. Dado el Problema de Valor Inicial (P.V.I), o el Problema de Cauchy asociado a Z*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z' & = & Z(z) \\ z(T_0) & = & z_0. \end{array} \right. \tag{2.6}$$

Por una solución de la E.D.O (2.6) se entenderá una función holomorfa $\varphi : D \to U$, donde $D \subseteq \mathbb{C}$ es un disco abierto, tal que

a) *El punto* $T_0 \in D$, $\varphi(T_0) = z_0$.

b) $\varphi'(T) = Z(\varphi(T)), \ \forall T \in D$.

Las demostraciones de los siguientes resultados se encuentran en [7] y [19].

Proposición 2.2.1 *Sea* $U \subseteq \mathbb{C}^n$ *un abierto,* $Z \in \mathcal{X}(U)$, $z_0 \in U$ *y* $T_0 \in \mathbb{C}$. *Resolver el PVI (2.6) es equivalente a resolver la ecuación integral*

$$Z(T) = z_0 + \int_{T_0}^{T} Z(z(s))ds,$$

donde la integral es a lo largo del segmento que une T_0 *a* T.

Teorema 2.2.2 (Picard) *Sea* $Z : \Delta[z_0, r] \to \mathbb{C}^n$ *un campo vectorial holomorfo en* $\Delta(z_0, r)$ *y Lipschitz en* $\Delta[z_0, r]$ *entonces para cualquier* $T_0 \in \mathbb{C}$, *existe una única solución del P.V.I.:*

$$\begin{cases} z' &= Z(z) \\ z(T_0) &= z_0 \ , \end{cases}$$

definida en el disco $D_\alpha[T_0]$, *donde* $\alpha = \min\left\{\frac{r_1}{N}, ..., \frac{r_n}{N}\right\}$, $r = (r_1, ..., r_n)$ *y* $N = \max\left\{\|Z(z)\| \, ; z \in \Delta[z_0, r]\right\}$.

Corolario 2.2.3 *Sea* $U \subseteq \mathbb{C}^n$ *un abierto y* $Z \in \mathcal{X}(U)$. *Entonces para cualquier* $z_0 \in U$ *y cualquier* $T_0 \in \mathbb{C}$, *exixte una única solución del P.V.I*

$$\begin{cases} z' &= Z(z) \\ z(T_0) &= z_0 \ , \end{cases}$$

la cual está definida en una vecindad de T_0.

Teorema 2.2.4 *Sea* $Z : \Delta[z_0, r] \to \mathbb{C}^n$ *un campo vectorial holomorfo en* $\Delta(z_0, r)$ *y Lipschitz en* $\Delta[z_0, r]$ *y denotemos por* $\varphi_{z_0} : D_\alpha[T_0] \to \Delta[z_0, r]$ *la única solución del*

P.V.I.:

$$\begin{cases} z' & = Z(z) \\ z(T_0) & = z_0 \ , \end{cases}$$

donde $\alpha = \text{mín}\left\{\frac{r_1}{N}, ..., \frac{r_n}{N}\right\}$, $r = (r_1, ..., r_n)$ *y* $N{=}max\{\|Z(z)\| \, ; z \in \Delta[z_0, r]\}$.

Entonces

1. *Existe un poliradio* $r' = (r'_1, ..., r'_n)$ *con* $r'_j < r_j$ *y existe* $0 < \alpha' < \alpha$ *tales que para todo* $z \in \Delta[z_0, r']$ *existe una única solución* $\varphi_z : D_{\alpha'}[T_0] \to \Delta[z_0, r]$ *del PVI:*

$$\begin{cases} w' & = Z(w) \\ w(T_0) & = z. \end{cases}$$

2. $\left\|\varphi_z(T) - \varphi_{z_0}(T)\right\| \leq \|z - z_0\| \, e^{Lip(Z)|T-T_0|}$, $\forall z \in \Delta[z_0, r']$ *y* $\forall T \in D_{\alpha'}[T_0]$.

Observación:

1. La parte 2 del teorema anterior recibe el nombre de *continuidad de las soluciones respecto a las condiciones iniciales.*

2. En virtud al teorema anterior, para el campo $Z : \Delta[z_0, r] \to \mathbb{C}^n$, podemos definir la función

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \ D_{\frac{\alpha}{2}}[T_0] \times \Delta[z_0, \frac{r}{2}] & \to & \Delta[z_0, r] \\ (T, z) & \mapsto & \varphi(T, z) = \varphi_z(T). \end{array}$$

Esta función φ es llamada *Flujo Local asociado a Z alrededor de* (T_0, z_0). Es claro que el flujo satisface las siguientes condiciones:

a) $\frac{\partial \varphi}{\partial T}(T, z) = Z(\varphi(T))$, $\forall (T, z) \in D_{\frac{\alpha}{2}}(T_0) \times \Delta(z_0, \frac{r}{2})$.

b) $\varphi(T_0, z) = z$, $\forall z \in \Delta(z_0, \frac{r}{2})$.

El siguiente resultado establece que el flujo local asociado a un campo vectorial holomorfo es también holomorfo, considerando como función de un abierto de $\mathbb{C}^{n+1}$ en $\mathbb{C}^n$.

Teorema 2.2.5 *Si $Z : \Delta[z_0, r] \to \mathbb{C}^n$ un campo vectorial holomorfo en $\Delta(z_0, r)$ y Lipschitz en $\Delta[z_0, r]$ entonces su flujo local asociado $\varphi : D_{\frac{\alpha}{2}}[T_0] \times \Delta[z_0, \frac{r}{2}] \to \Delta[z_0, r]$ es una función holomorfa.*

2.2.1. Sistemas Lineales Complejos

El caso más simple de una EDO compleja es el sistema lineal con coeficientes constantes de la forma

$$\frac{dz}{dT} = A.z,\ T \in \mathbb{C},\ \mathrm{z} \in \mathbb{C}^n \text{ y } A \in \mathbb{C}^{n\times n}. \tag{2.7}$$

En esta sección, adoptaremos el punto de vista **Genérico**, es decir, veremos qué propiedades son satisfechas por “casí todos” los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. El decir “casí todos” se refire que el conjunto que estudiamos es abierto y denso.

Comenzaremos con un breve repaso de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales en los números reales:

Las soluciones de la ecuación diferencial lineal

$$\frac{dx}{dt} = A.x,\ t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n \text{ y } A \in \mathbb{R}^{n\times n} \tag{2.8}$$

están dadas por el flujo lineal

$$\begin{aligned} \varphi_A :\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ (t,x) &\mapsto \varphi_A(t,x) = e^{tA}x. \end{aligned}$$

Definición 2.2.9 *El sistema lineal* (*2.8*) (*resp. la matriz* A) *se llama* ***Hiperbólico*** (*caso real*)*si los valores propios de la matriz* A *tiene parte real diferente de cero.*

Definición 2.2.10 *El sistema lineal* (*2.8*) (*resp. la matriz* A) *se llama* ***Estructuralmente Estable*** *si dado cualquier sistema de ecuaciones diferenciales lineales suficientemente próximo, la estructura de las soluciones no cambia desde un punto de vista topológico.*

Las demostraciones de los siguientes teoremas pueden ser encontradas en [13], [19] y [7].

Teorema 2.2.6 *En el caso real, se cumplen lo siguiente:*

1. *Los sistemas Hiperbólicos forman un conjunto abierto denso en el espacio de los sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales.*

2. *Un sistema de ecuaciones diferenciales es estructuralmente estable si y sólo si es hiperbólico.*

3. *Dos sistemas hiperbólicos son topológicamente conjugados* (*equivalentes*) *si ellos tienen el mismo índice, donde el índice es un número de* $\{0, 1, ..., n\}$.

En resumen, el teorema anterior nos dice que los sistemas estructuralmente estables forman un conjunto abierto y denso en los sistemas de ecuaciones deferenciales lineales en $\mathbb{R}^n$, y que estos tienen $n + 1$ clases de equivalencia, dados por la relación de conjugación topológica.

Ahora veamos brevemente, como es el panorama en el caso de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales complejos.

Como estamos viendo desde un punto de vista genérico, consideramos al conjunto abierto y denso de las matrices invertibles y diagonizables

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}, \ \lambda_j \in \mathbb{C} - \{0\}, \ j = 1, ..., n.$$

Las soluciones de

$$\frac{dz}{dT} = A.z, \ T \in \mathbb{C}, \ z \in \mathbb{C}^n$$

están dadas por el flujo exponencial

$$\begin{array}{rccc} \varphi_A : & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n & \rightarrow & \mathbb{C}^n \\ & (T, z) & \mapsto & \varphi_A(T, z) = e^{TA}.z \end{array}$$

el cual nos dice que las soluciones son ahora "curvas complejas" (superficies de Riemann), la cual tienen dimensión real igual a dos, esta es la primera diferencia importante a la del caso real.

Definición 2.2.11 *Dado el flujo complejo $\varphi_A : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, definimos la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{\alpha,A} : & \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n & \rightarrow & \mathbb{C}^n \\ & (t, z) & \mapsto & \varphi_{\alpha,A}(t, z) = \varphi_A(\alpha t, z) = e^{\alpha t A} z \end{array}$$

*llamada **Flujo Real** inducido por φ_A en la dirección α.*

Observe que sus órbitas $\mathcal{O}_{\alpha,A}(z) = \{\varphi_{\alpha,A}(t, z); \text{t} \in \mathbb{R}\}$ son curvas reales contenidas en las órbitas $\mathcal{O}_A(z) = \{\varphi_A(T, z); \text{T} \in \mathbb{C}\}$, es decir $\mathcal{O}_{\alpha,A}(z) \subseteq \mathcal{O}_A(z) \subseteq \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$.

Notación 2.2.3 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matriz compleja, $\lambda_1, ..., \lambda_n$ autovalores de A, denotaremos por*

$$\mathcal{H}(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \mathcal{H}(A) \subseteq \mathbb{C}$$

a la envolvente convexa de los valores propios de la matriz A.

Definición 2.2.12 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz compleja*

1. *Decimos que la matriz A pertenece al* ***dominio de Poincaré*** *si $0 \notin \mathcal{H}(A)$.*

2. *Decimos que la matriz A pertenece al* ***dominio de Siegel*** *si $0 \in \mathcal{H}(A)$.*

Veamos que el conocimiento de los flujos reales, nos da información sobre el flujo complejo.

Teorema 2.2.7 *Sea $A = diag[\lambda_1, ..., \lambda_n] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con $\lambda_j \in \mathbb{C} - \{0\}$, $j = 1, ..., n$, consideremos el sistema*

$$\frac{dz}{dT} = A.z,\ T \in \mathbb{C},\ z \in \mathbb{C}^n. \tag{2.9}$$

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. *Las soluciones del sistema anterior son transversales a las esferas S^{2n-1}.*

2. *Existe $\alpha \in \mathbb{C}$, tal que el origen es un atractor para el flujo real $\varphi_{\alpha,A} : \mathbb{R}\times\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$.*

3. *La matriz A pertenece al* ***dominio de Poincaré.***

Del resultado anterior tenemos:

Teorema 2.2.8 *El sistema (2.9) pertenece al* ***dominio de Siegel*** *si existe una solución que no es tranversal a la esfera S^{2n-1}.*

Teorema 2.2.9 *Sea $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{C}-\{0\}$. La matriz A pertenece al dominio de Poincaré si y sólo si $\lambda/\mu \in \mathbb{C} - \mathbb{R}^-$.*

Teorema 2.2.10 *En dimensión $n = 2$, el dominio de Poincaré es abierto y denso en el espacio $\mathbb{C}^{2\times 2}$.*

Del teorema anterior, el dominio de Siegel tiene interior vacio en el espacio $\mathbb{C}^{2\times 2}$.

Para más información ver [3].

Observación: En dimensión $n \geq 3$, el dominio de Siegel tiene interior no vacío, con lo cual, el dominio de Poincaré ya no es denso, ver [13].

Definición 2.2.13 *Sea $A = diag[\lambda_1, ..., \lambda_n] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con $\lambda_j \in \mathbb{C} - \{0\}$, $j = 1, ..., n$, consideremos el sistema*

$$\frac{dz}{dT} = A.z, \;\; T \in \mathbb{C}, \;\; z \in \mathbb{C}^n.$$

La matriz A o el sistema es Hiperbólico si $\lambda_i/\lambda_j \notin \mathbb{R}$ para $i \neq j$.

Las clases de equivalencia topológicas en el dominio de Poincaré se describen en el siguiente resultado.

Teorema 2.2.11 *Todo sistema hiperbólico en el dominio de Poincaré es estructuralmente estable y son topológicamente conjugados entre sí.*

Corolario 2.2.12 *En dimensión compleja $n = 2$, la estabilidad estructural es genérica. Además, todo sistema Hiperbólico en el dominio de Poincaré es topológicamente conjugado al sistema.*

$$\begin{pmatrix} z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}.$$

Observación

1. En el caso real se tiene que la estabilidad estructural es genérica con n+1 clases de equivalencia dadas por la conjugación topológica.

2. En el caso complejo, dimensión dos, la estabilidad estructural es genérica pero con una sola clase de equivalencia. Mientras que en dimensión ≥ 3 la estabilidad estructural ya no es genérica.

2.2.2. Campos Holomorfos con Parte Lineal No Nula

En esta sección estudiaremos las singularidades de un campo vectorial holomorfo, desde el punto de vista local. Las demostraciones de los teoremas de esta sección pueden ser encontradas en [13], [7] y [19].

Definición 2.2.14 *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un abierto, $Z \in \mathcal{X}(U)$, $z_0 \in U$ es una singularidad aislada del campo Z si $z_0 \in$Sing(Z) y existe $V \subseteq U$ vecindad abierta de z_0 tal que Sing$(Z) \cap (V - \{z_0\}) = \phi$.*

Sean $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un abierto, $Z \in \mathcal{X}(U)$ y $z_0 \in U$ una *singularidad aislada* de Z. Luego existe $V \subseteq U$ vecindad abierta de z_0 tal que

$$Z(z) = \left(\sum_{|Q|=1}^{\infty} c_{1Q}(z - z_0)^Q, ..., \sum_{|Q|=1}^{\infty} c_{nQ}(z - z_0)^Q \right), \ \forall z \in V,$$

observe que el término constante es cero puesto que z_0 es una singularidad, además $Z(z) \neq 0 \ \forall z \in V - \{z_0\}$.

Definición 2.2.15 *$DZ(0)$ es llamado* ***Parte Lineal*** *de Z.*

Definición 2.2.16 *Decimos que Z tiene parte lineal no nula en $z_0 \in U$ si la derivada o la matriz jacobiana de Z en z_0 $DZ(0) = Z'(z_0) \neq \theta$.*

Definición 2.2.17 *Sea z_0 una singularidad de Z, sean $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ los autovalores de $DZ(z_0)$. Diremos que:*

1. *Un punto z_0 es una singularidad no degenerada si $DZ(z_0)$ es no singular.*

2. *Un punto z_0 es hiperbólica si es no degenerada y todos los cocientes $\lambda_i/\lambda_j \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ para todo $i \neq j$.*

3. *Un punto z_0 está en el dominio de Poincaré si $DZ(z_0)$ está en el dominio de Poincaré.*

4. *Un punto z_0 está en el dominio de Siegel si $DZ(z_0)$ está en el dominio de Siegel.*

5. *Diremos que una singularidad z_0 tiene* ***una resonancia*** *si existen $1 \leq i \leq n$ y $m_1, ..., m_n$, enteros no negativos, tales que $\sum_{j=1}^{n} m_j \geq 2$ y $\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} m_j \lambda_j$. Una singularidad que no posee resonancias será llamada* ***no resonante****.*

Proposición 2.2.13 *Se cumple lo siguiente:*

1) *Las propiedades, arriba definidas, son invariantes por biholomorfismos.*

2) *Las singularidades no degenerdas son aisladas.*

Prueba.

1) En efecto, si $\varphi : V \to U$ es un biholomorfismo tal que $\varphi(p) = q$ y $Y = \varphi^*(Z)$, entonces, $DY(p)$ y $DZ(q)$ tienen los mismos autovalores.

2) En efecto, sean $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un abierto, $Z \in \mathcal{X}(U)$ y $q \in U$ singularidad no degenerada entonces $\det(DZ(q)) \neq 0$, implica que Z, visto como aplicación de U en $\mathbb{C}^n$, por el Teorema de la función inversa, existe $V \subseteq U$ vecindad abierta de q tal que $Z : V \to Z(V)$ es un biholomorfismo. Esto implica que $Z(p) \neq 0$ para todo $p \in V - \{q\}$, luego q es la única singularidad de Z en V. ■

Observación: Desde que las propiedades, arriba definidas, son invariantes por biholomorfismos nos permite extender las definiciones anteriores para campos de vectores en variedades complejas, vía cartas locales.

Definición 2.2.18 *Sean $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{C}^n$ abiertos, $Z_1 \in \mathcal{X}(U_1)$, $Z_2 \in \mathcal{X}(U_2)$, $p_1 \in U_1$, $p_2 \in U_2$ y consideremos sus flujos asociados*

$$\varphi_1 : D\partial[T_0] \times \Delta[p_1, r'] \to \Delta[p_1, r]$$
$$\varphi_2 : D\partial[T_0] \times \Delta[p_2, r'] \to \Delta[p_2, r].$$

Decimos que Z_1 es Localmente Topológicamente Conjugados (resp. Analíticamente Conjugados) a Z_2, lo que denotaremos $Z_1 \sim_{top} Z_2$ (resp. $Z_1 \sim_{anal} Z_2$) si y sólo si existen vecindades abiertas $V_1 \subseteq U_1$, $V_2 \subseteq U_2$ de p_1, p_2 respectivamente y existe $h : V_1 \to V_2$ homeomorfismo (resp. biholomorfismo) llamado Conjugación Topológica Local (resp. Conjugación Analítica Local) tal que

$$h(\varphi_1(T, z)) = \varphi_2(T, h(z)) \; \forall (T, z) \in D_\partial[T_0] \times V_1.$$

El siguiente Teorema nos da toda la información cualitativa alrededor de un punto regular

Teorema 2.2.14 (Flujo Tubular) *Sean $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un abierto, $Z \in \mathcal{X}(U)$ y $z_0 \in U$ un punto regular de Z entonces Z es localmente analíticamente conjugado al campo constante $Y = (1, 0, ..., 0)$ alrededor de z_0 y 0. (ver Figura 2.1)*

Prueba. Ver [[10]]. ■

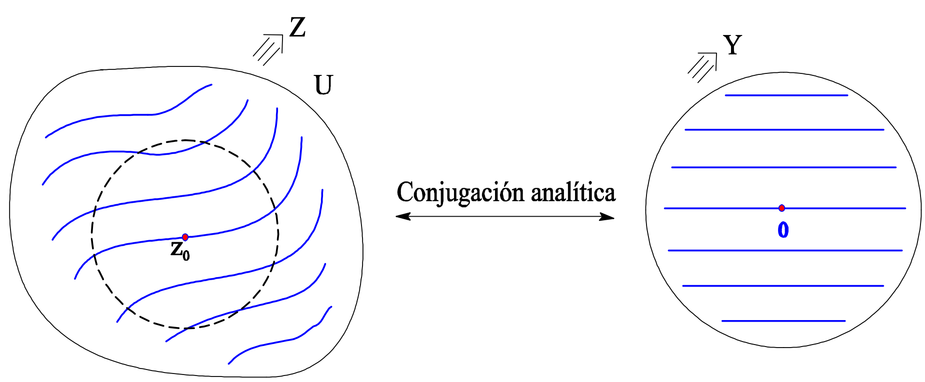

Figura 2.1: En una vecindad, las órbitas se enderezan

Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un abierto, $Z \in \mathcal{X}(U)$ y su flujo asociado $\varphi_Z : D_\partial[T_0] \times \Delta[z_0, r'] \to \Delta[z_0, r]$.

Definición 2.2.19 *Definimos la órbita* (*local*)*de* z *por el campo* Z (*o la hoja de* z *por el campo* Z) *como:*

$$\mathcal{O}_Z(z) = \{\varphi_Z(T, z);\;\; T \in D_\partial(T_0)\}.$$

Definición 2.2.20 *Denotaremos por* $\mathcal{F}_Z = \{\mathcal{O}_Z(z);\; z \in \Delta[z_0, r']\}$, *el cual es llamado* ***Foliación*** (***local***) ***por curvas generada por Z.***

Si $Z_1 \sim_{top} Z_2$ (resp. $Z_1 \sim_{anal} Z_2$) entonces la conjugación topológica (resp. analítica) $h : V_1 \to V_2$ satisface

$$h(\mathcal{O}_{Z_1}(z)) = \mathcal{O}_{Z_2}(h(z)),\;\; \forall z \in V_1,$$

es decir, una conjugación lleva hojas en hojas.

Definición 2.2.21 *Diremos que um campo de vectores holomorfos* Z *es* ***linealizable*** *en una singularidad* p, *si* Z *es localmente analíticamente conjugado en* p *al campo lineal definido por* $DZ(p)$ *en 0.*

Los resultados más importantes sobre las singularidades no degeneradas son los teoremas de Linealización de Poincaré y Siegel, que enunciaremos enseguida.

Teorema 2.2.15 (Linealización de Poincaré) *Si* p *es una singularidad en el dominio de Poincaré y sin resonancias, de un campo de vectores holomorfo* Z, *entonces* Z *es linealizable en* p.

Definición 2.2.22 *Sean* $U \subseteq \mathbb{C}^n$ *un abierto,* $Z \in \mathcal{X}(U)$ *y* $p \in U$ *una singularidad en el domino de Siegel y sin resonancias,* $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ *los autovalores de* $DZ(p)$. *Diremos que la singularidad* q *verifica las* ***condiciones de Siegel,*** *si existen constantes* C,

$\nu > 0$, *tales que para cualquier* $i = 1, ..., n$ *y cualquier* $n-$*upla de enteros no negativos* $m = (m_1, ..., m_n)$ *con* $\sum_{j=1}^{n} m_j \geq 2$, *tenemos*

$$\left| \lambda_i - \sum_{j=1}^{n} m_j \lambda_j \right| \geq \frac{C}{|m|^{\nu}},$$

donde $|m| = \sum_{j=1}^{n} m_j$.

Note que las condiciones de Siegel implican que la singularidade es no resonante.

Teorema 2.2.16 (Linealización de Siegel) *Un campo holomorfo que posee una singularidad que verifica las condiciones de Siegel, es linealizable en esta singularidad.*

2.3. Variedades Complejas

Definición 2.3.1 *Sea* M *un espacio topológico de Hausdorff con base numerable.*

1. *Una carta compleja de dimensión* n *sobre* M *es un homeomorfismo* $\varphi : U \to V$ *donde* U *es un abierto de* M *y* V *es un abierto de* $\mathbb{C}^n$.

2. *Dos cartas complejas* $\varphi_i : U_i \to V_i$, $i = 1, 2$ *son llamadas compatibles si la aplicación* $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ *es un biholomorfismo.*

3. *Un atlas complejo de dimensión* n *sobre* M *es una colección de cartas complejas de dimensión* n, $A(M) = \{\varphi_i : U_i \to V_i\}_{i \in I}$ *tal que son compatibles dos a dos y además* $M = \bigcup_{i \in I} U_i$.

4. *Dos atlas complejos* A *y* A' *sobre* M *de dimensión* n *son llamadas analíticamente equivalentes si cada carta de* A *es compatible con cada carta de* A'.

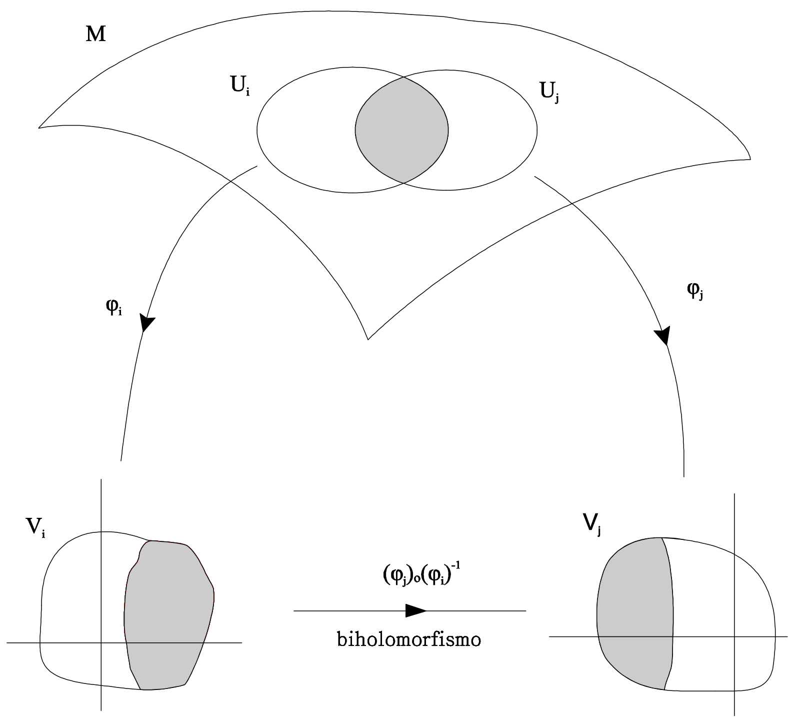

Figura 2.2: Cambio de coordenadas

Denotemos por $\mathcal{A}_M = \{\mathcal{A};\, \mathcal{A}$ es un atlas complejo de dimensión n sobre M$\}$. Dados $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}' \in \mathcal{A}_M$ definimos:

$$\mathcal{A} \sim \mathcal{A}' \text{ si y sólo si } \mathcal{A} \; y \; \mathcal{A}' \text{ son analíticamente equivalentes.}$$

Es fácil ver que la relación anterior es una relación de equivalencia.

Definición 2.3.2 *Una clase de equivalencia Σ en $\mathcal{A}_M/_\sim$ es llamado estructura compleja n-dimensiónal sobre M.*

Dado $\Sigma \in \mathcal{A}_M/_\sim$, consideramos $\mathcal{A}_* = \bigcup\limits_{\mathcal{A}\in\Sigma} \mathcal{A}$, es claro que $\mathcal{A}_* \in \Sigma$. El conjunto $\mathcal{A}_*$ es llamado *atlas maximal.*

Definición 2.3.3 *Una variedad compleja de dimensión n es un par (M, Σ) donde*

M es un espacio topológico de Hausdorff con base numerable y Σ es una estructura compleja n-dimensional sobre M.

Observación:

1. Una variedad compleja de dimensión uno es llamada *superficie de Riemann.*

2. Si $\mathcal{A}$ es un atlas complejo sobre M, entonces existe una única estructura compleja Σ tal que $\mathcal{A} \in \Sigma$. Se sigue que para obtener una variedad compleja es suficiente fijar un atlas complejo sobre un espacio topológico de Hausdorff con base numerable.

Lema 2.3.1 *Sea $M \neq \phi$ y $\mathcal{F} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ una familia de biyecciones $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{C}^n$ que satisface las condiciones siguientes:*

1. *Para todo $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{F}$, el conjunto $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{C}^n$ es un abierto de $\mathbb{C}^n$.*

2. *$M = \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$.*

3. *Si $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, $(U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{F}$ son tales que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ entonces $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ y $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ son abiertos de $\mathbb{C}^n$ y la composición $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ es un biholomorfismo.*

Entonces existe una única topología $\tau(\mathcal{F})$ sobre M que torna a la familia $\mathcal{F}$ un atlas complejo de dimensión n para M, además con la topología $\tau(\mathcal{F})$ las biyecciones se tornan en homeomorfismos.

Prueba. Denotemos por $\tau(\mathcal{F})$ a la familia de subconjuntos de M definidas por

$$A \in \tau(\mathcal{F}) \Leftrightarrow \varphi_\alpha(A \cap U_\alpha) \subseteq \mathbb{C}^n \text{ es abierto } \forall \alpha.$$

Es fácil ver que $\tau(\mathcal{F})$ es una topología sobre M. ∎

Lema 2.3.2 *Sea* $M \neq \phi$ *y* $\mathcal{F} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ *con las condiciones del lema 1. La topología* $\tau(\mathcal{F})$ *es de Hausdorff si y sólo si* $\forall (U_\alpha, \varphi_\alpha)$, $(U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{F}$ *con* $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ *no exista ninguna sucesión* $(x_n) \subset \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ *tal que* $x_n \to x \in \varphi_\alpha(U_\alpha - U_\beta)$ *y* $(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(x_n) \to y \in \varphi_\beta(U_\beta - U_\alpha)$.

Lema 2.3.3 *Sea* $M \neq \phi$ *y* $\mathcal{F} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ *con las condiciones del lema 1.* $\tau(\mathcal{F})$ *tiene base numerable si y sólo si el cubrimiento* $\{U_\alpha\}$ *de* M *admite un subcubrimiento numerable de* M.

Las demostraciones de los lemas anteriores las puede encontrar en [17].

Definición 2.3.4 *Sean* $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ *dos variedades complejas de dimensiónes* m *y* n *respectivamente y* $f : X \to Y$ *continua.*

1. Decimos que f es holomorfa en $p \in X$ si existe $\varphi : U \to V$, $\varphi \in \mathcal{A}$ y existe $\psi : U' \to V'$, $\psi \in \mathcal{B}$ con $p \in U$ y $f(p) \in U'$, $f(U) \subseteq U'$ tales que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : V \subseteq \mathbb{C}^m \to V' \subseteq \mathbb{C}^n$ es holomorfa en $\varphi(p)$.

2. Decimos que f es holomorfa en X si f es holomorfa en p, $\forall p \in X$.

3. Decimos que f es biholomorfa si f es biyectiva holomorfa y su inversa también es holomorfa.

4. Decimos que $(X, \mathcal{A})$ y $(Y, \mathcal{B})$ son biholomorfas si existe un biholomorfismo entre ellas.

Capítulo 3

Transformado Estricto de Funciones Holomorfas

3.1. El Espacio Proyectivo Complejo $\mathbb{C}P(n)$

En $\mathbb{C}^n - \{0\}$ definimos la siguiente relación:

$$z \sim w \Leftrightarrow \exists\ t \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}\ tal\ que\ w = tz,$$

donde $z,\, w \in \mathbb{C}^n - \{0\}$.

Es claro que "$\sim$" es una relación de equivalencia. Al conjunto cociente definido por la relación lo denotamos por:

$$\mathbb{C}P(n-1) = (\mathbb{C}^n - \{0\})\,/_{\sim} = \{[z] = [z_1; ...; z_{n+1}];\ z \in \mathbb{C}^n - \{0\}\}.$$

donde $[z] = \{(tz_1, ..., tz_n);\ t \in \mathbb{C}^*\}$.

Los elementos de $\mathbb{C}P(n-1)$ son rectas complejas de $\mathbb{C}\ ^n$ que pasan por el origen tal que el $0 \in \mathbb{C}^n$ no pertenece a la recta.

- Si $n = 1$, $\mathbb{C}P(1)$ es llamado linea proyectiva o esfera de Riemann.

- Si $n = 2$, $\mathbb{C}P(2)$ es llamado plano proyectivo complejo.

Demos una estructura de variedad al espacio $\mathbb{C}P(n-1)$.

Sea $U_j = \{[z] = [z_1; ...; z_n] \in \mathbb{C}P(n-1);\ z_j \neq 0\}$ para $1 \leq j \leq n$, definimos las aplicaciones

$$\begin{aligned} \varphi_j : \quad U_j &\longrightarrow \mathbb{C}^{n-1} \\ [z] &\longmapsto \varphi_j([z]) = \left(\frac{z_1}{z_j}, ..., \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, ...\frac{z_n}{z_j}\right), \end{aligned}$$

es fácil ver que las aplicaciones φ_j son biyecciones $(1 \leq j \leq n)$, donde las inversas son $\varphi_j^{-1} : \mathbb{C}^{n-1} \to U_j$ dadas por:

$$\varphi_j^{-1}(w_1, ..., w_{n-1}) = [w_1; ... : w_{j-1}; 1; w_j; ...; w_n].$$

Luego tenemos una familia de biyecciones $\mathcal{F} = \{(U_j, \varphi_j)\}_{1 \leq j \leq n}$ tal que: $\varphi_j(U_j) = \mathbb{C}^{n-1}$ es abierto $(1 \leq j \leq n)$ y $\cup_{j=1}^{n}(U_j) = \mathbb{C}P(n-1)$, con un fácil cálculo se muestra que:

Para $U_i \cap U_j \neq \phi$ se tiene que $\varphi_i(U_i \cap U_j)$, $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ son abiertos en $\mathbb{C}^{n-1}$. Además $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ es un biholomorfismo $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$.

Entonces la familia $\mathcal{F} = \{(U_j, \varphi_j)\}_{1 \leq j \leq n}$ genera una topología $\tau(\mathcal{F})$ sobre $\mathbb{C}P(n-1)$ que torna a $\mathcal{F}$ un atlas holomorfo de dimensión n, como $\mathcal{F}$ es finito entonces $\tau(\mathcal{F})$ tiene base numerable, ver lemas 2.3.1 y 2.3.3.

Sea (U_i, φ_i),$(U_j, \varphi_j) \in \mathcal{F}$ tal que $U_i \cap U_j \neq \phi$ un fácil cálculo muestra que no existe ninguna sucesión $(x_n) \subseteq \varphi_i(U_i \cap U_j)$ tal que $x_n \longrightarrow x \in \varphi_i(U_i - U_j)$ y $(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(x_n) \longrightarrow y \in \varphi_j(U_j - U_i)$ entonces $\tau(\mathcal{F})$ es de Hausdorff, ver lema 2.3.2. Luego tenemos que $\mathbb{C}P(n-1)$ es un espacio topológico de Hausdorff con base numerable, por lo tanto $(\mathbb{C}P(n-1), \mathcal{A}(\mathbb{C}P(n-1)))$ es una variedad compleja holomorfa de dimensión $n-1$, donde $\mathcal{A}(\mathbb{C}P(n-1))$ es el atlas maximal que contiene al atlas generado por la familia $\mathcal{F}$.

Definición 3.1.1 $(\mathbb{C}P(n-1), \mathcal{A}(\mathbb{C}P(n-1)))$ *es llamado espacio Proyectivo Complejo* $(n-1)-$*dimencional.*

Proposición 3.1.1 $\mathbb{C}P(n-1)$ *es compacto.*

Observación: El conjunto $\mathbb{C}^{n-1}$ puede ser identificado con U_1, y sea el conjunto $H_\infty = \{[z_1; ...; z_n];\ z_1 = 0\}$ en $\mathbb{C}P(n-1)$, observe que la primera carta de $\mathbb{C}P(n-1)$ no puede ver el conjunto $H_\infty = \mathbb{C}P(n-1) - U_1 = \mathbb{C}P(n-1) - \mathbb{C}^{n-1}$, es decir que H_∞ no intersecta la imagen de φ_1, donde (U_1, φ_1) es la primera carta de $\mathbb{C}P(n-1)$, es por eso que a $H_\infty = \mathbb{C}P(n-1) - \mathbb{C}^{n-1}$ se le llama conjunto del infinito (en la 1ra carta).

3.2. El Blow-up Centrado en el $0 \in \mathbb{C}^n$

El Blow-up centrado en el $0 \in \mathbb{C}^n$, consiste en remplazar el $0 \in \mathbb{C}^n$ por un espacio proyectivo $\mathbb{C}P(n-1)$, dejando todos los otros puntos invariante desde el punto de vista biholomorfo. Vamos a dar un sentido matemático preciso a esta idea informal, empezamos considerando las siguientes aplicaciones:

$$\begin{array}{rccl} E_j : & \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ & (y_1, ..., y_n) & \longmapsto & E_1(y_1, ..., y_n) = (y_1, y_1y_2, ..., y_1y_n) = (z_1, ..., z_n), \end{array}$$

para $1 \leq j \leq n$. Es fácil deducir las siguientes propiedades:

1. $E_j^{-1}(0) = \{y_1 = 0\}$

2. $E_j(\mathbb{C}^n) = \{\mathbb{C}^n - \{z_j = 0\}\} \cup \{0\}$, i.e E_j no es sobreyectiva

3. $E_j : \mathbb{C}^n - \{y_j = 0\} \longrightarrow \mathbb{C}^n - \{z_j = 0\}$ es un biholomorfismo, cuya inversa es:

$$\begin{array}{rccl} E_j^{-1} : & \mathbb{C}^n - \{z_j = 0\} & \longrightarrow & \mathbb{C}^n - \{y_j = 0\} \\ & (z_1, ..., z_n) & \longmapsto & E_j^{-1}(z_1, ..., z_n) = \left(\dfrac{z_1}{z_j}, ..., \dfrac{z_{j-1}}{z_j}, z_j, \dfrac{z_{j+1}}{z_j}, ... \dfrac{z_n}{z_j}\right). \end{array}$$

De lo anterior deducimos que para poder cubrir todo el espacio $\mathbb{C}^n$ se necesitan las n-aplicaciones E_j, además el $0 \in \mathbb{C}^n$ es llevado a un espacio $(n-1)$-dimensional, $\{z_j = 0\}$, via la aplicación E_j.

Para cubrir todo $\mathbb{C}^n$ (i.e todo punto de $\mathbb{C}^n$ tenga pre-imagen bajo $E_1, ..., E_n$) necesitamos pegar los n sistemas haciendo que los espacios $\{y_1 = 0\}, ..., \{y_n = 0\}$ se identifiquen dos a dos, de tal manera que $E_1, ..., E_n$ sigan siendo biholomorfismos, intuitivamente necesitamos construir una **variedad** con ayuda de las apliaciones $E_1, ..., E_n$.

Para $1 \leq j \leq n$, definimos los conjuntos:

$$\tilde{U}_j = \{(z_1, ..., z_n, [w]) \in \mathbb{C}^n \times U_j; (z_1, ...z_{j-1}, z_{j+1}, ..., z_n) = z_j\varphi_j([w])\},$$

donde (U_i, φ_i) son las cartas del plano proyectivo $\mathbb{C}P(n-1)$. Observe que:

$$\tilde{U}_j \subseteq \mathbb{C}^n \times U_j \subseteq \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}P(n-1),\ (1 \leq j \leq n).$$

Sea $z = (z_1, ..., z_n)$ y $[w] = [w_1; ...; w_n]$, definimos las funciones:

$$\begin{array}{rccl} \tilde{\varphi}_j : & \tilde{U}_j & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ & (z, [w]) & \longmapsto & \tilde{\varphi}_1(z, [w]) = \left(\dfrac{w_1}{w_j}, ..., \dfrac{w_{j-1}}{w_j}, z_j, \dfrac{w_{j+1}}{w_j}, ...\dfrac{w_n}{w_j}\right). \end{array}$$

Un fácil cálculo muestra que las $\tilde{\varphi}_j$,$(1 \leq j \leq n)$ son biyeciones, cuyas inversas son:

$$\begin{array}{rccl} \tilde{\varphi}_j^{-1} : & \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \tilde{U}_j \\ & (y_1, ..., y_n) & \longmapsto & \tilde{\varphi}_j^{-1}(y_1, ..., y_n) = \big(E_j(y_1, ..., y_n), \varphi_j^{-1}(y_1, ..., y_{j-1}, y_{j+1}, ..., y_n)\big). \end{array}$$

Luego tenemos una familia de biyecciones $\tilde{\mathcal{F}} = \{(\tilde{U}_j, \tilde{\varphi}_j)\}_{1 \leq j \leq n}$.

Definimos el conjunto $\tilde{\mathbb{C}}_0^n = \cup_{j=1}^n(\tilde{U}_j)$, un fácil cálculo se muestra que:

Para $\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j \neq \phi$ se tiene que $\tilde{\varphi}_i(\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j)$, $\varphi_j(\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j)$ son abiertos en $\mathbb{C}^n$. Además $\tilde{\varphi}_i \circ \tilde{\varphi}_j^{-1}$ es un biholomorfismo $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$.

Entonces la familia $\tilde{\mathcal{F}} = \{(\tilde{U}_j, \tilde{\varphi}_j)\}_{1\leq j\leq n}$ genera una topología $\tau(\tilde{\mathcal{F}})$ sobre $\tilde{\mathbb{C}}_0^n$ que torna a $\mathcal{F}$ un atlas holomorfo de dimensión n, como $\tilde{\mathcal{F}}$ es finito entonces $\tau(\tilde{\mathcal{F}})$ tiene base numerable, ver lemas 2.3.1 y 2.3.3.

Sean $(\tilde{U}_i, \tilde{\varphi}_i)$,$(\tilde{U}_j, \tilde{\varphi}_j) \in \mathcal{F}$ tal que $\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j \neq \phi$ un fácil cálculo muestra que no existe ninguna sucesión $(x_n) \subseteq \tilde{\varphi}_i(\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j)$ tal que $x_n \longrightarrow x \in \tilde{\varphi}_i(\tilde{U}_i - \tilde{U}_j)$ y $(\tilde{\varphi}_j \circ \tilde{\varphi}_i^{-1})(x_n) \longrightarrow y \in \tilde{\varphi}_j(\tilde{U}_j - \tilde{U}_i)$ entonces $\tau(\tilde{\mathcal{F}})$ es de Hausdorff, ver lema 2.3.2. Luego tenemos que $\mathbb{C}P(n-1)$ es un espacio topológico de Hausdorff con base numerable.

Por lo tanto $(\tilde{\mathbb{C}}_0^n, \mathcal{A}(\tilde{\mathbb{C}}_0^n))$ es una variedad compleja holomorfa de dimensión n, donde $\mathcal{A}(\tilde{\mathbb{C}}_0^n)$ es el atlas maximal que contiene al atlas generado por la familia $\tilde{\mathcal{F}}$.

Definición 3.2.1 *La variedad compleja* $(\tilde{\mathbb{C}}_0^n, \mathcal{A}(\tilde{\mathbb{C}}_0^n))$ *es llamada Blow-up centrado en el* $0 \in \mathbb{C}^n$.

Observe que $\tilde{\mathbb{C}}_0^n \subseteq \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}P(n-1)$, de manera natural existen dos proyecciones:

$$\begin{array}{rccc} E: & \tilde{\mathbb{C}}_0^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ & (z,[l]) & \longmapsto & E(z,[l]) = z, \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \pi: & \tilde{\mathbb{C}}_0^n & \longrightarrow & \mathbb{C}P(n-1) \\ & (z,[l]) & \longmapsto & E(z,[l]) = [l]. \end{array}$$

i) Expresamos la proyección E en coordenadas, i.e trabajando con las cartas de la variedad $\tilde{\mathbb{C}}_0^n$.

En la j-ésima carta $(\tilde{U}_j, \tilde{\varphi}_j)$

$$(E \circ \tilde{\varphi}_j^{-1})(y_1, ..., y_n) = E_j(y_1, ..., y_n).$$

Entonces $(E \circ \tilde{\varphi}_j^{-1}) = E_j \quad \forall\ j \in \{1, ..., n\}$, por lo tanto ahora sí cualquier punto $z \in \mathbb{C}^n$ tiene pre-imagen bajo $E_1, E_2, ...,$ ó E_n. Además como las aplicaciones E_j son

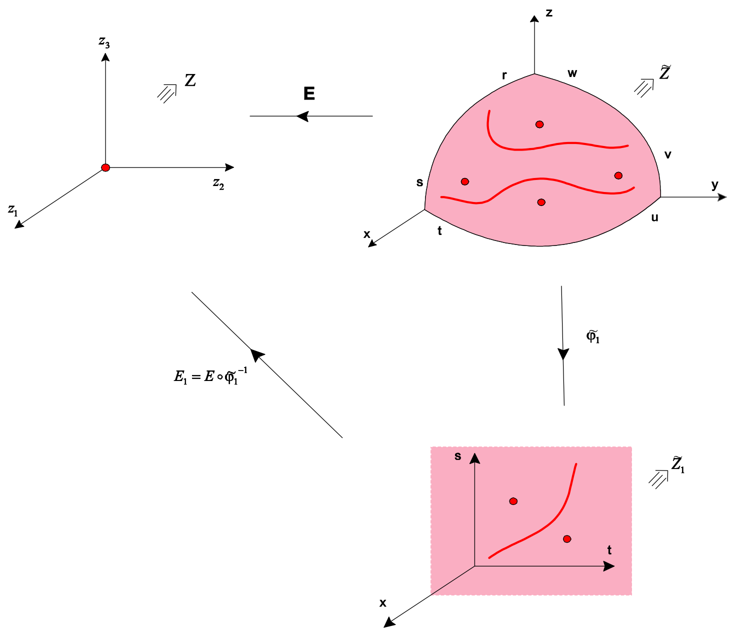

Figura 3.1: El Blow-up centrado en el $0 \in \mathbb{C}^n$.

holomorfas $\forall\ j \in \{1, ..., n\}$, entonces la aplicacion $E : \tilde{\mathbb{C}}^n_0 \longrightarrow \mathbb{C}^n$ es holomorfa entre variedades, (ver figura 3.1).

ii) Análogamente para la proyección π, es fácil ver que π es una función holomorfa entre variedades.

Definición 3.2.2 *La función holomorfa $E : \tilde{\mathbb{C}}^n_0 \longrightarrow \mathbb{C}^n$ será llamada Blow-up con centro en el punto $0 \in \mathbb{C}^n$.*

Proposición 3.2.1 *La función $E : \tilde{\mathbb{C}}^n_0 \longrightarrow \mathbb{C}^n$ verifica las siguientes propiedades:*

(1) $E^{-1}(\theta) = \mathbb{C}P(n-1)$; donde $\theta = (0, 0, 0)$.

(2) $\tilde{\mathbb{C}}^n_0 = \{(z, [z]);\ z \in \mathbb{C}^n - \{0\}\} \cup \{\theta\} \times \mathbb{C}P(n-1)$.

(3) $E_{|_{\tilde{\mathbb{C}}^n_0 - \mathbb{C}P(n-1)}} : \tilde{\mathbb{C}}^n_0 - \mathbb{C}P(n-1) \longrightarrow \mathbb{C}^n - \{\theta\}$ es un biholomorfismo.

(4) $E : \tilde{\mathbb{C}}^n_0 \longrightarrow \mathbb{C}^n$ es un mapeo propio.

Prueba.

(1) En efecto, sea $(z,[l]) \in E^{-1}(\theta) \Leftrightarrow E(z,[l]) = \theta \Leftrightarrow z = \theta \Leftrightarrow (z,[l]) \in \{\theta\} \times \mathbb{C}P(n-1)$ entonces $E^{-1}(\theta) = \{\theta\} \times \mathbb{C}P(n-1)$, sea $i : \mathbb{C}P(n-1) \hookrightarrow E^{-1}(\theta)$ la inclusión canónica, es claro que i es una inmersión holomorfa, entonces es claro que $\{\theta\} \times \mathbb{C}P(n-1)$ es biholomorfa a $\mathbb{C}P(n-1)$ ($\mathbb{C}P(n-1) \approx \{\theta\} \times \mathbb{C}P(n-1)$), entonces $E^{-1}(\theta)$ se puede identificar con $\mathbb{C}P(n-1)$.

(2) En efecto, es claro que $\{(z,[z]);\, z \in \mathbb{C}^n - \{\theta\}\} \cup \{\theta\} \times \mathbb{C}P(n-1) \subseteq \tilde{\mathbb{C}}^n_0$, veamos el otro contenido.

Sea $(z,[l]) \in \tilde{\mathbb{C}}^n_0$; donde $z = (z_1, ..., z_n)$, $[l] = [l_1, ..., l_n]$ entonces ocurren dos casos :

- Si $z = \theta$, entonces $(z,[l]) \in \{\theta\} \times U_i \subseteq \{\theta\} \times \mathbb{C}P(n-1)$; para algún $i \in \{1, ..., n\} \Rightarrow (z,[l]) \in \{(z,[z]);\, z \in \mathbb{C}^n - \{\theta\}\} \cup \{\theta\} \times \mathbb{C}P(n-1)$
- Si $z \neq \theta$, sin pérdida de generalidad supongamos que $(z,[l]) \in \tilde{U}_1 \Rightarrow (z_2, ..., z_n) = z_1\varphi_1([l]) = z_1(\frac{l_2}{l_1}, ..., \frac{l_n}{l1})$, Además $z_1 \neq 0$, entonces $[z] = [l]$, luego $(z,[l]) \in \{(z,[z]);\, z \in \mathbb{C}^n - \{\theta\}\}$.

(3) En efecto, teniendo en cuenta las identificaciones anteriores, se aclara por última vez que $E_{|_{\tilde{\mathbb{C}}^n_0 - \mathbb{C}P(n-1)}} : \tilde{\mathbb{C}}^n_0 - \mathbb{C}P(n-1) \longrightarrow \mathbb{C}^n - \{\theta\}$ es una biyección cuya inversa es : $(E_{|_{\tilde{\mathbb{C}}^n_0 - \mathbb{C}P(n-1)}})^{-1} : \mathbb{C}^n - \{\theta\} \longrightarrow \tilde{\mathbb{C}}^n_0 - \mathbb{C}P(n-1)$, ya sabemos que la aplicación E es holomorfa , sólo nos falta ver que $(E_{|_{\tilde{\mathbb{C}}^n_0 - \mathbb{C}P(n-1)}})^{-1}$ sea holomorfa, como son aplicaciones entre variedades, entonces veamos mediante las cartas, es fácil ver que $\tilde{\varphi}_i \circ (E_{|_{\tilde{\mathbb{C}}^n_0 - \mathbb{C}P(n-1)}})^{-1}$ es holomorfa $\forall\, i \in \{1, ..., n\}$, entonces $(E_{|_{\tilde{\mathbb{C}}^n_0 - \mathbb{C}P(n-1)}})^{-1}$ sea holomorfa.

(4) En efecto, sea $K \subseteq \mathbb{C}^n$ compacto, ocurren dos casos:

- Si $\theta \notin K$, entonces por definición de E, $E^{-1}(K)$ es compacto.
- Si $\theta \in K$, entonces $E^{-1}(K) = E^{-1}(K - \{\theta\}) \cup \mathbb{C}P(n-1)$ es compacto. ■

Observaciones: Con respecto a la Proposición anterior, tenemos:

1. Teniendo en cuenta la identificacion en (1) se tiene que

$$\tilde{\mathbb{C}}_0^n = \{(z, [z]);\ z \in \mathbb{C}^n - \{0\}\} \bigcup \mathbb{C}P(n-1).$$

2. Sea la proyección canónica $\tilde{\pi} : \mathbb{C}^n - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}P(n-1)$ obtenida apartir de la relación " $\sim$ " en $\mathbb{C}^n - \{0\}$,para la construcción de $\mathbb{C}P(n-1)$, es claro que la aplicación $\tilde{\pi}$ es holomorfa, pues $(\varphi_i \circ \tilde{\pi})$ es holomorfa $\forall\ i \in \{1, ..., n\}$,entonces el gráfico de $\tilde{\pi}$: $G(\tilde{\pi})$ es una variedad Holomorfa, aún más $G(\tilde{\pi}) = \{(z, [z])$; $z \in \mathbb{C}^n - \{0\}\}$ es biholomorfo a $\mathbb{C}^n - \{0\}$; entonces de (1) y (2) tenemos que:

$$\tilde{\mathbb{C}}_0^n = \{(z, [z]); z \in \mathbb{C}^n - \{0\}\} \cup \{0\} \times \mathbb{C}P(n-1) \approx (\mathbb{C}^n - \{0\}) \cup \mathbb{C}P(n-1),$$

entonces teniendo en cuenta las identificaciones en (1) y (2) tenemos el siguiente resultado:

$$\tilde{\mathbb{C}}_0^n = (\mathbb{C}^n - \{0\}) \bigcup \mathbb{C}P(n-1).$$

3. De la observación 2 y de (3) podemos ver que que el origen 0 es remplazado por el proyectivo $\mathbb{C}P(n-1)$, ya que $\tilde{\mathbb{C}}_0^n - \mathbb{C}P(n-1)$ es una copia fiel (desde el punto de vista biholomorfo) de $\mathbb{C}^n - \{0\}$.

4. Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$, y sea $p \in U$, también se puede construir, de manera análoga al caso anterior, el Blow-up centrado en $p \in U$, denotándolo por $\tilde{U}_p$.

3.3. Curvas Planas Proyectivas

Las definiciones básicas y resultados de esta sección pueden encontrarlas en [12] y [16].

Teorema 3.3.1 *Sean f y h funciones holomorfas definidas en vecindades U y V de $0 \in \mathbb{C}^2$ respectivamente con f irreducible. Si $C = \{(x,y) \in U;\ f(x,y) = 0\}$ y $h|_{C\cap V} = 0$ entonces existe una función holomorfa g definido en W vecindad de $0 \in \mathbb{C}^2$ tal que $h = fg$ en $U \cap V \cap W$.*

Proposición 3.3.2 *Dos curvas planas sin componentes conexas se cortan en un número finito de puntos.*

Proposición 3.3.3 *Sean $P_1, ..., P_n$ (resp. $Q_1, ..., Q_n$) n puntos de $\mathbb{C}P(n-1)$ no alineados. Entonces existe un único cambio de coordenadas proyectivo $T : \mathbb{C}P(n-1) \to \mathbb{C}P(n-1)$ tal que $T(P_i) = Q_i$, $i = 1, ..., n$.*

Teorema 3.3.4 (Bezout) *Sean F y G curvas planas proyectivas de grados m y n respectivamente en $\mathbb{C}P(2)$. Supongamos que F y G no tienen componentes comunes. Entonces*

$$\sum_p i_p(F,G) = mn.$$

3.4. Transformado Estricto de Foliaciones

Sean $U \subseteq \mathbb{C}^n$, $Z : U \longrightarrow \mathbb{C}^n$ un campo vectorial holomorfo y $p \in U$ una singularidad aislada de Z, se sabe que las soluciones de la EDO $z' = Z(z)$ asociada al campo Z , induce una foliación $\mathcal{F}_Z$ en una vecindad de $p \in U$, como $p \in U$ es una singularidad aislada de Z, entonces existe una veciendad abierta U_p de p en la que el $p \in U_p$

es la única singularidad y los demás puntos de $U_p - \{p\}$ son puntos regulares, por el Teorema del Flujo Tubular nos dice que las órbitas alrededor de un punto regular las puedo enderezar mediante una conjugacion analítica local, entonces ya sabemos como se comporta localmente. Lo interesante sería ver que pasa alrededor del punto singular p, i.e como se comporta las órbitas alrededor del punto p, una manera de poder observar es levantándola a $\tilde{U}_p$ vía el Blow-up $E : \tilde{U}_p \longrightarrow U$ (mediante el *Pull-Back de* Z bajo el biholomorfismo $E_{|_{\tilde{U}_p - \mathbb{C}P(n-1)}}$), formando una nueva foliacion que será llamado *Transformado Estricto de* $\mathcal{F}_Z$ y será denotado por $\mathcal{F}_Z$.

Veamos que significa levantar a un campo holomorfo, en el caso general.

Sean $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto, $Z : U \longrightarrow \mathbb{C}^n$ un campo vectorial holomorfo y $p \in U$ una singularidad aislada de Z, sea la EDO

$$z' = Z(z) \tag{3.1}$$

asociada al campo Z , y sea $F : V \longrightarrow U$ un biholomorfismo ($V \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto). Si $z = F(w)$, entonces: $F'(w)w' = z' = Z(z) = Z(F(w))$ luego:

$$w' = [F'(w)]^{-1}Z(F(w)) = [(F^{-1})'(F(w))]Z(F(w)) = ([(F^{-1})'.Z] \circ F)(w), \tag{3.2}$$

donde $F^*(Z) = [(F^{-1})'.Z] \circ F$ es el **Pull-Back** *de* Z bajo F, observe que $F^*(Z) : V \longrightarrow \mathbb{C}^n$ es un campo vectorial holomorfo, entonces en el sistema (3.2) se tiene: $w' = F^*(Z)(w)$, además que F es una conjugación analítica entre los campos Z y $F^*(Z)$ i.e $Z \sim_{ana} F^*(Z)$, entonces las soluciones de (3.2) son transformadas por F en soluciones de (3.1), ver [6].

Por simplicidad supongamos que $U = \mathbb{C}^n$, $p = 0 \in \mathbb{C}^n$ (singularidad aislada). Como el *Blow-up* $E : \tilde{\mathbb{C}}^n_0 \longrightarrow \mathbb{C}^n$ es un biholomorfismo entre $\tilde{\mathbb{C}}^n_0 - \mathbb{C}P(n-1)$ y $\mathbb{C}^n - \{0\}$, entonces podemos hacer todo el procedimiento anterior, considerando el *Pull-Back de* Z restringido a $\mathbb{C}^n - \{0\}$. Entonces $E^*(Z)$ es un campo vectorial holomorfo sobre $\tilde{\mathbb{C}}^n_0 - \mathbb{C}P(n-1)$, el problema es que no está definido sobre toda la variedad $\tilde{\mathbb{C}}^n_0$, nos

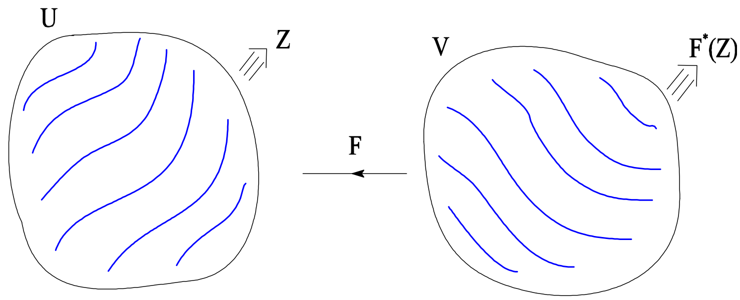

Figura 3.2: El Pull-Back de Z bajo F

falta extender sobre el proyectivo $\mathbb{C}P(n-1)$, pues en esta zona es la que nos dara información de lo que pasa en el origen. Más adelante se verá que $E^*(Z)$ es extendido a todo $\tilde{\mathbb{C}}_0^n$.

Sea $Z = \sum_{i=1}^n Z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ un campo vectorial holomorfo tal que $m_p(Z) = \nu$, así tenemos:

$$Z_i(z_1, ..., z_n) = \sum_{k \geq \nu} Z_k^i(z_1, ..., z_n) \tag{3.3}$$

donde Z_k^i son polinomios homogéneos de grado k, obtenidos al desarrollar Z_i como series de potencias alrededor del origen, $1 \leq i \leq n$.

Realizamos el Pull-Back del campo Z bajo la aplicación del Blow-up.

Viendo a $E^*(Z)$ con la j-ésima carta del Blow-up.

$$E(y_1, ..., y_n) = (z_1, ..., z_n),$$

donde $z_i = y_i y_j$ si $i \neq j$ y $z_j = y_j$.

El divisor (espacio proyectivo $\mathbb{C}P(n-1)$) es dado por:

$$E^{-1}(0) = \{(y_1, ..., y_n) : y_j = 0\}.$$

En esta carta, el pull-back de Z por E es generado por:

$$E^*(Z) = (Z_j \circ E)\frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \left(\frac{Z_i \circ E - y_i Z_j \circ E}{y_j}\right)\frac{\partial}{\partial y_i}. \tag{3.4}$$

De (3.3):

$$(Z_j \circ E)(y) = \sum_{k\geq\nu} y_j^k Z_k^j(\hat{y}),$$

donde $y = (y_1, ..., y_n)$ y $\hat{y} = (y_1, ..., y_{j-1}, 1, y_{j+1}, ..., y_n)$.

Luego tenemos:

$$E^*Z(y) = \left(\sum_{k\geq\nu} y_j^k Z_k^j(\hat{y})\right)\frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \left(\sum_{k\geq\nu} y_j^{k-1}[Z_k^i(\hat{y}) - y_i Z_k^j(\hat{y})]\right)\frac{\partial}{\partial y_i}. \tag{3.5}$$

Se presenta dos casos:

Caso I Si $\exists i \neq j$ tal que $Z_k^i(\hat{y}) - y_i Z_k^j(\hat{y}) \neq 0$.

En este caso $E^*(Z)$ es divisible por $y_j^{\nu-1}$, denotamos:

$$\tilde{Z}(y) = \frac{E_1^*(Z)(y)}{y_j^{\nu-1}}, \text{ luego tenemos:}$$

$$\tilde{Z}(y) = y_j Z_\nu^j(\hat{y})\tfrac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{i=1, i\neq j}^{n} ([Z_\nu^i(\hat{y}) - y_i Z_\nu^j(\hat{y})])\tfrac{\partial}{\partial y_i} + y_j\tilde{Y}(y),$$

donde $\tilde{Y}$ es un campo vectorial holomorfo.

Observe que en este caso se tiene que $E^{-1}(0)$ es inavariante por $\mathcal{F}_Z$, donde $\mathcal{F}_Z$ es la foliación generada por $\tilde{Z}$. Así $E^*(Z)$ se extiende sobre el conjunto $\{y_j = 0\}$.

CASO II Si $\forall 1 \leq i \leq n$ con $i \neq j$ se tiene $Z_k^i(\hat{y}) - y_i Z_k^j(\hat{y}) = 0$.

En este caso $E^*(Z)$ es divisible por y_j^ν, denotemos:

$$\tilde{Z}(y) = \frac{E_1^*(Z)(y)}{y_j^{\nu}}, \text{ luego tenemos:}$$

$$\tilde{Z}(y) = Z_\nu^j(\hat{y})\tfrac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \left([Z_{\nu+1}^i(\hat{y}) - y_i Z_{\nu+1}^j(\hat{y})]\right)\tfrac{\partial}{\partial y_i} + y_j\tilde{W}(y),$$

donde $\tilde{W}$ es un campo vectorial holomorfo.

Observe que en este caso se tiene que $E^{-1}(0)$ no es inavariante por $\mathcal{F}_Z$, donde $\mathcal{F}_Z$ es la foliación generada por $\tilde{Z}$. Así $E^*(Z)$ se extiende sobre el conjunto $\{y_j = 0\}$.

De los dos casos anteriores, se tiene la siguiente:

Definición 3.4.1 *Al campo holomorfo $\tilde{Z}$, que es la extensión de $E^*(Z)$ en todo $\tilde{\mathbb{C}}^n_0$, se le llama el Transformado Estricto del Campo Z por E.*

Una vez hecho los análisis en la j-ésima carta del Blow-up, se tiene los siguientes teoremas:

Teorema 3.4.1 *Sean $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto, $Z : U \longrightarrow \mathbb{C}^n$ un campo vectorial holomorfo, $0 \in U$ una singularidad aislada de Z y $E : \tilde{\mathbb{C}}^n_0 \longrightarrow \mathbb{C}^n$ la aplicación Blow-up (en la j-ésima carta) centrada en 0, tal que si $\exists i \neq j$ tal que $Z^i_k(\hat{y}) - y_i Z^j_k(\hat{y}) \neq 0$ entonces*

$E^*(Z)$ se extiende a una función holomorfa

$$\tilde{Z} = \frac{E^*(Z)}{y_j^{\nu-1}},$$

donde $\tilde{Z}$ esta definida sobre todo $\tilde{\mathbb{C}}^n_0$. Además $E^{-1}(0) = \mathbb{C}P(n-1)$ es invariante por $\mathcal{F}_Z$.

Teorema 3.4.2 *Sean $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto, $Z : U \longrightarrow \mathbb{C}^n$ un campo vectorial holomorfo, $0 \in U$ una singularidad aislada de Z y $E : \tilde{\mathbb{C}}^n_0 \longrightarrow \mathbb{C}^n$ la aplicación Blow-up (en la j-ésima carta) centrada en 0, tal que si $\forall 1 \leq i \leq n$ con $i \neq j$ se tiene $Z^i_k(\hat{y}) - y_i Z^j_k(\hat{y}) = 0$ entonces*

$E^*(Z)$ es extendido a una función holomorfa

$$\tilde{Z} = \frac{E^*(Z)}{y_j^{\nu}},$$

donde $\tilde{Z}$ esta definida sobre todo $\tilde{\mathbb{C}}^n_0$. Además $E^{-1}(0) = \mathbb{C}P(n-1)$ es no invariante por $\mathcal{F}_Z$.

3.5. Singularidad Dicrítica

Sean $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto, $Z : U \longrightarrow \mathbb{C}^n$ un campo vectorial holomorfo, $0 \in U$ una singularidad aislada de Z, sea $E : \tilde{\mathbb{C}}_0^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ la aplicación Blow-up centrada en 0 y $\tilde{Z}$ es el Transformado Estricto de Z por E. Siguiendo con las notaciones de la sección anterior y gracias a los Teoremas 3.4.1 y 3.4.2, se tienen las siguiente definiciones:

Definición 3.5.1 *Decimos que* $0 \in \mathbb{C}^n$ *es una **Singularidad no Dicrítica** de* Z *cuando* $E^{-1}(0) = \mathbb{C}P(n-1)$ *es invariante por* $\mathcal{F}_Z$.

Definición 3.5.2 *Decimos que* $0 \in \mathbb{C}^n$ *es una **Singularidad Dicrítica** de* Z *cuando* $E^{-1}(0) = \mathbb{C}P(n-1)$ *no es invariante por* $\mathcal{F}_Z$.

Observaciones:

1) Del Teorema 3.4.1 se tiene: Si para cada $j \in \{1, ..., n\}$ $\exists$ $i \in \{1, ..., n\}$ con $i \neq j$ tal que

$$z_i Z_\nu^j - z_j Z_\nu^i \not\equiv 0$$

si y sólo si $0 \in \mathbb{C}^n$ *es una Singularidad no Dicrítica de* Z.

2) Note que en cualquiera de los dos casos $\mathcal{F}_{E^*(Z)}$ y $\mathcal{F}_Z$, las foliaciónes generadas por $E^*(Z)$ y el Transformado Estricto $\tilde{Z}$ respectivamente, coinciden fuera del divisor $E^{-1}(0) = \mathbb{C}P(n-1)$, pues $\tilde{Z} = \dfrac{1}{y_j^k} E^*(Z)$ en la j-esima carta, donde $k = \nu - 1$ si $0 \in \mathbb{C}^n$ *es una **Singularidad no Dicrítica***, $k = \nu$ si $0 \in \mathbb{C}^n$ *es una **Singularidad Dicrítica.***

3) Teniendo una foliación $\mathcal{F}_Z$ en $\mathbb{C}^n$, llegamos a obtener una foliación $\mathcal{F}_{E^*(Z)}$ sobre $\tilde{\mathbb{C}}_0^n - \mathbb{C}P(n-1)$, la cual se extiende de manera única , obteniendo una foliación $\mathcal{F}_Z$ sobre $\tilde{\mathbb{C}}_0^n$ la cual es llamada el Transformado Estricto de $\mathcal{F}_Z$ (o de Z).

Capítulo 4

Caracterización de una Singularidad Dicrítica en $0 \in \mathbb{C}^n$

Sea $\mathcal{M}^n$ una variedad compleja de dimensión n y consideremos en ella una foliación analítica singular por curvas $\mathcal{F}_Z$. Sea $p \in \mathcal{M}^n$ una singularidad aislada de $\mathcal{F}_Z$. Sea $z = (z_1, ..., z_n)$ un sistema de coordenadas en una vecindad de p en $\mathcal{M}^n$ tal que $p = (0, ..., 0) \in \mathbb{C}^n$. En estas coordenadas, sea

$$Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

el campo vectoral holomorfo que genera a $\mathcal{F}_Z$. Si $m_0(Z) = \nu$, donde $\nu \in \mathbb{Z}^+$, entonces las componentes Z_i de Z tienen desarrollo de Taylor en $0 \in \mathbb{C}^n$

$$Z_i = \sum_{k \geq \nu} Z_k^i \ , \ 1 \leq i \leq n,$$

donde cada Z_k^i son polinomios homogéneos de grado k.

Además como las coordenadas Z_i son funciones holomorfas alrededor de $0 \in \mathbb{C}^n$, entonces en una vecinadad de $0 \in \mathbb{C}^n$ tenemos:

$$Z_i(z) = \sum_{|Q| \geq \nu} c_{i,Q}(z-p)^Q \ , \ 1 \leq i \leq n.$$

El *Jet de Orden k ó k-JET de* Z en p denotado por $J_p^k(Z)$ se define como:

$$J_p^k(Z) = \sum_{|Q|=\nu}^{k} c_{i,Q}(z-p)^Q \frac{\partial}{\partial z_i}\ ,\ 1 \leq i \leq n$$

En esta sección probaremos que la condición de que $\mathcal{F}_Z$ tiene una singularidad dicrítica en p, puede ser caracterizada en términos de los polinomios Z_ν^i $(1 \leq i \leq n)$, es decir, de J_0^ν (el primer jet no nulo de orden ν de Z en el origen).

Más especificamente tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.0.1 *Usando las notaciones anteriores, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) El punto $0 \in \mathbb{C}^n$ *es una singularidad dicrítica de* $\mathcal{F}_Z$

(2) $z_j Z_\nu^i - z_i Z_\nu^j \equiv 0, \ \ \forall 1 \leq i < j \leq n$

(3) Existe un polinomio $P_{\nu-1}$*, homogéneo de grado* $\nu - 1$ *tal que* $\begin{cases} Z_\nu^i = z_i P_{\nu-1}, \\ \forall 1 \leq i \leq n \end{cases}$

(4) $J_0^\nu(Z) = P_{\nu-1}R$*, donde* $R = \sum\limits_{i=1}^{n} z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ *es el campo vectorial holomorfo radial.*

Prueba.

(1) $\Rightarrow$ (2) Para cada $j = 1, ..., n$, usamos la j-ésima carta del Blow-up.

$$E(y_1, ..., y_n) = (z_1, ..., z_n),$$

donde $z_i = y_i y_j$ si $i \neq j$ y $z_j = y_j$. En esta carta, el pull-back de Z por E es generado por:

$$E^*(Z) = (Z_j \circ E)\frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \left(\frac{Z_i \circ E - y_i Z_j \circ E}{y_j} \right) \frac{\partial}{\partial y_i}. \qquad (4.1)$$

De (2.1) tenemos:

$$(Z_j \circ E)(y) = \sum_{k \geq \nu} y_j^k Z_k^j(\hat{y}),$$

donde $y = (y_1, ..., y_n)$ y $\hat{y} = (y_1, ..., y_{j-1}, 1, y_{j+1}, ..., y_n)$.

Por (4.1) tenemos:

$$E^* Z(y) = \left(\sum_{k \geq \nu} y_j^k Z_k^j(\hat{y}) \right) \frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{i=1, i \neq j}^{n} \left(\sum_{k \geq \nu} y_j^{k-1} [Z_k^i(\hat{y}) - y_i Z_k^j(\hat{y})] \right) \frac{\partial}{\partial y_i}. \tag{4.2}$$

Procediendo por contradicción, supongamos que (2) es falso, entonces existe $i \neq j$, $1 \leq i \leq n$ tal que $Z_\nu^i(\hat{y}) - y_i Z_\nu^j(\hat{y}) \neq 0$, luego $E^* Z$ es divisible por $y_j^{\nu-1}$. Entonces $\tilde{Z} = \frac{E^* Z}{y_j^{\nu-1}}$ es el tranformado estricto de Z por E. De (4.2) tenemos que:

$$\tilde{Z}(y) = y_j Z_\nu^j(\hat{y}) \frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{i=1, i \neq j}^{n} \left(Z_\nu^i(\hat{y}) - y_i Z_\nu^j(\hat{y}) \right) \frac{\partial}{\partial y_i} + y_j \tilde{Y}(y), \tag{4.3}$$

donde $\tilde{Y}$ es un campo vectorial holomorfo. De (4.3) deducimos que $E^{-1}(0)$ es invariante por $\tilde{Z}$, lo cual es una contradicción, puesto que $\mathcal{F}_Z \in \mathcal{D}^n$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Como los Z_ν^j son polinomios homogéneos, reordenado sus términos y factorizando z_1, se pueden escribir de la siguiente forma:

$$Z_\nu^j(z_1, ..., z_n) = \sum_{k=0}^{\nu} a_{\nu-k}^j(z_2, ..., z_n) z_1^k,$$

donde los $a_{\nu-k}^j$ $(1 \leq i \leq n)$ son polinomios homogéneos de grado $\nu - k$ en las variables $z_2, ..., z_n$. De la hipotesis, para $1 < j \leq n$ tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &\equiv z_j Z_\nu^1 - z_1 Z_\nu^j = \sum_{k=0}^{\nu} a_{\nu-k}^1(z_2, ..., z_n) z_1^k z_j - \sum_{k=0}^{\nu} a_{\nu-k}^j(z_2, ..., z_n) z_1^k z_1 \\ &\equiv a_\nu^1(z_2, ..., z_n) z_j + \sum_{k=1}^{\nu} a_{\nu-k}^1(z_2, ..., z_n) z_1^k z_j - \sum_{k=1}^{\nu+1} a_{\nu-k+1}^j(z_2, ..., z_n) z_1^k \\ &\equiv a_\nu^1(z_2, ..., z_n) z_j + \sum_{k=1}^{\nu} [a_{\nu-k}^1(z_2, ..., z_n) z_j - a_{\nu-k+1}^j(z_2, ..., z_n)] z_1^k - a_0^j(z_2, ..., z_n) z_1^{\nu+1} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{cases} a^1_\nu(z_2,...,z_n) \equiv 0 \\ a^1_{\nu-k}(z_2,...,z_n)z_j - a^j_{\nu-k+1}(z_2,...,z_n) \equiv 0, \;\; 1 \leq k \leq \nu-1 \\ a^j_0(z_2,...,z_n) \equiv 0, \end{cases} \tag{4.4}$$

luego de (4.4) tenemos:

$$Z^1_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} a^1_{\nu-k}(z_2,...,z_n)z_1^k = z_1\left(\sum_{k=0}^{\nu-1} a^1_{\nu-k-1}(z_2,...,z_n)z_1^k\right). \tag{4.5}$$

Para $1 < j \leq n$, tenemos:

$$\begin{aligned} Z^j_\nu &= \sum_{k=0}^{\nu} a^j_{\nu-k}(z_2,...,z_n)z_1^k = \sum_{k=0}^{\nu-1} a^j_{\nu-k}(z_2,...,z_n)z_1^k \\ &= \sum_{k=0}^{\nu-1} z_j a^1_{\nu-k-1}(z_2,...,z_n)z_1^k = z_j\left(\sum_{k=0}^{\nu-1} a^1_{\nu-k-1}(z_2,...,z_n)z_1^k\right). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Sea $P_{\nu-1} = \sum\limits_{k=0}^{\nu-1} a^1_{\nu-k-1}(z_2,...,z_n)z_1^k$, es claro que es un polinomio homogéneo de grado $\nu-1$, por lo tanto de (4.5) y (4.6) se tiene que:

$$Z^j_\nu = z_j P_{\nu-1}, \forall 1 \leq j \leq n.$$

(3) $\Rightarrow$ (4) Recordando que:

$$J^\nu_0(Z) = \left(\sum_{|Q|=\nu}^{\nu} c_{1,Q}(z-p)^Q, ..., \sum_{|Q|=\nu}^{\nu} c_{n,Q}(z-p)^Q\right)$$

como $m_0(Z) = \nu$, i.e $Z^i_\nu \not\equiv 0$ y $Z^i_k \equiv 0 \; \forall k < \nu$, luego de la hipotesis se tiene:

$$\begin{aligned} J^\nu_0(Z) &= (Z^1_\nu, ..., Z^n_\nu) = (z_1 P_{\nu-1}, ..., z_n P_{\nu-1}) \\ &= P_{\nu-1}(z_1, ..., z_n) = P_{\nu-1}R(z_1, ..., z_n), \end{aligned}$$

entonces $J^\nu_0(Z) = P_{\nu-1}R$, donde $R = \sum\limits_{i=1}^{n} z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ es el campo vectorial holomorfo radial.

$(4) \Rightarrow (1)$ Por hipótesis tenemos $J_0^\nu(Z) = P_{\nu-1}R$, entonces:

$$J_0^\nu(Z) \;\; = (Z_\nu^1, ..., Z_\nu^n) = (z_1 P_{\nu-1}, ..., z_n P_{\nu-1}),$$

luego de (4.5), tenemos:

$$E^*Z(y) = y_j^\nu \left((P_{\nu-1}(\hat{y})) \frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \left(Z_{\nu+1}^i(\hat{y}) - y_i Z_{\nu+1}^j(\hat{y}) \right) \frac{\partial}{\partial y_i} \right) + y_j^{\nu+1}\tilde{Y}(y),$$

donde $\tilde{Y}$ es un campo vectorial holomorfo. Luego $E^*(Z)$ es divisible por y_j^ν. Entonces el transformado estricto de Z por E es dado por $\tilde{Z} = \frac{E^*(Z)}{y_j^\nu}$, entonces $E^{-1}(0) = \mathbb{C}P(2)$ no es invariante por $\mathcal{F}_Z$, por lo tanto $0 \in \mathbb{C}^n$ es una singularidad dicrítica de Z. ■

De la proposición anterior tenemos el siguiente resultado:

Proposición 4.0.2 *Usando las notaciones anteriores, sea $p \in \mathcal{M}^n$ una singularidad dicrítica de $\mathcal{F}_Z$, entonces el transformado estricto $\mathcal{F}_Z$ esta dado por:*

En la j-ésima carta

$$E(y_1, ..., y_n) = (z_1, ..., z_n),$$

donde $z_i = y_i y_j$ si $i \neq j$ y $z_j = y_j$

$$\tilde{Z}(y) = P_{\nu-1}(\hat{y}) \frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \left(Z_\nu^i(\hat{y}) - y_i Z_\nu^j(\hat{y}) \right) \frac{\partial}{\partial y_i} + y_j \tilde{Y}(y), \tag{4.7}$$

cuyo conjunto singular esta dado por los puntos $(y_1, ..., y_{j-1}, 0, y_{j+1}, 0..., 0)$ que son soluciones del sistema

$$\begin{cases} P_{\nu-1}(\hat{y}) = 0 \\ Z_\nu^i(\hat{y}) - y_i Z_\nu^j(\hat{y}) = 0, \; 1 \leq i \leq n, \; i \neq j. \end{cases}$$

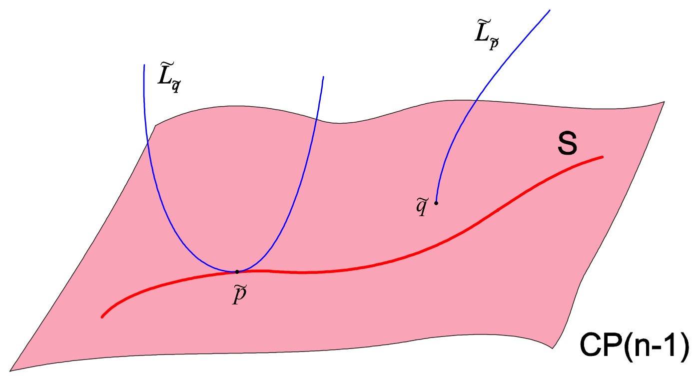

Figura 4.1: Una hipersuperficie $S \subseteq \mathbb{C}P(n-1)$

Corolario 4.0.3 *El conjunto $Sing(\mathcal{F}_Z) \cap E^{-1}(0)$ en j-ésima carta (j fijo, $1 \leq j \leq n$) es el conjunto de los puntos $[z_1, ..., z_n] \in \mathbb{C}P(n-1)$ las cuales son soluciones del siguiente $\frac{(n-1)n}{2}+1$ sistema de ecuaciones homogéneas:*

$$\begin{cases} P_{\nu-1}(\hat{y}) = 0 \\ Z^i_\nu(\hat{y}) - y_i Z^j_\nu(\hat{y}) = 0, \ 1 \leq i \leq n, \ i \neq j. \end{cases} \tag{4.8}$$

Notación 4.0.1 *Denotemos por $D^n(p)$ al conjunto de foliaciónes $\mathcal{F}_Z$ tal que $p \in \mathbb{C}^n$ es una singularidad dicrítica aislada de la foliación $\mathcal{F}_Z$ generada por el campo vectorial holomorfo Z.*

Notación 4.0.2 *$D^n_0(p) = \{\mathcal{F}_Z \in D^n(p);\ Sing(\mathcal{F}_Z) = \phi\}$ para referirnos a las $\mathcal{F}_Z$ cuyo transformado estricto no tiene singularidades en $\tilde{\mathbb{C}}^n_p$, i.e todo punto $\tilde{p} \in E^{-1}(0)$ es un punto regular.*

Notación 4.0.3 *Cuando $p = 0$ escribiremos simplemente D^n, D^n_0 en lugar de $D^n(0)$, $D^n_0(0)$ respectivamente.*

Corolario 4.0.4 *Con las notaciones anteriores tenemos que:*

$$\mathcal{F}_Z \in D^n_0 \textit{ si y sólo si } z = 0 \in \mathbb{C}^n \textit{ es la única solución del sistema } (4.8).$$

Definición 4.0.3 *Para cada* $\mathcal{F}_Z \in D_0^n$ *definimos la hipersuperficie algebraica en* $\mathbb{C}P(n-1)$.

$$S = \{[z_1; ...; z_n] \in \mathbb{C}P(n-1);\ P_{\nu-1}(z_1, ..., z_n) = 0\}.$$

Juntando los resultados anteriores, se tiene:

Proposición 4.0.5 *Sea* $\tilde{p} \in E^{-1}(0)$ *y* $\tilde{L}$ *una hoja de* $\mathcal{F}_Z$ *que pasa por el punto* $\tilde{p}$*, entonces el conjunto* S *tiene las siguientes propiedades (ver figira 4.1)*

- Si $\tilde{p} \notin S \Longrightarrow \tilde{L}$ es tranversal a $E^{-1}(0)$.
- Si $\tilde{p} \in S \Longrightarrow \tilde{L}$ es tangente a $E^{-1}(0)$ en $\tilde{p}$.

Capítulo 5

El Número de Milnor de un Campo Vectorial Holomorfo

5.1. Índice de Intersección

Sean $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto y $F : U \longrightarrow \mathbb{C}$ función holomorfa El subconjunto de $\mathbb{C}^n$ formado por todos los ceros de F , al que denotaremos por

$$(F = 0) = \{z \in \mathbb{C}^n; F(z) = 0\},$$

es llamado *hipersuperficie analítica de* $\mathbb{C}^n$, es decir, un conjunto analítico de $\mathbb{C}^n$ de codimensión 1 compleja. En el caso de $n = 2$ se tiene que $(F = 0)$ es una curva analítica. En el caso particular de que F es un polinomio, el conjunto $(F = 0)$ es una *hipersuperficie álgebraica de* $\mathbb{C}^n$.

Sean $F_1, ..., F_n \in \mathcal{O}(U)$ y denotemos por $A_j = (F_j = 0)$.

Sean $U \subset \mathbb{C}^n$ abierto y $\mathcal{O}_{n,p}$ el anillo de gérmenes de las funciones holomorfos alrededor de $p \in U$, usando las notaciones dados en el capítulo anterior tenemos la siguiente:

Definición 5.1.1 *Sea $Z = (Z_1, ..., Z_n) : U \longrightarrow \mathbb{C}^n$ un campo holomorfo, el Número de Milnor del campo Z en el punto $p \in U$, es definido como:*

$$\mu_p(Z) = \dim_{\mathbb{C}} \left(\frac{\mathcal{O}_{n,p}}{\langle Z_1, ..., Z_n \rangle_{\mathcal{O}_{n,p}}} \right).$$

Proposición 5.1.1 *El número de Milnor satisface las siguientes propiedades:*

(1) *$\mu_p(Z)$ es finito si y sólo si p es una singularidad aislada de Z.*

(2) *$\mu_p(Z) = 0$ si y sólo si p es un punto regular de Z*

(3) *$\mu_p(Z) = 1$ si y sólo si $det\left(\frac{\partial Z_j(p)}{\partial z_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n} \neq 0$.*

(4) *$\mu_p(Z_{j_1}, ..., Z_{j_n}) = \mu_p(Z_1, ..., Z_n)$, para cualquier permutación $(1, ..., n) \longrightarrow (j_1..., j_n)$.*

(5) *$\mu_p(Z_1, ..., Z_i \cdot W_i, ..., Z_n) = \mu_p(Z_1, ..., Z_i, ..., Z_n) + \mu_p(Z_1, ..., W_i, ..., Z_n)$.*

(6) *Si A es una matriz cuadrada $n \times n$ inversible, cuyas entradas son funciones holomorfas tal que*

$$W = AZ,$$

entonces $\mu_p(W) = \mu_p(Z)$.

(7) *El número de Milnor es invariante bajo biholomorfismo.*

Prueba. Ver [8] y [11]. ■

El número de Milnor puede ser geométricamente interpretado como el índice de intersección en p de las n hipersuperficies analíticas generadas por las componentes de Z (Ver [8]),

$$\mu_p(Z) = i_p(Z_1, ..., Z_n).$$

Es decir, dado $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, sea la $\varepsilon-$perturbaciones $A_j(\varepsilon) = (Z_j = \varepsilon)$ de $A_j = (Z_j = 0)$. Se tiene que las hipersuperficies $A_j(\varepsilon)$ se intersectan exactamente en $i_p(Z_1, ..., Z_n)$ puntos, i.e.

$$card\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j(\varepsilon)\right) = i_p(Z_1, ..., Z_n).$$

Definición 5.1.2 *Sean $E : \tilde{\mathbb{C}}_0^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ el Blow-up centrado en $0 \in \mathbb{C}^n$, $F \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$, con $ord_0(F) = m$, definimos el **Transformado Estricto de** F **por** E, denotado por $\tilde{F}$ como aquella función que en coordenadas se expresa (en la j-ésima carta del Blow-up):*

$$\tilde{F}(y_1, ..., y_n) \quad = \quad \frac{(F \circ E)(y_1, ..., y_n)}{y_j^m}. \tag{5.1}$$

5.2. El Número de Milnor de un Campo Vectorial Holomorfo 3-Dimensional

En esta sección daremos unas fórmulas que relacióna el número de Milnor del campo, la multiplicidad álgebraica del campo y el número de Minlor del transormado estricto del campo.

El teorema siguiente, cuya demostración puede ser encontrada en [11], es muy importante pues seran de ayuda para probar algunos teoremas.

Teorema 5.2.1 (Fórmula de Noether) *Sean $F_1, ..., F_n \in O_n$ tales que:*

(1) *El punto $0 \in \mathbb{C}^n$ es un punto de intersección aislado de las hipersuperficies analíticas $(F_1 = 0), ..., (F_n = 0)$.*

(2) *Las hipersuperficies analíticas $(\tilde{F}_1 = 0), ..., (\tilde{F}_n = 0)$ tienen puntos de intersección aislados en el divisor $E^{-1}(0)$.*

Entonces

$$i_0(F_1,...,F_n) = ord_0(F_1)ord_0(F_2)\cdots ord_0(F_n) + \sum_{q\in E^{-1}(0)} i_q(\tilde{F}_1,...,\tilde{F}_n).$$

Sean $U \subseteq \mathbb{C}^3$ abierto, $Z = (Z_1, Z_2, Z_3)$ un campo holomorfo sobre U y $p \in U$ singularidad aislada de $\mathcal{F}_Z$. Donde $\mathcal{F}_Z$ foliación analítica singular por curvas generada por Z tal que $m_p(Z) = \nu$, denotaremos por $\mathcal{F}_Z$ al transformado estricto de $\mathcal{F}_Z$ y $\tilde{Z}$ el campo vectorial holomorfo que genera a $\mathcal{F}_Z$.

Cuando $n = 2$, existe una fórmula que relacióna ν con el número de Milnor de Z en p y el número de Milnor de las singularidades del transformado estricto $\tilde{Z}$:

$$\mu_p(Z) = \begin{cases} \nu^2 - \nu - 1 + \sum\limits_{q\in E^{-1}(p)} \mu_q(\tilde{Z}), & \text{si } p \text{ es no dicrítico} \\ \nu^2 + \nu - 1 + \sum\limits_{q\in E^{-1}(p)} \mu_q(\tilde{Z}), & \text{si } p \text{ es dicrítico.} \end{cases}$$

En $n = 2$, el conjunto $Sing(\mathcal{F}_Z)$ es finito y las sumatorias que aparecen son finitas.

En esta sección probaremos una fórmula análoga a la anterior para $n = 3$, bajo la hipotesis que el conjunto $Sing(\mathcal{F}_Z)$ sea finito.

Sea $0 \in \mathbb{C}^3$ singularidad aislada dicrítica del campo holomorfo Z, por la proposición 4.0.1, existe un polinomio homogéneo $P_{\nu-1}$ de grado $\nu - 1$, tal que

$$Z_i(z_1, z_2, z_3) = z_i P_{\nu-1}(z_1, z_2, z_3) + \sum_{k\geq\nu+1} Z_k^i(z_1, z_2, z_3),$$

donde $1 \leq i \leq 3$.

Hallemos los tranformados estrictos de las componentes de $Z = (Z_1, Z_2, Z_3)$, ver (5.1).

a) El tranformado estricto de Z_1 por E en coordenadas se expresa como:

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_1(x,t,s) &= P_{\nu-1}(1,t,s)+\sum_{k\geq\nu+1}x^{k-\nu}Z_k^1(1,t,s)\\ \tilde{Z}_1(u,y,v) &= uP_{\nu-1}(u,1,v)+\sum_{k\geq\nu+1}y^{k-\nu}Z_k^1(u,1,v)\\ \tilde{Z}_1(r,w,z) &= rP_{\nu-1}(r,w,1)+\sum_{k\geq\nu+1}z^{k-\nu}Z_k^1(r,w,1).\end{aligned}\tag{5.2}$$

b) El tranformado estricto de Z_2 por E en coordenadas se expresa como:

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_2(x,t,s) &= tP_{\nu-1}(1,t,s)+\sum_{k\geq\nu+1}x^{k-\nu}Z_k^2(1,t,s)\\ \tilde{Z}_2(u,y,v) &= P_{\nu-1}(u,1,v)+\sum_{k\geq\nu+1}y^{k-\nu}Z_k^2(u,1,v)\\ \tilde{Z}_2(r,w,z) &= wP_{\nu-1}(r,w,1)+\sum_{k\geq\nu+1}z^{k-\nu}Z_k^2(r,w,1).\end{aligned}\tag{5.3}$$

c) El tranformado estricto de Z_3 por E en coordenadas se expresa como:

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_3(x,t,s) &= sP_{\nu-1}(1,t,s)+\sum_{k\geq\nu+1}x^{k-\nu}Z_k^3(1,t,s)\\ \tilde{Z}_3(u,y,v) &= vP_{\nu-1}(u,1,v)+\sum_{k\geq\nu+1}y^{k-\nu}Z_k^3(u,1,v)\\ \tilde{Z}_3(r,w,z) &= P_{\nu-1}(r,w,1)+\sum_{k\geq\nu+1}z^{k-\nu}Z_k^3(r,w,1).\end{aligned}\tag{5.4}$$

Recordando el transformado estricto $\tilde{Z}$ del campo Z por E, ver Teorema 3.4.2 esta dado por:

$$\begin{aligned}\tilde{Z}^1(x,t,s) = &\sum_{k\geq\nu}x^{k-\nu}Z_k^1(1,t,s)\tfrac{\partial}{\partial x}+\sum_{k\geq\nu+1}x^{k-\nu-1}[Z_k^2(1,t,s)-tZ_k^1(1,t,s)]\tfrac{\partial}{\partial t}+\\ &+\sum_{k\geq\nu+1}x^{k-\nu-1}[Z_k^3(1,t,s)-sZ_k^1(1,t,s)]\tfrac{\partial}{\partial s}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{Z}^2(u,y,v) = &\sum_{k\geq\nu+1}y^{k-\nu-1}[Z_k^1(u,1,v)-uZ_k^2(u,1,v)]\tfrac{\partial}{\partial u}+\sum_{k\geq\nu}y^{k-\nu}Z_k^2(u,1,v)\tfrac{\partial}{\partial y}+\\ &+\sum_{k\geq\nu+1}y^{k-\nu-1}[Z_k^3(u,1,v)-vZ_k^2(u,1,v)]\tfrac{\partial}{\partial v}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{Z}^3(r,w,z) = &\sum_{k\geq\nu+1}z^{k-\nu-1}[Z_k^1(r,w,1)-rZ_k^3(r,w,1)]\tfrac{\partial}{\partial r}+\\ &+\sum_{k\geq\nu+1}z^{k-\nu-1}[Z_k^2(r,w,1)-wZ_k^3(r,w,1)]\tfrac{\partial}{\partial w}+\sum_{k\geq\nu}z^{k-\nu}Z_k^3(r,w,1)\tfrac{\partial}{\partial z}.\end{aligned}$$

Usando (5.2), (5.3) y (5.4), con un fácil cálculo se tiene la siguiente:

Proposición 5.2.2 *Sea $0 \in \mathbb{C}^3$ singularidad aislada dicrítica del campo holomorfo Z, entonces las componentes de $\tilde{Z}$ se expresan en términos de los transformados estrictos de las componentes de Z.*

$$\tilde{Z}^1(x,t,s) = \left(\tilde{Z}_1(x,t,s), \tfrac{\tilde{Z}_2(x,t,s) - t\tilde{Z}_1(x,t,s)}{x}, \tfrac{\tilde{Z}_3(x,t,s) - s\tilde{Z}_1(x,t,s)}{x}\right)$$

$$\tilde{Z}^2(u,y,v) = \left(\tfrac{\tilde{Z}_1(u,y,v) - u\tilde{Z}_2(u,y,v)}{y}, \tilde{Z}_2(u,y,v), \tfrac{\tilde{Z}_3(u,y,v) - v\tilde{Z}_2(u,y,v)}{y}\right)$$

$$\tilde{Z}^3(r,w,z) = \left(\tfrac{\tilde{Z}_1(r,w,z) - r\tilde{Z}_3(r,w,z)}{z}, \tfrac{\tilde{Z}_2(r,w,z) - w\tilde{Z}_3(r,w,z)}{z}, \tilde{Z}_3(r,w,z)\right).$$

Con las definiciones y notaciones anteriores, podemos demostrar el siguiente resultado fundamental:

Teorema 5.2.3 *Sea Z un campo vectorial holomorfo con singularidad aislada en $0 \in \mathbb{C}^3$, tal que $\tilde{Z}$ tiene singularidades aisladas en el divisor $E^{-1}(0)$. Si $0 \in \mathbb{C}^3$ es una singularidad dicrítica de Z y $m_0(Z) = \nu$, entonces*

$$\mu_0(Z) = \nu^3 + 2\nu^2 - 2 + \sum_{q \in E^{-1}(0)} \mu_q(\tilde{Z}).$$

Demostración. Como $\tilde{Z}$ tiene singularidades aisladas en el divisor $E^{-1}(0)$ entonces el conjunto $Sing(\tilde{Z})$ es discreto, desde que $Sing(\tilde{Z}) \subseteq \mathbb{C}P(2)$ y $\mathbb{C}P(2)$ es compacto entonces el conjunto $Sing(\tilde{Z})$ es finito.

Desde que $Sing(\tilde{Z})$ es finito, entonces existe una recta proyectiva (Hiperplano H_∞) que no pasa por ninguno de ellos (ver [12]), entonces rotanto el sistema de coordenadas y considerando el nuevo sistema de coordenadas en $\mathbb{C}P(2)$ tal que en el hiperplano H_∞ no se encuentre ninguna singularidad de $\tilde{Z}$, y como las rotaciones son tranformaciones lineales, en particular un biholomorfismo, entonces el número de Milnor es invariante, por lo tanto podemos suponer que en la primera carta $E_1(x,t,s)$ de $\tilde{\mathbb{C}}_0^3$ se encuentran todas las singularidades de $\tilde{Z}$.

Recordando que:

- En la 1ra carta:

$$Sing(\tilde{Z}^1) = \left\{ (0,t,s); \begin{array}{c} P_{\nu-1}(1,t,s) = 0 \\ Z^2_{\nu+1}(1,t,s) - tZ^1_{\nu+1}(1,t,s) = 0 \\ Z^3_{\nu+1}(1,t,s) - sZ^1_{\nu+1}(1,t,s) = 0 \end{array} \right\}. \tag{5.5}$$

- En la 2da carta:

$$Sing(\tilde{Z}^2) = \left\{ (u,0,v); \begin{array}{l} Z^1_{\nu+1}(u,1,v) - uZ^2_{\nu+1}(u,1,v) = 0 \\ P_{\nu-1}(u,1,v) = 0 \\ Z^3_{\nu+1}(u,1,v) - vZ^2_{\nu+1}(u,1,v) = 0 \end{array} \right\}. \tag{5.6}$$

- En la 3ra carta:

$$Sing(\tilde{Z}^3) = \left\{ (r,w,0); \begin{array}{l} Z^1_{\nu+1}(r,w,1) - rZ^3_{\nu+1}(r,w,1) = 0 \\ Z^2_{\nu+1}(r,w,1) - wZ^3_{\nu+1}(r,w,1) = 0 \\ P_{\nu-1}(r,w,1) = 0 \end{array} \right\}. \tag{5.7}$$

Entonces $0 \notin Sing(\tilde{Z}^2)$ y $0 \notin Sing(\tilde{Z}^3)$, pues si el $0 \in \mathbb{C}^3$ llegaría a pertenecer a uno de los dos conjuntos, la primera carta no podría ver esta singularidad, pues esta se encontraría en el infinito de la 1ra carta (Hiperplano H_∞), llegaríamos a una contradicción pues en la primera carta se ecuentran todas singularidades de $\tilde{Z}$.

Como $0 \notin Sing(\tilde{Z}^2)$, $0 \notin Sing(\tilde{Z}^3)$, entonces de (5.6) y (5.7) podemos suponer sin pérdidad de generalidad que:

$$P_{\nu-1}(0,1,0) \neq 0 \text{ y } Z^1_{\nu+1}(0,0,1) \neq 0. \tag{5.8}$$

Como todas las singularidades de $\tilde{Z}$ se encuentran en la primera carta $E_1(x,t,s)$, entonces basta demostrar la fórmula en la 1ra carta.

Sea $q \in E^{-1}(0)$, de la proposición 5.2.2 tenemos:

$$\mu_q(\tilde{Z}) = i_q\left(\tilde{Z}_1(x,t,s), \frac{\tilde{Z}_2(x,t,s) - t\tilde{Z}_1(x,t,s)}{x}, \frac{\tilde{Z}_3(x,t,s) - s\tilde{Z}_1(x,t,s)}{x}\right),$$

para no hacer engorrosa la escritura escribiremos:

$$\mu_q(\tilde{Z}) = i_q\left(\tilde{Z}_1, \frac{\tilde{Z}_2 - t\tilde{Z}_1}{x}, \frac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x}\right). \tag{5.9}$$

Observe que:

$$\sum_{k\geq\nu+1} x^{k-\nu-1}[Z_k^2 - tZ_k^1] = x\left(\tilde{Z}_2 - t\tilde{Z}_1\right) \tag{5.10}$$

y además:

$$\begin{pmatrix} \tilde{Z}_1 \\ \tilde{Z}_2 - t\tilde{Z}_1 \\ \frac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{Z}_1 \\ \tilde{Z}_2 \\ \frac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x} \end{pmatrix}. \tag{5.11}$$

Entonces de (5.10) $\tilde{Z}_2 - t\tilde{Z}_1 = x\left(\frac{\tilde{Z}_2 - t\tilde{Z}_1}{x}\right)$, usando las propiedades de índice de intersección (ver Proposición 5.1.1), tenemos:

$$i_q\left(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2 - t\tilde{Z}_1, \frac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x}\right) = i_q\left(\tilde{Z}_1, x, \frac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x}\right) + i_q\left(\tilde{Z}_1, \frac{\tilde{Z}_2 - t\tilde{Z}_1}{x}, \frac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x}\right). \tag{5.12}$$

De (5.9), (5.11) y (5.12) tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{q\in E^{-1}(0)} \mu_q(\tilde{Z}) &= \sum_{q\in E^{-1}(0)} i_q\left(\tilde{Z}_1, \tfrac{\tilde{Z}_2 - t\tilde{Z}_1}{x}, \tfrac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x}\right) \\ &= \sum_{q\in E^{-1}(0)} i_q\left(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2, \tfrac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x}\right) - \sum_{q\in E^{-1}(0)} i_q\left(\tilde{Z}_1, x, \tfrac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x}\right). \end{aligned} \tag{5.13}$$

Para que (5.13) sea válida, veamos que las dos sumatorias que aparecen sean finitas.

a) Calculando la sumatoria $\sum_{q\in E^{-1}(0)} i_q\left(\tilde{Z}_1, x, \frac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x}\right)$.

De (5.2) y (5.4) tenemos:

$$\tilde{Z}_1(x,t,s) = P_{\nu-1}(1,t,s) + \sum_{k\geq \nu+1} x^{k-\nu} Z^1_k(1,t,s) = P_{\nu-1} + x[...]_1$$

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x} &= \sum_{k\geq\nu+1} x^{k-\nu-1}[Z^3_k(1,t,s) - sZ^1_k(1,t,s)] \\ &= Z^3_{\nu+1}(1,t,s) - sZ^1_{\nu+1}(1,t,s) + x[...]_2. \end{aligned}$$

Observe que:

$$\begin{pmatrix} P_{\nu-1}(1,t,s) \\ x \\ Z^3_{\nu+1}(1,t,s) - sZ^1_{\nu+1}(1,t,s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -[...]_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & [...]_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{Z}_1 \\ x \\ \frac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x} \end{pmatrix}.$$

Usando las propiedades de índice de intersección:

$$\begin{aligned} \sum_{q\in E^{-1}(0)} i_q\left(\tilde{Z}_1, x, \frac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x}\right) &= \sum_{q\in E^{-1}(0)} i_q\left(P_{\nu-1}(1,t,s), x, Z^3_{\nu+1}(1,t,s) - sZ^1_{\nu+1}(1,t,s)\right) \\ &= \sum_{p\in\mathbb{C}^2} i_p\left(P_{\nu-1}(1,t,s), Z^3_{\nu+1}(1,t,s) - sZ^1_{\nu+1}(1,t,s)\right). \end{aligned} \tag{5.14}$$

Sea

$$H_{\nu+2}(z_1,z_2,z_3) = z_1 Z^3_{\nu+1}(z_1,z_2,z_3) - z_3 Z^1_{\nu+1}(z_1,z_2,z_3),$$

de (5.8) $Z^1_{\nu+1}(0,0,1) \neq 0$ se tiene: $Z^1_{\nu+1}(z_1,z_2,z_3) = [...] + z_3^{\nu+1} + [...]$, entonces $H_{\nu+2}$ es un polinomio homogéneo de grado $\nu+2$.

Afirmación: $H_{\nu+2}(z_1,z_2,z_3)$ y $P_{\nu-1}(z_1,z_2,z_3)$ no tienen factores comunes.

En efecto, supongamos lo contrario entonces existen polinomios homogéneos P, H, M

tales que: $H_{\nu+2} = H.M$ y $P_{\nu-1} = P.M$, sabemos que:

$$(u,0,v) \in Sing(\tilde{Z}^2) \;\Leftrightarrow\; \text{es solución de: } \begin{cases} Z^1_{\nu+1}(u,1,v) - uZ^2_{\nu+1}(u,1,v) = 0 \\ P_{\nu-1}(u,1,v) = 0 \\ Z^3_{\nu+1}(u,1,v) - vZ^2_{\nu+1}(u,1,v) = 0. \end{cases}$$

Como $(0,0,0) \notin Sing(\tilde{Z}^2)$, se tiene:

$$(u,0,v) \in Sing(\tilde{Z}^2) \;\Leftrightarrow\; \text{es solución de: } \begin{cases} P_{\nu-1}(u,1,v) = 0 \\ uZ^3_{\nu+1}(u,1,v) - vZ^1_{\nu+1}(u,1,v) = 0 \end{cases}$$

y como $H_{\nu+2} = H.M$ y $P_{\nu-1} = P.M$, luego se tiene:

$$(u,0,v) \in Sing(\tilde{Z}^2) \Leftrightarrow \text{ es solución de : } \begin{cases} P(u,1,v).M(u,1,v) = 0 \\ H(u,1,v).M(u,1,v) = 0. \end{cases}$$

Entonces $\{(u,0,v);\ M(u,1,v) = 0\} \subseteq Sing(\tilde{Z}^2)$ y como $M(u,1,v)$ es un polinomio de dos variables entonces $\{(u,0,v);\ M(u,1,v) = 0\}$ es infinito entonces $Sing(\tilde{Z}^2)$ es infinito, contradición con la hipotesis, esto prueba la afirmación.

Por otro lado

$$[H_{\nu+2} = 0] = \{[z_1;z_2;z_3];\ H_{\nu+2}(z_1,z_2,z_3) = 0\}$$
$$[P_{\nu-1} = 0] = \{[z_1;z_2;z_3];\ P_{\nu-1}(z_1,z_2,z_3) = 0\}$$

son curvas planas proyectivas de grados $\nu+2$ y $\nu-1$ respectivamente, como $H_{\nu+2}(z_1,z_2,z_3)$ y $P_{\nu-1}(z_1,z_2,z_3)$ no tienen factores comunes entonces $[H_{\nu+2} = 0]$ y $[P_{\nu-1} = 0]$ no tienen componentes comunes, luego por el Teorema de Bezout (Teorema 3.3.4) :

$$\sum_{p\in\mathbb{C}^2} i_p\left(P_{\nu-1}(z_1,z_2,z_3), H_{\nu+2}(z_1,z_2,z_3)\right) = (\nu-1)(\nu+2). \tag{5.15}$$

Pero nosotros queremos hallar:

$$\sum_{p\in\mathbb{C}^2} i_p\left(P_{\nu-1}(1,t,s), Z^3_{\nu+1}(1,t,s) - sZ^1_{\nu+1}(1,t,s)\right),$$

observe que

$$H_{\nu+2}(1,t,s) = Z^3_{\nu+1}(1,t,s) - sZ^1_{\nu+1}(1,t,s).$$

En la segunda carta (u,v) de $\mathbb{C}P(2)$, estando en recta H_∞ (i.e $u=0$), de (5.8) y desde que $P_{\nu-1}$ y $H_{\nu+2}$ no tienen factores comunes se sigue que $P_{\nu-1}(0,1,v)$ y $H_{\nu+2}(0,1,v) = -vZ^1_{\nu+1}(0,1,v)$ no tienen raíces comunes.

Análogamente en la tercera carta (r,w) de $\mathbb{C}P(2)$, estando en recta H_∞ (i.e $r=0$), de (5.8) y desde que $P_{\nu-1}$ y $H_{\nu+2}$ no tienen factores comunes se sigue que $P_{\nu-1}(0,w,1)$ y $H_{\nu+2}(0,w,1) = -Z^1_{\nu+1}(0,w,1)$ no tiene raíces comunes.

Por lo tanto, las curvas álgebraicas $[H_{\nu+2}=0]$ y $[P_{\nu-1}=0]$ no tienen puntos de intersección en la recta H_∞, esto significa que la primera carta de $\mathbb{C}P(2)$ contiene todos los puntos de intersección de estas curvas álgebraicas, entonces de (5.15) se tiene:

$$\sum_{p\in\mathbb{C}^2} i_p\left(P_{\nu-1}(1,t,s), H_{\nu+2}(1,t,s)\right) = (\nu-1)(\nu+2). \tag{5.16}$$

De (5.14) y (5.16) tenemos :

$$\sum_{q\in E^{-1}(0)} i_q\left(\tilde{Z}_1, x, \frac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x}\right) = (\nu-1)(\nu+2). \tag{5.17}$$

b) Ahora calculando la sumatoria $\sum_{q\in E^{-1}(0)} i_q\left(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2, \frac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x}\right)$.

Sea H la función analítica

$$H(z_1,z_2,z_3) = z_1Z_3(z_1,z_2,z_3) - z_3Z_1(z_1,z_2,z_3),$$

como

$$Z_i(z_1,z_2,z_3) = z_iP_{\nu-1}(z_1,z_2,z_3) + \sum_{k\geq\nu+1} Z^i_k(z_1,z_2,z_3); 1\leq i\leq 2$$

entonces

$$H(z_1,z_2,z_3)=\sum_{k\geq\nu+1}[z_1Z_k^3(z_1,z_2,z_3)-z_3Z_k^1(z_1,z_2,z_3)].$$

Desde que $0\in\mathbb{C}^3$ es una singularidad aislada de Z, entonces $0\in\mathbb{C}^3$ es un punto de intersección aislado de las superficies analíticas $(Z_1=0)$, $(Z_2=0)$ y $(Z_3=0)$, y como $H=z_1Z_3-z_3Z_1$, entonces $0\in\mathbb{C}^3$ es un punto de intersección aislado de las superficies analíticas $(Z_1=0),(Z_2=0)$ y $(H=0)$.

Observe que :

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ z_1Z_3-z_3Z_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -z_3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ z_1Z_3 \end{pmatrix}.$$

Por propiedades de índice de intersección, tenemos:

$$\begin{aligned} i_0(Z_1,Z_2,H) &= i_0(Z_1,Z_2,z_1Z_3) \\ &= i_0(Z_1,Z_2,z_1)+i_0(Z_1,Z_2,Z_3) \\ &= i_0(Z_1,Z_2,\pi_1)+\mu_0(Z), \end{aligned} \tag{5.18}$$

donde $\pi_1:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}$ tq $\pi_1(z_1,z_2,z_3)=z_1$.

Sea

$$Z^*(z_1,z_2,z_3)=\sum_{k\geq\nu+1}Z_k^1(z_1,z_2,z_3),$$

un fácil cálculo muestra que:

$$\begin{pmatrix} Z^* \\ Z_2 \\ z_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -P_{\nu-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \pi_1 \end{pmatrix},$$

entonces

$$i_0(Z_1,Z_2,\pi_1)=i_0(Z^*,Z_2,\pi_1). \tag{5.19}$$

Analizando las superficies $(\tilde{Z}^*=0),(\tilde{Z}_2=0)$ **y** $(\tilde{\pi}_1=0)$

- En la 1ra carta (x,t,s).

Observe que $\tilde{\pi}_1(x,t,s) = \frac{\pi_1 \circ E_1}{x} = 1$, entonces las superficies $(\tilde{Z}^* = 0), (\tilde{Z}_2 = 0)$ y $(\tilde{\pi}_1 = 0)$ no tienen puntos de intersección en la 1ra carta (x,t,s).

Veamos que pasa en las otras dos cartas:

- 2da carta (u,y,v).

$$\begin{array}{rcccl} \tilde{Z}^*(u,y,v) & = & \frac{(Z^* \circ E_2)(u,y,v)}{y^{\nu+1}} & = & \sum\limits_{k \geq \nu+1} y^{k-\nu-1} Z_k^1(u,1,v) \\ \tilde{Z}_2(u,y,v) & = & \frac{(Z_2 \circ E_2)(u,y,v)}{y^{\nu}} & = & P_{\nu-1}(u,1,v) + \sum\limits_{k \geq \nu+1} y^{k-\nu} Z_k^2(u,1,v) \\ \tilde{\pi}_1(u,y,v) & = & \frac{(\pi_1 \circ E_2)(u,y,v)}{y} & = & u. \end{array}$$

Los puntos de intersección en la carta (u,y,v) de estas superficies, vienen dados por la solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} \tilde{Z}^*(u,0,v) = Z_{\nu+1}^1(u,1,v) = 0 \\ \tilde{Z}_2(u,0,v) = P_{\nu-1}(u,1,v) = 0 \\ \tilde{\pi}_1(u,0,v) = u = 0 \end{cases}$$

Pero de (5.8) y desde que $P_{\nu-1}$ y $H_{\nu+2}$ no tienen factores comunes se sigue que el sistema anterior no tiene solución, entonces las superficies $(\tilde{Z}^* = 0), (\tilde{Z}_2 = 0)$ y $(\tilde{\pi}_1 = 0)$ no se intersectan.

- En la 3ra carta (r,w,z)

$$\begin{array}{rcccl} \tilde{Z}^*(r,w,z) & = & \frac{(Z^* \circ E_3)(r,w,z)}{z^{\nu+1}} & = & \sum\limits_{k \geq \nu+1} z^{k-\nu-1} Z_k^1(r,w,1) \\ \tilde{Z}_2(r,w,z) & = & \frac{(Z_2 \circ E_3)(r,w,z)}{z^{m}} & = & P_{\nu-1}(r,w,1) + \sum\limits_{k \geq \nu+1} z^{k-\nu} Z_k^2(r,w,1) \\ \tilde{\pi}_1(r,w,z) & = & \frac{(\pi_1 \circ E_3)(r,w,z)}{z} & = & r. \end{array}$$

Los puntos de intersección en la carta (r,w,z) de estas superficies, vienen dados por la solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} \tilde{Z}^*(r,w,0) = Z^1_{\nu+1}(r,w,1) = 0 \\ \tilde{Z}_2(r,w,0) = P_{\nu-1}(r,w,1) = 0 \\ \tilde{\pi}_1(r,w,0) = r = 0 \end{cases}$$

Pero de la condición (2) y desde que $P_{\nu-1}$ y $H_{\nu+2}$ no tienen factores comunes se sigue que el sistema anterior no tiene solución, entonces las superficies $(\tilde{Z}^* = 0), (\tilde{Z}_2 = 0)$ y $(\tilde{\pi}_1 = 0)$ no se intersectan.

Entonces el conjunto de intersección de las superficies $(\tilde{Z}^* = 0), (\tilde{Z}_2 = 0)$ y $(\tilde{\pi}_1 = 0)$ es vacio, entonces $\sum\limits_{q \in E^{-1}(0)} i_q\left(\tilde{Z}^*, \tilde{Z}_2, \tilde{\pi}_1\right) = 0$.

Luego, estamos en condiciones de usar el Teorema 5.2.1,

$$i_0(Z_1, Z_2, z_1) = i_0(Z^*, Z_2, z_1) = \nu(\nu+1) + \sum_{q \in E^{-1}(0)} i_q\left(\tilde{Z}^*, \tilde{Z}_2, \tilde{\pi}_1\right).$$

Luego de (5.19) tenemos:

$$i_0(Z_1, Z_2, z_1) = \nu(\nu+1). \tag{5.20}$$

Analizando las superficies $(\tilde{Z}_1 = 0), (\tilde{Z}_2 = 0)$ **y** $(\tilde{H} = 0)$.

- En la 1ra carta (x,t,s)

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_1(x,t,s) &= \tfrac{(Z_1 \circ E_1)(x,t,s)}{x^\nu} &&= P_{\nu-1}(1,t,s) + \sum_{k \geq \nu+1} x^{k-\nu} Z^1_k(1,t,s) \\ \tilde{Z}_2(x,t,s) &= \tfrac{(Z_2 \circ E_1)(x,t,s)}{x^\nu} &&= tP_{\nu-1}(1,t,s) + \sum_{k \geq \nu+1} x^{k-\nu} Z^2_k(1,t,s) \\ \tilde{H}(x,t,s) &= \tfrac{(H \circ E_1)(x,t,s)}{x^{\nu+2}} &&= \sum_{k \geq \nu+1} x^{k-\nu-1}[Z^3_k(1,t,s) - sZ^1_k(1,t,s)]. \end{aligned}$$

Los puntos de intersección en la carta (x, t, s) de estas superficies, vienen dados por la solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} \tilde{Z}_1(0, t, s) = P_{\nu-1}(1, t, s) = 0 \\ \tilde{Z}_2(0, t, s) = tP_{\nu-1}(1, t, s) = 0 \\ \tilde{H}(0, t, s) = Z^3_{\nu+1}(1, t, s) - sZ^1_{\nu+1}(1, t, s) = 0, \end{cases}$$

la solución del sistema es finito, ver (5.16).

- En la 2da carta (u, y, v)

$$\begin{array}{rclcl} \tilde{Z}_1(u, y, v) & = & \frac{(Z_1 \circ E_2)(u,y,v)}{y^\nu} & = & uP_{\nu-1}(u, 1, v) + \sum\limits_{k \geq \nu+1} y^{k-\nu} Z^1_k(u, 1, v) \\ \tilde{Z}_2(u, y, v) & = & \frac{(Z_2 \circ E_2)(u,y,v)}{y^\nu} & = & P_{\nu-1}(u, 1, v) + \sum\limits_{k \geq \nu+1} y^{k-\nu} Z^2_k(u, 1, v) \\ \tilde{H}(u, y, v) & = & \frac{(H \circ E_2)(u,y,v)}{y^{\nu+2}} & = & \sum\limits_{k \geq \nu+1} y^{k-\nu-1}[uZ^3_k(u, 1, v) - vZ^1_k(u, 1, v)] \end{array}$$

Los puntos de intersección en la carta (u, y, v) de estas superficies, vienen dados por la solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} \tilde{Z}_1(u, 0, v) = uP_{\nu-1}(u, 1, v) = 0 \\ \tilde{Z}_2(u, 0, v) = P_{\nu-1}(u, 1, v) = 0 \\ \tilde{H}(u, 0, v) = uZ^3_{\nu+1}(u, 1, v) - vZ^1_{\nu+1}(u, 1, v) = 0. \end{cases}$$

Veamos los puntos de intersección, las cuales no pertenecen a la carta (x, t, s), es decir donde $u = 0$, tales puntos serán solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} \tilde{Z}_1(0, 0, v) = 0 \\ \tilde{Z}_2(0, 0, v) = P_{\nu-1}(u, 1, v) = 0 \\ \tilde{H}(0, 0, v) = -vZ^1_{\nu+1}(0, 1, v) = 0. \end{cases}$$

Pero de la condición (2) y desde que $P_{\nu-1}$ y $H_{\nu+2}$ no tienen factores comunes se sigue que el sistema anterior no tiene solución, entonces las superficies $(\tilde{Z}_1 = 0), (\tilde{Z}_2 = 0)$ y $(\tilde{H}_1 = 0)$ no se intersectan.

- En la tercera carta (r, w, z)

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}_1(r,w,z) &= \tfrac{(Z_1\circ E_3)(r,w,z)}{z^{\nu}} &= rP_{\nu-1}(r,w,1) + \sum_{k\geq \nu+1} z^{k-\nu} Z_k^1(r,w,1) \\
\tilde{Z}_2(r,w,z) &= \tfrac{(Z_2\circ E_3)(r,w,z)}{z^{\nu}} &= wP_{\nu-1}(r,w,1) + \sum_{k\geq \nu+1} z^{k-\nu} Z_k^2(r,w,1) \\
\tilde{H}(r,w,z) &= \tfrac{(H\circ E_3)(x,t,s)}{z^{\nu+2}} &= \sum_{k\geq \nu+1} z^{k-\nu-1}[rZ_k^3(r,w,1) - Z_k^1(r,w,1)]
\end{aligned}$$

Los puntos de intersección en la carta (u, y, v) de estas superficies, vienen dados por la solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases}
\tilde{Z}_1(r,w,0) = rP_{\nu-1}(r,w,1) = 0 \\
\tilde{Z}_2(r,w,0) = wP_{\nu-1}(r,w,1) = 0 \\
\tilde{H}(r,w,0) = rZ_{\nu+1}^3(r,w,1) - Z_{\nu+1}^1(r,w,1) = 0
\end{cases}$$

Veamos los puntos de intersección,las cuales no pertenecen a la carta (x, t, s), es decir donde $r = 0$, tales puntos serán solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases}
\tilde{Z}_1(0,w,0) = 0 \\
\tilde{Z}_2(0,w,0) = wP_{\nu-1}(0,w,1) = 0 \\
\tilde{H}(0,w,0) = -Z_{\nu+1}^1(0,w,1) = 0
\end{cases}$$

Pero de (5.8) y desde que $P_{\nu-1}$ y $H_{\nu+2}$ no tienen factores comunes se sigue que el sistema anterior no tiene solución, entonces las superficies $(\tilde{Z}_1 = 0), (\tilde{Z}_2 = 0)$ y $(\tilde{H} = 0)$ no se intersectan.

Entonces el conjunto de intersección de las superficies $(\tilde{Z}_1 = 0), (\tilde{Z}_2 = 0)$ y $(\tilde{H} = 0)$ es finito, estamos en condiciones de usar nuevamente el Teorema 5.2.1

$$i_0(Z_1, Z_2, H) = \nu.\nu.(\nu+2) + \sum_{q\in E^{-1}(0)} i_q\left(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2, \tilde{H}\right). \tag{5.21}$$

De (5.18) y (5.21), tenemos que:

$$i_0(Z_1, Z_2, H) = i_0(Z_1, Z_2, z_1) + \mu_0(Z) = \nu^2(\nu+2) + \sum_{q\in E^{-1}(0)} i_q\left(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2, \tilde{H}\right) \tag{5.22}$$

y de (5.20) $i_0(Z_1, Z_2, z_1) = \nu(\nu+1)$, luego de remplazar en (5.22) y despejando tenemos:

$$\mu_0(Z) = \nu^2(\nu+2) + \sum_{q\in E^{-1}(0)} i_q\left(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2, \tilde{H}\right) - \nu(\nu+1),$$

observe que:

$$\tilde{H}(x,t,s) = \frac{(H\circ E_1)(x,t,s)}{x^{\nu+2}} = \sum_{k\geq\nu+1} x^{k-\nu-1}[Z_k^3(1,t,s) - sZ_k^1(1,t,s)] = \frac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x},$$

entonces

$$\mu_0(Z) = \nu^2(\nu+2) + \sum_{q\in E^{-1}(0)} i_q\left(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2, \frac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x}\right) - \nu(\nu+1). \tag{5.23}$$

Luego de (5.13) y (5.17) tenemos:

$$\sum_{q\in E^{-1}(0)} i_q\left(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2, \frac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x}\right) = (\nu-1)(\nu+2) + \sum_{q\in E^{-1}(0)} \mu_q(\tilde{Z}). \tag{5.24}$$

Finalmente de (5.23) y (5.24) se tiene:

$$\mu_0(Z) = \nu^2(\nu+2) + (\nu-1)(\nu+2) - \nu(\nu+1) + \sum_{q\in E^{-1}(0)} \mu_q(\tilde{Z}),$$

entonces

$$\mu_0(Z) = \nu^3 + 2\nu^2 - 2 + \sum_{q\in E^{-1}(0)} \mu_q(\tilde{Z})\ .$$

■

Obsrvación: La demostración del teorema anterior, es usando las mismas ideas del caso $n = 2$.

Ahora vamos mencionar una fórmula análoga del teorema anterior, para una singularidad no dicrítica.

Teorema 5.2.4 *Sea Z un campo vectorial holomorfo con singularidad aislada en $0 \in \mathbb{C}^3$, tal que $\tilde{Z}$ tiene singularidades aisladas en el divisor $E^{-1}(0)$. Si $0 \in \mathbb{C}^3$ es una singularidad no dicrítica de Z y $m_0(Z) = \nu$, entonces*

$$\mu_0(Z) = \nu^3 - \nu^2 - \nu - 1 + \sum_{q \in E^{-1}(0)} \mu_q(\tilde{Z}) \ .$$

La demostración puede ser encontrada en [5].

Capítulo 6

Parte Central: Prueba del Teorema

Sea $U \subseteq \mathbb{C}^3$ abierto y $\mathcal{F}_Z$ una foliación holomorfa, por curvas, de U generada por el campo vectorial $Z = (Z_1, Z_2, Z_3)$, recordemos que un punto $p \in Sing(\mathcal{F}_Z)$ es llamado irreducible, si $m_p(Z) = 1$ y la parte lineal de Z en p (i.e. $DZ(p)$) tiene al menos un autovalor no nulo.

Sea $E : \tilde{U}_p \longrightarrow U$ el Blow-up centrado en el punto $p \in Sing(\mathcal{F}_Z)$, entonces existe una única manera de extender la foliación pull-back $E^*(\mathcal{F}_Z - \{p\})$ a una foliación analítica singular $\mathcal{F}_Z$ sobre una vecindad del espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}P(2) = E^{-1}(p) \subseteq \tilde{U}_p$, con un conjunto singular de codimensión ≥ 2, donde $\mathcal{F}_Z$ es llamado el *transformado estricto* de $\mathcal{F}_Z$ por E, recordando que $p \in Sing(\mathcal{F}_Z)$ es una singularidad *no dicrítica* de $\mathcal{F}_Z$ si y sólo si $E^{-1}(p)$ es invariante por $\mathcal{F}_Z$ i.e. $E^{-1}(p)$ es unión de hojas y de singularidades de $\mathcal{F}_Z$, en caso contrario, p es llamado *singularidad dicrítica.*

El problema de desingularización (o de Reducción de Singularidades) para un $p \in Sing(\mathcal{F}_Z)$ (dicrítica o no) de $\mathcal{F}_Z$ consiste en demostrar la existencia de un mapeo holomorfo propio, $\Phi : U^* \longrightarrow U$ definido en una variedad 3-dimensiónal que cumpla las siguientes condiciones:

(1) $\Phi^{-1}(p) = \bigcup\limits_{i=1}^{m} D_i$ es unión de subvariedades complejas compactas de codimensión uno y con cruzamientos normales.

(2) La foliación pull-back $\Phi^*(\mathcal{F}_Z - \{p\})$ se extiende a una foliación de U^* con un conjunto singular de codimensión ≥ 2 y tal que todos sus puntos singulares son irreducibles.

En esta sección, resolveremos el problema de desingularización.

6.1. Singularidad Absolutamente Aislada

Definición 6.1.1 (S.A.A.) *Sea $\mathcal{F}_Z$ una foliación analítica por curvas sobre un abierto $U \subseteq \mathbb{C}^3$. Decimos que $p \in Sing(\mathcal{F}_Z)$ es una* ***Singularidad Absolutamente Aislada*** *(**S.A.A.**) de $\mathcal{F}_Z$ si y sólo si severifican las siguientes condiciones:*

(1) El punto p *es una singularidad aislada.*

(2) *Denotemos $p = p_0$, $U = U_0$, $\mathcal{F}_Z = F_0$, $\tilde{U}_p = U_1$, $\mathcal{F}_Z = F_1$, $E^1 = E$. Si consideramos una sucesión arbitraria de blowing-up's*

$$U_0 \xleftarrow{E^1} U_1 \xleftarrow{E^2} U_2 \xleftarrow{E^3} .... \xleftarrow{E^{N-1}} U_{N-1} \xleftarrow{E^N} U_N$$

donde el centro de cada E^i es un punto $p_{i-1} \in Sing(F_{i-1})$, (aqui F_j denota el transformado estricto de F_{j-1} por E^j, $(1 \leq i,\ j \leq N)$ entonces $Sing(F_N)$ es un conjunto finito.

Observación : En dimensión $n = 2$, no era necesario esta definición, pues en cada Blow-up, el conjunto singular de la foliación levantada tiene codimensión 2.

Por simplicidad, supongamos que $U = \mathbb{C}^3$, $p = 0 \in \mathbb{C}^3$. Teniendo en cuenta las notaciones del capitulo 3, 4 y 5. Antes de ir al resultado principal veamos el siguiente Teorema.

Teorema 6.1.1 *Sea Z un campo vectorial holomorfo con singularidad aislada en $0 \in \mathbb{C}^3$, tal que $m_0(Z) = 1$. Si $DZ(0)$ es de la forma*

$$a)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad ó \qquad b)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces 0 *no es una Singularidad Absolutamente Aislada* $(S.A.A)$ *de* Z.

Prueba.

a) En este caso el campo vectorial es de la forma:

$$Z(z_1, z_2, z_3) = \left(z_2 + \sum_{k\geq 2} Z_k^1(z_1, z_2, z_3), \sum_{k\geq 2} Z_k^2(z_1, z_2, z_3), \sum_{k\geq 2} Z_k^3(z_1, z_2, z_3) \right)$$

En la 1ra carta del Blow-up $E_1(x, t, s) = (x, xt, xs) = (z_1, z_2, z_3)$ un simple cálculo muestra que el tranformado estricto $\mathcal{F}_{\tilde{Z}^1}$ es generada por:

$$\tilde{Z}^1(x, t, s) = \left(xt + \sum_{k\geq 2} x^k Z_k^1(1, t, s) \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(-t^2 \sum_{k\geq 2} x^{k-1} [Z_k^2(1, t, s) - tZ_k^1(1, t, s)] \right) \frac{\partial}{\partial t} +$$
$$+ \left(-ts + \sum_{k\geq 2} x^{k-1} [Z_k^3(1, t, s) - sZ_k^1(1, t, s)] \right) \frac{\partial}{\partial s}$$

como $Sing(\tilde{Z}^1) \subseteq \{x = 0\}$, hacemos $x = 0$

$\tilde{Z}^1(0, t, s) = (0, -t^2, -ts)$ entonces cualquier punto de la forma $(0, 0, s) \in Sing(\tilde{Z}^1)$ con $s \in \mathbb{C}$, entonces el conjunto $Sing(\tilde{Z}^1)$ tiene infinitos elementos entonces 0 no es una S.A.A. de $\mathcal{F}_Z$.

b) En este caso tenemos que el campo vectorial es de la forma:

$$Z(z_1,z_2,z_3)=\left(z_2+\sum_{k\geq 2}Z_k^1(z_1,z_2,z_3),z_3+\sum_{k\geq 2}Z_k^2(z_1,z_2,z_3),\sum_{k\geq 2}Z_k^3(z_1,z_2,z_3)\right)$$

En la 1ra carta del Blow-up $E_1(x,t,s)=(x,xt,xs)=(z_1,z_2,z_3)$ un simple cálculo muestra que el tranformado estricto $\mathcal{F}_{\tilde{Z}^1}$ es generada por:

$$\begin{aligned}\tilde{Z}^1(x,t,s)= &\left(xt+\sum_{k\geq 2}x^kZ_k^1(1,t,s)\right)\frac{\partial}{\partial x}+\left(s-t^2+\sum_{k\geq 2}x^{k-1}[Z_k^2(1,t,s)-tZ_k^1(1,t,s)]\right)\frac{\partial}{\partial t}+\\ &+\left(-ts+\sum_{k\geq 2}x^{k-1}[Z_k^3(1,t,s)-sZ_k^1(1,t,s)]\right)\frac{\partial}{\partial s}\end{aligned}$$

como $Sing(\tilde{Z}^1)\subseteq\{x=0\}$, hacemos $x=0$

$\tilde{Z}^1(0,t,s)=(0,s-t^2,-ts)$ entonces$(0,0,0)$ es la única singularidad de $\mathcal{F}_Z$, observe que:

$$D\tilde{Z}(0)=\begin{pmatrix}0&0&0\\ \alpha&0&1\\ \beta&0&0\end{pmatrix}$$

tiene todos sus autovalores nulos, donde $\alpha=Z_2^2(1,0,0)$ y $\beta=Z_2^3(1,0,0)$, entonces $(0,0,0)$ es también un punto singular no irreducible de $\mathcal{F}_Z$.

denotemos $\tilde{Z}^1(x,t,s)=\left(\tilde{A}(x,t,s),B(x,t,s),\tilde{C}(x,t,s)\right)$ donde:

$$\left|\begin{array}{l}\tilde{A}(x,t,s)=xt+\sum_{k\geq 2}x^kZ_k^1(1,t,s)\\ \tilde{B}(x,t,s)=s-t^2+\sum_{k\geq 2}x^{k-1}[Z_k^2(1,t,s)-tZ_k^1(1,t,s)]\\ \tilde{C}(x,t,s)=-ts+\sum_{k\geq 2}x^{k-1}[Z_k^3(1,t,s)-sZ_k^1(1,t,s)]\end{array}\right.$$

Distinguimos dos casos:

CASO 1: $\beta=Z_2^3(1,0,0)=0$

trabajando en la primera carta del Blow-up (de la segunda explosión) $(x,t,s) = (x', x't', x's')$, haciendo un simple cálculo, el tranformado estricto de $\mathcal{F}_{\tilde{Z}^1}$ es generado por :

$$Z^{(2)}(x,t',s') = \left(x^2t' + x[...]_1, s' + Z_2^2(1,xt',xs') + x[...]_2, Z_2^3(1,xt',xs') + x[...]_2\right)$$

donde $[...]_1, [...]_2 \in \mathbb{C}[x,t',s']$, como $Sing(Z^{(2)}) \subseteq \{x=0\}$, hacemos $x=0$

$$Z^{(2)}(0,t',s') = \left(0, s' + Z_2^2(1,0,0), Z_2^3(1,0,0)\right) = (0, s'+\alpha, 0)$$

entonces cuaquier punto de la forma $(0,t',-\alpha)$ con $t' \in \mathbb{C}$ es un punto singular de $\mathcal{F}_{Z^{(2)}} = \tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{Z}^1}$, entonces $Sing(\mathcal{F}_{Z^{(2)}})$ es un conjunto infinito, entonces $(0,0,0)$ no es una S.A.A. de $\mathcal{F}_Z$.

CASO 2: $\beta = Z_2^3(1,0,0) \neq 0$

Afirmamos que existe un cambio de coordenadas tal que se llega a las condiciones del caso 1. En efecto definimos las transformaciones lineales:

$$\begin{array}{rccl} L: & \mathbb{C}^3 & \longrightarrow & \mathbb{C}^3 \\ & (z_1,z_2,z_3) & \longmapsto & L(z_1,z_2,z_3) = \left(\frac{1}{\beta}z_3, z_1, z_2 - \frac{\alpha}{\beta}z_3\right) \\ T: & \mathbb{C}^3 & \longrightarrow & \mathbb{C}^3 \\ & (w_1,w_2,w_3) & \longmapsto & T(w_1,w_2,w_3) = (w_2, \alpha w_1 + w_3, \beta w_1) \end{array}$$

Es claro que $T = L^{-1}$, defino $X = T \circ \tilde{Z}^1 \circ L : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ en campo holomorfo, entonces $X = T \circ (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}) \circ L$ entonces $X = (A^*, B^*, C^*)$ donde:

$$\begin{aligned} A^*(z_1,z_2,z_3) &= (B \circ L)(z_1,z_2,z_3) \\ B^*(z_1,z_2,z_3) &= \alpha(\tilde{A} \circ L)(z_1,z_2,z_3) + (\tilde{C} \circ L)(z_1,z_2,z_3) \\ C^*(z_1,z_2,z_3) &= \beta(\tilde{A} \circ L)(z_1,z_2,z_3) \end{aligned}$$

Por regla de la cadena:

$$DX(0) = D(T \circ \tilde{Z}^1 \circ L)(0) = DT(\tilde{Z}^1(L(0)).D\tilde{Z}^1(L(0)).DL(0) = T \circ D\tilde{Z}^1(0) \circ L$$

$$DX(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \\ \beta & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \\ \beta & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/\beta \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha/\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces estamos como en el principio, el campo vectorial X tiene parte lineal $DX(0)$ de la forma (b), X es de la forma :

$$X(z_1, z_2, z_3) = \left(z_2 + \sum_{k\geq 2} A_k^*(z_1, z_2, z_3), z_3 + \sum_{k\geq 2} B_k^*(z_1, z_2, z_3), \sum_{k\geq 2} C_k^*(z_1, z_2, z_3) \right)$$

donde:

$$\left| \begin{array}{l} A^*(z_1, z_2, z_3) = z_2 + \sum\limits_{k\geq 2} A_k^*(z_1, z_2, z_3) \\ B^*(z_1, z_2, z_3) = z_3 + \sum\limits_{k\geq 2} B_k^*(z_1, z_2, z_3) \\ C^*(z_1, z_2, z_3) = \sum\limits_{k\geq 2} C_k^*(z_1, z_2, z_3) \end{array} \right.$$

En la 1ra carta del bolw-up $(z_1, z_2, z_3) = (x, xt, xs) = E_1(x, t, s)$, un simple cálculo se mestra que $\mathcal{F}_{\tilde{X}}$ es generada por el campo:

$$\tilde{X} = (\tilde{A}^*, \tilde{B}^*, \tilde{C}^*)$$

donde :

$$\left| \begin{array}{l} \tilde{A}^*(x, t, s) = xt + \sum\limits_{k\geq 2} x^k A_k^*(1, t, s) \\ \tilde{B}^*(x, t, s) = s - t^2 \sum\limits_{k\geq 2} x^{k-1}[B_k^*(1, t, s) - tA_k^*(1, t, s)] \\ \tilde{C}^*(x, t, s) = -ts + \sum\limits_{k\geq 2} x^{k-1}[C_k^*(1, t, s) - sA_k^*(1, t, s)] \end{array} \right.$$

Es fácil ver que

$$D\tilde{X}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha^* & 0 & 1 \\ \beta^* & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene todos sus autovalores nulos, donde $\alpha^* = B_2^*(1,0,0)$ y $\beta^* = C_2^*(1,0,0)$,entonces $(0,0,0)$ es también un punto singular no irreducible de $\mathcal{F}_{\tilde{X}}$, observe que:

$$\begin{aligned} C^*(z_1,z_2,z_3) &= \beta(\tilde{A}\circ L)(z_1,z_2,z_3) \\ &= \beta\tilde{A}(\tfrac{1}{\beta}z_3, z_1, z_2 - \tfrac{\alpha}{\beta}z_3) \\ &= \beta[\tfrac{1}{\beta}z_1z_3 + \sum_{k\geq 2} Z_k^1(1, z_1, z_2 - \tfrac{\alpha}{\beta}z_3)(\tfrac{1}{\beta}z_3)^k] \end{aligned}$$

Pero $\beta^* = C_2^*(1,0,0) = 0$, luego estamos en el **CASO 1**, entonces $(0,0,0)$ no es S.A.A de $\mathcal{F}_X$, por lo tanto 0 no es un S.A.A. de Z. ∎

Corolario 6.1.2 *Si* $0 \in \mathbb{C}^3$ *es una S.A.A. y* $m_0(Z) = 1$ *entonces* 0 *es un punto singular irreducible.*

Ahora si veamos el resultado principal

6.2. Teorema de Reducción

Teorema 6.2.1 (Teorema de Reducción) *Sea* $p \in \mathcal{M}^n$, $(n \geq 3)$, *una singularidad absolutamente aislada de* $\mathcal{F}_Z$. *Denotemos* $p = p_0$, $\mathcal{M}^n = \mathcal{M}_0^n$, $\mathcal{F}_Z = \mathcal{F}_0$, $E_1 = E$, *entonces existe ena sucesión finita de bowing-up's*

$$\mathcal{M}_0^n \overset{E_1}{\longleftarrow} \mathcal{M}_2^n \overset{E_2}{\longleftarrow} \mathcal{M}_3^n \overset{E_3}{\longleftarrow} \ldots . \overset{E_{N-1}}{\longleftarrow} \mathcal{M}_{N-1}^n \overset{E_N}{\longleftarrow} \mathcal{M}_N^n$$

que satisface las siguientes propiedades:

(1) El centro de cada E_i *es un punto* $p_{i-1} \in Sing(\mathcal{F}_{i-1})$, *donde* $\mathcal{F}_j$ *denota el transformado estricto de la foliación* $\mathcal{F}_{j-1}$ *por* E_j, *donde* $1 \leq i,j \leq N$.

(2) Si $q \in Sing(\mathcal{F}_N)$ *entonces* q *es una singularidad irreducible.*

Prueba. Sea $\nu = m_p(Z)$ ■

a) Si $\nu = 1$ entonces por el teorema 6.1.1, p es una singularidad irreducible.

b) Si $\nu \geq 2$,

Desde que p es una S.A.A. de $\mathcal{F}_Z$, entonces tenemos:

$$\mu_p(Z) = \begin{cases} g(\nu+1) + \sum\limits_{q \in E^{-1}(0)} \mu_q(\tilde{Z}), & \text{si } p \text{ es dicrítico} \\ g(\nu) + \sum\limits_{q \in E^{-1}(0)} \mu_q(\tilde{Z}), & \text{si } p \text{ es no dicrítico,} \end{cases}$$

donde $g(x) = x^n - x^{n-1} - \cdots - x - 1$. Observe que si $x \geq 2$ entonces $g(x) > 0$.

En cualquier caso (dicrítico o no), con un fácil cálculo se tiene:

$$m_p(Z) \geq 2 \Rightarrow \mu_q(\tilde{Z}) < \mu_p(Z) \quad \forall q \in E^{-1}(p) \tag{6.1}$$

y del teorema 5.2.1, se tiene que $m_p(Z) \leq \mu_p(Z)$ $\forall p$.

Afirmamos que después de un número finito de blowing-up's $E_1 = E$, E_2,...,E_N con centros en los puntos singulares, se obtiene solamente puntos singulares con multiplicidad álgebraica ≤ 1.

En efecto, supongamos lo contrario, entonces en cada Blow-up existe por lo menos un punto en el divisor cuya multiplicidad álgebraica es ≥ 2, es decir, dado $k \in \mathbb{N}$, $\exists p_k \in E_k^{-1}(p_{k-1})$ tal que $m_p(Z^{(k)}) \geq 2$, en donde $Z^{(1)} = \tilde{Z}$ y $Z^{(k)} = \tilde{Z}^{k-1}$ (hipotesis auxiliar)

Luego de (6.1) y de la hipotesis auxiliar, se sigue que:

$$\mu_{p_1}(Z^{(1)}) < \mu_p(Z),\ \mu_{p_2}(Z^{(2)}) < \mu_{p_1}(Z^{(1)}), ..., \ \mu_{p_k}(Z^{(k)}) < \mu_{p_{k-1}}(Z^{(k-1)}),\ \forall k \in \mathbb{N}$$

la cual implica que:

$$\mu_p(Z) > \mu_{p_1}(Z^{(1)}) > ..... > \mu_{p_{k-1}}(Z^{(k-1)}) > \mu_{p_k}(Z^{(k)}) > ... \geq 0. \tag{6.2}$$

Desde que el conjunto $Sing(Z^{(k)})$ es discreto (por hipotesis), entonces los $p_k \in Sing(Z^{(k)})$ son singularidades aisladas, entonces la sucesión $\mu_{p_k}(Z^{(k)})$ es finito $\forall k \in \mathbb{N}$, lo cual implica que (6.2) es una contradicción, esto prueba la afirmación.

Luego definimos $\Phi = E_N \circ E_{N-1} \circ ... \circ E_1$, se sigue que $\Phi : \mathcal{M}_N^n \longrightarrow \mathcal{M}_0^n$ es una función holomorfa propia, pues $E_1 = E$, E_2, ...,E_N son propias y el pull-back $\Phi^*(\mathcal{F}_0 \mid_{\mathcal{M}^n - \{p\}})$ se extiende a una foliación singular $\mathcal{F}_N$ sobre $\mathcal{M}_N^n$ con conjunto singular de codimensión n.

Por lo tanto si $q \in Sing(\mathcal{F}_N)$, entonces $m_q(\mathcal{F}_N) = 1$ y como p es una S.A.A. , entonces q es una S.A.A.. Luego por el torema 6.1.1, q es un punto singular irreducible. ■

OBSERVACIÓN: Todos los resultados obtenidos en este trabajo se puede generalizar a dimensión n a nivel de variedades complejas, usando otras herramientas.

Bibliografía

[1] R Benazic, Carcaterización de Singularidades Dicríticas en foliaciónes de dimensión uno, PESQUIMAT, Vol I, N°1, (1998), p.73-81.

[2] R. Benazic, Singularidades de Campos Vectoriales Holomorfos en el Dominio de Poincaré, Pro Mathematica, Vol X, N° 19-20, (1996).

[3] C. Camacho, P. Sad, Pontos singulares de Equações Diferenciais Analíticas, 16° Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, (1987)

[4] C. Camacho, Holomorphic Dynamical Systems, Summer School on Dynamical Systems, ICTP, Triestre-Italia,(16 August - 9 September, (1988).

[5] C. Camacho, F. Cano, and P Sad, Absolutely isolated singularities of holomorphic vector fields, Invent. math. 98, (1989), p. 351-369.

[6] C. Camacho e A. Lins Neto, Teoria geométrica das folheações, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, (1979).

[7] S. Ramirez , Topicos de Teoria Cualitativa de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Complejas, Lima-Perú, UNMSM, Tesis, (2001).

[8] E. Chirka, Complex Analytic Sets, MIA, Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, Boston, London (1989).

[9] H. Cartan, Elementary theory of Analytic Funcions of one or several Complex variables, Dover Publications, INC, New York, (1995).

[10] X. Gomez-Mont y L. Ortiz-Bobadilla, Sistemas Dinamicos Holomorfos en Superficies, Sociedad Matemática Mexicana, Instituto de Matemáticas de la U.N.A.M, (1989).

[11] W. Fulton, Intersection Theory, 2. ed., Berlin, Heidelberg, New York: Springer (1998).

[12] W. Fulton, Algebraic Curves An Introduction to Algebraic Geometry, New York, (1969).

[13] Omegar Calvo Andrade, Sistemas Lineales Complejos, Centro de Investigación en Matemáticas, Guanajuato-México, (1999).

[14] Marcio G. S oares e Rogério S Mol, Índices de Campos Holomorfos e Aplicações, 23° Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, (2001).

[15] A. Lins Neto e B. Azevedo Scárdua, Folheações Algébraicas Complexas, 21° Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, (1997).

[16] B. V. Shabat, Introduction to Complex Analysis part. II, Functions of Several Cariables, Traslation ofMathematical Monographs. vol. 110, (1992).

[17] E. Lages Lima, Variedades Diferenciáveis, Monografías de Matemática, N°15, IMPA, Rio de Janeiro, (1973).

[18] V.I. Arnold, Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations, Secon Edition, Springer Verlag, (1988).

[19] J. Sotomayor, Lições de Equações Diferencias Ordinárias, Proyecto Euclides, Rio de Janeiro, (1979).