UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

E.A.P. DE MATEMÁTICA

Estabilidad de materiales parcialmente viscoelásticos

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Justo Alejandro Alarcón Solís

ASESOR

María Zegarra Garay

Lima – Perú

2013

Estabilidad de Materiales Parcialmente Viscoelásticos.

por

Justo Alejandro Alarcón Solís

Tesis sometida al Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos - UNMSM, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del Título de Licenciado en Matemática.

Aprobada por el siguiente jurado:

Dr. Alfonso Pérez Salvatierra
Presidente

Lic. Julio Flores Dionicio
Miembro

Dr. Jaime Muñoz Rivera
Miembro (Profesor Honorario)

Dra. María N. Zegarra Garay
Miembro Asesor

FICHA CATALOGRÁFICA

ALARCÓN SOLÍS, Justo Alejandro

Estabilidad de Materiales Parcialmente Viscoelásticos., (Lima) 2013.

VIII.,57p.,29.7cm (UNMSM,Licenciado, Matemática,2013) Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Facultad de Ciencias Matemáticas.

1. Matemática Pura I. UNMSM/FCM II. Título (Serie).

DEDICATORIA

Dedico este trabajo en primer lugar a Dios, ya que permitió la publicación del mismo, a mis padres, esposa e hijos por su paciencia y comprensión, y a ese ángel que siempre estuvo conmigo apoyándome y guiándome cuando más lo necesitaba con sus sabias orientaciones.

AGRADECIMIENTO

- Agradezco de una manera muy especial a mi orientadora principal y asesora la Dra. María Zegarra Garay, pues sin su ayuda no hubiese sido posible el desarrollo del presente trabajo.
- De igual manera quisiera agradecer al Dr.Jaime Muñoz Rivera , Dr. Luis Enrique Carrillo Díaz, Dr. Eugenio Cabanillas Lapa y a todos los profesores por mi formación académica y profesional.
- Agradezco a mi esposa Anel e hijos Jorge y Brianna quienes con su apoyo permitieron concretar mi objetivo personal.
- Espero no olvidarme de nadie y si lo hago sepan que estoy muy agradecido con todos aquellos que permitieron el desarrollo del trabajo mencionado.

RESUMEN

Estabilidad de Materiales Parcialmente Viscoelásticos

Alarcón Solís Justo Alejandro

Setiembre, 2013

Asesor	:	Dra. María Zegarra Garay.
Título Obtenido	:	Licenciado en Matemáticas.

En el presente trabajo, estudiamos el problema de transmisión de una viga viscoelástica con viscosidad del tipo Kelvin Voight. Esto es, estudiamos las oscilaciones de una viga compuesta de dos tipos de materiales. Una parte simplemente elástica, que obedece la ley de Hook, y la otra componente constituida de un material viscoso.

Estudiamos la buena colocación de este problema, esto es, usando la teoría de semigrupos, mostramos la existencia, unicidad y regularidad del modelo matemático. Finalmente, demostramos que las soluciones de este modelo decaen polinomialmente para cero. El método que usamos para probar este resultado es basado también en la Teoría de semigrupos y en un resultado reciente debido a Borichev y Tomilov.

Palabras Clave:

Semigrupos.

Espacios de Sobolev.

Problema de Cauchy.

Estabilidad Polinomial.

ABSTRACT

Stability of Partially Viscoelastic Materials

Alarcón Solís Justo Alejandro

September, 2013

Adviser	:	Dra. María Zegarra Garay.
Obtained Title	:	Degree in Mathematics.

In this paper we study the transmission problem of a viscoelastic beam with viscosity of Kelvin Voight type. That is to say, we study the oscilations of a beam composed by two differents types of materials. One of its components is just an elastic part that follows the Hook law and the other component is a viscous material. We prove the well possedness, that is, using the semigroup theory we show the existence, uniqueness and regularity of the corresponding mathematica model. Finally we show that the solution decays polynomially to zero. The method we use to show the decay is based on the semigroup theory and the Borichev-Tomilov theorem.

Keywords:

Semigroups.

Sobolev Spaces.

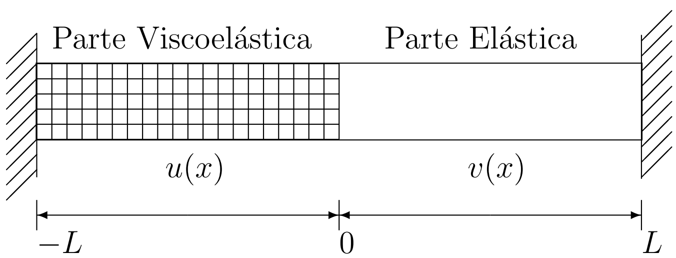
Cauchy Problem.

Polinomial Stability.

Índice general

Introducción

En este trabajo estudiaremos las oscilaciones de un material parcialmente viscoelástico, es decir un componente del material es viscoso y el otro componente es simplemente elástico, el siguiente gráfico muestra este material.



Note que el material pasa de viscoso para simplemente elástico, por tanto en las leyes constitutivas, aparecen coeficientes discontínuos. Esto es, si definimos por ρ la densidad de la viga, del gráfico concluimos,

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_1 & x \in]-L, 0[\\ \rho_2 & x \in]0, L[\end{cases}$$

Donde $\rho_1 \neq \rho_2$. De forma análoga para los coeficientes de elasticidad

$$\kappa(x) = \begin{cases} \kappa_1 & x \in]-L, 0[\\ \kappa_3 & x \in]0, L[\end{cases}$$

El problema consiste en encontrar la función U que define las oscilaciones de la viga, que está definida como

$$U(x) = \begin{cases} u(x) & x \in]-L, 0[\\ v(x) & x \in]0, L[\end{cases}$$

Este tipo de problema es llamado de, problema de transmisión. El presente trabajo de tesis consiste en mostrar la buena colocación del problema, es decir, probar la existencia, unicidad y regularidad de la solución U del modelo. Note que esta función está bien definida por las funciones u y v definidas anteriormente. Por simplicidad en la notación identificaremos a la función U a través de un par ordenado (u, v), haremos esto para formular este problema de una forma más compacta.

Posteriormente, estudiaremos el comportamiento asintótico de la solución del problema, esto es, queremos saber como se comporta la solución del modelo propuesto cuando t es grande. En otros términos, estamos interesados en el siguiente límite,

$$\lim_{t\to\infty}(u(x,t), v(x,t)) = (0,0)$$

Desde el punto de vista físico, sabemos que si una viga esta oscilando y no existen fuerzas externas que perturben sus oscilaciones, esta viga debe parar de oscilar. Aquí nuestro problema es saber que tan rápido la viga para de oscilar. En el último capítulo de esta tesis probaremos que la solución va para cero como la función t^{-2}. Más precisamente probaremos que la solución verifica

$$\|u(\cdot,t)\| + \|v(\cdot,t)\| \leq Ct^{-2}$$

Esto es, mostraremos que las oslaciones se estabilizan polinomialmente, con tasas que dependen de la regularidad de los datos iniciales.

El modelo que describe las oscilaciones de una viga de dos componentes es el siguiente,

$$\begin{array}{lll} \rho_1 u_{tt} - k_1 u_{xx} - k_2 u_{xxt} = 0 & \text{en} &]-\mathrm{L}, 0[\times]0, \infty[\\ \rho_2 v_{tt} - k_3 v_{xx} = 0 & \text{en} &]0, \mathrm{L}[\times]0, +\infty[\end{array}$$

donde u describe las oscilaciones en la primera parte de la viga y v describe las oscilaciones en la segunda parte de la viga.

En este trabajo consideraremos las condiciones de contorno del Tipo Dirichlet

$$u(-L,t) = 0 \quad , \quad v(L,t) = 0 \quad , \quad t \geq 0.$$

Las condiciones de transmisión están dadas por

$$u(0,t) = v(0,t) \quad , \quad k_1 u_x(0,t) + k_2 u_{xt}(0,t) = k_3 v_x(0,t)$$

y finalmente las condiciones iniciales

$$u(x,0) = u_0(x) \ , \ u_t(x,0) = u_1(x) \quad \text{en} \quad]-\mathrm{L},0[$$

$$v(x,0) = v_0(x) \ , \ v_t(x,0) = v_1(x) \quad \text{en} \quad]0,\mathrm{L}[$$

El objetivo es probar la existencia de la solución (u, v) de nuestro sistema. Para esto utilizamos el método de semigrupos. Para probar el decaimiento polinomial, discutido anteriormente, usaremos el Teorema de Borichev y Tomilov, que caracteriza el decaimiento polinomial del semigrupo.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo introduciremos algunos espacios y enunciaremos algunas definiciones y teoremas que usaremos en los siguientes capítulos.

1.1. Los Espacios $L^p(\Omega)$

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto de $\mathbb{R}^n$ y p un número real tal que $1 \leq p < +\infty$. Se denota por $L^p(\Omega)$ el espacio de Banach de clases de funciones medibles u, definidas en Ω, $u : \Omega \to \mathbb{R}$, tales que $|u|^p$ es lebesgue integrable en Ω, esto es,

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}; \;\; \text{medible tal que} \;\; \int_\Omega |u|^p \, dx < \infty \right\}$$

y norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

Este espacio vectorial es un espacio completo. Cuando $p = 2$, $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert y denotamos por $(,)$ el producto interno en $L^2(\Omega)$, i.e.:

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \qquad \forall u, v \in L^2(\Omega)$$

y norma

$$\|u\|^2 = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |u(x)|^2 \, dx, \qquad \forall u \in L^2(\Omega)$$

En el caso $p = +\infty$, $L^\infty(\Omega)$ es el espacio de Banach formado por todas las funciones u esencialmente acotadas en Ω

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R};\ \text{ medible tal que } \ |u(x)| \leq C \quad \text{q.s. en } \Omega\}$$

con la norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} ess\, |u(x)|$$

$L^\infty(\Omega)$ es un espacio de Banach, esto es, un espacio normado y completo.

Teorema 1.1.1 *(Desigualdad de Young) Si a y b son números reales no negativos, entonces*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

donde

$$1 < p, q < +\infty \qquad y \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Demostración.- Ver [1] en las referencias bibliográficas. ∎

Lema 1.1.1 *(Desigualdad de Hölder) Sean $u \in L^P(\Omega)$, $v \in L^{p'}(\Omega)$ con $1 \leq p, p' < \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Entonces $uv \in L^1(\Omega)$ y*

$$\int_\Omega |u(x)\ v(x)|\, dx \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^{p'}}$$

Demostración.- Ver [1] en las referencias bibliográficas. ∎

1.2. Espacios de Distribuciones

Sea $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ y se denota por D^α el operador derivada de orden α, definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$$

Cuando $\alpha = (0, 0, 0, \ldots, 0)$ se define $D^\alpha u := u$.

Consideremos el espacio de las funciones infinitamente diferenciables y con soporte compacto en Ω, este espacio es denotado como

$$C_0^\infty(\Omega)$$

Vamos dotar a este espacio de una topología, esta topología estaría definida a través de la siguiente noción de convergencia. Diremos que una sucesión de funciones $\phi_\nu \in C_0^\infty(\Omega)$ converge para ϕ si verifica las siguientes condiciones

(i) El soporte de ϕ_ν está contenido en un compacto fijo K de Ω.

(ii) Para todo $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, si verifica

$$D^\alpha \phi_\nu \to D^\alpha \phi \;\; \text{uniformemente} \;\; \text{sobre} \;\; K.$$

El espacio $C_0^\infty(\Omega)$ unido a la convergencia definida anteriormente, será denominado espacio de funciones de prueba y será denotado como $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definición 1.2.1 *Diremos que la aplicación $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, es una distribución sobre Ω, si T es una aplicación lineal y contínua en $\mathcal{D}(\Omega)$. Esto es, si ϕ_ν converge según la noción de convergencia anterior entonces*

$$T(\phi_\nu) \to T(\phi), \quad \textit{en} \quad \mathbb{R}.$$

1.3. Espacios de Sobolev

Con estas notaciones se define el espacio

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega),\; D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m \text{ en el sentido distribucional}\}$$

Sea la norma

$$\|u\|_{m,p}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx$$

Con esta norma, $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach. El espacio $W^{m,p}(\Omega)$ es llamado el espacio de Sobolev de orden m. También se define el espacio de Banach $W_0^{m,p}(\Omega)$ como la cerradura de $C_0^\infty(\Omega)$ en el espacio $W^{m,p}(\Omega)$, es decir

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}$$

Observación 1.3.1 *La cerradura del espacio $C_0^\infty(\Omega)$ con relación a la norma de $W^{1,p}(\Omega)$ está caracterizada como el conjunto de todos los elementos de $W^{1,p}(\Omega)$ que tienen trazo nulo, esto es*

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \left\{w \in W^{1,p}(\Omega); \quad w(x) = 0, \;\; x \in \partial\Omega\right\}$$

$\partial\Omega$ denota la frontera de Ω. De forma análoga cuando

$$W_0^{2,p}(\Omega) = \left\{w \in W^{1,p}(\Omega); \quad w(x) = 0, \;\; D^\alpha w(x) = 0, \;\; x \in \partial\Omega, \;\; |\alpha| = 1.\right\}$$

y cuando $m = 3$ el espacio es dado por

$$W_0^{3,p}(\Omega) = \left\{w \in W^{1,p}(\Omega); \quad w(x) = 0, \;\; D^\alpha w(x) = 0, \;\; x \in \partial\Omega, \;\; |\alpha| = 2.\right\}$$

En general tendremos que

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \left\{w \in W^{1,p}(\Omega); \quad w(x) = 0, \;\; D^\alpha w(x) = 0, \;\; x \in \partial\Omega, \;\; |\alpha| = m-1.\right\}$$

Cuando $p = 2, W^{m,2}(\Omega)$ es representado por $H^m(\Omega)$, donde este espacio es un espacio de Hilbert con producto interno

$$(u,v)_{m,2} = \sum_{|\alpha| \le m} \int_\Omega D^\alpha u\,(x) D^\alpha v\,(x) dx$$

y norma

$$\|u\|_{m,2}^2 = \sum_{|\alpha| \le m} \int_\Omega |D^\alpha u\,(x)|^2\, dx$$

Análogamente el espacio $W_0^{m,2}(\Omega)$ es denotado como $H_0^m(\Omega)$.

Teorema 1.3.2 *(Desigualdad de Poincaré) Sea Ω un abierto acotado en $\mathbb{R}^n$, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ entonces existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^p} \le C\, \|\nabla u\|_{L^p} \quad 1 \le p \le +\infty$$

Demostración.- Ver [2] en las referencias bibliográficas. ∎

Observación 1.3.3 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto limitado de $\mathbb{R}^n$, supongamos que su frontera $\partial\Omega$ está dividida en dos partes*

$$\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$$

La desigualdad de Poincaré, es válida también cuando la función u se anula apenas en una parte abierta de Ω, esto es, si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, es tal que $u(x) = 0$ para $x \in \Gamma_0$.

Observación 1.3.4 *La desigualdad de Poincaré es también válida cuando $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto limitado apenas en una dirección.*

Así tenemos la siguiente cadena de inyecciones continuas y densas

$$D'(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) = \left(L^2(\Omega)\right)' \subset H^{-1}(\Omega) \subset D'(\Omega)$$

donde $D'(\Omega)$ representa el espacio de las distribuciones sobre Ω.

Teorema 1.3.5 *El espacio $W^{1,p}$ es un espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$. El espacio $W^{1,p}$ es reflexivo para $p > 1$ y separable para $p \geq 1$. El espacio H^1 es un espacio de Hilbert separable.*

Demostración.- Ver [2] en las referencias bibliográficas. ∎

Teorema 1.3.6 *Sea I un conjunto abierto, no vacío en $\mathbb{R}$. Sea $u \epsilon L^2(I)$ y supongamos que*

$$\int_I u\omega dx = 0, \forall \omega \in C_0^\infty(I)$$

Entonces $u(x) = 0 \quad$ c.t.p en I

Demostración.- Ver [6] en las referencias bibliográficas. ∎

Corolario 1.3.1 *(Derivación de un producto) Sean $f, g \in W^{1,p}(I)$ con $1 \leq p \leq \infty$ .Entonces $fg \in W^{1,p}(I)$ y*

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Además se verifica la fórmula de integración por partes

$$\int_a^b f'g = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b fg' \quad , \forall a, b \in \overline{I}$$

Demostración.- Ver [2] en las referencias bibliográficas. ∎

1.4. Aplicaciones Lineales

Sean E y F espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ (es decir, los espacios vectoriales son ambos reales o ambos complejos).

Definición 1.4.1 *Una aplicación* $f : E \to F$ *se dice que es lineal, si*

(a) f *es aditiva*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad , \forall x, y \in E$$

(b) f *es homogénea*

$$f(\lambda x) = \lambda f(x), \qquad \forall \lambda \text{ escalar}, \forall x \in E$$

Evidentemente la aplicación $f : E \to F$ es lineal si y solo si,

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

para cualesquiera sean los escalares λ y μ los vectores x e y en E.

Definición 1.4.2 *Si* E *y* F *son espacios vectoriales normados sobre* $\mathbb{K}$ *cuerpo y* $T : E \to F$ *es una aplicación lineal, diremos que* T *es contínua en un vector* $u_0 \in E$*, si dado* $\varepsilon > 0$ *, existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$\|Tu - Tu_0\| < \varepsilon, \text{ siempre que } \|u - u_0\| < \delta$$

Diremos que T *es contínua en* E*, si* T *es continua en cada punto de* E*.*

Definición 1.4.3 *Sea* T *una aplicación lineal definida sobre* E*. Diremos que* T *es limitada en* E*, si existe una constante positiva* C *tal que*

$$\|T(w)\| \leq C\|w\|, \forall w \in E$$

Teorema 1.4.4 *Si* $T : E \to F$ *es una aplicación lineal. Son equivalentes*

(a) T *es continua en* E*.*

(b) T *es continua en un punto de* E*.*

(c) *T es limitada en E.*

DEMOSTRACIÓN.- Probaremos que (b) implica (c). Sea T continua en u_0, luego existe $\delta > 0$ tal que

$$\|Tu - Tu_0\| \leq 1, \text{ para todo } \|u - u_0\| \leq \delta$$

Haciendo $z = u - u_0$, se tiene

$$\|Tz\| \leq 1, \text{ para todo } \|z\| \leq \delta$$

Ahora consideremos v un vector cualquiera de E, tenemos que

$$\|Tv\| = \left\| \frac{\|v\|}{\delta} T\left(\frac{\delta v}{\|v\|}\right) \right\| = \frac{\|v\|}{\delta} \left\| T\left(\frac{\delta v}{\|v\|}\right) \right\| \leq \frac{\|v\|}{\delta}$$

Por tanto, existe una constante $C = \dfrac{1}{\delta} > 0$, tal que $\|Tv\| \leq C \|V\|$,$\forall v \in E$.

A continuación probaremos que (c) implica (a). Tenemos que

$$\|Tu - Tu_0\| \leq C. \|u - u_0\|, \forall u, u_\circ \in E$$

Basta tomar $\delta = \dfrac{\varepsilon}{C}$

(a) implica (b) es inmediata. ∎

Teorema 1.4.5 *Si $T : E \to F$ es una aplicación lineal y continua, entonces*

$$\|T\| = \sup\left\{\frac{Tu}{\|u\|}, u \neq 0\right\} = \sup\left\{\|Tu\|, \|u\| = 1\right\} = \sup\left\{\|Tu\|, u \in E, \|u\| \leq 1\right\}$$

DEMOSTRACIÓN.- Ver [5] en las referencias bibliográficas. ∎

Observación 1.4.6 *Si T es limitada, se obtiene $\|Tu\| \leq \|T\| \|u\|$.*

Denotamos por $\mathcal{L}(E, F)$ al espacio vectorial de las aplicaciones lineales y continuas de E en F.

Teorema 1.4.7 *Si F es un espacio de Banach,entonces $\mathcal{L}(E, F)$ es de Banach.*

DEMOSTRACIÓN.- Ver [5] en las referencias bibliográficas. ∎

Definimos la norma en $\mathcal{L}(E, F)$ por $\|.\| : \mathcal{L}(E, F) \to \mathbb{R}$ donde $\|T\|$ es definida como en el Teorema 1.4.5.

1.5. Formas Lineales y Dualidad

Representamos por $\mathbb{K}$ al campo de los números reales o complejos $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Definimos $E' = \{T : E \to \mathbb{K},\ \text{lineal y continua}\}$ como el espacio dual del espacio vectorial normado E; es simple verificar que este espacio es completo.

Análogamente, definimos el espacio bidual de E, como el espacio dual de E' esto es, $(E')' = E''$. El espacio bidual es importante porque nos permite relacionar el bidual E'' con el propio espacio E, utilizando la proyección canónica, denotada como J:

$$J : E \to E''$$

donde $J(x) \in E''$ es definida como

$$< J(x), f >= f(x)$$

Una propiedad importante del operador J es

$$\|J(x)\| = \|x\|$$

Esto es, J es una isometría, lo que significa que la proyección canónica es siempre inyectiva. No es verdad que J sea sobreyectiva en general, esto nos permite introducir la siguiente definición.

Definición 1.5.1 *Un espacio E es llamado reflexivo si la proyección canónica es sobreyectiva.*

Lema 1.5.1 *(Representación de Riesz). Sea H un espacio de Hilbert, para cada forma lineal y continua $T : H \to \mathbb{C}$, existe un único vector $v \in H$ tal que $T(u) = (u, v)$ para todo $u \in H$ y $\|T\| = \|v\|$*

DEMOSTRACIÓN.-

Caso (1): Si $T = 0$

Consideramos $v = 0$

Caso (2): Si $T \neq 0$

Denotamos $\ker T = Nu\,(T) = \{u \in H, T\,(u) = 0\} = N$ es un subespacio vectorial H. En este caso $N \subsetneq H$, luego existe v_0 perpendicular a N. Consideramos los vectores $T\,(u)\,v_0 - T\,(v_0)\,u$, donde $u \in H$. Tenemos que estos vectores pertenecen a N, para todo $u \in H$.

Luego

$$\langle T\,(u)\,v_0 - T\,(v_0)\,u, v_0\rangle = 0, \forall u \in H$$

Esto implica,

$$T\,(u) = \left\langle u, \frac{\overline{T\,(v_0)}}{\langle v_0, v_0\rangle} v_0 \right\rangle$$

Mostraremos ahora la unicidad.

Sean $v, \omega \in H$ tales que

$$T\,(u) = \langle u, v\rangle = \langle u, \omega\rangle\,, \forall u \in H.$$

$$(u, v - w) = 0, \quad \forall u \in H$$

Hacemos $u = v - \omega$, resulta que $\|v - \omega\|^2 = 0 \Longrightarrow v = \omega$

Por último vamos a verificar que $\|T\| = \|v\|$

En efecto

$$|T\,(u)| = |\langle u, \omega\rangle| \leq \|u\|\,\|v\| \Longrightarrow \|T\| \leq \|v\|$$

Por otro lado, hacemos $u = v$, tenemos $T\,(v) = \|v\|^2 \Longrightarrow \|v\| \leq \|T.\|$

∎

Definición 1.5.2 *Se denomina forma sesquilineal sobre un espacio E, a una aplicación*

$$\begin{array}{rccc} a: & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (u, v) & \longmapsto & a\,(u, v) \end{array}$$

si satisface las siguientes condiciones

i). $a\,(u + v, \omega) = a\,(u, \omega) + a\,(v, \omega)$

ii). $a\,(\lambda u, v) = \lambda a\,(u, v)$

iii). $a\,(u, v + \omega) = a\,(u, v) + a\,(u, \omega)$

iv). $a\,(u, \lambda\omega) = \bar{\lambda} a\,(u, v)$

Si $K = C$ la forma sesquilineal a, se llama forma bilineal.

Definición 1.5.3 *Una forma sesquilineal $a : E \times E \to \mathbb{R}$ es coerciva si $\exists\ C > 0$ talque*

$$a(u,u) \geq C\|u\|^2, \forall u \in E$$

Lema 1.5.1 *(Lax-Milgram). Sea $a : E \times E \to \mathbb{R}$ una forma bilineal, simétrica y coerciva, entonces*

$$\forall F \in E', \exists! u \in E \quad / \quad a(u,\omega) = \langle F, \omega \rangle_{E' \times E}, \forall \omega \in E$$

DEMOSTRACIÓN.- Ver [15] en las referencias bibliográficas. ∎

1.6. Operadores Lineales

En esta sección presentaremos resultados que usaremos para el manejo de los operadores acotados y no acotados, y denotaremos como V a los espacios de Banach.

Definición 1.6.1 *Sean V y W dos espacios de Banach. Diremos que A es un operador lineal si*

$$A : D(A) \subset V \to W$$

verifica

$$A(\alpha x + \beta V) = \alpha A(x) + \beta A(v)$$

La definicion anterior es para considerar operadores acotados y no acotados.

Un operador sera no acotado si el dominio del operadpr es diferente de V. En cambio consideraremos los operadores limitados cuando el $D(A)$ sea igual a V.

Diremos que A es acotado, si$D(A) = V$ y si existe una constante $C \geq 0$ talque,

$$\|Au\| \leq C\|u\|, \forall u \in A$$

A continuación daremos algunas notaciones y definiciones

- Núcleo de $A = N(A) = \{v \in D(A) / Av = 0\} \subset V$
- Imagen de $A = R(A) = \bigcup\limits_{v \in D(A)} Av \subset W$

- Definimos y denotamos el gráfico de A como

  $G(A) = \{(v, Av), v \in V\} \subset V \times W$.

Definición 1.6.2 *Se dice que un operador $A : D(A) \subset V \to V$ es cerrado si para toda sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ converge a $u \in V$ talque $Au_n \to v \in V$, entonces $v \in D(A)$ y $Au = v$.*

Teorema 1.6.3 *El operador lineal $A : V \to W$ es continuo si, y solo si, A es acotado.*

Demostración.- Como A es continuo en V, entonces A es continuo en 0. Consideremos $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ talque

$$\|x\| < \delta$$

implica que

$$\|Ax\| < 1$$

Si $u \in V$, $u \neq 0$ tomemos $x = \dfrac{\delta u}{2\|u\|}$, entonces

$$\|x\| = \left\| \frac{\delta u}{2\|u\|} \right\| = \frac{\delta}{2\|u\|}\|u\| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

Luego

$$\begin{aligned} \|Ax\| &< 1 \\ \left\| A\left(\frac{\delta u}{2\|u\|}\right) \right\| &< 1 \\ \frac{\delta}{2\|u\|}\|Au\| &< 1 \end{aligned}$$

entonces

$$\|Au\| < \frac{2}{\delta}\|u\|, \quad \forall u \in V,\, u \neq 0$$

Si $u = 0$, tenemos $\|Au\| = 0 \leq 0 = \|u\|$, entonces

$$\|Au\| \leq C\|u\|, \forall u \in V.$$

Por lo tanto, A es un operador acotado. ∎

La recíproca de esta proposición también es verdadera, es decir, si un operador es acotado, entonces es continuo.

En efecto.

Supongamos que A es acotado, por la linealidad del operador, bastaría demostrar que A es continuo en $u = 0$.

Como A es un operador acotado, entonces existe $M > 0$ tal que

$$\|Au\| \leq M \|u\|, \forall u \in V.$$

Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos u talque

$$\|u\| < \frac{\varepsilon}{M}$$

entonces

$$\|Au\| \leq M \|u\| < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Luego, para $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \frac{\varepsilon}{M} > 0$ talque

$$\|u\| < \delta \Rightarrow \|Au\| < \varepsilon.$$

Por tanto

$$A \text{ es un operador continuo.}$$

Teorema 1.6.4 *Todo operador lineal en dimensión finita es acotado.*

Demostración.- Ver [5] en las referencias bibliográficas. ∎

Observación 1.6.5 *En dimensión infinita los operadores lineales no son necesariamente acotados.*

Veamos un ejemplo,

Sea $A = \dfrac{d^2}{dx^2}$ es lineal, pero no es limitado en $X = L^2(\mathbb{R}^+)$. En efecto, consideremos la siguiente sucesión

$$f_m(x) = \sqrt{m} e^{-mx}$$

$$\|f_m(x)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} = \int_0^\infty \left(\sqrt{m} e^{-mx}\right)^2 dx = \int_0^\infty m\, e^{-2mx} dx = -\frac{1}{2} e^{-2mx}\Big|_0^\infty = \frac{1}{2} < \infty$$

Lo que significa que la sucesión (f_m) es acotada en L^2 Por otro lado

$$\frac{d}{dx} f_m(x) = -m\sqrt{m}e^{-mx}$$
$$\frac{d^2}{dx^2} f_m(x) = m^2\sqrt{m}e^{-mx}$$

luego

$$\begin{aligned}\|Af_m(x)\|^2 &= \int_0^\infty \left[m^2\sqrt{m}e^{-mx}\right]^2 dx = \int_0^\infty m^5 e^{-2mx} dx \\ &= \frac{m^5}{-2m} e^{-2mx}\Big|_0^\infty = \frac{1}{2} m^4\end{aligned}$$

Cuando $m \to \infty$, entonces $\|Af_m\| \to \infty$.

Por lo tanto, A es un operador lineal no limitado en dimensión infinita.

Teorema 1.6.6 *Sean U y V espacios de Banach. Si $A : U \to V$ es un operador lineal acotado e inversible , entonces A^{-1} es acotado.*

DEMOSTRACIÓN.- Ver [15] en las referencias bibliográficas. ∎

Teorema 1.6.7 *Sean X e Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal, las siguientes proposiciones son equivalentes,*

(i) T es continuo en cero

(ii) T es continuo en X.

(iii) T es acotado.

(iv) Si $\{x_n\} \subset X$ es cualquier sucesión talque $x_n \to 0$, entonces $Tx_n \to 0$.

DEMOSTRACIÓN.- Ver [5] en las referencias bibliográficas. ∎

Observación 1.6.8 *Sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ y supongamos que T es inyectiva. Entonces, existe su operador inverso $T^{-1} : R(T) \to X$ y es lineal.*

Lema 1.6.1 *Sean X e Y espacios normados y $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Las siguientes propiedades son equivalentes,* (*i*) *Existe un número* $K > 0$ *talque*

$$\|Tx\| \geq K \|x\|, \forall x \in X \qquad (2)$$

(*ii*) T *es inyectiva y* $T^{-1} : R(T) \to X$ *es acotado.*

(*iii*) *No existe sucesión* $\{x_n\} \subset X$ *talque* $\|x_n\| = 1$, *y* $\forall n \in \mathbb{N}$ *y* $Tx_n \to 0$

Demostración.-

$i) \to ii)$:

Dado $y \in R(T)$, sea $x = T^{-1}y$. Por (2) se cumple $K \|T^{-1}y\| \leq \|y\|$

esto implica que $\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{K}$. Luego, $T^{-1} : R(T) \to X$ es acotado.

$ii) \to iii)$:

Sea $\{x_n\} \subset X$ talque $Tx_n \to 0$. De (2) se sigue entonces que $x_n \to 0$

$iii) \to i)$:

Supongamos que no se cumple $i)$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $K = \frac{1}{n}$; entonces existe $\omega_n \in X$ talque $n \|T\omega_n\| < \|\omega_n\|$. Tomemos $x_n = \dfrac{\omega_n}{\|\omega_n\|}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Entonces $\|x_n\| = 1$ y $\|Tx_n\| = \dfrac{\|T\omega_n\|}{\|\omega_n\|} \leq \dfrac{1}{n}$.

y esto contradice $iii)$. ∎

Teorema 1.6.9 *Sean* X *e* Y *espacios de Banach. Si* $T : X \to Y$ *es un operador lineal, acotado e inversible, entonces* $\|T^{-1}\|^{-1}$ *es el mayor número* $c > 0$ *talque se cumple*

$$c \|x\| \leq \|Tx\| ; \forall x \in X$$

Demostración.- Ver [5] en las referencias bibliográficas. ∎

Lema 1.6.2 *Sea* $A : X \to X$ *un operador lineal y continuo con inversa continua. Sea* $T \in \mathcal{L}(X)$ *talque*

$$\|T\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

Entonces $T + A$ *es lineal, continuo e inversible.*

Demostración.- Ver [10] en las referencias bibliográficas. ∎

Diremos que un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ es un isomorfismo, si $\mathrm{N}(T) = \{0\}$ (T *es inyectiva*) y $R(T) = Y$ (T es sobre.) El próximo resultado constituye uno de los principios del análisis funcional.

Teorema 1.6.10 *(Teorema del operador inverso de Banach). Sean X e Y espacios de Banach y $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Si T es un isomorfismo, entonces su operador inverso $T^{-1} : Y \to X$ es continuo.*

Si X e Y son espacios de Banach. A un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ que sea inyectivo y tenga rango cerrado, le llamaremos encaje.

Corolario 1.6.1 *Las propiedades $i), ii)$ y $iii)$ del lema son equivalentes con que $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ sea un encaje.*

Demostración.- Supongamos que T es un encaje. Siendo $R(T)$ cerrado y Y un espacio de Banach, se sigue que $R(T)$ es un espacio de Banach. Lo cual permite aplicar el teorema del operador inverso de Banach a $T : X \to R(T)$ para concluir que $T^{-1}; R(T) \to X$ es continuo. Esto prueba $ii)$ del lema. ∎

Supongamos ahora que T es inyectiva y $T^{-1} : R(T) \to X$ es continuo. Para probar que $R(T)$ es cerrado, supongamos que $y \in Y$ y $\{x_n\} \subset X$ es una suseción tal que $Tx_n \to y$. Esto implica que $\{Tx_n\} \subset R(T)$ es una sucesión de Cauchy. Puesto que un operador lineal acotado preserva sucesiones de Cauchy y $x_n = T^{-1}(T(x_n))$, se sigue que $\{x_n\} \subset X$ es de Cauchy. Luego, existe $x \in X$ talque $x_n \to x$. Por lo tanto, $y = \lim_{n \to \infty} Tx_n = Tx \in R(T)$.

Capítulo 2

Semigrupos

En este capítulo se presentarán resultados que serán de utilidad para demostrar la existencia y unicidad del problema de estabilidad de materiales parcialmente viscosos en estudio, por el método de la teoría de semigrupos asociado al sistema planteado. En este capítulo E denotará un espacio de Banach.

2.1. Semigrupos

Definición 2.1.1 *Sea $\mathcal{L}(E)$ un álgebra de operadores lineales acotados de E. Decimos que $S : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(E)$ es un semigrupo de operadores lineales acotados de E si :*

(i) $S(0) = I$ *, donde I es el operador identidad de E*

(ii) $S(s) \circ S(t) = S(s+t) \quad \forall t; s \in \mathbb{R}^+$.

Decimos que el semigrupo S es de clase C_0 si además cumple,

(iii) $\lim\limits_{t\to 0^+} S(t)\,x = x \; ; \forall x \in E$

Esto es, el semigrupo es continuo en $t = 0$. Usando esto verificamos que el semigrupo debe ser continuo en toda la semirrecta $\mathbb{R}^+$.

En efecto

Sea $t_0 \in \mathbb{R}^+; x \in E$

$$\lim_{h\to 0^+} S(t_0+h)\,x = \lim_{h\to 0^+} S(t_0)\,S(h)\,x = S(t_0) \lim_{h\to 0^+} S(h)\,x = S(t_0)\,x$$

Es decir

$$t \longmapsto S(t)\,\omega \in \mathbb{C}\left([0;+\infty\rangle\,,E\right)$$

Definición 2.1.2 *Sea un semigrupo $S(t)$ definido sobre el espacio de fase E. El generador infinitesimal de este operador es dado por*

$$\begin{aligned} Ax &:= \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)\,x - x}{t} = \frac{d}{dt}S(t)x|_{t=0}, \qquad \forall x \in D(A) \\ D(A) &= \left\{ x \in E / \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)\,x - x}{t}, \quad \textit{existe en } E \right\} \end{aligned}$$

donde A define el generador infinitesimal del semigrupo $S(t)$. De la definición anterior se puede reescribir el dominio del operador como

$$D(A) = \{x \in E \ \ / \ \ Ax \in E\}$$

algunas veces se denotará a $S(t)$ por e^{At}.

En resumen, dado un semigrupo es simple encontrar su generador, es suficiente evaluar el límite de la definición de generador infinitesimal. El problema inverso es más complicado y se resuelve usando el teorema de Hille – Yosida, que se estudiará más adelante.

Definición 2.1.3 *Un semigrupo $S(t)$ de operadores lineales es acotado, si*

(i) $\|S(t)\| \leq M, \forall t > 0$

Si $M = 1$, decimos que $S(t)$ es un semigrupo de contracciones.

Teorema 2.1.4 *Un semigrupo e^{At} es uniformemente continuo si, y solo si, A es acotado.*

DEMOSTRACIÓN.- Ver [10] en las referencias bibliográficas. ∎

Teorema 2.1.5 *Sea A el generador infinitesimal de un semigrupo de operadores entonces A conmuta con S, esto es, si $\omega \in D(A)$ entonces*

$$S(t)\,\omega \in D(A), \quad S(t)\,A\omega = A\ S(t)\,\omega, \forall t \in \mathbb{R}^{+}.$$

DEMOSTRACIÓN.- Ver [10] en las referencias bibliográficas. ∎

Definición 2.1.6 *Sea H un espacio de Hilbert. Un operador lineal $A : H \to H$ es disipativo si*

$$Re\,(A\omega, \omega) \leq 0, \quad \forall \omega \in D(A).$$

Teorema 2.1.7 *Si H es un espacio de Hilbert y $A : H \to H$ operador disipativo; entonces*

$$\|(\lambda I - A)\,x\| \geq \lambda\,\|x\|, \quad \forall \lambda > 0, \forall x \in D(A).$$

DEMOSTRACIÓN.- Ver [10] en las referencias bibliográficas. ∎

2.2. Teorema de Lummer Phillips

Antes de enunciar el teorema de Lummer Phillips, consideremos las siguientes definiciones.

Definición 2.2.1 *Sea X un espacio de Hilbert y $T : D(T) \subset X \to X$ un operador lineal; no necesariamente acotado en X, el conjunto resolvente $\rho(T)$ de T se define como*

$$\rho(T) := \left\{\lambda \in \mathbb{C} \ /\ (\lambda I - T) \text{ es invertible y } (\lambda I - T)^{-1} \text{ es un operador acotado en } X\right\}$$

El operador lineal acotado $R(\lambda; T) := (\lambda I - T)^{-1}$ con $\lambda \in \rho(T)$, se llama Resolvente de T.

Definimos también

$$\sigma(T) = C \setminus \rho(T) \text{ se llama Espectro de } T.$$

Observación 2.2.2 *Todo operador T acotado o no, conmuta con su operador resolvente.*

DEMOSTRACIÓN.-

$$\begin{aligned}
T(\lambda I - T)^{-1} &= \lambda(\lambda I - T)^{-1} - (\lambda I - T)(\lambda I - T)^{-1} \\
&= \lambda(\lambda I - T)^{-1} I - (\lambda I - T)(\lambda I - T)^{-1} \\
&= \lambda I(\lambda I - T)^{-1} - (\lambda I - T)(\lambda I - T)^{-1} \\
&= (\lambda I - T)^{-1}\lambda I - (\lambda I - T)^{-1}(\lambda I - T) \\
&= (\lambda I - T)^{-1}(\lambda I - (\lambda I - T)) \\
&= (\lambda I - T)^{-1} T
\end{aligned}$$

∎

Teorema 2.2.3 *Sea X un espacio de Banach y $A : D(A) \subset X \to X$ un operador lineal, $D(A)$ un subespacio de X y $\mathcal{S}(t)$ el semigrupo generado por A. Entonces:*

(*a*) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \mathcal{S}(s)\, x ds = \mathcal{S}(t)\, x \;,\ \ \forall x \in X$

(*b*) $\int_0^t \mathcal{S}(s)\, x ds \in D(A) \;,\ \ \forall x \in D(A)$

(*c*) $\forall x \in D(A)$, *tenemos*

$$\mathcal{S}(t)\, x \in D(A) \quad y \quad A\mathcal{S}(t)\, x = \mathcal{S}(t)\, Ax = \frac{d}{dt}\mathcal{S}(t)\, x$$

(*d*) $\forall x \in D(A)$, *tenemos*

$$\mathcal{S}(t)\, x - \mathcal{S}(s)\, x = \int_s^t A\mathcal{S}(h)\, x dh = \int_s^t \mathcal{S}(h)\, Ax dh$$

(*e*) $\forall x \in X$, *tenemos*

$$\int_0^t \mathcal{S}(h)\, x dh \in D(A) \quad y \quad \mathcal{S}(t)\, x - x = A\int_0^t \mathcal{S}(h)\, x dh$$

DEMOSTRACIÓN.- Ver [10] en las referencias bibliográficas. ∎

Teorema 2.2.4 *Sea H un espacio de Hilbert y A un generador infinitesimal del semigrupo $\mathcal{S}(t) = e^{At}$. Entonces $\mathcal{S}(t)$ es de contracciones si, y solo si A es disipativo.*

Demostración.-

$(\Rightarrow)$

Supongamos que $\mathcal{S}(t)$ es un semigrupo de contracciones, entonces $\|\mathcal{S}(t)\| \leq 1$.

$$(\mathcal{S}(t)\,w, w) \leq \|(\mathcal{S}(t)\,w, w)\| \leq \|\mathcal{S}(t)\|\,\|w\|^2 \leq \|w\|^2 .$$

Es decir

$$(\mathcal{S}(t)\,w, w) - \|w\|^2 \leq 0$$

Además

$$\begin{aligned}(\mathcal{S}(t)\,w - w, w)_H &= (\mathcal{S}(t)\,w, w)_H - (w, w)_H \\ &= (\mathcal{S}(t)\,w, w)_H - \|w\|_H^2 \leq 0\end{aligned}$$

$$(\mathcal{S}(t)\,w - w, w)_H \leq 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\left(\frac{\mathcal{S}(t)\,w - w}{t}, w\right)_H &\leq 0 \\ (Aw, w) &\leq 0\end{aligned}$$

Por lo tanto A es disipativo.

$(\Leftarrow)$

Sea $U = \mathcal{S}(t)\,w$; $w \in D(A)$

$$U_t = \frac{d}{dt}\mathcal{S}(t)\,w$$

Por el teorema 2.2.3, tenemos

$$U_t = A\mathcal{S}(t)\,w, \quad U(0) = w$$

Entonces

$$\begin{cases} U_t = AU \\ U(0) = w \end{cases}$$

Pero $(U_t, U) = (AU, U)$.

Además

$$\frac{d}{dt}\left(U\left(t\right),U\left(t\right)\right)=2\left(U_{t}\left(t\right),U\left(t\right)\right)$$
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\Vert U\left(t\right)\right\Vert ^{2}=\left(U_{t},U\right)=\left(AU,U\right)$$

Como A es disipativo, entonces $(AU,U)\leq 0$.

Entonces

$$\frac{d}{dt}\left\Vert U\left(t\right)\right\Vert ^{2}\leq 0$$
$$\int_{0}^{t}\frac{d}{ds}\left\Vert U\left(s\right)\right\Vert ^{2}ds=\left\Vert U\left(t\right)\right\Vert ^{2}-\left\Vert U\left(0\right)\right\Vert ^{2}\leq 0$$

$$\left\Vert U\left(t\right)\right\Vert ^{2}\leq\left\Vert U\left(0\right)\right\Vert ^{2}$$

$$\left\Vert \mathcal{S}\left(t\right)w\right\Vert \leq\left\Vert w\right\Vert$$

$$\sup_{\left\Vert w\right\Vert =1}\left\Vert \mathcal{S}\left(t\right)w\right\Vert \leq\sup_{\left\Vert w\right\Vert =1}\left\Vert w\right\Vert \ ,\ \ \forall w\in D\left(A\right)$$

$$\left\Vert \mathcal{S}\left(t\right)\right\Vert _{\mathcal{L}(H)}\leq 1.$$

Luego $\mathcal{S}\left(t\right)$ es de contracciones. ∎

Teorema 2.2.5 *Sea A un generador infinitesimal del semigrupo $\mathcal{S}\left(t\right)$ de clase C_0. Entonces A es cerrado y $\overline{D\left(A\right)}=X$.*

DEMOSTRACIÓN.- Ver [10] en las referencias bibliográficas. ∎

Observación 2.2.6 *Un operador A es generador infinitesimal de solamente un semigrupo.*

DEMOSTRACIÓN.-

Supongamos A es generador infinitesimal de $\mathcal{S}_1\left(t\right)$ y $\mathcal{S}_2\left(t\right)$ semigrupos ambos de clase C_0. Definimos para todo $x\in D(A)$:

$\phi(s)=S_1(t-s)S_2(s)x \ \ para \ \ s<t$

derivando,

$$\frac{d\phi(s)}{ds}=-S_1(t-s)AS_2(s)x+S_1(t-s)AS_2(s)x=0$$

Esto es, $\phi(s)$ es constante $\forall s>0$ luego $\phi(t)=\phi(0)$, entonces $S_2(s)x=S_1(t)x$, en $D(A)$.

Por la densidad $\overline{D\left(A\right)}=X$, concluimos:

$S_2=S_1$ en X. ∎

Lema 2.2.1 *En las condiciones del teorema Hille-Yosida se cumple lo siguiente,*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda; A)\, w = w, \qquad \forall w \in X$$

DEMOSTRACIÓN.- Sea $w \in D(A)$ y $R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$

$$(\lambda I - A)\, R(\lambda; A) = I$$

Entonces

$$\begin{aligned} R(\lambda; A)\, Aw &= \lambda R(\lambda; A)\, w - w \\ \|\lambda R(\lambda; A)\, w - w\| &= \|R(\lambda; A)\, Aw\| \\ &\leq \|\ R(\lambda; A)\|\, \|Aw\| \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\, \|Aw\| \end{aligned}$$

Por la cerradura de A, entonces existe $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \|Aw\|$.
Tomando límite

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|\lambda R(\lambda; A)\, w - w\| = 0$$

∎

Observación 2.2.7 *Sea $A_\lambda := \lambda R(\lambda; A)\, A$, las llamadas aproximaciones de Yosida; (A_λ) es una sucesión de operadores continuos y además $A_\lambda \to A$.*

$$\begin{aligned} A_\lambda &= \lambda R(\lambda, A)\, A \\ &= \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I \end{aligned}$$

como $R(\lambda, A)$ es continuo, entonces A_λ es continuo.

Teorema 2.2.8 *(Hille- Yosida) Sea X un espacio de Hilbert y A un operador lineal no limitado es generador infinitesimal de un semigrupo C_0 de contracciones, si, y solo si*

(i) A es denso en X y A cerrado.

(ii) El conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contiene a $\mathbb{R}^+$ y para todo $\lambda > 0$, se cumple

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

Demostración.- Ver [10] Teorema 2.7.2, página 63. ∎

Además

$$\|A_\lambda w - Aw\| = \|\lambda RAw - Aw\|$$

Por el lema 2.2.1, tenemos

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda w = Aw, \quad \forall w \in D(A)$$

Por hipótesis $\overline{D(A)} = X$, entonces

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda w = Aw, \quad \forall w \in X$$

luego, existe una sucesión de operadores continuos A_λ que aproximan a A no continuo.

Teorema 2.2.9 *(Teorema de Lummer Phillips) Sea X un espacio de Banach o Hilbert y A un operador lineal con $\overline{D(A)} = X$. Entonces,*

(i) Si A es disipativo y existe un $\lambda_0 > 0$ tal que $\operatorname{Im}(\lambda_0 I - A) = X$, entonces A es generador infinitesimal de un semigrupo C_0 de contracciones.

(ii) Si A es el generador infinitesimal de un semigrupo C_0 de contracciones sobre X, entonces $\operatorname{Im}(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$ y A disipativo.

Demostración.- Sea $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^+ \ / \ \operatorname{Im}(\lambda I - A) = X\}$ probaremos que Λ es abierto y cerrado.

En efecto

- Λ es un conjunto abierto

  Sea $\lambda \in \Lambda$, como A es disipativo, entonces $(\lambda I - A)$ es inyectiva pues,

  $$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\|, \ A \text{ es disipativo}$$

  $x = 0$, luego $(\lambda I - A)$ es inyectiva.

  Por definición de Λ, $(\lambda I - A)$ es sobreyectiva.

  Luego

  $$(\lambda I - A) \ \text{ es biyección.}$$

Entonces

$$(\lambda I - A)^{-1} \text{ es lineal y continuo}$$

pues todo operador disipativo es cerrado, entonces A es cerrado.

Pero

$$\rho(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \;/\; (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\right\}$$

Como $\Lambda \subset \rho(A)$, $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(\lambda) \subset \rho(A)$

entonces $B_\varepsilon(\lambda) \cap \mathbb{R}^+ \subset \Lambda$.

Luego Λ es abierto relativo en $\mathbb{R}^+$.

- Λ es un conjunto cerrado.

  Sea λ un punto de acumulación de Λ, entonces $\exists \lambda_u \in \Lambda / \lambda_u \to \lambda$.
  Mostraremos que $\lambda \in \Lambda$. Sea $y \in X$, entonces $\exists x_u \in D(A)$ tal que

$$\lambda_u x_u - A x_u = y \tag{$*$}$$

  Como A es disipativo:

$$\|y\| = \|\lambda_u x_u - A x_u\| \geq \lambda_u \|x_u\|$$

  entonces

$$\|x_u\| \leq \frac{1}{\lambda_u} \|y\| \leq C$$

- Veamos que x_u es de Cauchy.

  De $(*)$

$$\lambda_u x_u - A x_u = y \;, \;\; \forall u$$
$$\lambda_\nu x_\nu - A x_\nu = y$$

  Entonces

$$\lambda_u x_u - A x_u = \lambda_\nu x_\nu - A x_\nu = y$$
$$\lambda_u x_u = A x_u + \lambda_\nu x_\nu - A x_\nu$$

Como A es disipativo:

$$\begin{aligned}
\lambda \left\| x_\nu - x_u \right\| &\leq \left\| \lambda_u \left(x_\nu - x_u \right) - A \left(x_\nu - x_u \right) \right\| \\
&= \left\| \lambda_u x_\nu - \lambda_u x_u - A x_\nu + A x_u \right\| \\
&= \left\| \lambda_u x_\nu - A x_u - \lambda_\nu x_\nu + A x_\nu - A x_\nu + A x_u \right\| \\
&= \left\| x_\nu \right\| \left| \lambda_u - \lambda_\nu \right| \\
&= C \left| \lambda_u - \lambda_\nu \right|
\end{aligned}$$

Como λ_u es convergente, entonces (λ_u) es de Cauchy y también λ_u es limitado.

Entonces

$$\left\| x_\nu - x_u \right\| \to 0$$

Por lo tanto (x_u) es de Cauchy.

- Veamos que $\lambda x - Ax = y$

Tenemos $\lambda_u \to \lambda$ cuando $u \to \infty$, $x_\nu \to x$, para algún x.

Además

$$\lim_{u\to\infty} Ax_u = \lim_{u\to\infty} \left(\lambda_u x_u - y \right) = \lambda x - y$$

Entonces

$$\lambda x - y = z, \text{ donde } z = \lim_{u\to\infty} Ax_u$$

Como A es cerrado, entonces $z = Ax$

$$\lambda x - y = Ax$$

esto es

$$\left(\lambda I - A \right) x = y$$

Pero $(\lambda I - A)$ es sobreyectiva, entonces $\lambda \in \Lambda$.

Entonces

$$\{\text{todos sus puntos de acumulación}\} \subset \Lambda$$

Λ es cerrado relativo a $\mathbb{R}^+$ i.e. $\Lambda \cap \mathbb{R}^+$ es cerrado.

Luego $\Lambda = \mathbb{R}^+$

Como A es disipativo, se cumple: $\|\lambda x - Ax\| \geq \lambda \|x\|$

Pero $y = (\lambda I - A) x$, entonces $x = (\lambda I - A)^{-1} y$.

Entonces

$$\|y\| \geq \lambda \left\|(\lambda I - A)^{-1} y\right\|.$$

Tomando $\sup\limits_{\|y\| \leq 1}$ tenemos:

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

Luego

$$R(\lambda, A) \in \mathcal{L}(X)$$

En las hipótesis de Hille-Yosida, se tiene que A es generador infinitesimal de un semigrupo de clase C_0 de contracciones.

∎

Teorema 2.2.10 *Sea X un espacio de Banach y A un operador lineal (no acotado), disipativo y con dominio denso en X. Si $0 \in \rho(A)$, entonces A es el generador infinitesimal de un semigrupo C_0 de contracciones .*

DEMOSTRACIÓN.- Ver [10] Teorema 2.12.3, página 88. ∎

El Problema de Cauchy

Sea X un espacio de Banach y sea A el generador infinitesimal de un semigrupo en X. Entonces el correspondiente semigrupo $S(t) = e^{At}$ es un semigrupo fuertemente continuo sobre el espacio de fase X, esto quiere decir que

$$\lim_{t \to 0^+} S(t)u_0 = u_0$$

Para $u_0 \in X$. Esto es, el semigrupo S es continuo en cero. Por las propiedades de semigrupos sabemos que si es continuo en cero, entonces la función

$$t \mapsto S(t)u_0$$

es continua en $\mathbb{R}$. Portanto, si definimos u como

$$u(t) = S(t)u_0$$

tendremos que u es una función continua. Esto es

$$u \in C(0, \infty;\ X)$$

Por otro lado, si tomamos $u_0 \in D(A)$, es simple verificar que

$$S(t)u_0 \in D(A).$$

Pues de la definición tenemos que

$$D\left(A\right) = \left\{ x \in X;\ \lim_{h\to 0^+} \frac{S\left(h\right)x - x}{h} \text{ existe en } X \right\}$$

y

$$Au_0 = \lim_{h\to 0^+} \frac{S\left(h\right)u_0 - u_0}{h}$$

Portanto como $u_0 \in D(A)$, entonces

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{S\left(h\right)u_0 - u_0}{h} \quad \text{existe en } X,$$

de donde sigue que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{S\left(t+h\right)u_0 - S(t)u_0}{h} = \lim_{h\to 0^+} S(t)\frac{\left[S\left(h\right)u_0 - u_0\right]}{h} = S(t)\lim_{h\to 0^+} \frac{\left[S\left(h\right)u_0 - u_0\right]}{h}$$

Portanto

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{S\left(t+h\right)u_0 - S(t)u_0}{h} = S(t)Au_0. \tag{2.1}$$

de la definición de derivada la identidad anterior implica que

$$\frac{d}{dt}S(t)u_0 = S(t)Au_0.$$

Como el semigrupo conmuta con su generador, concluimos que la relación anterior puede ser escrita como

$$\frac{d}{dt}S(t)u_0 = AS(t)u_0.$$

Como $u(t) = S(t)u_0$ verificamos que u satisface

$$(\mathrm{PC}_1)\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u\,(t) = Au\,(t) & ;\, t > 0 \\ \qquad u\,(0) = u_0 \end{cases}$$

De lo discutido anteriormente, concluimos que si $u_0 \in D(A)$ entonces $S(t)u_0$ también pertenece al $D(A)$, lo que quiere decir que la función es diferenciable, portanto podemos afirmar que

$$S(t)u_0 \in C^1(0, \infty; X).$$

Pues el límite converge en X. Finalmente cuando $u_0 \in D(A)$ tenemos que

$$S(t)u_0 \in C(0, \infty; D(A)).$$

Definición 2.2.11 *Diremos que el problema (PC_1) es autónomo, si A es un operador independiente de t.*

Definición 2.2.12 *Diremos que U es solución (clásica) de (PC_1) si U verifica*

$$U \in C\left([0, +\infty\rangle\, ; D\,(A)\right) \cap C^1\left([0, +\infty\rangle\, ; X\right)$$

y satisface (PC_1)

Así tenemos el siguiente resultado

Teorema 2.2.13 *Si $u_0 \in X$, entonces el problema de Cauchy (PC_1) posee una única solución debil, que es llamada de mild solution, que verifica*

$$u \in C(0, \infty; X).$$

y todavía se tiene que

$$\|u(t)\|_X = \|S(t)u_0\|_X \leq C\|u_0\|_X$$

Si $u_0 \in D(A)$, entonces el problema de Cauchy (PC_1) posee una única solución fuerte del problema que verifica

$$u \in C(0, \infty; D(A)) \cap \in C^1(0, \infty; X).$$

y todavía

$$\|u(t)\|_{D(A)} + \|u_t(t)\|_X \leq \|S(t)Au_0\|_X \leq C\|u_0\|_{D(A)}.$$

2.3. Estabilidad Exponencial

En esta sección estableceremos las condiciones necesarias y suficientes para que un semigrupo de clase C_0 sea exponencialmente estable.

Definición 2.3.1 *Sea A el generador infinitesimal de un semigrupo C_0, se dice que el semigrupo es exponencialmente estable si existe una constante α positiva y $M \geq 1$ tal que*

$$\left\| e^{At} \right\| \leq M e^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 0$$

Teorema 2.3.2 *(Pruess). Sea $S(t) = e^{At}$ un semigrupo C_0 de contracciones definido en un espacio de Hilbert. Entonces $S(t)$ es exponencialmente estable si, y solo si*

$$i\mathbb{R} \equiv \{i\beta;\ \beta \in \mathbb{R}\} \subseteq \rho(A)$$

$$y \qquad \overline{\lim_{|\beta|\to\infty}} \left\| (i\beta I - A)^{-1} \right\| < \infty$$

Demostración.- Ver [12], Teorema 1.3.2, página 4. ∎

2.4. Estabilidad Polinomial

Los primeros autores en demostrar la estabilidad polinonial de semigrupos C_0 de contracciones fueron Liu - Rao y J. Pruess, los que mostraron condiciones suficientes sobre el oprador resolvente para obtener decaimiento polinomial para el correspondiente semigrupo. Estos resultados se enuncian a seguir

Teorema 2.4.1 (Liu - Rao) *. Sea A generador infinitesimal de un semigrupo C_0 uniformemente acotado donde $i\mathbb{R} \subset \varrho(A)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y α real positivo. Supongamos que*

$$\frac{1}{\lambda^\alpha} \|(i\lambda I - A)^{-1}\| \leq C$$

Entonces para todo $k \in I\!N$, existe una constante C_k que satisface

$$\|T(t)w\| \leq C_k \left(\frac{\ln(t)}{t} \right)^{k/\alpha} \ln(t) \|w\|_{D(A^k)}.$$

Teorema 2.4.2 (Pruess) . *Sea A generador infinitesimal de un semigrupo C_0 uniformemente limitado donde $i\mathbb{R} \subset \varrho(A)$ y α real positivo. Entonces*

$$\|(i\lambda I - A)^{-1}A^{-\alpha}\| \leq C, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \forall\, \epsilon > 0,\, \exists\, C_\epsilon > 0 \quad \|T(t)A^{-\alpha-\epsilon}\| \leq \frac{C_\epsilon}{t}.$$

Recíprocamente,

$$\|T(t)A^{-\alpha}\| \leq \frac{C}{t} \quad \Rightarrow \quad \forall\, \epsilon > 0,\, \exists\, C_\epsilon > 0 \quad \|(\lambda I - A)^{-1}A^{-\alpha-\epsilon}\| \leq C_\epsilon, \quad \forall\, \mathrm{Re}\,\lambda \geq 0$$

Estos resultados tienen una deficiencia. En el teorema de Liu-Rao la presencia del ln en el numerador retarda el decaimiento polinomial. Ya que el resultado de Pruess introduce un $\epsilon > 0$ en los operadores de A, lo que también retarda el decaimiento polinomial. Estas deficiencias fueron superadas en el resultado reciente (2010) de Borichev-Tomilov, en el que, inclusive, los autores establecen una condición necesaria y suficiente para obtener decaimiento polinomial del correspondiente semigrupo.

Teorema 2.4.3 *(Borichev-Tomilov). Sea $S(t)$ un semigrupo C_0 de contracciones generado por A y definido sobre el espacio de fase X de Hilbert, tal que $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$ y α positivo. Entonces*

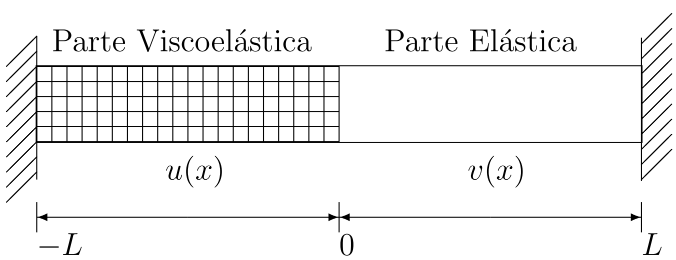
$$\|(i\lambda I - A)^{-1})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq C|\lambda|^{\alpha}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \|S(t)A^{-1}\|_{D(A)} \leq \frac{C}{t^{1/\alpha}}$$

Esto es, si el operador resolvente está limitado por un polinomio de grado α real positivo entonces el decaimiento polinomial del semigrupo es de la forma $t^{-1/\alpha}$.

Capítulo 3

Existencia de Soluciones

En este capítulo estudiaremos la existencia y unicidad del modelo para materiales parcialmente viscosos. Para esto usaremos el método de la teoría de semigrupos.



Las vigas compuestas de materiales diferentes, tienen como principal característica la discontinuidad de sus constantes de elasticidad. La densidad de la primera componente por ejemplo, no necesariamente es igual a la densidad de la segunda componente. El coeficiente de viscosidad está presente solamente en la primera componente, y es nula en la segunda. Así estos coeficientes que caracterizan la parte elástica de la cuerda son funciones discontínuas del tipo

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_1 & x \in]-L, 0[\\ \rho_2 & x \in]0, L[\end{cases} \quad , \quad \kappa(x) = \begin{cases} \kappa_1 & x \in]-L, 0[\\ \kappa_3 & x \in]0, L[\end{cases}$$

Donde ρ es la densidad de toda la viga, observe que en este caso la viga no es homogénea. si definimos por χ el coeficiente de viscosidad, entonces tendremos que

$$\chi(x) = \begin{cases} \kappa_2 & x \in]-L, 0[\\ 0 & x \in]0, L[\end{cases}$$

Estas son las características típicas de un problema de transmisión. Si denotamos por $U(x,t)$ la posición del punto x de la viga en el instante t, tendremos que la correspondiente ecuación de ondas puede ser escrita como

$$\rho V_{tt} - [\kappa(x) V_x]_x - [\chi(x) V_{xt}]_x = 0 \quad \text{en} \quad]-L, L[\times]0, \infty[$$

con las condiciones de contorno,

$$V(-L,t) = V(L,t) = 0, \quad t > 0.$$

y las condiciones iniciales,

$$V(x,0) = V_0(x), \quad V_t(x,0) = V_1(x), \quad x \in]-L, L[.$$

donde

$$V(x) = \begin{cases} u(x) & x \in]-L, 0[\\ v(x) & x \in]0, L[\end{cases} \tag{3.1}$$

Este problema no es simple para ser tratado de forma standar, pues se trata de una ecuación en derivadas parciales con coeficientes discontinuos. La forma adecuada de tratar este problema es a través de un sistema, donde los intervalos de definición son tomados de forma que los coeficientes sean continuos. Tratado de esta forma el correspondiente sistema pasa a ser llamado de problema de transmisión.

$$\rho_1 u_{tt} - k_1 u_{xx} - k_2 u_{xxt} = 0 \quad \text{en} \quad]-\mathrm{L}, 0[\times]0, \infty[\tag{3.2}$$

$$\rho_2 v_{tt} - k_3 v_{xx} = 0 \quad \text{en} \quad]0, \mathrm{L}[\times]0, +\infty[\tag{3.3}$$

donde las funciones $u = u(x,t)$ y $v = v(x,t)$ representan la fracción del campo en el gráfico. Además k_1, k_2 y k_3 son constantes positivas y ρ_1, ρ_2 son las funciones densidad.
Con las condiciones de frontera y de transmisión.

$$u(-L,t)=0 \quad , \quad v(L,t)=0 \quad , \quad t \geq 0$$
$$u(0,t)=v(0,t) \quad , \quad k_1 u_x(0,t)+k_2 u_{xt}(0,t)=k_3 v_x(0,t) \tag{3.4}$$

y datos iniciales

$$u(x,0)=u_0(x) \ , \ u_t(x,0)=u_1(x) \quad \text{en} \quad]-\mathrm{L},0[$$
$$v(x,0)=v_0(x) \ , \ v_t(x,0)=v_1(x) \quad \text{en} \quad]0,\mathrm{L}[\tag{3.5}$$

Note que nuestras incógnitas son las funciones u y v, la solución del problema está bien definida una vez que mostremos la existencia de estas funciones. Por este motivo, pasamos a identificar la solución V del sistema por un par (u,v), simplemente para simplificar las notaciones. En realidad la solución es dada por la función V definida en (3.1).

Formulación del Semigrupo

La teoría de semigrupos se desarrolla a partir de ecuaciones de primer orden en el tiempo. Para esto es necesario convertir el modelo anterior a un sistema de primer orden. Para tal consideremos la siguiente notación vectorial. Denotemos por

$$U=\begin{pmatrix} u \\ v \\ \eta \\ \mu \end{pmatrix}$$

donde $\eta=u_t$ y $\mu=v_t$.

Derivando encontramos que

$$\frac{d}{dt}U=\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \\ \eta_t \\ \mu_t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \eta \\ \mu \\ \eta_t \\ \mu_t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \eta \\ \mu \\ \frac{1}{\rho_1}\left(\kappa_1\, u_{xx}+\kappa_2\, \eta_{xx}\right) \\ \frac{\kappa_3}{\rho_2}\, v_{xx} \end{pmatrix}.$$

Definimos, por tanto, el operador $\mathcal{A}$ como

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} u \\ v \\ \eta \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta \\ \mu \\ \frac{1}{\rho_1}\left(\kappa_1\, u_{xx} + \kappa_2\, \eta_{xx}\right) \\ \dfrac{\kappa_3}{\rho_2}\, v_{xx} \end{pmatrix}$$

Así tenemos que el problema original puede ser reescrito como

$$\frac{dU}{dt} = \mathcal{A}U$$

Debemos inserir ahora, las condiciones de frontera. Esto lo hacemos introduciendo el espacio de fase , que lo denotaremos por $\mathcal{H}$.

Espacio de Fase

No existe un único espacio de fase, estos espacios son construídos a partir de un criterio, por ejemplo el de regularidad. El criterio que usaremos en este trabajo para definir el espacio de fase será escoger el mayor espacio donde la energía total del sistema esté bien definida. Para esto haremos un cálculo formal de la energía.

Proposición 3.0.4 *La energía del sistema (3.2)-(3.5)* $E(t) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *está dada en el tiempo t y está definida como*

$$E(t) = \frac{1}{2}\left[\rho_1 \int_{-\mathrm{L}}^{0} u_t^2 dx + \rho_2 \int_{0}^{\mathrm{L}} v_t^2 dx + k_1 \int_{-\mathrm{L}}^{0} u_x^2 dx + k_3 \int_{0}^{\mathrm{L}} v_x^2 dx\right]$$

Demostración.- Multiplicando formalmente la ecuación (3.2) por u_t e integrando sobre $[-\mathrm{L}, 0]$, obtenemos

$$\rho_1 \int_{-\mathrm{L}}^{0} u_{tt} u_t dx - k_1 \int_{-\mathrm{L}}^{0} u_{xx} u_t dx - k_2 \int_{-\mathrm{L}}^{0} u_{xxt} u_t dx = 0$$

Integrando por partes

$$\frac{1}{2}\rho_1 \frac{d}{dt}\int_{-\mathrm{L}}^{0} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2}k_1 \frac{d}{dt}\int_{-\mathrm{L}}^{0} |u_x|^2 dx + k_2 \int_{-\mathrm{L}}^{0} |u_{xt}|^2 dx - k_1 u_t(0,t) u_x(0,t)$$

$$+k_1 u_t(-\mathrm{L},t)u_x(-\mathrm{L},t)+k_2 u_{xt}(-\mathrm{L},t)u_t(-\mathrm{L},t)=0 \tag{3.6}$$

Usando (3.4) en (3.6), obtenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\rho_1\int_{-\mathrm{L}}^{0}|u_t|^2dx+\ k_1\int_{-\mathrm{L}}^{0}|u_x|^2dx\right]+k_2\int_{-\mathrm{L}}^{0}|u_{xt}|^2dx$$

$$-k_1 u_t(0,t)u_x(0,t)-k_2 u_{xt}(0,t)u_t(0,t)=0 \tag{3.7}$$

Multiplicando (3.3) por v_t e integrando sobre $[0,\mathrm{L}]$, obtenemos

$$\rho_2\int_0^{\mathrm{L}} v_{tt}v_t dx-k_3\int_0^{\mathrm{L}} v_{xx}v_t dx=0$$

Integrando por partes y usando (3.4), obtenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\rho_2\int_0^{\mathrm{L}}|v_t|^2dx+k_3\int_0^{\mathrm{L}}|v_x|^2dx\right]+k_3 v_x(0,t)v_t(0,t)=0 \tag{3.8}$$

Sumando (3.7) con (3.8) y usando (3.5), obtenemos

$$\frac{d}{dt}E(t)=-k_2\int_{-\mathrm{L}}^{0}|u_{xt}|^2dx \tag{3.9}$$

donde

$$E(t)=\frac{1}{2}\left[\rho_1\int_{-\mathrm{L}}^{0}|u_t|^2dx+\rho_2\int_0^{\mathrm{L}}|v_t|^2dx+k_1\int_{-\mathrm{L}}^{0}|u_x|^2dx+k_3\int_0^{\mathrm{L}}|v_x|^2dx\right] \tag{3.10}$$

∎

Observación 3.0.1 *Los cálculos en la Proposición 3.0.4, son apenas formales, dado que todavía no demostramos la existencia ni la regularidad de las soluciones, sirven solo para identificar la energía asociada al problema.*

Observación 3.0.2 *La derivada de la energía es negativa lo que prueba que el sistema es disipativo.*

Observación 3.0.5 *De la Proposición 3.0.4,concluimos que para que la energía esté bien definida, necesitamos que la solución verifique la siguiente regularidad.*

$$u\in H^1(-\mathrm{L},0),\qquad v\in H^1(0,\mathrm{L}),\qquad u_t\in L^2(-\mathrm{L},0)\qquad v_t\in L^2(0,\mathrm{L})$$

Lo que significa que el espacio de fase debe ser un subconjunto del producto cartesiano

$$H^1(-\mathrm{L},0)\times H^1(0,\mathrm{L})\times L^2(-\mathrm{L},0)\times L^2(0,\mathrm{L})$$

Para definir de forma adecuada el espacio de fase introducimos la siguiente notación.

$$\mathbb{H}^m = H^m(-L,\,0)\times H^m(0,\,L),\; m=1,\,2, \qquad \mathbb{L}^2 = L^2(-L,\,0)\times L^2(0,\,L).$$
$$\mathbb{H}^1_L = \left\{(u,v)\in\mathbb{H}^1;\;\; u(-L)=v(L)=0, \quad u(0)=v(0)\right\}.$$

De esta forma definimos el espacio de fase como

$$\mathcal{H} = \mathbb{H}^1_L\times\mathbb{L}^2.$$

Observe que en este espacio ya están incluídas las condiciones de frontera y las condiciones de transmisión del problema. Este espacio equipado con el producto interno

$$\begin{aligned}\langle(u_1,\,v_1,\,\eta_1,\,\mu_1),\,(u_2,\,v_2,\,\eta_2,\,\mu_2)\rangle_{\mathcal{H}} \;&=\; \kappa_1\int_{-L}^0 u_{1x}\,\overline{u}_{2x}\,dx+\kappa_3\int_0^L v_{1x}\,\overline{v}_{2x}\,dx\\ &\quad+\rho_1\int_{-L}^0 \eta_1\,\overline{\eta}_2\,dx+\rho_2\int_0^L \mu_1\,\overline{\mu}_2\,dx.\end{aligned}$$

es un espacio de Hilbert, donde la norma de $U=(u,\,v,\,\eta,\,\mu)$ está dada por

$$\|U\|^2=\rho_1\int_{-\mathrm{L}}^0\eta^2dx+\rho_2\int_0^{\mathrm{L}}\mu^2dx+k_1\int_{-\mathrm{L}}^0 u_x^2dx+k_3\int_0^{\mathrm{L}} v_x^2dx$$

Observe que la definición de norma usada anteriormente, es la misma que la usada para definir de la energía en la Proposición 3.0.4.

Una vez definido el espacio de fase, podemos definir el dominio del operador $\mathcal{A}$ de la siguiente forma. Recordemos que en términos generales

$$D(\mathcal{A}) = \{U\in\mathcal{H};\;\; \mathcal{A}U\in\mathcal{H}\}$$

Usando la definición de $\mathcal{A}$ tenemos

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{U\in\mathcal{H};\;(\eta,\,\mu)\in\mathbb{H}^1_L,\;\;(\kappa_1 u+\kappa_2\eta,v)\in\mathbb{H}^2,\quad \kappa_1u_x(0)+\kappa_2\eta_x(0)=\kappa_3v_x(0)\right\}$$

Observe que las condiciones de transmisión de primer orden fueron colocadas en el dominio del operador A. Portanto el problema de transmisión es equivalente a

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U = AU, \quad t > 0 \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

Probaremos a seguir que $\mathcal{A}$ es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones. Para esto usaremos el Teorema de Hille-Yosida. Recordemos que la ecuación espectral es dada por

$$\lambda U - AU = F$$

donde $F = (f, g, p, q) \in \mathcal{H}$ y $U = (u, v, \eta, \mu) \in D(A)$. En términos de sus componentes, tenemos

$$\lambda u - \eta = f \quad \text{en} \quad H^1(-\mathrm{L}, 0) \tag{3.11}$$

$$\lambda v - \mu = g \quad \text{en} \quad H^1(0, \mathrm{L}) \tag{3.12}$$

$$\lambda \eta - k_1 u_{xx} - k_2 \eta_{xx} = \rho_1 p \quad \text{en} \quad L^2(-\mathrm{L}, 0) \tag{3.13}$$

$$\lambda \mu - k_3 v_{xx} = \rho_2 q \quad \text{en} \quad L^2(0, \mathrm{L}) \tag{3.14}$$

con la condición de transmisión:

$$u(0) = v(0), \qquad k_1 u_x(0) + k_2 \eta_x(0) = k_3 v_x(0)$$

y la siguiente condición de frontera:

$$u(-L) = v(L) = 0.$$

Teorema 3.0.6 *El operador $\mathcal{A}$ definido anteriormente es un generador infinitesimal de un semigrupo C_0 de contracciones en $\mathcal{H}$.*

Demostración.- Por el teorema (2.3.2), basta verificar lo siguiente:

i) $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$.

ii) A es disipativo.

iii) $0 \in \rho(A)$.

i) El Dominio de A es denso en H:

Note que H^2 es denso en $H^1(a,b)$. En efecto, supongamos que exista un elemento $v \in H^1(a,b)$ tal que

$$(w,v)_{H^1} = 0, \quad \forall w \in H^2(a,b)$$

lo que implica,

$$\int_a^b w_x v_x + wv \; dx = 0, \quad \forall w \in H^2(a,b) \tag{3.15}$$

De donde, en particular tenemos

$$\int_b^a [-v_{xx} + v]w \; dx = 0, \quad \forall w \in C_0^\infty$$

Portanto, del Lema de Du Bois Reymond,

$$-v_{xx} + v = 0$$

Por otro lado, tomando $w \in H^2$ en (3.15) e integrando por partes obtenemos

$$w(b)v_x(b) - w(a)v_x(a) + \underbrace{\int_a^b [-v_{xx} + v]w \; dx}_{:=0} = 0, \quad \forall w \in H^2(a,b)$$

de donde

$$w(b)v_x(b) - w(a)v_x(a) = 0, \quad \forall w \in H^2(a,b).$$

Tomando $w = (x-b)$, en la identidad anterior, sigue que $v_x(a) = 0$.
Análogamente tomando $w = (x-a)$, en la identidad anterior, sigue que $v_x(b) = 0$. Portanto verificamos lo siguiente,

$$-v_{xx} + v = 0, \qquad v_x(a) = v_x(b) = 0.$$

De donde sigue que $v = 0$. Luego $H^2(a,b)$ es denso en $H^1(a,b)$.

Usando la densidad del espacio $H_L^1 \cap H^2$ es denso en H_L^1, podemos demostrar que el dominio $D(\mathcal{A})$ es denso en el espacio de fase $\mathcal{H}$. Portanto

$$\overline{D(A)} = X$$

ii) A es disipativo:

Basta probar,

$$Re(AU,U)_{\mathcal{H}} \leq 0, \quad \forall U \in D(A).$$

Sea $U=(u,v,\eta,\mu)^T \in D(\mathcal{A})$. Recordemos

$$\mathcal{A}U=(\eta,\mu,\frac{k_1}{\rho_1}u_{xx}+\frac{k_2}{\rho_1}\eta_{xx},\frac{k_3}{\rho_2}v_{xx})^T.$$

Entonces usando la definición de producto interno del espacio de fase, tenemos

$$(\mathcal{A}U,U)_{\mathcal{H}}=k_1\int_{-\mathrm{L}}^{0}\eta_x\overline{u}_x dx+k_3\int_0^{\mathrm{L}}\mu_x\overline{v}_x dx+\int_{-\mathrm{L}}^{0}(k_1u_{xx}+k_2\eta_{xx})\overline{\eta}dx+k_3\int_0^{\mathrm{L}}v_{xx}\overline{\mu}dx$$

Integrando por partes, usando (3.4) y tomando parte real, obtenemos

$$\mathrm{Re}\ (\mathcal{A}U,U)_{\mathcal{H}}=-k_2\int_{-\mathrm{L}}^{0}|\eta_x|^2 dx$$

Entonces

$$\mathrm{Re}\ (\mathcal{A}U,U)_{\mathcal{H}} \leq 0$$

Por lo tanto, $\mathcal{A}$ es disipativo.

iii) $0 \in \rho(A)$:

Para probar que el cero pertenece al resolvente de A, tenemos que probar que el operador lineal $-A$ es biyectivo y que su inversa es continua.

Tomemos $\lambda=0$ en (3.11)–(3.14), y $F=(f,g,p,q)\in\mathcal{H}$. Mostraremos que existe una única $U=(u,v,\eta,\mu) \in D(\mathcal{A})$ tal que $\mathcal{A}U=F$, esto es,

$$\eta=f \quad \text{en} \quad H^1(-\mathrm{L},0) \tag{3.16}$$

$$\mu=g \quad \text{en} \quad H^1(0,\mathrm{L}) \tag{3.17}$$

$$k_1u_{xx}+k_2\eta_{xx}=\rho_1 p \quad \text{en} \quad L^2(-\mathrm{L},0) \tag{3.18}$$

$$k_3v_{xx}=\rho_2 q \quad \text{en} \quad L^2(0,\mathrm{L}) \tag{3.19}$$

verificando

$$u(0)=v(0), \qquad k_1u_x(0)+k_2\eta_x(0)=k_3v_x(0)$$

$$u(-L)=0=v(L)=0.$$

Reemplazando (3.16) en (3.18) vemos que el sistema (3.16)–(3.19) posee una única solución si, y solo si existe una solución para el sistema

$$k_1 u_{xx} = -k_2 f_{xx} + \rho_1 F_3 \quad \text{en} \quad H^1(-\mathrm{L},0) \tag{3.20}$$

$$k_3 v_{xx} = \rho_2 q \quad \text{en} \quad L^2(0,\mathrm{L}) \tag{3.21}$$

$$u(0)=v(0), \qquad k_1 u_x(0) + k_2 u_{xt}(0) = k_3 v_x(0)$$

$$u(-L)=0=v(L)=0.$$

Por tanto para probar que existe una única solución para el sistema anterior, bastará probar que existe una única solución $(u,v) \in \mathbb{H}^1_L$ para el siguiente problema

$$\int_{-L}^{0} k_1 u_x \phi_x \, dx + \int_0^L k_3 v_x \psi_x \, dx$$
$$= \underbrace{k_2 \int_{-L}^{0} f_x \phi_x \, dx - \rho_1 \int_{-L}^{0} F_3 \phi \, dx - \rho_2 \int_0^L q\psi \, dx}_{:=T(\phi,\psi)} \quad \forall (\phi,\psi) \in \mathbb{H}^1_L$$

donde

$$\mathbb{H}^1_L = \left\{ (u,v) \in \mathbb{H}^1; \ \ u(-L) = v(L) = 0, \quad u(0) = v(0) \right\}.$$

Observación 3.0.7 *Esta formulación variacional es obtenida tomando un par* $(\phi,\psi) \in C_0^\infty(-L,0) \times C_0^\infty(0,L)$. *Multipliquemos la ecuación (3.22) por* ϕ *y la ecuación (3.22) por* ψ, *así obtenemos*

$$\int_{-L}^{0} k_1 u_{xx} \phi \, dx = -k_2 \int_{-L}^{0} f_{xx} \phi \, dx + \rho_1 \int_{-L}^{0} F_3 \phi \, dx,$$
$$\int_0^L k_3 v_{xx} \psi \, dx = \rho_2 \int_0^L q\psi \, dx$$

Integrando por partes y sumando las dos últimas expresiones obtenemos

$$\int_{-L}^{0} k_1 u_x \phi_x \, dx + \int_0^L k_3 v_x \psi_x \, dx$$
$$= \underbrace{k_2 \int_{-L}^{0} f_x \phi_x \, dx - \rho_1 \int_{-L}^{0} F_3 \phi \, dx - \rho_2 \int_0^L q\psi \, dx}_{:=T(\phi,\psi)}$$

Note que la bilineal

$$a((u,v);(\phi,\psi)) = \int_{-L}^{0} k_1 u_x \phi_x \, dx + \int_{0}^{L} k_3 v_x \psi_x \, dx$$

define un producto interno en $\mathbb{H}_L^1$, pues es simétrica, continua y coerciva. Por otro lado la función T es una función lineal y continua. En efecto,

$$\begin{aligned} |T(\phi,\psi)| &= \left| k_2 \int_{-L}^{0} f_x \phi_x \, dx - \rho_1 \int_{-L}^{0} F_3 \phi \, dx - \rho_2 \int_{0}^{L} q\psi \, dx \right| \\ &\leq k_2 \|f_x\| \|\phi_x\| + \rho_1 \|F_3\| \|\phi\| + \rho_2 \|q\| \|\psi\| \\ &\leq C \|(\phi,\psi)\|_{\mathbb{H}_L^1} \end{aligned}$$

donde $\;C = \rho_1 \|F_3\|_{L^2} + k_2 \|f_x\|_{L^2} + \rho_2 \|q\|_{L^2}$

Portanto T es un funcional lineal y continuo de $\mathbb{H}_L^1$ en $\mathbb{R}$. Por el teorema de la Representación de Riesz, existe un único elemento $\;(u,v) \in \mathbb{H}_L^1\;$ tal que

$$a((u,v),(\phi,\psi))_{\mathbb{H}_L^1} = T(\phi,\psi), \quad \forall (\phi,\psi) \in \mathbb{H}_L^1$$

Ahora verificaremos que el par (u,v) satisface la ecuación espectral.
Sustituyendo los valores

$$k_1 \int_{-\mathrm{L}}^{0} u_x \phi_x dx + k_3 \int_{0}^{\mathrm{L}} v_x \psi_x dx = \rho_1 \int_{-\mathrm{L}}^{0} p\phi dx - k_2 \int_{-\mathrm{L}}^{0} f_x \phi_x dx + \rho_2 \int_{0}^{\mathrm{L}} q\psi dx, \quad \forall (\phi,\psi) \in \mathbb{H}_L^1 \tag{3.22}$$

Note que

$$C_0^\infty(-\mathrm{L},0) \times C_0^\infty(-\mathrm{L},0) \subset \mathbb{H}_L^1$$

Podemos tomar $\;(\Phi,0) \in \mathbb{H}_L^1\;$ esto es, $\;\Phi \in C_0^\infty(-\mathrm{L},0)$. Así, de (3.22) tenemos

$$k_1 \int_{-\mathrm{L}}^{0} u_x \overline{\Phi}_x dx = \rho_1 \int_{-\mathrm{L}}^{0} p\overline{\Phi} dx - k_2 \int_{-\mathrm{L}}^{0} f_x \overline{\Phi}_x dx$$

Integrando por partes, tenemos

$$-k_1 \int_{-\mathrm{L}}^{0} u_{xx} \Phi dx = \rho_1 \int_{-\mathrm{L}}^{0} p\Phi dx + k_2 \int_{-\mathrm{L}}^{0} f_{xx} \Phi dx$$

entonces

$$\int_{-\mathrm{L}}^{0} \left[k_1 u_{xx} + \rho_1 p + k_2 f_{xx} \right] \Phi dx = 0, \quad \forall \Phi \in C_0^\infty(-\mathrm{L},0)$$

De donde obtenemos que u verifica

$$k_1 u_{xx} + \rho_1 p + k_2 f_{xx} = 0 \tag{3.23}$$

Podemos tomar $(0, \Psi) \in \mathbb{H}^1_L$ esto es, $\Psi \in C_0^\infty(-\mathrm{L}, 0)$

Así de (3.22) tenemos

$$\int_0^{\mathrm{L}} [-k_3 v_{xx} - \rho_2 q] \overline{\Psi} dx = 0, \quad \forall \Psi \in C_0^\infty(-\mathrm{L}, 0)$$

De donde obtenemos por el Lema de Du Bois Reymond, que v verifica

$$-k_3 v_{xx} = \rho_2 q \tag{3.24}$$

Integrando por (3.22), obtenemos

$$\begin{aligned} -\int_{-\mathrm{L}}^0 k_1 u_{xx} \phi dx - \int_0^{\mathrm{L}} k_3 v_{xx} \psi dx = \rho_1 \int_{-\mathrm{L}}^0 p\phi dx + \int_{-\mathrm{L}}^0 k_2 f_{xx} \psi dx + \\ +\rho_2 \int_0^{\mathrm{L}} q\psi dx - k_1 u_x(0)\phi(0) - k_2 f_x(0)\phi(0) + k_3 v_x(0)\psi(0) \end{aligned} \tag{3.25}$$

Reemplazando (3.23) y (3.24) en (3.25), obtenemos

$$-k_1 u_x(0)\phi(0) - k_2 f_x(0)\phi(0) + k_3 v_x(0)\psi(0) = 0$$

Para todo $(\phi, \psi) \in \mathbb{H}^1_L$, note que toda función $(\phi, \psi) \in \mathbb{H}^1_L$ verifica

$$\psi(0) = \phi(0).$$

Portanto se verifica

$$[-k_1 u_x(0) - k_2 f_x(0) + k_3 v_x(0)] \psi(0) = 0$$

Tomando $\phi = (x + L)$ y $\psi = -(x - L)$, verificamos $(\phi, \psi) \in \mathbb{H}^1_L$. Usando estas funciones obtenemos finalmente

$$-k_1 u_x(0) - k_2 f_x(0) + k_3 v_x(0) = 0$$

Lo que demuestra que el par ordenado (u, v) verifica las ecuaciones (3.16)–(3.19), junto con las condiciones de frontera y las condiciones de transmisión. ∎

Portanto, demostramos que A es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones. Lo que significa, de acuerdo con el Teorema 2.2.13, que existe una única solución del problema de Cauchy, que depende continuamente de los datos iniciales. Más precisamente tenemos el siguiente teorema,

Teorema 3.0.8 *Para cualquier $U_0 \in \mathcal{H}$ existe una única solución $U(t) = (u, v, u_t, v_t)$ de (3.1)-(3.4) débil del problema (mild solution) que satisface*

$$u \in C([0, \infty[; H^1(-\mathrm{L}, 0)) \cap C^1([0, \infty[; L^2(-\mathrm{L}, 0))$$

$$v \in C([0, \infty[; H^1(0, \mathrm{L})) \cap C^1([0, \infty[; L^2(0, \mathrm{L})).$$

Si $U_0 \in D(A)$, entonces existe una única solucion fuerte del sistema (3.1)-(3.4)

$$u \in C^1([0, \infty[; H^1(-\mathrm{L}, 0)) \cap C^2([0, \infty[; L^2(-\mathrm{L}, 0))$$

$$k_1 u + k_2 u_t \in C([0, \infty[; H^2(-\mathrm{L}, 0)).$$

$$v \in C([0, \infty[; H^2(0, L)) \cap C^1([0, \infty[; H^1(0, L)) \cap C^2([0, \infty[; L^2(0, L))$$

Demostración.- Esta es una consecuencia inmediata del Teorema 2.2.13.

En efecto, tenemos que si $U_0 \in \mathcal{H}$, entonces tenemos que la solución U del sistema verifica

$$U \in C(0, T; \mathcal{H})$$

Recordemos que $U = (u, v, \eta, \mu)$ y $\mathcal{H} = \mathbb{H}^1_L \times \mathbb{L}^2$. Donde

$$\mathbb{L}^2 = L^2(-L,\, 0) \times L^2(0,\, L), \quad \mathbb{H}^1_L = \left\{(u, v) \in \mathbb{H}^1;\;\; u(-L) = v(L) = 0, \quad u(0) = v(0)\right\}.$$

De donde sigue imediatamente la primera parte del Teorema.

Finalmente si $U_0 \in D(A)$, entonces tenemos que la solución U del sistema verifica

$$U \in C^1(0, T; \mathcal{H}) \cap C(0, T; D(A))$$

Nuevamente usando la definición de $D(A)$ sigue el Teorema.

Capítulo 4

Decaimiento Polinomial

En este capítulo, probaremos que el semigrupo que define la solución del problema de transmisión es polinomialmente estable. Para esto usaremos el resultado de Borichev y Tomilov, ver referencia, [16] que establecemos a seguir.

Teorema 4.0.9 *(Borichev-Tomilov). Sea $S(t)$ un semigrupo C_0 de contracciones generado por A y definido sobre el espacio de fase H de Hilbert, donde $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$ y α positivo. Entonces*

$$\|(i\lambda I - A)^{-1})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C|\lambda|^{\alpha}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \|S(t)A^{-1}\|_{D(A)} \leq \frac{C}{t^{1/\alpha}}$$

Demostración.- Ver referencia [16]. ∎

Este resultado nos dice que si el operador resolvente está limitado por um polinomio de grado α, entonces el semigrupo decae polinomialmente como $t^{-1/\alpha}$. Nuestro objetivo es mostrar esta desigualdad para el operador resolvente. Para esto estudiamos la ecuación resolvente siguiente.

La Ecuación Resolvente

Sea $\lambda \in \mathbb{R}, \quad F = (f, g, p, q) \in \mathcal{H}, \quad \exists U = (u, v, \eta, \mu) \in D(A)$ tal que

$$i\lambda U - AU = F \tag{4.1}$$

Note que encontrando la acotación

$$\|U\| \leq c|\lambda|^{\alpha}\|F\| \tag{4.2}$$

donde c es una constante positiva, inmediatamente sigue que el operador resolvente verifica la hipótesis del Teorema de Borichev y Tomylov.

En efecto, como $i\lambda\mathbb{R} \subset \rho(A)$, tendremos que la ecuación (4.1) es equivalente a

$$U = (i\lambda I - A)^{-1}F$$

Portanto la norma de u es igual a

$$\|U\| = \|(i\lambda I - A)^{-1}F\|$$

Usando (4.2) tenemos

$$\|(i\lambda I - A)^{-1}F\| = \|U\| \leq c|\lambda|^{\alpha}\|F\|$$

Portanto en la norma de los operadores tenemos

$$\|(i\lambda I - A)^{-1}\| \leq c|\lambda|^{\alpha}.$$

que el semigrupo debe decaer polinomialmente con una tasa de $t^{-1/\alpha}$.

De lo anterior discutido , concluimos que basta encontrar una estimativa para la solución U del problema. Portanto, escribiendo la ecuación resolvente en términos de sus componentes, tenemos

$$i\lambda u - \eta = f \quad \text{en} \quad H^1(-\mathrm{L}, 0) \tag{4.3}$$

$$i\lambda v - \mu = g \quad \text{en} \quad H^1(0, \mathrm{L}) \tag{4.4}$$

$$i\lambda\eta - k_1 u_{xx} - k_2\eta_{xx} = \rho_1 p \quad \text{en} \quad L^2(-\mathrm{L}, 0) \tag{4.5}$$

$$i\lambda\mu - k_3 v_{xx} = \rho_2 q \quad \text{en} \quad L^2(0, \mathrm{L}) \tag{4.6}$$

Sistema disipativo

Multiplicando por U la ecuación resolvente y tomando la parte real obtenemos

$$Re\langle (i\lambda I - A)U, U\rangle_H = -Re\langle AU, U\rangle_H = k_2 \int_{-L}^{0} |\eta_x|^2 dx = Re\langle F, U\rangle_H$$

Entonces

$$k_2 \int_{-\mathrm{L}}^{0} |\eta_x|^2 dx \leq \|F\|_H \|U\|_H \tag{4.7}$$

De (4.3) y (4.7), obtenemos

$$|\lambda|^2 \int_{-\mathrm{L}}^{0} |u_x|^2 dx \leq C\|U\|_H \|F\|_H + C\|F\|_H^2 \tag{4.8}$$

Teorema 4.0.10 *Con las notaciones anteriores tenemos que el semigrupo asociado al problema de transmisión decae polinomialmente como*

$$\| \ e^{At} U_0\|_H \leq \frac{C}{t^2} \|U_0\|_{D(A)}$$

DEMOSTRACIÓN.- Usando (4.5) y $L^2 \hookrightarrow H^{-1}$, tenemos

$$\|i\lambda\eta\|_{H^{-1}(-\mathrm{L},0)} \leq C\|\rho_1 p\|_{L^2(-\mathrm{L},0)} + \overline{C}\|k_1 u_x\|_{L^2(-\mathrm{L},0)} + \widetilde{C}\|k_2 \eta_x\|_{L^2(-\mathrm{L},0)}$$

$$\leq C\|u_x\|_{L^2(-\mathrm{L},0)} + C\|\eta_x\|_{L^2(-\mathrm{L},0)} + C\left[\rho_1 \int_{-\mathrm{L}}^{0} p^2 dx + \rho_2 \int_{0}^{\mathrm{L}} q^2 dx + k_1 \int_{-\mathrm{L}}^{0} f_x^2 dx + k_3 \int_{0}^{\mathrm{L}} g_x^2 dx\right]^{1/2}$$

Entonces

$$|\lambda| \|\eta\|_{H^{-1}(-\mathrm{L},0)} \leq C\|u_x\|_{L^2(-\mathrm{L},0)} + C\|\eta_x\|_{L^2(-\mathrm{L},0)} + C\|F\|_H \tag{4.9}$$

De (4.8) y (4.9) usamos $(a_1^2 + a_2^2)^{1/2} \leq a_1 + a_2$, entonces

$$|\lambda| \|\eta\|_{H^{-1}(-\mathrm{L},0)} \leq \left[\frac{1}{|\lambda|^2}\left(C\|U\|_H \|F\|_H + C\|F\|_H^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{k_2}\right)^{\frac{1}{2}} \|U\|_H^{\frac{1}{2}} \|F\|_H^{\frac{1}{2}} + C\|F\|_H$$

$$\leq \left[\frac{1}{|\lambda|^2}\left(\left\{C^{1/2}\|U\|_H^{1/2}\|F\|_H^{1/2}\right\}^2 + C\|F\|_H^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} + C\|U\|_H^{\frac{1}{2}} \|F\|_H^{\frac{1}{2}} + C\|F\|_H$$

Entonces

$$|\lambda| \|\eta\|_{H^{-1}(-\mathrm{L},0)} \leq C\|U\|_H^{\frac{1}{2}} \|F\|_H^{\frac{1}{2}} + C\|F\|_H \tag{4.10}$$

Por otra parte

$$H^1(-\mathrm{L},0) \hookrightarrow L^2(-\mathrm{L},0) \cong L^2(-\mathrm{L},0) \hookrightarrow H^{-1}(-\mathrm{L},0)$$

entonces

$$\langle \eta, \eta \rangle_{H^{-1}(-\mathrm{L},0)\times H^1(-\mathrm{L},0)} = (\eta, \eta)_{L^2} = \|\eta\|_{L^2}^2$$

Luego

$$\|\eta\|_{L^2(-\mathrm{L},0)}^2 \leq \|\eta\|_{H^{-1}(-\mathrm{L},0)} \|\eta\|_{H^1(-\mathrm{L},0)} \tag{4.11}$$

De (4.10), tenemos

$$\|\eta\|_{H^{-1}(-\mathrm{L},0)} \|\eta\|_{H^1(-\mathrm{L},0)} \leq \frac{1}{|\lambda|} \left[C\|U\|_H^{\frac{1}{2}} + \|F\|_H^{\frac{1}{2}} + C\|F\|_H \right] \|\eta\|_{H^1(-\mathrm{L},0)} \tag{4.12}$$

Por otra parte de (3,5), obtenemos

$$\|\eta\|_{H^1(-\mathrm{L},0)} = \|\eta_x\|_{L^2(-\mathrm{L},0)} \leq \frac{1}{k_2^{1/2}} \|U\|_H^{\frac{1}{2}} \|F\|_H^{\frac{1}{2}}$$

De (4.11) y (4.10), obtenemos

$$\|\eta\|_{L^2(-\mathrm{L},0)}^2 \leq \frac{C}{|\lambda|} \left(\|U\|\|F\| + \|U\|^{1/2}\|F\|^{1/2} \right) \tag{4.13}$$

Multiplicando (4.5) por $(x+\mathrm{L})\overline{(k_1 u_x + k_2 \eta_x)}$ y tomando la parte real, nosotros obtenemos

$$Rei\lambda \int_{-\mathrm{L}}^0 \eta(x+\mathrm{L})\overline{(k_1 u_x + k_2 \eta_x)} dx - Re \int_{-\mathrm{L}}^0 (k_1 u_x + k_2 \eta_x)_x \overline{(k_1 u_x + k_2 \eta_x)} (x+\mathrm{L}) dx$$

$$= Re \int_{-\mathrm{L}}^0 \rho_1 p \overline{(k_1 u_x + k_2 \eta_x)} (x+\mathrm{L}) dx$$

Pero

$$2Re z_x \cdot \overline{z} = \overline{z} \cdot z_x + z \cdot \overline{z_x} = \frac{d}{dx}(\overline{z} \cdot z) = \frac{d}{dx}|z|^2$$

Entonces realizando la ecuación anterior, obtenemos

$$Rei\lambda \int_{-\mathrm{L}}^0 \eta(x+\mathrm{L})\overline{(k_1 u_x + k_2 \eta_x)} dx - \frac{1}{2} \int_{-\mathrm{L}}^0 \left(\frac{d}{dx} |k_1 u_x + k_2 \eta_x|^2 (x+\mathrm{L}) dx \right) \tag{4.14}$$

$$= \rho_1 \cdot Re \int_{-\mathrm{L}}^0 p \cdot \overline{(k_1 u_x + k_2 \eta_x)} (x+\mathrm{L}) dx$$

Calculemos la primera integral y usando (4.3), obtenemos

$$J_1 = Rei\lambda \int_{-\mathrm{L}}^0 (x+\mathrm{L}) \eta k_1 \overline{u_x} dx = -k_1 \cdot Re \int_{-\mathrm{L}}^0 (x+\mathrm{L}) \eta (\overline{\eta} + \overline{f})_x dx$$

$$= \frac{-k_1}{2} \int_{-\mathrm{L}}^0 (x+\mathrm{L}) \frac{d}{dx} |\eta|^2 dx - k_1 \cdot Re \int_{-\mathrm{L}}^0 (x+\mathrm{L}) \eta \overline{f}_x dx$$

$$= \frac{k_1}{2}\int_{-\mathrm{L}}^{0}|\eta|^2dx - \frac{k_1}{2}\mathrm{L}|\eta(0)|^2 - Rek_1\int_{-\mathrm{L}}^{0}(x+\mathrm{L})\eta\overline{f}_xdx$$

Calculemos la segunda integral,

$$J_2 = -\frac{1}{2}\int_{-\mathrm{L}}^{0}(x+\mathrm{L})\frac{d}{dx}|k_1u_x + k_2\eta_x|^2dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[(x+\mathrm{L})|k_1u_x + k_2\eta_x|^2\right]_{-\mathrm{L}}^{0} - \int_{-\mathrm{L}}^{0}|k_1u_x + k_2\eta_x|^2dx$$

$$= -\frac{\mathrm{L}}{2}|k_1u_x(0) + k_2\eta_x(0)|^2 + \frac{1}{2}\int_{-\mathrm{L}}^{0}|k_1u_x + k_2\eta_x|^2dx$$

Reemplazando J_1 y J_2 en la ecuación (4.14), obtenemos

$$Rei\lambda\int_{-\mathrm{L}}^{0}(x+\mathrm{L})\eta k_2\overline{\eta}_xdx + J_1 + J_2 = \rho_1 Re\int_{-\mathrm{L}}^{0}(x+\mathrm{L})(k_1u_x + k_2\eta_x)pdx$$

Denotemos el funcional

$$I_u = \frac{1}{2}\left[k_1|\eta(0)|^2 + |k_1u_x(0) + k_2\eta_x(0)|^2\right].$$

Entonces

$$I_u = k_2Rei\lambda\int_{-\mathrm{L}}^{0}(x+\mathrm{L})\eta\overline{\eta}_xdx + \frac{1}{2}k_1\int_{-\mathrm{L}}^{0}|\eta|^2dx + \frac{1}{2}\int_{-\mathrm{L}}^{0}|k_1u_x + k_2\eta_x|^2dx$$

$$-\rho_1 Re\int_{-\mathrm{L}}^{0}p(x+\mathrm{L})\overline{(k_1u_x + k_2\eta_x)}dx - Rek_1\int_{-\mathrm{L}}^{0}\eta(x+\mathrm{L})\overline{f}_xdx$$

$$\leq C|\lambda|\int_{-\mathrm{L}}^{0}|\eta||\eta_x|dx + \frac{k_1Cp}{2}\int_{-\mathrm{L}}^{0}|\eta_x|^2dx + \frac{1}{2}k_1^2\int_{-\mathrm{L}}^{0}|\ u_x|^2dx + \frac{1}{2}k_2^2\int_{-\mathrm{L}}^{0}|\eta_x|^2dx$$

$$+C\rho_1\int_{-\mathrm{L}}^{0}|p||k_1u_x + k_2\eta_x|dx + k_1C\int_{-\mathrm{L}}^{0}|\eta||f_x|dx \qquad (4.15)$$

Analizando el primer término de (4.5) y por (4.7), obtenemos

$$C|\lambda|\int_{-\mathrm{L}}^{0}|\eta||\eta_x|dx \leq C|\lambda|^{1/2}\|U\|^{1/2}\|F\|^{1/2}|\lambda|^{1/2}\|\eta\|_{L^2(-\mathrm{L},0)} \qquad (4.16)$$

De (4.13) y $|a+b| \leq C\left(|a|^{1/2} + |b|^{1/2}\right)$, obtenemos

$$|\lambda|^{1/2}\|\eta\| \leq C\left[\|U\|^{1/2}\|F\|^{1/2} + \|U\|^{1/4}\|F\|^{3/4}\right]$$

Reemplazando en (4.16), obtenemos

$$C|\lambda|^{1/2}\int_{-\mathrm{L}}^{0}|\eta_x||\lambda^{1/2}\eta|dx \leq C|\lambda|^{1/2}\left[\|U\|\|F\|+\|U\|^{3/4}\|F\|^{5/4}\right]$$

De (3.5) y (3.6) tenemos

$$\begin{aligned}\int_{-\mathrm{L}}^{0}\left(\|\eta_x\|^2+\|u_x\|^2dx\right) &\leq C\|U\|\|F\|+\frac{1}{|\lambda|^2}\left[C\|U\|\|F\|+C\|F\|^2\right]\\ &\leq C\|U\|\|F\|+\frac{C}{|\lambda|^2}\|F\|^2\end{aligned}$$

para λ suficientemente grande.

Luego sustituyendo en (4.15), tenemos

$$\begin{aligned}I_u \leq\ & C|\lambda|^2\left[\|U\|\|F\|+\|U\|^{3/4}\|F\|^{5/4}\right]+C\|U\|\|F\|+\frac{C}{|\lambda|^2}\|F\|^2\\ &+C\rho_1\left(\int_{-\mathrm{L}}^{0}|p|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_{-\mathrm{L}}^{0}|k_1u_x+k_2\eta_x|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &+C\rho_1\left(\int_{-\mathrm{L}}^{0}|\eta|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{C}{\rho_1}k_1\left(\int_{-\mathrm{L}}^{0}|f_x|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}I_u \leq C|\lambda|^{1/2}\|U\|\|F\|+C|\lambda|^{1/2}\|U\|^{3/4}\|F\|^{5/4}+\frac{C}{|\lambda|^2}\|F\|^2\\ +C\|F\|^2\|U\|^{1/2}+C\|U\|\|F\|\end{aligned} \tag{4.17}$$

Analizando el primer sumando de (4.17) y

$$\|U\|\|F\|=\left[\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\lambda^{\theta}}\|U\|\right]\cdot\left[8^{\frac{1}{2}}\lambda^{\theta}\|F\|\right]\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\right)\cdot\frac{1}{\lambda^{2\theta}}\|U\|^2+\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\lambda^{2\theta}\|F\|^2$$

escojamos $\theta=\frac{1}{4}$ y multiplicamos la ecuación anterior por $|\lambda|^{1/2}$, obtenemos

$$|\lambda|^{1/2}\|U\|\|F\|\leq\frac{1}{16}\|U\|^2+4\lambda\|F\|^2 \tag{4.18}$$

Analizando el segundo sumando de (4.17),

$$\begin{aligned}\|U\|^{3/4}\|F\|^{5/4} &= \left[\varepsilon\cdot\frac{1}{\lambda^{\theta}}\|U\|^{3/4}\right]\cdot\left[\lambda^{\theta}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\|F\|^{5/4}\right] \qquad , \quad \forall\varepsilon>0\\ &\leq\frac{3}{8}\cdot\varepsilon^{\frac{8}{3}}\cdot\frac{1}{\lambda^{\frac{8}{3}}\cdot\theta}\|U\|^{\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{8}{3}\right)}+\frac{5}{8}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{8}{5}}\cdot\lambda^{\frac{8}{5}\cdot\theta}\cdot\|F\|^{\left(\frac{5}{4}\right)\left(\frac{8}{5}\right)}\end{aligned}$$

Tomando $\varepsilon = \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{3}{8}}$, obtenemos

$$\|U\|^{\frac{3}{4}}\|F\|^{\frac{5}{4}} \leq \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{\lambda^{\frac{8}{3}\theta}}\|U\|^2 + \frac{5}{8}\cdot 6^{\frac{3}{5}}\cdot\lambda^{\frac{8}{5}\theta}\|F\|^2$$

Considerando $\theta = \frac{3}{16}$ y multiplicando por $|\lambda|^{1/2}$, obtenemos

$$|\lambda|^{1/2}\|U\|^{\frac{3}{4}}\|F\|^{\frac{5}{4}} \leq \frac{\|U\|^2}{16} + C\lambda^{\frac{3}{10}}\|F\|^2 \tag{4.19}$$

Analizando el cuarto sumando de (4.17)

$$\|F\|^{\frac{3}{2}}\|U\|^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{4}\|U\|^{\frac{1}{2}\cdot 4} + \frac{3}{4}\|F\|^{\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}} = \frac{1}{4}\|U\|^2 + \frac{3}{4}\|F\|^2 \tag{4.20}$$

Análogamente el quinto sumando de (4.17)

$$\|U\|\|F\| \leq \frac{\|U\|^2}{4} + \|F\|^2 \tag{4.21}$$

Luego reemplazando (4.18), (4.19), (4.20) y (4.21) en (4.17), obtenemos

$$I_u \leq \frac{1}{8}\|U\|^2 + \frac{1}{2}\|U\|^2 + 4\lambda\|F\|^2 + C\lambda^{\frac{3}{10}}\|F\|^2 + \frac{C}{|\lambda|^2}\|F\|^2 + \frac{7}{4}C\|F\|^2 \tag{4.22}$$

Por otra parte, multiplicamos la ecuación (4.6) por $(x - \mathrm{L})v_x$ y tomando la parte real obtenemos,

$$Rei\lambda\int_0^{\mathrm{L}}(x-\mathrm{L})\mu\overline{v}_x dx - Rek_3\int_0^{\mathrm{L}}(x-\mathrm{L})v_{xx}\overline{v}_x dx = Re\rho_2\int_0^{\mathrm{L}}(x-\mathrm{L})q\overline{v}_x dx \tag{4.23}$$

Analizamos la primera integral de (4.23) y usamos (4.4), obtenemos

$$\int_0^{\mathrm{L}}(x-\mathrm{L})\mu i\lambda\overline{v}_x dx = -\int_0^{\mathrm{L}}(x-\mathrm{L})\mu\overline{\mu}_x dx - \int_0^{\mathrm{L}}(x-\mathrm{L})\mu\overline{g}_x dx$$

tomando la parte real, tenemos

$$\begin{aligned}
Re\int_0^{\mathrm{L}}(x-\mathrm{L})\mu i\lambda\overline{v}_x dx &= -\frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{L}}(x-\mathrm{L})Re\mu\overline{\mu}_x dx - \int_0^{\mathrm{L}}(x-\mathrm{L})Re(\mu\overline{g}_x)dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{L}}(x-\mathrm{L})\frac{d}{dx}|\mu|^2 dx - \int_0^{\mathrm{L}}(x-\mathrm{L})Re(\mu\overline{g}_x)dx \\
&= -\frac{1}{2}\left\{\left[(x-\mathrm{L})|\mu|^2\right]_0^{\mathrm{L}} - \int_0^{\mathrm{L}}|\mu|^2 dx\right\} - \int_0^{\mathrm{L}}(x-\mathrm{L})Re(\mu\overline{g}_x)dx \\
&= -\frac{1}{2}\cdot\mathrm{L}|\mu(0)|^2 + \frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{L}}|\mu|^2 dx - \int_0^{\mathrm{L}}(x-\mathrm{L})Re(\mu\overline{g}_x)dx
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Analizamos la segunda integral de (4.23), obtenemos

$$-k_3\int_0^{\mathrm{L}}(x-\mathrm{L})Re v_{xx}\overline{v}_x dx = -\frac{k_3}{2}\int_0^{\mathrm{L}}(x-\mathrm{L})\frac{d}{dx}|v_x|^2 dx$$

Integrando por partes, obtenemos

$$-k_3\int_0^{\mathrm{L}}(x-\mathrm{L})Re v_{xx}\overline{v}_x dx = -\frac{k_3}{2}\mathrm{L}|v_x(0)|^2+\frac{k_3}{2}\int_0^{\mathrm{L}}|v_x|^2 dx \tag{4.25}$$

Reemplazando (4.24) y (4.25) en (4.23), obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{L}}\left(|\mu|^2+k_3|v_x|^2\right)dx =\ & \frac{\mathrm{L}}{2}\left(|\mu(0)|^2+k_3|v_x(0)|^2\right)+\int_0^{\mathrm{L}}(x-\mathrm{L})Re(\mu\overline{g}_x)dx\\ &+\rho_2\int_0^{\mathrm{L}}(x-\mathrm{L})Re(q\overline{v}_x)dx\end{aligned}$$

Usando (3.3) y realizando estimativas simples, se sigue

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{L}}\left(|\mu|^2+k_3|v_x|^2\right)dx \leq\ & \frac{\mathrm{L}}{2}\left(|\mu(0)|^2+k_3|v_x(0)|^2\right)+\int_0^{\mathrm{L}}|x-\mathrm{L}||\mu\overline{g}_x|dx\\ &+\rho_2\int_0^{\mathrm{L}}|x-\mathrm{L}||q\overline{v}_x|dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\leq \frac{\mathrm{L}}{2}\left(|\mu(0)|^2+|(k_1u_x(0)+k_2\eta_x(0))|^2\right)+\left(\int_0^{\mathrm{L}}|\mu|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\mathrm{L}}|g_x|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ +\ C\left(\int_0^{\mathrm{L}}|q|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\mathrm{L}}|v_x|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\leq C\frac{\mathrm{L}}{2}\left[k_1\|\eta(0)\|^2+\|k_1u_x(0)+k_2\eta_x(0)\|^2\right]\\ &+C\left[\int_0^{\mathrm{L}}\left(\|\mu\|^2+k_1\|u_x\|^2+k_3\|v_x\|^2+\rho_1\|\eta\|^2+\rho_2\|\mu\|^2\right)dx\right][\int_0^{\mathrm{L}}(\|g_x\|^2+k_1\|f_x\|^2\\ &\qquad +k_3\|g_x\|^2+\rho_1\|p\|^2+\rho_2\|q\|^2)dx]\\ &+C\left[\int_0^{\mathrm{L}}\left(\|q\|^2+k_1\|f_x\|^2+k_3\|g_x\|^2+\rho_1\|p\|^2+\rho_2\|q\|^2\right)dx\right][\int_0^{\mathrm{L}}(\|v_x\|^2+k_1\|u_x\|^2\\ &\qquad +k_3\|v_x\|^2+\rho_1\|\eta\|^2+\rho_2\|\mu\|^2)dx]\end{aligned}$$

Además $\eta(0)=\mu(0)-f(0)+g(0)$ y $f(0)=g(0)$, entonces $\eta(0)=\mu(0)$. Por la definición de I_u y por (4.22), obtenemos

$$\begin{aligned}C\int_0^{\mathrm{L}}\left(\rho_2|\mu|^2+k_3|v_x|^2\right)dx \leq\ & \frac{1}{8}\|U\|^2+\frac{C}{2}\|U\|^2+4\lambda\|F\|^2+C\lambda^{\frac{3}{10}}\|F\|^2\\ &+\frac{C}{|\lambda|^2}\|F\|^2+\frac{7}{4}C\|F\|^2+C\|U\|\|F\|\end{aligned}$$

De (4.8) tenemos

$$k_1 \int_{-\mathrm{L}}^{0} |u_x|^2 dx \leq \frac{C}{|\lambda|^2} \left[\|U\| \|F\| + \|F\|^2 \right] \tag{4.26}$$

Analizando el primer término,

$$\|U\|\|F\| = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2}} \lambda^{\theta} \|U\| \cdot \frac{1}{\lambda^{\theta}} \|F\| \cdot 8^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \lambda^{2\theta} \|U\|^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\lambda^{2\theta}} \|F\|^2 \cdot 8$$

Haciendo $\theta = 1$ y multiplicando la ecuación anterior por $\frac{1}{|\lambda|^2}$, obtenemos

$$\frac{1}{|\lambda|^2} \|U\|\|F\| \leq \frac{1}{16} \|U\|^2 + \frac{4}{|\lambda|^4} \|F\|^2$$

Sustituyendo la ecuación anterior en (4.26), obtenemos

$$k_1 \int_{-\mathrm{L}}^{0} |u_x|^2 dx \leq \frac{C}{16} \|U\|^2 + \frac{4C}{|\lambda|^4} \|F\|^2$$

De (4.7) obtenemos

$$\rho_1 \int_{-\mathrm{L}}^{0} |\eta|^2 dx \leq \rho_1 C \int_{-\mathrm{L}}^{0} |\eta_x|^2 dx \leq C \|U\| \|F\|$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \|U\|^2 = & \int_0^{\mathrm{L}} \left(\rho_2 |\mu|^2 + k_3 |v_x|^2 \right) dx + k_1 \int_{-\mathrm{L}}^{0} |u_x|^2 dx + \rho_1 \int_{-\mathrm{L}}^{0} |\eta|^2 dx \\ \leq & \frac{1}{8} \|U\|^2 + \frac{1}{2} \|U\|^2 + 4\lambda \|F\|^2 + C \lambda^{\frac{3}{10}} \|F\|^2 + \frac{C}{|\lambda|^2} \|F\|^2 + \frac{7}{4} C \|F\|^2 \\ & + C \|U\| \|F\| + \frac{C}{16} \|U\|^2 + \frac{4C}{|\lambda|^4} \|F\|^2 + C \|U\| \|F\| \end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Young, tenemos

$$C\|U\|^2 \leq 4|\lambda| \|F\|^2 + C \lambda^{\frac{3}{10}} \|F\|^2 + \frac{C}{|\lambda|^2} \|F\|^2 + \frac{7}{4} C \|F\|^2 + \frac{4C}{|\lambda|^4} + \frac{C\|F\|^2}{2}$$

$$C\|U\|^2 \leq 4|\lambda| \|F\|^2$$

$$\|U\| \leq C |\lambda|^{\frac{1}{2}} \|F\|$$

para λ suficientemente grande. Lo que significa que la solución decae polinomialmente como

$$\|S(t) U_0\| \leq \frac{C}{t^2} \|U_0\|_{D(A)}$$

De donde se sigue el resultado. ∎

Bibliografía

[1] Adams, R. A., **Sobolev Spaces**. Academic Press, New York, 1975.

[2] Brezis, H. **Análisis Funcional. Teoría y Aplicaciones** Editorial Alianza, 1983.

[3] A.N. Kolmogorov y S.V. Fomin, **Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional**. Editorial MIR

[4] Erwin, Kreyszig **Introductory Functional Analysis with Applications**. John Wiley & Sons USA.

[5] Dunford, N. Schwartz, J.T. **Linear Operators**. Interscience Publishers - New York - 1958.

[6] Eberhard, Z. **Non Linear Functional Analysis and its Aplications**. Springer-Verlag New York Inc, - 1990.

[7] M. Renardy. **On the Type of Certain C_0-Semigrupos, Comunications in Partial Differential**. Equations Vol. 18, (7-8), pages 1299-1307. 1993.

[8] M. Renardy. **On Linear Stability of Hyperbolic PDE'S and Viscoelastic Flows**, z. angew Math. Phys Vol. 45, (1), pages 854-865. 1994.

[9] A. Pazy. **Semigroup of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations**, Springer-Verlag. New York. 1993.

[10] Muñoz Rivera, J. E., **Estabilizacão de Semigrupos e Aplicacões**. Textos Avanzados. 233 páginas. LNCC. Petrópolis. (2007).

[11] Muñoz Rivera, J. E., **Teoria das Distribuicões e Equacões Diferenciais Parciais .** Textos Avanzados-LNCC. Petrópolis. (1999).

[12] Z. Liu and S. Zheng. **Semigroups Associated with Dissipative Systems**. In CRC Research Notes in Mathematics 398. Chapman and Hall. (1999).

[13] J. Pruss. **On the Spectrum of C_0-Semigroups**. Fourth Edition. Dover Publications, New York. (1942).

[14] J.E. Muñoz Rivera and R. Racke. **Smoothing Properties, Decay and Global Existence of Solutions to Nonlinear Coupled System of Thermoelastic Type**. Fourth Edition. SIAM J. Math. Anal.26 (1995).

[15] Dautray, R., Lions, J., **Mathematical Analysis and Numerical Method for Science and Technology**. Springer-Verlag Berlin Heiderlberg. (1988).

[16] A. Borichev and Y. Tomilov; Optimal Polynomial Decay of Functions and Operator Semigroups, *Mathematische Annalen Vol. 347, (2), pages 455- 478, (2009).*