Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado
Facultad de Letras y Ciencias Humanas
Unidad de Posgrado

La paradoja de Curry: un examen crítico

TESIS

Para optar el Grado Académico de Doctor en Filosofía

AUTOR

Rafael Félix MORA RAMIREZ

ASESOR

Óscar Augusto GARCÍA ZÁRATE

Lima, Perú

2020

Referencia bibliográfica

Mora, R. (2020). *La paradoja de Curry: un examen crítico*. Tesis para optar el grado de Doctor en Filosofía. Unidad de Posgrado, Facultad de Letras y Ciencias Humanas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

Hoja de metadatos complementarios

- **Código ORCID del autor:** 0000-0002-6420-493X
- **Código ORCID del asesor:** 0000-0002-0382-6719
- **DNI o pasaporte del autor:** 43616314

- **Grupo de investigación:** --
- **Institución que financia la investigación:** --
- **Ubicación geográfica donde se desarrolló la investigación:**
  Lima, Perú.
  Longitud: O77°1'41.66" Latitud: S12°2'35.45"
- **Año o rango de años que la investigación abarcó:** 4 años

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE
SAN MARCOS
FACULTAD DE LETRAS Y CIENCIAS HUMANAS

UNIDAD DE POSGRADO
ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS DE GRADO ACADÉMICO DE DOCTOR

Siendo los diecinueve días del mes de febrero del dos mil veinte, siendo las 18.00 horas, en el local de la Facultad de Letras y Ciencias Humanas, se reunió el Jurado de Grado integrado por los profesores: Dr. Zenón Depaz Toledo (Presidente), Dr. Óscar García Zárate (Asesor), Dr. Javier Aldama Pinedo (Informante), Dr. Alan Pisconte Quispe (Informante) y Dr. Juan Eusebio Caycho Cabellos (Miembro) para calificar la sustentación de la tesis titulada **LA PARADOJA DE CURRY: UN EXAMEN CRÍTICO**, presentada por el señor Rafael Félix Mora Ramirez, magíster en Filosofía con mención en Epistemología, para optar el Grado de **Doctor en Filosofía**.

Hecha la exposición y absueltas las preguntas formuladas por el Jurado, éste acordó la siguiente calificación de acuerdo a lo establecido por el Reglamento General de Estudios de Posgrado.

MUY BUENO (18)

Habiendo sido aprobada la sustentación de la tesis, el Jurado recomendó que la Facultad proponga que se le otorgue el grado académico de Doctor en Filosofía al magíster **Rafael Félix Mora Ramirez**.

El acto académico de sustentación concluyó a las 19:45 horas.

Dr. Zenón Depaz Toledo
Presidente
Profesor Principal T.C.

Dr. Óscar García Zárate
Asesor
Profesor Principal T.C.

Dr. Javier Aldama Pinedo
Informante
Profesor Principal T.C.

Dr. Alan Pisconte Quispe
Informante
Profesor Asociado D.E.

Dr. Juan Eusebio Caycho Cabellos
Miembro
Profesor Invitado

Este trabajo va dedicado a un nuevo mundo en el que la gente no solamente actúe guiada por sus pasajeras emociones sino sobre todo asesorados por una racionalidad humanista que busque la comprensión del otro sin demoler ni sus ilusiones (si estas no son perniciosas para los demás) ni su esfuerzo (si este no se empeña en hacer que el resto sufra).

Paradoja

Contradicción, o supuesto descubrimiento contraintuitivo. Las paradojas del primer tipo se incluyen en dos clases, las lógicas y las semánticas. Las primeras se encontraron en la lógica y teoría de conjuntos de principios del siglo XX y su estudio estimuló importantes avances –como la teoría de tipos y la teoría axiomática de conjuntos-, que quedan fuera del alcance de este libro. Algunas de las paradojas semánticas se han conocido e investigado durante siglos. La paradoja más famosa es la ***paradoja del mentiroso*** *(v.), que puede tratarse con la ayuda de la distinción entre lenguaje y metalenguaje. En cuanto a las paradojas del segundo tipo –los resultados contraintuitivos- son habituales en la física cuántica; basta recordar los experimentos mentales EPR (Einstein-Podolsky-Rosen) y* ***gato de Schrödinger*** *(v.). La primera ya se ha resuelto pero al experimento de Schrödinger todavía le están sacando provecho en la industria académica. La* ***"lógica" inductiva*** *(v.) también está marcada por las paradojas (v.* ***paradoja del cuervo*** *y* ***paradoja verdul****).*

MARIO BUNGE

ÍNDICE

PÁG.

INTRODUCCIÓN

Dentro de los estudios de lógica, el tema de las paradojas ha despertado especial atención por parte de los cultores de esta disciplina. Hay dos paradojas paradigmáticas que han marcado el rumbo de las investigaciones dentro del campo de las ciencias formales: la de *El Mentiroso* y la de Russell. La primera se plantea con la oración que dice de sí misma que es falsa y la segunda con el conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos. Tanto el razonar con el primero como con el segundo nos conduce a contradicciones. Precisamente, de eso se trata una paradoja, de un argumento cuyas premisas y razonamiento justificador resultan aceptables y, sin embargo, desencadenan en una conclusión inaceptable. Y, por supuesto, una contradicción es algo inaceptable pues inmediatamente nos dirige a la posibilidad de deducir válidamente cualquier enunciado o fórmula, siguiendo el principio de explosión.

Aunque estas paradojas son muy atractivas por las lecciones teóricas que nos pueden hacer reflexionar, existe una en particular que ha cautivado nuestro interés. Se trata de la paradoja de Curry. Esta paradoja es un problema generado por el razonamiento que inicia aceptando la siguiente premisa:

Si tengo la razón entonces B.

Lo cual significa que

Si este enunciado es verdad entonces B.

Y, si le ponemos nombre a la anterior oración quedaría así:

A = *Si este enunciado es verdad entonces B*

Pero como todo el enunciado es A quedaría así

$A = A \rightarrow B$

Lo cual también puede ser tratado así

$A \leftrightarrow (A \rightarrow B)$

Para mostrar lo que sucede con este argumento vamos a razonar, primero, suponiendo que es falso

1. $A = A \rightarrow B$	
2. A es falso	Premisa adicional
3. $\sim A$	Por Esquema de Tarski[1]
4. $\sim (A \rightarrow B)$	Por Identidad (1,3)
5. $A \wedge \sim B$	Por Def. condicional y De Morgan. (4)
6. A	Por Simplificación (5)
7. $A \wedge \sim A$	Por Conjunción (3,6)
8. A es falso $\rightarrow (A \wedge \sim A)$	Por Prueba condicional (2-7)
9. $\sim$(A es falso)	Por Reducción al absurdo (8)
10. A es verdadero	Por Esquema de Tarski y Doble Negación (9)

Por lo tanto, si *A es falso, entonces A es verdadero*. Así, aplicando la definición del condicional y el De Morgan a la expresión en cursivas se puede decir que dicho enunciado es verdadero.

Vamos a razonar, ahora, suponiendo que es verdadero

[1] Si asumimos que 'A es verdadero' equivale a A, entonces 'A es falso' equivale a $\sim$A.

1. A = A → B	
2. A es verdadero	Premisa adicional
3. A	Por Esquema de Tarski
4. A → B	Por Identidad (1,3)
5. B	Por Modus Ponens (3,4)
6. A → B	Prueba condicional (3-5)
7. A	Por Identidad (1,6)
8. B	Por Modus Ponens (6,7)

Suponiendo la verdad del enunciado de Curry podemos obtener una fórmula B cualquiera. Entonces de la paradoja de Curry se pueden deducir dos cosas

(1) *Si A es falso entonces A es verdadero*

(2) *Si A es verdadero entonces B*

Pero (1) se reduce por aplicación de reglas lógicas a que

(1) *A es verdadero*

Y si lo juntamos con (2) obtenemos por *Modus Ponens*

(3) *B*

Es decir, que se puede deducir cualquier cosa.

Sin embargo, a pesar de que en la paradoja de Curry no hay contradicción, sí se puede deducir cualquier cosa. Esto nos lleva al peligro de una inconsistencia absoluta, es decir, el temor de que cualquier fórmula pueda ser deducible válidamente. Por este motivo, resulta siendo muy extraña. Además, tampoco contiene negaciones.

El hecho de que se pueda deducir cualquier cosa atenta contra lo que se llama la *consistencia absoluta*. Esta es la propiedad de un sistema lógico en el cual al menos una fórmula bien formada del lenguaje formal no es un teorema, es decir, un sistema es absolutamente consistente si no toda fórmula es derivable en el sistema. En otros términos, se puede decir que un lenguaje formal es absolutamente consistente si implica ciertas cosas y no otras o, en otras palabras, que un cálculo será consistente absolutamente si y sólo si este contiene al menos una fórmula bien formada que no sea uno de sus teoremas, o sea, que no sea implicada por el sistema lógico. Por el contrario, los que implican toda proposición son absolutamente inconsistentes. Esto último acontece con la paradoja de Curry.

Ahora bien, antes de continuar habría que indicar que, a pesar de los parecidos, la paradoja de Curry no es paradójica en el mismo sentido en que lo son las paradojas del Russell y de *El Mentiroso*. Sucede que de la paradoja de Curry no se deduce alguna contradicción como la señalada en las otras paradojas. Lo que se logra deducir es una expresión derivable lógicamente del sistema anterior sin haber contradicción previa. Según Rescher: "una paradoja (…) surge cuando las premisas plausibles implican una conclusión cuya negación también es plausible". (Rescher, 2001, p.6). ¿Cómo así es paradójica la paradoja de Curry? Lo que sucede es que el hecho de que sea deducible cualquier enunciado a partir de una expresión dada no contradictoria entra en conflicto con nuestra idea original de lo que es un sistema lógico. La afirmación "Todo puede ser deducible a pesar de que no hay contradicción" que identifica a la paradoja de Curry, es algo que normalmente no aceptaríamos como un rasgo de un sistema lógico. Más bien, tendemos a pensar que "No todo puede ser deducible a menos que haya contradicción", es decir, si todo puede ser deducible entonces hay contradicción. Pero, en la paradoja de Curry "todo puede ser deducible a pesar de que no hay contradicción". En este particular sentido, la paradoja de Curry es una paradoja no porque arroje contradicciones sino porque supone un conflicto entre nuestra idea del requisito que debería cumplir un sistema lógico y el que se puede probar (con un argumento muy sencillo) que de hecho cumple.[2]

La paradoja de Curry se produce en la teoría ingenua de conjuntos o en lógicas ingenuas[3], y permite la obtención de una sentencia arbitraria a partir de una sentencia condicional autorreferencial o con elementos autopertenecientes y algunas reglas de deducción lógica aparentemente inofensivas. Es decir, esta paradoja se puede expresar tanto en lenguaje natural como en el lenguaje propio de la teoría de los conjuntos.

La primera versión de la paradoja de Curry se presenta dentro de la lógica clásica. Esta parte de un tipo particular de condicional autorreferencial como se demuestra en este ejemplo:

(1) *Si es verdad que (1), entonces París es la capital de Italia*

En base a esto, parece como si pudiésemos demostrar la conclusión de que París es la capital de Italia o cualquier otra que deseásemos, por ejemplo, B. Y la conclusión ni siquiera depende de la verdad de (1).

---

[2] Agradezco a Miguel León Untiveros por esta atinada sugerencia.

[3] La teoría ingenua de los conjuntos se distingue de la teoría axiomática de los conjuntos por el hecho de que la primera cuenta con la comprensión informal de los conjuntos como colecciones de objetos, llamados elementos o miembros del conjunto, mientras que la última usa solamente hechos sobre conjuntos y sus miembros demostrables a partir de listas definidas de axiomas. Lo mismo ocurre con la lógica ingenua: no se asienta sobre una axiomatización debida.

La segunda versión de la paradoja de Curry se presenta dentro de la teoría de conjuntos. Una teoría ingenua de conjuntos acepta el principio intuitivo que dice que para cada propiedad hay un conjunto que reúne las cosas que la satisfacen. En lenguaje formal, sería:

1. $(\exists y)$ $(\forall x)$ $(x \in y \leftrightarrow Px)$ Axioma de comprehensión

Esta propiedad P se puede reemplazar por cualquiera; por ejemplo así:

2. $(\exists y)$ $(\forall x)$ $[x \in y \leftrightarrow (x \in x \rightarrow a)]$ Por Identidad (1,*)

Donde * corresponde a la expresión: $Px = x \in x \rightarrow a$

Nuestra investigación se ha dividido en tres partes. En la primera, buscamos relacionar a la paradoja de Curry con la de *El Mentiroso* y la de Bertrand Russell. Para ello, presentamos cada paradoja acompañada de una de sus múltiples soluciones. Así, la paradoja de *El Mentiroso* vendrá acompañada de la teoría de los metalenguajes de Tarski (1997) (que no permite que una expresión pueda referirse a sí misma dentro de un mismo nivel del lenguaje) y la de Russell (1910) estará asociada a su propuesta teórica de los tipos (que ordena las expresiones lógicas y considera incorrectos a los enunciados que no respeten ese orden jerárquico) y la axiomática de Zermelo (que modifica aquel axioma de la teoría conjuntista que originaba el problema). Después de esta presentación, hacemos comparaciones entre las paradojas expuestas para constar que si bien todas estas paradojas hacen uso de la autorreferencia o del predicado de ser miembro de sí mismo (autopertenecencia) se distinguen en que la de Curry no usa negaciones ni deriva en contradicciones. Además, solo la de Curry hace uso del principio de contracción. Finalmente, previa distinción entre solución y disolución (la primera consiste en elaborar una herramienta y explicar las causas de la aparición del problema; mientras que la segunda busca limitar o prohibir que ciertas expresiones puedan ser siquiera elaboradas), en el caso de la paradoja de Curry exponemos la disolución (o bloqueo) presentada por Łukowski (2011) que consiste básicamente en conjuntar la expresión de Curry con un enunciado falso. Situaremos esta propuesta algo artificiosa pero ingeniosa dentro del campo de la lógica clásica pues solo apela a tablas de verdad y ciertas leyes básicas de conectores lógicos.

En la segunda parte, partiremos tratando la paradoja de Curry desde un enfoque clásico. Se llegan a interesantes resultados en este punto como, por ejemplo que $A \leftrightarrow (A \rightarrow B)$ puede reducirse a $A \wedge B$ o que básicamente la paradoja de Curry pide algo en contra de las leyes de la tabla de verdad del condicional pues en ningún caso un condicional se reduce a su antecedente. Asimismo, se encuentra cierta repetición cíclica cuando se opera el condicional de Curry siendo $A \rightarrow_0 B$ equivalente a A y siendo $A \rightarrow_{n+1} B$ equivalente a la expresión $(A \rightarrow_n B) \rightarrow B$. De tal modo que, cuando n=0, $A \rightarrow_1 B$ sería equivalente a $(A \rightarrow_0 B) \rightarrow B$, es decir, a $A \rightarrow B$, y cuando n=1, $A \rightarrow_2 B$ sería equivalente a $(A \rightarrow_1 B) \rightarrow B$, es decir, a $(A \rightarrow B) \rightarrow B$. Y así sucesivamente obtenemos: $A \rightarrow B$, $(A \rightarrow B) \rightarrow B$, $[(A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow B$, etc. Después, presentamos las soluciones que se han planteado desde la lógica no-clásica, en especial, las lógicas paracompleta y paraconsistente. Para el primer caso se sigue la propuesta de Field (2008), el cual a su vez toma resultados previos de Kripke (1975) y Gupta y Belnap (1993), llegando a constatar la no-verdad y no-falsedad del enunciado de Curry y para el segundo caso en base a Priest (2006a) se modifica la relación condicional haciendo uso del concepto de mundos no normales que son aquellos en los cuales, de acuerdo a Priest (1992) los teoremas lógicos no son verdaderos. Ambos de estos intentos son elaboraciones técnicas y con alto grado de complejidad. Sin embargo, notamos con Beall y Shapiro (2018) que ambos intentos se han visto frustrados pues no logran eludir del todo a la escurridiza paradoja de Curry.

Finalmente, en la parte tercera, planteamos las bases para una comprensión clarificadora sobre la paradoja de Curry. Como sabemos, la paradoja de Curry se plantea al suponer que si un condicional es cierto entonces B. Con esto se consigue probar cualquier proposición. Pues bien, primero, nos vamos a dedicar a realizar observaciones sobre las diversas partes de la paradoja de Curry. De este modo, cuestionamos premisa, desarrollo y conclusión de esta paradoja. En cuanto a la premisa, Curry es acusado de ser un enunciado un tanto ambiguo (o incluso irrelevante); en cuanto al desarrollo, se observa la obsesión por desarrollar a Curry solo usando la prueba condicional y no las otras dos; finalmente, en cuanto a la conclusión, se indica la posibilidad de que tal vez no se llegue a probar cualquier cosa habida cuenta que, después de todo, la conclusión B también está incluida en el enunciado original de Curry. Enseguida, utilizamos el recurso de la lógica relevante que parecía ser un buen aliciente para acabar con esta paradoja. Así, sostenemos que esta lógica relevante buscaba que los razonamientos válidos compartan variables entre premisas y conclusiones y, además, que la premisa sea usada para derivar tal conclusión. Observamos cómo esta lógica le hace frente a las paradojas de la implicación y este tema particularmente nos interesa pues hay cierta semejanza entre el enunciado de Curry y estas paradojas. Sin embargo, notaremos que, después de todo, nuestra esperanza era en vano: la lógica relevante tampoco logra frenar a la paradoja de Curry. Al final, ya terminando este trabajo, tocaremos el tema de la pragmática e intentaremos ayudarnos con esta herramienta para tratar de interpretar esta paradoja. Usaremos el marco teórico de Paul Grice (1975) para intentar plantear nuestro enfoque de la paradoja de Curry. Llegaremos a la conclusión de que se trata de una implicatura conversacional que burla la máxima de cantidad y que, al parecer, solo busca indicar la seguridad que tenemos en un cierto enunciado B. También indicamos que este aparente condicional se trataría de una conjunción encubierta.

A partir del seguimiento de los cánones profesionales de la práctica analítica, se respetarán los estándares de claridad a nivel terminológico, procurándose utilizar las palabras explicitando su sentido más adecuado y, si hubiera necesidad, modificando su sentido en cada situación concreta para evitar así confusiones, falacias y malentendidos. En lo que toca a la argumentación, estamos obligados a probar y defender toda afirmación de relevancia filosófica en este trabajo, esto a partir de reglas inferenciales de la lógica formal y también considerando herramientas y criterios propios de la lógica no formal y del pensamiento crítico. Con respecto a la corrección académica, se alude directamente a través de citas textuales o referencias bibliográficas a los trabajos actualizados más relevantes sobre el asunto en cuestión respetando la normativa de la *American Psychological Association*.

Por lo dicho, en esta investigación utilizaremos las herramientas proporcionadas por la lógica moderna. Es preciso indicar que este trabajo no busca desarrollar tópicos netamente matemáticos sobre lógica sino, más bien, lo que requiere es plantear una reflexión dentro del marco teórico de la filosofía de la lógica con el fin de investigar sus propios fundamentos (tarea que está asociada al quehacer filosófico[4]). Esto no impide, obviamente, que se pueda hacer uso de los dispositivos lógicos que impliquen el uso de la lógica proposicional, de la lógica de predicados de primer grado así como de lógicas alejadas de la clásica, como, por ejemplo, la paraconsistente, la paracompleta o la relevante. También, consideraremos algunos elementos de lógica no formal, principalmente, la lógica de la conversación de Paul Grice la cual incide en el aspecto pragmático del lenguaje.

Antes de dar paso al desarrollo de esta investigación quisiera agradecer la gentileza de Adán Ochoa Yupanqui y Luis Estrada Pérez quienes con su apoyo logré afianzar temas de interés común. Asimismo, a los grupos “Sentido y Referencia” (de la Decana de América) a “Conjeturas y Refutaciones” (de la Universidad Nacional Federico Villareal) y, también, al Círculo de Debate “San Marcos” pues tuvieron la amabilidad de cederme espacios en sus eventos con el fin de exponer algunas ideas contenidas en este trabajo. Finalmente, no puedo dejar de lado los constantes consejos de Miguel León y Óscar García, ni tampoco sería justo omitir a mis profesores de Seminario de Tesis Gilberto Bustamante, Javier Aldama y Miguel Polo. Sin todos estos amigos no se hubiera podido echar a andar el engranaje que sostiene a todo este trabajo. *Sulpayki, masiykuna*.

[4] Este trabajo cumple con rasgos filosóficos bien precisos. Es totalizador pues incluye tanto a la lógica formal como a la no formal. Es radical pues busca los fundamentos, el origen del problema originado por la paradoja. Es crítico pues cuestiona las soluciones propuestas a la misma. Es problemático pues encuentra una cuestión que no es tan obvia, a saber, hay expresiones no contradictorias que producen inconsistencia absoluta. Y es racional pues argumenta para defender ideas al respecto.

CAPÍTULO I

LAS PARADOJAS DE *EL MENTIROSO*,

DE RUSSELL Y DE CURRY

> *Por paradoja se entiende una proposición que es "contraria a la creencia". Las paradojas son de dos tipos: las que desafían alguna de las ortodoxias habituales (generalmente sin una explicación suficiente); y las que comenzando con premisas intuitivamente aceptables, derivan de ellas una contradicción, algo imposible que sea verdad.*
> **ROGER SCRUTON**

En esta parte del trabajo se busca estudiar la paradoja de Curry. Para lograr esto, primero exponemos sucintamente las paradojas de *El Mentiroso* y la de Bertrand Russell. Seguidamente, explicamos, después de plantearlas, algunas de las soluciones propuestas por Tarski, Russell y Zermelo. Finalmente, nos ocupamos de la paradoja de Curry. Hay que notar que la paradoja de Curry tiene dos versiones que son muy afines a cada una de las paradojas antes mencionadas. Sin embargo, la diferencia más resaltante es que ni usan la negación ni derivan en una contradicción. Terminamos esta parte presentando una propuesta clásica para solucionarla.

1. 1. La paradoja de *El Mentiroso* [5]

Si bien, según Bochenski (1985, pp. 141-144), no tenemos noticia del planteo original de la paradoja de *El Mentiroso* elaborada por Eubúlides de Megara sino una agrupación de

[5] Nos basamos en Mora (2014a).

distintas variaciones de la misma, aquí consideraremos que esta paradoja surge cuando alguien se expresa del siguiente modo:

A. "Lo que digo es una mentira" [6]

Ante esto, la cuestión problemática es: "¿Es falsa o verdadera la oración A?".

Susan Haack (1982, pp. 173-174) elabora así *El Mentiroso*:

1. La oración con número 1 es la oración "Toda oración numerada con 1 está negada".

El enunciado anterior, formalmente, se expresaría de este modo:

1. $\mathbf{r} = (\forall\, \mathbf{y})\ [(\mathbf{r} = \mathbf{y}) \rightarrow\ \sim\mathbf{y}]$

En sentido técnico, la definición de Piscoya (1995, p. 205) y García Zárate (2007, p. 233) de *paradoja* es así: "Las paradojas son tipos especiales de contradicción [aquella dada por una oración] cuya verdad implica su falsedad, del mismo modo que su falsedad implica su verdad". Esta definición funciona muy bien para la paradoja de *El Mentiroso*. Pues bien, revisemos esta paradoja para entenderla. Pongamos por hipótesis que hay una oración que dice de sí misma que es falsa.

Hipótesis: **1. La oración numerada con 1 es falsa.**

Cuestión: ¿es verdadera o es falsa la oración numerada con 1?

Por un lado, si 1 es verdad, entonces lo que dice se cumple. Pero, si se cumple lo que dice, entonces 1 es falsa. Es decir, **1 es verdad → 1 es falsa.**

Por otro lado, si consideramos que 1 es falsa, entonces se confirmaría lo que dice dicha oración. Pero, si lo dicho por esa oración se confirma, entonces 1 es verdadera. Es decir, **1 es falsa → 1 es verdadera.**

[6] Existe cierto aire de familia entre esta paradoja, la del Puente, la de Cervantes y la de Protágoras. (Mora, 2014b)

Así pues, tenemos que si 1 es verdadera, entonces 1 es falsa y que si 1 es falsa, entonces 1 es verdadera. Aplicando la definición del bicondicional se obtiene que **1 es verdadera si y solo si 1 es falsa**.[7]

Se ha pensado que la intención original de Eubúlides de Megara al plantear su paradoja era criticar al racionalismo (es decir, la confianza en la razón y la lógica) explicitando que sus mismos patrones fundamentales de raciocinio, sus mismas reglas, llevaban a la inconsistencia generada por una contradicción, algo que los lógicos megáricos de por sí rechazaban como característica de un razonamiento confiable. Así, sucede que la contradicción a la que se arribaba era opuesta a la razón (pues la desafiaba), pero al mismo tiempo también era deducida usando la razón (pues paso a paso la acataba).

Para poder comprender esta paradoja, comenzaremos por llamar m a la oración “m es falsa”. Luego, aplicaremos dos pruebas condicionales que, al final, reuniremos para establecer el carácter paradójico de *El Mentiroso*. Sin embargo, antes es preciso indicar que la regla I hace alusión a la regla de las identidades planteada por Suppes (1979), según la cual si consideramos que S es una fórmula abierta, de S y $t_1 = t_2$ se puede derivar T, siempre y cuando T resulte de S reemplazando una o más ocurrencias de t_1, en S, por t_2. Asimismo, hay que señalar que la regla ET alude al esquema simplificado de Tarski sobre la verdad. Según este:

(ET) “p” es verdadera ↔ p

[7] Además, “si 1 es verdadera, entonces 1 es falsa” se puede reducir a “1 es falsa” asumiendo que ~(1 es verdadera) = 1 es falsa; y “si 1 es falsa, entonces 1 es verdadera” se puede reducir a “1 es verdadera” asumiendo que ~(1 es falsa) = 1 es verdadera. Así pues, considerando todo lo anterior, de la mentada argumentación paradójica se podría deducir **1 es falsa y verdadera**.

Este esquema puede encontrarse en el texto de Tarski "La concepción semántica de la verdad y los fundamentos de la semántica" (1997) y puede aplicarse a una proposición dada o introducirse en cualquier prueba manteniendo la misma forma.

Enseguida, utilizaremos dos veces la prueba condicional para probar la paradojicidad de *El Mentiroso*. Sea m la oración que afirma que m es falsa.

1. m = "m es falsa"	
Vamos a suponer que m es verdadera.	
2. m es verdadera	PA[8]
3. "m es falsa" es verdadera	I (1,2)
4. "m es falsa" es verdadera ↔ m es falsa	ET[9]
5. "m es falsa" es verdadera → m es falsa	Def. Bicond., Simp. (4)
6. m es falsa	Modus Ponens (3,5)
7. m es verdadera → m es falsa	Prueba Condicional (2-6)
Ahora, supongamos que m es falsa.	
8. m es falsa	PA
9. "m es falsa" es verdadera ↔ m es falsa	ET[10] (8)
10. m es falsa → "m es falsa" es verdadera	Def. Bicond., Simp. (9)
11. "m es falsa" es verdadera	Modus Ponens (8,10)
12. m es verdadera	I (11,1)

[8] PA significa "premisa adicional". Este paso se suele usar cuando se recurren a pruebas condicionales o por reducción al absurdo.
[9] La aplicación de este esquema se hace manera trivial, es decir, es una verdad que se aplica para la oración "m es falsa".
[10] De nuevo, la aplicación de este esquema se hace de modo trivial, pero aquí es obvio que se haya relacionado al paso 8 de la deducción.

13. m es falsa → m es verdadera Prueba Condicional (8-12)

Finalmente, luego de conjuntar 7 y 13 podemos aplicar la definición del bicondicional para obtener

14. m es verdadera ↔ m es falsa Conj., Def. Bicond. (7,13)

Revisemos el argumento anterior. Usa tres supuestos. En primer lugar, considera que las **reglas básicas de la lógica clásica**, como el *modus ponens* y la prueba condicional, son válidas e inocuas. En segundo lugar, asume que la capacidad del lenguaje para **construir oraciones autorreferentes** no parece ser problemática. Por ejemplo, la oración "Esta oración tiene cinco palabras" tiene sentido y es verdadera. Finalmente, acepta el uso de **principios elementales** que rigen el predicado "es verdadero". Así pues, que el pasto sea verde es lo que hace que la oración "el pasto es verde" sea verdadera, y viceversa. Por ende, podemos afirmar que la oración "el pasto es verde" es verdadera si y solo si el pasto es verde. Esto se puede generalizar para toda oración declarativa A:

Los bicondicionales de la forma *la oración "x" es verdadera si, y solo si, x*, donde "x" es un nombre de la oración x, son trivialmente verdaderos.

Aquí tenemos los ya mencionados bicondicionales del tipo ET. Resumiendo el análisis, las reglas de la lógica clásica, la autorreferencia del lenguaje y los principios básicos en relación a la verdad producen y permiten contradicciones tan problemáticas como la de *El Mentiroso*. (Martínez, 2014, p. 12)

1.1.1. La jerarquía de los lenguajes de Tarski[11]

Esta propuesta le pertenece al lógico polaco Alfred Tarski. Él (siguiendo el fisicalismo) busca una definición de la verdad para los lenguajes formales que emplee términos semánticos definidos en base a términos no semánticos. Para ello, considerando el carácter positivista de los integrantes del círculo vienés su proyecto empezaba definiendo todos los conceptos semánticos en función al concepto de verdad, para luego definir el concepto de verdad tomando como base al concepto de satisfacción y, por último, definir satisfacción en base a términos físicos y lógico-matemáticos. Pero, una satisfactoria definición de la verdad debe acatar dos exigencias elementales: 1) la adecuación material y 2) la corrección formal. La primera exigencia hace referencia a los límites del contenido que ha de tener cualquier definición que sea satisfactoria. Ello se consigue mediante el estudio de la siguiente convención V (o esquema T, es decir, ET):

(ET) *x es verdad-en-L si y solo si p,*

Considerando que "p" es cualquier oración, y "x" el nombre de esa oración

Algo que podemos notar enseguida es la indicación de que lo verdadero está en L, es decir, en un cierto lenguaje objeto, a saber, el español actual. Al respecto, es necesario aclarar que en el esquema T la primera frase "x es verdadera en L" contiene a x como un nombre de una oración (aquí x está en mención), por ende, dicha frase está en un metalenguaje; mientras que el segundo elemento "p" es sencillamente una oración (aquí p

[11] En esta parte del trabajo seguimos y modificamos el desarrollo expuesto en *Teoría del conocimiento* de Óscar García (2014, pp. 84-86) con quien colaboramos para elaborar lo que enseguida se puede apreciar.

está en uso). Es notorio que la definición de la verdad que facilita Tarski está dada en un metalenguaje. Por ello, se insiste en decir que para Tarski la verdad es un predicado particular, una palabra al estilo de "sujeto", "verbo" y "artículo". Por ello, para hablar de ella, es menester recurrir a un metalenguaje, esto es, un lenguaje usado para hablar sobre el mismo lenguaje. Un asunto se debe resaltar, dicho metalenguaje almacena más términos, es decir, tiene más riqueza respecto del lenguaje objeto, puesto que contiene algunos términos que refieren a oraciones completas del lenguaje objeto.

Ahora bien, la exigencia de adecuación material implica buscar dar una definición de la verdad 1) que otorgue condiciones de verdad para cada oración en particular, 2) que permita que esas condiciones de verdad dependan del valor semántico de las partes de la misma oración, y, 3) que haga posible que cada instancia del esquema T resulte verdadera. Por ejemplo, en base al esquema T podemos deducir:

1. "Los girasoles son flores" es verdad en L si y solo si los girasoles son flores.
2. "Marte es un planeta" es verdad en L si y solo si Marte es un planeta.
3. "El perro es mamífero" es verdad en L si y solo si el perro es mamífero.

Hay que advertir que ni el esquema T ni ninguna instancia particular de dicho esquema (como las tres anteriores que solo son definiciones parciales de la verdad) son definiciones de la verdad. Este esquema solo sirve para fijar la extensión (es decir, las fórmulas bicondicionales aludidas) y no la intensión (es decir, el significado) del predicado "verdadero".

La segunda exigencia (la de corrección formal) alude a los límites de la forma que debe tener dicha definición. En este punto se menciona a la vieja paradoja de *El Mentiroso* que atenta contra esta exigencia dando lugar a contradicciones inadmisibles. La versión más popular de la paradoja de *El Mentiroso* usa la autorreferencia: "Alguien dice *m*: "Lo que digo ahora es falso". ¿Es *m* dicha por él es falsa o es verdadera?" Resulta sencillo demostrar, como ya se ha hecho en las páginas previas, que *m* es tanto falsa como verdadera. Para entender esto se tendría que aceptar previamente que

1) Toda proposición es o bien verdadera o bien falsa. **(Tercio excluso)**

2) La oración "m" expresa una proposición. **(Principio básico de significatividad)**

De este modo, nos percatamos que esta oración, cuya suposición de verdad conduce a su falsedad y cuya suposición de falsedad conduce a su verdad, se constituye en una auténtica paradoja lógica.

Para resolver este asunto, Tarski (1997) en vez de anular la validez de las leyes lógicas que subyacen al lenguaje natural, prefiere partir dicho lenguaje en dos jerárquicos niveles: lenguaje objeto (nivel inferior) y metalenguaje (nivel superior). Como ya se precisó antes, el metalenguaje posee mayor contenido en relación al lenguaje objeto. Esto permitirá que las oraciones autorreferentes, es decir, que se refieran a sí mismas (como la de *El Mentiroso*) se puedan distinguir de aquellas oraciones que no aluden a sí mismas[12].

Entonces, para esquivar los problemas lógicos que ocasiona *El Mentiroso* se va a exigir que las oraciones que afirmen la verdad de otras oraciones (o de sí mismas) estén en

[12] Esto está muy relacionado con el teorema de Tarski acerca de la indefinibilidad del predicado de verdad en un mismo lenguaje. (Mosterín y Torreti, 2002, p. 551)

un nivel superior denominado metalenguaje. Con ello, el anterior razonamiento ya no se sigue. Veamos. Supongamos que la proposición A dice “Yo miento”. El consejo de Tarski implica que variemos dicha expresión del siguiente modo:

A = “Yo miento-en-L-1”,

sin embargo,

A está ubicado en L-2.

Ahora bien,

si **es verdad que A** (yo miento-en-L-1), entonces realizo afirmaciones falsas-en-L-1 pero, dado que A está en L-2, entonces **A no sería falsa de modo necesario**.

Pero,

si **es falso que A** (yo miento-en-L-1), entonces realizo afirmaciones verdaderas-en-L-1 y, dado que A está en L-2, entonces **A no sería verdad de modo necesario**.

Inmediatamente, no es difícil notar que la verdad de A no conduce necesariamente a la falsedad de A, y que la falsedad de A no conduce necesariamente a la verdad de A. Así, utilizando los niveles del lenguaje la paradoja en cuestión desaparece, es decir, se disuelve.

1. 2. La paradoja de Bertrand Russell

La paradoja de Bertrand Russell es una paradoja de la teoría de conjuntos pero también se le conoce como paradoja de las clases. Expliquemos esto. Frege fundamentó lógicamente a la aritmética. Esta se basaba en el supuesto de que para cada propiedad o condición φ (y), formulable en el lenguaje, existe el conjunto de todas las cosas que tienen esa misma propiedad o cumplen dicha condición (a esto también se le denomina *axioma de comprehensión*). Así, dicho conjunto se representa simbólicamente así {y / φ (y)} y esto alude a todas las *y*'s que cumplen con la condición φ(y). Obviamente, los objetos de este conjunto satisfacen la condición que la define, lógicamente,

$(\forall \mathbf{x})\ (\mathbf{x} \in \{\mathbf{y} / \ \boldsymbol{\varphi}\ (\mathbf{y})\} \leftrightarrow \ \boldsymbol{\varphi}\ (\mathbf{x}))$**;**

donde utilizamos el símbolo ∈ para simbolizar la pertenencia. Ciertamente, hay conjuntos que no se autopertenecen, esto es, conjuntos *y* tales que $y \notin y$. Por ejemplo, el conjunto de todos los perros no es un perro. Pero yendo más allá, Russell se preguntó por el conjunto de todos las conjuntos que cumplen dicha condición (estos son los más comunes y abundantes desde el punto de vista intuitivo). Esto es, el conjunto R de todas los conjuntos que no se pertenecen a sí mismos, es decir,

$R = \{y / \ y \notin y\}$.

El supuesto de que este conjunto existe produce de forma inmediata una contradicción. Así pues, si partimos de la verdad de la fórmula

$(\forall x)\ (x \in \{y / \ y \notin y\} \leftrightarrow x \notin x)$

y tomamos en cuenta lo que es R

$R = \{y / \ y \notin x\}$

tendremos que

$(\forall x)\ (x \in R \leftrightarrow x \notin x)$.

Finalmente, aplicando la ejemplificación universal, pues lo que se aplica para cualquier x se aplica en especial para R, tenemos

$(R \in R) \leftrightarrow (R \notin R)$,

lo cual es una visible contradicción paradójica.

Enseguida, expresaremos la paradoja russelliana de una manera distinta a la habitual (Mora, 2016, pp. 87-88). Empecemos considerando al conjunto vacío ϕ. Este conjunto es raro porque no tiene elementos, es decir, $\phi = \{ \}$. Es raro precisamente porque si no posee elementos no se comprende por qué sería un conjunto dado que un conjunto es en cualquier caso una agrupación de elementos. Además, (dado que no contiene cosa alguna) ϕ no se contiene a sí mismo. Esta será una propiedad muy útil para nuestra formulación de la paradoja de Russell.

Supongamos que únicamente existe el conjunto vacío $\phi = \{ \}$. Ahora, busquemos conjuntos que no se contengan a sí mismos y denominemos "R" a esa agrupación. Pues bien, ahora tenemos en lenguaje de la teoría de conjuntos

$R = \{C / C \notin C\}$

Es decir, R es el conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos. Y, como ϕ no se contiene a sí mismo ya que no contiene nada, entonces ϕ debería estar dentro de R.

$\phi \in R$

Pero, al darnos cuenta que R contiene al conjunto ϕ, que es un conjunto que no se contiene a sí mismo nosotros queremos saber cómo es R. Por eso, preguntamos ¿R se contiene a sí mismo o no?

Por el momento, podemos suponer que no se autocontiene,

$R \notin R$.

Sin embargo, si R es de este modo, entonces tomando en cuenta que R agrupa a los conjuntos que no se contienen a sí mismos, R debería ser su propio miembro. Por esta razón, modificamos el esquema anterior y, ahora, tenemos:

$R \in R$

El problema es que R ahora se ha tornado en un conjunto que se autocontiene. Pero, como R solo reúne a los conjuntos que no se autocontienen entonces R no debería estar involucrado dentro de R. Por lo tanto,

$R \notin R$.

Sin embargo, esto hace que R no se autocontenga, lo cual es una prueba de que R debe estar involucrado dentro de R, es decir,

$R \in R$

Pues bien, este proceso de indecisión de si R está o no está dentro de R es a lo que se denomina la paradoja de Russell: hemos mostrado que si $R \in R$ entonces $R \notin R$ y si $R \notin R$ entonces $R \in R$. Lo cual equivale a $(R \in R) \leftrightarrow (R \notin R)$. Y, de esta manera, el conjunto de los conjuntos que no se autocontienen se vuelve un objeto provocador de paradojas.

La paradoja de Russell surgía, según Mosterín (1980, pp. 25-26), de aceptar dos principios intuitivos:

(a) para toda condición hay un conjunto de aquello que satisface dicha condición y

(b) todo conjunto es algo que puede ser elemento de (pertenecer a) otros conjuntos.

El primer principio es el ya mencionado axioma de comprehensión, el cual sostiene que para cada condición, hay un conjunto de las cosas que satisfacen dicha condición. En lenguaje formal, $(\exists B)(\forall x)(x \in B \leftrightarrow \varphi(x))$. Ejemplo: todo objeto x pertenece al conjunto de los sanmarquinos si y solo si se puede decir que "ser sanmarquino" es aplicable al objeto x. El segundo principio es un supuesto que luego será restringido por la axiomática de Zermelo. Enseguida, ofreceremos la prueba formal:

1. $(\exists B)(\forall x)(x \in B \leftrightarrow \varphi(x))$	Axioma de comprehensión
2. $(\exists B)(\forall x)(x \in B \leftrightarrow x \notin x)$	I (1,*) [13]
3. $(\forall x)(x \in R \leftrightarrow x \notin x)$	Ejemplificación existencial (2)
4. $R \in R \leftrightarrow R \notin R$	Ejemplificación universal (3)

Esta última afirmación constituye la contradicción hallada por Russell en sus investigaciones.

1.2.1. Teoría simple de los tipos[14]

Según Russell, las entidades se pueden dividir en una jerarquía de diferentes tipos lógicos, el más bajo consiste en todos los individuos (por ejemplo, sapos). El siguiente en todos los atributos que podrían poseer esos individuos (por ejemplo, anfibios). El siguiente en todos los atributos de los atributos que podrían poseer esos individuos (por ejemplo, animal), y así sucesivamente. Se debe, además, considerar la siguiente saludable restricción: cualquier atributo que pueda predicarse (de modo significativo) de una entidad de un tipo lógico no puede predicarse significativamente de cualquier entidad que posea cualquier otro tipo lógico. Por ejemplo, un individuo puede ser de color rojo, pero claramente sería un

[13] * corresponde a la expresión: $\varphi(x) = x \notin x$.
[14] Lo que sigue se basa en Copi (1995, pp. 180-181).

sinsentido decir que tal o cual atributo es de color rojo, pues los atributos no tienen colores, en cambio, las cosas sí. Y un mismo atributo puede dar lugar a muchas ejemplificaciones o instancias, es decir, individuos a los cuales se les puede aplicar. Por ejemplo, el atributo "ser presidente peruano". Pero no tiene sentido afirmar ni negar que un individuo tenga muchas instanciaciones pues un individuo es ya una ejemplificación. Por ello, no tendría sentido decir que el presidente peruano Martín Vizcarra tiene abundantes instanciaciones.

Expresaremos, de modo formal, la teoría simple de los tipos. Usaremos letras minúsculas para señalar a los individuos y mayúsculas para señalar a los atributos, podemos representar esta jerarquía del siguiente modo, donde el subíndice que se le pone a una función indica en la jerarquía su nivel correcto y adecuado:

.	.	.	.			
.	.	.	.			
.	.	.	.			
tipo 3:	F_3	G_3	H_3	.	.	.
tipo 2:	F_2	G_2	H_2	.	.	.
tipo 1:	F_1	G_1	H_1	.	.	.
tipo 0:	a	b	c	.	.	. (Mora, 2016, p. 132)

Esta es la restricción. Solo una función de tipo 1 puede predicarse con significado de un individuo, y generalizando, una función de tipo i puede con significado predicarse de una función de tipo j si y solo si $i=j+1$, por ende, $i>j$. Notemos la semejanza con la teoría de los metalenguajes de Tarski.

Con esta teoría es posible tratar la paradoja de los conjuntos de Russell. Como se puede notar, toda entidad se dispone de acuerdo a tipos jerárquicos. Esto determina que, mientras los entes del mismo tipo pueden estar juntos en un conjunto, no tiene sentido hacer lo mismo con entidades de tipos diferentes. Por ejemplo, hay un conjunto de cosas púrpuras. Pero, no existe un conjunto que junta a las cosas púrpuras con la clase de los objetos púrpuras. El tipo del conjunto de las cosas púrpuras es de un tipo superior que el tipo de las cosas púrpuras aisladamente. Pongamos un ejemplo. En la medida que subimos en las jerarquías, esto se vuelve repetitivo. Existe un conjunto cuyos miembros son el conjunto de las cosas púrpuras, el conjunto de las cosas rojas, el conjunto de las cosas verdes y el conjunto de las cosas amarillas. Pero, no hay ningún conjunto que consista en la agrupación de todas ellas juntas con el conjunto de los conjuntos de cosas coloreadas. De esta manera, se anula cualquier modo de construir un conjunto cuyos miembros sean de diferente tipo. Así, no se deben introducir conjuntos con miembros de diferente nivel lógico, ya que lo que va a resultar va a ser una expresión no bien fundada en la lógica. Esto es, será una expresión sin significado. Por ende, la expresión "conjunto de los conjuntos que no son miembros de ellos mismos" no se permite, no está bien formada, no tiene sentido (Scruton, 2003, p. 392). Y así, esta paradoja se disuelve. [15]

[15] Escribe Russell: "(…) toda esa cuestión de si una clase es o no miembro de sí misma carece de sentido; esto es, que ninguna clase es, ni deja de ser, miembro de sí misma, y que ni siquiera esto último tiene visos de ser cierto, ya que, cuando decimos tal cosa, se trata simplemente de palabras desprovistas de todo significado. (…)" (Russell, 1986, p. 230)

1.2.2. La axiomática de Zermelo

La estrategia de Zermelo consiste en impedir que puedan surgir en la teoría conjuntos "demasiado grandes" que son los que pueden originar a estas incómodas contradicciones. Por ello, se encarga de ponerle límites al esquema de formación de conjuntos. Ahora, estarán relacionados a algún conjunto ya dado con anterioridad. Así, este se vuelve inofensivo. Entonces, el esquema axiomático de formación de conjuntos (es decir, el axioma de separación introducido por Zermelo) sostiene que para todo conjunto ya dado A y toda condición $\varphi(x)$, hay un conjunto de los elementos de B que satisfacen dicha condición.

1. $(\forall A)\ (\exists B)\ (\forall x)\ [x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge \varphi(x))]$ Axioma de separación

2. $(\exists B)\ (\forall x)\ [x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge \varphi(x))]$ Ejemplificación universal (1)

En base a esto, la paradoja de Russell no es deducible, pues por el mismo razonamiento de antes lo que ahora se obtiene es

3. $(\exists B)\ (\forall x)\ [x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin x)]$ I (2, *)

4. $(\forall x)\ [x \in R \leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin x)]$ Ejemplificación existencial (3)

5. $R \in R \leftrightarrow (R \in A \wedge R \notin R)$ Ejemplificación universal (4)

Esto ya no es contradictorio, pues lo que ahora se deduce es

6. $R \notin R \wedge R \notin A$ Def. del bicondicional, del condicional y Absorción (5)[16]

es decir, que el conjunto R no se autopertenece ni le pertenece a A.

[16] Se asume además que $\sim(R \in R)$ equivale a $R \notin R$ y que $\sim(R \in A)$ equivale a $R \notin A$.

Pero, ¿logra esta axiomatización deshacerse de todas las paradojas de la teoría de conjuntos? Para lograr dar respuesta última a este asunto tendríamos que tener una prueba de consistencia, cosa que no puede darse siguiendo el segundo teorema de Gödel[17]. Por lo tanto, en base a Beth, solo tendremos que sostener que lo que ha sido eliminado es el tipo de razones que en la versión cantoriana original de la teoría de conjuntos originaba paradojas, gracias a las limitaciones implementadas en axiomatizaciones como la elaborada por Zermelo. Es decir, este sistema no es una solución definitiva y, por ende, no da garantías fehacientes de que no se encontrará otras 'nuevas' paradojas. Algunos conjuntistas piensan que basta con las restricciones impuestas. Pero, en base a Gödel, la consistencia de la teoría de conjuntos no ha sido demostrada ni podrá serlo. Así, podemos afirmar con Poincaré que hemos puesto un muro alrededor del rebaño de ovejas para protegerlo de los amenazantes lobos, pero realmente no sabemos si dentro del muro han quedado encerrados y escondidos algunos peligrosos lobos aún. (Beth, 1975, pp. 30-31)

1.3. La paradoja de Curry

La paradoja de *El Mentiroso* planteada por Eubúlides de Megara ha recibido varias maneras de resolución o disolución. La más conocida es la propuesta de las jerarquías de los metalenguajes de Alfred Tarski. Sin embargo, esta ha sido criticada (Kripke, 1975). Asimismo, la paradoja de Russell sobre las clases ha sido considerada como un criterio para poder construir teorías de conjuntos que sean consistentes. La forma de enfrentar esta paradoja ha sido la de la teoría de los tipos (Russell y Whitehead, 1910). Pero, esta

[17] El segundo teorema de Gödel sostiene que si una teoría aritmética T es consistente (es decir, no tiene contradicciones), entonces su consistencia no puede ser probada en el mismo T. Es decir, no puede probarse con sus propios recursos expresivos la consistencia de una teoría aritmética.

propuesta no se ha salvado de las críticas de parte de los investigadores (Mosterín, 2000). Ahora bien, nos hemos topado con la paradoja de Curry[18]. Lo peculiar de esta última es que tiene formulaciones tanto dentro de la lógica clásica (al igual que la de *El Mentiroso*) como dentro de la teoría de conjuntos (al igual que la de Russell).

En 1942 Haskell B. Curry presentó lo que ahora se llama la paradoja de Curry en "The inconsistency of certain formal logic":

> Teorema. Si $\mathfrak{S}$ es un sistema combinatoriamente completo en el cual hay una operación de implicación $\supset$ tal que, para términos arbitarios $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$,
> I. $\vdash \mathfrak{M} \supset \mathfrak{N}$,
> II. $\vdash \mathfrak{M} \supset. \mathfrak{M} \supset \mathfrak{N} .\rightarrow. \vdash \mathfrak{M} \supset \mathfrak{N}$,
> III. $\vdash \mathfrak{M} \,\&\, \vdash \mathfrak{M} \supset \mathfrak{N} .\rightarrow. \vdash \mathfrak{N}$,
> luego cada término de $\mathfrak{S}$ es una aserción.
> La prueba del siguiente teorema depende del siguiente lema.
> Lema: Si $\mathfrak{S}$ es como en el teorema y si $\mathfrak{B}$ es un término tal que hay un término $\mathfrak{U}$ para el cual $\mathfrak{U} = \mathfrak{U} \supset \mathfrak{B}$, luego $\mathfrak{B}$. (1942, pp. 115-117)

Tal vez la versión más intuitiva de esta paradoja se debe a Arthur N. Prior quien la publicó en "Curry's paradox and 3-valued logic" (1955). Este último utilizó la paradoja de Curry de tal modo que pareciese una demostración de la existencia de Dios. Esta versión la veremos más adelante.

Básicamente, como ya se anotó, hay dos versiones diferentes de la paradoja de Curry, una relacionada con conceptos de la teoría de la verdad y otra involucrada con los de la teoría de conjuntos. Ambas versiones buscan ser detenidas tanto desde un enfoque basado en la lógica clásica como desde uno fundado en las no clásicas.

[18] Haskell Brooks Curry (1900-1982) fue un matemático y lógico estadounidense. Curry es mejor conocido por su trabajo en lógica combinatoria, por la paradoja que lleva su nombre (que estudiamos en este trabajo). Hay tres lenguajes de programación que llevan su nombre, Haskell, Brook y Curry, así como el concepto de currificación, una técnica utilizada en matemáticas e informática para transformar funciones.

Esta paradoja se plantea a partir de una condicional cuyo antecedente afirma que

(Curry) **Si todo este condicional es verdadero entonces A es verdadera**, y **A** es cualquier oración.

Tal vez se podría decir que casi nadie habla de esa manera: "Si esto que te digo es verdadero entonces esto otro se cumple". Sin embargo, coloquialmente, se puede asociar a la paradoja de Curry las siguientes expresiones muy semejantes:

1. Si estoy en lo cierto entonces la cocinera es la asesina.
2. Como tengo razón, aceptarás que mi propuesta es adecuada.
3. El cuchillo está en la cocina, si es que no estoy equivocado.
4. Si confían en lo que digo, podremos ir a visitarte.

Ahora bien, para que una oración O sea análoga a la oración de Curry debe cumplir al menos dos condiciones:

(1) O debe ser una oración condicional y

(2) O debe ser autorreferencial.

Podemos notar que los 4 condicionales anteriores son autorreferenciales. Por ende, son instancias de la paradoja de Curry. El problema que aparece aquí es que aplicando las reglas lógicas normalmente aceptadas es posible probar que A es verdadera, siendo A incluso una proposición claramente falsa. Asimismo, existe también una versión de esta misma paradoja en la teoría de conjuntos. El asunto llamativo es que, en apariencia, pareciera ser una reformulación de las paradojas ya mencionadas. La complejidad de la paradoja de Curry se puede deber a que mientras que la paradoja de *El Mentiroso* se plantea mediante la proposición que dice de sí misma que **no es verdadera** y la paradoja de Russell se formula a través del conjunto de todos los conjuntos que **no se contienen a sí mismos**, la de Curry se presenta por medio de una afirmación que dice que **si esta condicional es verdadera entonces se sigue cualquier cosa**.[19]

La primera versión de la paradoja de Curry se puede presentar dentro del marco de la lógica clásica[20]. Pues bien, la paradoja de Curry (Clark, 2009, pp. 78-79) parte de un tipo particular de condicional autorreferencial como se demuestra en este ejemplo:

1. Si "1" es verdadera, entonces Lima es la capital de Rusia.

En base a esto, parece como si pudiésemos demostrar la conclusión de que Lima es la capital de Rusia o cualquier otra que deseásemos, por ejemplo, A. Y la verdad de esta conclusión no depende de la verdad de 1. Como la expresión aludida es una condicional utilizaremos la prueba condicional para demostrarla:

[19] Existe una relación entre la paradoja de Epiménides (a veces confundida con la de *El Mentiroso*) y la paradoja de Curry. (Goldstein, 1986, pp. 117-121). Para Goldstein, la oración de Epiménides puede reducirse a:
(1) Este enunciado es falso y q
El cual al ser analizado resulta en lo siguiente. (1) no puede ser verdadero pues en ese caso "Este enunciado es falso" sería verdadero y habría contradicción. Por ende, debe ser falso y q debe necesariamente ser falso.
Asimismo, la oración de Curry puede reducirse a:
(2) Este enunciado es falso o q
El cual al ser analizado resulta en lo siguiente. (2) no puede ser falso pues en ese caso "Este enunciado es falso" sería falso y habría contradicción. Por ende, debe ser verdadero y q debe necesariamente ser verdadero.

[20] La lógica clásica es aquella que presenta tres características definitorias, a saber, es asertórica –o sea, proposicional–; posee un lenguaje de primer orden –esto es, uno en virtud del cual sólo se cuantifican las variables individuales–; y asume como válidos los tres principios lógicos fundamentales: el de identidad, el de no contradicción y el de tercio excluido. Asimismo, la lógica clásica es bivalente, es decir, dada una proposición, esta solo puede ser o bien verdadera o bien falsa, no hay una tercera opción (esta es un consecuencia del tercio excluido). Además, es veritativo-funcional. Ello significa que, dada una proposición, su valor de verdad (que sea verdadera o falsa) dependerá de sus conectivas lógicas definidas como funciones de verdad y de los valores de verdad que se asignen a sus variables. En otras palabras, el hecho de que una fórmula sea verdadera o falsa depende de las conectivas (conjunción, disyunción, negación, condicional y bicondicional) y del valor de verdad que le demos a las variables proposicionales.

1. c = “c” es verdadera → A	
2. “c” es verdadera	PA
3. “c” es verdadera ↔ c	ET
4. “c” es verdadera → c	Def. Bicond., Simp. (3)
5. c	Modus Ponens (4,2)
6. “c” es verdadera → A	I (5,1)
7. A	Modus Ponens (6,2)
8. “c” es verdadera → A	Prueba Condicional (2-7)

Hasta aquí hemos probado que (1) es una fórmula demostrable. Pero, si seguimos con la prueba, podemos llegar a demostrar A.

9. c	I (8,1)
10. “c” es verdadera ↔ c	ET (9)
11. c → “c” es verdadera	Def. Bicond., Simp. (10)
12. “c” es verdadera	Modus Ponens (11, 9)
13. A	Modus Ponens (12,8)

Pero, como recordamos, A era la expresión “Lima es la capital de Rusia”. Por lo tanto, hemos probado que es verdad que Lima es la capital de Rusia[21]. Pero, sabemos que esto es

[21] Existe otro modo de plantear la paradoja utilizando el principio de contracción. Según Bacon:

> Un central obstáculo al proyecto de encontrar una lógica adecuada, particularmente una lógica condicional adecuada, ha sido un número de variantes de la paradoja de Curry. Por ejemplo, uno no puede agregar toda instancia del principio de contracción, W, a una teoría ingenua de la verdad.
>
> W $(\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)$
>
> Es valioso esbozar por qué esto es así. Suponga que tenemos una oración γ, la ‘oración de Curry’, satisfaciendo (C): $\gamma \leftrightarrow (\mathrm{Tr}(`\gamma') \rightarrow \phi)$. Intuitivamente $\gamma$ dice de sí mismo que ella implica $\phi$. Podemos entonces inferir que $\gamma \rightarrow (\gamma \rightarrow \phi)$ sustituyendo $\gamma$ por $\mathrm{Tr}(`\gamma')$ en la dirección de izquierda-a-derecha de (C). Por W y modus ponens obtenemos (*) $\gamma \rightarrow \phi$, y así $\mathrm{Tr}(`\gamma') \rightarrow \phi$ y finalmente γ por la dirección de derecha-a-izquierda de (C). De (*) y γ tenemos ϕ por modus ponens. (Bacon, 2011, pp. 1-2)

falso. Por ende, admitimos que algo debe andar mal con este tipo de prueba, pues permite probar la verdad de cualquier proposición A. En base a esto, podemos sospechar que la paradoja es causada por el hecho de que las reglas de deducción utilizadas en la prueba son aquellas reglas estándar que se utilizan normalmente y que creemos inofensivas. Así pues, la paradoja está poniendo en duda la exactitud de estas reglas.

La segunda versión de la paradoja de Curry se presenta dentro del marco de la teoría de conjuntos[22]. Esta versión ha sido encontrada en el texto *Inconsistencias ¿por qué no?* (Bobenrieth, 1996, pp. 212-213). Una teoría ingenua de conjuntos acepta el principio intuitivo que dice que para cada condición hay un conjunto de las cosas que satisfacen dicha condición. Formalmente, sería:

1. $(\exists B)\ (\forall x)\ (x \in B \leftrightarrow Px)$ — Axioma de comprehensión

2. $(\exists B)\ (\forall x)\ [x \in B \leftrightarrow (x \in x \rightarrow A)]$ — I (1,*) [23] [24]

---

[22] La teoría de conjuntos es una rama de las matemáticas que estudia las propiedades de los conjuntos. Los conjuntos son colecciones abstractas de objetos, consideradas como objetos en sí mismas, y son una herramienta básica en la formulación de cualquier teoría matemática. Los inicios de esta disciplina se pueden rastrear hasta el trabajo de George Boole (1815-1864) titulado *Mathematical Analysis of Logic* donde buscó presentar a la lógica como si fuera parte de las matemáticas. Poco tiempo después, Gottlob Frege (1848-1925) buscó mostrar que la aritmética era una parte derivable de la lógica en *Die Grundlagen der Arithmetik*. Cantor había demostrado la numerabilidad de la totalidad de los números reales, en el sentido de que su infinitud no está al mismo nivel que la de los números naturales. En consecuencia, Cantor diseñó una nueva disciplina matemática entre 1874 y 1897: la hoy famosa teoría de conjuntos. Su obra fue, a la vez, admirada y condenada simultáneamente por sus contemporáneos. Desde ahí, los debates con relación a la teoría de conjuntos han estado cargados de convicción tanto de una como de otra parte. Es un hecho que la teoría de conjuntos es una teoría matemática; es, además, la teoría que se usa para fundamentar la aritmética y el resto de teorías vinculadas. Pero, a su vez, puede ser expresado en un lenguaje lógico de primer orden y tanto sus axiomas como sus teoremas constituyen una teoría de primer orden. De ahí, que los límites entre lógica y teoría de conjuntos sean un tanto difusos.

[23] * corresponde a la expresión: $Px = x \in x \rightarrow A$.

[24] Nicholas Rescher sostiene la paradoja de Curry encuentra un marco teórico adecuado de comprensión en relación a la paradoja de Russell, pues en lugar de hablar de conjuntos que no se

3. $(\forall x)\ [x\in C \leftrightarrow (x\in x \rightarrow A)]$ Ejemplificación existencial (2)

4. $C\in C \leftrightarrow (C\in C \rightarrow A)$ Ejemplificación universal (3)

5. $[C\in C \rightarrow (C\in C \rightarrow A)] \wedge [(C\in C \rightarrow A) \rightarrow C\in C]$ Definición del bicondicional (4)

6. $C\in C \rightarrow (C\in C \rightarrow A)$ Simplificación (5)

7. $(C\in C \rightarrow A) \rightarrow C\in C$ Simplificación (5)

8. $C\in C \rightarrow A$ Contracción (6)[25]

9. $C\in C$ Modus Ponens (7,8)

10. A Modus Ponens (8,9)

Nuevamente, hemos probado la verdad de cualquier proposición mediante una inferencia válida construida con reglas y leyes totalmente aceptables pero, esta vez, dentro de los cánones de una teoría ingenua de conjuntos.

Como ya hemos mencionado, de acuerdo a Prior (1955, pp. 177-182), también puede utilizarse el andamiaje conceptual usado por Russell para probar la existencia de Dios. Comencemos por entender lo que significa un portador-de-Dios. Es algo que contiene o

---

autopertenecen, Curry contempla el conjunto de conjuntos que si se autopertenecen entonces implican una proposición arbitraria. De este modo, certifica que la de Curry es una variante de la de Russell. (Rescher, 2001, p. 173).

[25] El principio de contracción es $[A\rightarrow (A\rightarrow B)] \rightarrow (A\rightarrow B)$. Es posible derivar a partir de este principio la paradoja de Curry como se puede apreciar en K. Meyer, R. Routley y J. M. Dunn:

> Podemos razonar como sigue. Sea que ‘C’ represente ‘$\{x: x\in x \rightarrow. x\in x\rightarrow q\}$’.
> Luego, como una instancia del axioma de contracción tenemos
> (8) $(C\in C \rightarrow. C\in C \rightarrow q) \rightarrow. C\in C \rightarrow q$
> Y como una instancia del principio de abstracción tenemos
> (9) $C\in C \leftrightarrow. (C\in C \rightarrow. C\in C \rightarrow q)$
> Mediante el reemplazo del lado izquierdo de (9) por el lado derecho en (8),
> (10) $C\in C \rightarrow. C\in C \rightarrow q$
> Reemplazando todo (10) con su equivalente mediante (9)
> (11) $C\in C$
> de donde por dos aplicaciones del modus ponens en (10),
> (12) q
> Dado que q puede ser cualquier fórmula, toda fórmula q es probable de este modo. (…) (Meyer *et. al.*, 1979, pp. 126-127)

cobija o resguarda a Dios. Ahora bien, podemos pensar en la clase de portadores-de-Dios (PD), la cual puede ser vacía. Pero, si hubiera algo así o no, lo que se entiende por un portador-de-Dios es una cosa la cual al ser miembro de sí misma implica que Dios existe (D). Así podemos establecer esto.

I. $(\forall x)\ [x \in PD \rightarrow (x \in x \rightarrow D)]$

Dado que esto se cumple para cualquier cosa, también se cumplirá para la clase de portadores-de-Dios. Así ahora tenemos

II. $(PD \in PD) \rightarrow [(PD \in PD) \rightarrow D]$

Aplicando la propiedad de la contracción:

III. $(PD \in PD) \rightarrow D$

Y de III se infiere:

IV. La clase de portadores-de-Dios es un miembro de la clase de cosas las cuales al ser miembros de sí mismos implica que Dios existe. En términos formales:

$(\forall x)\ (PD \in x \wedge x \in x) \rightarrow D$

Esto es, por definición de portador-de-Dios,

V. $PD \in PD$

Y, de III y V se deduce por Modus Ponens que "Dios existe".

Los anteriores resultados indican que es posible mostrar que la teoría en la que se pueda formular la paradoja de Curry será trivial pues si bien no concluirá en ninguna contradicción logrará hacer demostrable cualquier fórmula.

1.4. Comparación entre las paradojas mencionadas

La paradoja de Curry se vincula con las paradojas antes mencionadas. En cuanto a la paradoja de *El Mentiroso* notamos que ambas parten de una oración que predica algo de sí misma, en el caso de *El Mentiroso* se afirma su propia negación, en el caso de Curry se afirma su propia verdad. Sin embargo, la diferencia más saltante es que la de Curry se formula mediante una condicional cuyo consecuente puede ser cualquier clase de enunciado. En el caso de la paradoja de *El Mentiroso* la argumentación concluye en una contradicción; sin embargo, en el caso de la paradoja de Curry se concluye la verdad del enunciado que constituye el consecuente del condicional inicial.

En cuanto a la paradoja de Russell, notamos que tanto la de Curry como la Russell aluden a la teoría de conjuntos, pero mientras que en el caso de la de Russell la condición que desencadena problemas es la de no contenerse a sí misma por parte de una clase cualquiera, en el caso de la de Curry la condición es del tipo condicional. Este condicional sostiene que si un conjunto se contiene a sí mismo entonces se concluye la verdad de cualquier enunciado. También, llama la atención la utilización de una regla especial que es la de contracción en ambas versiones de la paradoja de Curry.

Finalmente, indicaremos que la oración "m" que dice de sí misma que es falsa (m= "m es falsa") y la fórmula que dice que un conjunto pertenece a otro conjunto si y solo si el primero no se contiene a sí mismo $[(\exists B)(\forall x)(x \in B \leftrightarrow x \notin x)]$ si bien se parecen a la que afirma de sí misma que si este condicional es verdad entonces es verdad otro enunciado (c= "c" es verdadera → A) y a la fórmula que dice que un conjunto pertenece a otro conjunto si y solo si el primero al contenerse a sí mismo implica cualquier enunciado $\{(\exists B)\ (\forall x)\ [x \in B \leftrightarrow (x \in x \rightarrow A)]\}$ se distinguen en que estas dos últimas versiones de Curry no hacen uso de la falsedad ni de la negación (al menos no de manera explícita). De acuerdo a Moh Shaw-Kwei: "B. Russell dedujo la mencionada inconsistencia [de las clases] mediante la ayuda de la noción de negación. Más tarde, H. B. Curry sostuvo que podríamos conseguir el mismo resultado sin la ayuda de esa noción. (…)" (Moh Shaw-Kwei, 1954, p. 37). Además, no derivan en contradicción como sí ocurre con las dos primeras. Lo cierto es que las paradojas de Curry derivan en A, donde A puede ser cualquier enunciado incluso una contradicción aunque esto ni está establecido de antemano ni está descartado.

Concretamente, los problemas particulares provocados por la paradoja de Curry son los siguientes:

1) La paradoja de Curry muestra que algunas teorías de la verdad (o de conjuntos) son triviales. Y, como veremos más adelante, cuando tratemos sobre las soluciones no clásicas a la paradoja de Curry, incluso las que rechazan el principio de explosión ($\alpha, \neg\alpha \vdash \beta$) como las teorías no clásicas paraconsistentes no logran esquivarla.

2) Usualmente uno de los problemas de las paradojas es que no queda claro qué elementos involucrados en su desarrollo hay que rechazar (o limitar) para bloquear la paradoja. La paradoja de Curry es desconcertante porque resulta aún más complicado identificar cuál es el problema que genera la paradoja, especialmente si se considera importante conservar la autorreferencia y los principios como el esquema T o el axioma de comprehensión.

3) El principal problema de la paradoja de Curry es que trivializa la teoría en cuestión sin concluir en una contradicción, lo cual parece ir en contra de las intuiciones con respecto a

las paradojas tradicionales como las de *El Mentiroso* y la de Russell. Normalmente, buscamos que las teorías sean consistentes (no contradictorias), pero la paradoja de Curry muestra que las teorías consistentes pueden ser triviales (pues demuestran cualquier oración o fórmula).

1.5. Disolución desde la lógica clásica

Hay que distinguir entre solucionar (o resolver) una paradoja y bloquear (o disolver) una paradoja. Para nosotros, una ***solución*** (o resolución) consiste en una argumentación sobre cuál es el problema que genera una paradoja, junto con una herramienta formal que evite dicho problema; mientras que un ***bloqueo*** (o disolución) consiste simplemente en desarrollar una herramienta que restrinja alguno de los elementos involucrados en las paradojas, sin importar si este elemento es responsable de generar la paradoja. La jerarquía de lenguajes de Tarski bloquea la autorreferencia. Así también la Teoría de Tipos de Russell bloquea la paradoja, pero la solución de Russell consiste en los argumentos que plantea en contra de la autorreferencia, y como éste está presente en la Teoría de Tipos. Asimismo, la de Zermelo, por otro lado, parece ir contra la presuposición de que todo conjunto puede ser miembro de otro conjunto[26]. ¿Qué sucede en el caso de la paradoja de Curry?

[26] Resolver y disolver un problema no es lo mismo. Una ***solución*** (o resolución) consiste buscar lo que causa el problema, y una propuesta para que no ocurra; mientras que una disolución consiste simplemente en notar que el enfoque dado a un asunto no es del todo adecuado. Por ejemplo, en un campo en pleno verano nos preguntamos ¿por qué no crece la plantación? Luego, nos podemos dar cuenta que la tierra no es fértil y que necesita ser enriquecida. Esta es una solución. Pero una disolución sería percatarnos que, si estamos en pleno invierno, no es factible esperar que una planta crezca de modo ordinario. La pregunta ¿por qué no crece esta planta en invierno? está mal planteada pues en invierno no suele crecer mucha vegetación. Este problema debe disolverse. En

En la paradoja de Curry, el antecedente de una condicional presenta una proposición que predica la verdad de toda la condicional. Podemos decir, por lo tanto, que este es un caso de auto-referencia de un enunciado que se involucra en el mismo enunciado. Como vamos a apreciar, la paradoja de Curry podría conducir a contradicción en al menos dos maneras. La disolución propuesta, a continuación, utiliza una especie de restricción de los axiomas de Zermelo aplicado para la paradoja de Curry (Łukowski, 2011, p.110). La frase paradójica en cuestión tiene la forma:

$\mathbf{C \leftrightarrow (C \rightarrow i)}$

Donde asumimos que i es una oración cualquiera pero con valor indeterminado: puede ser verdadera o puede ser falsa (pero tiene alguno de esos valores). Para poder simplificar los razonamientos que siguen aplicaremos la siguiente equivalencia.

$\mathbf{C \leftrightarrow (\sim C \vee i)}$

Asimismo, con el fin de entender el problema, usaremos una tabla de verdad

$C \leftrightarrow (\sim C \vee i)$
V (F ∨ i) = i
F (V ∨ i) = V

Cuando suponemos C es verdadera la otra parte de la fórmula ($\sim C \vee i$) se reduce a i. Esto no constituye un problema realmente serio pues i puede ser verdadera al menos en un caso. Por ello, la equivalencia se mantendría estable. Es el segundo caso el que nos preocupa.

realidad, se trata de un hecho real que ha sido enfocado como si se tratase de un problema. Lo mismo pasaría cuando tratamos a la mente como si se tratara del cuerpo o cuando en la paradoja de Zenón tratamos de cruzar aspectos matemáticos con consideraciones físicas del espacio. La diferencia entre resolver y disolver un problema es un asunto de óptica. Bajo cierto punto de vista es un problema, bajo otro solo tiene la apariencia de un problema pero, en esencia, no lo es.

Suponiendo que C es falsa, la otra parte de la fórmula ($\sim C \vee i$) se reduce a V y eso sí constituye una contradicción flagrante. Así, en lógica clásica la oración de Curry debe ser verdadera, lo cual plantea mayores problemas: C debe ser verdadera y i puede serlo también.

Para comprender la "disolución" que se va a proponer recurriremos a la propuesta de Zermelo con respecto a la paradoja de Russell. Como sabemos, esta paradoja parte de aceptar el conocido axioma de comprehensión:

$(\exists \mathbf{B})\ (\forall \mathbf{x})\ (\mathbf{x} \in \mathbf{B} \leftrightarrow \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}))$

En vez de ello, Zermelo lo reformula y lo sustituye por el siguiente axioma de separación:

$(\forall \mathbf{A})\ (\exists \mathbf{B})\ (\forall \mathbf{x})\ [\mathbf{x} \in \mathbf{B} \leftrightarrow (\mathbf{x} \in \mathbf{A} \wedge \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}))]$

Como podemos notar lo que se ha hecho es conjuntarle a la condición $\varphi(x)$ otra expresión. Algo así podemos aplicar al caso de Curry.

$\mathbf{C} \leftrightarrow [(\sim \mathbf{C} \vee \mathbf{i}) \wedge \mathbf{X}]$

$\mathbf{C} \leftrightarrow [(\sim \mathbf{C} \vee \mathbf{i}) \wedge \mathbf{X}]$
V (i ∧ X)
F (V ∧ X)

Análogamente al caso anterior, en la primera fila de la tabla podemos notar que el asunto incluye una situación en la que no hay contradicción (por ejemplo, cuando i y X son ambos verdaderos), por ello no nos preocupa. El segundo caso, en cambio, será tomado como pauta de análisis.

¿Qué tiene que pasar para que no haya contradicción? Si suponemos que X es verdadera, existen problemas pues se crea una situación paradójica. Pues bien, para evitar esto tiene que suceder que X sea falsa. Si eso ocurre tendremos que la expresión C simplemente es falsa. Así, la paradoja desaparece: C y X son falsos, mientras que $\sim C \vee i$ es verdadera.

Independientemente de esta propuesta de disolución, debe señalarse que la paradoja de Curry es un aviso para no argumentar a partir de premisas falsas. Si nos contentamos con un razonamiento que parte de la suposición de que C es verdadera, llegaremos a la falsedad o incluso a la contradicción, lo cual no es realmente tan grave como para ser tomado en serio pues ambas posibilidades no son consecuencias necesarias. El problema real sólo aparece cuando se argumenta desde C, si hemos considerado que se trata de un enunciado falso. Y, como hemos constatado, para evitar esto lo que cabe por hacer es conjuntar C con una falsedad que restringa y limite su impacto desestabilizador. Así pues, al conjuntar a C una falsedad se detiene (o bloquea) la situación paradójica. Toda esta disolución se adecúa al marco de la lógica clásica.

CAPÍTULO II

SOLUCIONES NO-CLÁSICAS A LA PARADOJA DE CURRY

En general, se acepta que una de las más difíciles entre las paradojas es la paradoja de Curry.
JC BEALL Y JULIEN MURZI

En este capítulo vamos a exponer sucintamente las soluciones propuestas a la paradoja de Curry. Presentaremos el tratamiento clásico que se le puede hacer a la paradoja en mención usando las herramientas tradicionales de la lógica. Sin embargo, nos enfocaremos más en las soluciones propuestas desde la lógica no-clásica pues resultan estratégicamente más interesantes. Específicamente, evaluaremos las elaboraciones de la lógica paracompleta y la paraconsistente.

2. 1. Importancia de la paradoja de Curry

La paradoja de Curry puede formularse de este modo:

Si este enunciado condicional es verdadero entonces φ

Asumamos que todo este enunciado condicional es falso. Un condicional es falso si y solo si el antecedente es verdadero y el consecuente es falso. De este modo, el antecedente debe ser verdadero. Pero lo que dice el antecedente es que todo este enunciado condicional es verdadero. Sin embargo, esto se contradice con nuestro supuesto inicial. Hasta aquí hemos llegado a sostener que si el condicional es falso entonces es verdadero.

Ahora bien, ahora supongamos que este condicional es verdadero. Pero, este condicional equivale al antecedente. Por ello, el antecedente es ahora verdadero. Así, lo que sucede es que tenemos un condicional verdadero y sabemos que su antecedente es verdadero. Por *Modus Ponens*, podemos derivar φ. Esto significa que (suponiendo que el condicional es verdadero) cualquier enunciado, puede ser deducido.

Vamos a formalizar este razonamiento de forma cuidadosa. La versión formal de la paradoja de Curry requiere que el lenguaje permita la autorreferencia, la validez del esquema T, y la de alguna versión del principio del *Modus Ponens*. Dado que el lenguaje permite oraciones autorreferenciales, obtendremos que

* $C = (Tr\, \langle C \rangle \to \bot)$

Donde $\bot$ es cualquier enunciado falso o contradictorio. Entonces razonamos del siguiente modo (Pailos, 2014, pp. 41-42):

1. $Tr\, \langle C \rangle \leftrightarrow (Tr\, \langle C \rangle \to \bot)$	Esquema T
2. $Tr\, \langle C \rangle \to (Tr\, \langle C \rangle \to \bot)$	Def. Bicond., Simp. (1)
3. $Tr\, \langle C \rangle \to \bot$	Contracc. (2)[27]
4. C	I (3, *)
5. $Tr\, \langle C \rangle$	Esquema T (4)
6. $\bot$	MP (3,5)

[27] El principio de contracción es $[A \to (A \to B)] \to (A \to B)$.

Resulta interesante notar que podemos enfocar a la paradoja de *El Mentiroso* como un caso particular de la paradoja de Curry. Partamos por definir a la negación del siguiente modo:

$\sim \varphi =_{\mathrm{df}} (\varphi \rightarrow \bot)$

Pues bien, si tratamos de este modo la negación, entonces al analizar la paradoja de *El Mentiroso*

$m \leftrightarrow \sim Tr\langle m \rangle$

resulta, redefiniendo la negación del segundo miembro del bicondicional de acuerdo a nuestra definición, ser solo una abreviación de un caso de la paradoja de Curry

$m \leftrightarrow (Tr\langle m \rangle \rightarrow \bot)$ (Cook, 2013, p. 72)

Por lo anterior, se puede pensar que la paradoja de Curry y la de *El Mentiroso* son equivalentes. Consideremos que a partir de

$m \leftrightarrow \sim Tr\langle m \rangle$

y aplicando adición y definición del condicional en el segundo miembro del bicondicional se puede construir la paradoja de Curry.

$m \leftrightarrow (\sim Tr\langle m \rangle \vee \bot)$

$m \leftrightarrow (Tr\langle m \rangle \rightarrow \bot)$

Pero, aquí hay dos cuestiones. La paradoja de *El Mentiroso* alude a una proposición que dice de sí misma que es falsa. En cambio, la paradoja de Curry hace referencia a una condicional cuyo antecedente dice que si es verdadero entonces se sigue lo que sea. Y esto último podría ser fuente de confusiones porque se puede pensar que la oración a la que alude la paradoja de Curry es solo el antecedente.

Así, por ejemplo, considerando que la paradoja de *El Mentiroso* afirma que:

Esta oración es falsa.

la paradoja de Curry derivable aplicándole la adición y definición del condicional a la paradoja de *El Mentiroso* sería:

Si esta oración es verdadera entonces A.

Pero este caso sería reductible al enunciado A si consideramos que el alcance de "verdadera" solo afecta al antecedente. Como vemos, esto no equivale a la paradoja de *El Mentiroso*. Es decir, esta expresión condicional guarda cierta conexión con la paradoja de *El Mentiroso* pero no es su equivalente. Aunque sí es posible obtener la paradoja de Curry a partir de la de *El Mentiroso*.[28]

Un segundo punto es el que sigue. La expresión siguiente que alude a la paradoja de Curry

---

[28] De hecho, Read sostiene que la paradoja de Curry surge de aplicar la regla de transposición a otro enunciado. Lo interesante es que el análisis hecho para una paradoja no aplica del todo para la otra (y se supone que son equivalentes). Sea el enunciado A:
Si 1=1 entonces este condicional es falso.
Si el condicional A es verdadero, entonces dado que 1=1, A tiene un antecedente verdadero y un consecuente falso. Pero si esto es así, entonces A sería falso (pues $V \rightarrow F \equiv F$). Por ende, por reducción al absurdo, A es falso.
Y, si el condicional A es falso, entonces A tiene un antecedente verdadero y un consecuente verdadero. Pero si esto es así, A sería verdadero (pues $V \rightarrow V \equiv V$). Por ende, por reducción al absurdo, A es verdadero. Por lo tanto, A es tanto verdadero como falso.
Ahora apliquemos a A la regla de transposición y obtenemos el enunciado C. Sea este enunciado C:
Si este condicional es verdadero entonces 1≠1.
Si el condicional C es falso, entonces C tiene un antecedente falso y un consecuente falso. Pero si esto es así, C sería verdadero (pues $F \rightarrow F \equiv V$). Por ende, por reducción al absurdo, C es verdadero.
Asimismo, si el condicional C es verdadero, entonces dado que 1=1, C tiene un antecedente verdadero y un consecuente falso. Pero si esto es así, entonces C sería falso (pues $V \rightarrow F \equiv F$). Por ende, por reducción al absurdo, C es falso. Ahora bien, ya hemos probado que C es tanto verdadero como falso, pero es en este punto donde de la segunda suposición acerca de la verdad de C se puede obtener algo más. Si el condicional C es verdadero, como su antecedente es verdadero, su consecuente debe ser verdadero para que no haya contradicción. Esto es, si C es verdadero, 1≠1 es verdadero. Esto último es un contrasentido e intuitivamente afirma algo que se conecta con la expresión de Curry, a saber, la posibilidad de probar cualquier cosa. (Read, 1979, pp. 269-270)

$m \leftrightarrow (Tr\langle m\rangle \rightarrow \bot)$

es un caso particular de Curry. En realidad, la paradoja de Curry sería la siguiente:

$m \leftrightarrow (Tr\langle m\rangle \rightarrow n)$

Es decir, el consecuente n no tiene un valor de verdad determinado. En cambio, en el primer caso se mantiene adrede una falsedad o contradicción. Aceptando los argumentos formales, la paradoja de Curry y de *El Mentiroso* son equivalentes solo cuando el consecuente de Curry es una falsedad más no en otros casos.

Ahora bien, la importancia de la paradoja de Curry depende del enfoque con el que se le quiera distinguir. Esta paradoja muestra que es posible deducir cualquier enunciado sin caer en contradicción. Lo cual es algo raro y extraño puesto que, normalmente, para que un sistema se trivialice era preciso que se contradiga. Con Curry no sucede esto. Este hecho choca con el concepto de "consistencia absoluta" que es la propiedad de un sistema en el cual al menos una fórmula bien formada del lenguaje formal no es un teorema: un sistema es absolutamente consistente si no toda fórmula es derivable en el sistema. En otros términos, se dice que un lenguaje formal es absolutamente consistente si implica ciertas cosas y no otras o, en otras palabras, que un cálculo será consistente si y sólo si este contiene al menos una fórmula bien formada que no sea uno de sus teoremas, es decir, que no sea implicada por el sistema lógico. Así, se les denominan absolutamente consistentes a los sistemas lógicos que no implican al menos una proposición por oposición a los que implican toda proposición los cuales son absolutamente inconsistentes. (Piscoya, 1995, p. 64)

Es preciso que una teoría del lenguaje proporcione una explicación sobre las paradojas como las de Russell o las de *El Mentiroso*. Pues bien, los enfoques clásicos tienden a limitar el esquema T de Tarski o rechazan la existencia de ciertas construcciones paradójicas. Así pues, suelen responder a la paradoja de Curry rechazando la existencia de las expresiones Curry o jugando con el esquema T de Tarski.

2.2. Tratamiento clásico de la paradoja de Curry

El enunciado de Curry se construye sobre la base de que A es una afirmación que dice que si A es cierta entonces B, es decir, $A \leftrightarrow (A \rightarrow B)$. [29]

Efectuemos algunas reglas lógicas de equivalencia sobre el enunciado de Curry usando el bicondicional para evaluar su comportamiento.

1. $A \leftrightarrow (A \rightarrow B)$	
2. $[A \rightarrow (A \rightarrow B)] \wedge [(A \rightarrow B) \rightarrow A]$	Def. del bicond. (1)
3. $[\sim A \vee (\sim A \vee B)] \wedge [\sim (\sim A \vee B) \vee A]$	Def. del cond. (2)
4. $(\sim A \vee B) \wedge [\sim (\sim A \vee B) \vee A]$	Asoc., Idemp. (3)
5. $(\sim A \vee B) \wedge [(A \wedge \sim B) \vee A]$	De M. (4)
6. $(\sim A \vee B) \wedge A$	Abs. (5)
7. $B \wedge A$	Abs. (6)
8. $A \wedge B$	Conm. (7)

[29] Priest (2006, p. 83) también admite que, básicamente, esta es la forma del enunciado de Curry.

De este modo, el enunciado de Curry puede ser reducido a $A \wedge B$, es decir, la verdad de $A \leftrightarrow (A \rightarrow B)$ depende de la verdad de $A \wedge B$[30].

En lo que sigue evaluaremos el enunciado de Curry usando la identidad. Para lograr este objetivo consideraremos que el enunciado de Curry es

$A = (A \rightarrow B)$.

Partiremos de suponer los casos en que el mismo es verdadero o es falso (esta identidad será considerada con el símbolo *). Ahora, preguntamos ¿A es falsa o es verdadera?

Si suponemos que A es falsa

1. A es falsa	
2. $A \rightarrow B$ es falsa	I (1, *)
3. $\sim (A \rightarrow B)$	Esquema T (2)
4. $A \wedge \sim B$	Def. del cond., De M. (3)
5. A	Simp. (4)
6. A es verdadera	Esquema T (5)
7. A es verdadera $\wedge$ A es falsa	Conj. (6,1)

En este punto hemos arribado a una contradicción. Con esto se prueba que A es verdadera.

Si suponemos que A es verdadera

1. A es verdadera	
2. A	Esquema T (1)

[30] Esto nos va a servir más adelante para argüir que, después de todo, el enunciado de Curry no es tan condicional como parece sino que más bien se trata de una conjunción encubierta.

3. $A \rightarrow B$ I (2,*)

4. B MP (2,3)

En esta segunda derivación, hemos llegado a B.

Si tomamos de modo semántico la fórmula $A = (A \rightarrow B)$, lo que nos está diciendo es que todo el condicional se reduce a su antecedente, es decir, la verdad de la condicional depende de la verdad del antecedente. Enseguida, analicemos las leyes de tautología y contradicción con respecto al condicional:

$V \rightarrow X = X$, $F \rightarrow X = V$, $X \rightarrow V = V$, $X \rightarrow F = \sim X$

Notemos que **un condicional nunca se reduce a su antecedente cuando sabemos el valor de verdad de uno de sus componentes**. Siempre se reduce a su consecuente, a una verdad o a la negación de su antecedente. Dado que el planteamiento de Curry supone hacer algo antinatural contra la tabla de verdad de la condicional, a saber, reducir un enunciado condicional a su antecedente como muestra $A = (A \rightarrow B)$ ello desencadena paradojas tales como probar la verdad de cualquier cosa. Esto último es señal de inconsistencia.

Veamos esta cuestión desde otra perspectiva. Ahora, en $A = (A \rightarrow B)$ pensemos en B. Si el consecuente B es una verdad, no hay problema, pues cuando un condicional tiene consecuente verdadero todo se reduce a una verdad, es decir, $X \rightarrow V = V$. Pero si B es una falsedad, esto genera contradicción porque cuando un condicional tiene consecuente falso todo se reduce a la negación de su antecedente, es decir, $X \rightarrow F = \sim X$, y considerando que

$A = (A \rightarrow B)$, esto obligaría a aceptar que $A = \sim A$, lo cual atenta contra el principio de identidad.

Acabaremos esta evaluación y análisis de la expresión de Curry iterando, es decir, repitiendo la identidad en cuestión al menos 3 veces dentro del segundo miembro de la identidad. Partimos de aceptar que $A = A \rightarrow B$.

I. $A \rightarrow B$ (0 iteraciones)

En I reemplazamos y obtenemos

II. $(A \rightarrow B) \rightarrow B$ (1 iteración)

Nuevamente, en II reemplazamos

III. $[(A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow B$ (2 iteraciones)

Finalmente, en III reemplazamos

IV. $\{[(A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow B\} \rightarrow B$ (3 iteraciones)[31]

En I. $A \rightarrow B$ podemos aplicar la definición del condicional y obtenemos

$\sim A \vee B$

Pero, como sabemos que todo esto equivale a A tenemos

$(\sim A \vee B) = A$

B no puede ser falso, pues si fuera así tendríamos

$\sim A = A$

[31] En un artículo de Restall y Rogerson (2004), se juega con la forma de este tipo de expresiones. Así, por ejemplo, sea $A \rightarrow_0 B$ equivalente a A y sea $A \rightarrow_{n+1} B$ equivalente a $(A \rightarrow_n B) \rightarrow B$. De tal modo que, cuando n=0, $A \rightarrow_1 B$ sería equivalente a $(A \rightarrow_0 B) \rightarrow B$, es decir, a $A \rightarrow B$, y cuando n=1, $A \rightarrow_2 B$ sería equivalente a $(A \rightarrow_1 B) \rightarrow B$, es decir, a $(A \rightarrow B) \rightarrow B$. Y así sucesivamente. Es importante decir que este procedimiento ya se encuentra en (Moh Shaw-Kwei, 1954, p. 37) solo que con nomenclatura distinta y antigua. También este uso se encuentra en Méndez y Robles (2014).

Lo cual es inaceptable. Por ende, B es verdadero y también A es verdadero.

En II. $(A \rightarrow B) \rightarrow B$ podemos aplicar la definición del condicional y obtenemos

$\sim (\sim A \vee B) \vee B$

Lo cual mediante De Morgan resulta

$(A \wedge \sim B) \vee B$

Ahora, aplicando absorción nos queda

$A \vee B$

Pero, como sabemos que esto equivale a A tenemos

$(A \vee B) = A$

Analicemos. Si B fuera verdadera entonces A sería verdadera. Si B fuera falso entonces tendríamos una tautología

$A = A$

Y A puede ser o verdadero o falso, sin caer en ninguna contradicción.

En III. $[(A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow B$ podemos aplicar la definición del condicional y obtenemos

$\sim [\sim (\sim A \vee B) \vee B] \vee B$

Lo cual usando el resultado anterior, a saber que $\sim (\sim A \vee B) \vee B$ se puede reducir a $A \vee B$, nos queda

$\sim (A \vee B) \vee B$

Y, aplicando De Morgan nos queda

$(\sim A \wedge \sim B) \vee B$

Lo cual por Absorción se reduce a

$\sim A \vee B$

Pero, como sabemos que esto equivale a A tenemos

$(\sim A \vee B) = A$

Y así, B no puede ser falso, pues si fuera así tendríamos

$\sim A = A$

Lo cual es inaceptable. Por ende, B es verdadero. Esto hace que A sea también verdadero.

Llegados a este punto, no hace falta analizar 4 pues nos hemos dado cuenta que se repite este ciclo de respuestas. Es decir, para un número par de iteraciones tanto B como A son verdaderos. Y, para un número impar de iteraciones, o bien tanto A como B son verdaderos o bien B es falso y A puede ser verdadero o falso. Pues bien, tenemos dos opciones: o aceptamos que tanto A como B son verdaderas o aceptamos que mientras que B es falso, A puede asumir cualquiera de los dos valores de verdad en lógica clásica. Es decir, o bien A y B coinciden en un valor de verdad o bien cuando B es falso, el valor de A se vuelve indiferente.

2.3. Soluciones desde la lógica no-clásica

La paradoja de Curry resulta particularmente preocupante porque puede formularse con presupuestos similares a los que permiten generar la paradoja de *El Mentiroso*, pero el problema está en que una buena y adecuada solución a la de *El Mentiroso* no siempre lo es para la de Curry. Esto sucede porque la paradoja de Curry no envuelve conceptos como falsedad o negación como sí pasa con la paradoja de *El Mentiroso*. Así pues, la paradoja de Curry se vuelve realmente interesante no con los enfoques clásicos sino con los no-clásicos.

Particularmente, la paradoja de Curry es un reto directo a algunos enfoques no-clásicos que intentan mantener uno de los esquemas sobre verdad, conjuntos o propiedades semánticas y no deja que surjan las paradojas de Curry en el lenguaje en análisis.

Suele decirse que esta paradoja representa un problema especial para las propuestas no-clásicas, porque su posible solución constituye en cierta medida, cederle terreno tanto para las lógicas paraconsistentes como para las paracompletas. Según Beall y Murzi:

> Muchos han pensado que la notable paradoja del mentiroso puede ser resuelta ajustando nuestra teoría de (las reglas que gobiernan) la negación. Quizás, como en las comunes opciones *paracompletas*, la negación no puede ser exhaustiva: no logra clasificar enunciados bien como verdaderos o no verdaderos, permitiendo así 'vacíos' ('gaps') entre la verdad y la falsedad. Quizás, como en la comunes opciones paraconsistentes, la negación no puede ser exclusiva: le permite a los enunciados estar 'saturados' ('glutty'), o son ambos verdaderos y falsos. Pero mientras que la paradoja del mentiroso puede ser detenida mediante una teoría no-clásica de la negación, la paradoja de Curry surge incluso en lenguajes libres-de-negación, y en particular en esas teorías que disfrutan de los principios semánticos fundamentales irrestrictos para la verdad (es decir, T-bicondicionales) o la ejemplificación (es decir, comprehensión ingenua). El desafío principal para tales teorías es la paradoja de Curry. (Beall y Murzi, 2013, pp. 143-144)

A continuación, explicaremos este tipo de lógicas. Por un lado, se dice que un sistema de lógica es paracompleto cuando no acepta el principio del tercero excluso (es decir, no acepta este principio: $\sim A \vee A$.). Así, puede suceder que tanto una fórmula como su negación asuman un mismo valor de verdad. Por ejemplo, imaginemos que un observador está viendo una manzana verde pero que está lo suficientemente lejos como para no distinguirla. Dado que él no puede ver el color, la oración "La manzana es verde" sería falsa desde su perspectiva; pero también "La manzana no es verde" es falsa puesto efectivamente esa fruta tiene ese color. Lo mismo puede pensarse en temas religiosos. Un agnóstico puede opinar que la oración "Dios existe" es falsa y también que la oración "Dios no existe" es igualmente falsa. Lo mismo ocurre en matemática con conjeturas como la de

Golbach que afirma que todo número par mayor que dos resulta de la suma de dos números primos[32]. En este caso decir que “La conjetura de Goldbach es un teorema” es falsa y también su negación es falsa pues hasta la fecha no se tiene una demostración de la misma. Otro ejemplo de este tipo de frases sería: “José conoce la India”. Si José nunca estuvo en la India, esa frase es falsa, pues nunca puso un pie allí. Pero si, a pesar de que nunca ha estado allí, estudió la historia de la India por libros, películas, viendo muchas fotos de la India y hasta hizo amigos indios por redes sociales la negación de esa oración también sería falsa. Así pues tanto “José conoce la India” como “José no conoce la India” son ambas falsas.

Por otro lado, en las lógicas paraconsistentes no es válido el principio de no contradicción (es decir, no aceptan este principio: $\sim(A \wedge A)$). Por ende, tanto una proposición A como su negación $\sim A$ pueden ser verdaderas sin causar trivialidad en el sistema lógico, es decir, sin dar lugar a que cualquier fórmula bien formada sea, también, un teorema (Mora, 2013). Ahora bien, la inconsistencia (o contradicción) no es algo poco común sino que más bien forma parte del mundo natural. Por ejemplo, hay contradicciones en la mecánica cuántica, en la descripción de Bohr sobre el comportamiento del átomo, en las paradojas de *El Mentiroso*, de Russell entre otras. Asimismo, el fenómeno de la vaguedad legitima que una cosa posea y no posea un mismo predicado vago. Esto ocurre cuando pensamos en la definición de “niño”. ¿Cuándo alguien empieza a ser niño y cuándo deja de serlo? Si se pasa 1 segundo, el niño sigue siéndolo; si pasan 2, sigue siendo niño, si pasan 3 sigue siendo niño; y así sucesivamente… podemos decir, entonces, que pasaran muchos segundos y seguirá siendo niño. Pero es obvio que en algún momento dejará de ser

[32] Formalmente, $(\forall x)\ [(x \in \mathbb{N} \wedge \mathbb{N}=\{1,2, 3, 4, \ldots\} \wedge 2x > 2) \rightarrow 2x = p+q]$, donde p y q son números primos.

niño [33]. Finalicemos con un ejemplo más sencillo. Cuando uno está de cumpleaños ¿es un año más o un año menos? Claramente se puede notar que es posible aceptar ambas opciones a pesar de ser contradictorias entre sí.

Así en lo que sigue nos concentraremos en estos dos enfoques no-clásicos más resaltantes en cuanto a tratar con la paradoja de Curry. El primero (la propuesta paracompleta) rechaza la ley del tercio excluido, esto es, la ley que afirma que la disyunción de un enunciado con su negación es lógicamente válido. El segundo (la propuesta paraconsistente) permite inconsistencias pero logra teorías no triviales (rechazando la explosión: la regla de que de un enunciado y su negación se sigue cualquier otro arbitrario enunciado).

En el caso de las teorías paracompletas, se tendrá que rechazar el principio de Identidad $A \rightarrow A$ y, por tanto, no validar el esquema T, formulado con el bicondicional material. El rechazo de la identidad ocurre debido a que como A y $\sim A$ son falsas, no se respeta la bivalencia y al haber un vacío de verdad la identidad no sería aceptable (pues si p es verdad entonces p es verdad pero también si $\sim p$ es verdad entonces $\sim p$ es verdad). Y, en ese sentido, la identidad lógica no sería una guía adecuada. A propósito de esto, enseguida, mostraremos cómo es posible derivar la paradoja de Curry a partir de aceptar el principio de identidad. Consideremos el enunciado simplificado de Curry:

* $A = A \rightarrow B$

[33] Pensemos en las siguientes preguntas análogas a la ya estudiada: ¿Cuál es la altura máxima de un hombre de baja estatura?, ¿Cuándo un óvulo fertilizado se convierten en una persona?, ¿Cuánto dinero necesita un hombre para que lo llamemos "rico"?, ¿Cuántos años necesita una persona para ser vieja?, ¿Dónde comienza el exceso en la comida?, ¿Cuántos cabellos se precisan para considerar que un hombre es calvo? Todas las anteriores cuestiones plantean temas relacionadas a la vaguedad.

1. $A \rightarrow A$ Principio de Identidad

2. $A \rightarrow (A \rightarrow B)$ I (1,*)

3. $A \rightarrow B$ Contracc. (2)

4. A I (3,*)

5. B MP (3,4)

En el caso de las teorías paraconsistentes, se tendrá que rechazar el *Modus Ponens*. El propio Priest (2006a) a fin de rechazar el *Modus Ponens* (MP) identifica ($A \rightarrow B$) y ($\sim A \vee B$). Luego, el rechazo del MP procede como sigue. Si aceptamos que A es una *dialetheia* (es decir, una sentencia con dos valores de verdad); ($\sim A \vee B$) es verdad aun si B no lo es. En este caso, si uno deduce B a partir de A y ($A \rightarrow B$), uno obtendría una conclusión no verdadera a partir de premisas verdaderas. Esto muestra que el MP puede fallar en lo que respecta a la preservación de la verdad. Así, la posibilidad de *dialetheias* justifica el rechazo del MP. (M. Carrara y E. Martino, 2011, p. 202)

A propósito de lo anterior, ahora, mostraremos cómo es posible derivar la paradoja de Curry a partir de aceptar el *Modus Ponens*. Consideremos el enunciado simplificado de Curry:

* $A = A \rightarrow B$

1. $[A \wedge (A \rightarrow B)] \rightarrow B$ Ley del *Modus Ponens*

2. $(A \wedge A) \rightarrow B$ I (1,*)

3. $A \rightarrow B$ Idemp. (2)

4. A I (3,*)

5. B MP (3,4)

Una prueba análoga a la ya mostrada aparece en Meyer, Routley y Dunn:

> (…) Específicamente, considere el
> *Axioma del Modus Ponens*. (p→q) & p → q
> y sea el conjunto M {x: x∈x→q}. Luego como una instancia del axioma del *modus ponens*
> (13) (M∈M → q) & (M∈M) → q
> Por el principio de abstracción [basado en Curry]
> (14) (M∈M → q) ↔ M∈M
> Reemplazando el lado izquierdo de (14) con el derecho en (13)
> (15) (M∈M) & (M∈M) → q
> Por la idempotencia de '&' y (15)
> (16) (M∈M) → q
> Reemplazando la fórmula entera (16) con el lado derecho de (14)
> (17) M∈M
> de donde nuevamente por (16)-(17) y *modus ponens*
> (18) q (Meyer *et. al,* 1979, pp. 127-128)

El condicional material, por tanto, resulta especialmente insatisfactorio, dado que, o no validará el principio de Identidad, en el caso de las teorías paracompletas, o no validará el *Modus Ponens*, en el caso de las propuestas paraconsistentes.

2.4. La solución paracompleta: la propuesta de Field

El condicional que presenta Field en *Saving Truth from paradox* (2008) utiliza secuencias de revisión basados en Gupta y Belnap (1993) para interpretar el predicado veritativo Tr ('true' o 'verdadero'), pero aplicadas a la construcción de un condicional más adecuado. Las secuencias de revisión para los condicionales se construyen sobre la base de una semántica trivaluada, es decir, con tres valores de verdad (1, ½, 0).

La idea principal estriba en construir dos secuencias, una de valuaciones para condicionales y otra de puntos fijos para las demás expresiones lingüísticas. La primera secuencia parte de la valuación que le asigna ½ a todos los condicionales. La segunda parte del punto fijo mínimo presentado en Kripke (1975). De acuerdo a Martínez:

> Para obtener la interpretación del predicado Tr, Kripke formaliza la experiencia idealizada de cómo podríamos enseñar a usar el concepto de verdad a alguien que no conoce su significado. El principio básico que le enseñaríamos es, por supuesto, el recogido en el Esquema-T: uno está autorizado a afirmar que una oración es verdadera cuando, y solo cuando, está autorizado a afirmar esa misma oración. Así pues, empezaríamos por indicarle oraciones que contienen asignaciones inmediatas del término "verdadero" a oraciones indicativas, como "es verdad que la nieve es blanca", las cuales podría decidir directamente atendiendo a sus conocimientos acerca del mundo. Una vez aclaradas esas oraciones podríamos pasar a indicarle oraciones del tipo "la oración 'es verdad que la nieve es blanca' es verdadera" o "hay una oración en esta página que es verdadera" que podría decidir a partir de las asignaciones anteriores mediante los bicondicionales –T y las reglas semánticas. Conforme se van asignando valores de verdad a oraciones a partir de las determinadas directamente por hechos no semánticos, el individuo podría asignar valores de verdad a nuevas oraciones. Sin embargo, no todas las oraciones recibirán un valor en este proceso: solo las fundadas lo recibirán, pues solo ellas derivan su verdad de hechos no semánticos. Para formalizar este proceso, Kripke parte del modelo básico y de una interpretación vacía para el predicado Tr a todas las oraciones verdaderas en el modelo que se obtiene cuando Tr se interpreta con la extensión anterior. En el límite se toma la unión de todas las extensiones de la sucesión. Este proceso se estabiliza en un punto fijo, que constituye una interpretación de Tr que satisface los bicondicionales-T. (2014, p. 16)

Antes de explicar la propuesta de Anil Gupta y Nuel Belnap en *The Revision Theory of Truth* (1993) es preciso delimitar algunos conceptos. El primero es el de circularidad. La circularidad es un atributo de los conceptos. Por ejemplo, el concepto de verdad resulta ser circular. Así también hay otros conceptos circulares tales como: necesidad, referencia, ejemplificación, satisfacción, pertenencia y otros. Según Belnap y Gupta, hay dos tipos de conceptos: los **conceptos ordinarios** y los **conceptos circulares**. Los primeros son aquellos cuyas condiciones para ser aplicados nos permiten distinguir dos grupos excluyentes: aquellos objetos a los que se aplican y aquellos a los que no se aplican. Los segundos son aquellos que no tienen condiciones de aplicación definida. En este último caso necesitamos una hipótesis inicial acerca de la extensión del concepto circular en cuestión para decidir a cuáles objetos se aplica y a cuáles no. En el mejor de los casos, podría ocurrir que objetos de un grupo se ubiquen dentro de un grupo ajeno, o, en el peor de los casos, que esos objetos puedan estar tanto en un grupo como en otro de modo legítimo aunque estos grupos sean opuestos entre sí.

De acuerdo a Eduardo Barrio[34]: "(…) la extensión de los conceptos circulares sólo puede ser establecida de manera hipotética y bajo ciertas circunstancias esas hipótesis pueden generar un comportamiento patológico. (…)" (2002, p. 73). Ahora bien, según Belnap y Gupta, el comportamiento singular del concepto de verdad viene del hecho de ser un concepto que se define circularmente mediante los ya mencionados bicondicionales T. La semántica para conceptos circulares es muy distinta de la semántica de los predicados usuales. Básicamente, en el caso de los conceptos circulares su interpretación proviene de una regla de revisión, que hace posible, suponiendo cuál podría ser, en principio, la extensión más adecuada del predicado en cuestión, proporcionarle una extensión más precisa al revisarla. Así, los bicondicionales T se conciben como una regla de revisión: si la oración de *El Mentiroso* fuese, suponiendo, verdad, entonces, atendiendo a la definición de la verdad, sería más idóneo considerarla falsa. La teoría revisionista analiza el comportamiento de las oraciones que siguen un proceso de revisión. Esto permite distinguir diferentes clases de oraciones. Dos de las más relevantes son las oraciones categóricas y las paradójicas (o patológicas). Las primeras poseen un valor veritativo que puede afirmarse con certeza dado que llegan a estabilizarse en el proceso de revisión, sea cual sea el

[34] Para mejor comprensión de la teoría kripkeana de puntos fijos y de la teoría revisionista de la verdad de Belnap y Gupta puede consultarse Barrio (2014b).

supuesto inicial de que se parta. Las segundas poseen un valor veritativo que nunca se logra estabilizar, siendo indiferente el supuesto del cual se parta. La teoría revisionista fue propuesta para explicar estas últimas oraciones. (Martínez, 2005, pp. 12-13)

Ahora bien, según Pailos:

> (…) Para obtener los restantes miembros de la secuencia de valuaciones para condicionales aplicamos una regla de revisión que le asigna el valor 1 al condicional A→B si a partir de algún punto de la secuencia de *puntos fijos* el valor de A es menor o igual al valor de B. Por otra parte, para obtener cada miembro de la secuencia de puntos fijos aplicamos las cláusulas de K3 (lógica trivaluada de Kleene[35]) junto con el hecho de que Tr es transparente. El *valor último* de una fórmula A del lenguaje L, que se interpreta, esto es, el valor semántico que finalmente adquiere la fórmula en la semántica que estamos presentado, está dado por los puntos fijos kripkeanos. Para determinar el valor último de A es necesario indicar en qué valor se estabiliza (si es que en alguno). Utilizaremos la letra P para designar las valuaciones que son puntos fijos y la letra S para designar las valuaciones para los nuevos condicionales. Estipulamos que en la valuación S_0 el valor de A→B es ½ para cualquier A y cualquier B de L, y que P_0 es el punto fijo mínimo de Kripke. Esta combinación de revisión y puntos fijos involucra tres procedimientos distintos. El primero es el que nos permite pasar de cada S_α a P_α. El segundo es el que nos permite construir cada S_α a partir de P_α previos. Tendremos instrucciones distintas para ordinales sucesores y ordinales límite. Por último, es necesario establecer cómo este proceso determina los valores semánticos de las oraciones, lo que antes llamé *valor último*. (Pailos, 2014, pp. 43-44)

Con respecto a lo primero, las valuaciones (tanto S_α como P_α) son funciones que le asignan un valor semántico a las fórmulas del lenguaje. Las valuaciones de la forma P□ satisfacen las condiciones dadas por K3 y por el hecho de que es posible agregar consistentemente un predicado veritativo transparente[36] a K3. Para ellas se cumple que

[35] La lógica trivalente es aquella en la cual una proposición tiene tres valores de verdad. El matemático y lógico Kleene usó un tercer grado de verdad para "indefinido" en el contexto de funciones recursivas parciales. Así, una proposición puede ser evaluada como verdadera, falsa o indefinida (o indeterminada o desconocida). Aquí ½ es el tercer grado de verdad "indefinido" mientras que 1 corresponde a la "verdad" y 0 a la "falsedad". La motivación de esta lógica fue la consideración de que los valores de verdad no son absolutos, sino que entre ellos existe un cierto campo de indeterminación. (Gottwald, 2015).

[36] Que el predicado de verdad sea transparente significa que su papel consiste únicamente en lograr la aceptabilidad de la oración a la que se le aplique. Según Barrio: "Si prestamos atención al uso del predicado veritativo en los lenguajes naturales, los vínculos entre aserción y verdad parecen indicar

P_α (~A) = 1 - P_α (A)

P_α (A $\vee_\alpha$ B) = max (P_α(A), P_α(B))

P_α (Tr<A>) = P_α (A)

Para pasar de S_α a P_α calculamos los valores de las fórmulas utilizando las cláusulas de arriba. En cuanto a la construcción de cada S_α a partir de P_α previos, la idea es tener distintas cláusulas para distintos tipos de ordinales. La definición del condicional ya no involucra una valuación sobre todas las valuaciones que extienden a una cierta valuación S y todos los puntos fijos sobre esas valuaciones, como en la versión antigua, sino solamente una cuantificación sobre los puntos fijos sobre la valuación S. Para ordinales sucesores α+1.

$S_{\alpha+1}$(A→B)=1 si ($\forall P_\alpha$) (si P_α es un punto fijo kripkeano sobre S_α, entonces $P_\alpha(A) \leq P_\alpha(B)$)

$S_{\alpha+1}$(A→B)=0 si $P_\alpha^0(A) > P_\alpha^0(B)$ [37]

$S_{\alpha+1}$(A→B)= ½ en cualquier otro caso

Dadas esta condiciones, la oración de Curry puede tratarse de este modo, si está formulada con el conocido condicional: sea C la oración Tr <C> → (2+2≠4). Por estipulación, al ser C un condicional,

S_0 (C) = ½.

Dado que P_0 es un punto fijo asociado a C, se sigue que

---

que la verdad debería ser transparente: lo que aceptamos es lo que tomamos como verdadero y lo que rechazamos es lo que no lo es" (2014a, p. 26). De este modo, al aceptar la oración que afirma que Lima es la capital del Perú nos comprometemos con su verdad, y si la rechazáramos nos comprometeríamos a considerarlo no verdadero.

[37] En este caso P_α^0 es el punto fijo mínimo kripkeano sobre la valuación S_α. Es decir, obtenemos P_α^0 aplicando las cláusulas de Kleene-Kripke sobre S_α.

P_0 (C) = P_0 (Tr<C>) = ½.

Además, dado que P_0 es el punto fijo mínimo kripkeano, sabemos que

P_0 (2+2≠4) = 0

pues es una falsedad. En virtud de que

P_0 (Tr<C>) > P_0 (2+2≠4),

por la cláusula del condicional para ordinales sucesores,

S_1 (Tr <C> → (2+2≠4)) = 0.

Esta valuación pasa a P_1 donde tenemos P_1 (C) = P_1 (Tr<C>) = 0 = P_1 (2+2≠4). Por lo tanto,

S_2 (Tr <C> → (2+2≠4)) = 1.

En P_2, tenemos

P_2 (C) = P_2 (Tr<C>) = 1,

pero

P_2 (2+2≠4) = 0,

con lo cual

S_3 (Tr <C> → (2+2≠4)) = 0.

La evaluación continúa de manera similar en el resto de la secuencia de ordinales. La fórmula C varía entre 1 y 0 en todos los ordinales sucesores. Pero, aún no hemos indicado de qué modo esta construcción nos da valores semánticos para las oraciones del lenguaje.

Ahora, Field apelará a una noción proveniente de la teoría de la revisión, la noción de estabilidad. Intuitivamente, si el valor de una fórmula A en los puntos fijos kripkeanos es eventualmente siempre 1, es decir, si se estabiliza en 1, entonces el valor último de A es 1. Si, por otra parte, el valor de A se estabiliza en 0, el valor último de A será 0. Y si se estabiliza en ½ o si fluctúa entre dos o tres de los valores antedichos, es decir, si es inestable, entonces su valor último es ½. En términos formales, definimos el valor último de una oración A, que denotaremos |A|, de la siguiente forma:

$|A| = \text{Límite}_{\alpha}\ P_{\alpha}(A)$ si el límite existe

|A| = ½ en cualquier otro caso. [38]

Así, de acuerdo a Pailos:

> La noción de validez queda definida a partir del concepto de valor último. Una fórmula A es válida si y solo si su valor último es un valor designado, donde el único valor designado es 1. A su vez, una inferencia es válida si y solo si preserva el valor designado. Ya hemos visto que la oración de Curry C varía entre 1 y 0 en todos los ordinales sucesores (más precisamente tiene 0 en ordinales sucesores impares y 1 en ordinales sucesores pares) y adquiere valor ½ en todos los ordinales límite. De esto se sigue que |C| = ½. Este es el diagnóstico correcto para la oración de Curry, ya que intuitivamente no es verdadera ni falsa (…). (Pailos, 2014, p. 46)

Con esto el análisis de la paradoja de Curry hecho por Field la reduce a un sinsentido demostrable con las herramientas formales de la lógica paracompleta.

2.5. La solución paraconsistente: mundos no normales

Estudiar la implicación resulta seriamente importante. Hay que establecer condiciones para su verdad y su falsedad. Si el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, entonces esto está claro. Pero ahora consideraremos solo la mera posibilidad de esto. Por lo tanto,

[38] Algo análogo sucede en el siguiente caso. Cuando asumimos que el valor de una expresión fluctúa entre 0 y 1 estamos ante una serie no convergente como en la siguiente: 1-1+1-1+1-…*ad infinitum*. Este tipo de serie (llamada de Grandi) no tiene un límite pues sus sumas parciales no tienden a ningún número fijo.

podemos decir que una implicación es falsa si es posible que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso.

En este momento surge la pregunta de cómo se deben analizar la necesidad y la posibilidad. Afortunadamente, existe ya una elaborada teoría semántica de la necesidad: una semántica de mundos posibles. Hay que tener en cuenta la concepción ortodoxa de qué “mundos posibles” existen. Cualesquiera que sean los mundos posibles, son al menos extensiones de otras evaluaciones ya estandarizadas sobre otros mundos posibles (quizás el mundo actual). Esto, por lo tanto, debe tenerse en cuenta.

La solución paraconsistente a la paradoja de Curry planteada por Priest (2006) pasa por introducir un condicional cuya semántica apela no solo a mundos posibles, sino también a mundos imposibles. Asimismo, se modifica la relación de accesibilidad, que ya no será binaria –entre un mundo y aquellos mundos a los que este accede-, sino ternaria. Un mundo, ahora, no “accede” a otro mundo, sino a pares ordenados de mundos. El cómo se entienda esta relación es algo de urgente justificación filosófica.

Sea “R” la relación de accesibilidad mencionada, entendida como un conjunto de pares ordenados conformados por mundos –como primer término- y pares de mundos –como segundo elemento del par- y sea W el conjunto de mundos. Vamos a especificar de modo separado lo que debe pasar para que un condicional sea verdadero en un mundo normal, de lo que debe pasar para que lo sea en un mundo anormal.

Antes de ello, dejaremos clara la nomenclatura. Consideremos un lenguaje proposicional, aumentado con un operador de implicación. Una interpretación semántica para el lenguaje es un cuádruple M =<W, R, G, v> donde W es un conjunto de índices[39] (de mundos posibles); R es una relación binaria en W; G es un miembro particular de w, el "mundo real" o asignación que está de acuerdo con lo real; y v es una evaluación de los parámetros proposicionales, es decir, un mapa de W × P (el conjunto de parámetros proposicionales) en π, ({{1}, {0}, {1, 0}}). Escribiremos v (w, a) = x como $v_w(\alpha)$=x. Ahora bien, para mundos normales, tenemos que:

1 ∈ v (A→B, w) si y solo si para todo mundo w' ∈ W, si 1 ∈ v (A, w'), entonces 1 ∈ v (B, w')

0 ∈ v (A→B, w) si y solo si para algún mundo w' ∈ W, 1 ∈ v (A, w') y 0 ∈ v (B, w')[40]

La relación de accesibilidad usada en estos casos es binaria. Y se agrega una restricción adicional: para toda letra proposicional p, 1 ∈ v (p,w) o 0 ∈ v (p,w). Es decir, no puede haber vacíos de valor de verdad ('gaps') en mundos normales. Dado que la validez se define como preservación de verdad en mundos normales, esta restricción garantiza que se cumpla con el tercero excluido para fórmulas construidas solo con conectivas veritativo-funcionales. La cláusula para mundos no normales es la siguiente:

1 ∈ v (A→B, w) si y solo si para todo par de mundos <w', w''> tal que wR<w',w''>,

si 1∈ v (A, w'), entonces 1 ∈ v (B, w'').

0 ∈ v (A→B, w) si y solo si para algún par de mundos <w', w''> tal que wR<w',w''>,

1∈ v (A, w') y 0 ∈ v (B, w'').

[39] En las matemáticas, un conjunto de índices es un conjunto cuyos miembros etiquetan, indican (o indexan) miembros de otro conjunto. Así, por ejemplo, si los elementos de un conjunto *A* pueden ser *indexados* o *etiquetados* por medio de un conjunto B, entonces B es un conjunto de índices.

[40] Hay que señalar que se usa la relación de pertenencia para dar lugar a fórmulas que puedan ser verdaderas y también falsas. Esto último es algo que las posturas paraconsistentes aceptan.

Algo más deberíamos decir sobre el concepto de mundo no normal, pues la cuestión acerca de qué sería un mundo no normal (o anormal) es un tema ciertamente que requiere aclaración. De acuerdo a Priest (1992, pp. 291), en ciertos sistemas lógicos la regla de Necesitación (de $\vdash \alpha$ se infiere $\vdash \Box \alpha$) falla. Esto sugiere la idea de que haya mundos donde la necesidad de un teorema pueda fallar. Para entender esto, imaginemos que existan mundos en los que $\Box \alpha$ sea falso para todo α. Estos son los mundos no normales. Así pues, los mundos no normales son esencialmente aquellos en los que los teoremas, es decir, las verdades lógicas pueden no ser verdaderas. Por ejemplo, el mundo que niega la verdad de "Si Juan es limeño entonces Juan es limeño" sería un mundo anormal.

Esto implica la posibilidad de asignar valores de verdad arbitrarios a verdades lógicas. En pocas palabras, en mundos no normales la lógica falla. Pero, la noción de un mundo donde falla la lógica es, de hecho, ambigua y requiere de aclaración. Un mundo donde falla la lógica puede ser uno donde las leyes de la lógica son diferentes de las leyes actuales; y también puede ser uno donde sucede lo lógicamente imposible. La distinción en sí no tiene nada que ver particularmente con la lógica. Un mundo donde sucede lo lógica o físicamente imposible es un mundo donde las leyes de la lógica o la física son diferentes. Lo contrario, sin embargo, no tiene por qué ser cierto: las cosas imposibles (sean lógicas o físicas) no necesitan suceder en un mundo donde las leyes (de la lógica o la física) son diferentes porque son imposibles y, precisamente, su naturaleza imposible es lo que garantiza que no se den, que no ocurran.

En términos literarios y narrativos, un mundo donde lo físico o lógicamente imposible sucede es, por supuesto, más interesante que un mundo donde las leyes de física o de la lógica son diferentes. Pero, es innecesario considerar mundos donde ocurre lo lógicamente imposible. Por ello, solo consideraremos mundos donde la lógica es diferente.

Sin embargo, aquí hay una diferencia significativa entre la posibilidad física y la lógica. Si una ley natural falla, existe un mundo accesible (desde el mundo en el que estamos) donde realmente sucede lo físicamente imposible (estos son mundos *nomológicamente* imposibles). Por ejemplo, si tenemos una ley que afirma lo siguiente $(\forall x)[\alpha(x) \rightarrow \beta(x)]$ entonces existe un mundo accesible donde para algún α, α (a) es verdadero pero β (a) no lo es, es decir, $(\exists x)$ [$\alpha(x) \wedge \sim\beta(x)$]. Esto no ocurre con una ley lógica. El hecho de que los valores de verdad se asignen a condicionales en mundos no normales, independientemente de lo que ocurra en otros mundos, significa que las leyes de la lógica son, en cierto sentido, intrínsecas a estos mundos pues modelan (diseñan, limitan, estipulan) desde un principio las relaciones veritativas. Por supuesto, uno podría manejar la necesidad física de una manera técnicamente similar, pero esto no hace falta. Por necesidad lógica, sin embargo, es absolutamente esencial el que un resultado no trivial[41] deba ser obtenido pues la no trivialidad es un indicador de cierto "peso" lógico, de "calidad" lógica.

Sería muy posible definir mundos donde realmente sucede lo lógicamente imposible. Por ejemplo, podríamos darle a la disyunción débil "$\vee$" condiciones de verdad no estándar en mundos no normales, y así asegurar la existencia de mundos donde α es

[41] Una teoría es trivial, o *absolutamente inconsistente*, cuando afirma con verdad cada enunciado que es expresable (o construible) en el lenguaje de la propia teoría.

verdad pero $\alpha \vee \beta$ no lo es (recordemos que esto último rompe con lo típico de un disyunción débil, a saber, que sea verdadera cuando uno de sus componentes lo sea). Sin embargo, en ese caso, la lógica se haría pedazos (fallaría) incluso en mundos normales: cada condicional $\alpha \rightarrow \beta$, donde α y β son fórmulas distintas, podría fallar en un mundo normal. Con esto queremos insistir en que la necesidad lógica (en un mundo no normal) debe ser intrínseca al propio mundo. (Priest, 1992, pp. 296-297)

2.6. Intentos frustrados

Es muy sabido que la paradoja de Curry es especial porque a diferencia de las paradojas típicas no contiene la negación. Precisamente, este rasgo propio de esta paradoja es la que le da cierta resistencia a varios intentos de solución de la misma.

Las estrategias para poder enfrentar esta paradoja han sido varias. Por ejemplo, se ha planteado la posibilidad de elaborar teoremas especiales (que contienen una proposición y su negación) que pudieran ser aceptados en ciertas situaciones buscando evitar que se pueda inferir cualquier otra expresión como ocurre en la lógica paraconsistente.

El problema es que la paradoja de Curry no puede ser resuelta simplemente apelando a estipular una suerte de negación *sui generis* débil o fuera de lo común. Más bien, el problema radica en modificar las reglas inferenciales relacionadas con la formulación de la condicional.

En pocas palabras, la cuestión es que hay lógicas no clásicas con adecuados principios lógicos que resuelven la paradoja de Russell y *El Mentiroso*, pero siguen siendo vulnerables a la paradoja de Curry. Estas son lógicas con las características siguientes:

(a) Pueden servir como base para una teoría no trivial según la cual una oración es intersubstituible con su propia negación.

(b) No pueden servir como base para una teoría no trivial que sea Curry-completa.[42]

Por el momento, solo sabemos que existen lógicas no clásicas que cumplen estas dos condiciones. Pero, las teorías basadas en estas lógicas continúan siendo vulnerables a la paradoja de Curry. De acuerdo a Beall y Shapiro:

> Muchas de las lógicas no clásicas que se han propuesto para respaldar las respuestas a la paradoja de Russell y la paradoja del mentiroso son lógicas paracompletas, lógicas que rechazan la ley del medio excluido. Estas lógicas hacen posible las teorías "gappy". En particular, donde λ y $\sim\lambda$ son intersubstituibles de acuerdo con una teoría T, no será cierto que $\vdash_T \lambda \vee \sim\lambda$.
>
> Un ejemplo es la lógica $Ł_3$ basada en las tablas de verdad de tres valores de Łukasiewicz (…). $Ł_3$ ofrece una posible respuesta a la paradoja de Russell y al Mentiroso (…). Sin embargo, considere el condicional iterado $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$, que abreviamos como $\alpha \Rightarrow \beta$. Supongamos que una oración de Curry para π y una teoría T basada en $Ł_3$ se redefinen como cualquier oración $\kappa\Rightarrow$ intersubstituible con $\kappa\Rightarrow\pi$. Entonces, T cumplirá todas las condiciones del Lema de la paradoja de Curry[43] (…). Por lo tanto, siempre que haya una κ

[42] Para entender este concepto es preciso partir de otros. Sea π ser una oración del lenguaje de T. Una **oración Curry** para π y T es cualquier oración κ tal que κ y $\kappa \rightarrow \pi$ son intersubstituibles de acuerdo con T. Asimismo, es importante saber que la notación $\vdash_T \alpha$ se usa para indicar que la teoría T contiene la oración α. Finalmente, podemos afirmar que una teoría T es **Curry-completa** siempre que para cada oración π en el lenguaje de T, haya alguna π' tal que (i) haya una oración Curry para π' y T y (ii) si $\vdash_T \pi'$ luego $\vdash_T \pi$.

[43] El lema de la paradoja de Curry es el que sigue: "Supongamos que la teoría T y la oración π son tales que (i) hay una oración de Curry para π y T, (ii) todas las instancias de la regla de identidad (Id) $\alpha \vdash_T \alpha$ se cumplen, y (iii) el condicional $\rightarrow$ satisface las dos los siguientes principios:

> que sea intersubstituible con $\kappa \Rightarrow \pi$ según T, entonces $\vdash_T \pi$. En consecuencia, $Ł_3$ no respaldará una respuesta a la paradoja de Curry. (Beall y Shapiro, 2018, párr. 55-56)

Esto significa que las propuestas paracompletas no pueden conseguir resolver la paradoja de Curry. Es decir, el esbozo realizado líneas arriba resulta siendo cuestionable. De igual modo, volvamos a Beall y Shapiro:

> Meyer, Routley y Dunn (…) llaman la atención sobre (…) las lógicas paraconsistentes, que son lógicas según las cuales una oración junto con su negación no conllevará ninguna oración arbitraria. Las lógicas paraconsistentes pueden usarse para obtener teorías que resuelvan la paradoja de Russell, y el Mentiroso, abrazando la inconsistencia de la negación sin sucumbir a la trivialidad.
>
> De acuerdo con dicha teoría T, las oraciones λ y $\sim\lambda$ pueden ser intersubstituibles, siempre y cuando se den ambas $\vdash_T \lambda$ y $\vdash_T \sim\lambda$. Tales teorías son "glutty", en el sentido de que afirman alguna oración junto con su negación (…). Sin embargo, una serie de lógicas paraconsistentes prominentes no pueden servir como base para las teorías Curry-completas a riesgo de caer en trivialidad. (…) (Beall y Shapiro, 2018, párr. 53-54)

Esto último significa que las propuestas paraconsistentes no han logrado todavía resolver la paradoja de Curry. Para resumir: la paradoja de Curry se interpone en el camino de algunas opciones disponibles para resolver las paradojas semánticas por medio de teorías *glutty* (de llenura o de saciedad) o *gappy* (de vaciedad o espaciosas). Como resultado, la necesidad de evadir la paradoja de Curry ha jugado un papel importante en el desarrollo de lógicas no clásicas pero no se ha logrado derrotarla.

(MP) Si $\vdash_T \alpha \rightarrow \beta$ y $\vdash_T \alpha$ entonces $\vdash_T \beta$
(Cont.) Si $\alpha \vdash_T \alpha \rightarrow \beta$ entonces $\vdash_T \alpha \rightarrow \beta$
Por lo tanto, $\vdash_T \pi$." (Beall y Shapiro, 2018, párr. 29)

CAPÍTULO III

LA PARADOJA DE CURRY: UN EXAMEN CRÍTICO

¿Que yo me contradigo?
Pues sí, me contradigo. Y, ¿qué?
(Yo soy inmenso, contengo
multitudes.)
WALT WHITMAN

Recordemos que la paradoja de Curry se plantea al suponer que si un condicional es cierto entonces B. De ahí se concluye B siendo B cualquier proposición. Sin embargo, esto es problemático por el tema de la inconsistencia absoluta. Con respecto a esto, primero, nos vamos a dedicar a cuestionar las diversas partes de la paradoja de Curry. Enseguida, notaremos que es posible relacionarla con las paradojas de la implicación material. Esto nos llevará a revisar la lógica de la relevancia. Finalmente, tocaremos el tema de la pragmática e intentaremos ayudarnos con esta herramienta para tratar de interpretar la situación que plantea esta paradoja.

3.1. Críticas a la paradoja de Curry

Vamos a examinar las diversas partes de la paradoja de Curry: la premisa, el procedimiento deductivo y la conclusión.

1) Sobre el enunciado de Curry

Una cuestión importante radica en preguntar cómo se ha construido la expresión de Curry: "Si este condicional es cierto entonces B".

Algunos consideran que a partir de la paradoja de *El Mentiroso* se podría elaborar el enunciado de Curry:

c: c no es verdad

a la cual le aplicamos adición

c: c no es verdad o B

lo que luego por definición del condicional nos queda

c: Si c es verdad entonces B

Esta expresión podría equivaler a

Si toda esta oración es verdadera entonces B

En este punto podemos preguntar acerca de cuál es la verdadera referencia de esta oración. ¿Se refiere solo al antecedente o más bien a toda la expresión? Obviamente, el segundo caso es la respuesta correcta. Pero, la duda que ha sido planteada es motivo de sospecha de que el enunciado de Curry sea susceptible de ser desechado por ambiguo o por deficiencias de construcción[44]. Asimismo, si analizamos a Curry bajo la lupa de la lógica de la relevancia, se trataría de un condicional irrelevante pues el antecedente no se relaciona con el consecuente.

2) Críticas al desarrollo

Otra cuestión que llama la atención tiene que ver con la prueba utilizada para demostrar la paradoja de Curry. Si nos damos cuenta, se ha realizado un abusivo uso de la prueba condicional.

[44] Aunque hay que señalar que esto ocurre en un lenguaje natural pues en uno formal esto queda explicitado y claro.

1. c = "c" es verdadera → A	
2. "c" es verdadera	PA
3. "c" es verdadera ↔ c	ET
4. "c" es verdadera → c	Def. Bicond., Simp. (3)
5. c	Modus Ponens (4,2)
6. "c" es verdadera → A	I (5,1)
7. A	Modus Ponens (6,2)
8. "c" es verdadera → A	Prueba Condicional (2-7)
9. c	I (8,1)
10. "c" es verdadera ↔ c	ET (9)
11. c → "c" es verdadera	Def. Bicond., Simp. (10)
12. "c" es verdadera	Modus Ponens (11, 9)
13. A	Modus Ponens (12,8)

Hay que considerar que hasta 8 lo que se ha hecho es construir la expresión de Curry y en 13 se logra probar A. Pero, visto así parece que solo la prueba condicional es la única que permite deducir la paradoja. Sin embargo, tanto la prueba directa como la reducción al absurdo también sirven para demostrar esta paradoja. Solo que la presentación en estos casos no son tan difundidas. Enseguida, presentamos ambas. Comencemos por la prueba directa:

1. c ↔ ("c" es verdadera → A)

2. [c → ("c" es verdadera → A)] ∧ [("c" es verdadera → A) → c)] Def. Bicond (1)

3. $c \rightarrow$ (“c” es verdadera $\rightarrow$ A)	Simp. (2)
4. $\sim c \vee$ (“c” es verdadera $\rightarrow$ A)	Def. Cond. (3)
5. $\sim c \vee (c \rightarrow A)$	Esquema T (4)[45]
6. $\sim c \vee \sim c \vee A$	Def. Cond. (5)
7. $\sim c \vee A$	Idemp. (6)
8. $c \rightarrow A$	Def. Cond. (7)
9. “c” es verdadera $\rightarrow$ A	Esquema T (8)
10. (“c” es verdadera $\rightarrow$ A) $\rightarrow$ c	Simp. (2)
11. c	MP (9,10)
12. A	MP (8,11)

Ahora, seguimos con la reducción al absurdo.

1. $c \leftrightarrow$ (“c” es verdadera $\rightarrow$ A)	
2. $\sim$A	PA
3. [$c \rightarrow$ (“c” es verdadera $\rightarrow$ A)] $\wedge$ [(“c” es verdadera $\rightarrow$ A) $\rightarrow$ c)]	Def. Bicond. (1)
4. $c \rightarrow$ (“c” es verdadera $\rightarrow$ A)	Simp. (3)
5. $\sim c \vee$ (“c” es verdadera $\rightarrow$ A)	Def. Cond. (4)
6. $\sim c \vee (c \rightarrow A)$	Esquema T (5)
7. $\sim c \vee \sim c \vee A$	Def. Cond. (6)
8. $\sim c \vee A$	Idemp. (7)
9. $c \rightarrow A$	Def. Cond. (8)

[45] A partir de aquí consideramos que “c” es verdadera equivale a c y por ello donde veamos el uno podemos colocar el otro y viceversa.

10. $\sim c$	MT (9,2)
11. ("c" es verdadera $\rightarrow$ A) $\rightarrow$ c	Simp. (3)
12. $\sim$ ("c" es verdadera $\rightarrow$ A)	MT (10,11)
13. "c" es verdadera $\wedge \sim A$	Def. Cond. y De M. (12)
14. $c \wedge \sim A$	Esquema T (13)
15. c	Simp. (14)
16. $c \wedge \sim c$	Conj. (15, 10)
17. $\sim A \rightarrow (c \wedge \sim c)$	PC (2-16)
18. A	PRA (17)

La cuestión que queda sin explicar es por qué solo se ha difundido la versión de la prueba condicional y no las otras dos relacionadas a la prueba directa y a la reducción al absurdo[46]. Como vemos esas también sirven para probarla.

3) Críticas a la conclusión

También, la idea de que podemos probar cualquier cosa es observable. Realmente, no parece que se pueda probar cualquier cosa. Pues el enunciado al que finalmente se llega, existe ya como consecuente del condicional inicial. Esta es la forma lógica de Curry.

$[C= (Tr\langle C\rangle \rightarrow \mathbf{B})] \rightarrow \mathbf{B}$

Es decir, no se trata de un enunciado nuevo no previsto. Por ejemplo, cuando se estudia la contradicción se suele decir que nos conduce a poder demostrar cualquier enunciado: $(c \wedge \sim c) \rightarrow A$. En este caso, A no se encontraba dentro del cuerpo de premisas. Esto no es

[46] Tal vez, la razón tenga que ver con la necesidad de hacer visible la construcción de la expresión de Curry para luego probar cualquier cosa.

análogo en el enunciado de Curry. Sin embargo, lo que se puede decir es que el razonamiento elaborado no tiene que ver con el contenido de la proposición A a la que se llega. Pues para probar que Lima es capital del Perú puede utilizarse la paradoja de Curry pero en lugar de razonar sobre ciudades y países razonaremos libremente sobre reglas lógicas aplicadas a tal o cual estructura.

3. 2. Naturaleza de la lógica

En lo que sigue investigaremos la lógica de la relevancia. Antes de ello, examinaremos la necesidad de usar lógica relevante sobre todo en lo que concierne a la paradoja de Curry. La lógica se define tradicionalmente como la ciencia que se ocupa de formalizar y sistematizar el concepto de inferencia deductiva correcta. Por lo tanto, la tarea de la lógica consiste en definir el conjunto de todas las inferencias deductivas que sean válidas. Al respecto, la lógica clásica se entiende como un sistema formal que tiene el objetivo de razonar a partir de y dedicado a derivar conocimiento. Así ocurre, pues las inferencias son deductivas y poseen la propiedad de validez en la lógica clásica. Esto último consiste en que preserva o transmite la verdad desde los antecedentes y, además, no permite que se pueda derivar una conclusión falsa partiendo de antecedentes verdaderos. Esta situación asociada al condicional, formalmente, se expresa así:

$$(A \rightarrow B) =_{def} \sim (A \wedge \sim B)$$

Si nos limitamos al contexto de la lógica proposicional, la lógica clásica puede caracterizarse por (i) su bivalencia y (ii) la funcionalidad de verdad. Es decir, la lógica clásica se ocupa de definir el conjunto de inferencias cuya validez es función (depende) de la verdad de sus enunciados componentes. Si bien sus rasgos sintácticos y semánticos son adecuadas en dicho contexto, desde un punto de vista pragmático resulta complicado adecuar la lógica clásica a ocasiones cotidianas de la vida mundana. Esto sucede porque en una lógica debería estar también expresada explícitamente la conexión necesaria entre la conclusión de una inferencia y sus respectivas premisas, es decir, la relevancia de las premisas para el establecimiento de la conclusión. Esto formalmente se expresa así:

$(A \rightarrow B)$ es válido $=_{def}$ [Contenido (A) $\cap$ Contenido (B)] $\neq \phi$

Examinemos el siguiente caso:

> (…) Supongamos que Juan lee algo de la última aparición espectral de Elvis Presley y exclama, "¡Si Elvis está vivo yo soy marciano!". Difícilmente podría decirse que con esta frase se ponen las condiciones para que Juan sea un marciano. Ya que Juan no es marciano, entonces si aceptamos el enunciado de Juan, estará claro (por contraposición) que Elvis no está vivo. En este caso, la construcción condicional se usa, principalmente, para enfatizar lo absurdo que sería pensar que Elvis Presley pudiera estar vivo. (…) (Goldstein, 2008, pp. 143-144)

En la oración: "¡Si Elvis está vivo yo soy marciano!", si bien no existe relación alguna entre premisa y conclusión puede admitirse que se trata de una manera de decir de modo muy especial que simplemente Elvis no está vivo. En este caso, la pragmática y también la lógica ayudan pues al saber que quien afirma ese enunciado no es un marciano, puede deducirse que Elvis no está vivo por un *Modus Tollens*. Análogamente, en la paradoja de Curry, el antecedente que habla sobre la verdad de todo el enunciado condicional no parece tener relación con el consecuente que puede hablar de lo que sea. Podemos decir que, como señalamos en la crítica a la premisa de Curry, la propia expresión de Curry peca de irrelevancia pues el antecedente no parece tener relevancia para la inferencia del consecuente.

Ahora, prestemos atención al siguiente argumento:

1) Si 2+2=8 entonces Dios existe.

Dado que el antecedente es falso, entonces todo el razonamiento es verdadero de acuerdo a la tabla de verdad para el condicional. Sin embargo, nadie aceptaría este argumento como válido, a pesar de ser lógicamente verdadero principalmente porque el consecuente no parece tener relación alguna con el antecedente. Ahora bien, la reflexión sobre los límites que deben establecerse con respecto al condicional fue motivación para el surgimiento de la lógica relevante. Escribe Amparo Díez:

> La no aceptación de que podamos afirmar como verdadero cualquier enunciado a partir de una afirmación contradictoria, como sucede en el enunciado (1) [Si 2 es distinto de 2, Bertrand Russell es Dios], ha provocado una discusión sobre la exigencia de una relación de relevancia (semántica y sintáctica) entre el antecedente y el consecuente de un condicional y entre cada una de las premisas y la conclusión de un argumento, para que podamos hablar de relación de implicación entre el antecedente y el consecuente o entre el conjunto de las premisas y la conclusión. (Díez, 2013, p. 124)

Precisamente, la lógica de la relevancia se presenta como una lógica no clásica porque busca que en los razonamientos lógicos no existan relaciones arbitrarias y discordantes. Lo que busca es que las relaciones intra-lógicas de un argumento tengan algo más de coherencia. Esta lógica, también llamada lógica relevante o del entrañamiento, rechaza la verdad de condicionales en las que el antecedente es irrelevante para el consecuente al no compartir términos con él. Los orígenes de esta lógica se remontan al artículo “Fundamentación de una implicación fuerte” de W. Ackermann (1980) pero su desarrollo y sistematización se deben a Alan Ross Anderson y Nuel D. Belnap (1975). La idea es que entre premisas y conclusiones los contenidos semánticos no sean diferentes, sino de alguna forma vinculados. Para ello, se necesita que premisa y conclusión tengan al menos una variable proposicional en común. Asimismo, las premisas que aparecen como antecedentes, deben ser usadas para lograr derivar la conclusión con el fin de que guarden entre sí cierta relación. Por estos motivos, usar lógica relevante podría abrir las puertas hacia un análisis iluminador con respecto a la paradoja de Curry pues en esta paradoja lo que sucede es que la variable en cuestión está tanto en la premisa como en la conclusión pero no hay relación entre la expresión Curry (la condicional que afirma que si ella es verdad entonces B) y que ocurra o suceda B.

3.3. Paradojas de la implicación

Es intuitivamente inaceptable en la lógica clásica que de una premisa falsa se pueda derivar de modo concluyente cualquier sentencia arbitraria posible, así como que una conclusión verdadera pueda ser deducida partiendo de cualquier premisa dada. Nos estamos refiriendo a las llamadas paradojas de la implicación.

Las "paradojas de la implicación material" resultan de conectar informaciones que nada tienen que ver entre sí. Como sabemos "$p \rightarrow q$" significa: "No es el caso que p sea verdadero y q falso". Es decir, en la lógica clásica, un enunciado condicional $A \rightarrow B$ es falso cuando su antecedente A es verdadero y su consecuente B es falso. En términos formales:

$$\sim(A \rightarrow B) =_{def} (A \wedge \sim B)$$

De ello, se siguen los siguientes esquemas inferenciales:

1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

"Una proposición verdadera será implicada por cualquier proposición".

2) $\sim A \rightarrow (A \rightarrow B)$

"Una proposición falsa implicará cualquier otra".

Si analizamos la tabla de verdad notaremos que ocurre esto:

	p	q	p→q
1	V	V	V
2	V	F	F
3	F	V	V
4	F	F	V

La paradoja $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ ocurre en las filas 1 y 3 en las que siendo el consecuente una verdad, su antecedente puede ser verdadero o falso. Esto hace que la inferencia sea válida.

La paradoja $\sim A \rightarrow (A \rightarrow B)$ ocurre en las filas 3 y 4 en las que siendo el antecedente una falsedad, su consecuente puede ser verdadero o falso. Esto hace que la inferencia sea válida.

Las paradojas de la implicación material prueban que la deducción válida no está bien representada formalmente. Por ende, estas paradojas desacreditan que la lógica clásica pueda concebirse como base formal para los sistemas fundados en análisis de conocimientos, no solo porque posibilitan el surgimiento de razonamientos indeseables e inútiles, sino porque también dan lugar a explicaciones irrelevantes.

Para enfrentar a la “implicación material”, Lewis (1918) forjó el concepto de “implicación estricta”, operador al cual le asignó el siguiente símbolo “⇒”. Puede leerse “p⇒q” de varias modos alternativos: “p implica estricta o necesariamente q”, o también “q se sigue (o es deducible) de p”. Esta lectura hace creer que la implicación estricta es realmente la implicación lógica y, p⇒q puede ser definido así

$p \Rightarrow q =_{def} \Box (p \rightarrow q)$

O de modo equivalente

$p \Rightarrow q =_{def} \sim \Diamond (p \wedge \sim q)$

Es decir, p implica lógicamente a q si y solo si no es posible de modo lógico que p sea verdadero mientras que q es falso. Lo fundamental aquí es la presencia de la conocida noción modal de posibilidad. Obviamente, si una proposición implica estrictamente a otra, estrictamente también la implica de modo material (es decir, también es verdadero el condicional simple formado por ellos). Así, se cumple

$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \rightarrow q)$.

Pero, la relación inversa no se da. Sin embargo, surge un problema. Según Scruton:

> Pero esta definición [$p \Rightarrow q =_{def} \Box (p \rightarrow q)$] también genera una paradoja, es decir, que desde una proposición lógicamente imposible se puede deducir cualquier cosa (…); y que de cualquier cosa se puede deducir una proposición lógicamente necesaria. Sin embargo, (…) aceptarla no implica una contradicción; hay una considerable cantidad de literatura dedicada a probar que *debe* ser aceptada, y no es posible concebir otra definición de deductibilidad o de “implicancia” que no sea inherentemente *más* paradójica (…). Se podría decir que es un importante *descubrimiento* lógico el hecho de que de una proposición imposible surge todo: una profunda verdad acerca de la imposibilidad, que muestra exactamente por qué debemos evitarla (…). Si Hegel hubiera estado consciente de esta

> profunda verdad habría comprendido *por qué* sus "pruebas" parecían seguirlo, sin oponer resistencia, a cualquier parte que quisiera llevarlas. Nos da además una nueva forma de evaluar la consistencia: un sistema axiomático es inconsistente si cada fórmula es un teorema. (…) (2003, p.403)

Así pues, los mismos problemas que surgían en la lógica clásica reaparecen en la lógica modal. O sea, las paradojas que buscábamos evitar vuelven a surgir. Para plantearlo con otras palabras, las paradojas que hemos echado por la puerta se han vuelto a meter por la ventana. Veamos los siguientes esquemas inferenciales:

3) $\Box A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

"Una proposición necesaria será implicada estrictamente por cualquier proposición"

4) $\sim \Diamond A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

"Una proposición imposible implicará cualquier otra"

Esto significa que la implicación estricta no logra evadir los esquemas inferenciales paradójicos detectados en la lógica clásica. No obstante, las nuevas paradojas halladas fueron valoradas por Lewis de modo positivo. Según Mendez y Robles:

> Lewis distinguió con nitidez las paradojas del condicional material de las paradojas de la implicación estricta y razonó que las últimas eran defendibles. Conjeturó que, si no lo fueran, o bien no sería posible eliminarlas o bien su eliminación entrañaría eliminar también principios básicos e irrenunciables sobre los que entendemos por implicación. (Mendez y Robles, 2007, p. 257)[47]

Llegados a este punto habría que decir que hay ciertas semejanzas morfológicas entre el enunciado de Curry y una cierta forma de paradoja de la implicación material. En primer lugar, ambos no conducen a contradicciones sino a resultados contraintuitivos. En

[47] ¿Acaso ocurre esto con la expresión Curry? Es decir, ¿también Curry se trata de una expresión no eliminable a menos que renunciemos a principios esenciales para la lógica?

segundo lugar, ambos se formulan con la ayuda de condicionales. En tercer lugar, en ambos casos se predica la verdad en cierta parte del condicional. La diferencia más notable es que mientras que en las paradojas de la implicación material la verdad (o falsedad) está dirigida hacia el antecedente o el consecuente, en la paradoja de Curry se dirige desde el antecedente hacia toda la condicional. Esta última diferencia es la más difícil de examinar. Así, debido al gran parecido entre las paradojas de la implicación y la de Curry, resultará más que educativo revisar el modo en que la lógica relevante le hace frente a las paradojas de la implicación para así saber si existe modo de enfrentarnos a la paradoja de Curry con esta herramienta.

3.4. Introducción a la Lógica de la relevancia

Alan Ross Anderson y Nuel Belnap en *Entailment, The Logic of Relevance and Necessity* (1975) comenzaron a trabajar en la lógica de la relevancia con el objetivo de solucionar estos problemas vinculados con las paradojas de la implicación antes mencionadas. De acuerdo a Díez:

> Los defensores de la relevancia rechazan (III) [Una disyunción y la negación de un miembro implica el otro miembro: el silogismo disyuntivo] y exigen para todas las secuencias básicas una conexión entre los significados del conjunto de las premisas y la conclusión, con lo cual impiden que el paso desde una disyunción y la negación de uno de sus miembros a la afirmación del otro miembro no se pueda dar con generalidad. Anderson y Belnap han desarrollado un cálculo de la relevancia que no permite la aplicación universal del silogismo disyuntivo y evitan los teoremas de la lógica clásica en los que entre el antecedente y el consecuente no hay ningún miembro en común. (Díez, 2013, p. 126)

La llamada implicación relevante de la Lógica de la Relevancia de Anderson y Belnap evita la aceptación de las siguientes ejemplificaciones del condicional, las mismas que acompañamos de sus respectivas formalizaciones.

(i) Toda varilla de plomo es maleable.

(i') $(\forall x) [(Vx \wedge Px) \rightarrow Mx]$

(ii) Si Juan está sentado delante de Pedro, entonces Pedro está sentado detrás de Juan.

(ii') $Djp \rightarrow Tpj$

(iii) Si Juan invita a Pedro a la fiesta, entonces Pedro irá a la fiesta.

(iii') $Ijp \rightarrow Rp$

Todos los casos anteriores son condicionales irrelevantes pues tanto antecedentes como consecuentes no guardan ninguna conexión, es decir, no comparten variables. La Lógica de la Relevancia de A. Ross Anderson y N. Belnap tiene como objetivo determinar la relevancia en una deducción. Así, establece que la deducción de la fórmula B a partir de la premisa A será relevante si y sólo si la premisa A es usada para la deducción de B.

La lógica relevante exige que la implicación entre premisas y conclusión requiera de una conexión entre el contenido semántico de estas, cosa que no ocurre en los casos anteriores. Pero, esto puede resolverse acudiendo a un recurso:

> (…) En el tomo II de *Entailment*, aparecido recién en 1992 y escrito, además, junto con J. Michael Dunn, se extiende el sistema R y E a la lógica de predicados, dentro de la cual se puede expresar la interesante noción de *predicación relevante* (…). Tomando un objeto arbitrario, por ejemplo, una rosa (r), una propiedad relevante para ella, como la de *poseer un delicado perfume* (P), se formalizaría:
> (1) $Pr \leftrightarrow (\forall x)(x=r \rightarrow Px)$
> Ahora bien, sea la proposición condicional:
> (2) *Si esta es una rosa entonces posee un delicado perfume*
> Evidentemente, si evaluamos (2), teniendo en cuenta la información consignada en (1), (2) resulta un condicional relevante, aun desde el punto de vista sintáctico, ya que, bajo el supuesto

de que *a* es una rosa, (1) permite inferir que *a* tiene delicado perfume. (…) (Palau, 2002, p. 132-133)

Aquí lo importante es intentar frenar aquellos sistemas lógicos que desborden nuestras intuiciones por exceso declarando válidos argumentos intuitivamente inválidos. A continuación, analizaremos los siguientes casos en lenguaje natural:

1. Lima está en Perú. Por lo tanto, si está nevando entonces Lima está en Perú. (VEQ)
2. Lima está en Perú. Por lo tanto, si no es el caso que Lima está en Perú entonces está nevando (EFQ)
3. Lima está en Perú. Por lo tanto, está nevando o no está nevando. (NEQ)
4. Lima está en Perú y Lima no está en Perú. Por lo tanto, está nevando. (ECQ)

Ahora, los expresaremos en lenguaje formal:

1. $p \vDash (q \supset p)$ [48]

Verum sequitur ex quodlibet (VEQ)

Lo verdadero se sigue de cualquier cosa

2. $p \vDash (\sim p \supset q)$

Ex falso quodlibet (EFQ)

De lo falso se sigue cualquier cosa

3. $p \vDash (q \vee \sim q)$

Necesarium sequitur ex quodlibet (NEQ)

Lo necesario se sigue de cualquier cosa

[48] Aclaremos los significados de algunos símbolos. "$P \vDash \varphi$" se puede leer como "φ es verdadero bajo P". Asimismo, $\vDash_S A$ se lee como "A es verdadera o una consecuencia semántica".

4. $(p \wedge \sim p) \vDash q$

Ex contradictione quodlibet (ECQ)

De lo contradictorio se sigue cualquier cosa. Esta expresión se conoce también como Regla de Cornubia.

En los casos (3) NEQ y en (4) ECQ se puede ver que la proposición que figura como premisa no tiene ninguna conexión con la proposición que aparece como conclusión: que Lima esté en Perú no tiene ninguna conexión con que este esté nevando o no y si Lima está y no está en Perú, no se relaciona con que esté nevando. Intuitivamente, podemos decir que su contenido es irrelevante.

3.4.1. Aprendiendo a usar la lógica relevante

Una vez se ha definido la implicación como una conectiva, esta puede identificarse también con el condicional. Cuando usamos un condicional como "Si A entonces B" expresamos que hay una relación entre A y B en la que la verdad de A es suficiente para la verdad de B. En este sentido, dicha relación es la misma que expresamos al decir 'A implica B'. El condicional relevante propuesto por Anderson y Belnap puede leerse de ambas maneras. De este modo, si introducimos el símbolo '↠' para referirnos al condicional relevante, podemos leer 'A↠B' como 'Si A entonces B' y como 'que A implica que B'.

Anderson y Belnap proponen dos condiciones formales que se deben cumplir para sostener la relevancia entre el antecedente y el consecuente del condicional en el sistema de deducción natural, a saber:

1) Condición semántica para la implicación relevante:

En ‘A↠B’, A es relevante para B si y solo si A y B tienen algunas variables comunes. En otros términos:

> En A↠B, A es relevante para B solo si A y B tienen en común al menos una variable proposicional. [49]

Es decir, toda variable que ocurre en una fórmula condicional relevante, ocurre al menos una vez en su parte antecedente y al menos una vez en su parte consecuente. Ejemplo: Veamos la siguiente deducción:

1. Premisas: Si me **pagan**, trabajo. Si no me **pagan**, **renuncio**. Si me dan un **incentivo**, no **renuncio**. O me dan un **incentivo** o **denuncio** a la empresa. No estoy trabajando.
2. Conclusión: En consecuencia, ni me **pagan** ni me dan un **incentivo** y **renuncio** así como **denuncio** a la empresa.

Notamos que tanto premisas como conclusión comparten variables (las mismas que están en negritas).

La condición semántica busca garantizar que el contenido del antecedente no sea irrelevante para el contenido del consecuente del condicional relevante en tanto asegura que se comparta una variable proposicional. Esto es suficiente para que el consecuente del condicional no sea una tautología cualquiera que no guarde relación con el antecedente (como ocurre en NEQ), como también asegura que una contradicción cualquiera no tenga como consecuencia cualquier proposición (como ocurre en ECQ).

[49] Este también es denominado Principio de la Relevancia o Principio de la comunidad de variables.

2) Condición sintáctica para la implicación relevante:

En '$A \twoheadrightarrow B$', A es relevante para B si y solo si A se usa para, mediante reglas lógicas, deducir B en el sistema de deducción natural. En otros términos:

> $A_1 \twoheadrightarrow (\ldots (A_n \twoheadrightarrow B)\ldots)$ es teorema de la lógica de la relevancia si cada A_i $(1 \leq i \leq n)$ se usa para probar B.

Esta propiedad caracteriza sintácticamente de modo necesario la relación de relevancia. La condición sintáctica es formulada en términos de deducción natural modificando la deducción natural clásica, en particular, la regla de introducción y la regla de eliminación del condicional (conocidos como Prueba Condicional y *Modus Ponens*, respectivamente). Modificando las reglas lógicas de introducción y de eliminación del sistema de derivación natural clásico se obtiene el sistema de lógica relevante R.

El problema con el uso del condicional en la deducción natural clásica puede exponerse en la prueba lógica de (1) VEQ, a saber: $p \rightarrow (q \rightarrow p)$. Dicho brevemente, debemos derivar el condicional '$q \rightarrow p$' a partir de la premisa p. La prueba en el sistema de deducción natural es la siguiente:

1. p	**Premisa**
2. q	**Premisa Adicional**
3. p	**Reiteración 1**
4. $q \rightarrow p$	**PC (2-3)**
5. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$	**PC (1-4)**

Dado que podemos reiterar la premisa 1, podemos introducir el condicional ‘q→p’ en el paso 4 de la prueba. El problema en este caso es que q no se usó para deducir, mediante reglas lógicas, p, por lo que puede decirse que q no es relevante para p de acuerdo con el criterio sintáctico de relevancia. Para evitar esto, necesitamos de una herramienta que nos permita determinar, seleccionar y delimitar que premisas se usan para derivar una conclusión dada. En suma, esta herramienta nos debería permitir definir las reglas de eliminación y de introducción para el condicional relevante.

En el caso estudiado, desde el punto de vista de la lógica relevante la reiteración en el paso 3 no es aceptable, porque forma parte de otra prueba que no es la misma que aquella en la que se realiza esta reiteración. Por lo tanto, cada demostración subsidiaria estará marcada con un subíndice para evitar la reiteración problemática de pasos fuera de su propio ámbito. Por este motivo, se introduce un índice diferente para cada premisa de la prueba.

Ahora que hemos explicado el uso de los índices, podemos especificar la regla de eliminación del condicional relevante (también conocido clásicamente como MP). Para ello, podemos introducir como una premisa adicional el condicional ‘p→q’ y su antecedente p como otra premisa adicional. De este modo, obtenemos:

1. $\mathbf{p \rightarrow q}_{[1]}$

2. $\mathbf{p}_{[2]}$

Para eliminar dicho condicional, el consecuente debe tener los índices tanto del condicional como del antecedente, es decir, si aplicamos el MP modificado obtenemos:

1. $p \rightarrow q_{[1]}$ **Premisa**

2. $p_{[2]}$ **Premisa**

3. $q_{[1,2]}$ **MP (1,2)**

Formalmente, la regla de eliminación del condicional (o MP modificado) es esta: si '$p \rightarrow q_{[a]}$' y '$p_{[b]}$' entonces puede deducirse '$q_{[a \cup b]}$', donde a y b son conjuntos de índices.

Para introducir el condicional '$p \rightarrow q$' (aplicando una suerte de prueba condicional (PC) modificada) entre p y q, el conjunto de índices de p debe estar contenido dentro de los índices de q. De este modo, el condicional resultante sí debe contener los índices de q pero de ningún modo los índices de p. Si en la prueba anteriormente planteada introducimos el condicional, obtenemos lo siguiente:

1. $p \rightarrow q_{[1]}$ **Premisa**

2. $p_{[2]}$ **Premisa**

3. $q_{[1,2]}$ **MP (1,2)**

4. $p \rightarrow q_{[1]}$ **PC (2-3)**

Formalmente, la regla de introducción del condicional es la siguiente: si a partir de la premisa $p_{[a]}$ se puede derivar $q_{[b]}$ entonces puede inferirse el condicional '$p \rightarrow q_{[b-a]}$', donde $a \in b$. Intuitivamente, puede decirse que bajo el punto de vista relevante el índice del consecuente de un condicional debe contener al índice del antecedente pues así aseguramos que q haya sido deducido posteriormente sobre la base de p.

Podemos reescribir la prueba de ‘p → (q → p)’ en el sistema de lógica relevante R de la siguiente manera:

1. p [1] **Premisa**

2. q [2] **Premisa**

3. p [1] **Reiteración 1**

4. q → p [1] **PC (2-3)**

El problema con esta prueba es que no puede aplicarse la regla de introducción del condicional (la prueba condicional (PC) modificada) en el paso 4, dado que el conjunto de índices de p [1] no contiene a los índices de q [2]. Es decir, {2} ∉ {1}. Por ende, de q y p no se deduce ‘q→p’.

Pasemos ahora a explicar el caso de (2) EFQ. Vamos a tratar de probar

p → (~p→q).

La prueba de EFQ en el sistema de deducción natural clásico se puede realizar empleando la regla MT. La prueba procede de la siguiente manera:

1. p **Premisa**

2. ~q **Premisa Adicional**

3. p **Reiteración 1**

4. ~q → p **PC (2-3)**

5. ~p **Premisa Adicional**

6. q **MT (4,5)**

7. ~p→q **PC (5-6)**

8. $p \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$ PC (1-7)

Si tratamos de probar EFQ con el condicional relevante, la prueba no puede pasar del paso 4, pues $\{2\} \notin \{1\}$. Veamos:

1. $p_{[1]}$ Premisa

2. $\sim q_{[2]}$ Premisa Adicional

3. $p_{[1]}$ Reiteración 1

4. $\sim q \rightarrow p_{[1]}$ PC (2-3)

En tanto no podemos introducir el condicional en el paso 4, pues viola el requisito de que en una prueba condicional el índice del antecedente deba estar contenido en el índice del consecuente, no hay modo alguno de probar EFQ empleando el condicional relevante. En resumen, la condición sintáctica de la relevancia logra descartar los casos de VEQ y EFQ. De la misma manera, se pueden evitar los otros dos casos

3. $p \rightarrow (q \vee \sim q)$ NEQ

4. $(p \wedge \sim p) \rightarrow q$ ECQ

Analicemos la prueba de NEQ en el sistema de deducción natural clásico y luego indiquemos los problemas que tendría esta prueba en el sistema de deducción relevante de Anderson y Belnap. Debido a que '$q \vee \sim q$' en el sistema de deducción natural clásico equivale a '$q \rightarrow q$', podemos reformular NEQ así: '$p \rightarrow (q \rightarrow q)$'. Expongamos su prueba en el ya conocido sistema de deducción natural clásico:

1. p	**Premisa**
2. q	**Premisa Adicional**
3. q	**Reiteración de 2**
4. $q \rightarrow q$	**PC (2-3)**
5. $p \rightarrow (q \rightarrow q)$	**PC (1-4)**

Al estudiar esta prueba podemos percatarnos que aparece un problema en el penúltimo paso. En el sistema de deducción natural relevante no se podría introducir ese condicional, puesto que ‘q→q’ que aparece como consecuente no se demostró usando p.

Para finalizar esta parte mostraremos la manera de usar la lógica relevante en un caso concreto. La demostración del siguiente teorema la expone Palau:

$\vdash (A \twoheadrightarrow B) \twoheadrightarrow ((B \twoheadrightarrow C) \twoheadrightarrow (A \twoheadrightarrow C))$

1. $A \twoheadrightarrow B_{[1]}$	**Premisa Adicional**	
2. $B \twoheadrightarrow C_{[2]}$	**Premisa Adicional**	
3. $A \twoheadrightarrow B_{[1]}$	**Reiteración de 1**	
4. $A_{[3]}$	**Premisa Adicional**	
5. $A \twoheadrightarrow B_{[1]}$	**Reiteración de 3**	
6. $B_{[1,3]}$	**MP (4,5)**	
7. $B \twoheadrightarrow C_{[2]}$	**Reiteración de 2**	
8. $C_{[1,2,3]}$	**MP (6,7)**	
9. $A \twoheadrightarrow C_{[1,2]}$	**PC (4-8)**	
10. $(B \twoheadrightarrow C) \twoheadrightarrow (A \twoheadrightarrow C)_{[1]}$	**PC (2-9)**	
11. $(A \twoheadrightarrow B) \twoheadrightarrow ((B \twoheadrightarrow C) \twoheadrightarrow (A \twoheadrightarrow C))$	**PC (1-10)**	(Palau, 2002, p. 118)

Como podemos percatarnos todos los pasos han sido justificados en base a la lógica relevante. Las reiteraciones vienen marcadas con índices. Y, las aplicaciones del MP y PC se aplican según lo estipulado. En el caso del MP, el índice de la conclusión resulta de unificar los índices de las premisas y, en el caso del PC, el índice de la conclusión resulta de restar el índice del antecedente al índice del consecuente. De este modo dicho razonamiento se justifica plenamente.

Ahora bien, dentro del sistema R se logra rechazar las paradojas de la implicación. Esto significa que es posible construir una lógica que controle la aparición de paradojas de la relevancia y, a la vez, que tenga una notable capacidad expresiva. Recordemos que Lewis era escéptico respecto a si podría construirse una lógica capaz de eliminar las paradojas de la implicación estricta. Pero Anderson y Belnap lo lograron. Según Mendez y Robles:

> Utilizando métodos sintácticos y matriciales, A&B demuestran que su sistema R (*Relevance Logic*) es una (para ellos la única) lógica de la relevancia en los sentidos sintáctico y semántico de las dos caracterizaciones anteriores. Es decir, prueba que si $A \rightarrow B$ es teorema de R, entonces A se usa para probar B, y A y B tienen al menos una variable proposicional en común. Como R carece, por un lado, de paradojas implicativas, y, por otro, es un sistema considerablemente potente y de nítida estructura, cabría decir que la conjetura de Lewis no resultó cierta. (Mendez y Robles, 2007, p. 258-259)

Pues bien, con respecto a Curry algo que nos interesa investigar es si la lógica de la relevancia permite o no la autorreferencia. Pensemos en su compañera la paradoja de *El Mentiroso*. Cuando alguien dice "Esto que estoy diciendo es falso" una pregunta que alguien nos haría sería: "¿Qué es "esto"? ¿Qué fue lo que dijiste que es falso?". Y cuando uno descubre que se trata del mismo enunciado, uno no queda satisfecho al darse cuenta que no acabaría de entender hasta donde termina el enunciado. Es decir, tengamos la expresión

A = A es falso

¿Cuál A?

Pues, la que dice que A es falso

A= (A es falso) es falso

Repito, ¿cuál A?

Pues, la que dice que A es falso

A= ((A es falso) es falso) es falso

Y esto puede continuar. Esto significa que el procedimiento por el cual tratamos de entender la frase A no tiene fin y, por tanto, la frase no es comprensible y, por ende, como dicha frase no termina y afirma su falsedad, tratar de razonar con ella, dará lugar a la irrelevancia pues el consecuente al que se trate de llegar o bien no contendrá variables compartidas con A (pues finalmente llegará a una contradicción lo cual implicará cualquier cosa), o bien A no podrá ser usada para deducir el consecuente (pues no tiene fin).

Algo análogo sucede con Curry. La frase

C= (C es verdadera →B)

nos lleva a preguntar ¿Cuál C?

C= ((C es verdadera →B) →B)

Repito, ¿cuál C?

Pues, la que dice que C es verdadera →B

C= (((C es verdadera →B) es verdadera →B) →B)

Y esto puede continuar.

Ahora bien, ¿cómo se relaciona esto con la paradoja de Curry? En relación a la paradoja de Curry[50], debemos decir que tanto el criterio semántico como el sintáctico parecen respetarse pues el razonamiento de Curry que nos interesa plantea esto:

[C= (Tr<C>→**B**)] → **B**

Como podemos notar tanto premisa como conclusión comparten la variable B y así se respeta la condición semántica. Además, como ya se ha anotado se usa la lógica para derivar B a partir de [C= (Tr<C>→**B**)], luego se respeta la condición sintáctica. Así pues, pareciera que no hubiera problemas con respecto a esta deducción.

Esto coincide con la opinión de Restall, pues para él la paradoja de Curry se puede presentar en teorías basadas en lógicas cuya implicación no es veritativo funcional. Por ejemplo, la lógica relevante R tiene una implicación que no valida la definición del condicional y, sin embargo, es susceptible de trivialidad vía paradoja de Curry, pues valida la contracción[51]. Así también, de acuerdo a Restall, mediante el esquema T y los medios para la autorreferencia se pueden obtener paradojas como las de Curry usando la contracción (Restall, 1992, p. 303). De este modo, la prometedora lógica relevante tampoco logra hacerle frente a la paradoja de Curry.

---

[50] Para ver un tratamiento formal dentro de la lógica de la relevancia consultar (Foukzon, 2015, pp. 6-12)

[51] Esto sucede de acuerdo a Beall, Brady, Hazen, Priest y Restall:

> La discusión se llevará a cabo con un ojo en las aplicaciones de la lógica relevante, y en particular su uso en formalizar una teoría ingenua de conjuntos y una teoría de la verdad. Esas teorías son susceptibles de ser inconsistentes, pero en la lógica relevante esto no importa, dado que la Explosión ($\alpha, \neg\alpha \vdash \beta$) es inválida, así las contradicciones están en cuarentena. Pero no todas las lógicas relevantes son adecuadas para este propósito. Las lógicas relevantes que contienen el principio de Contracción ($\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \vdash \alpha \rightarrow \beta$) trivializan esas teorías, debido a las paradojas de Curry. (…) (Beall, *et. al.*, 2006, p. 588)

3.5. Enfoque pragmático

Debido a que hemos visto que el enfoque formalista puede tener serios problemas a la hora de enfrentar a la paradoja de Curry tendremos que recurrir al enfoque no formal o pragmático.

Para justificar este salto de una lógica a otra tenemos que explicar tres cuestiones. En primer lugar, consideramos que el lógico debe dejar de ser visto como ajeno a la realidad cotidiana. Desde que se planteo en el manifiesto del Círculo de Viena: "Algunos, plácidos en el aislamiento, llevarán una existencia retirada en los gélidos glaciares de la lógica" (1929), se cree que la lógica es ajena a la realidad mundana. Pero esto no es verdad porque después de todo el que hace lógica es un ser humano. En segundo lugar, la lógica a pesar de ser enfocada como formal o no formal, es una. La lógica que se aprende y que se usa en el trato diario es una y la misma. Si fuesen diferentes, no tendría sentido buscarles conexión con la realidad. En tercer lugar, la lógica necesita considerar un modelo de razonamiento proveniente de la misma realidad para poder criticar con fundamento ciertas reglas aceptadas dentro del orden clásico formal.

De acuerdo al *Compendio de lógica, argumentación y retórica*, "la *pragmática* es la disciplina que se ocupa de las relaciones entre los signos y los usuarios" (Uxía, 2012, p. 473). Al respecto Gamut sostiene que "la gramática se ocupa principalmente de las relaciones entre las expresiones y su uso" (2004, p. 208). De semejante opinión es el *Novo Dicionário de Lógica* que afirma que la pragmática es "el estudio de las relaciones que rigen entre los signos y las personas que los interpreten" (Hegenberg y Ferreira, 2005, p.

263) Y, sobre todo es en el ámbito comunicacional donde se hace más notable la pragmática. Según Horacio Miranda y Marisa Guzmán:

> Todos sabemos que la comunicación tanto verbal como no verbal se constituye en la esencia del ser humano. Nos comunicamos todo el tiempo, y de diversas maneras en forma natural, sin tener conciencia del código que usamos, con una creatividad y generatividad que ilustra la afirmación central de Chomsky (…), cuando refiere la capacidad del ser humano para generar una cantidad infinita de enunciados, a partir de un número finito de elementos. Es, en definitiva, lo que nos diferencia de otras especies no humanas que, sin contar con el lenguaje estrictamente humano, se comunican con sus congéneres sobre la base de un repertorio limitado de señales. (2012, pp. 230-231)

Así pues, sabemos que podemos ver a cada una de las posiblemente infinitas oraciones que podemos construir como compuestas a partir de un stock finito de elementos semánticamente significantes por medio de un número finito de aplicaciones de un número finito de reglas de composición. Por ello, es posible que cualquier tipo de oraciones tenga un significado otorgado en función del significado de sus partes componentes y de su estructura.

Chomsky ha denominado a esto “el problema de Humboldt”, el cual se formula como sigue. Dado que el número de oraciones que hemos usado y entendido efectivamente es siempre un número finito, y dado que hay un número potencialmente infinito de oraciones que son nuevas para nosotros, ¿cómo podemos entender y usar esas oraciones nuevas de las que nunca hemos oído?

Noam Chomsky sugirió que podemos darle significado a un número potencialmente infinito de oraciones debido a que las colecciones infinitas están encapsuladas, de alguna manera, en una colección finita de reglas que están muy enraizadas de modo instrínseco en nosotros. Esto ocurre porque (en la línea chomskyana) la evolución nos ha "programado" con una especie de gramática interna. (Priest, 2006, p. 19)

De este modo, la capacidad del lenguaje para construir oraciones y establecer diálogos y conversaciones es, en definitiva, aquello que nos distingue de otras especies no humanas para las cuales la evolución ha preparado otro desarrollo o estrategia de supervivencia. Según Horacio Miranda y Marisa Guzmán:

> Los estudios lingüísticos, al dar cuenta de las relaciones entre lenguaje y usuarios, enfatiza las implicancias socio-pragmáticas de los enunciados en contextos comunicativos, lo que ha enriquecido la comprensión del lenguaje al complementar con su aporte los estudios tradicionales basados en aspectos meramente lógicos, semánticos y sintácticos.
>
> No cabe duda que con nuestra conducta lingüística trascendemos los límites de los significados semánticos convencionales, para incursionar en el mundo de los significados pragmáticos. Esto se manifiesta en las realizaciones cotidianas, en las que la carga pragmática de los enunciados puede dar lugar a mensajes muy distintos de lo que se expresó literalmente. Para el análisis de los diversos significados pragmáticos de los enunciados es menester contextualizarlos, distinguiendo a los participantes, la relación entre ellos, el tema, lugar, nivel de formalidad o informalidad de la situación, el conocimiento compartido de mundo e intención elocutiva del hablante, entre muchos otros aspectos. Dicho de otra manera, nuestros enunciados no son independientes de los contextos de situación en que los emitimos, más bien cobran vida en el contexto social al que pertenecen, y no fuera de éste. (2012, p. 231)

Esto es, conversamos y esta práctica solo tiene sentido sobre el escenario en el que nos movemos. Incluso, en ciertos contextos una misma expresión puede tener distintos mensajes. El mundo de la pragmática si bien es más social también al ser tan obvio parece difícil de explicar.

3.5.1. El principio de cooperación

Una conversación es un diálogo oral o escrito entre dos o más personas que intervienen alternativamente expresando sus ideas y afectos sin necesidad de algún orden previo o planificación pensada. Así se logra establecer una comunicación fluida y espontánea.

La conversación puede girar en torno a uno o muchos temas y está condicionada por el contexto. En una situación cotidiana, estos pueden variar con facilidad y sin previa organización para que los dialogantes pueden expresar su punto de vista y, así, discutir, debatir y conocerse mutuamente.

También, la conversación es una manera de relacionarse con las personas, sirve para obtener información y compartir escenarios que muestran la diversidad de afecciones, pensamientos, experiencias y posturas; genera procesos reflexivos de raciocinio que permiten organizar el discurso propio. Pensemos en una entrevista o en una charla de café, por ejemplo.

Pero la misma conversación puede decirse que viene regida por un principio. El principio de cooperación conversacional permite que un diálogo sea objetivo y fructífero. Según Paul Grice:

> Nuestros intercambios comunicativos (…) son característicamente, por lo menos en cierta medida, esfuerzos de cooperación; y cada participante reconoce en ellos, en cierto grado, un propósito o conjunto de propósitos comunes, o, por lo menos, una dirección aceptada mutuamente (…). En cada fase, algunos posibles movimientos conversacionales serían rechazados por conversacionalmente inapropiados. Podríamos, pues, formular un principio general aproximativo que se espera que sea observado por los participantes (en igualdad de circunstancias), es decir: haga que su contribución a la conversación sea la requerida, en

cada frase que se produzca, por el propósito o la dirección mutuamente aceptados del intercambio comunicativo en el que está usted involucrado. (Grice, 1975, p. 45)

La parte última de la cita anterior corresponde a la enunciación del Principio de Cooperación. Este principio afirma simplemente que personas involucradas en una conversación dirán algo conveniente en cualquier punto en la charla, y asumirán que los otros dirán algo conveniente también. De este modo, este principio permite entender que la conversación es un intercambio fluido en el que cada participante contribuye con sus enunciados. Tanto emisor-hablante como receptor-oyente deben "cooperar" en la conversación, ambos deben ir tras la misma meta.

3.5.2. Las máximas conversacionales

El principal objetivo de la investigación de Grice era descubrir reglas de cualquier lenguaje que posibiliten la conversación. De este modo, se puede establecer un cierto acuerdo entre los interlocutores que llevan a cabo una conversación por el cual ellos delimitan y definen un "contrato o convenio lingüístico" que posee unas "máximas o reglas" determinadas.

El hecho comunicativo requiere de la cooperación de sus integrantes. Esta cooperación, por lo tanto, trata de otorgarle al receptor una información veraz, ajustada y clara, para que le sirva, y por la cual debe de cumplir unas máximas necesarias.

Todas estas máximas, en resumen, implican que los enunciados de quien intervienen en un acto comunicativo deben ser claros, informativos, pertinentes, veraces y breves. Se agrupan en cuatro bloques, de acuerdo al propio Grice en analogía a la organización de las categorías kantianas (de cantidad, calidad, relación y modalidad). Debemos indicar que diversas máximas pueden ser no respetadas en un mismo caso pero intentaremos ser lo más didácticos y coherentes que se pueda. Enseguida, explicaremos dichas máximas que rigen el diálogo:

1) Máxima de Cantidad:

Esta máxima prescribe que el emisor proporcione la cantidad de información suficientemente requerida por el objetivo del intercambio verbal. Comprende estas reglas:

1.1. Haga que su contribución sea tan informativa como sea necesario (para los propósitos de la conversación).

1.2. No haga que su contribución resulte más informativa de lo necesario.

En resumen: "Que su contribución sea todo lo informativa que requiera el propósito del diálogo; pero que no sea más informativa de lo necesario".

Ejemplos:

1.1. En un diálogo A le pregunta a B: "¿Dónde vive C?". Y B responde: "En algún lugar de la República del Perú".

1.2. Juan le pregunta a Carla a qué hora llega el encargado de atender la biblioteca y ella le responde: "La biblioteca que fue fundada el 8 de agosto del 2008 atiende de lunes a sábado de 6pm a 10pm. Si no está abierta puedes ir a la del Centro. Y si la del Centro no está atendiendo tendrías que buscar el libro que buscas por Internet".

2) Máxima de Calidad:

El emisor tiene que regirse por la veracidad, es decir, debe dar la información que él considera verdad; no mentir y, además, debe fundamentar adecuadamente lo que dice. Comprende las siguientes reglas:

2.1. No comparta lo que crea que es falso.

2.2. No hable sobre aquello de lo cual carezca de pruebas adecuadas.

Esta máxima se resume en la siguiente frase: “Intente que su contribución sea verdadera; no diga algo que crea falso; no diga algo de lo que no tenga pruebas suficientes”.

Ejemplo:

2.1. Pedro quiere terminar con Jazmín, su actual pareja, porque se siente más atraído por Mariela y le dice esto: “Gracias por venir. Teníamos que hablar algo muy importante. Nuestra relación ya no es lo que fue al comienzo. Creo que debemos dejar de ser enamorados. No eres tú soy yo. Siento mucha presión y quisiera alejarme de todos y de todo. Espero que sepas entender”.

2.2. Juana le cuenta un rumor a Bianca: “Dicen por ahí que María y Julio han terminado”. Bianca pregunta: “¿Estas segura?”. Finalmente, Juana responde: “La verdad que no estoy convencida pero ayer Julio me dijo que sentía muy solo y que le gustaba mucho pasar tiempo conmigo”.

3) Máxima de Relación (o relevancia o pertinencia):

El emisor debe centrarse en el tema sobre el cual está hablando. Tiene que ser cauto para no salirse del tema, para contribuir a que el diálogo progrese, aportando datos importantes y no debe permitir decir cosas fuera de lugar. La idea es que se diga cosas relevantes.

Ejemplo: Juan y Camila son dos bailarines profesionales. Sin embargo, Juan ha comenzado a sentir algo por Camila y antes de empezar la última presentación de la temporada ocurre este diálogo.

Juan: Camila, quería decirte que estoy muy enamorado de ti. ¿Qué me respondes? ¿Te intereso?

Camila: Vamos Juan, nos queda todo el invierno para hablar. Hoy solo vamos a bailar y hacer que el público disfrute de nuestro arte.

4) Máxima de Forma (o modalidad o manera):

El emisor debe ser claro y ordenado en sus expresiones. Para lograr ello, tiene que evitar ambigüedades o expresiones que puedan dar lugar a confusión. Esto se vincula con el modo de decir las cosas y no con el tipo de cosas que se debe decir. Comprende las siguientes reglas:

4.1. Evite la obscuridad.

4.2. Evite la ambigüedad.

4.3. Sea escueto.

4.4. Sea ordenado.

Se sintetiza en la máxima: “Sea claro, perspicuo”.

Ejemplo:

4.1. Lea el siguiente diálogo

A: Papá, ¿qué es el color azul?

B: Ah, bueno. Azul es el color que se percibe ante la fotorrecepción de una luz cuya longitud de onda mide entre 460 y 482 nanómetros. ¿Entendiste, verdad?

4.2. Un doctor le comenta a su paciente: “Me parece que el país marcha bien”, y este le responde: “Sí, doctor. Hay marchas por todos lados. Ya no se puede transitar”.

4.3. Lea el siguiente diálogo

Andrea: ¿Recuerdas que mañana tenemos esa reunión con el jefe? Tengo un poco de temor…

Pedro: ¿Qué reunión? No me llegó el correo, ¿temor de qué?

Andrea: Es que hablaremos de un tema importantísimo…

Pedro: ¿Del aumento de sueldo?

Andrea: No pues, Pedro. De eso no, de lo otro… ¿no recuerdas?

Pedro: ¿De las vacaciones? Ay, ¿Andrea podrías decirme de qué se trata?

Andrea: No puedo es que de solo pensarlo me siento mal, te lo juro.

4.4. Supongamos que una profesora le pregunta a un alumno por qué no hizo la tarea. El joven, en lugar de dar una respuesta concreta, contesta así: “Estaba dispuesto a hacer la tarea, pero estos días son algo complicados para mí. Llegué a mi casa y busqué el cuaderno, pero sonó el teléfono y hacía mucho calor; luego me dieron ganas de salir al parque y al regresar almorcé. Eso hizo que me diera sueño. Y le juro que aunque yo quería cumplir con mis obligaciones, al final no pude. Es que la semana pasada perdí mis libros y no me acordaba de la tarea”.

3.5.3. La implicatura conversacional

Según Haverkate:

> Siendo normas de conducta, las máximas pueden ser respetadas o violadas. Incluso hay una tercera posibilidad, que es la que Grice denomina *flouting a maxim* (´burlar una máxima’). Podemos decir, para caracterizar la diferencia entre violar y burlar, que la violación es una

> desviación intencionada de la norma, la que sirve para engañar o perjudicar al interlocutor. La violación de la primera máxima de calidad, por ejemplo, produce una mentira. El burlar una máxima también acarrea la desviación de una norma, pero, en este caso, es manifiesta; esto es, el hablante intenta conseguir que el oyente se dé cuenta de la ruptura de la máxima. Así, por ejemplo, la ironía es producto de que un hablante se burle de la máxima de calidad (…). (1992, p. 179)

Pongamos un ejemplo:

A: Palestina es la capital de Perú ¿no?

B: Claro que sí y Nueva York es la capital de Siria.

Como podemos notar el hablante responde con una mentira y dando un ejemplo evidentemente falso para darle a entender a su oyente que está en un error, es decir, que Palestina no es la capital de Perú. Así, se entiende el origen y significado de la ironía.

En este punto del trabajo trataremos el tema de las implicaturas conversacionales. Una implicatura conversacional surge por la violación ostensible (burla) de alguna de las máximas del Principio de Cooperación. El receptor debe captar esa violación y así determinar el significado del enunciado. Así, se entiende que el uso real, cotidiano y común del lenguaje tiene un componente inferencial por medio del cual el receptor deduce las intenciones comunicativas del otro con el que habla.

La implicatura conversacional se puede definir como ese mensaje del discurso con información encubierta dentro del mismo. Es lo dicho de modo indecible, esto es, por medio de lo "no dicho": el significado agregado que el receptor de un mensaje deduce o descubre. Su meta es transmitir información de manera no literal. Es decir, busca generar sobreentendidos y presuposiciones dando lugar a interpretaciones que van más allá de lo manifestado de modo explícito mediante palabras. De este modo, la implicatura conversacional sirve para mostrar la relación cooperativa entre interlocutores en una conversación, en que se transmite más de lo que dice y a pesar del rompimiento de alguna de las máximas conversacionales, la conversación no pierde sentido ni rumbo.

Veamos otro ejemplo. Si Teo le pregunta a Ana "¿Te llevo a algún lugar?" y ella responde "He traído mi propio auto" entonces lo que ella ha implicado conversacionalmente es que no necesita o no desea que Teo la lleve de vuelta.

Algo más que debemos agregar es que la forma gramatical puede ser engañosa y no siempre tiene que coincidir con la estructura lógica más adecuada con el que el intérprete la entiende. Al respecto, reflexionemos sobre este caso conocido:

1. "Sócrates bebió la cicuta y murió"

Sabemos que este caso interpretado debidamente no es una conjunción a pesar de la "y" manifiesta. Más bien, se trata de una condicional: "Si Sócrates bebió la cicuta entonces murió". Lo mismo ocurre aquí:

2. "Pienso luego existo"

La anterior no se trata de un condicional, a pesar de la palabra "luego". Es más bien una conjunción que plantea algo así como que pensando existo o, simplemente, pienso y existo. Ciertamente, para entender esto hay que moverse dentro del marco teórico de la propuesta cartesiana. La expresión siguiente, también, es problemática

3. "Vine, vi, vencí"

Podría interpretarse como afirmando que "Si vine y vi entonces vencí". Pero, definitivamente, no se trata de una conjunción puesto que si así fuese como en el caso 1 entonces se le podría aplicar la ley conmutativa pero, como sabemos, la expresión 3 no tiene el mismo sentido que "Vencí, vi, vine".

4. La siguiente es una cita de Amor: "($\forall$x) x$\in$A, P(x). Donde A es un conjunto y P(x) denota una propiedad acerca de x. Esta expresión anterior es una abreviatura usual en matemáticas del enunciado: ($\forall$x) [x$\in$A$\rightarrow$ P(x)]" (Amor, 2003, pp. 41-42)

Resulta interesante que incluso en matemáticas ocurre este tipo de cuestiones pragmáticas. La coma "," se interpreta como si fuese una condicional aunque a simple vista esto pudiera no ser tan evidente.

5. La siguiente es una cita de Díez: "A veces solo queremos afirmar que el antecedente es falso. Por ejemplo, "Si dos y dos fueran igual a uno, Russell sería Dios", con lo cual solo queremos decir que no es verdad que dos y dos son uno". (Díez, 2013, pp. 80-81)

Si aplicamos reglas lógica conocidas al condicional indicado entonces tendríamos que "Si 2+2=1 (falso) entones Russell es Dios" equivale a "verdadero", según tablas de verdad. Pero, este análisis nos desvía de la intención del hablante que es simplemente decir que no es cierto lo que se afirma en el antecedente.

6. "Aunque seas hijo del rector no ingresarás a la universidad".

Esta expresión se puede analizar desde dos puntos de vista:

6.1. Seas o no seas hijo del rector, igual no ingresarás a la universidad.

Forma Lógica 1: $(p \vee \sim p) \rightarrow \sim q$

Pero también

6.2. Si eres hijo del rector, no ingresarás y si no eres hijo del rector, tampoco ingresarás a la universidad.

Forma Lógica 2: $(p \rightarrow \sim q) \wedge (\sim p \rightarrow \sim q)$.

Hay que señalar que tanto las formas lógicas 1 y 2 son equivalentes pues ambas pueden reducirse a $\sim q$. Es decir, el enunciado simplemente dice que alguien no ingresará a la universidad.

Ahora bien, analizando la paradoja de Curry con esta nueva estrategia pragmática (a pesar de ciertos detractores[52]) ¿qué implica conversacionalmente que alguien nos diga que si lo que dice es cierto entonces B? Esta cuestión puede tratarse pensando en la expresión de Curry y su significado a nivel conversacional.

Si decimos "Si este condicional es cierto entonces B" no parece que estuviéramos planteando una paradoja sino tan solo dos verdades: que el condicional es verdadero y que B.

Recordemos que dicho condicional paradójico en las pruebas anteriores usadas para demostrarlo podría ser reducido, por un lado, a su antecedente y, por otro lado, a su consecuente. Entonces, simplemente usando una conjunción notaremos como es que de este condicional se puede obtener una conjunción. Como ya sabemos antes se mencionó que la fórmula de Curry $A \leftrightarrow (A \rightarrow B)$ depende de la verdad de $A \wedge B$.

Por ende, en pleno diálogo la idea que se manifiesta es que la supuesta condicional es, en realidad, una conjunción. Por ejemplo, si decimos: "Si estoy en lo cierto entonces Perú será

[52] Autores como Myhill miran con desprecio y hasta como por sobre el hombre los enfoques pragmáticos sobre temas formales: "La herejía actual refleja a la vez una victoria (con suerte temporal) del pragmatismo y el pensamiento generalmente descuidado sobre el análisis filosófico, y al mismo tiempo un fracaso de la erudición literaria y exegética en el sentido tradicional" (1984, p. 129).

campeón mundial de fútbol" no estamos planteando paradojas sino más bien diciendo que tenemos razón[53] y que creemos que Perú campeonará. Así, en realidad, la paradoja se disuelve cuando la interpretamos como diciendo que si yo afirmo cosas verdaderas entonces tal o cual cosa. Esto es, no parece que se hiciera enunciados sin sentido. Más bien, parece que afirmara que estoy seguro sobre la ocurrencia del hecho mencionado en el consecuente. Por ello, esta expresión de Curry inspeccionada bajo la lupa de la pragmática revela que burla la máxima de cantidad pues proporciona más información que la debida al decir "Si esto es cierto entonces B" cuando en realidad lo único que busca hacer es afirmar contundentemente que B.

De este modo, la paradoja de Curry vía el camino pragmático ha quedado disuelta y convertida en una conjunción menos dañosa que la propuesta original.

[53] Aquello sobre lo que tenemos razón es todo aquello que podemos estar pensando: nuestro mundo interior, nuestras ideas previas, nuestros cálculos e incluso esa misma afirmación condicional.

CONCLUSIONES

1. La propuesta de los metalenguajes de Tarski logra detener la paradoja de *El Mentiroso*.

2. La teoría de los tipos y la axiomática de Zermelo logran limitar a la paradoja de Russell.

3. La paradoja de Curry guarda relación con las paradojas de *El Mentiroso* y de Russell.

4. La paradoja de Curry no usa negaciones ni deriva en contradicciones.

5. La disolución clásica a la paradoja de Curry elaborada por Łukowski la declara como falsa.

6. El tratamiento clásico de la paradoja de Curry arroja que $A \leftrightarrow (A \rightarrow B)$ puede reducirse a $A \wedge B$.

7. El tratamiento clásico de la paradoja de Curry sostiene que esta expresión pide algo en contra de las leyes de la tabla de verdad del condicional.

8. El tratamiento clásico de la paradoja de Curry detecta resultados cíclicos cuando se manipula las siguientes condicionales iteradas: $A \rightarrow B$, $(A \rightarrow B) \rightarrow B$, $[(A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow B$, etc. Específicamente, tenemos dos opciones: o aceptamos que tanto A como B son

verdaderas o aceptamos que mientras que B es falso, A puede asumir cualquiera de los dos valores de verdad en lógica clásica.

9. La solución de Field bajo la lógica paracompleta considera a la paradoja de Curry como no-verdadera y no-falsa.

10. La solución de Priest bajo la lógica paraconsistente modifica la relación condicional haciendo uso del concepto de mundos no normales.

11. Las soluciones no-clásicas de la lógica paracompleta y paraconsistente no resuelven la paradoja de Curry.

12. La premisa de la paradoja de Curry tiene rastros de ambigüedad e irrelevancia.

13. El desarrollo de la paradoja de Curry puede plantearse con el uso de la prueba directa y de la prueba por reducción al absurdo.

14. La conclusión de la paradoja de Curry parece estar contenida en la premisa y, por ello, no se trataría de una prueba que demuestre cualquier cosa.

15. La lógica de la relevancia exige que entre premisa y conclusión se compartan variables (condición semántica) y que la premisa sea usada para derivar la conclusión (condición sintáctica).

16. La lógica de la relevancia logra frenar a las paradojas de la implicación.

17. La lógica de la relevancia no puede frenar la paradoja de Curry.

18. El enfoque pragmático de Paul Grice se basa en el principio de cooperación y en los cuatro tipos de máximas.

19. Las implicaturas conversacionales burlan ciertas máximas y explican el concepto de ironía.

20. La lógica pragmática de la conversación de Grice puede disolver la paradoja de Curry convirtiéndola en una conjunción encubierta y en una implicatura conversacional que burla una máxima de cantidad.

REFERENCIAS

ACKERMANN, W. (1980) *Fundamentación de una implicación fuerte*. Comunicación Interna, No. 6. Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM, México.

AMOR, J. (2003). La enseñanza del análisis lógico. En Campirán, A. (Comp.), *La Razón Comunicada II*. México D.F.: Torres Asociados, pp. 39-58.

ANDERSON, A.R. y Belnap, N. (1975). *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*. Princeton: Princeton University Press,

BACON, Andrew. (2011). Curry's paradox and ω-inconsistency. En: *Studia Logica*, February 2013, Volume 101, Issue 1, pp 1-9.

BARRIO, E. (2002). Verdad y circularidad: el problema de la superveniencia semantica / Truth and Circularity: The Problem of Semantic Supervenience. En: *Theoria: An International Journal for Theory, History and Foundations of Science, 17*(1(43)), segunda época, pp. 63-79.

BARRIO, E. (2014a). Expresabilidad, validez y recursos lógicos. En: *Crítica, Revista Hispanoamericana de Filosofía*. Vol. 46, N° 138, diciembre 2014, pp. 3-36.

BARRIO, E. (2014b). *La lógica de la verdad*. Buenos Aires: Eudeba.

BEALL, JC y Shapiro, L. (2018). "Curry´s Paradox". Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/curry-paradox/

BEALL, J., Brady, R., Hazen, A., Priest, G. y Restall, G. (2006). Relevant Restricted Quantification. En: *Journal of Philosophical Logic*, 35, pp. 587-598.

BEALL, JC y Murzi, J. (2013). Two Flavors of Curry's Paradox. En: *Journal of Philosophy*, 110 (3), pp. 143–165.

BETH, E. (1975). *Las paradojas de la lógica*. Valencia: Universidad de Valencia

BOBENRIETH, A. (1996). *Inconsistencias ¿por qué no? Un estudio filosófico sobre la lógica paraconsistente*. Santafé de Bogotá, Colombia: Tercer Mundo Editores.

BUNGE, M. (2007). *Diccionario de filosofía*. México: Siglo XXI.

BOCHENSKI, I. M. (1985). *Historia de la Lógica formal*. Madrid, España: Gredos.

CARRARA, M. y E. MARTINO. (2011). Curry's Paradox. A new Argument for Trivialism. En: *Logic and Philosophy of Science*. Vol. IX, Nº 1, 2011, pp. 199-206.

CÍRCULO DE VIENA. (1929). *La Concepción científica del mundo.* (Traducido por Alonso Zela Torres para el CESFIA)

CLARK, M. (2009). *El gran libro de las paradojas*. Madrid: Gredos.

COOK, R. (2013). *Paradoxes*. Cambridge: Polity.

COPI, I. (1995). *Lógica simbólica*. México: CECSA.

CURRY, H. (1942), The inconsistency of certain formal logics. En: *Journal of Symbolic Logic* 7, pp. 115-117.

DÍEZ MARTÍNEZ, A. (2013). *Introducción a la filosofía de la lógica.* Madrid: Universidad Nacional de Educación a Distancia.

FIELD, H. (2008). *Saving Truth from paradox*. Oxford: Oxford University Press.

FOUKZON, Jaykov. (2015). Relevant first-order logic LP# and Curry's paradox. En: *Pure and Applied Mathematics Journal. Special Issue: Modern Combinatorial Set Theory and Large Cardinal Properties*. Vol. 4, No. 1-1, 2015, pp. 6-12.

GAMUT, L. T. F. (2004). *Introducción a la lógica*. Buenos Aires: EUDEBA.

GARCÍA ZÁRATE, Ó. (2007) *Lógica*. Lima, Perú: CEPREDIM.

GARCÍA ZÁRATE, Ó. (2014) *Teoría del Conocimiento*. Lima: Gráfica Bracamonte.

GOLDSTEIN, L. (1986). Epimenides and Curry. En: *Analysis*, 463, pp. 117-121.

GOLDSTEIN, L., Brennan, A., Deutsch, M., Lau, J. (2008). *Lógica, conceptos clave en filosofía*. Valencia: Universitat de Valéncia.

GOTTWALD, S. (2015). Many-Valued Logic. Disponible en: https://plato.stanford.edu/entries/logic-manyvalued/

GRICE, Paul. (1975). Logic and Conversation. En: *Syntax and Semantics 3: Speech Acts.* Eds. P. Colé and J.L. Morgan. New York: Academic Press, 1975, pp.41-59.

GUPTA, A. y Belnap, N. (1993). *The Revision Theory of Truth.* Cambridge, MA: MIT Press.

HAACK, S. (1982) *Filosofía de las lógicas*. Madrid: Cátedra.

HAVERKATE, Henk. (1992). Las máximas de Grice y los diálogos del Quijote. En: *Actas XI IRVINE 92, AIH Asociación Internacional de Hispanistas*, 179-186. Disponible en: https://cvc.cervantes.es/literatura/aih/pdf/11/aih_11_1_018.pdf

HEGENBERG, L y Ferreira, M. (2005). *Novo Dicionário de Lógica*. Río de Janeiro: Pós-Moderno.

KRIPKE, S. (1975). Outline of a theory of truth. En: *Journal of Philosophy*, 72, pp. 690-716.

LEWIS, C.I. (1918). *Survey of symbolic logic*. California: Universidad de California.

ŁUKOWSKI, P. (2011). *Paradoxes*. Łódz: Springer.

MARTÍNEZ, J. (2014). La paradoja del Mentiroso. En E. Barrio (ed.), *Paradojas, paradojas y más paradojas*. Londres: College Publications, pp. 11-26.

MARTÍNEZ, (2005). El concepto de Lenguaje Universal. En: *Quaderns de filosofia i ciència*, 35, pp. 7-18.

MÉNDEZ, J. y G. ROBLES. (2007). Lógica de la relevancia. En: Frápolli, M. (coord.). *Filosofía de la lógica*. Madrid: Tecnos, pp. 255-286.

MEYER, R., Routley, R. y Dunn, J. (1979). Curry's paradox. En: *Analysis*, 39, pp. 124-128.

MIRANDA UBILLA, Horacio y M. Guzmán. (2012). Análisis pragmático de las máximas griceanas en textos orales y escritos. En: *Literatura y Lingüística* N° 26, pp. 229-246.

MYHILL, J., (1984). Paradoxes. En: *Synthese*, 60, pp. 129-143.

MOH Shaw-Kwei. (1954) Logical Paradoxes for Many-Valued Systems. En: *Journal of Symbolic Logic*, 19, N°1, pp. 37-39.

MORA, R. (2013). La lógica hegeliana desde la lógica paraconsistente. En: *Revista de Filosofía en el Perú. Pensamiento e Ideas*. Año 2, Nº 4, diciembre 2013, pp. 139-152.

MORA, R. (2014a). *Análisis lógico de la paradoja de Epiménides.* Tesis de Licenciatura. Lima: UNMSM.

MORA, R. (2014b). Análisis lógico de la paradoja de Protágoras. En: *Tesis*, Año VIII, N° 7, Dic. 2014, Lima: UNMSM, 53-74.

MORA, R. (2016). *La evolución de la paradoja de las clases propuesta por Bertrand Russell.* Tesis de Maestría. Lima: UNMSM.

MOSTERÍN, J. (1980). *Teoría Axiomática de Conjuntos*. Barcelona: Ariel.

MOSTERÍN, J. (2000). *Los lógicos*. Madrid: Espasa Calpe.

MOSTERÍN, J. y R. TORRETI (2002) *Diccionario de Lógica y Filosofía de la Ciencia*. Madrid: España: Alianza Editorial.

PAILOS, F. (2014). La paradoja de Curry. En: E. Barrio (ed.), *Paradojas, paradojas y más paradojas.* Londres: College Publications, pp. 41-52.

PALAU, G. (2002). *Introducción filosófica a las lógicas no clásicas.* Barcelona: Gedisa.

PISCOYA, L. (1995). *Investigación científica y educacional*. Lima, Perú: Amaru.

PRIEST, G. (1992). What is non-normal world?. En: *Logique & Analyse* 139-40: 291-302.

PRIEST, G. (2006a). *In Contradiction.* Oxford: Oxford University Press.

PRIEST, G. (2006b). *Una brevísima introducción a la lógica*. México: Océano.

PRIOR, A. N., (1955). Curry's Paradox and 3-Valued Logic. En: *Australasian Journal of Philosophy* 33, pp. 177-82.

RESCHER, N. (2001) *Paradoxes.* Illinois: Carus Publishing Company.

RESTALL, G., (1992). Arithmetic and truth in Lukasiewicz's infinitely valued logic. En: *Logique et Analyse*, 139-140, pp. 303-312.

RESTALL, G. and Rogerson, S., (2004). Routes to Triviality. En: *Journal of Philosophical Logic*, 33, pp. 421-436.

ROBLES, G. y Méndez, J. (2014). Curry's Paradox, Generalized Modus Ponens Axiom and Depth Relevance. En: *Studia Logica*, 102 (1), pp. 185-217.

RUSSELL, B y A. N. Whitehead (1910). *Principia Mathematica*. Vol. 1. Londres: Cambridge.

RUSSELL, B. (1986). La filosofía del atomismo lógico. En: Javier Muguerza (ed.) *La concepción analítica de la filosofía.* Madrid: Alianza Editorial, 1986, pp. 139-251.

SCRUTON, R. (2003). *Filosofía Moderna*. Santiago: Cuatro Vientos.

SUPPES, P. (1979). *Introducción a la Lógica Simbólica*. México: CECSA.

TARSKI, A. (1997) La Concepción Semántica de la Verdad y los Fundamentos de la Semántica. En: Nicolás, J. A. y Frápoli, M. J. *Teorías de la verdad en el siglo XX*. Madrid: Tecnos, pp. 63-108

UXÍA, M. (2012) Pragmática. En: Vega, L y Olmos, P. (eds.). *Compendio de lógica, argumentación y retórica*. Madrid: Trotta, pp. 473-478.

WHITMAN, W. (2012). *Hojas de Hierba.* Madrid: Alianza Editorial.