Universidade de Lisboa

A APRENDIZAGEM DA NOÇÃO DE DERIVADA NO 11.º ANO

RUTE GIL

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada

Mestrado em Ensino da Matemática

2014

Universidade de Lisboa

A APRENDIZAGEM DA NOÇÃO DE DERIVADA NO 11.º ANO

RUTE GIL

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada orientada pelo Professor Doutor Henrique Guimarães e co-orientada pelo Professor Doutor Mário Branco

Mestrado em Ensino da Matemática

2014

Resumo

Este estudo baseia-se nos resultados obtidos durante a lecionação de 10 aulas que decorreram no final do 2.º e início do 3.º período do ano letivo de 2013/2014, com a turma do 11.º ano de escolaridade do curso de Ciências Socioeconómicas da Escola Secundária José Afonso de Loures. A unidade lecionada foi "Taxa de Variação e Derivada" e o principal objetivo do estudo é compreender que significados os alunos desenvolvem, de que forma utilizam a noção de derivada, e quais as dificuldades que manifestam, quer na resolução de problemas quer na apropriação destes conceitos.

Para a consecução dos objetivos de aprendizagem— nomeadamente os que se prendem com a compreensão da noção de derivada, a sua interpretação geométrica e a interpretação de gráficos de funções — e realização do estudo projetado, as tarefas utilizadas nas aulas foram de natureza variada, com recurso às calculadoras gráficas e ao *software Geogebra*, projetadas segundo uma abordagem exploratória.

Para a elaboração do trabalho de natureza investigativa recolhi as produções escritas, dos alunos, na realização das tarefas propostas em aula e nos elementos de avaliação. A observação direta do trabalho e participação dos alunos foi também um instrumento de recolha de dados, através da elaboração de memórias descritivas das aulas, assim como as entrevistas realizadas no final do ano letivo.

A análise efetuada permite concluir que os alunos manifestaram um entendimento essencialmente instrumental da noção de derivada, vendo-a sobretudo como uma ferramenta para resolver problemas de optimização, e que a derivada num ponto é percecionada como a reta tangente ao gráfico da função nesse ponto. A manipulação algébrica, a escrita matemática e a interpretação geométrica são as principais dificuldades encontradas.

Palavras-chave: Derivada, função, significados, dificuldades.

Abstract

This study seeks to understand which meannings the students developed when they are introduced to the derivative concept, how do they use in and which were their difficultis with the concept and in optimazation solving problems. Is based on the results obtained during the 10 lessons that occourred at the end of 2nd term and the begging of 3rd, in the school year 2013/2014, in economics course of Secondary School José Afonso of Loures.

The unit taught was “Rate of Change and Derivative” and the subtopics: notion and calcule average rate of change; notion and obtencion of the rate ofchange; geometric interpretation of the rate of change (and the average rate of change); definition of derivative of a function(at one point, using the intuitive notion of limit and generalization of the derivative of a function); finding, by geometric arguments, the relation between the monotony of a function and the sign of their derivative; and, solving optimazation problems. I used tasks that promoted the learning in the students, of this concept and allowed the development of diferentes matematics activitis, incorporating tecnology, by grafhic calcutators or by the *Geogebra software*.

The data collected are from the written produtions of the students in the classroom and in evaluation moments, the direct observation, interviews with the students and my own descripetive memory.

The results suggest that the students tend to develop na instrumental understanding of the derivative of a function, seeing it mostly as a tool for solving optimization problems. The derivative of a function, at a point, is viewed as the tangent to the graph of the function at that point. The algebraic manipulation, writing with mathematical symbols and geometrical interpretation are the main difficulties encountered

Key-word: Derived, function, understanding, difficulties

Agradecimentos

Este trabalho, e este percurso, só foram possíveis devido ao apoio e suporte de inúmeras pessoas a quem gostaria de agradecer.

Em primeiro lugar aos meus pais, pelas razões óbvias, pela paciência e carinho ao longo dos anos.

Ao Professor Henrique Guimarães, pela orientação e partilha de conhecimento, de forma sempre paciente e respeitadora. Pelo tempo dedicado, pelo material indicado, *emails* trocados e comentários construtivos. Pelo rigor, sabedoria e exigência.

Ao Professor Mário Branco, pelos esclarecimentos do foro científico, pelas sugestões e opiniões construtivas.

À professora Anabela Bento, pela aprendizagem que vivi, através dos conselhos e críticas, pelas chamadas de atenção e experiências partilhadas.

Aos alunos da turma de intervenção, por me terem aceite como sua professora. Pelos seus contributos e empenho, ao longo do ano, e disponibilidade durante a intervenção letiva. Pela disponibilidade e compreensão.

À Escola Secundária José Afonso de Loures, por ter possibilitado a realização deste estudo. Aos professores do Conselho de Turma e do grupo de Matemática pela forma como me acolheram e pela consideração. A todos os restantes membros da comunidade educativa por me acolherem e pela simpatia com que me trataram.

Aos colegas e professores do Mestrado, pelos momentos de aprendizagem e de partilha.

Aos meus amigos, Sara, Paulo, Ema e Vanda.

Índice Geral

Índice de figuras

Índice de Anexos

Capítulo I

Introdução

Este trabalho está inserido no âmbito da disciplina de Iniciação à Prática Profissional IV, do Mestrado em Ensino da Matemática. Constitui o relatório da prática da intervenção letiva, realizada entre Março e Abril de 2014, numa escola nos arredores de Lisboa. A unidade de ensino lecionada foi "Taxa de Variação e Derivada", da disciplina de Matemática A, a uma turma do 11.º ano de escolaridade. Este trabalho teve também um cariz investigativo, tendo sido desenvolvido paralelamente um estudo sobre os significados desenvolvidos e as dificuldades encontradas pelos alunos do ensino secundário com a noção de derivada. Nas secções seguintes, deste primeiro capítulo, apresentam-se as motivações para a escolha do tema, os objetivos e as questões fundamentais para a componente investigativa da intervenção letiva.

No Capítulo II aborda-se o enquadramento curricular e didático, com revisão da literatura existente nesta área e referências às orientações curriculares para a Matemática no ensino secundário. São focados aspetos importantes como as tarefas, os recursos utilizados e o papel do professor na sala de aula bem como as respetivas implicações na aprendizagem dos alunos.

O Capítulo III contém uma breve caracterização da escola e da turma de intervenção.

O Capítulo IV inicia-se com a ancoragem da unidade didática escolhida, seguida de uma descrição pormenorizada da proposta pedagógica para a unidade de ensino que foi alvo de estudo e da atividade letiva desenvolvida.

Finaliza-se este capítulo com a descrição dos métodos e processos de recolha de dados utilizados.

O Capítulo V divide-se em duas partes. A primeira refere à análise dos dados recolhidos, incluindo seis entrevistas individuais apoiadas pelas produções escritas e os contributos dos alunos quer em aula, quer nos momentos de avaliação e até mesmo no momento da entrevista. Na segunda parte, apresentam-se as conclusões deste estudo, as aprendizagens e reflexões vividas ao longo da intervenção letiva e também da construção do próprio relatório.

Motivações

"A Matemática é, por definição e pela sua própria natureza, uma ciência rigorosa e exata e cujos objetos podem ser definidos com precisão, fornecendo assim uma fundação sólida para as teorias matemáticas" (Tall & Vinner, 1981, p.151)[1]. De entre esses objetos, o conceito de função é considerado um dos mais importantes em Matemática e, segundo Ponte (1992), as noções de função e derivada são as fundações da análise matemática, teoria central no desenvolvimento da Matemática na era moderna.

O estudo das funções é iniciado no 10.º ano de escolaridade e é alargado no 11.º às funções trigonométricas, racionais e com radicais. É, por esta razão que é necessário ter, como pré-requisito, conhecimento de funções afim e de proporcionalidade inversa. (Carvalho e Silva *et al.*, 2001). A função derivada tem uma forte interpretação geométrica sendo possível estabelecer ligações com conceitos abordados em geometria (por exemplo, as retas tangente e secante); encontrar outras aplicações para objetos já conhecidos (por exemplo, as assintotas e a noção de limite) e, ainda, estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas como a Física e a Economia, esta última de grande interesse dos alunos.

[1] Tradução própria

A noção de limite, essencial para a definição de derivada de uma função num ponto, é outro conceito abordado pelos alunos neste ano de escolaridade, com o estudo das funções racionais, de forma intuitiva apenas. Desta forma, é de realçar a importância da apreensão do significado desta noção, juntamente com a noção de reta tangente e reta secante, essenciais para o entendimento do conceito de derivada. A utilização de *software* próprio para o estudo de funções, como o *Geogebra* ou *applets*, assim como a incorporação da calculadora gráfica, eram também motivações fortes para esta intervenção.

A intervenção letiva decorreu no 2.º período letivo, por questões de natureza administrativa e de organização do próprio mestrado. No entanto, devido a alterações na planificação, algumas aulas transitaram para o 3.º período, fazendo com que a minha intervenção terminasse mais tarde. Este foi também um fator de influência na escolha do tema. Por estar a intervir numa turma de secundário que tem um programa mais ou menos rígido, e como os alunos foram alvo de avaliação externa com a realização do teste intermédio a 11 de Março, a escolha da unidade de ensino teria de recair sobre o tema de Introdução ao Cálculo Diferencial. No primeiro período, lecionei uma aula sobre a introdução da noção de inclinação e de declive de uma reta como a tangente da sua inclinação, contribuindo também para a escolha da unidade.

Por estas razões, o tema escolhido para a intervenção letiva foi a noção de derivadade uma função. É interessante para tentar perceber como os alunos mobilizam os seus conhecimentos, para compreender quais as estratégias que escolhem na resolução dos problemas propostos, bem como em identificar as dificuldades que encontram nesse processo.

Assim sendo, vi nesta intervenção uma oportunidade para por em prática o ensino exploratório, apresentando aos alunos uma forma diferente de ver, e de fazer, Matemática.

Objetivos e questões do estudo

O estudo que se apresenta tem como principal objetivo compreender como os alunos se apropriam e utilizam a noção de função derivada, quais os significados que desenvolvem e que dificuldades manifestam, nomeadamente na resolução de problemas. Para o efeito, e no sentido de orientar o meu trabalho, formulei as seguintes questões:

– Qual o significado que os alunos atribuem à noção de derivada de uma função?

– Como os alunos utilizam a derivada de uma função na resolução de problemas e quais as principais dificuldades que manifestam?

Particularizando, o estudo foi desenvolvido no âmbito da lecionação dos subtópicos: noção e cálculo da taxa média de variação; noção e obtenção da taxa de variação; interpretação geométrica da taxa de variação (e da taxa média de variação); definição de derivada (num ponto, recorrendo à noção intuitiva de limite e generalização da função derivada); determinação da derivada em casos simples (dedução de algumas regras de derivação); constatação, por argumentos geométricos, da relação entre monotonia e extremos da função e sinal da sua derivada; e, por fim, resolução de problemas de optimização. A intervenção letiva decorreu ao longo de dez aulas de 90 minutos, no final do 2.º e início do 3.º períodos do ano letivo de 2013/2014, com a turma do 11.º ano de escolaridade do curso de Ciências Socioeconómicas da Escola Secundária José Afonso de Loures.

A recolha e a análise de dados centraram-se, assim, nos significados que os alunos atribuíram ou desenvolveram sobre a noção da derivada de uma função bem como a sua aplicação. Foram usados métodos de recolha direta, como a recolha documental de produções escritas dos alunos e de recolha indireta, como são o caso das entrevistas e das observações em aula, com registos elaborados à posteriori.

Capitulo II

Enquadramento Curricular e Didático

Este capítulo tem por objetivo fazer o enquadramento do tema da minha intervenção letiva no programa em vigor e, em simultâneo, fazer a articulação com as questões propostas para a investigação. Numa fase posterior, serão abordados o papel do professor em sala de aula e as suas opções metodológicas, determinantes para uma aprendizagem significativa dos alunos. Por fim, serão abordadas as tarefas matemáticas, natureza e vantagens.

Enquadramento teórico

O desenvolvimento curricular deve ser alvo de reflexão por parte do professor, por ser um fator de grande influência no processo ensino-aprendizagem. Está relacionado com o "modo como o professor interpreta e (re)constrói o currículo, tendo em conta as caraterísticas dos seus alunos e as suas condições de trabalho" (Ponte, 2005, p.20). As escolhas do professor, tanto ao nível da natureza e tipo de tarefas, dos materiais a utilizar, como da metodologia e estratégias adotadas, aliadas com a gestão da sala de aula, são fatores determinantes para a obtenção do objetivo principal de um professor: o sucesso nas aprendizagens dos seus alunos.

À medida que se progride no percurso académico, as exigências ao nível do formalismo e do raciocínio dedutivo são cada vez maiores. No 11.º ano de escolaridade, ano da minha intervenção, os alunos entram em contacto com vários conceitos novos e difíceis. Realço, aqui, a própria noção de derivada e o conceito de limite, não menos importante que o primeiro. Importa destacar que os significados que os alunos atribuem e desenvolvem ao abordarem novos conceitos são importantes para a compreensão e manipulação destes objetos matemáticos. Tem-se verificado, segundo Domingos (2003), que os alunos chegam ao ensino superior com uma visão redutora e uma compreensão parcial dos conceitos matemáticos, além de uma capacidade de abstração reduzida. Estes factos são consequência de uma conceção "de cariz operacional (…) relacionada com os processos subjacentes aos conceitos" (p.1). Desta forma, uma introdução ponderada e estruturada dos conceitos referidos é essencial para uma aprendizagem significativa nos alunos e construção de uma visão abrangente dos conceitos matemáticos.

Steen (citado por Domingos, 2003, p.3), admite que

> a maior parte do que é ensinado no currículo tradicional é esquecido pelos alunos após terminarem os seus estudos, enquanto que muito do que é aprendido em contexto é lembrado por muito mais tempo.

Assim sendo, é cada vez mais pertinente tentar perceber que significados os alunos atribuem aos conceitos matemáticos, particularmente no momento em que estes são introduzidos e monitorizar o modo como estas noções se vão desenvolvendo, bem como é que os alunos vão construindo o seu conhecimento. Neste sentido, é importante e necessário definir alguns termos a utilizar neste estudo e enquadrar a sua relevância face ao principal objetivo do professor. São eles: compreensão matemática, "conceito imagem" e "conceito definição".

Considerando o primeiro desses termos, Carpenter e Lehrer (citados por Domingos, 2003) encaram que

> a compreensão não é um fenómeno onde apenas podemos falar de compreender ou não compreender, mas antes um processo que se desenvolve e emerge a vários níveis e de formas diferentes na mente dos alunos (…) sendo caracterizada pela atividade mental que contribui para o desenvolvimento da inteligência em vez de um contributo estático do conhecimento de um individuo (p.21).

Completando o conceito em análise, Skemp (citado por Domingos, 2003, p.14) apresenta um modelo simples onde distingue duas vertentes da compreensão: a *instrumental* e a *relacional*. Na primeira, privilegia-se "o saber como sem saber porquê" (Domingos, 2003, p.14) e está relacionada com a aquisição de regras ou métodos e com a capacidade de os utilizar, na resolução de problemas. Na segunda, pretende-se saber o como e o porquê em simultâneo e está relacionada com princípios que têm uma aplicação mais geral. Na compreensão instrumental pretende-se encontrar uma regra que permita dar resposta ao problema, enquanto na compreensão relacional, pretende-se perceber qual o método que funciona, porque funciona e como funciona; permitindo também "relacioná-lo com o problema" e possibilitando "a sua adaptação para a resolução de novos problemas" (Domingos, 2003, p.14).

Nos processos de compreensão, não utilizamos toda a informação num dado momento. O sujeito move-se entre diferentes aspetos fazendo conexões e ligações variadas durante o processo de tomada de decisão (Tall, 2001). Segundo Tall e Vinner (1981), "o cérebro não é uma entidade puramente lógica"[2] (p. 151), desta forma, muitos conceitos utilizados não estão definidos formalmente, apenas "aprendemos a reconhece-los através da experiência e utilização em contextos apropriados"[2] (p. 151). Mais tarde, podemos refiná-los no seu significado e na interpretação que deles fazemos, sem requerer necessariamente uma definição precisa. Segundo Tall (2001), para um dado conceito, desenvolvemos um "conceito imagem" (*concept image*) no cérebro, que consiste na "estrutura cognitiva associada ao conceito e que inclui todas as imagens mentais e processos e propriedades associados"[2] (Tall & Vinner, 1981, p.152).

Desta forma, os "conceitos imagem crescem e alteram-se com a experiência e a reflexão" (Tall, 2001, p.5), uma vez que são formados por várias partes que se desenvolvem em momentos diferentes e de formas distintas. Além disso, estão repletos de experiências parciais que se focam em pequenos aspetos de uma situação, ligados por associações variadas (Tall & Vinner, 1981; Tall, 2001). No entanto, na Matemática, tentamos "racionalizar as várias experiências para construir a imagem mais coerente possível" (Tall, 2001, p.5). Uma vez que o cérebro não é lógico nem coerente, os erros que

---

[2] Tradução própria

os alunos cometem, numa dada altura em relação a determinado conceito, estão assim relacionados com o "conceito imagem" e as ligações entre as suas partes. Estas partes, por sua vez, poderão entrar em conflito com outras partes do "conceito imagem" que venham a ser adquiridas posteriormente ou até mesmo com o "conceito definição" (co*ncept definition),* que traduz "o conjunto de palavras utilizado para especificar esse conceito" (Tall & Vinner, 1981, p.152). O "conceito definição" pode ser pessoal ou formal, sendo este último a definição aceite pela comunidade matemática. Os conflitos entre as partes do "conceito imagem", o que Tall e Vinner (1981) denominam de "fatores potenciais de conflito".

A noção de derivada

O estudo de funções foi conquistando um papel de destaque no ensino da Matemática desde os anos 60, tendo sido introduzido em Portugal por Sebastião e Silva aquando da reforma curricular. Atualmente regem os seguintes temas do ensino secundário: Funções e Gráficos, para o 10.º ano de escolaridade, e Introdução ao Cálculo Diferencial, para os 11.º e 12.º anos de escolaridade. Estes grandes temas absorvem toda a Álgebra e parte dos Números e Operações, do ensino básico, fundamentais para os alunos alcançarem sucesso no estudo de funções. Em particular, no que concerne à Introdução ao Cálculo Diferencial, "as noções de taxa média de variação e de taxa de variação/derivada desempenham um papel central neste tema, sendo introduzidas recorrendo a um uso informal da noção de limite" (Carvalho e Silva *et al.*, 2001, p.5).

Domingos (2003), apresenta os resultados de estudos conduzidos por Vinner e Dreyfus sobre o conceito de função e de derivada e as perceções que os alunos de 10.º e 11.º anos de escolaridade constroem. Os principais conceitos definição encontrados foram: uma correspondência; uma relação de dependência; uma regra; uma operação; uma fórmula; uma representação (gráfica ou simbólica). Quanto às propriedades relativas a conceitos imagem de função, foram identificadas: univocidade; descontinuidade; divisão do domínio; ponto de exceção (do domínio) (Domingos, 2003, pp. 88-89). No que concerne à noção de derivada, os alunos que a identificam com a tangente a uma circunferência, produzem conceitos imagem de uma reta que "toca a curva mas não a intersecta, que encontra a curva mas não a corta ou que tem um ponto comum com a curva mas está de um lado da curva" (Domingos, 2003, p.97).

No que concerne à aprendizagem Matemática, a compreensão de determinado conceito e as imagens que imprimimos no nosso cérebro, vêm muitas vezes associadas à representação que utilizamos ou que privilegiamos para esse conceito. Hiebert e Carpenter (citados por Domingos, 2003, p.24) referem que "para pensarmos sobre as ideias matemáticas precisamos de representá-las internamente, por forma a permitir que a mente possa operar sobre elas". Desta forma, caberá ao professor escolher, de forma ponderada, informada e consciente, a sequência de tarefas que melhor se harmonizem permitindo a consecução do propósito matemático delineado e dos objetivos preconizados pelos programas, diversificando as abordagens e a natureza das tarefas propostas. Não deve, contudo, esquecer os alunos e suas características, pois são estes os verdadeiros beneficiários dessas escolhas e da atividade que delas resultam.

O papel do professor e as opções metodológicas

Carpenter e Lehrer (citado por Domingos, 2003, p.19) apresentam um modelo para a compreensão, cuja abordagem está centrada na aula, que considera cinco formas de atividade mental fortemente interligadas:

> construção de relações, prolongar e aplicar o conhecimento matemático, reflexão sobre experiências, comunicar o que sabemos e desenvolver um conhecimento matemático próprio (Domingos, 2003, p.19).

Desta forma, podemos concluir que o processo de compreensão pressupõe um envolvimento e investimento dos próprios indivíduos que, através das suas atividades, constroem e desenvolvem "*um conhecimento matemático próprio*" (Domingos, 2003, p.21). Este modelo de compreensão, entre outros, tentam explicar processos mentais, no entanto, não é possível determinar quando é que um conceito foi verdadeiramente compreendido ou não. Tendo em conta que o cérebro humano é finito, este tem de lidar com a complexidade usando apenas uma pequena parte e focar atenção para responder às situações que nos apresentam.

Por outro lado, segundo Canavarro (2011), no ensino exploratório da Matemática, "(...) os alunos aprendem a partir do trabalho sério que realizam com tarefas valiosas (...)"(p. 11). O papel e ação do professor numa aula de ensino exploratório é, assim, fundamental; não só na escolha da tarefa como na sua planificação e implementação. Canavarro (2011) propõe cinco etapas numa aula do ensino exploratório: antecipar, monitorizar, selecionar, sequenciar e estabelecer conexões. Desta forma, podemos referir que a dinâmica impressa às aulas é uma característica do ensino exploratório. Na descrição dessa dinâmica estaria uma primeira fase de introdução da tarefa, seguida por uma fase de trabalho autónomo por parte dos alunos, em que o professor apoia a sua atividade e, em paralelo, vai avaliando e tomando decisões sobre as restantes fases da aula. De seguida, os alunos apresentam o seu trabalho, as suas conclusões e os seus raciocínios; culminando com a discussão das ideias apresentadas, momento que envolve toda a turma e é seguido de uma sistematização/generalização, de carácter formal e preciso, por parte do professor. (Canavarro, 2011; Ponte, 2005; Abrantes, 1985) Nesta perspetiva, a fase do antecipar será a correspondente ao trabalho de preparação da aula na qual o plano de aula torna-se um elemento de grande importância no trabalho a ser desenvolvido pelo professor. A importância deste elemento abrange todas as fases da aula, independentemente de ser do tipo exploratório ou expositivo. As vantagens da elaboração do plano de aula são: organizar os conteúdos a abordar; equacionar o tempo despendido para cada fase da aula; prever as estratégias que os alunos poderão adotar, prever as dificuldades que poderão encontrar, detetar erros possíveis ou recorrentes; além de poder conceber a forma de atuação no decorrer da aula; organizar a fase da discussão da(s) tarefa(s); definir os parâmetros que vão condicionar a seleção e sequenciação das resoluções que irão ser apresentadas à turma. Desta forma, o professor sentir-se-á mais apto para responder aos alunos de forma a potenciar as suas aprendizagens e sentir-se-á mais seguro na condução da aula relativamente aos propósitos matemáticos objetivados. Conclui-se, assim, que esta etapa está relacionada com todas as fases da aula.

A introdução da tarefa, ou seja, a forma como é implementada, é fulcral para o propósito matemático da aula e da tarefa. “Não se pode aspirar à compreensão sem a técnica“ (Ralston, 1999.b, p. 39) mas também não se pode aspirar à técnica sem a compreensão e, neste sentido, é muito importante que os alunos percebam o que lhes é pedido. A introdução da tarefa é importante para o sucesso da mesma, uma vez que a compreensão do que lhes é pedido e dos elementos que a compõem condiciona a atividade Matemática da aula. Desta forma, é importante a interação com os alunos, de modo a envolvê-los de forma justa e solicitando a participação na leitura e na interpretação da tarefa. Esta atitude permite uma melhor compreensão por parte dos alunos e ainda uma avaliação desta compreensão por parte dos professores.

No que concerne às fases de trabalho autónomo e discussão, o professor, é um mediador das aprendizagens e gestor das interações que decorrem na sala de aula, facilita e promove atitudes de consciencialização nos alunos, tornando-os co-responsáveis no processo de ensino-aprendizagem. Neste processo, o ensino exploratório da Matemática é um agente ativo, uma vez que os alunos aprendem Matemática ao fazer Matemática, mobilizando conhecimentos que já possuem para desenvolverem competências e/ou novos conhecimentos (Canavarro, 2011; Ponte, 2005; Abrantes, 1985; Ralston, 1999; Dias & Santos, s.d.; Almiro, 2004).

Na minha prática letiva assistida optei pelo ensino exploratório da Matemática como opção para o desenvolvimento curricular, uma vez que sinto que os alunos ficam predispostos para aprender pois são incluídos em todo o processo. Desta forma, tentei não centralizar as práticas de sala de aula na minha pessoa, mas sim considerar em primazia os alunos e preocupei-me em adotar uma postura crítica em relação ao meu trabalho. Esta atitude permite-me, mais facilmente, detetar as minhas falhas o que, por sua vez, possibilita um melhoramento da prática letiva. A maior dificuldade que encontrei nesta forma de ensinar foi encontrar formas de "ajudar o aluno a melhorar a sua produção, sem lhe dizer explicitamente como deve fazer" (Dias & Santos, s.d., p.511).

Tarefas matemáticas

As práticas pedagógicas são um dos fatores que influenciam a forma como os alunos encaram a Matemática. Os conceitos já referidos como a compreensão, o conceito imagem e o conceito definição, são igualmente importantes e muito úteis para estruturar o pensamento; ajudando o professor a focar no objetivo em estudo e escolher, ou selecionar, as tarefas. No caso da temática lecionada, importa realçar a abordagem que o professor deve fazer do conceito de derivada, evitando

> cálculo excessivo de derivadas de várias funções onde são exploradas diversas técnicas de cálculo, e que os alunos tantas vezes o associam a um processo mecanicista em detrimento da atribuição de significado a este conceito matemático (Loureiro, 2012, p.5).

Deve, contudo, propiciar a apropriação, por parte dos alunos, de representações diversificadas, associadas ao conceito de derivada, por forma que estes consigam ter sucesso em Matemática, tanto ao nível do Ensino Secundário como Superior. Aragão (citado por Loureiro, 2012) salienta que as apropriações dos alunos

> se tornam mais ricas quanto mais aspetos interligados àquele conceito tiverem, e mais pobres, se possuírem poucos elementos que flexibilizem o seu uso na procura de uma solução a um dado problema (p.3).

Neste sentido, o professor deve optar por uma perspetiva inclusiva de que

> o ensino da Matemática participa, pelos princípios e métodos de trabalho praticados, na educação do jovem para a autonomia e solidariedade, independência empreendedora, responsável e consciente das relações

em que está envolvido e do ambiente em que vive (Carvalho e Silva *et al.*, 2001, p.3).

Com estes objetivos em mente, e adotando uma estratégia onde se idealiza que o professor não explica tudo aos alunos mas antes que estes desenvolvem um "trabalho de descoberta e de construção do conhecimento" (Ponte, 2005, p 22), realça-se a importância de que as tarefas devem ser diversificadas, com o objetivo de pluralizar a atividade matemática proporcionada aos alunos.

Segundo Ponte (2005) as tarefas podem ser classificadas segundo alguns parâmetros ou dimensões (Fig. 2.1). As dimensões fundamentais são o grau de desafio matemático (elevado a reduzido) e o grau de estrutura (aberto ou fechado).

Figura 2.1. Natureza das tarefas (Ponte, 2005)

Cruzando estas dimensões com o tempo de duração (curto, médio ou longo) e o contexto (realidade, semi-realidade ou Matemática pura), as tarefas podem ser (Ponte, 2005):

(i) fechadas com desafio matemático reduzido – exercícios de curta duração;

(ii) fechadas e com desafio matemático elevado – problemas de duração média;

(iii) abertas e com desafio matemático reduzido – explorações matemáticas de média duração;

(iv) abertas e com desafio matemático elevado – investigações matemáticas de média duração.

Naturalmente que a separação entre exercícios e problemas, assim como entre investigações e explorações, não é rígida. Se o aluno não domina, ou não conhece, nenhum método ou processo para resolver um exercício, este torna-se um problema. Pelo contrário, se conhece um método ou procedimento para resolver um problema, este torna-se um exercício. Por outro lado, a distinção entre tarefa de exploração e de investigação, além do grau de desafio, está no planeamento a realizar: uma tarefa de investigação requer maior planeamento que uma tarefa de exploração. Para além destes fatores, a dinâmica da aula e o papel do professor são também decisivos para o sucesso das tarefas (Almiro, 2004; Gafanhoto & Canavarro, 2008, 2012; Ponte, 2005; Stein & Smith, 1998).

No entanto, cada tipo de tarefa tem o seu papel e a sua importância na construção do conhecimento e numa aprendizagem, que se quer significativa. Os exercícios são importantes para que os alunos possam colocar em prática os seus conhecimentos e aperfeiçoar os métodos, técnicas e regras matemáticas. Os problemas, segundo Pólya, são essenciais para que os alunos se sintam desafiados e compreendam "a verdadeira natureza da Matemática", além de desenvolverem "o seu gosto por esta disciplina" (Ponte, 2005, p.13). As explorações e investigações têm um papel preponderante, não só "para que os alunos tenham uma efetiva experiência matemática" mas também "para o desenvolvimento de certas capacidades nos alunos, como a autonomia, a capacidade de lidar com situação complexas (…)" (Ponte, 2005, p.26) entre outras. Desta forma, é possível promover, simultaneamente, o estabelecimento de conexões e a reflexão sobre a atividade realizada.

Os recursos são outro fator fundamental para o sucesso das tarefas pois podem ser uma forma de motivar ou dispersar os alunos, conforme a utilização a que se propõe. A utilização de materiais manipuláveis ou *softwares* matemáticos adequados, torna a tarefa mais apelativa, pois o modo como a apresentamos aos alunos é decisiva para a forma como eles encaram e desenvolvem toda a exploração. Exemplos destes recursos são as calculadoras, os *softwares* específicos e aplicações matemáticas, os materiais manipuláveis, que, articulados entre si, contribuem para aprendizagens mais significativas (Almiro, 2004; Gafanhoto & Canavarro, 2008, 2012; Ponte, 2005; Stein & Smith, 1998).

Capitulo III

Contexto Escolar

Este capítulo dedica-se ao contexto escolar em que a intervenção letiva se realizou e está dividido em duas partes: uma que caracteriza a escola e outra a turma. A descrição da escola é apoiada pelo Projeto Educativo de Escola (PEE), elaborado para o triénio de 2008/2011, cuja vigência foi prolongada devido ao processo de agregação de escolas e constituição de agrupamento. A descrição da turma é apoiada pela ficha de caracterização que os alunos preencheram no início do ano letivo, bem como outros elementos que foram recolhido ao longo do ano.

Caracterização da Escola

A Escola Secundária n.º1 de Loures foi criada em 1975 e foi a primeira escola secundária do concelho de Loures. Deixou de lecionar Ensino Básico Diurno no ano letivo de 1997/98 e, em 1999, a escola passou a ter a designação de Escola Secundária José Afonso, Loures (ESJAL). Em 2013 integrou o Agrupamento de Escolas n.º 2 de Loures. A escola oferece ensino secundário regular, profissional e ensino noturno. As metas propostas pela escola, centram-se em melhorar as médias finais e a taxa de conclusão das disciplinas/módulos/unidades; reduzir a taxa de abandono escolar anual, relativamente ao triénio anterior; realizar, anualmente, um exercício de simulação para aplicação do Plano de Evacuação de Emergência; promover a criação de uma Associação de Pais e Encarregados de Educação e criar um

Gabinete de Educação para a Saúde.

A ESJAL caracteriza o corpo docente pela experiência e estabilidade, sendo que 85% dos professores do corpo docente integram o Quadro de Nomeação Definitiva. Estes são maioritariamente do sexo feminino, com idades compreendidas entre os 46 e os 55 anos e com mais de 15 anos de serviço desempenhado nesta escola. O pessoal não docente é predominantemente do sexo feminino, com idades compreendidas entre os 25 e os 65 anos, sendo que a maioria exerce funções na escola há mais de 15 anos. Desta forma, a ESJAL considera que existem boas relações entre os membros da comunidade, "um sentimento de segurança na escola e nas imediações, atestado pela pouca incidência de problemas de ordem disciplinar" (PEE, p. 22). Os alunos são maioritariamente de nacionalidade portuguesa, embora alguns tenham proveniências diversas, nomeadamente dos PALOP.

No ano letivo de 2008/2009, 60% dos alunos estavam inscritos no regime diurno e 40% no regime noturno. Os alunos do ensino regular e profissional apontaram como principais objetivos de frequência no ensino secundário a conclusão deste e a progressão para o ensino superior. Cerca de 90% dos alunos no ensino noturno é o seu próprio encarregado de educação, sendo também trabalhadores estudante.

Caracterização da Turma

A turma 11.º2E começou por ser constituída por 23 alunos e acabou o 1.º período com 26 alunos, 20 dos quais inscritos à disciplina de Matemática, e destes, apenas 18 frequentaram as aulas no primeiro período.

A média das idades é 17, sendo que cinco alunos têm 18 anos de idade e estão a fazer apenas a disciplina de Matemática do 11.º ano, para completarem os seus estudos. Dos 18 que frequentaram as aulas, 8 são raparigas e 10 são rapazes. Os alunos moram no máximo a 30 minutos da escola, e 70% dos alunos vão para a escola de transporte público.

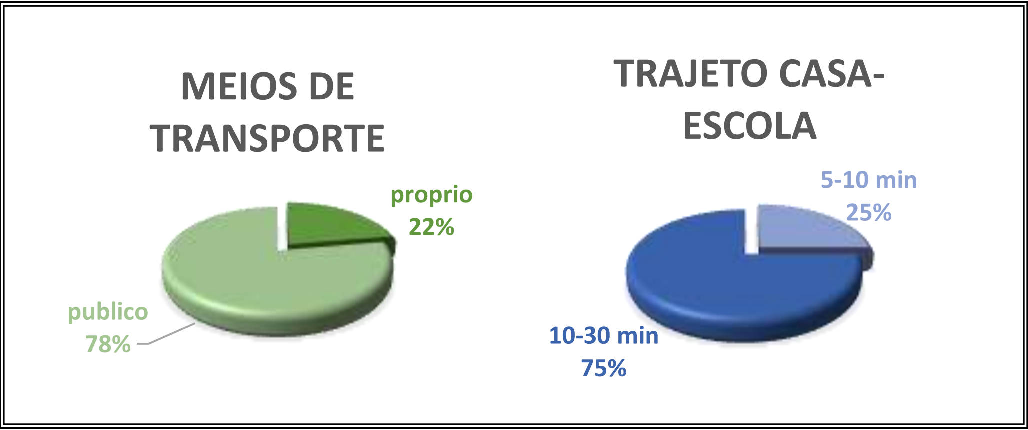


Figura 3.2. Meios de transporte e duração do trajeto casa-escola dos alunos.

Os docentes do Conselho de Turma, que foram professores destes alunos no 10.º ano, consideraram que "é uma turma boa ao nível do comportamento", destacaram duas alunas que têm problemas de saúde (anorexia um caso e uma doença auto-imune no outro) e um aluno com uma "vida familiar pouco fácil" que foi proposto para acompanhamento pelos Serviços de Psicologia e Orientação, no ano letivo anterior, não existindo outros casos de necessidades educativas especiais sinalizadas. O nível sociocultural dos agregados é diversificado, sendo que cerca de 39% dos encarregados de educação têm habilitações literárias ao nível do ensino superior, 22% ao nível do ensino secundário e 11% ensino básico. Em relação à dimensão do agregado familiar, 53% dos alunos não têm irmãos e 18% têm 1 irmão. A dimensão do agregado familiar varia entre 2 a 5 elementos; 30% dos agregados familiares são monoparentais e existe um aluno, correspondente a 6% da turma, cujos avôs fazem parte do agregado familiar.

No geral, o aproveitamento da turma ao longo ano foi classificado de satisfatório. No que concerne o comportamento da turma, ao longo do ano, foi classificado de satisfatório, com a salvaguarda às disciplinas de Português e Inglês, onde a turma está geminada. As perspetivas dos alunos sobre o ensino vêm de encontro à opinião generalizada dos seus professores.

Na ficha de caracterização (Anexo 9), que os alunos preencheram no 1.º período letivo, ao item: "o que pensas sobre… …a Matemática" (Fig. 3.2) responderam que “a Matemática, apesar de dar trabalho é bastante interessante” – 32% dos alunos consideram a Matemática uma disciplina trabalhosa, complicada ou difícil; “é bastante importante, mas no meu dia-a-dia não a uso muito” – 20% dos alunos considera que a Matemática é importante, nomeadamente para a vida académica futura, 16% considera que não é útil ou maçadora e 12% considera que é atrativa, lógica ou necessária. Um aluno referiu que “não gosta imenso” e um que “gosta de resolver exercícios”.

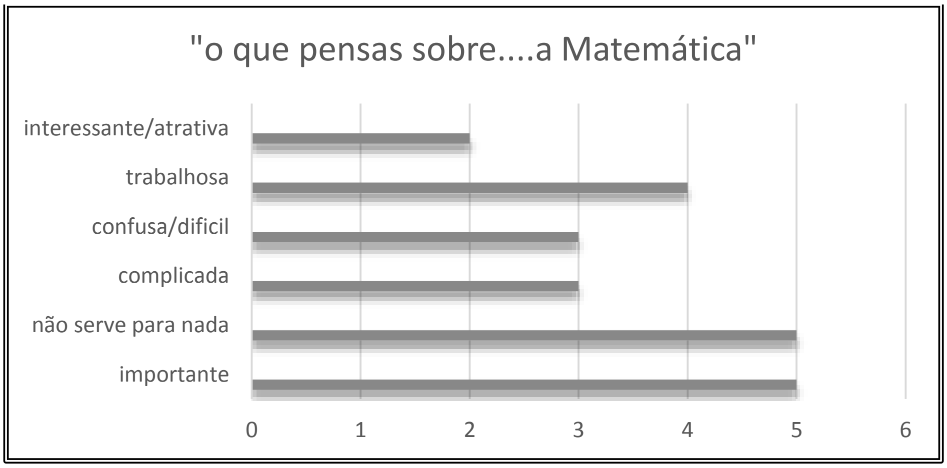


Figura 3.2. Perspetivas dos alunos sobre a Matemática

Sobre “…o papel dos alunos na sala de aula” os alunos deram como respostas (Fig. 3.3) “é um papel que tem de ser levado a sério, com dedicação, empenho, atenção e de respeito perante os professores” – 32% dos alunos fazem referência a atitudes de atenção e de respeito e 21% a empenho e dedicação; “compreender, mostrar interesse e empenho” – 37% das respostas faz referência a estudar ou apreender; “respeito pela comunidade escolar” – 21% das respostas estão associadas a atitudes de comportamento.

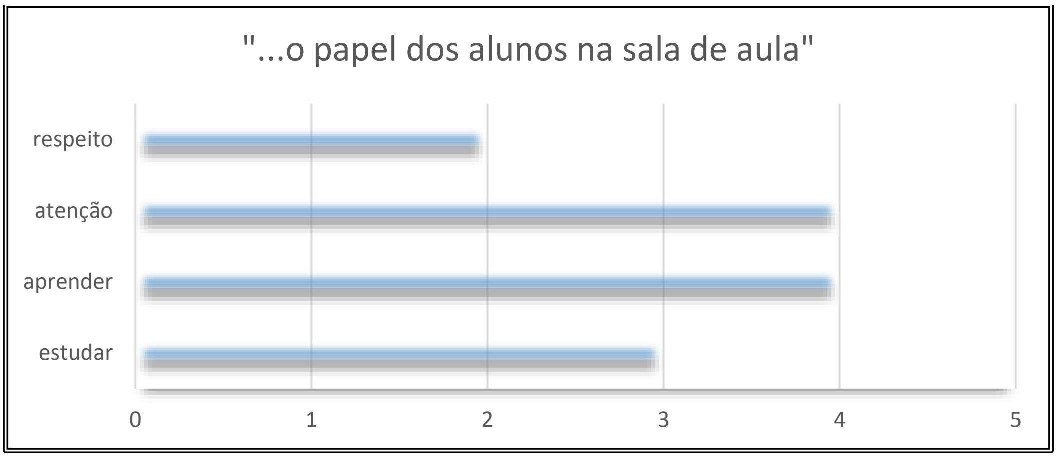


Figura 3.3. Respostas dos alunos sobre o papel dos alunos na sala de aula

O item "…o papel do professor na sala de aula" obteve como respostas (Fig.3.4) "tem de ser levado com atenção, porque estão a lidar com várias personalidades – 20% das respostas refere que o professor deve cativar, incentivar ou motivar os alunos; "o professor deve ser simpático e dinâmico na maneira q dá as aulas" – 20% das respostas faz referência a aulas não monótonas ou originais; "Ensinar, esclarecer dúvidas, etc" – 50% das respostas refere que o papel do professor é ensinar.

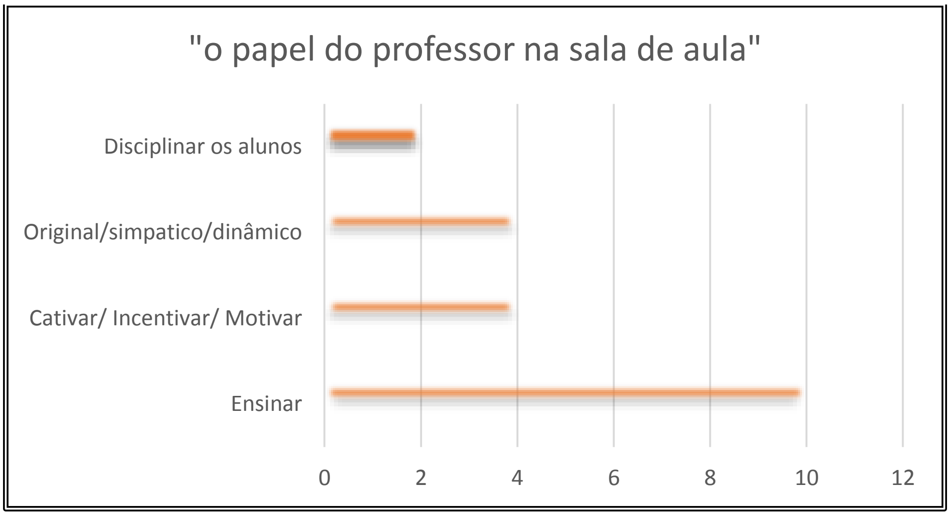


Figura 3.4. Perspetivas dos alunos sobre o papel do professor na sala de aula

Na turma, apenas seis alunos concluíram Matemática do 10.º ano com nota superior a 10 valores e a média das negativas foi de 8,5 valores. No final do 1º período existiram 50% positivas, com média de 12 valores, e a média das negativas foi 8 valores.

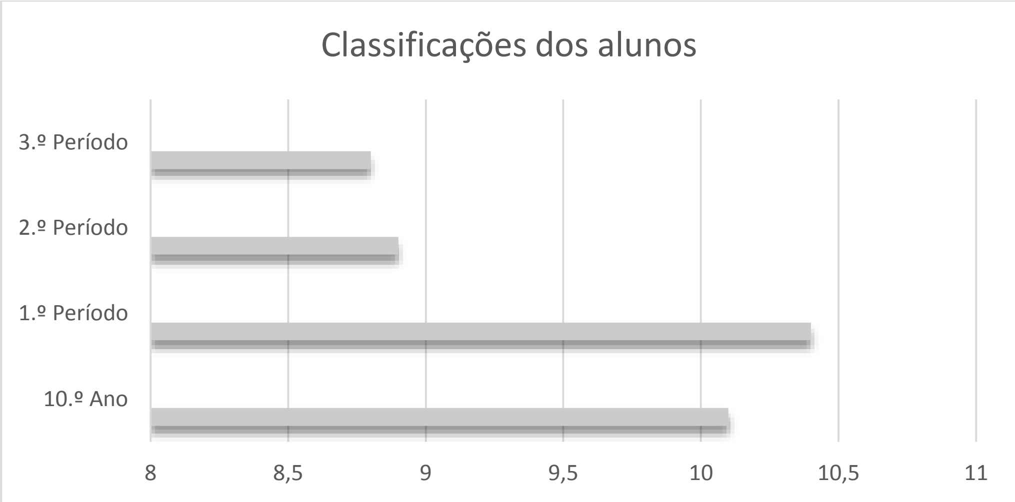


Figura 3.5. Média das Classificações dos alunos.

No início do 2.º período letivo houve várias alterações ao número de alunos e o período letivo iniciou com 21 alunos inscritos a Matemática. No final do 2.º período, existiram 35% de positivas, com média de 10,8 valores, e a média das negativas foi 7 valores.

Durante o restante ano letivo, quatro alunos anularam a matrícula à disciplina de Matemática. No final do 3.º Período, apenas 15 assistiam às aulas com regularidade, dois alunos foram excluídos por faltas, existiram 50% de positivas, com média de 12 valores, aproximadamente e a média das negativas foi 9 valores.

Nas aulas de Matemática, a turma colabora, é participativa e envolve-se nas tarefas propostas com empenho, um reflexo não só das características dos alunos e da relação entre estes, como também do seu reduzido número à disciplina de Matemática. Segundo a opinião da professora cooperante, são "alunos com muitas dificuldades", refletindo-se nas notas dos testes, cujas médias foram, ao longo do ano – 9 valores no 1.º período, 7 valores no 2.º e 8 valores no 3.º período – enquanto na avaliação formativa e comportamental temos médias de 15 e 14 valores, no 1.º período; 9 e 12, no 2.º e 10,5 e 11,5 valores no período, respetivamente; o que é justificado pela "falta de trabalho fora da sala de aula" e desta forma produz "resultados inflacionados" nas notas do 1.º período. A média do teste intermédio foi de 6 valores.

Capítulo IV

A Unidade de Ensino

Este capítulo está centrado na ancoragem da unidade didática, ou seja, é feito o enquadramento dos conteúdos trabalhados no programa e na planificação letiva. Numa fase seguinte são abordados os principais conceitos matemáticos trabalhados durante a intervenção. Apresentam-se, posteriormente, as estratégias de ensino consideradas e uma breve descrição das aulas lecionadas. Na finalização do capítulo, referem-se quais os instrumentos e procedimentos de recolha de dados que considerei bem como a sequência e as características das tarefas adotadas.

Ancoragem da unidade

É no 11.º ano de escolaridade que os estudantes estabelecem o primeiro contacto com os temas Cálculo Diferencial e Análise Infinitesimal. Segundo Teixeira *et al.* (1998, p. 8) a noção de derivada deve ser tratada, neste nível de ensino, de forma intuitiva e "a partir da noção de taxa de variação (velocidade instantânea) privilegiando abordagens gráficas e a utilização da função derivada existente nas calculadoras". A abordagem é continuada e aprofundada, com a formalização de conceitos, no 12.º ano de escolaridade, aquando do aprofundamento destes conteúdos, formalizando a noção de limite, de continuidade e das operações com limites.

A intervenção letiva que serviu de base a este estudo inseriu-se no segundo tema do programa de Matemática A para o 11.º ano, ou seja, Introdução ao Cálculo Diferencial I. A unidade escolhida intitula-se "Taxa de

Variação e Derivada” e foi lecionada no final do 2.º e início do 3.º períodos letivos. Os conteúdos principais das aulas lecionadas foram: a taxa de variação – média e instantânea; a derivada de uma função num ponto; a função derivada e as regras de derivação. O uso de tecnologia, tema transversal ao programa, também esteve presente, quer pelo uso de calculadoras em aula, quer pelo recurso à projeção do *software Geogebra* como apoio à aula.

No primeiro período, os alunos abordaram o tema Geometria Analítica no plano e no espaço, trabalhando alguns conceitos relacionados com a reta e o plano, nomeadamente as respetivas equações. Aqui, além de trabalharem as noções (e as equações) de reta e plano, surge então, o conceito de tangente a uma circunferência ou plano tangente a uma superfície esférica, associado, respetivamente, a uma reta ou a um plano que “toca” num único ponto da circunferência ou da superfície esférica, respetivamente.

A unidade escolhida – Taxa de Variação e Derivada – surge no fim do 2.º período letivo, no âmbito do tema Introdução ao Cálculo Diferencial. Este tema inicia-se com um estudo intuitivo sobre funções racionais e sobre a noção de limite. De seguida, os alunos trabalharam funções irracionais e operações entre funções (soma, subtração, multiplicação, divisão e composição de funções).

No 3.º período letivo, após a conclusão da unidade, os alunos trabalham sucessões de números reais, incluindo os casos particulares de progressões aritméticas e geométricas, assim como o cálculo de limite de sucessões.

Os principais objetivos de aprendizagem, para as dez aulas lecionadas nesta unidade, foram a noção intuitiva de limite, iniciada com o estudo das funções racionais, e estendida à noção intuitiva de continuidade; a interpretação geométrica da função derivada e os seus diferentes significados; a leitura de gráficos e, por fim, a resolução de problemas de otimização por processos analíticos. Houve também uma constante preocupação em “rebuscar” e estabelecer conexões entre os objetos matemáticos que estavam a ser estudados ou trabalhados e os conceitos abordados anteriormente.

Taxa de Variação e Derivada

Relativamente aos conteúdos trabalhados durante a intervenção letiva, além do manual adotado, da Brochura de Funções – 11.º ano (Teixeira *et. al*, 1998) e os materiais do Projeto Gulbenkian de Reanimação Científica da Matemática no Ensino Seundário – Reanimat (Sanchez, 2003), também consultei outros manuais escolares assim como manuais técnicos que utilizei durante a licenciatura. Estas consultas prendiam-se com a escolha de tarefas, como já foi indicado, mas também para obter uma visão holística da unidade e dos conceitos mais importantes. Importa assim definir os conceitos mais importantes desta unidade, com base nos textos de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (Figueira, 2001).

Além da noção intuitiva de limite, extremamente importante para a compreensão da definição de derivada num ponto, as operações entre funções são um tópico relevante para esta unidade. Por outro lado, estende-se a noção de reta tangente, um conceito geométrico também ele relevante para a aprendizagem da noção de derivada, pois relaciona-se a tangente ao gráfico de uma função com o conceito de derivada (Domingos, 2003). Esta articulação entre vários tópicos, abordados pelos alunos ao longo do Ensino Secundário (nomeadamente, 10.º e 11.º anos de escolaridade) é fundamental para adotar um "motor de compreensão da Matemática como um todo em que cada tema se relaciona com outros e em que a aprendizagem de cada assunto beneficia a aprendizagem de outros" (Carvalho e Silva *et al.*, 2001, p.1).

Os tópicos principais desta unidade são, a noção de taxa de variação e a sua interpretação geométrica; a definição de derivada num ponto através do limite da taxa de variação; o declive da reta tangente à curva num ponto; a função derivada; a relação entre o sinal da derivada e a monotonia e extremos da função, bem como os problemas de otimização.

Derivação de funções reais

Seja $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real de variável real e $a \in D$ um ponto de acumulação de D.

Definição 1: Diz-se que f é *derivável* ou *diferenciável* em a se existe (e é finito) o limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Tal limite, quando existe, diz-se a derivada de f no ponto a e representa-se por

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

A derivada de f em a (ou *taxa de variação* da função f no ponto a) pode ainda representar-se por $Df(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$.

À razão incremental $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ chamamos *taxa média de variação* de f no intervalo $[a, x]$.

À diferença $f(x) - f(a)$ chamamos *variação* de f no intervalo $[a, x]$

Geometricamente, a interpretação do conceito de derivada permite definir rigorosamente a tangente a uma curva, que seja o gráfico de uma função $y = f(x)$. Intuitivamente, a tangente no ponto $A = (a, f(a))$ (Fig. 4.1), é obtida como o “limite geométrico” da secante AX quando o ponto $X = (x, f(x))$ se “aproxima” de A, isto é, quando $x \to a$.

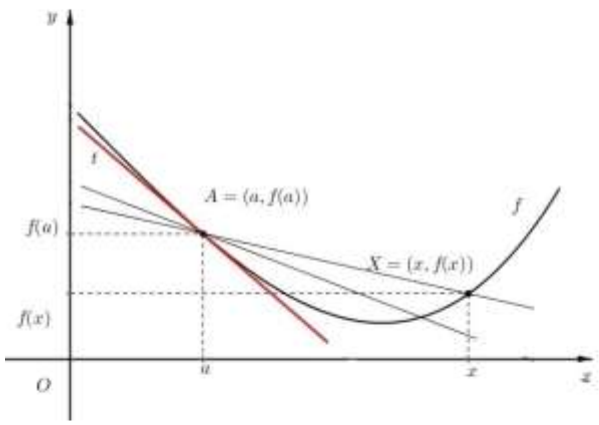


Figura 4.1. Interpretação geométrica

Como a secante AX é determinada pelo ponto A e pelo seu declive, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, tal limite geométrico existirá se e só se existir o limite $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Assim, a tangente t no ponto $A=(a,f(a))$ está definida se e só se f admite derivada em a; t é então definida pelo ponto A e pelo coeficiente angular $f'(a)$, e a sua equação vem dada por $y=f(a)+f'(a)(x-a)$

Considerando uma função $f\colon D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $a\in D$ um ponto de acumulação de $D_a^-=\{x\in D\colon x<a\}$.

Diz-se que f é *derivável* (ou *diferenciável*) *à esquerda em* a se existe e é finito o limite

$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a^-)=f_e'(a)$$

Seja agora $a\in D$ um ponto de acumulação de $D_a^+=\{x\in D\colon x>a\}$.

Diz-se que f é *derivável* (ou *diferenciável*) *à direita em* a se existe e é finito o limite

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a^+)=f_d'(a)$$

Consequentemente, se a é ponto de acumulação de D_a^- e D_a^+, f é diferenciável em a se e só se f é derivável à esquerda e à direita em a e $f'(a^-)=f'(a^+)$. Geometricamente, se f é derivável à esquerda (respetivamente, à direita) em a, então existe uma tangente à esquerda (respetivamente, direita) ao gráfico de f no ponto $A=(a,f(a))$. Do mesmo que que uma função f pode não ter derivada num ponto a, embora admita derivadas laterais, assim a curva, gráfico de f, pode não ter tangente no ponto A e admitir as tangentes à esquerda e à direita em A.

Diz-se que a derivada de f em a é $+\infty$ (respetivamente, $-\infty$) se $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ (respetivamente, $-\infty$). Analogamente, definem-se as derivadas infinitas à esquerda e à direita de a. Geometricamente, se f tem derivada infinita em a, o gráfico da função admite tangente em $(a,f(a))$, paralela ao eixo dos yy, e a mesma interpretação é feita para as derivadas laterais.

Definição 2: Diz-se que a função $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *derivável* (ou *diferenciável*) em D se for derivável em todo o ponto de D, e à nova função

$$f': D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \longmapsto f'(x),$$

chama-se *derivada* de f. Representa-se também por Df ou $\frac{df}{dx}$.

Proposição 1: Se $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função derivável em $a \in D$ então é contínua nesse ponto.

Demonstração: Para $x \in D$, com $x \neq a$, tem-se

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$$

Logo $\lim_{x \to a}[f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} . \lim_{x \to a}(x - a) = f'(a). 0 = 0$

Ou seja, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ e portanto f é continua em a.■

Observação: A existência de derivada infinita num ponto, não garante a continuidade da função nesse ponto.

Regras de derivação

Teorema 1: Sejam $f, g: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções deriváveis em $a \in D$; então:

1. $f + g$ é derivável em a e $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
2. $f \times g$ é derivável em a e $(f \times g)'(a) = f'(a) \times g(a) + f(a) \times g'(a)$
3. Em particular, se f^n é derivável em a tem-se
$$(f^n)'(a) = nf^{n-1}(a)f'(a), n \in \mathbb{N}$$
4. Se $g(a) \neq 0, f/g$ é derivável em a e $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \times g(a) - f(a) \times g'(a)}{g^2(a)}$

Demonstração: Para demonstrar 1. e 2., como f e g são ambas contínuas e diferenciáveis em a, tem-se

$$(f + g)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a}\right]$$

$$= f'(a) + g'(a)$$

$$(f \times g)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{(f \times g)(x) - (f \times g)(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)g(x) + f(x)g(a) - f(x)g(a) - f(a)g(a)}{x - a}\right] =$$

$$= \lim_{x \to a} \left[g(a)\frac{f(x) - f(a)}{x - a} + f(x)\frac{g(x) - g(a)}{x - a}\right] =$$

$$= g(a)\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + f(a)\lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Em 3., aplicando a regra do produto n vezes, obtemos

$$(f^n)'(a) = f'(a)f(a) \dots f(a) + f(a)f'(a) \dots f(a) + \cdots + f(a)f(a) \dots f'(a) =$$
$$= f'(a)f^{n-1}(a) + f'(a)f^{n-1}(a) + \cdots + f'(a)f^{n-1}(a) =$$
$$= nf^{n-1}(a)f'(a)$$

No caso 4., como f e g são ambas contínuas e diferenciáveis em a e $g(a) \neq 0$, tem-se

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)}}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)g(a)} \times \lim_{x \to a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x - a} =$$

$$= \frac{1}{g^2(a)} \times \lim_{x \to a} \frac{f(x)g(a) + f(a)g(a) - f(a)g(a) - f(a)g(x)}{x - a} =$$

$$= \frac{1}{g^2(a)} \times \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times g(a) - f(a)\frac{g(x) - g(a)}{x - a}\right] =$$

$$= \frac{f'(a) \times g(a) - f(a) \times g'(a)}{g^2(a)}$$

■

No que concerne as regras de derivação, fazem parte do programa: a derivada da função afim, a derivada da função polinomial de 2.º e 3.º grau e a derivada de funções racionais do tipo $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{a}{x-b}$ e $y = c + \frac{a}{x-b}$, com $a \neq 0$, casos particulares das regras demonstradas no teorema anterior.

Relação entre a monotonia de uma função e o sinal da sua derivada

Seja $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona crescente, isto é

$$x, y \in D, x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

Se f é derivável em $a \in D$, tem-se que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$, donde $f'(a) \geq 0$.

Analogamente, se f é monótona decrescente e derivável em $a \in D$, a sua derivada $f'(a) \leq 0$.

Portanto,

f monótona crescente e derivável $\Rightarrow f'(x) \geq 0$

f monótona decrescente e derivável $\Rightarrow f'(x) \leq 0$

Observação: uma função estritamente monótona e derivável não tem necessariamente derivada >0 (ou <0). Basta ter em atenção o exemplo da função cúbica. Prova-se no entanto que uma função derivável num intervalo com derivada positiva (ou negativa) em todos os pontos é monótona nesse intervalo.

Proposição 2: Seja $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in D$um ponto de acumulação. Então

1. Se $f'_d(a) > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) > f(a), \forall x \in]a, a+\varepsilon[\cap D$;
2. Se $f'_d(a) < 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) < f(a), \forall x \in]a, a+\varepsilon[\cap D$;
3. Se $f'_e(a) > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) < f(a), \forall x \in]a-\varepsilon, a[\cap D$;
4. Se $f'_e(a) < 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) > f(a), \forall x \in]a-\varepsilon, a[\cap D$.

Observação: Note se $f'_d(a)$ e $f'_e(a)$ representam as derivadas laterais de f, finitas ou infinitas.

Demonstração: Para demonstrar o ponto 1., note-se que

$$f'_d(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$$

Donde, pelas propriedades dos limites, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0, \forall x \in]a, a+\varepsilon[\cap D,$$

Como $x - a > 0$ vem que, $f(x) - f(a) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(a)$.

Com raciocínios análogos se provam os restantes.■

Observação: Note-se que $f'_d(a) > 0$ não implica que f seja crescente nalguma vizinhança $]a, a + \varepsilon[$.

Em particular, se a é ponto de acumulação de D_a^- e D_a^+ e $f'(a) > 0$, como $f'(a) = f'_d(a) = f'_e(a)$, a proposição anterior apenas garante que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$a - \varepsilon < x < a < y < a + \varepsilon \Rightarrow f(x) < f(a) < f(y)$$

sem que f seja necessariamente crescente em $]a - \varepsilon, a[$ ou $]a, a + \varepsilon[$.

Da mesma forma, se $f'(a) < 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$a - \varepsilon < x < a < y < a + \varepsilon \Rightarrow f(x) > f(a) > f(y)$$

sem que f seja necessariamente decrescente em $]a - \varepsilon, a[$ ou $]a, a + \varepsilon[$.

Definição 3: Seja $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in D$.

1. Diz-se que f tem em a um *máximo local* (ou *relativo*) se existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \leq f(a), \forall x \in V_\varepsilon(a) \cap D$.
2. Diz-se que f tem em a um *mínimo local* (ou *relativo*) se existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \geq f(a), \forall x \in V_\varepsilon(a) \cap D$.
3. Máximo ou mínimo local diz-se *extremo local* (ou *relativo*)

Desta forma, é consequência da Proposição 2 o seguinte resultado:

Proposição 3: Seja $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função com derivada em $a \in D$, ponto de acumulação de D_a^- e D_a^+. Se f tem em a um extremo local, então

$$f'(a) = 0,$$

isto é, f tem um *ponto crítico* em a.

Observação: A proposição anterior estabelece uma condição necessária de extremo local para uma função diferenciável, contudo não suficiente. Note-se que $a \in D$ tem de ser ponto de acumulação de D_a^- e D_a^+. Se apenas uma derivada lateral estiver definida, o ponto a não será necessariamente crítico, mesmo que seja extremo local (Fig. 4.2).

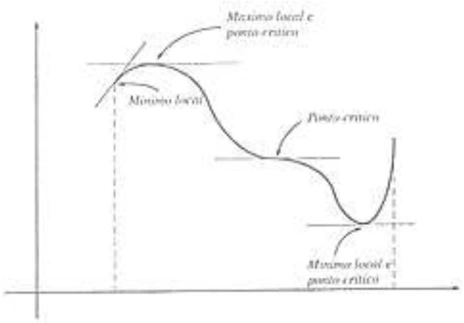


Figura 4.2. Exemplo de uma função – pontos críticos e extremos (Figueira, 2001).

Reciprocamente, a pode ser um ponto crítico ($f'(a) = 0$) e não ser um extremo local, como é o caso do ponto assinalado na figura 4.2.

Estratégias de ensino e tarefas adotadas

O estudo das funções reais, no ensino secundário, deve ser feito sobre "diferentes pontos de vista – gráfico, numérico e algébrico" (Carvalho e Silva *et al.*, 2001, p.2). Assim sendo foram com consideradas tarefas de natureza aberta (investigação/exploração) para introdução dos conceitos, tarefas de natureza mais fechada, como os exercícios, úteis para consolidação dos conteúdos, bem como problemas, nomeadamente problemas de otimização que podem ser consultadas em anexo (Anexos 2 a 7).

Teixeira *et al.* (1998) apelam à exploração das potencialidades da calculadora gráfica para potenciar as aprendizagens dos alunos, pelo que a sua integração nas tarefas será essencial, assim como o recurso a *software* de geometria dinâmica, nomeadamente o G*eogebra* e/ou *applets* de Matemática específicos para o estudo da função derivada. Também Carvalho e Silva *et al.* (2011), considera a calculadora gráfica um instrumento de uso obrigatório no ensino secundário.

Na planificação da unidade, considerou-se a diversificação da natureza das tarefas selecionadas e a metodologia de trabalho a realizar em aula, dando especial atenção à dinâmica desta e aos momentos de aprendizagem que se preconizava, por parte dos alunos como da minha parte. As tarefas que foram propostas aos alunos tinham como objetivo a introdução de novos conceitos matemáticos, procurando uma abrangência de significados e representações dos mesmos, assim como o estabelecimento de conexões com conteúdos anteriormente trabalhados. Desta forma, o trabalho foi organizado seguindo uma perspetiva exploratória do ensino-aprendizagem da Matemática. Neste caso, após a introdução das tarefas, propôs-se que o trabalho autónomo dos alunos seja realizado a pares, seguindo-se uma discussão coletiva e, por fim, uma sistematização dos conceitos, motivando os alunos para esta abordagem e esperando a sua gradual aquiescência. Pretende-se que o aluno seja o "agente da sua própria aprendizagem" (Carvalho e Silva *et al.*, 2001, p.10), pelo que se utilizou tarefas do manual adotado, da Brochura de Funções do 11.º ano de escolaridade (Sanchez, 2003) e a construção/ adaptação de algumas tarefas de forma a propiciar:

- situações concretas para a construção dos conceitos a partir da experiência;
- a abordagem sob diferentes pontos de vista e níveis progressivos de rigor e formalização;
- o enquadramento histórico-cultural do conhecimento, estabelecendo ligações da Matemática com a vida real, com a tecnologia e com outras disciplinas (Carvalho e Silva *et al.*, 2001, p.10).

Desta forma, pretendia-se fomentar uma atividade matemática nos alunos que contribuísse para "o desenvolvimento do pensamento científico, levando o estudante a intuir, conjecturar, experimentar, provar, avaliar e ainda para o reforço das atitudes de autonomia e de cooperação" (Carvalho e Silva *et al.*, 2001, p.10).

Na minha prática letiva verifiquei que, habitualmente a turma trabalha com o manual adotado pela escola e em pares. A reação foi positiva sempre que foram propostas tarefas de natureza diferente à habitual, acolhendo o trabalho que lhe é proposto e respeitando as regras. Contudo, verifiquei alguma resistência a certas modalidades de trabalho, tais como a discussão e a interação com os colegas que vão ao quadro. Do ponto de vista da tecnologia, os alunos estavam pouco habituados a trabalhar com a calculadora ou com o projetor, e mostraram-se resistentes em algumas aulas. Devido aos parcos recursos da escola[3] e à fraca recetividade dos alunos ao *software Geogebra*, o trabalho foi sendo adaptado à utilização do projetor, muito embora com fraca frequência. Verifiquei, além do mais, que a professora cooperante não estimulava a utilização da calculadora. Desta forma, foi sendo desenvolvido um estudo dos conceitos matemáticos de forma mais analítica, pouco apoiado na exploração. O recurso à calculadora foi feito em momentos específicos que as tarefas assim o exigiam ou simplesmente para confirmação de resultados ou simplificação de cálculos. Desta forma, algumas atividades que tinham sido elaboradas para trabalhar com a calculadora acabaram por não se concretizar. A utilização do *software Geogebra* foi, na minha perspetiva, uma mais valia na realização de algumas tarefas. Contudo, a sua utilização regular foi abandonada em parte pela dificuldade na gestão da aula com projeção (uma vez que a projetoção incidia sobre o meio do quadro) , a pedido dos próprios alunos.

Descrição das Aulas

Esta secção dedica-se à síntese das aulas lecionadas, com enfase na atividade desenvolvida nas mesmas. Está organizada em três partes. A primeira parte é uma apresentação geral das aulas, no que concerne a sua dinâmica, natureza das tarefas propostas bem como outros aspetos transversais à intervenção letiva e centradas no ponto de vista do professor. Na segunda parte apresento o resumo dos objetivos e tarefas realizadas em

[3] As salas de computadores estão afetas às turmas de informática, pelo que não é possível requisitá-las para as nossas atividades. Existem alguns computadores portáteis que podemos requisitar e levar para a sala de aula mas, como a maioria das salas não dispõem de computadores, muitos professores requisitam-nos para as suas aulas, sendo difícil de requisitar todos os computadores que a escola dispõe.

cada aula. A terceira e última parte dessa secção é a descrição da atividade realizada pelos alunos, subdividida nos conteúdos principais da unidade escolhida.

Apresentação geral

Com base na planificação anual, a planificação a médio prazo da unidade temática foi efetuada numa perspetiva semanal (Anexo 1), sendo depois subdividida por tópicos e ajustada na planificação a curto prazo, aula a aula. Assim, foi prevista uma primeira aula de introdução (Anexo 2), na qual se abordaram os tópicos: taxa de variação, taxa média de variação e derivada num ponto; com a ligação à velocidade média e velocidade instantânea, apoiada pela tarefa do manual "Prova de esqui" (Anexo 2). Estes conceitos seriam revisitados ao longo de toda a intervenção letiva, e mesmo depois desta ter terminado. Com base no trabalho efetuado, evoluir-se-ia para os conceitos mais abrangentes de função derivada e da interpretação geométrica da derivada num ponto, assim como da relação entre a monotonia de uma função e o sinal da sua derivada, através das Tarefas 1 e 2 (Anexos 3 e 4). A Tarefa 1 foi construída por mim, com o apoio dos orientadores e professora cooperante e a Tarefa 2 foi adaptada da brochura de Funções (Teixeira *et. al*, 1998). Outras fontes como manuais escolares e os materiais do Projeto REANIMAT(Sanchez, 2003) foram também consultadas para uma melhor preparação e planificação da unidade escolhida. As restantes tarefas propostas aos alunos, para trabalho em aula ou trabalho autónomo em casa, foram exercícios do manual.

Foi minha preocupação que, em cada aula, o ritmo de trabalho fosse variado e ainda que uma dinâmica diferente fosse imposta ao longo da prática supervisionada. As aulas alternavam entre momentos de trabalho autónomo, seguidos de discussão dos resultados e da análise das dificuldades dos alunos, procurando, no final, formalizar os conceitos matemáticos que constituíam o propósito da aula. A diversificação da dinâmica das aulas foi conseguida, não só pela natureza das tarefas proposta, como pela utilização maioritária no quadro da sala de aula de diferentes formas: projeção de aplicações construídas em *Geogebra*, registos variados e resolução de exercícios, quer por mim quer por parte dos alunos.

As aulas para consolidação de conteúdos e resolução de exercícios, tinham uma forma de funcionar muito própria. Alternavam entre momentos em que os pares trabalhavam de forma autónoma no lugar enquanto eu e a professora cooperante circulávamos na sala esclarecendo dúvidas e momentos em que os alunos iam ao quadro. Por vezes o quadro era dividido em duas partes, possibilitando a resolução simultânea de dois exercícios por dois alunos.

A estrutura das aulas, com exceção da primeira, foi pensada no sentido de criar uma articulação entre elas e, por esta razão, na fase inicial era feito um breve resumo da aula anterior, com base no diálogo e fomentando a comunicação por parte dos alunos. Com esta opção sistematizava os conceitos já abordados, uma vez que eram relembrados os conteúdos mais importantes trabalhados na aula anterior. Ainda nesta fase inicial, eram esclarecidas possíveis dúvidas dos alunos nos trabalhos desenvolvidos em casa. Além de ter sido útil para mim, verifiquei que este procedimento foi bastante produtivo para os alunos pois ajudou-os a identificarem os conceitos importantes e/ou as suas dúvidas.

Na generalidade, os enunciados das tarefas realizadas nas aulas eram lidos, em voz alta, por um aluno e com o objetivo de focar, toda a turma, no trabalho a realizar na aula. Era opção da professora cooperante solicitar sempre ao mesmo aluno esta leitura, no entanto eu tentava variar na escolha do aluno, por não querer suscitar favoritismos. O critério da minha escolha recaiu sempre num aluno que projetasse bem a voz e tivesse boa dicção, para melhor entendimentos dos colegas.

Relativamente ao trabalho autónomo dos alunos em sala de aula, o mesmo foi cumprido sempre que solicitado. Os alunos compreendiam a tarefa e eu indicava o tempo que dispunham para a realizar. Na maioria das aulas, esse tempo foi ultrapassado; provocando constantes alterações na planificação e na gestão das aulas. O excesso de tarefas planificadas para uma só aula, o aparecimento de dúvidas que não estavam previstas, ou mesmo a dificuldade que os alunos manifestaram em “pegar” no enunciado, foram aspetos transversais à lecionação desta unidade e que obrigaram ao reajuste da planificação inicial.

Embora algumas dificuldades estivessem previstas na planificação, outras não eram esperadas. Por exemplo, não era esperado que os alunos não conseguissem: *(i)* resolver uma equação de segundo grau; *(ii)* aplicar os casos notáveis; *(iii)* encontrar a equação de uma reta, dados dois pontos; ou, *(iv)* no caso particular de um par de alunos, tentar aplicar a proporcionalidade direta como primeira estratégia para todas as situações, mesmo que distintas.

Nos momentos de discussão ou sistematização, a atenção dos alunos era partilhada comigo, colaboravam e participavam na “construção” das definições. Desta forma, a sistematização, ou resumo dos conceitos abordados, era feita de forma partilhada e ativa de ambas as partes. No final, era-lhes dispensado o tempo necessário para que todos pudessem escrever nos cadernos diários os registos feitos no quadro. Apesar das várias chamadas de atenção, alguns alunos iam fazendo os registos à medida que eu escrevia no quadro e, posteriormente, ao analisar os cadernos diários, verifiquei algumas incorreções ou incompletude nos apontamentos dos alunos.

Normalmente, os alunos, e eu, chegavam junto à sala cerca de 5 minutos após o toque, momento em que se vai dando a entrada na sala de aula. Na maioria das aulas, 15 minutos após o toque iniciam-se os trabalhos. Estes atrasos interferiram também na planificação aula a aula uma vez que eu planifiquei sempre os 90 minutos e foram outra razão para ajustes.

Na maioria das aulas, os alunos mostraram-se bastante cooperantes, respondendo às questões propostas, colocando questões e indo ao quadro quando solicitados. No entanto, em algumas aulas, verificou-se o oposto, os alunos mostraram-se reticentes em ir ao quadro, hesitantes em responder e era necessário solicitar a cooperação de mais de um aluno, havendo situações em que eu realizava a tarefa no quadro. Esta hesitação dos alunos deve-se, em parte, à falta de motivação de alguns deles, por não compreenderem a matéria ou o que era necessário fazer, ou, ainda, por sentirem medo de "dar respostas erradas", como confessaram alguns deles. O facto de terem aulas de Educação Física, antes da aula de Matemática, particularmente nos dias em que tinham aulas de natação, era, por parte dos alunos, um dos argumentos para a "falta de vontade em pensar" ou fazer Matemática. Além disso, os alunos não aceitam de boa vontade a resolução direta no quadro, sem antes resolverem nos próprios lugares, sem a exposição direta dos colegas e professores.

No que diz respeito às tarefas propostas a maioria delas foi selecionada do manual, para maximização da utilização deste e pelas limitações dos recursos da escola. A utilização do projetor e do *Geogebra* foram recursos que tentei explorar na sala de aula, mas que não foi muito bem aceite pelos alunos. Mais tarde, no momento de autoavaliação e aquando das entrevistas, revelaram que não gostaram das aulas com recurso à projeção e que não tinham entendido o seu propósito. Uma das alunas afirmou: "eu prefiro que a '*stôra'* desenhe mal no quadro mas que faça os gráficos em vez de usar o computador". A situação descrita ocorreu enquanto eu apresentava uma das razões para ter usado o *Geogebra* para a discussão da Tarefa 2 (Anexo 4).

Roteiro das aulas

Como já referi, a primeira tarefa, realizada na primeira aula para introdução ao tema, foi retirada do manual e tem por base um contexto real, referindo-se à velocidade de um esquiador durante uma prova de esqui (Anexo 2). Na segunda aula trabalhámos uma tarefa de contexto puramente matemático, com o propósito de estabelecer a ligação entre a taxa média de variação de uma função num dado intervalo e a taxa de variação, ou seja a derivada da função num ponto (Tarefa 1 – Anexo 3). A terceira aula consistiu na análise de uma tarefa, também de contexto puramente matemático (Tarefa 2 – Anexo 4). Pretendia-se, neste caso, a análise dos gráficos de funções de diferentes famílias que ou eram contínuas em $\mathbb{R}$ ou apresentavam um ponto de descontinuidade ou um ponto anguloso. O objetivo desta tarefa era que os alunos indicassem os pontos onde não seria possível determinar a derivada da função e, ainda, que identificassem o tipo de funções que estão associadas a cada caso. Um segundo objetivo desta tarefa era relacionar a monotonia da função com o sinal da sua derivada. No entanto, devido ao não cumprimento dos tempos da planificação, o tempo gasto em demasia com a exploração de cada gráfico, não permitiu que o segundo objetivo tenha sido alcançado. A segunda parte desta tarefa, implementada na quinta aula, pressuponha a dedução da regra de derivação para a função afim com generalização das regras de derivação para funções polinomiais. A quarta e sexta aulas (Anexo 5) foram dedicadas à resolução de exercícios para consolidação dos conceitos e esclarecimento de dúvidas. Devido às sucessivas alterações na planificação, acabei por lecionar mais três aulas, a sétima antes da interrupção da Páscoa (Anexo 6), a oitava e a nona no início do 3.º período letivo, que não estavam previstas. Estas aulas foram dedicadas à relação entre sinal da derivada e monotonia da função e à resolução de problemas de optimização. Este tópico foi apresentado aos alunos, por indicação da professora cooperante, "como informação" e com base no ensino expositivo. Estas últimas aulas foram apoiadas na resolução de exercícios do manual, nos quais se esperava que os alunos interpretassem o enunciado e estudassem a monotonia da função, resultante da análise e interpretação que eram pretendidas. Lecionei ainda uma décima, e última, aula desta unidade, já no 3.º período letivo, na semana que antecedeu a primeira ficha de avaliação formativa do período. Nesta propus uma atividade de investigação intitulada "Qual é o triângulo de maior área?" (Anexo 7), com dois grandes objetivos: a apresentação, enquanto professora, de uma tarefa exploratória e, aquele que é o propósito matemático da tarefa, a resolução de um problema de maximização. Com estes dois objetivos, esperei obter, por parte dos alunos, várias estratégias de resolução.

Conceito de derivada

O conceito de derivada de uma função foi trabalhado nas duas primeiras aulas tendo sido introduzido, tal como já referi, pela tarefa que selecionei do manual adotado, “A prova de esqui” (Anexo 2). Esperava, na primeira aula, introduzir a definição de derivada de uma função num ponto recorrendo ao limite da taxa média de variação, assim como fazer a exploração da relação entre a monotonia da função e o sinal da taxa média de variação.

Solicitei a um aluno para ler o enunciado da tarefa referida, com o objetivo de proporcionar um primeiro momento de discussão sobre o conceito de “rapidez” e de velocidade, capaz de envolver toda a turma. De seguida, perguntei aos alunos como se determinava a velocidade média mas não obtive resposta. Reforcei a pergunta, fazendo-os recordar do conceito de velocidade média, trabalhada no ensino básico. Foi necessário dar “pistas”, mencionando conceitos como a distância e o tempo, e questioná-los sobre a relação entre estes conceitos que permita calcular a velocidade média para que os alunos estabelecessem as relações pretendidas.

Estava previsto a resolução oral da primeira questão, seguida de trabalho autónomo para resolver a segunda e terceira questões da tarefa. A discussão tinha-se alongado mais do que o previsto mas os alunos identificaram o que era suposto fazer na primeira questão. Decidi não fazer a resolução oral, dei-lhes 10 minutos para trabalho autónomo (para as três primeiras questões da tarefa) e quis ver que estratégias surgiam. Antevi que a maioria dos alunos recorresse à calculadora para resolver estas questões de forma rápida ou que aplicassem, quase instintivamente, a fórmula resolvente. As dificuldades que eu tinha previsto para esta fase prendiam-se mais com a leitura e interpretação do enunciado e não tanto com a aplicação de procedimentos. No entanto, a turma cedo revelou dificuldades na primeira questão, que pressuponha a resolução de uma equação do segundo grau. A maioria dos alunos sabia o que tinha de fazer: resolver uma equação cujo enunciado já tinham encontrado. No decorrer da aula, um dos alunos comentou em voz alta: “eu sei que é para resolver a equação $E(t) = 180$, mas não estou a ver como (…)". Desta forma, concluí que não se lembravam da fórmula resolvente e não sugeriram a resolução com recurso à calculadora. Ao fim de cinco minutos não houve desenvolvimento e nenhuma estratégia surgia para resolução da equação, apesar do questionamento feito aos alunos. Os alunos pareciam confusos. Decidi, então, interromper os trabalhos e questionei-os "Como se resolve uma equação de segundo grau? Ou seja, que procedimentos conhecemos para resolver estas equações e que nos fartamos de usar?" Foi então que um dos alunos mais velhos se lembrou da fórmula resolvente e, rapidamente, toda a turma respondeu "hey...pois é!!!!!". Resolveram esta questão e as seguintes, tendo, contudo, ultrapassado os 10 minutos previstos. A manipulação de expressões algébricas e a manipulação da calculadora gráfica foram dificuldades demonstradas pelos alunos em vários momentos.

No momento de discussão seguinte, explorámos o que acontece à velocidade média nos intervalos de amplitude $]9{,}10[$ e $]10;11[$. Perdi, neste ponto da aula, uma oportunidade para introduzir, de uma forma formal, a noção de derivada no ponto, tendo apenas falado de forma ligeira, sem nunca escrever, a velocidade no instante 10. De seguida, marquei o tempo para resolverem a questão 5 da tarefa, que pressuponha o cálculo da velocidade instantânea em torno do instante 4. Poderia ter aproveitado para pedir aos alunos que calculassem a velocidade instantânea no instante 10, situação que eu tinha antecipado na planificação, deixando a questão 5 para trabalho de casa. No entanto, não queria gastar mais tempo com a simplificação da expressão analítica de $E(10+h)$, uma vez que já tínhamos excedido o tempo planificado em dois momentos anteriores dedicados a esta tarefa. Assim, optei por perder a ligação com a exploração dos instantes $]9{,}10[$ e $]10{,}11[$ e passar à resolução da questão na tarefa.

Seguiu-se um novo momento de trabalho autónomo onde os alunos resolveram o exercício 35 da página 60 do manual, (Fig. 4.3).

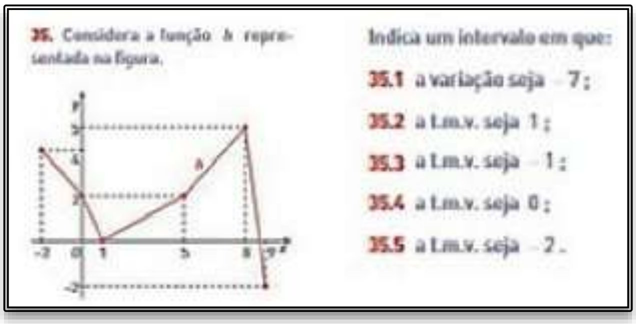


Figura 4.3. Exercício 35, página 60 do manual.

Esperava-se que os alunos escolhessem intervalos para determinados valores da taxa média de variação da função representada graficamente. Solicitei, além disso, que encontrassem a expressão analítica da função, definida por ramos correspondentes, cada um deles, a parte de uma função afim. Posteriormente fui alertada, pelos meus orientadores, de que a função tinha demasiados ramos para esta tarefa extra. Acabei por constatar este facto ao verificar que os alunos manifestaram alguma dificuldade em compreender o que se pretendia neste exercício, assim como em encontrar a expressão analítica. A aula terminou sem que a turma, à exceção de uma aluna, tivessem encontrado a expressão analítica da função.

Nesta primeira aula, no que concerne ao meu desempenho, os conteúdos foram sendo introduzidos ao longo da aula sem ter existido uma sistematização no final, momento em que a mesma deve ocorrer. Apesar de tudo, acredito que tenha alcançado uma boa exploração para que a ligação entre a taxa média de variação (velocidade média no contexto da tarefa) e a taxa instantânea (velocidade instantânea) fosse estabelecida através do limite. Refiro de seguida algumas situações que verifiquei que poderiam ter acontecido e que teriam sido proveitosas para os alunos. Desperdicei a oportunidade de relacionar derivada no ponto e de formalizar o conceito acompanhado de registo no quadro, que referi na aula seguinte. Além disso, não referi o velocímetro, como exemplo para fazer a distinção entre a velocidade média e instantânea.

O acumular das dificuldades dos alunos fez com que não fosse possível estabelecer a relação entre a monotonia da função e o sinal da taxa média de variação, num dado intervalo, objetivo que eu tinha mente e que se transformou em mote para a aula seguinte. Desta forma, no início da 2.ª aula, solicitei aos alunos para resumirem a aula anterior e me dizerem os conceitos novos que tinham sido trabalhados, os quais eu ia registando no quadro e completando as definições dos alunos (Fig. 4.4).

Figura 4.4. Registo do aluno – síntese dos conteúdos, 2.ª aula.

Enquanto discutíamos estas noções e as tarefas que trabalharamos na 1.ª aula, fiz a ligação com a questão 5, da tarefa 12 (Fig.4.5). Aproveitei este momento, para formalizar a definição de derivada e estabelecer a relação com uma aplicação deste conceito – a velocidade.

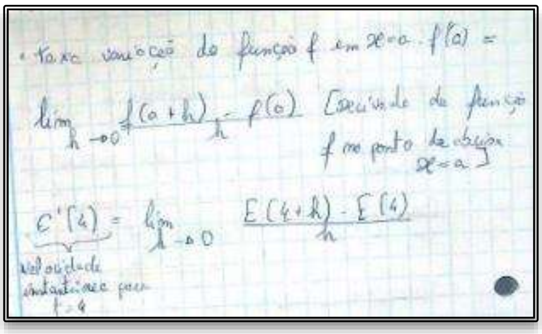


Figura 4.5. Registo da aluna – não contém ligação com a tarefa 12.

No início da terceira aula, voltámos a falar no conceito de derivada. Como os alunos ainda apresentavam muitas dúvidas sobre este conceito, utilizei a função da Tarefa 1 (Anexo 3), realizada na aula anterior, e fomos calcular a sua derivada no ponto $x = 2$. O meu objetivo era que os alunos “imprimissem” estes dois significados: a ideia de que a derivada, da função num ponto, é igual ao declive da reta tangente à função nesse ponto; e a ideia do limite, ou seja, da passagem de sucessivas retas secantes para chegar a tangente. Sugeri aos alunos, no caso de sentirem que o problema é na simplificação da taxa média de variação, que começassem por um cálculo auxiliar e só depois passassem ao limite (Fig. 4.6).

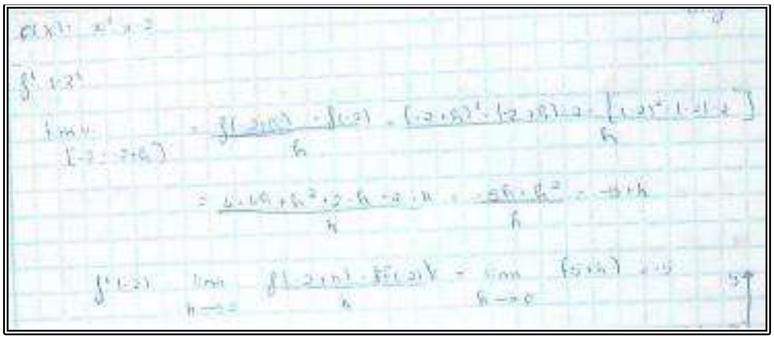


Figura 4.6. Registo do aluno – cálculo de $f'(2)$.

Como podemos observar na figura 4.6, comecei pela taxa média de variação, como cálculo auxiliar mas deixei-me levar numa incorreção: as simplificações da fração, nomeadamente, o fator h, através da lei do corte, não é correto do ponto de vista matemático efetuar fora do limite. Já tinha sido alertada, no final da 2.ª aula, para este tipo de incorreções e, no final do cálculo da passagem ao limite, apercebi-me que cometera novamente o erro ao simplificar a função fora do limite. Chamei a atenção dos alunos para o facto de estarmos a trabalhar com uma função racional, perguntei: “Cujo domínio é?...” Os alunos responderam $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ e eu registei no quadro e indiquei aos alunos para colocarem por cima do sinal de igual, conforme registo recolhido no caderno do aluno (Fig. 4.7)

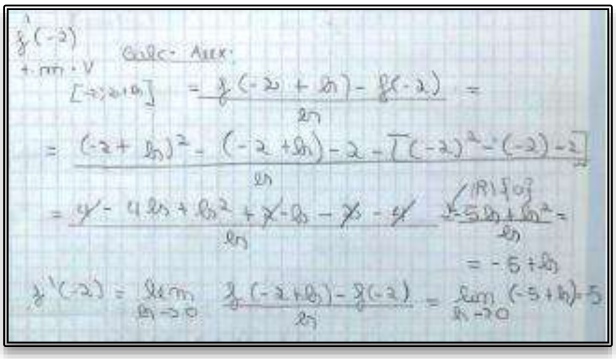


Figura 4.7: Registo de outro aluno – cálculo de $f'(2)$.

Outra situação que ocorreu, ainda durante esta discussão, foi a questão colocada por um aluno sobre "o valor do h", se este poderia ser negativo. E eu optei por responder com uma questão: "Há algum sítio, que diga que o h tem de ser positivo?" Os alunos responderam que não e eu aproveitei para explicar que o acréscimo h tanto podia ser negativo ou positivo, explorando, em conjunto com os alunos, como seriam os intervalos em ambos os casos. A exploração feita, surgiu no momento. Tentei estabelecer a ligação com o caso da função de proporcionalidade inversa, função estudada este ano pelos alunos. Com este exemplo, esperava conseguir também reforçar o conceito de limite. Desenhei no quadro um esboço do gráfico da função, e como um aluno indica a assintota desta função, $x = 0$, aproveitei para determinar os limites à direita e à esquerda de 0. Questionei os alunos sobre "o que acontece a h à medida que se aproxima de 0" por valores positivos e negativos. Os alunos participavam com respostas. Contudo, reconheço que a forma dos intervalos escolhidos para os cálculos da taxa média de variação induziam para um valor positivo do acréscimo h, pelo que poderia ter explorado mais o assunto e aproveitar a oportunidade que espontaneamente surgiu em aula.

A primeira aula de consolidação (correspondente à 4.ª aula da intervenção) foi assim uma oportunidade para clarificar algumas situações. Os alunos escolheram exercícios do caderno de atividades, devido às dúvidas que encontraram no seu trabalho autónomo em casa. Todos os exercícios estavam inseridos em contexto puramente matemático. O primeiro a ser trabalhado foi o exercício 6 (Fig. 4.8), onde é apresentada uma função quadrática, dois pontos sobre o seu gráfico e as retas tangentes nesses pontos.

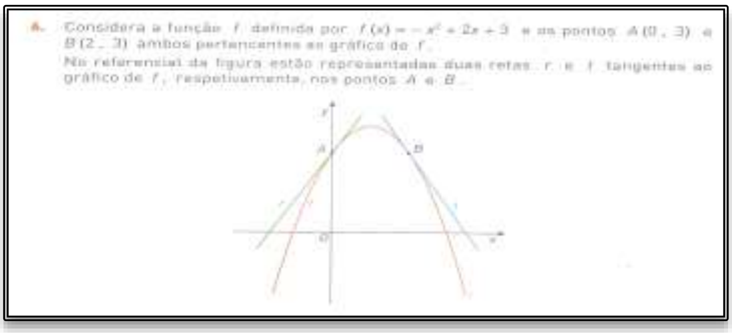


Figura 4.8. Exercício 6 – caderno de atividades

A 1.ª alínea pedia para determinar a derivada nos pontos $x = 1$ e $x = -1$ e, na generalidade, os alunos identificaram a definição a aplicar. Escrevi-a no quadro, com a ajuda dos alunos, para ter a certeza que registavam corretamente a definição, uma vez que era a primeira aula de consolidação de exercícios e era um tópico recente. Perguntei o que teríamos de fazer de seguida e solicitei a uma aluna, que estava a responder corretamente, para ir ao quadro. Esta hesitou um pouco pois tinha manifestado dúvidas, mas acedeu. Já no quadro algumas questões formais precisavam de ser corrigidas, como se pode verificar na figura 4.9, que a seguir se apresenta.

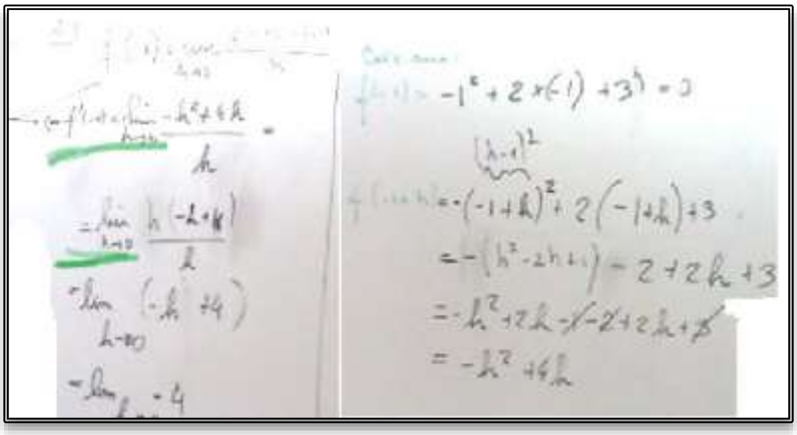


Figura 4.9. Registo da resolução da aluna no quadro com correção.

Eu esperava que a aluna concluísse a sua prestação no quadro para, logo em seguida, questionar a turma se tinham percebido toda a resolução. Contudo, a professora cooperante decidiu corrigir a aluna enquanto esta estava no quadro, não tendo percebido a minha intenção. Com a conclusão da discussão sobre este exercício, sintetizamos, oralmente, as noções trabalhadas na semana anterior, e os alunos efetuaram os seus próprios registos. Depois deste primeiro momento, em que discutimos a definição de derivada num ponto com a resolução de um exercício, os alunos conseguiram, à parte das dificuldades já mencionadas – casos notáveis e simplificação de frações – resolver o resto do exercício 6 no seu lugar.

No momento inicial da 5.ª aula, antes de distribuir a Tarefa 2 (Anexo 4), questionei os alunos sobre a existência de dúvidas no que diz respeito à definição de derivada. Um aluno perguntou: " '*Stôra'*, eu ainda não percebi muito bem o que significa essa coisa do h!....”. A dúvida colocada pelo aluno, deu origem a um novo debate sobre o conceito em torno do acréscimo h, ser positivo ou negativo e o seu significado.

Na 5.ª aula, enquanto circulava entre a turma, verifiquei que uma aluna escrevia no seu caderno a seguinte expressão:

$$“t.m.v. = \lim_{h \to 0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}”.$$

Questionei-a sobre o que pretendia calcular e ela respondeu “a derivada no ponto a”. Então perguntei o que era o que tinha escrito antes do sinal de igual e ela ficou confusa. De seguida, questionei como se calculava a taxa média de variação e, então, ela compreendeu o seu erro e corrigiu, escrevendo “$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$”.

Interpretação geométrica da derivada de uma função

Para a interpretação geométrica da derivada de uma função, foram estruturadas duas tarefas que foram trabalhas nas 2.ª e 3.ª aulas. A Tarefa 1 (Anexo 3) foi elaborada por mim e otimizada com a ajuda de todos os orientadores, realizada na 2.ª aula. A Tarefa 2 (Anexo 4) é composta por duas partes: uma retirada da Brochura de Funções – 11.º ano (Teixeira *et. al*, 1998) e outra construída por mim, também com o auxílio dos orientadores. A primeira parte da Tarefa 2 foi realizada na 3.ª aula e centrava-se na análise gráfica e interpretação geométrica.

Para ajudar na compreensão desta tarefa, foi trabalhada a relação entre a monotonia da função e o sinal da taxa média de variação em duas situações. Num primeiro momento, durante a primeira aula, em que solicitei aos alunos a resolução do exercício 35 da página 60 manual (Fig. 4.3) e no início da 2.ª Aula, durante síntese da aula anterior, enquanto discutíamos as conclusões enquandrando com o exercício 35. Para construção desta síntese (Fig. 4.10), questionei os alunos: “A variação da função está relacionado com o quê?”. Este questionamento teve de ser reforçado, uma vez que na tentativa de não responder à questão na própria pergunta, estas eram muito indiretas, tornando-se pouco claras aos alunos. Insisti, questionando: “Como é que uma função pode variar?” Obtive como resposta de um aluno: “As imagens podem ir aumentando... diminuindo....”. Aproveitei a resposta e corrigi: “Então, pode ser crescente...” e os alunos completaram: “decrescente ou constante”. Comparámos o comportamento da função do exercício 35 (Fig. 4.3) com o sinal da taxa média de variação, as conclusões foram surgindo e fui escrevendo no quadro para que todos ficassem com o igual registo no caderno diário.

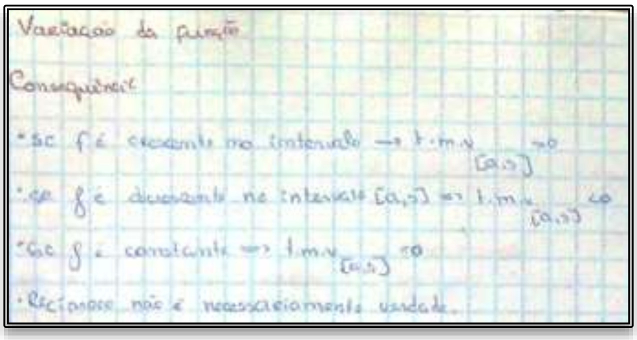


Figura 4.10. Registo de um aluno: relação entre a monotonia da função e o sinal da taxa média de variação.

Reforcei, alertando os alunos sobre a não reciprocidade destas conclusões, às quais chamámos de consequências. Usei, como exemplo, a função do exercício 35. Apresentei também como contra-exemplo o caso de uma função quadrática, considerando intervalos onde a taxa média de variação fosse nula mas a função não era constante.

Neste momento, cometi uma incorreção ao nível formal nos registos no quadro. Ao começar as frases com “se…” deveria ter escrito “então” no lugar da implicação, ou simplesmente utilizar a implicação e não escrever “se” no início da frase. Além disso, os meus orientadores também me chamaram à atenção para o facto de eu, até este momento, ter trabalhado apenas retas e não ter explorado curvas. No entanto, foi uma opção que tomei devido às tarefas que tinha projetado e ao tipo de função que seriam ainda trabalhadas.

De seguida, distribuí a Tarefa 1 (Anexo 3) aos alunos, na qual apresentava uma função quadrática $f(x) = x^2 - x + 1$. Pretendia que determinassem a equação reduzida de uma reta, dados dois pontos. Pedia, ainda, que comparassem a equação da reta encontrada com a taxa média de variação no intervalo limitado por esses pontos (alíneas *a)*, *b)* e *c)*). Por fim, era solicitado que determinassem a taxa média de variação no intervalo $[1, 1+h]$ e que encontrassem a relação com a derivada da função no ponto de abcissa 1 (alíneas *d)* e *e)*). Nesta tarefa, os alunos aplicaram a fórmula da taxa média de variação e da equação da reta.

Disse aos alunos que teriam 10 minutos para as alíneas *a)*, *b)* e *c)*. No entanto, à semelhança de aulas anteriores, antecipei que demorassem mais tempo que o planificado a resolver a tarefa, e para tentar inserir algum ritmo de trabalho e envolver os alunos na tarefa, decidi resolver oralmente a primeira alínea. De seguida discutimos sobre que estratégias poderíamos seguir nas alíneas seguintes. Dei tempo aos alunos para registarem as conclusões sobre a monotonia da função e resolverem a alínea *b)*.

Resolvemos a alínea *c)* em conjunto, no momento de discussão, apoiado pela projeção do gráfico da função f, utilizando o *Geogebra* (Fig.4.11).

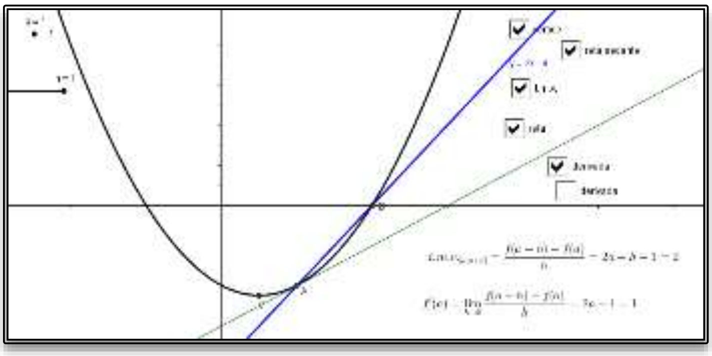


Figura 4.11. Gráfico projetado – a função com as retas secante e tangente.

Solicitando a ajuda dos alunos, escrevi a conclusão no quadro:” o declive da reta secante entre dois pontos é igual à taxa média de variação da função no intervalo definido pelos pontos”. Aproveitando que o gráfico estava a ser projetado, e devido à logística que envolve a utilização da projeção, analisamos o comportamento da função ao longo do seu domínio e comparamos com a taxa média de variação, utilizando as mais valias deste *software*. Analisamos a passagem das sucessivas retas secantes à tangente e, na projeção, eram calculadas a taxa média de variação em intervalos em torno do ponto selecionado e a derivada nesse ponto. Testamos alguns pontos e comparávamos com a equação da reta, dada pelo *software*.

De seguida, escrevi a conclusão no quadro: “O declive da reta tangente à função num ponto é a derivada da função nesse ponto”. Desta forma, esta sistematização foi construída com a ajuda dos alunos. No entanto, em termos dos registos dos alunos, esta sistematização não é acompanhada por um esboço gráfico como se pode verificar na figura 4.12 o que poderá ter sido uma desvantagem, uma vez que a frase, sem um esboço gráfico a acompanhar, perde significado.

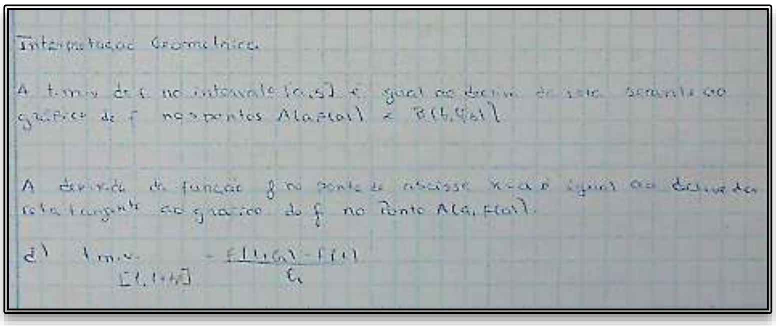


Figura 4.12. Sistematização da interpretação geométrica da derivada.

De seguida, solicitei aos alunos que resolvessem a alínea *d)*, informando-os que teriam 10 minutos para o fazer. Neste ponto, deparei-me, novamente, com as dificuldades nos casos notáveis. Senti, sempre, a necessidade de relembrar aos alunos que o quadrado do binómio não é a soma dos seus quadrados. Constatei que, em regra, sempre que os alertava para esta situação os alunos recordavam-se dos casos notáveis mas, por alguma razão que todavia não fui capaz de erradicar, nunca correspondia à primeira escolha. Após a minha solicitação, um aluno acordou ir ao quadro resolver a alínea *d)* (Fig. 4.13).

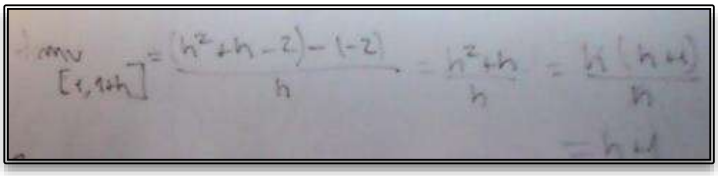


Figura 4.13. Resolução no quadro da alínea d) da Tarefa 1

Note-se que, o aluno fez a simplificação através da lei do corte sem evidenciar o domínio de validade onde seria possível fazê-lo. Tudo teria sido perfeito se eu, nesse instante, tivesse dado conta e tivesse feito a correção na hora, mas continuei com a aula, sem me aperceber do erro formal que tinha sido cometido.

De seguida fizemos a discussão da alínea *e)*. A pergunta colocada era: “À medida que *h* se aproxima de zero, o que acontece à taxa de variação da função f no intervalo [1,1+h]?”. Um dos alunos responde questionando: “É aquela coisa dos limites?”. Respondi-lhe afirmativamente e pedi-lhe que o resolvesse no quadro. O aluno acedeu, os cálculos referentes à taxa média de variação já tinham sido simplificados (Fig. 4.13), ainda estavam escritos no quadro e o aluno aplicou o limite, escrevendo: $\lim_{h \to 0} = 1$. Chamei a atenção de toda a turma para a incorreção formal e corrigimos a escrita (Fig.4.14)

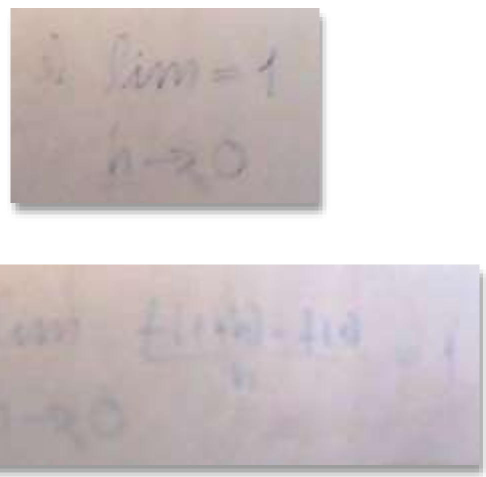


Figura 4.14. Correção no quadro

Os orientadores questionaram-se sobre o tipo de intervalos considerado. Inconscientemente, quer na ficha, quer durante a aula, os intervalos considerados foram sempre da forma $[a, a+h]$, ou seja, considerei sempre intervalos em que $h > 0$. Noutras aulas tentei abordar este assunto, com o objetivo de generalizar esta questão, mas reconheço que não obtive muito sucesso.

Outra situação que ocorreu nesta 2.ª aula teve a ver com a linguagem que utilizei. Recorrentemente utilizei a expressão "derivada da função no ponto de abcissa $x = a$", quando, na realidade, deveria dizer apenas "derivada da função no ponto de abcissa a" ou "derivada da função no ponto $x = a$". Outra situação de abuso foi quando me referia aos intervalos, utilizava a palavra "comprimento" em vez de "amplitude".

Na 3.º aula trabalhámos a parte I da Tarefa 2 (Anexo 4). Esperava que os alunos analisassem vários gráficos de funções com o objetivo de estudar a relação entre a continuidade e a derivada, assim como introduzir o conceito de pontos angulosos.

A tarefa tem início com a seguinte frase: "Dizemos que uma função é diferenciável num ponto se tiver derivada finita nesse ponto, ou seja, se existir uma reta tangente ao gráfico da função nesse ponto e essa reta não for vertical". Na leitura atenta da tarefa, chamei à atenção dos alunos para o facto de que diferenciável e derivável eram sinónimos. Não havendo, nesta altura mais dúvidas explícitas, informei os alunos que teriam 10 minutos para averiguarem quais as funções que seriam, ou não, diferenciáveis. Durante este tempo não circulei pelos alunos uma vez que tinha que preparar a projeção, que ocupava o quadro branco onde escrevemos. O projetor está direcionado para o centro do quadro e a sua gestão foi uma dificuldade para mim. A discussão coletiva desta tarefa foi acompanhada por uma aplicação em *Geogebra* (Fig. 4.15), onde apresentava os gráficos, e retas secantes que iam convergindo para a reta tangente ao gráfico, no ponto considerado. Com as potencialidades do *Geogebra*, alterei o ponto onde a reta era tangente e, assim, explorámos cada gráfico em relação à sua continuidade e existência de pontos "problemáticos", analisando a reta tangente nesses pontos.

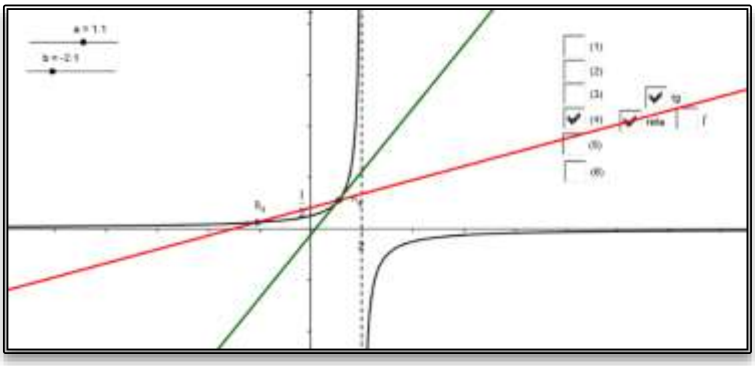


Figura 4.15. Gráfico da função (4) da Tarefa 2

Uma vez terminados os 10 minutos, os alunos escolheram as funções a analisar; excluindo, à partida, o gráfico (2), por se tratar de uma função quadrática, já estudada na tarefa 1. Solicitei a indicação dos gráficos que julgavam representar funções não diferenciáveis no ponto $x = 2$ e obtive como resposta a função representada em (4) e em (1). Os alunos escolheram analisar primeiro o gráfico (4)[4]. Questionei-os sobre que função estava representada e um dos alunos respondeu que era uma função racional. Com o auxílio de todos os alunos, determinou-se a sua expressão analítica. Processo este, o de encontrar a expressão analítica de uma função, que me foi apontado como uma crítica, uma vez não ser esse o objetivo da tarefa. Contudo, e à semelhança da equação da reta na primeira aula, eu senti a necessidade de recordar uma matéria recente, promovendo a articulação entre conteúdos. Por ter conhecimento das dificuldades da turma e, em especial, de alguns alunos, a nível das aprendizagens em Matemática, optei por aproveitar todas as oportunidades para estabelecer conexões com conteúdos que já eram do conhecimento dos mesmos. De seguida, explorámos a derivada no ponto $x = 2$, escrevemos a definição e, com uma abordagem intuitiva e geométrica, explorámos o limite em cada um dos ramos da função. Os alunos concluíram que a reta tangente ao gráfico da função se aproximava de uma reta vertical, que era a assimptota da mesma e, assim, avançámos para a função seguinte.

[4] Esta é uma função racional, que os alunos estudaram este ano e que portanto ainda tinham bem presente.

De seguida, analisámos a função representada em (1), que é uma função módulo. Comecei por perguntar "Qual é a reta tangente ao gráfico no ponto 2?" e vários alunos consideravam que era a reta de equação $y = 0$. Eu respondi "De facto, esta reta parece ser tangente ao gráfico no ponto 2....vamos ver!". E, para não perdermos muito tempo, eu indiquei qual a expressão analítica em vez de questionar os alunos. Além de não querer perder muito tempo com as expressões analíticas, esta função é trabalhada no 10.º ano de escolaridade e depreendi que poderia não estar muito presente. Fizemos, em conjunto, o desdobramento do módulo. Os alunos identificaram qual a reta que correspondia a cada ramo e avançamos para a determinação da derivada no ponto de abcissa 2. Escrevemos $g'(2)$, por definição, e eu perguntei como iríamos resolver este limite, uma vez que tínhamos dois ramos. Desta forma, aproveitei para falar nas duas situações: $h > 0$ e $h < 0$. Expliquei aos alunos que, como a função era definida por retas, então o declive da reta tangente, à direita e à esquerda, teria de ser igual ao declive da própria função. Os alunos mostraram-se pouco convencidos. Eu reforcei e, remetendo para as aulas anteriores, expliquei: "se pegarmos em dois pontos quaisquer sobre a função, a reta secante nestes pontos é igual à própria função." Os alunos concordaram. Desta forma, identificaram facilmente que

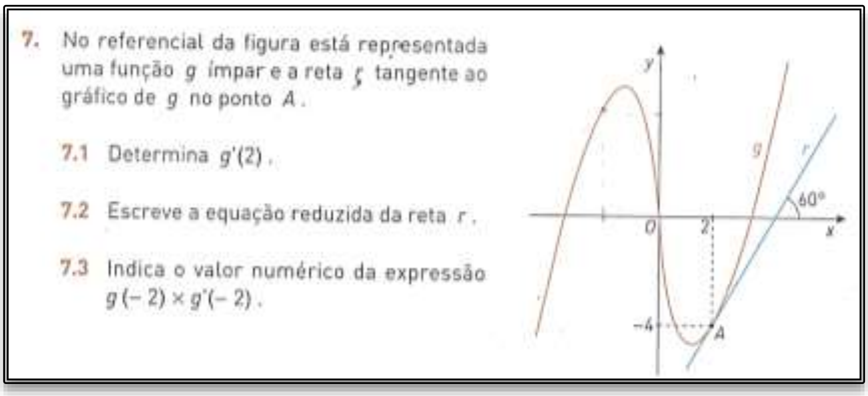
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = 1$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = -1$$

Nesta fase da aula apenas escrevemos o limite da função e solicitei aos alunos para passarem o que estava no quadro para a folha de registo da tarefa. Desta forma, perdi a oportunidade de falar nas derivadas laterais: $g'(2^-)$ e $g'(2^+)$, tópico que estávamos a abordar, bem como em sedimentar as noções referentes à função derivada e os conceitos foram abordados de forma muito ligeira e sem sistematização. Cometi novas incorreções do ponto de vista da linguagem ao dizer "este limite está a aproximar de -1" em vez de "este limite é -1", como fui, posteriormente, alertada pelos meus orientadores.

Em seguida, quando perguntei aos alunos se existia mais alguma função que considerassem não ser derivável no ponto de abcissa 2, alguns alunos disseram que não mas, houve outros alunos que perguntaram se, à semelhança do caso (1), o gráfico (3) também seria, assim, de uma função não diferenciável. A questão da reta tangente ser o eixo das abcissas continua a pairar como dúvida. Indiquei, novamente a expressão analítica da função representada em (3) para que os alunos, se quisessem, pudessem explorar o gráfico com a calculadora gráfica. Nesta fase não nos restava muito tempo de aula e, portanto, apenas explorei graficamente a passagem das retas secantes à reta tangente no ponto $x = 2$. No entanto, e devido às limitações inerentes aos softwares, a projeção não foi muito bem sucedida. Apesar deste facto, os alunos "acreditaram" que as retas secantes se estavam a aproximar de uma reta vertical, uma vez que os alunos acreditam no professor e poucas vezes o contestam. Aproveitei esta situação para promover a articulação deste tópico com a geometria, nomeadamente a inclinação da reta, conceito abordado no 1.º período. Questionei-os, então, qual a inclinação de uma reta vertical. A resposta obtida foi a de 90º, ao que os questionei do valor da tangente desse ângulo. Os alunos reconheceram que não estava definida e, então, eu expliquei que não está definida porque é infinita. Fiz, assim, referência à função tangente e às suas assimptotas, sem recorrer no entanto ao gráfico da mesma. Estabeleci a ligação com o conteúdo da frase do início da tarefa, referindo que "como o declive não é finito, então a derivada neste ponto também não é finita e portanto a função não é diferenciável". Generalizei e apresentei a função derivada como a correspondência entre cada ponto e a derivada na função nesse ponto, no entanto esta generalização não creio que tenha sido clara para os alunos e foi pouco trabalhada. A aula terminou sem a sistematização do conceito de pontos angulosos que não ocorreu na aula seguinte, pois foi dedicada ao esclarecimento de dúvidas, mas na aula seguinte a esta.

Na 4.ª aula, dedicada à consolidação dos conceitos abordados nas aulas anteriores, discutimos exercícios do caderno de atividades. A segunda alínea do exercício 6 (Fig. 4.8) pretendia que os alunos relacionassem a derivada com o declive das retas dadas e encontrar a equação dessas retas, estratégia que a professora cooperante explicou. Quando os alunos se depararam com o exercício 7 (Fig. 4.16) surgiram novas duvidas.


7. No referencial da figura está representada uma função g ímpar e a reta r tangente ao gráfico de g no ponto A.

7.1 Determina $g'(2)$.

7.2 Escreve a equação reduzida da reta r.

7.3 Indica o valor numérico da expressão $g(-2) \times g'(-2)$.

Figura 4.16. Exercício 7 – Caderno de atividades

Este exercício pedia a derivada no ponto 2, mas não era dada a expressão analítica da função e um aluno perguntou como poderiam calcular o limite, se não sabiam qual era a função. Era suposto utilizar a informação do gráfico, ou seja, o declive da reta tangente no ponto $x = 2$. Este teria de ser calculado através da tangente de $60°$. Para ajudar os alunos a encontrar a estratégia descrita, disse que a derivada tinha outra interpretação e, como já tínhamos resolvido o exercício 6, os alunos identificaram que a derivada no ponto seria igual ao declive da reta. Um aluno disse que também não sabiam a equação da reta e que só sabíamos um ponto dessa reta, faltava informação. Perguntei então se não poderíamos determinar a equação de uma reta de outra forma e que outras informações teria o enunciado que nos seriam úteis. Acabei por ter de fazer referência à inclinação da reta e à relação com o declive, pois os alunos já não estavam recordados.

Pontos angulosos. Um dos objetivos da 3.º aula era introduzir a noção de pontos angulosos, associado á noção intuitiva de continuidade. Como não foi cumprido, devido à análise gráfica realizada em torno da tarefa 2, no início 5.ª aula formalizei estas noções no momento de resumo das aulas anteriores. Comecei por introduzir uma alternativa de “escrita”, aproveitando também para reforçar a “questão do h” perguntando qual era a amplitude dos intervalos considerados no cálculo da taxa média de variação. Os alunos responderam h. E eu disse “agora, se eu chamar x a $a+h$, como ficam os nossos intervalos?” Os alunos responderam, $[a,x]$. Eu perguntei, “como fica então a expressão da taxa média de variação, da função f, neste intervalo [entretanto, tinha esboçado um gráfico de uma função, assinalando os pontos no gráfico – Fig. 4.17]. Enquanto os alunos respondiam, eu registava no quadro, e continuei “então agora, se eu quiser passar ao limite, como será que fica o intervalo?” Escrevemos a definição de derivada de uma da função f, no ponto de abcissa a com uma “nova escrita”. Perguntei qual era a amplitude do intervalo $[a,x]$ e os alunos estabeleceram a relação $h = x - a$ e deduzimos que $x \to a$. Formalizando a definição de derivada num ponto, às custas da taxa média de variação no intervalo do tipo $[a,x]$ (Fig. 4.17).

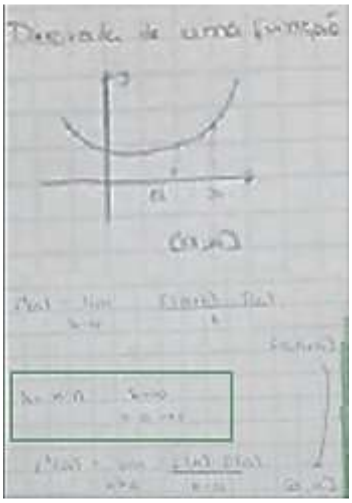


Figura 4.17. Registo do aluno

De seguida, fizemos um pequeno resumo, onde os alunos diziam as situações em que uma função não seria derivável e eu exemplificava, no quadro, com as representações gráficas de uma função da família que os alunos indicavam (as abordadas na tarefa 2). Desenhei os gráficos da função módulo, racional assim como uma função definida por ramos, ilustrada na figura 4.18 e aproveitei para reforçar o conceito de derivada lateral.

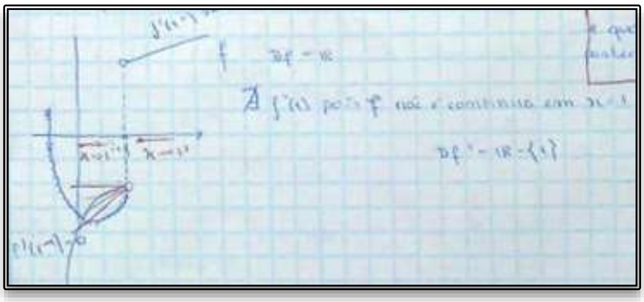


Figura 4.18. Exemplo de uma função, de domínio ℝ, descontínua num ponto.

No fim de os alunos terem registado os gráficos no caderno, escrevemos a síntese “ Não existe derivada de uma função num ponto quando esse ponto é anguloso, quando a função não é contínua nesse ou quando esse ponto não pertence ao domínio da função inicial.”

De seguida, solicitei a um aluno para ler o enunciado do exercício 65 da pagina 81 do manual (Fig. 4.19). Decidi passar logo à discussão/resolução oral conjunta. Este exercício pedia para, através da observação da representação gráfica de uma dada função, determinar o valor e/ou sinal da sua derivada em determinados pontos. Os alunos não apresentaram muitas dúvidas neste exercício, à exceção de uma referência às “regras dos sinais”. Através da análise gráfica e apoiados pela sistematização anterior, os alunos encontraram o sinal de cada fator indicado no exercício.

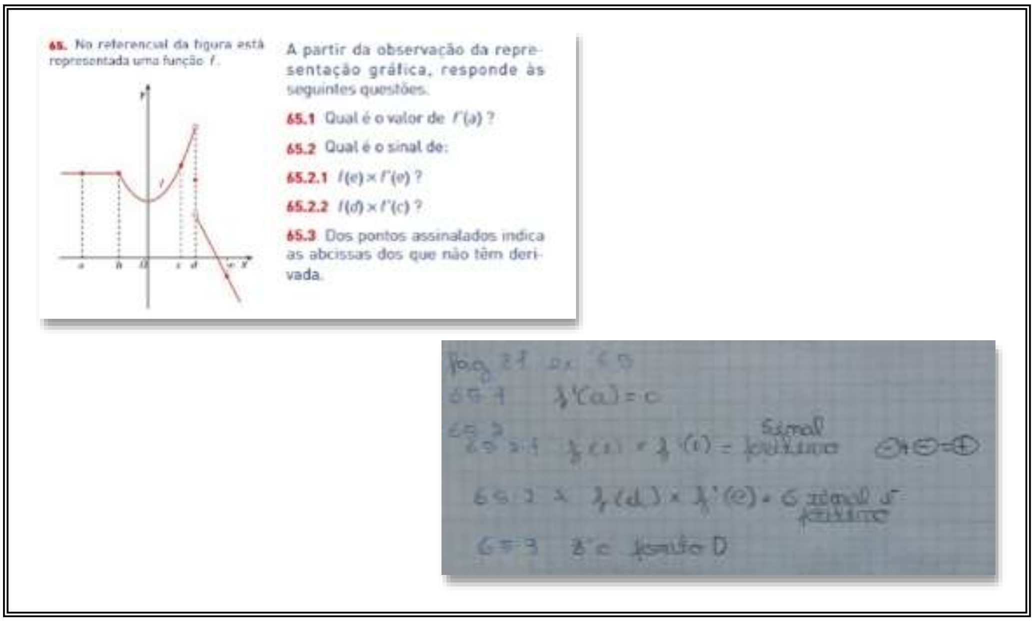


Figura 4.19. Exercício 65 da página 81do manual e registo de um aluno.

Na resolução deste exercício, foi contudo necessário alguma clarificação sobre como determinar o sinal dos produtos solicitados em cada alínea. Na figura 4.19, pode-se observar o registo de um aluno, com o seu registo das conclusões na discussão sobre o sinal de cada um dos fatores, alínea 65.2.1 (Fig.4.19).

Na aula seguinte (6.ª aula), um aluno colocou uma dúvida sobre a interpretação geométrica e a relação da derivada com a função dada. Este aluno identificava a derivada com a reta tangente, ao gráfico da função num ponto. Para ajudar os alunos a esclarecer esta percepção, desenhei no quadro o gráfico da função módulo $y = |x - 2|$, fazendo alusão à tarefa 2, trabalhada na 3.ª aula. De seguida perguntei aos alunos, "qual é o valor da sua derivada para qualquer ponto no ramo direito da função?". Os alunos responderam -1. Perguntei então "E no ramo esquerdo? os alunos responderam 1 perguntei se era para qualquer ponto e os alunos concordaram todos que sim. Fiz o esboço no quadro da representação gráfica da derivada desta função. Então discutimos como era a reta tangente ao gráfico desta função, em cada ponto. Os alunos concordaram que, sempre que a função dada é afim, a reta tangente coincide com a própria função. E esclareci mais uma vez que o que é igual à derivada, em cada ponto, é o valor do declive e não a própria reta.

Num momento final desta aula, num exercício em que pedia a equação da reta tangente ao gráfico da função $g(x) = -4x^2$, um aluno identificou que o seu declive seria -4 (Exercício 51, página 73 do manual). A primeira alínea pedia a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa -1 Chamei a atenção da turma, perguntando que tipo de função seria esta, ao que os alunos responderam ser uma função quadrática. De seguida perguntei se as funções quadráticas tinham declive. E os alunos responderam que não. Discutimos as diferenças gráficas entre uma função afim e uma função quadrática [desenhei um esboço de cada caso no quadro], o que significava cada um dos parâmetros nas expressões analíticas e os alunos perceberam a diferença. De seguida, aplicaram a regra adequada e escreveram $g'(x) = -8x$. Perguntei-lhes então o que significava esta equação. Um aluno pensou que a equação da reta tangente (no ponto pedido) seria dada por esta expressão. Desenhámos um esboço da reta tangente no ponto -1 e, num referencial separado, perguntei como seria a representação gráfica da função g' e voltámos a discutir estas noções, calculámos a equação da reta tangente ao gráfico da função pedida e calculámos o valor da derivada, g' em diferentes pontos.

Regras de derivação

A Parte II da Tarefa 2 (Anexo 4), trabalhada na 5.ª aula, foi elaborada para possibilitar a generalização das regras de derivação, além de reforçar o conceito de função derivada (enquanto função real de variável real). Nesta parte, era esperado que os alunos deduzissem as expressões para a taxa média de variação e para a taxa de variação (derivada), relativas à da família das funções afins no intervalo $[a, a+h]$.

Após 25 minutos de trabalho autónomo por parte dos alunos, durante os quais fui circulando e orientando os alunos nas suas dúvidas, a turma tinha encontrado a generalização para a regra de derivação de uma função afim e começava a dispersar. Não sendo este o objetivo, optei por ir para o quadro e afirmei "Parece-me que toda a gente conseguiu chegar ao resultado pretendido…" e escrevi no quadro $f'(x) = m$. A turma respondeu afirmativamente e continuei: "Como não há dúvidas; vamos, então, encontrar a regra de derivação para a função quadrática $f(x) = x^2$". Com o auxílio dos alunos, que me iam orientando, fiz a dedução da regra. A opção de estar eu no quadro, em vez de dar como trabalho autónomo aos alunos ou pedir a um aluno para ir ao quadro, prendeu-se com duas questões: a manipulação dos casos notáveis, pois já não tínhamos muito tempo de aula, e para ter a certeza que os registos escritos ficavam corretamente escritos nos cadernos diários.

Depois da dedução da regra, indiquei um exemplo de aplicação com a derivada da soma, decompondo um polinómio de segundo grau completo (Fig. 4.20).

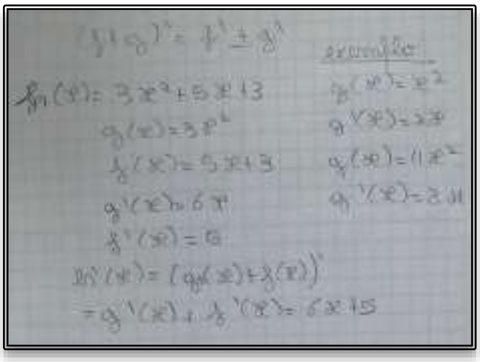


Figura 4.20. Registo do aluno – aplicação da derivada da soma de duas funções.

Poderia, nesta fase, ter aproveitado para introduzir outros exemplos e inserir também a generalização da derivada de uma potência mas a gestão de aula não o permitiu.

A aula seguinte, 6ª aula, foi dedicada à sistematização das regras de derivação e à consolidação dos conhecimentos, com a resolução de exercícios do manual. No início da aula expliquei aos alunos o que iríamos fazer no decorrer da mesma. Expliquei que não iríamos fazer mais demonstrações das regras de derivação e que o livro continha as restantes demonstrações. Indiquei que “olhassem para elas” e as estudassem, caso tivessem dúvidas, deveriam trazê-las para a sala de aula. De seguida, registei no quadro o resumo das regras que constavam do programa do 11.º ano de escolaridade e que estavam no manual. A professora cooperante, posteriormente, completou o resumo com duas fórmulas que eu não tinha escrito. Na figura 4.21 podemos observar os exemplos, resolvidos oralmente pelos alunos.

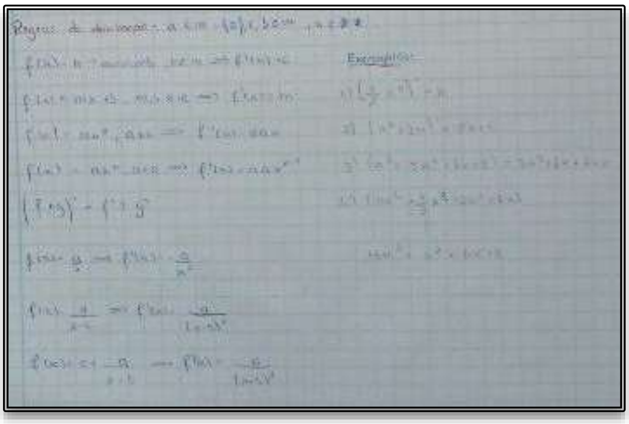


Figura 4.21. Registo do aluno – exemplos de aplicação das regras de derivação.

De seguida, aproveitei para questionar os alunos sobre outras estratégias possíveis para derivar a função $h(x) = \frac{3}{x^3}$, sem ser através das duas últimas regras. Os alunos não perceberam a minha questão. Perguntei então, como poderíamos simplificar aquela função e escrevê-la de outra forma. E aproveitei a oportunidade para falar de outra estratégia de resolução, aplicando as regras das potências, e exemplicamos com radicais (Fig. 4.22).

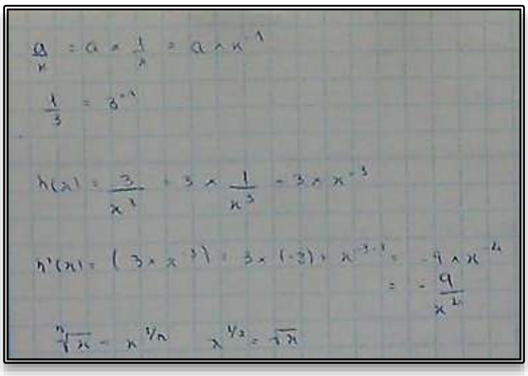
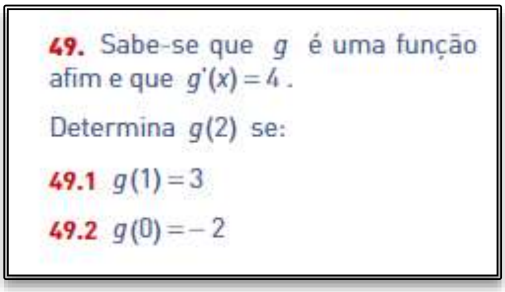


Figura 4.22. Registo do aluno – derivação da função $\boldsymbol{h}$.

O exercício 49 da página 72 do manual (Fig. 4.23), foi trabalhado na 6.ª aula. Os alunos indicaram terem dúvidas, não perceberem como iniciar ou o que era pedido. Neste exercício os alunos tinham de utilizar a expressão analítica da função afim e estabelecer a relação entre o seu declive e o valor da sua derivada em cada ponto.



49. Sabe-se que g é uma função afim e que $g'(x) = 4$.

Determina $g(2)$ se:

49.1 $g(1) = 3$

49.2 $g(0) = -2$

Figura 4.23. Exercício 49 da pagina 72 do manual

Neste exercício, os alunos apresentaram dúvidas e eu tentei orientá-los. Comecei por perguntar aos alunos como seria a expressão analítica da função g. Os alunos identificaram que seria do tipo $y = ax + b$. De seguida perguntei qual era a derivada de uma função afim, e os alunos identificaram se seria a. De seguida, disse aos alunos, “no nosso exercício, se nos dizem que a derivada de uma função afim é 4, isso significa o quê?” Os alunos hesitaram um pouco, mas depois concluiram que a expressão da função seria do tipo $g(x) = 4x + b$. Ainda assim os alunos não percebiam como determinar $g(2)$ pois não sabiam qual era a ordenada na origem. Então perguntei o que significava a condição $g(1) = 3$. Os alunos voltaram a hesitar. Um aluno respondeu que “a imagem do 1 era 3”. Aproveitei para completar dizendo que teríamos assim um ponto sobre a reta e perguntei quais as suas coordenadas. Os alunos responderam que eram $(1,3)$ e de seguida conseguiram determinar o valor de b na equação da reta e portanto a imagem para $x = 2$.

Optimização e análise de funções

A 7.ª aula da intervenção letiva, e última aula do 2.º período letivo, foi dedicada à introdução da relação entre a monotonia da função e o sinal da sua derivada. Por indicação da professora cooperante, usei como exemplo a função $y = -x^2 + 1$, analisámos a sua monotonia e os alunos identificaram o seu máximo e registei as suas coordenadas $V(0,1)$ no gráfico. De seguida, analisámos o sinal da derivada ao longo da função e registámos o que chamamos de conclusões, como podemos observar pelo registo do aluno na figura seguinte.

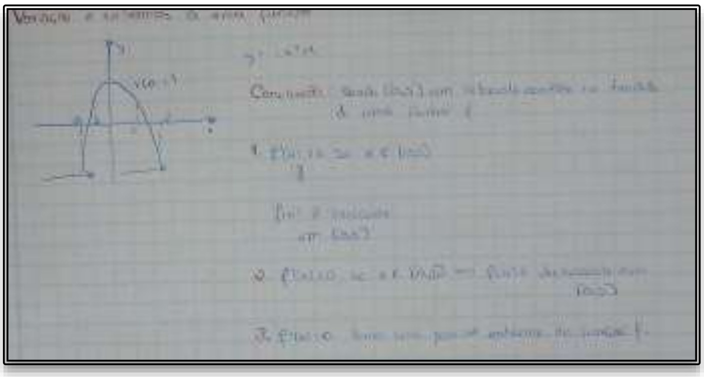


Figura 4.24. Registo do aluno.

Após esta sistematização, resolvemos em conjunto a proposta 30 da página 143 do manual, que pedia para calcular o volume máximo de uma caixa, sem tampa, construida a partir de um cartão com 40cmx60cm. Os alunos revelaram algumas dificuldades em encontrar a função a maximizar.

Perguntei como calculávamos o volume da caixa e os alunos responderam “comprimento vezes largura vezes altura”. Perguntei de seguida quais eram as dimensões da caixa. Os alunos tiveram alguma dificuldade, mas depois de discutirmos como a caixa seria montada, e com a minha orientação, encontrámos a expressão que representava o volume da caixa:

$$V(x) = 4x^3 - 200x^2 + 2400x$$

Aplicando as regras de derivação, os alunos facilmente encontraram a derivada, $V'(x) = 12x^2 - 400x + 2400$. Apoiada pelo exercício, fui explicando aos alunos o procedimento para encontrar o máximo da função. O seguinte passo seria então determinar os zeros da derivada da função. Com o auxilio da calculadora, encontrámos os zeros e, de seguida, construímos um quadro de sinais, onde analisámos o sinal da derivada e concluímos sobre a monotonia da função. Aquando da construção deste quadro, questionei os sobre sobre que valores de x colocaria na contrução do quadro e análisamos o domínio da função V, discutindo as suas especificidades relativamente ao contexto da situação apresentada.

Após a interrupção letiva, as duas primeiras aulas do 3.º período letivo (correspondentes às 8.ª e 9.ª aulas da intervenção letiva) foram dedicadas à consolidação de conhecimentos e ao esclarecimento de dúvidas, nomeadamente sobre os exercícios sugeridos para trabalho autónomo, para o período de interrupção letiva.

Na 8.ª aula, quando questionei os alunos sobre quem tinha feito os TPC recomendados, apenas 3 alunos afirmaram ter tentado resolver alguns exercícios no período de férias e, um tinha utilizado a calculadora para resolver os exercícios, não tinha aplicado a análise de funções através da derivada. As dúvidas foram todas do mesmo tipo. Prendiam-se, principalmente, com a interpretação do enunciado e a aplicação dos procedimentos. A escrita de uma das variáveis em função da outra e, assim, encontrar a função a maximizar ou minimizar era a maior dificuldade encontrada pelos alunos. Um aluno aceitou ir ao quadro, resolver a proposta 18 da página 140, que apresentava a situação de um balão de ar, lançado de um terraço. A função $D(t) = -0{,}02t^3 + t^2 + 7$, representava significava a distância do balão ao solo, t minutos após o lançamento. A primeira questão pedia a altura do solo a que se encontrava o balão e o aluno escreveu:

$$D(t) \Leftrightarrow 0^3 + 0^2 + 7 \ \Leftrightarrow 7$$

Chamei a atenção e perguntei o que estava a fazer, e o aluno respondeu que estava a calcular o valor da função no ponto 0, pois era no momento em que era lançado, a altura dele seria a do terraço. Perguntei de seguida a toda a turma: qual a diferença entre um igual e um equivalente? O aluno, olhou para o caderno e para o quadro, e corrigiu a escrita, colocando sinais de iguais no local dos equivalentes. Eu chamei a atenção, pois se estávamos a "calcular o valor da função no ponto 0" então estavámos a calcular $D(0)$ e não $D(t)$. A segunda questão pedia a altura máxima atingida pelo balão e, como a função neste exercício era dada, o aluno aplicou o procedimento sem problemas, tendo apenas que corrigir a escrita matemática, como na primeira alínea. O próprio aluno, nas restantes alíneas foi corrigindo estes pormenores. A terceira alínea desta proposta, pedia para determinar a taxa média de variação da distância do balão ao solo nos primeiros 20 minutos. No quadro o aluno escreveu $t.m.v. = \frac{D(20)}{20}$. De novo chamei a atenção da turma e perguntei qual era o intervalo onde nos pediam a taxa média de variação. Os alunos responderam "o intervalo [0,20]" e corrigimos a escrita e o cálculo do aluno.

Mais tarde, nesta aula, a professora cooperante teve a necessidade de intervir e abreviar a discussão, que se alongava, sobre a necessidade da utilização do quadro de sinais. Vários alunos tinham a perceção que sabiam "qual o máximo e o mínimo substituindo na função". Um dos alunos resolveu a questão proposta, ou seja, encontrar o máximo/mínimo da função, mas sem recorrer ao quadro de sinais. A estratégia escolhida foi a de derivar a função que encontrou e igualar a zero. Como obteve dois valores, foi calcular a imagem, pela função inicial, de cada um e o maior valor assim obtido corrensponderia ao máximo, e o menor ao mínimo. Tentei explicar que não era suficiente pois teria de existir variação no comportamento da função, para que se pudesse concluir sobre os extremos e apresentei como contra-exemplo a função cúbica. Esbocei o gráfico desta função e perguntei se a função tinha agum extremo, ao que os alunos responderam que não. Perguntei como era a sua variação e os alunos responderam "é crescente!"

Eu completei “é sempre crescente, em todo o seu domínio!” De seguida perguntei qual era a sua derivada e os alunos responderam “$3x^2$”, e desenhei um esboço do seu gráfico. Eu alertei para o facto de ter um zero no ponto $x = 0$ e questionei os alunos se este seria assim um extremo para a função cúbica ao que os alunos não responderam. Então referi que olhando para o sinal da derivada não existe mudança de sinal, e por isso era necessário sempre fazer o estudo da variação da função para perceber se o ponto encontrado era máximo ou mínimo ou, até, nenhuma das hipóteses. Os alunos embora parecessem um pouco confusos e pouco convencidos, concordaram que a função cúbica não tinha extremos, e que portanto o facto de a função derivada ter um zero não significa que esse será extremo da função de partida.

Na 9.ª aula, os alunos foram ao quadro resolver os exercícios propostos e as minhas intervenções foram no sentido de questionar ou corrigir alguns pormenores do ponto de vista formal. Esta aula funcionou com os alunos trabalhando autonomamente enquanto eu e a professora cooperante íamos circulando e esclarecendo dúvidas. Um aluno aceitou ir ao quadro resolver a proposta 23 da página 141 do manual. Esta proposta pedia para determinar as dimensões de uma vidraça de modo que o custo de guarnição fosse mínimo. A vidraça era retangular com $10m^2$ de área. Seria guarnecida por um friso em que o metro linear custava 2€ , para a guarnição horizontal, e 5€, para a guarnição vertical. Este aluno começou por indicar que a área seria dada por $10 = 2x \times 5y$, sendo x e y as dimensões horizontal e vertical, respetivamente, da vidraça. No mesmo instante o aluno repara no esquema e corrige $10 = x \times y$, e disse que o custo seria dado pela expressão $2x \times 5y$. Então eu questionei se, quando ia ao bar da escola comprar um croissant (que custava 1,5€) e um sumo (que custava 3€), o que ele pagaria seria $1{,}5 \times 3$. O aluno respondeu que não e encontrou a expressão que daria o custo, escrevendo $f(x) = 4x + 10y$. Vendo que não conseguia avançar para a etapa seguinte na resolução do problema, Perguntei ao aluno para que nos servia a condição $10 = x \times y$. O aluno parecia baralhado e eu perguntei, referindo-me à condição anterior, “Qual é o problema desta função?” Ao que o aluno respondeu “tem duas incógnitas… Vamos usar isto [referindo-se à condição $10 = x \times y$] para escrever y às custas de x”. De seguida o aluno simplificou a função com uma variável apenas e encontrou o custo mínimo sem mais dificuldades.

Um problema de optimização: Tarefa “Qual é o triângulo de maior área?”

Esta foi a última intervenção relativa ao projeto.

Decidi utilizar outra das tarefas dos materiais da DGIDC, por serem tarefas de natureza diferente e para que os alunos tivessem contacto com uma tarefa de investigação (Anexo 7).

A aula iniciou com mais de 15 minutos de atraso uma vez que, nesta semana, houve uma alteração de salas, devido a um problema físico de uma aluna. A falta de informação desta alteração junto da turma provocou o desencontro dos alunos em relação à sala.

Distribui a tarefa pelos alunos e indiquei, simultaneamente, que dispunham de 15 minutos para começarem a exploração. Não esperava que resolvessem a tarefa em 15 minutos, mas que descobrissem algumas das relações e que testassem algumas hipóteses. Tal como habitual, um dos alunos leu em voz alta o enunciado da tarefa e questionei a turma sobre a compreensão da mesma e se sabiam qual era o triângulo que deveriam considerar. A turma respondeu afirmativamente, chegando ao caso de alguns alunos exemplificarem com a folha qual dos triângulos era. Reforçei a existência de 15 minutos para iniciarem a tarefa. Um dos alunos acabou por dizer, em volta alta: “ ‘*Stôra*’, o triângulo não é a parte a sombreada, pois não”. Eu voltei a exemplificar com a folha, indicando qual seria o triângulo que deveriam considerar.

Conforme tinha previsto, a maioria dos alunos manejou a folha facultado com o enunciado, dobrando-a e alguns alunos começaram a fazer medições. Ao fim de 5 minutos, comecei a circular entre os alunos, perguntando se estavam a conseguir chegar a alguma conclusão, o que tinham descoberto e como estavam a pensar. Um par de alunas (J e A) estava com dificuldades, como se pode ver no diálogo transcrito seguidamente:

J.: Não estamos a perceber nada!
P.:O que é que nos pedem?

A.: O triângulo de maior área. Temos x e y. Supostamente temos de usar as derivadas….
P.: Então temos que conseguir relacionar x e y.
A.: Pois…mas como?
P.: Pensem, como são os triângulos que estamos a considerar?

Depois deste questionamento, fui ter com outro par que descobrira como variavam os valores de x e y mas não conseguiram relacioná-los com a medida da folha de papel. Outro aluno tentava utilizar a semelhança de triângulos, comparando o triângulo T e o que sobrava da dobragem.

Cerca de 20 minutos depois do início da aula, interrompi o trabalho dos alunos para explorar algumas das estratégias que estavam a ser utilizadas. Explorámos a folha e as medidas possíveis para os 3 lados do triângulo. Uma vez que duas das alunas tinham testado valores através da medição, explorei essa estratégia. No entanto, apenas tinham testado 2 valores diferentes e tiraram as suas conclusões apenas com base nestes dois valores. Alertei os alunos para o facto de que essa estratégia era útil mas apenas encontraríamos o triângulo de maior área se testássemos todos os valores possíveis para x e y. Estas duas alunas fizeram as suas tentativas com a folha na vertical, em vez de estar na horizontal, como os restantes alunos. Outro par de alunos utilizou as medidas 2x4. Não aproveitei esta situação, embora não a tenha desvalorizado, para uma maior exploração de poderem trabalhar com valores diferentes, porque as medidas não eram fornecidas no enunciado da tarefa. Esta atitude fez com que induzisse toda a turma a trabalhar com os mesmos valores, em vez de aproveitar o potencial de uma tarefa de investigação.

Depois de algumas questões que colocava enquanto manejava a folha de papel de forma que todos os alunos pudessem ver, um dos alunos descobriu que a soma de um dos catetos com a hipotenusa do triângulo teria de dar a largura da folha. Toda a turma concordou que o teorema de Pitágoras seria útil para relacionar os dois catetos e dei mais 5 minutos para encontrarem a expressão que nos daria a área de qualquer triângulo.

Como os alunos desta turma têm algumas dificuldades em termos de manipulação algébrica, o trabalho autónomo provocou o aparecimento de dúvidas nos casos notáveis e na sua aplicação. Assim, acabei despendendo mais tempo para que conseguissem concluir a tarefa.

Faltavam 20 minutos para terminar a aula quando pedi a um aluno que resolvesse o exercício no quadro. Este recusou e foi outra aluna no seu lugar. Esta decisão comprometeu o relatório que cada aluno deveria fazer no fim da investigação, que me esqueci de referir ao início. No entanto foi uma decisão que tomei na altura por duas grandes razões. Primeiro porque já tinha viciado a investigação ao induzir os alunos a utilizarem todos as mesmas medidas e, depois, porque senti a necessidade de dar aos alunos uma resolução correta, com o procedimento completo.

Métodos e procedimentos de recolha de dados

Sendo este um trabalho de cariz investigativo, a recolha de dados e os instrumentos escolhidos para o efeito são de extrema importância para a validação do estudo e das conclusões que dele surgiram. Desta forma, a escolha dos instrumentos e os métodos de recolha de dados foram ponderados e adequados, não só ao objetivo do estudo, como à própria turma, alvo da intervenção letiva e ainda a outros fatores externos considerados importantes. Assim sendo, num primeiro momento recolhi informação junto do Diretor de Turma e do dossier de turma com o objetivo de tentar conhecer melhor os alunos e a turma em questão. Foi solicitado aos alunos, no último dia de aulas do 1.º período letivo, que preenchessem um questionário (ficha de aluno – Anexo 9) cujas informações foram úteis para a caracterização dos alunos. No início do 2.º período letivo foi também enviado aos encarregados de educação, através dos alunos, a autorização para recolha dos dados. Desta forma, recolhi informação sobre os respetivos contextos de vida, gostos e hábitos pessoais dos vários alunos.

A recolha de dados, feita para este estudo, foi maioritariamente qualitativa, sendo constituída por:

(i) recolha documental das produções escritas dos alunos;

(ii) observação do trabalho dos alunos produzido em sala de aula, registada em pequenas memórias descritivas;

(iii) entrevistas individuais, semi-estruturadas, realizadas a seis alunos;

(iv) registos das aulas lecionadas assistidas, recolhidos junto dos orientadores e da professora cooperante.

As produções escritas dos alunos que recolhi foram as referentes às tarefas propostas em sala de aula, às resoluções das tarefas realizadas no quadro em sala de aula e que foram fotografadas, às produções escritas nos elementos de avaliação e às informações recolhidas nos momentos da entrevista. Em complemento às minhas memórias descritivas foram também recolhidos os registos diários dos alunos durante toda a intervenção letiva. A recolha dos TPC's foi equacionada num primeiro momento mas não foi concretizada por risco de ser informação enviesada. Além disso, não temos registos do seu desenvolvimento desde o início do ano letivo. Em contrapartida, no decorrer das aulas, pude acompanhar o trabalho dos alunos, observar as estratégias que iam escolhendo e as dificuldades com que se foram deparando. São, estas, fontes de informação bastante úteis sobre o modo como os alunos organizam o raciocínio e estruturam as suas respostas. A informação recolhida por meio das produções escritas, nos dois elementos de avaliação, ambas realizadas durante o 3.º período letivo, aquando da conclusão da unidade, foi importante para perceber qual o nível de sucesso do ensino-aprendizagem desta unidade. Esta informação foi útil para alcançar quais os conteúdos que foram apreendidos pelos alunos e se os conseguiram mobilizar na resolução das tarefas propostas.

Apesar de toda a turma ser alvo de atenção durante a intervenção letiva, este trabalho consiste num estudo de caso. Deste modo, foi prevista a análise mais pormenorizada das produções e da evolução de 3 pares de alunos. A escolha dos pares ocorreu com parâmetros diversificados. Foram escolhidos em função tanto da atitude em aula, com particular atenção à de Matemática, como no desempenho individual e participação nas aulas. Esta escolha tornou-se uma tarefa ingrata uma vez que os alunos mudavam com alguma frequência de lugar, quer por vontade própria, quer pela falta de comparência dos alunos, ou, em última análise, como consequência do seu próprio comportamento em sala de aula. A entrevista individual possibilitou-me colmatar esta situação. Pela própria natureza da entrevista semi-estruturada (Anexo 10) permitiu-me uma compreensão mais profunda de como os alunos utilizam a função derivada, como desenvolvem os seus diferentes significados e quais os conhecimentos que mobilizam na resolução de problemas.

Pelo acima exposto, selecionei alunos que apresentassem dificuldades mas com níveis de desempenho variado. Desta forma, escolhi os dois alunos da turma com melhor desempenho, duas alunas com desempenho mediano e três alunos com desempenho mais fraco. Os alunos escolhidos foram empenhados e participativos durante os vários momentos da aula e com clareza no discurso, tornando assim possível recolher dados suficientes para a elaboração do estudo e comparação das produções escritas. As entrevistas decorram entre dia 30 de Maio e 5 de Junho, tiveram a duração média de 30 minutos e foram dividida em três momentos. Num primeiro momento questionei os alunos sobre os significados ou conceitos que associavam à derivada. De seguida, conforme as respostas dos alunos, passávamos à discussão de um exercício da ficha e outro do exercício do teste, com particular enfâse nas suas produções escritas e dificuldades que os alunos encontraram. Estava previsto um terceiro momento em que os alunos resolveriam uma tarefa extra. Esta tarefa consistia num problema de optimização, mas que não apresentei a todos devido à discussão que se gerou em torno dos restantes exercícios.

Os registos escritos foram uma prática recorrente deste o início do ano letivo, tendo informações de quase a totalidade das aulas. Informações relativas às intervenções da professora cooperante e dos alunos, principalmente quanto ao modo como decorriam os trabalhos em aula, as estratégias e as dificuldades que surgiam mas também registos de questões/ tópicos para reflexão e interpretações da minha parte sobre o decorrer das aulas e a evolução dos alunos. Este tipo de informações revelou-se extremamente útil, tanto como auxiliar para o trabalho investigativo, para a minha própria prática letiva, bem como na elaboração da reflexão constante neste relatório. A grande dificuldade destes registos foi nos momentos da minha intervenção com a turma. A impossibilidade de fazer os registos ao momento, impossibilitou a completude dos mesmos. Para minimizar esta situação, produzi uma síntese no final de cada aula mas a exatidão dos muitos dos contributos orais, tanto dos alunos como meus, perderam-se com a diferença temporal existente. Completei as sínteses, que me foram possíveis elaborar, com as importantes observações que os meus orientadores evidenciaram e com os registos que retiraram nas aulas que assistiram.

Capítulo V

Análise e Reflexão

Este capítulo está dividido em duas partes: a apresentação e análise dos dados e o balanço reflexivo e conclusões do estudo. A primeira parte é dedicada à apresentação e análise das resoluções e contribuições dos alunos, recolhidas durante a intervenção letiva, bem como nas entrevistas. Na segunda parte, apontam-se as conclusões com base na presente análise e apresenta-se uma reflexão pessoal sobre todo o percurso inerente à realização deste trabalho.

Apresentação e Análise de Dados

A presente secção está divida em duas partes: a primeira realça os significados atribuídos pelos alunos à noção de derivada e a segunda parte realça a forma como os alunos utilizam a noção de derivada, com particular destaque às dificuldades manifestadas.

O estudo tem como principal objetivo compreender como os alunos se apropriam e utilizam a noção de derivada de uma função, tendo para o efeito formulado as seguintes questões:

- Qual o significado que os alunos atribuem à função de derivada de uma função?
- Como os alunos utilizam a derivada de uma função na resolução de problemas e quais as principais dificuldades que manifestam?

Para responder a estas questões, a observação do trabalho dos alunos em aula e a análise das suas produções escritas foram um contributo importante. As entrevistas permitiram também recolher informação relativa ao objetivo e questões do estudo, dando-me uma percepção mais individualizada e aprofundada sobre como os alunos se apropriam dos conceitos e procedimentos em causa, como os utilizam e que dificuldades manifestam.

Significados

O principal contributo, para a compreensão dos significados que os alunos desenvolveram, foram as entrevistas. A análise dos significados foi complementada com a observação realizada nas aulas e a interação com os alunos, apoiadas pela análise das suas produções escritas, quer nas aulas, quer durante a entrevista. Da análise realizada, identifiquei os seguintes significados da noção de derivada de uma função, desenvolvidos pelos alunos:

- A derivada como uma nova função, obtida a partir da função dada;
- A derivada como um instrumento para resolver um determinado tipo de problemas;
- A derivada como uma reta tangente num ponto ao gráfico da função.

A fim de perceber quais os significados que os alunos atribuíram ao conceito de derivada de uma função, questionei-os, na entrevista, sobre o que associavam à palavra derivada. Sempre que as respostas apontavam para as regras de derivação ou para procedimentos, questionei-os se geometricamente lhes surgia mais alguma ideia associada à noção de derivada. As respostas foram diversificadas, sendo que a maioria dos alunos não associa nenhum aspeto geométrico a este conceito.

Nenhum dos alunos entrevistados associou a derivada com a sua definição, isto é, como o limite da taxa média de variação na vizinhança de um ponto, quando a sua amplitude tende para zero. Durante as aulas, e após a introdução das regras de derivação, esta definição de derivada num ponto como que foi “esquecida” pelos alunos. Para além disso, nos exercícios trabalhados em aula, a aplicação da definição de derivada num ponto e manipulação algébrica necessária ao cálculo do limite revelou-se sempre uma dificuldade para os alunos. Relativamente a outros conceitos relacionados com a derivada, durante as entrevistas, não houve referências à taxa de variação ou à taxa média de variação.

Verifiquei ainda que os alunos não relacionam a monotonia da função e o sinal da sua derivada de uma forma espontânea. No entanto, ao descreverem o procedimento, implicito no estudo de funções, e ao darem exemplos, com certos tipos de exercícios, nos quais utilizaram a derivada para encontrar o máximo ou o mínimo da função, constatei que a relação pretendida ficou latente nos alunos, como se evidenciará de seguida.

A derivada como uma nova função. Um dos aspetos a salientar, no que se refere aos significados desenvolvidos pelos alunos, é a noção de que, ao derivar, se obtém uma nova função, a partir de uma função dada. No início da entrevista, quando perguntei a uma aluna o que associava à derivada, esta respondeu “Pegando numa função é como fosse uma função modificada, pronto uma nova versão de uma função já dada, é assim que eu penso.” Revelando assim, uma ideia intuitiva sobre esta noção de que derivar dá origem a uma “nova função”.

Respondendo à mesma questão, o aluno J, evidencia o mesmo significado que a colega anterior, mas de uma forma mais “rudimentar”:

> J.: Penso que é algo que deriva de outra coisa...tipo...como é que eu hei-de explicar...
> P.: no contexto matemático....
> J.: Ah....no contexto matemático....
> P.: Vamos pensar no contexto matemático, pensamos em derivada...
> J.: Essa foi a matéria que eu menos percebi.
> P.: Quando ouves a palavra derivada, em termos matemáticos...nada te surge
> J.: Não....sim e não....depois vendo as definições e isso vou percebendo mais ou menos....

Este aluno desenvolveu um significado sobre a noção de derivada suportado pela linguagem corrente, tendo associado ao conceito matemático o significado de senso comum da palavra derivada. No entanto, tem esta ideia intuitiva muito vaga de algo que, como o próprio diz, “deriva de outra coisa”, ou “que se sucede a outra coisa” evidenciando alguma incompreensão com os conceitos trabalhados.

A derivada como um processo para resolver um determinado tipo de problemas. Durante a intervenção letiva, constatei que os alunos tendem a desenvolver uma noção de derivada associada à aplicação do próprio conceito, isto é, encaram a derivada como um instrumento para a resolução de certo tipo de problemas, por exemplo, optimização e análise de funções. Na verdade, ao longo do ano verifiquei que esta situação acontece com frequência e que os alunos tendem a memorizar processos ou procedimentos que envolvem a aplicação dos conceitos em estudo, sem uma compreensão adequada dos mesmos e, às vezes, dos próprios procedimentos. Repare-se nos exemplos da aluna A e do aluno L, quando questionados sobre o significado que atribuem à derivada:

> P.: Quando tu pensas na derivada, qual é a primeira noção… a primeira ideia… a primeira coisa que te surge, que te vem à cabeça?
> A.: Como assim, se for um exercício?
> P.: Sim, quando vês um exercício e lês a palavra derivada, qual é a primeira coisa [em] que pensas?
> A.: Se for já com a função derivada pensaria fazer os zeros e a tabela. Se for com a função inicial, faço a derivada e depois faço os zeros e faço a tabela, e depois acho os valores, depende do que pedir o exercício.
> P.: Então e em termos geométricos? Se pensarmos em termos geométricos, que ideia, que noção é que tu tens sobre a derivada?
> A.: Por exemplo, se tivermos uma função, o gráfico de uma função, por exemplo, se tivermos o valor 2 e quiserem um valor daquele ponto, por exemplo a velocidade média, uma coisa qualquer, faço a derivada no ponto.

Neste caso, a aluna associa a noção de derivada a um instrumento a que recorre para realizar os procedimentos necessários em certo tipo de exercícios (análise de funções). Repare-se para além disso, a conexão com a Física, através da velocidade média, embora um pouco vago pois a aluna identifica-a com a derivada no ponto.

O caso do aluno L que a seguir apresento mostra também este tipo de entendimento da noção de derivada:

> P.: Quando tu pensas na derivada, ou quando vês um exercício que tem a palavrinha derivada, o que é que te vem à ideia, logo?
> L.: O que me vem logo à ideia?
> P.: Sim
> L.:Como por exemplo, se me perguntarem "calcula a derivada disto"?
> P.: Por exemplo.

> L.:Não faço i..... quer dizer, quando perguntam isso faço logo...não penso no que é que aquilo, quer dizer faço logo...como é que eu hei-de explicar...
> P.: Fazes logo a derivada em si.
> L.: Sim...Não fico a pensar o que é que aquilo pode representar... Só por exemplo, aquilo dos máximos e isso, não...aqueles exercícios do calcular a coisa máxima é que eu penso "bem isto é... tá derivado da derivada...." mas quando perguntam assim, calcula a derivada disto não me vem nada [à cabeça]...
> P.: Nem quando pensas na palavra derivada, não te vem mais nada à ideia?...
> L.: Vem só aquilo...Não... só das retas tangentes e isso...mas não me vem muito à cabeça isso.

Neste caso, numa primeira análise, o aluno identifica a derivada com um procedimento, mostra também que lhe atribui um significado geométrico – a associação às "retas tangentes" – ainda que de uma forma vaga e pouco elaborada.

Significado Geométrico. A interpretação geométrica da noção de derivada num ponto, como sendo o declive da reta tangente ao gráfico da função nesse ponto, foi introduzida através da Tarefa 2 (Anexo 4) e trabalhada na 3.ª aula. Pedia-se que os alunos traçassem, em alguns gráficos, as retas secantes em torno de um ponto, usando intervalos contendo um ponto selecionado e concluíssem sobre a existência, ou não, de derivada nesse ponto. Entre os alunos que fizeram esta exploração veja-se as produções de dois, apresentadas na figura 5.1.

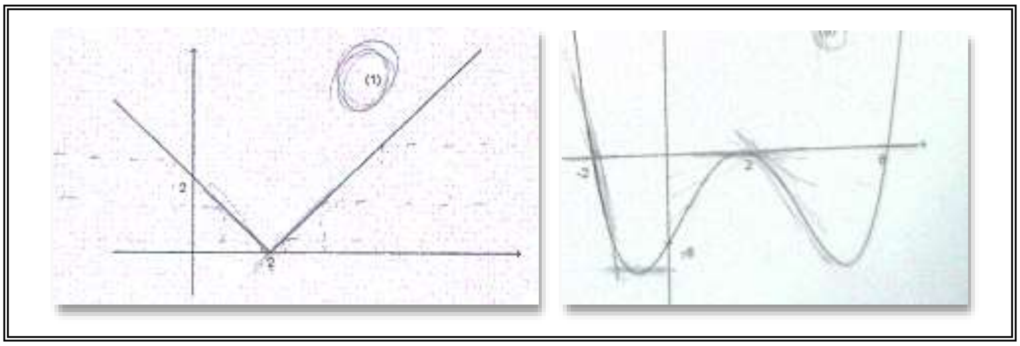


Figura 5.1. Exploração dos alunos – Tarefa 2

A figura da direita mostra bem a exploração que a aluna fez, desenhando as secantes ao longo do gráfico. Também, na figura da esquerda, se pode ver esta exploração – o aluno desenha as secantes sobre cada um dos dois ramos do gráfico da função, que neste caso coincidem com a própria função. No entanto, nestes casos, não é perceptível quais as conclusões obtidas. Os restantes alunos limitaram-se a registar, na folha da tarefa, as conclusões a que chegámos no momento de discussão coletiva e que eu ia registando no quadro. Veja-se os exemplos assinalados na figura seguinte, onde destaco os registos que três alunos produziram a propósito da mesma questão.

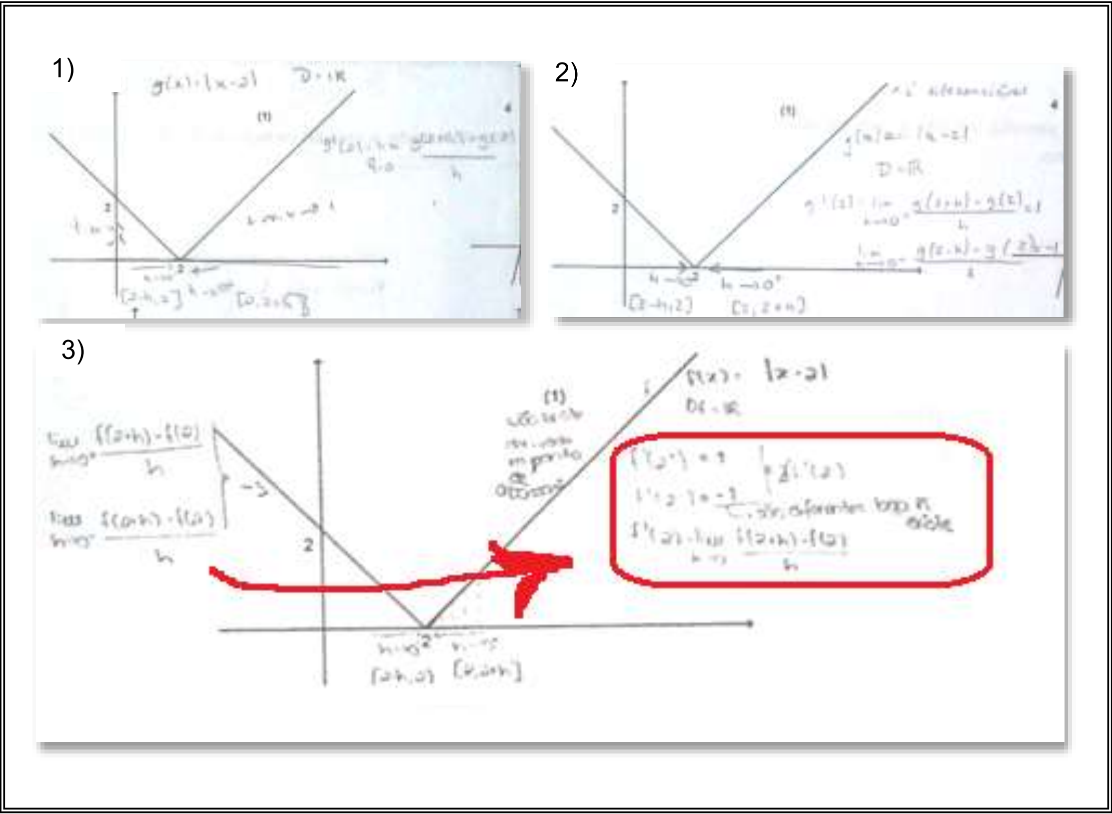


Figura 5.2. Registos dos alunos – Tarefa 2.

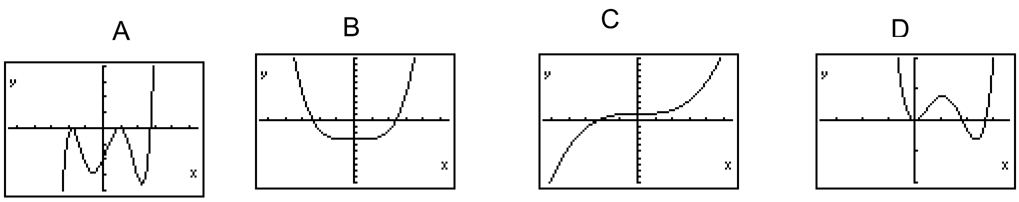
Nesta figura podemos observar que os alunos personalizaram os seus apontamentos. Na imagem 1 da figura 5.2, o aluno escreve t.m.v. (taxa média de variação) enquanto nas restantes figuras os alunos transcreveram do quadro a razão incremental. Na imagem 3 figura 5.2, podemos também observar, conforme está destacado, que a aluna escreve $f'(2^{+})$ e $f'(2^{-})$, estabelecendo a relação com o limite que escreveu à esquerda da figura, embora de uma forma pouco evidente. Já na imagem 2 da figura, o aluno registas os limites laterais, sem distinguir $f'(2^{+})$ e $f'(2^{-})$. Podemos ainda observar que todos os alunos registaram a exploração que realizamos com respeito ao acréscimo h.

Ainda relativamente ao desenvolvimento do significado geométrico da noção de derivada, veja-se o caso do aluno H, quando lhe perguntei o que associava à noção de derivada de uma função, disse que pensava em gráficos – “Professora, eu quando penso em derivada, se calhar penso em gráficos ou qualquer coisa assim.” Solicitei que me explicasse e, enquanto me respondia, o aluno acompanhava o que ia dizendo com gestos da mão que me pareciam aludir às sucessivas retas secantes, traçadas em gráficos de algumas das tarefas propostas para verificar a diferencibilidade da função num ponto. Quando lhe perguntei se estava a pensar na tangente ao gráfico ele concordou. Este aluno colocou uma questão, na 6.ª aula, que gerou uma discussão, com toda a turma, sobre as diferenças gráficas entre a reta tangente à curva e a função derivada.

Para tentar perceber se os alunos teriam evoluído e construído outros significados da função derivada, selecionei o exercício n.º4 da Ficha de Avaliação (Fig. 5.3), para discutir na entrevista. Este exercício pedia a associação entre o gráfico de uma função e o gráfico da sua derivada e permite várias estratégias de resolução. Nas entrevistas, quando questionei os alunos sobre que raciocínio utilizaram na ficha, ou como resolveriam no momento, surgiram três estratégias.

Associe a cada um dos gráficos representados o gráfico da sua função derivada:

Funções:



Funções derivadas:

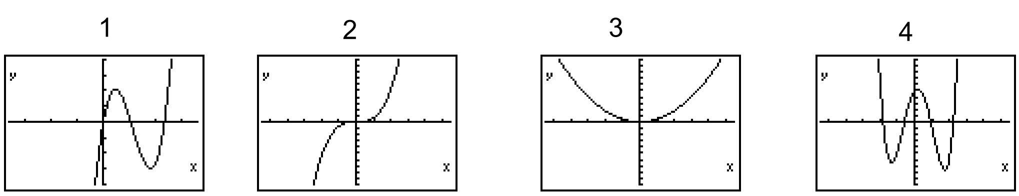


Figura 5.3. Exercício n.º 4 da Ficha de Avaliação de 6 de Maio.

O aluno H evidenciou um tipo de raciocínio, apoiado na análise gráfica da monotonia das funções. Contudo, as associações não são as mais corretas. Ao analisar o gráfico B e escolher o gráfico da derivada que lhe correspondia (Fig. 5.4), este aluno explicou o seu raciocínio, desenhando as retas tangentes ao gráfico da função e dizendo:

> H: eu aqui [neste exercício] comecei logo assim, ir aos mais fáceis [e escolheu o gráfico B] e fazer assim, aquilo das retas tangentes [desenha as retas tangentes] … E aqui [gráfico B] vi que como estava negativo [referindo-se ao declive das retas tangentes para valores negativos de x] tinha de começar aqui deste lado [e apontou para o 2.º quadrante do gráfico 3].

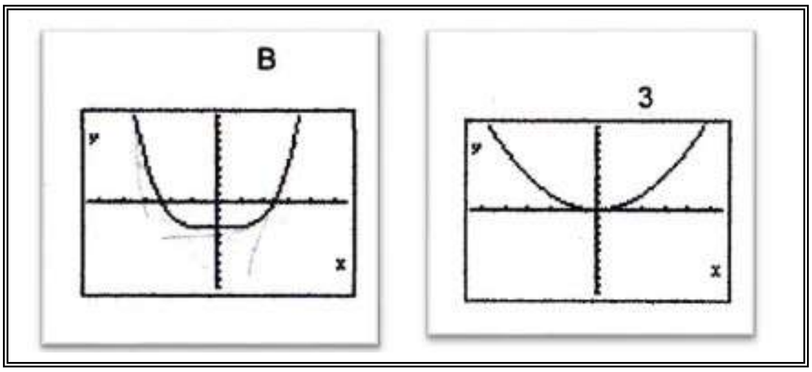


Figura 5.4. Resposta do aluno para o gráfico B do exercício n.º 4 da Ficha de Avaliação.

Como vemos, o aluno indica uma correspondência errada. Este erro terá sido causado porque o aluno identifica a derivada de uma função como sendo a própria reta tangente ao gráfico da função. Ao traçar as retas tangentes, reconhece que o seu declive é negativo. Concluí de seguida que, como as retas são decrescentes, o gráfico correspondente à derivada teria de ser também decrescente, no 2.º quadrante. Uma dificuldade que resulta de um significado que não foi bem assimilado, pois o aluno não associa o sinal do declive ao da derivada.

No mesmo exercício, a aluna M afirmou que tentou identificar cada gráfico com uma expressão analítica conhecida. De seguida derivou algumas das funções. Visualizou o gráfico da função assim obtida e tentou encontrar semelhanças com os gráficos fornecidos (Fig. 5.5).

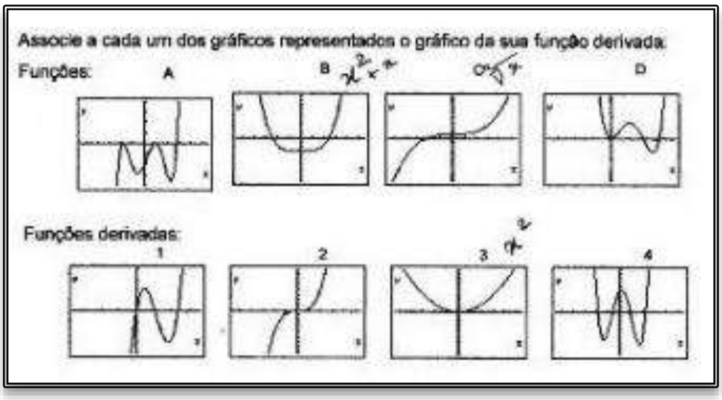


Figura 5.5. Estratégia da aluna M no Exercício n.º 4 da Ficha de Avaliação.

Esta aluna, em várias das tarefas trabalhadas em aula, abordava-as por tentativa e erro ou recorrendo a casos que já conhecia. Este procedimento tornava-se um pouco moroso, e a aluna não dispunha assim de tempo suficiente para testar outras estratégias.

Uma outra aluna também desenvolveu um significado geométrico, ainda que pouco consistente, relativamente à derivada de uma função. Quando questionada sobre que noções relacionava com a derivada, referiu, em primeiro lugar as regras de derivação e, a propósito de outros significados que associava à derivada, respondeu:

> S.: É o declive... da reta tangente ao gráfico, né?... uma coisa assim...
> P.: Tens essa ideia visual?...
> S.: Não [P. da reta tangente...] porque eu não percebi ao início. Sei é tipo um gráfico e depois há tipo... um 'coiso', e depois há uma reta, mas não tenho bem a noção do que é isso.

Este extrato do diálogo demonstra alguma confusão com a interpretação geométrica da derivada de uma função num ponto. Na discussão do mesmo exercício(Fig. 5.3) esta aluna, começa por afirmar que o resolveu ao acaso – "Foi à toa…" – mas depois da minha insistência para explicar o que tinha pensado, respondeu

> S.: Não eu fui porque se estavam 3 zeros, passava a 2…mais ou menos assim…e depois acho que sobrou 1 que…. (…)
> P.:Foste só pelos zeros
> S.: Sim.

Como professora, quis saber o que a aluna tinha retido sobre os conceitos trabalhados. No entanto esta revelou alguma dificuldade em conseguir associar quer o declive da reta tangente, quer a relação entre a monotonia da função e o sinal da sua derivada.

Também a aluna A, quando questionada sobre o mesmo exercício, evidenciou este tipo de raciocínio, através do números de zeros das funções, como se pode observar no seguinte diálogo:

> A.: Supostamente, se nós tivermos uma função ao quadrado, uma função quadrática…
> P.: Sim...
> A.: Supostamente, quando nós fazemos a derivada da função, tiramos o quadrado e tiramos um x, logo tem um zero e a função inicial tem 2.
> P.: Sim…
> A.: Ou seja, quando tinha 3 zeros, a função a seguir tinha 2.
> P.: A derivada tinha 2…
> A.: Exatamente, só que não.....

Esta aluna estabeleceu a relação entre a monotonia da função e o sinal da sua derivada, e encontrou as correspondências corretas. Disse não ter acertado duas correspondências neste exercício na Ficha pois, para uma função com dois zeros existiam dois gráficos com apenas um zero e, no momento, não encontrou outro critério que lhe permitisse decidir.

Destaco ainda a associação que os alunos estabelecem entre a derivada e as regras de derivação, que pode ser observada em alguns diálogos transcritos. Durante as aulas, observei várias vezes que, quando os alunos se referem à derivada ou a derivar, estão também a pensar nas regras de derivação. Para os alunos, é também a forma de obtenção da “nova função” ou a primeira etapa na resolução dos problemas de optimização ou para a análise de funções. De alguma forma estas regras estão assim latentes no entendimento dos alunos sobre a noção de derivada de uma função remendo também para uma compreensão instrumental deste conceito.

Utilização e dificuldades

A análise da forma como os alunos utilizam a noção de derivada de uma função e das dificuldades manifestadas, têm sobretudo como base as produções escritas, apoiadas pela observação de aulas. Nas entrevistas realizadas, também discuti as dificuldades evidenciadas com os alunos, em particular na Ficha e Teste de Avaliação (ver Anexo 10) e, no caso dos alunos que não se recordarem ou não terem utilizado uma estratégia no teste, perguntei como resolveriam no momento. A utilização que os alunos fizeram da derivada, está associado ao significado instrumental que desenvolveram como já foi evidenciado no ponto anterior.

Esta seção está organizada segundo os exercícios dos elementos de avaliação, discutidos na estrevista, evidenciando as diferentes estratégias que surgiram e as dificuldades manifestadas pelos alunos, complementada com exemplos que ocorreram nas aulas.

Uma dificuldade no cálculo da taxa média de variação foi determinar os intervalos de tempo adequados. Durante a intervenção letiva, na resolução da 3.ª alínea da proposta 18 da página 140 do manual[5] ,que pedia para determinar a taxa média de variação da distância do balão ao solo nos primeiros 20 minutos, o aluno escreveu $t.m.v. = \frac{D(20)}{20}$, não considerando o extremo inferior do intervalo.

O exercício n.º 4 da Ficha de Avaliação (ver Anexo 11), como já referi, foi escolhido para apoiar a compreensão do significado geométrico da derivada da função num ponto, por parte dos alunos. Permitiu também perceber como os alunos utlizam a derivada, recorrendo à sua interpretação geométrica, e as dificuldades que manifestam.

Uma estratégia que testei com este exercício, foi tentar que os alunos realizassem um raciocínio em “sentido contrário”. Isto é, na maioria dos casos os alunos optaram por analisar o gráfico da função e depois encontrar o gráfico da derivada que lhe correspondia, era necessário pensar na relação: monotonia da função versus sinal da derivada. Na aula, os alunos estavam acostumados a determinar, primeiro, o sinal da derivada e de seguida concluir sobre a monotonia da função. Como no enunciado do exercício se pede para proceder inversamente – relacionar os gráficos das funções com os das suas derivadas – resolvi aproveitar as entrevistas para perceber se isto seria uma dificuldade. Sugeri aos alunos, que pensassem como estavam habituados

[5] Um balão de ar é lançado de um terraço. A função $D(t) = -0{,}02t^3 + t^2 + 7$, representa a distância do balão ao solo, t minutos após o lançamento.

(analisar primeiro o gráfico da derivada e depois o da função) e na verdade, eles assim estabeleceram a correspondência correta entre os gráficos.

O aluno L, ao analisar este exercício, afirmou que no teste não encontrou nenhuma estratégia, mas durante a entrevista desenvolveu um raciocínio correto, e encontrou a correspondência pedida, comparando os gráficos das derivadas com o das funções. Quando terminou, exclamou – "Hey!...era tão simples…." O aluno afirmou que teve dificuldade com o exercício por ser "diferente" ou por "nunca ter resolvido nada parecido antes" e quando quando se depara com exercícios que "novos" bloqueia. Este aluno contou-me, na entrevista, que refazia os exercícios que não tinha resolvido durante a realização do teste, no próprio dia em casa, mas que no caso deste exercício em particular, não tinha conseguido encontrar nenhuma estratégia.

Encontrei, em alguns alunos, a dificuldade em articular a utilização que faziam da derivada de uma função com os seus significados. Como exemplo, é o caso da aluna S, cuja estratégia de resolução no mesmo exercício (n.º4 na Ficha), foi comparar o número de zeros da função com os da sua derivada. Durante a entrevista, discutimos este exercício depois de a aluna resolver um problema onde aplicou o procedimento canónico de análise de uma função, utilizando a sua derivada. Esta aluna, ao focar-se apenas no número de zeros das funções, tendo uma intuição acertada, era insuficiente para decidir sobre as correspondências pedidas. Além disso, estava a fazer a associação apenas entre o número de zeros de ambas as funções e não entre o número de zeros da derivada e o número de extremos da função. Quando pedi que me explicasse como acertou nas quatro correspondências, limitou-se a dizer que "fui pela lógica", e era "uma sortuda".

Durante as entrevistas, tentei também perceber que conceitos os alunos associavam ao "quadro de sinais". Já tinha percebido que os alunos conseguem, a partir do sinal da derivada, determinar a monotonia da função. Esperava perceber se conseguiam, a partir da monotonia da função, determinar o sinal da derivada e, para além disso, estabelecer a conexão entre o número de zeros da derivada e o número de extremos da função. Veja-se o seguinte extrato de um diálogo, com a aluna S, durante a entrevista:

P.: Nós quando fazemos o quadro de sinais, o que é que relacionamos?

S.: Então…relacionamos a derivada com a função em si
P.: O quê da derivada? Qual é a característica da derivada que vamos relacionar? Ou seja, o que é que vamos estudar na derivada?
S.: Zeros

Procurei que a aluna explicitasse outras associações fazia, sem conseguir. Esta aluna mostrou um entendimento deficiente da relação entre a função e a sua derivada, por exemplo, quando lhe perguntei, “quando uma função é decrescente, o que podemos concluir sobre a sua derivada?” ela respondeu “é decrescente”.

Ao longo da intervenção letiva, verifiquei que na resolução de tarefas, eram frequentes dificuldades na interpretação do enunciado e em lidar com conceitos e procedimentos matemáticos já trabalhados. Como exemplo, destaco a participação de um aluno, na 9.ª aula, enquanto resolvia a proposta 23 da página 141 do manual[6] no quadro. Este aluno começou por indicar que a área seria dada por $10 = 2x \times 5y$, sendo x e y as dimensões horizontal e vertical, o que evidencia alguma dificuldade na interpretação do problema, uma vez que confunde a a área e o perímetro. Teve também alguma dificuldade em avançar para a etapa seguinte na resolução do problema, pois tinha um intuição de que precisava “para escrever y às custas de x” mas não sabia qual condição poderia utilizar e com alguma orientação conseguiu encontrar a relação que precisava, não manifestando depois dificuldades na aplicação do procedimento para encontrar o máximo da função pedida.

No exercício n.º3 do Teste de Avaliação (ver Anexo 10) os alunos manifestaram várias dificuldades. Era um exercício de contexto rea envolvendo um jardim retangular, onde os alunos realizavam várias etapas para o resolver, e esperando-se que encontrassem a expressão pedida e, depois, o valor máximo da função. Na 2.ª etapa, é dada a função com uma questão do tipo “Mostra que…” e este tipo de questões foram identificadas, por alguns alunos, como sendo difíceis. De facto, desde o início do ano letivo, os alunos apresentaram muitas dificuldades com exercícios cujo enunciado começava com “Mostre que”. Com o avançar do ano, foram melhorando este

[6] Esta proposta pedia para determinar as dimensões de uma vidraça de modo que o custo de guarnição fosse mínimo. A vidraça era retangular com $10m^2$ de área. Seria guarnecida por um friso em que o metro linear custava 2€ , para a guarnição horizontal, e 5€, para a guarnição vertical.

aspeto, contudo nos elementos de avaliação a maioria dos alunos não teve sucesso neste tipo de questões. Também nas entrevistas, a propósito da etapa “mostre que”, alguns alunos identificaram dificuldades em~~que~~ “ter de encontrar” uma função específica, dizendo por exemplo, “o problema foi achar chegar aqui a esta função”.

Neste exercício, a função que representava a área do jardim era dada, em função de x (dimensão de um lado do retângulo, em metros), por

$$a(x) = 1748 - 4x - \frac{10404}{x}.$$

Os alunos analisaram a expressão termo a termo e não pensaram na função como um todo. Ou seja, como a área da zona envolvente era $1734\ m^2$, os alunos identificaram que a primeira parcela seria decorrente desta área. Tentaram desta forma encontrar alguma relação com os restantes termos e construir a função pedida, ou encontrar a estratégia para a obter, relacionando-os com as informações do enunciado.

No teste, a maioria alunos não realizaram a etapa do “Mostre que”. Contudo, alguns utilizaram a função facultada na 2.ª etapa do enunciado para resolver a etapa seguinte de maximização, onde a aplicação da regra de derivação para a função racional $y = \frac{a}{x}, a \in \mathbb{R}$ revelou-se uma dificuldade para os alunos, como podemos verificar na figura seguinte (Fig. 5.6).

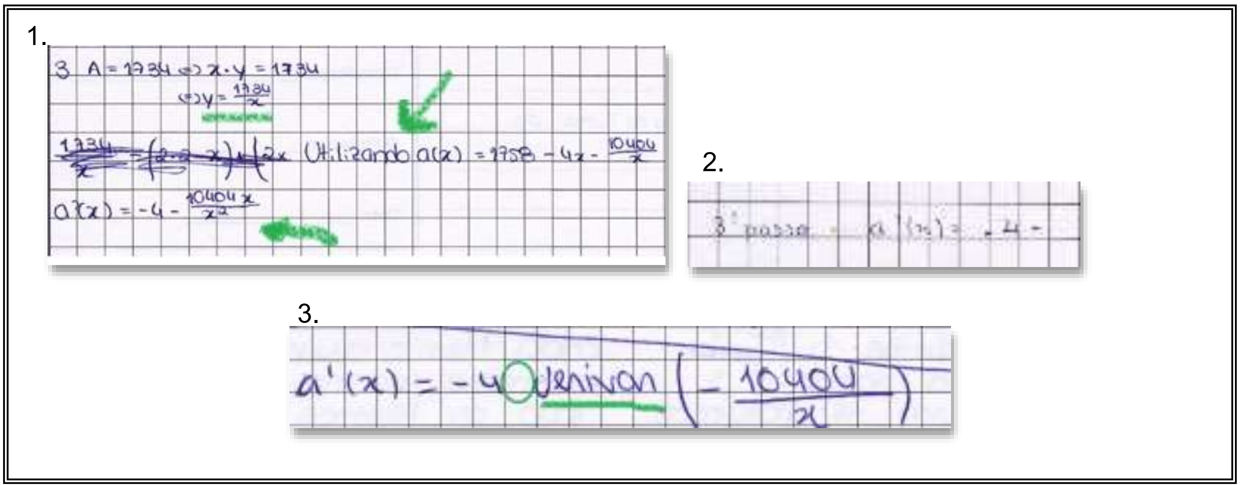


Figura 5.6. Tentativas de alunos – derivação da função(Exercício n. 3 do Teste)

Repare-se, na ilustração 1, da figura 5.6, em que a aluna realiza corretamente o primeiro passo pedido no enunciado, relacionando as dimensões do retângulo maior com a área dada. Não conseguindo chegar à expressão pedida (o que está riscado na imagem), a aluna deriva incorretamente a função fornecida no enunciado e de seguida abandona o exercício. De facto, indica uma expressão para a derivada da função que não está correta e, na entrevista, disse que teve dúvidas com a derivação do termo $\frac{10404}{x}$, e que por essa razão decidiu não continuar. Na ilustração 3, evidencia-se um caso em que o aluno deixa a indicação para "derivar" o termo $-\frac{10404}{x}$, mostrando que sabe que precisa derivar – derivou o termo independente e o termo de grau 1 – no entanto, não sabia como o fazer em relação a este termo.

Ainda relativamente ao exercício do Teste, um aluno, na etapa do "Mostre que", tentou encontrar a área pedida, subtraindo da área total dada a área de um quadrado de lado $2x$ (Fig. 5.7) e não prosseguiu com a resolução do exercício.

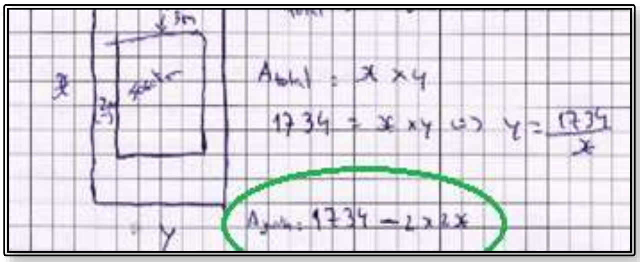


Figura 5.7. Resolução do exercício do teste.

Num exercício semelhante na Ficha de Avaliação (Anexo 11) este aluno resolveu a questão de maximização de uma função, com recurso à calculadora gráfica, estratégia que utilizava recorrentemente, o que não podia fazer no Teste pois era pedido explicitamente que a questão fosse resolvida sem recurso à calculadora gráfica. Em ambos os casos, não conseguiu deduzir a expressão pedida.

Repare-se agora no exemplo da figura 5.8, sobre o mesmo exercício (n.º 3 do Teste).

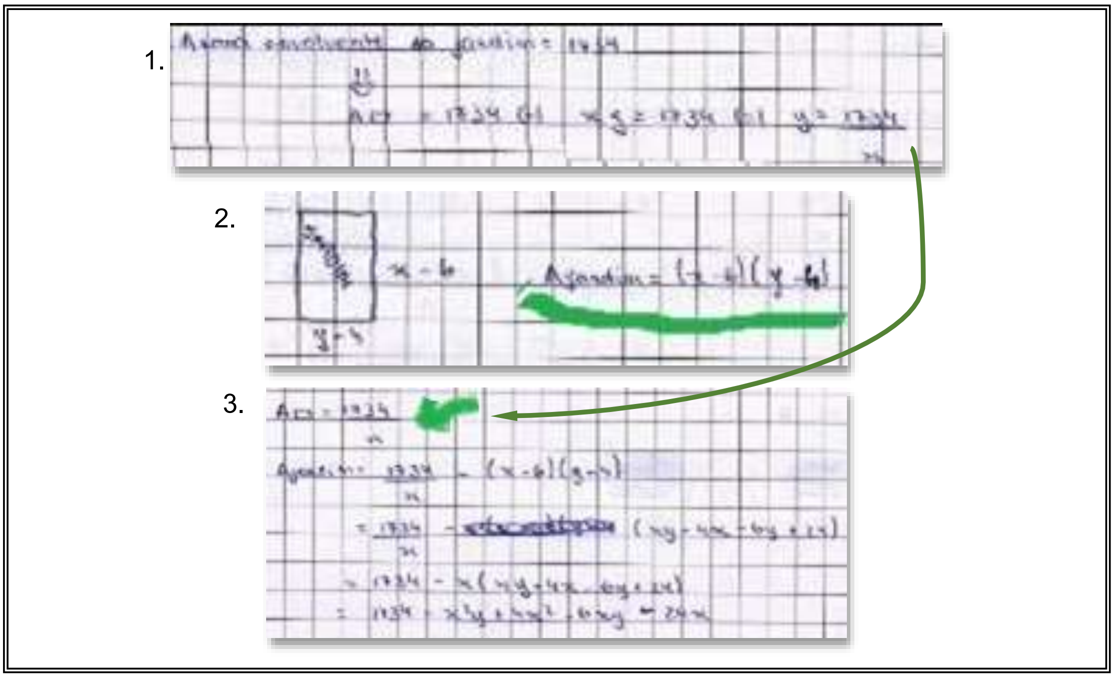


Figura 5.8. Resolução da aluna – Exercício do teste

A aluna, começa por realizar a primeira etapa do enunciado e identifica a área que é pedida, conforme destacado na ilustração 1 e 2 da figura 5.8, respetivamente. Neste processo, perdeu o significado das variáveis x e y, igualou a área do retângulo ao lado y (conforme assinalado na ilustração 3, Fig. 5.8), de seguida iguala a área do jardim ao valor do lado y subtraído da primeira expressão algébrica (encontrada na ilustração 2).

Durante a entrevista, ao ser questionada sobre o sucedido, a aluna respondeu que não teve tempo para passar à questão seguinte pois "baralhou-se" com os cálculos e "perdeu muito tempo". Quando solicitei que me explicasse o seu raciocínio e porque razão tinha duas expressões para a área do jardim, respondeu "eu pensei que a área do jardim seria, tipo, a área de tudo menos a suposta área do jardim que eu disse que era(…)" (indicando a expressão na ilustração 2, Fig.5.8). Perguntei se o fator que escreveu $\left(\frac{1734}{x}\right)$ não era o y, dado pela condição da 1.ª etapa, a aluna percebe como o resolver e, ela própria, ao ver a sua resolução reagiu dizendo, "Pois era para substituir ali, né….Ah!...que estupidez!" (a aluna refere-se à substituição de y por $\frac{1734}{x}$ na expressão da área indicada na ilustração 2 da figura 5.8).

Num outro caso (Fig. 5.9), uma aluna identifica a área do jardim com a área de um retângulo mas depois resolve o exercício como se o jardim fosse quadrangular.

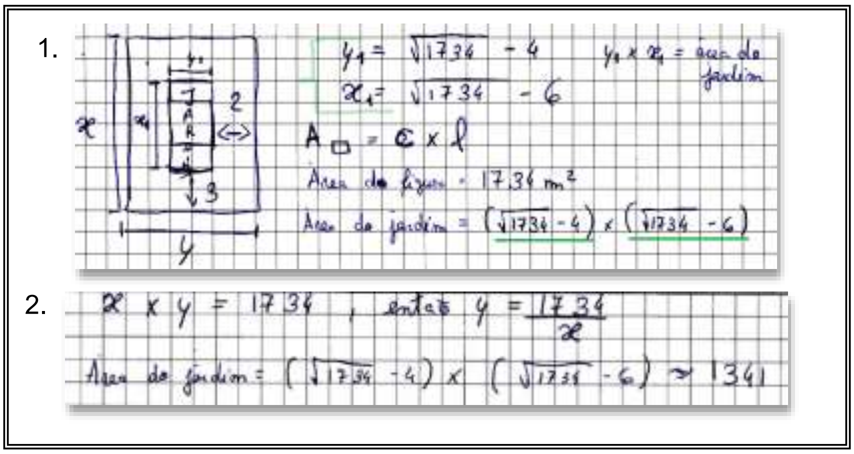


Figura 5.9. Resolução do exercício do teste

Repare-se que a aluna identifica corretamente o comprimento do lado do jardim como sendo inferior ao comprimento do retângulo maior em 4 unidades (e inferior em 6, na largura). No entanto particularizou a dimensão dos lados do retângulo maior, calculando a raiz quadrada do valor da área total. De seguida, a aluna resolve a primeira etapa indicada no enunciado, (ilustração 2, Fig. 5.9), no entanto, não a usa para deduzir a expressão pedida, considerando, com os cálculos que fez, que determinou um valor aproximado para a área do jardim. Abandonou este exercício, deixando algum espaço na folha de teste. Depois de resolver a segunda questão, que pedia uma resolução gráfica da condição $a(x) \geq 1200$, a aluna optou por, derivar a função que representava a área do jardim e estava facultada no enunciado. Igualou a derivada a zero, resolvendo a equação de seguida (Fig. 5.10).

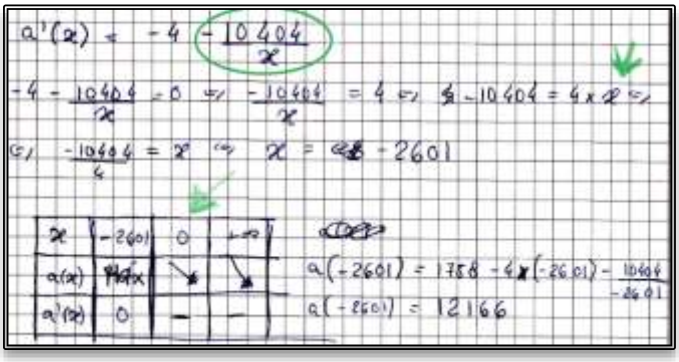


Figura 5.10. Segunda abordagem ao exercício do Teste

A primeira dificuldade encontrada nesta segunda abordagem, prende-se com a aplicação da regra de derivação para a função de proporcionalidade inversa, conforme eu destaquei na figura 5.10. De seguida, a aluna evidencia conhecer o procedimento que deveria seguir, uma vez que determina, embora incorretamente, a derivada da função, encontra os seus zeros e constroí o quadro de sinais. Apresenta também algumas fragilidades, nomeadamente, e como realçado na figura 5.10, a aluna não tem em consideração as restrições de domínio ao resolver a equação com frações racionais e ignora as restrições do contexto do problema – maximizar uma área – considerando, no quadro de sinais, como solução admissível ao problema, um valor negativo para a medida do comprimento (largura). Desta forma, não revela também espírito crítico na análise dos resultados obtidos.

Relativamente ainda ao exercício n.º 3 do Teste, veja-se os exemplos de alunos que escreveram um dos possíveis raciocínios para obter a expressão pedida mas não concluíram o exercício, como podemos verificar nas imagens seguintes (Fig. 5.11). Estes alunos, conseguiram interpretar o enunciado do exercício, contudo não progrediram com a simplificação algébrica.

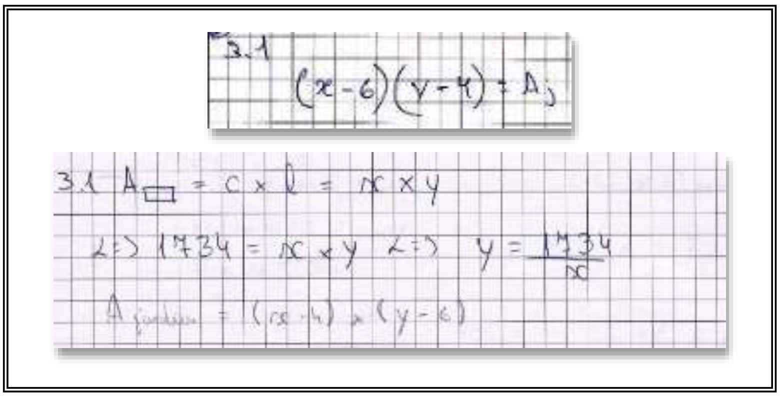


Figura 5.11. Tentativas, de dois alunos, de encontrar expressão para a área do jardim do exercício do teste.

Repare-se, na primeira imagem, o aluno não concretiza a 1ª etapa do exercício e indica a "fórmula" para a expressão que dá a área do jardim, evidenciando que compreende a relação entre o comprimento e a largura dos dois retângulos – área envolvente e jardim. Na segunda figura, o aluno realiza a primeira etapa, isto é, evidencia a relação entre o comprimento e a largura da área envolvente. Deixou, escrito a lápis, a expressão para obter a área do jardim e não evoluiu na resolução do exercício.

Na entrevista, quando questionei o aluno H sobre a sua resolução no teste (Fig. 5.11, 2.ª imagem), este afirmou que tentou "juntar a área do jardim grande e depois tentar fazer menos área do jardim pequeno", no entanto isto não consta da folha de teste. Solicitei então que resolvesse o exercício e o aluno escolheu o processo que a figura 5.12 mostra.

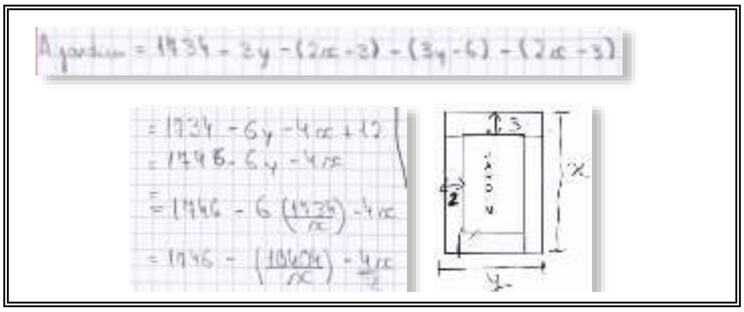


Figura 5.12. Estratégia de resolução alternativa para determinar a área do jardim.

Como podemos observar, este aluno optou por subtrair, da área da zona envolvente (retângulo maior), as áreas dos vários retângulos, que o aluno destacou na figura 5.12, que separam a o retângulo maior e o jardim. Depois de encontrar a expressão que dá a área, este aluno sugeriu "dar um valor a x", estratégia que o aluno sugeriu várias vezes nas aulas. Em relação à questão da maximização, o aluno não respondeu no teste e, na entrevista, não encontrou nenhuma estratégia.

Veja-se, na figura 5.13, a produção de um aluno que, usando um raciocínio semelhante ao do aluno anterior, encontrou uma expressão para a área do jardim, durante o teste. Na simplificação, o aluno não aplicou corretamente a propriedade distributiva e não detetou o erro que cometeu.

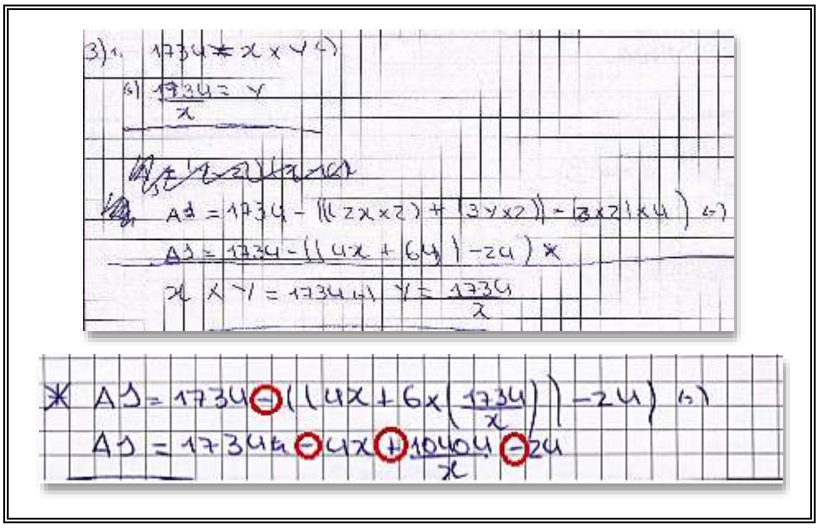


Figura 5.13. Resolução do aluno – exercício do teste

Observo uma organização própria, ou seja, este aluno separa as etapas com traços e repete a primeira etapa, quando vai fazer a substituição na expressão encontrada. Este mesmo aluno, no Grupo II da Ficha de Avaliação (Anexo 11), cometeu também algumas incorreções na aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, como se pode observar na figura 5.14.

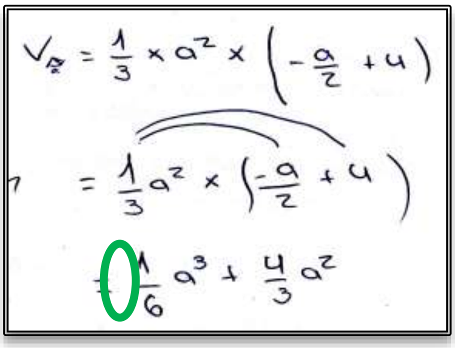


Figura 5.14. Dificuldades com as “regras dos sinais”

A manipulação algébrica é assim uma dificuldade manifestada pelos alunos na aprendizagem matemática de vários conceitos, em particular, os casos notáveis e as regras de prioridades das operações. A noção de derivada de uma função inclui alguma manipulação, necessária ao cálculo do limite, que os alunos também evidenciaram como uma dificuldade ao longo da intervenção letiva.

Ainda relativamente ao exercício n.º3 do Teste, repare-se agora no caso da aluna M, que encontra uma estratégia e determina a expressão da área corretamente (Fig. 5.15)

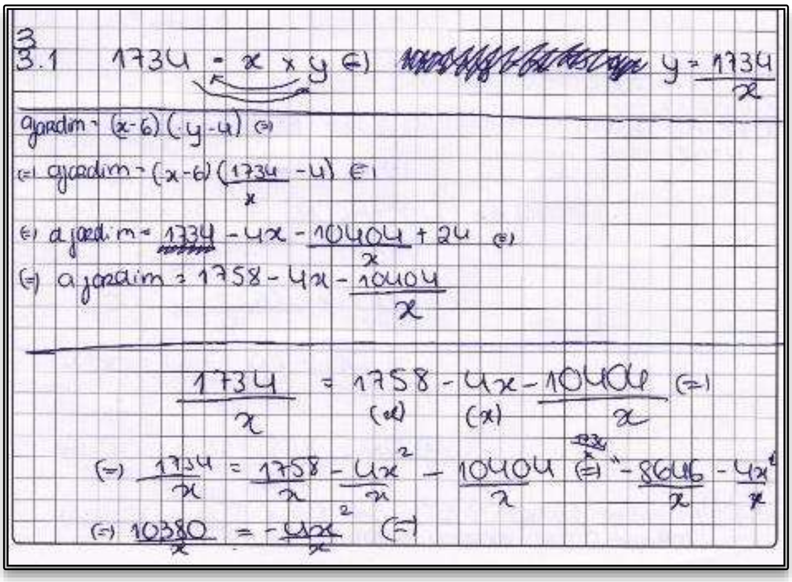


Figura 5.15. Resolução da aluna – exercício 3 do Teste.

Neste caso, num segundo momento, esta aluna decidiu igualar a área do jardim à expressão que representa um dos lados do retângulo total, à semelhança de outro exemplo já apresentado. Esta foi a única aluna que encontrou a expressão analítica pedida. Questionada sobre que estratégia seguira para concluir o 3.º passo, aluna diz ter pensado que precisava "encontrar o x" e encontrando-o "substituíamos na área do jardim" obtendo assim ao máximo para a área. A aluna tentou assim no teste, encontrar uma equação que resolvesse o problema, para "meter tudo em ordem a x e encontrar um valor e depois substituir na expressão".

No Grupo II da Ficha de Avaliação (Anexo 11), o aluno tinha a alternativa de, mesmo não tendo conseguido encontrar a expressão analítica pedida, derivar a função dada no enunciado. Devido ao enunciado pouco explícito, os alunos tinham como opção o recurso à calculadora gráfica. Esta situação colocou-se quando, ao corrigir os exercícios, deparei-me com uma resolução gráfica (Fig. 5.16). Apresentei esta situação à professora cooperante que concordou em aceitar a resolução por não ser explícito, no enunciado, qual o processo que os alunos deveriam utilizar.

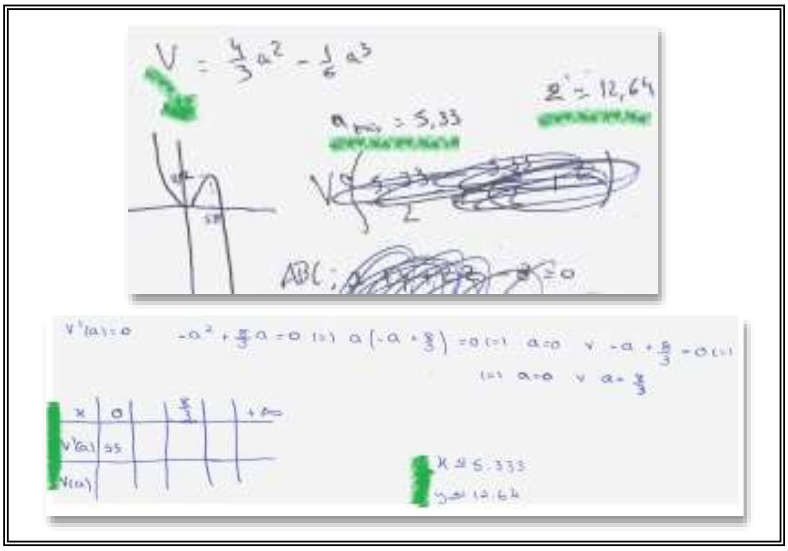


Figura 5.16. Produções dos alunos com recurso à calculadora gráfica.

Repare-se, na primeira figura, o aluno opta pela resolução gráfica e transcreve o gráfico da função a maximizar. Contudo, apresenta uma organização algo confusa, sem uma resposta concreta ao problema apresentado. O gráfico transcrito não está completo pois não coloca a orientação dos eixos nem indica a janela de visualização utilizada, embora identifique o ponto pedido. Na segunda figura, o aluno conseguiu determinar a derivada e foi encontrar os seus zeros. Na fase seguinte, de construção de uma tabela para estudo do sinal derivada com a variação da função, deparou-se com dificuldades, conforme explicou na entrevista. O aluno recorreu à calculadora para tentar perceber como procederia de seguida. Todavia, não concluíu o preenchimento da tabela e indica um valor para x e para y, sem produzir uma resposta ao exercício.

Outro aspeto que se pode observar na segunda imagem da figura 5.16 prende-se com escrita matemática e o significado que os alunos atribuem às variáveis. Veja-se, em pormenor, na figura 5.17 o exemplo anterior, e de outra aluna, que utilizam em simultâneo as letras x e a para designar a mesma variável.

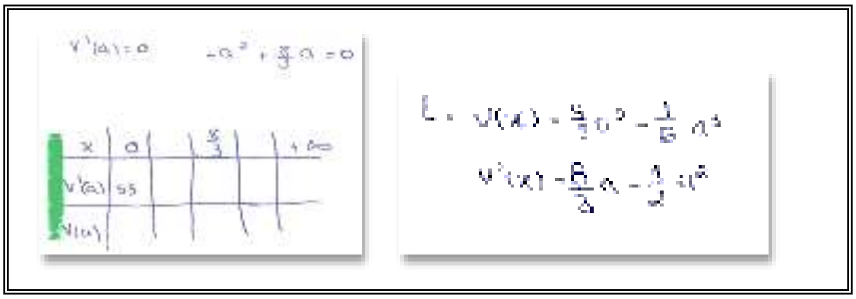
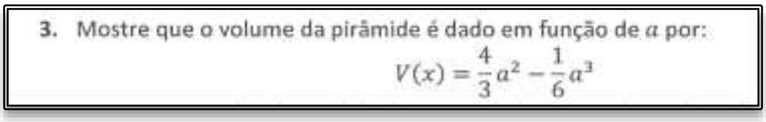


Figura 5.17. Produções dos alunos – exercício da ficha

A figura da esquerda, evidencia a dificuldade do aluno com a escrita formal, indicando a função $V'(a)$ e, no quadro de sinais, indica x como a variável em estudo. Na figura da direita, a aluna utiliza em simultâneo a variável x e a, escrevendo $V'(x) = \frac{8}{3}a - \frac{1}{6}a^2$. Estes alunos demonstram assim não atribuir verdadeiro significado às variáveis.

No Grupo II da Ficha, existia uma gralha no enunciado que nem eu nem a professora cooperante detetamos atempadamente, tal pode se pode ver na figura seguinte:



3. Mostre que o volume da pirâmide é dado em função de a por:

$$V(x) = \frac{4}{3}a^2 - \frac{1}{6}a^3$$

Figura 5.18. Enunciado da 3.ª alínea do gupo II do Teste

No dia da realização da ficha, a primeira turma detetou esse erro, ao ler o enunciado e, ao resolver o exercício novamente a professora cooperante detetou também um erro no enunciado que se prendia com o intervalo da medida da aresta (ver Anexo 11). Os alunos foram chamados à atenção e foi-lhes indicado que corrigissem a gralha, na própria ficha. Todavia, para alguns alunos a escrita continuou a ser um problema, como referi anteriormente e se evidencia também na figura seguinte.

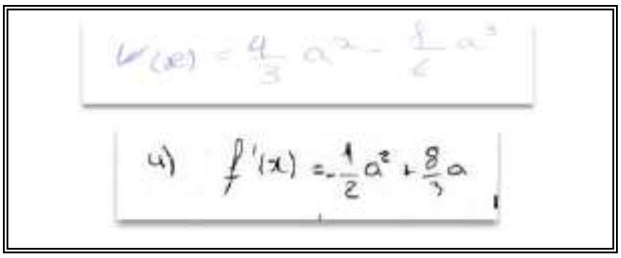


Figura 5.19. Dificuldades com a escrita formal dos alunos

No caso da segunda figura, o aluno utiliza a notação de $f'(x)$ em vez de $V'(a)$, embora tenha aplicado as regras de derivação em função da variável a. No caso da primeira figura, o aluno não corrige o erro, conforme foi indicado mas também não concluiu o exercício. Este aluno em particular, demonstrou, ao longo do ano letivo, muitas dificuldades quer ao nível da compreensão dos conceitos e procedimentos trabalhados em aula, como de conceitos anteriores e na manipulação algébrica e na simbologia matemática.

Durante as aulas, a escrita do limite também constituiu uma dificuldade para os alunos. Na 2.ª aula, enquanto trabalhávamos a noção de derivada de uma função num ponto, um aluno escreveu no quadro: $\lim_{h \to 0} = 1$. Nesta situação, toda a turma foi alertada para a formalidade da escrita matemática, em particular do limite, e corrigimos:

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 1$$

Repare-se, contudo, no caso da aluna que, durante a aula de consolidação (4.ª aula) foi ao quadro resolver um exercício onde se pedia o cálculo, por definição, da derivada de uma função no ponto 1. Esta aluna cometeu algumas incorreções, do ponto de vista formal, que foram corrigidas no quadro e discutidas com toda a turma, no entanto deixou o registo no caderno com as incorreções, como se pode observar na figura 5.20.

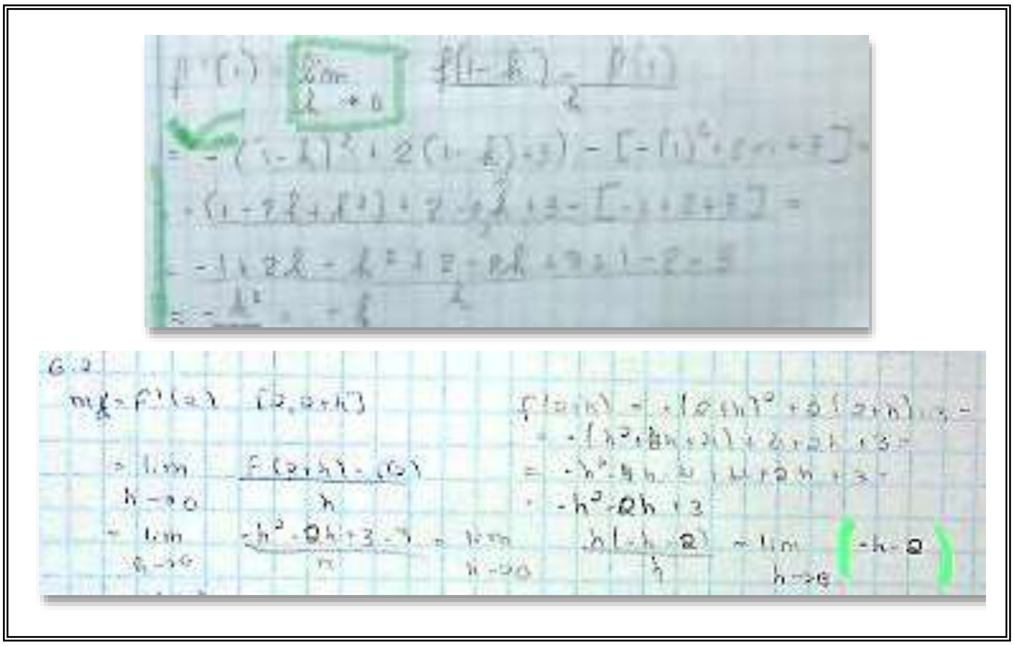


Figura 5.20. Escrita do limite – Foto do caderno diário da aluna.

No primeiro exemplo destacado na figura 5.20. podemos verificar que a aluna enuncia a derivada da função f no ponto $x = 1$, no entanto de seguida continua a escrever o sinal de $=$ mas perde o limite, não concluindo no fim sobre o valor da derivada no ponto pedido. Já no segundo exemplo, apresenta-se uma dificuldade muito comum nos alunos de não indicarem os parêntesis no cálculo do limite, como em outras situações, embora por vezes concluam o cálculo corretamente.

A concluir

Este subcapítulo encerra o trabalho realizado e está dividido em três partes: uma breve síntese do estudo; as principais conclusões, respondendo às questões de base do estudo e, por fim, uma reflexão global e pessoal.

Síntese do Estudo

Este estudo teve como principal objetivo compreender como os alunos se apropriam e utilizam a noção de derivada de uma função, tendo para o efeito formulado as seguintes questões:

- Qual o significado que os alunos atribuem à noção de derivada de uma função?
- Como os alunos utilizam a derivada de uma função na resolução de problemas e quais as principais dificuldades que manifestam?

O estudo foi desenvolvido no âmbito da lecionação da unidade didática "Taxa de Variação e Derivada" numa turma de 11.º ano de escolaridade do curso de ciências socioeconómicas da Escola Secundária José de Afonso de Loures, ao longo de dez aulas de 90 minutos que decorreram no final do 2.º e início do 3.º períodos letivos do ano letivo de 2013/2014. Os dados recolhidos são provenientes de entrevistas, da observação em aula e das produções escritas dos alunos.

Principais conclusões

A análise dos dados foi orientada com base nas questões do estudo e organizada em duas seções: os significados que os alunos atribuem à noção de derivada e a forma como a utilizam, com particular destaque às dificuldades que manifestam. Apresento de seguida as principais conclusões, articulando com o enquadramento teórico.

Qual o significado que os alunos atribuem à função de derivada de uma função?

As questões colocadas no início da entrevista e a discussão dos exercícios, permitem concluir que o significado que os alunos tendem a desenvolver para a derivada de uma função, na maior parte dos casos está relacionado com a sua aplicabilidade num determinado tipo de tarefa (problemas de optimização e análise de funções). Alguns alunos conseguiram desenvolver, paralelamente, um significado geométrico da derivada de uma função num ponto, embora com algumas lacunas na sua compreensão.

No que concerne ao "conceito imagem" (Tall & Vinner, 1981) desenvolvido pelos alunos, identifiquei significados da derivada de uma função como uma nova função obtida a partir da função dada, como um instrumento associado a um processo de resolução de um certo tipo de problemas, como a reta tangente ao gráfico da função e ainda associado às regras de derivação. O "conceito definição" (Tall & Vinner, 1981) da derivada de uma função, desenvolvido pelos alunos, na maior parte dos casos manifesta-se por definições que os próprios alunos elaboram, em que incorporam a linguagem corrente e não assimilam a definição matemática do conceito em estudo. Como "fatores potenciais de conflito" (Tall & Vinner, 1981) destaco: as fragilidades dos alunos ao nível da manipulação algébrica; a tradução da linguagem matemática para a linguagem corrente e reciprocamente; a compreensão de outros objetos matemáticos como a função afim, a leitura e interpretação da representação gráfica de uma função.

Assim, concluindo, os alunos desenvolveram um entendimento sobretudo instrumental da derivada de uma função e tendem a desenvolver apenas um significado para este conceito matemático. Além disso, quando se introduzem novos elementos a propósito do conceito em estudo, ao alunos como por exemplo as regras de derivação, os alunos como que “se esquecem” das definições e conceitos abordados anteriormente, como a definição de derivada num ponto.

<u>Como os alunos utilizam a derivada de uma função na resolução de problemas e quais as principais dificuldades que manifestam?</u> As produções escritas dos alunos, apoiadas pela observação ao longo do ano, permitem concluir que os alunos utilizam a derivada de uma função como uma ferramenta para resolver certo tipo de exercícios e problemas (por exemplo, análise de funções, problemas de optimização), revelando, como referi no ponto anterior, uma compreensão instrumental da noção de derivada de uma função. Isto é, desenvolveram uma utilização relacionada principalmente com a aplicabilidade deste conceito. Os alunos evidenciaram, conhecer o procedimento associado ao estudo de variação de uma função, através do sinal da sua derivada; evidenciando também, na maior parte dos casos, uma utilização deste conceito centrada nas regras e procedimentos.

Em relação às regras de derivação, os alunos revelaram ter facilidade na aplicação das regras de derivação de funções polinomiais, embora com alguma dificuldade em relação à função racional.

Na resolução de problemas de optimização e análise de funções, é apresentado um problema aos alunos onde se pede para encontrar a função a maximizar (ou minimizar). As dificuldades surgem, em primeiro lugar, na interpretação de enunciados. A tradução da linguagem corrente para a matemática, e vice-versa, é também uma dificuldade para os alunos, demonstrada em vários momentos ao longo do ano letivo e associada à interpretação. Por exemplo, os alunos, em geral, quando se deparam com um problema de optimização, compreendem que têm de encontrar uma condição que relaciona as duas variáveis em estudo, mas têm dificuldade em exprimi-la matematicamente e em prosseguir a resolução. Relacionado com o aspeto anterior, outra dificuldade que destaco é a escrita matemática e o formalismo que esta envolve, também evidenciada pelos alunos em vários momentos.

A abstração, a visualização e a interpretação geométricas revelaram-se também aspetos onde os alunos manifestaram dificuldades, principalmente no desenvolvimento de um significado geométrico para a derivada de uma função, manifestando muitas vezes dificuldades em explicar o raciocínio que desenvolviam ou os conceitos matemáticos em jogo. Ainda relativamente a este respeito, as percepções erradas que os alunos desenvolveram foram uma dificuldade para a compreensão do significado geométrico da derivada pelos alunos.

A manipulação algébrica, nomeadamente no que envolvia os casos notáveis da multiplicação e as regras de prioridades das operações, é outro campo onde os alunos revelaram fragilidades no estudo da derivada de uma função, em várias situações: durante as aulas, nos momentos de avaliação e nas entrevistas. Além disso, os alunos muitas vezes chegam a resultados erróneos e não estão dotados de espírito crítico, para avaliar se a solução encontrada é, ou não, adequada ao problema em si.

Reflexão pessoal

Nestes últimos dois anos a aprendizagem foi uma constante importante na minha formação como professora. Senti, acima de tudo, uma oportunidade para continuar a aprender. O contacto com os alunos permitiu-me relembrar o que é ser aluno, aspeto que saliento como importante para a nossa atividade profissional. Desta forma, tive a oportunidade de "aprender a aprender" com os alunos, de evoluir e de melhorar as minhas práticas. Acima de tudo, aprendi a refletir sobre as minhas ações. A agir nos momentos "improvisados" e a dar muita importância às "imagens" que ajudamos a construir.

A capacidade de "improviso" permite-nos estar recetivos às contribuições dos alunos e incorporá-las na aula. Neste ponto julgo que preciso de melhorar, não dispersando com as contribuições dos alunos. Deixar-me levar pelas dúvidas dos alunos; com as dificuldades que os alunos revelam em determinados momentos da aula – e que não estão diretamente relacionadas com os conceitos novos em discussão; são situações que comprometeram algumas das minhas aulas, mas são decisões que um professor, por vezes, tem de tomar no momento. Como exemplo, realço as dificuldades sentidas pelos alunos com os casos notáveis, com a propriedade distributiva da multiplicação e as prioridades das operações matemáticas. Estas situações preocuparam-me pois, durante as minhas intervenções no 1.º período letivo, ocupámos partes de várias aulas para trabalhar estes assuntos com os alunos e esperava que, em parte, estas dificuldades estivessem superadas. Durante a intervenção letiva, eu decidi comprometer um objetivo, que seria reforçado mais tarde, para poder consolidar aspetos desta natureza, também importantes na aquisição dos conceitos matemáticos. As aulas, devem assim ser gerida forma a não perder o seu foco principal ou conseguir relacionar, integrar, no conceito em análise e toda a turma, em vez de e divagar com o aluno que coloca a dúvida. Enquanto professora, espero melhorar nestes aspetos e contribuir para aprendizagens significativas nos alunos, minorando os fatores de conflito, e, orientar em vez de induzir.

A planificação das aulas é outro aspeto que destaco como uma aprendizagem, tendo sido um forte apoio ao longo do trabalho desempenhado. Em particular, ajudou-me a concentrar no propósito do ensino antevendo vários cenários possíveis de ação e decisões. Assim, para além disso, foi de grande interesse na reflexão pessoal sobre a minha prática letiva.

Refletindo sobre as aulas lecionadas, consigo identificar alguns pontos que não correram tão bem, embora mesmo nas aulas que "correram bem" encontre sempre aspetos a melhorar. A gestão do tempo é um ponto a melhorar, transversal a todas as aulas da intervenção letiva. Com o tempo as aulas foram fluindo melhor, eu sentia-me cada vez mais segura e fui estabelecendo as conexões que pretendia. Algumas explorações foram bem conseguidas e os alunos realizaram aprendizagens e desenvolveram alguns dos significados pretendidos.

No que concerne à linguagem e formalismo, em várias situações me deparei, ou fui alertada no final das aulas, para algumas incorreções na minha linguagem. Mesmo durante as entrevistas, existiram momentos em que eu acabava por, em detrimento do formalismo matemático, utilizar uma linguagem mais próxima dos alunos.

As entrevistas foram, para mim um desafio. Embora tenha, em certos momentos, induzido os alunos a corresponder a expetativas que tinha para as respostas, sinto que fui melhorando ao longo de cada entrevista. Toda a experiência era nova, tanto para mim como para os alunos, e foi uma aprendizagem. Por outro lado, as entrevistas foram um contributo valioso para compreender o que os alunos pensam (ou como pensam) e as dificuldades que manifestam, ajudando-me a perceber também, porque encontram certo tipo de dificuldades.

Os momentos de reflexão com os professores e a partilha, foram também um importante contributo para a minha aprendizagem e crescimento. Contribuíram também para que pudesse evoluir enquanto professora, pois deram a oportunidade de corrigir com os alunos certos aspetos onde não estive correta, alertar para a sua importância e para aspetos técnicos da escrita formal da matemática, enquanto reforçava o conceito. Neste processo, fiquei preocupada com as incorreções cometidas ao longo das aulas, com o tipo ou qualidade de aprendizagens que estava a proporcionar aos alunos. No entanto, o meu objetivo principal era que os alunos começassem por compreender intuitivamente as noções e conceitos em estudo. Paralelamente, apresentava estratégias e formas diferentes de pensar. Um aspeto positivo que destaco é a minha evolução nos registos no quadro, que foram melhorando ao longo do ano letivo. Um outro aspeto com que me deparei, foi a dificuldade na gestão adequado da utilização do equipamento de projeção, nomeadamente por me obrigar por constantes deslocações entre o quadro (local de projeção) e a mesa do professor, local onde estava o computador e manipulava as aplicações projetadas.

Os alunos evidenciaram também dificuldades em certo tipo de tarefas, quando estas eram de natureza mais aberta, moneadamente na sua exploração ou em testar estratégias diferentes, sem que isto estivesse claramente pedido. Também eu evidenciei dificuldades no meu papel de mediação na resolução deste tipo de tarefas pelos alunos, pela inexperiência e hábitos antigos. Muitas vezes tendia a conduzir os alunos para um determinado tipo de estratégia de resolução, tirando assim menos partido dos benefícios das tarefas propostas. Assim sendo, a apropriação dos significados da derivada de uma função ficou aquém do esperado, por exemplo, no que diz respeito à sua interpretação geométrica e à sua relação com a variação da função dada. Além disso, julgo que o percurso académico dos alunos, com pouco contacto com tarefas de natureza aberta, foi também um fator que contribuiu para a falta de sucesso de certas opções metodológicas.

Em jeito de conclusão, considero que foi, sem dúvida alguma, uma experiência enriquecedora, tanto ao nível humano, como ao nível profissional. As experiências vividas contribuíram para fazer de mim uma pessoa melhor, mais confiante, segura e amável. Na minha pratica letiva futura, espero melhorar estes aspetos e a mediação nas tarefas de natureza mais aberta, contribuindo desta forma para aprendizagens mais significativas nos alunos.

Referências

Almiro, J. (2004). Materiais manipuláveis e tecnologia na aula de Matemática. [On line: http://elearning.ul.pt/file.php/3176/Joao-Almiro-2005_V2.pdf]

Abrantes, P. (1985). Planificação no ensino da matemática. Documento não publicado, texto de apoio à disciplina de Metodologia da Matemática.

Canavarro, A.P.(2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. In *Educação e Matemática* #115 (pp. 11-17). Lisboa.

Carvalho e Silva, J. (coord.), Fonseca, M.G., Martins, A.A., Fonseca, C.M.C. da, Lopes, I.M.C. (2001). Matemática A 10.º Ano, 11.ºAno e 12.ºAno, Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas. ME/Departamento de Ensino Secundário

Dias, S. & Santos, L. (s.d.). *Avaliação reguladora, feedback escrito, conceitos matemáticos. Um Triângulo de Difícil Construção.* Lisboa.

Domingos, A.M.D. (2003). Compreensão de conceitos matemáticos avançados – a matemática no início do superior. Lisboa: Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia.

Figueira, M.S.R. (2001). Textos de Matemática: Fundamentos de Análise Infinitésimal (3.ª Ed.).(pp. 84-142). Faculdade de Ciências – Departamento de Matemática. Universidade de Lisboa.

Gafanhoto, A. P. & Canavarro, A. P. (2008). Representações Múltiplas de Funções em Ambiente com Geogebra: um estudo sobre o seu uso por alunos de 9º ano. Projecto Práticas Professional dos Professores de Matemática, 2008. Disponível em: <http://www.ie.ul.pt/pls/portal/docs/1/334274.PDF>

Gafanhoto, A. P., & Canavarro, A. P. (2012). A adaptação das tarefas matemáticas: como promover o uso de múltiplas representações. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. M. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds.), Práticas de ensino da Matemática: Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática, 121-134. [Disponível em http://www.rdpc.uevora.pt/handle/10174/8311].

Loureiro, V.I.D. (2012). Função Derivada: uma abordagem didática no Ensino Secundário. Aveiro: Universidade de Aveiro. Acedido a 29 Outubro 2013 em http://ria.ua.pt/bitstream/10773/10352/1/dissertaÃ§Ã£o.pdf.

Ponte, J.P. (1992) The history of the concept of function and some educational implications. In *The Mathematics Educator*, No 3. Parts of it were translated from the article "O conceito de função no currículo de Matemática", published in the *Journal Educação e Matemática* (of the Portuguese Association of Teachers of Mathematics), No. 15, pp. 3-9, 1990 [on line: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos-por-temas.htm]

Ponte, J.P.(2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ralston, A. (1999a). Fim à aritmética de papel e lápis. *Educação e Matemática, n.º 58* (pp. 13-15). Porto

Ralston, A. (1999b). Fim à aritmética de papel e lápis. *Educação e Matemática, n.º 59* (pp. 36-41). Porto

Sanchez, L. (2003). 12.º Ano – Introdução ao estudo das funções reais de variável real. FCUL – DM, Reanimat. Fundação Calouste Gulbenkian.

Stein, M. & Smith, M. (1998). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: Da investigação à prática. Mathematics Teaching in the Middle School, 3(4), Tradução pp. 1-14. Disponível em: http://elearning.ul.pt/course/view.php?id=3176.

Tall, D. & Vinner, S.(1981). Concept Image and Concept Definition. In Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. In *Educational Studies in Mathematics*, #12, pp. 151–169. Acedido a 19 Dezembro 2013 em http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1981a-concept-image.pdf

Tall, D. (2001) Natural and Formal Infinities. Acedido a 19 Dezembro 2013 em http://wrap.warwick.ac.uk/476/1/WRAP_Tall_dot2001p-esm-infinity.pdf

Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., Nápoles,S.M. (1998), Funções: Matemática 11º ano de Escolaridade. ME/Departamento de Ensino Secundário [On line: www.dgidc.min-edu.pt/.../data/.../**Brochuras**.../**funcoes**11_completo.pdf]

Anexos

Anexo 1 – Planificação de Unidade

Agrupamento de Escolas n.º2 de Loures

Escola Secundária de José Afonso, Loures

Matemática A - 11.º Ano – 2º Período

Planificação da Unidade: Taxa de Variação e Derivada

Manual: Novo Espaço 11 – Porto Editora

Ano letivo

2013/2014

Tema II – Introdução ao Cálculo Diferencial				
Data	Tópicos	Conteúdos/ Objetivos	Estratégias/ Metodologias	n.º blocos
17 Março	Taxa de variação: Introdução	Variação de uma função; Taxa média de variação – interpretação geométrica Relação entre a monotonia e a variação de uma função	<u>Tarefa de Introdução</u>: Tarefa 12 (Manual pag. 58) 1. Trabalho autónomo realizado em pares - Questões:1., 2. e 3 (15 min) [Questão 4 – TPC] 2. Discussão coletiva (30 min) com sistematização dos conceitos: Variação de uma função Velocidade média vs velocidade instantânea 3. Trabalho autónomo realizado em pares Exercício 35 (pag. 60) e Tarefa Exploratória de extensão (20 min) 4. Discussão coletiva com exploração:(20 min) da Relação entre a monotonia e a variação de uma função; da interpretação geométrica da Taxa média de variação. <u>Extensão</u>: exercício 38, pag. 61 <u>TPC</u>: exercício 33, 34 e 36 do manual	1 (90 min)

Data	Tópicos	Conteúdos/ Objetivos	Estratégias/ Metodologias	n.º blocos
18 Março	Função derivada	Derivada de uma função num ponto Interpretação geométrica Declive da reta tangente à curva num ponto	1. Trabalho autónomo realizado em pares – Tarefa 1 (15 min) 2. Discussão coletiva com sistematização dos conceitos:(20 min) Derivada de uma função num ponto como limite da taxa de variação Interpretação geométrica 3. Trabalho autónomo realizado em pares – Ex. 40 e 41 (pg. 63) (15 min) 4. Discussão coletiva:(20 min) Declive da reta tangente ao gráfico num ponto 5. Exploração da Relação entre o sinal da derivada e do declive da reta tangente. Ex. 44 (pg, 66)(20 min)	1
20 Março		Função Derivada: Pontos angulosos	1. Trabalho autónomo realizado em pares – Tarefa 2- Parte I(15 minutos) 2. Discussão coletiva com sistematização dos conceitos:(20 min) Continuidade e Derivação (Ex. da função módulo) Pontos angulosos Derivadas de algumas funções 3. Trabalho autónomo realizado em pares – Tarefa 2 - Parte II (15 min) 4. Discussão coletiva:(10 min) Regras de Derivação – dedução e generalização 5. Trabalho autónomo realizado em pares – Tarefa 15 (pg 70) (15 min) 6. Discussão coletiva:(10 min) Interpretação do contexto e aplicações da Derivada	1

Data	Tópicos	Conteúdos/ Objetivos	Estratégias/ Metodologias	n.º blocos
24 Março	Função derivada	Monotonia e extremos relativos.	1. Trabalho autónomo realizado em pares – Tarefa 19 (pg. 82) (20 minutos) 2. Discussão coletiva com sistematização sobre a relação entre a monotonia da função e o sinal da sua derivada:(20 min) 3. Trabalho autónomo realizado em pares – Tarefa 3 (20 min) 4. Discussão coletiva:(20 min) Correção da Tarefa 3 – exemplos vs contra-exemplos	1
25 Março		Problemas de optimização	Exercícios de Consolidação sobre a matéria - Exercícios das páginas azuis do manual	1
27 Março	Avaliação			1
31 Março	Taxa de variação e derivada	Problemas de optimização	Exercícios de Consolidação sobre a matéria - Exercícios das páginas azuis do manual	1
			Total blocos de 90 minutos	7

Anexo 2 – Tarefa 12: “Prova de Esqui”

Plano da 1ª Aula, 17/Março

TAREFA 12 Prova de esqui

Numa pista de esqui, com 700 m de extensão, um esquiador que parte às 9:00 percorre um espaço, após a partida e ao fim de t segundos, que é dado, em metros, pelo seguinte modelo matemático: $E(t) = t^2 + 3t$.

1. Tendo em atenção a informação dada na figura, determina a hora de passagem nas 2.ª e 4.ª bandeiras.

2. Calcula a **rapidez** (em linguagem comum, **velocidade média**) com que o esquiador percorreu a distância entre:

   2.1 a partida e a 2.ª bandeira;
   2.2 a 2.ª bandeira e a 3.ª bandeira;
   2.3 a 2.ª bandeira e a chegada;
   2.4 o ponto de partida e o ponto de chegada.

3. No contexto apresentado, qual é o significado da expressão:

   3.1 $E(10) - E(8)$?
   3.2 $\frac{E(10) - E(8)}{10 - 8}$?
   3.3 $\frac{E(7) - E(0)}{7}$?

4. Qual a **rapidez** (em linguagem comum, **velocidade média**) com que o esquiador se deslocou no intervalo de tempo:

   4.1 $[4\,,\,7]$?
   4.2 $[2\,;\,2{,}5]$?

5. A velocidade do esquiador, num determinado instante, chama-se **velocidade instantânea**. Faz uma estimativa da velocidade instantânea do esquiador no instante $t = 4$, começando por preencher a tabela seguinte (recorre às capacidades da calculadora).

$h \to 0$	Intervalo $[4\,,\,4+h]$	Velocidade média no intervalo $[4\,,\,4+h]$ $\frac{E(4+h)-E(4)}{4+h-4} = \frac{E(4+h)-E(4)}{h} = h + 11$ (m/s)
0,1	$[4\,;\,4{,}1]$	11,1
0,09	...	...
0,08	...	...
0,07	...	...
0,005	...	...
0,001	...	...

<table>
<tr><td colspan="4">Plano de Aula – Matemática A 11º Ano</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Escola Secundária
José Afonso – Loures</td><td colspan="2">Docente: Alexandra Bento
Estagiária: Rute Gil</td><td>Ano Letivo
2013/2014</td></tr>
<tr><td>Turma: 11.º 2E</td><td>Nº Alunos: 20</td><td>Data: 17/Março/2014</td></tr>
</table>

Tema: Introdução ao Cálculo Diferencial I

Conteúdo: Taxa de variação e taxa média de variação de uma função

Objetivos Específicos: Pretende-se que os alunos:

Identifiquem funções como modelos de situações reais

Reconheçam a diferença entre variação e taxa média de variação (t.m.v.) de uma função

Estabeleçam conexões entre:

a monotonia de uma função e a sua t.m.v. num dado intervalo;

a t.m.v. num dado intervalo e o declive da reta secante ao gráfico da função, que passa nos extremos desse intervalo

Capacidades Transversais: Comunicação, linguagem e raciocínio matemático.

- Usar corretamente os símbolos matemáticos, quer na comunicação oral quer na escrita;

- Descobrir relações entre conceitos.

Conhecimentos Prévios:

- Domínio, contradomínio e extremos de uma função
- Funções polinomiais: monotonia e extremos, factorização, sinal e zeros, variação.

Recursos: Calculadora Gráfica e Tarefa 12, página 58 do manual

Desenvolvimento da aula	
Introdução da tarefa	5 min

TAREFA 12 **Prova de esqui**

Numa pista de esqui, com 700 m de extensão, um esquiador que parte às 9:00 percorre um espaço, após a partida e ao fim de t segundos, que é dado, em metros, pelo seguinte modelo matemático: $E(t)=t^2+3t$.

1. Tendo em atenção a informação dada na figura, determina a hora de passagem nas 2.ª e 4.ª bandeiras.

Papel do professor:

Solicitar a um aluno para ler o enunciado

Solicitar a um aluno a resolução da primeira questão

Incentivar a utilização da calculadora gráfica para auxílio na realização dos cálculos (nomeadamente a utilização da tabela)

Trabalho autónomo	
Questões 2.,3.	10 min

2. Calcula a rapidez (em linguagem comum, **velocidade média**) com que o esquiador percorreu a distância entre:
   - 2.1 a partida e a 2.ª bandeira;
   - 2.2 a 2.ª bandeira e a 3.ª bandeira;
   - 2.3 a 2.ª bandeira e a chegada;
   - 2.4 o ponto de partida e o ponto de chegada.

3. No contexto apresentado, qual é o significado da expressão:
   - 3.1 $E(10)-E(8)$?
   - 3.2 $\frac{E(10)-E(8)}{10-8}$?
   - 3.3 $\frac{E(7)-E(0)}{7}$?

Papel do Professor: Monitorizar o trabalho autónomo dos alunos; selecionar os alunos que irão responder a cada questão.

Papel do aluno:

Mobilizar conhecimentos para resolver a Tarefa.

Analisar de forma critica e interpretar, no contexto do problema, os resultados obtidos.

Dificuldades Previstas: Erros de cálculos; conceito e cálculo da velocidade média; Interpretação do contexto; Traduzir matematicamente os resultados obtidos.

Discussão	20min

Objetivo: Interpretar geometricamente a t.m.v.

Papel do Professor: Gerir as intervenções dos alunos e escolher as alíneas que suscitaram mais dificuldades, promovendo a discussão sobre:

Velocidade média vs rapidez; linguagem corrente vs linguagem formal

Papel do aluno: Analisar de forma critica os resultados apresentados e comparar com os que obteve; Participar construtivamente, utilizando linguagem matemática adequada.

Após a discussão sobre as questões 2 e 3 da tarefa, propor aos alunos:

1. Exploração da variação e t.m.v. da função dada nos intervalos $]9,10[$; $]9.5,10[$; $]10,10.5[$ com recurso às tabelas da calculadora gráfica

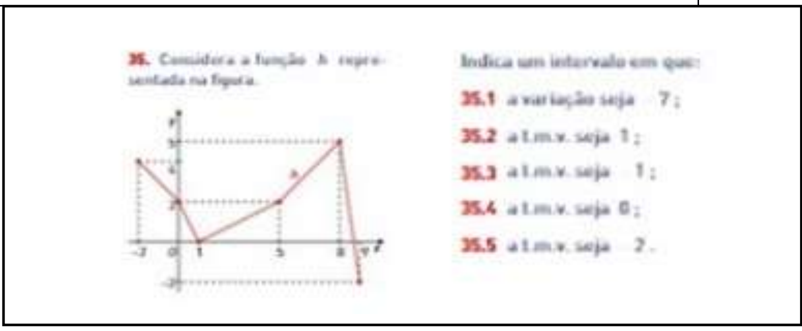
   Possíveis respostas/conclusões: Variação da função é positiva em todo o domínio da função; a função é sempre crescente no contexto do problema; relação entre a monotonia de uma função e a sua t.m.v. num dado intervalo.

2. Exploração da ideia intuitiva de aproximação da função a um determinado valor real(promover conexões com a noção de limite)
3. Exploração: velocidade média vs velocidade instantânea

Dificuldades previstas: Prevê-se a extração de conclusões erradas relativas à relação entre a monotonia da função num intervalo e o sinal da taxa média de variação nesse intervalo.

Solicitar aos alunos o registo das conclusões para retomá-las no segundo momento de discussão.

2.º Momento de aula- Exercício 35 manual (pag 60)	
	2 min



Extensão:

Escreve a expressão analítica da função h do exercício 35

$$h(x)=\begin{cases} -x+2, -2\leq x<0 \\ -2x+2{,}0\leq x<1 \\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}, 1\leq x<5 \\ x-3{,}5\leq x<8 \\ -7x+61{,}8\leq x\leq 9 \end{cases}$$

Compara a expressão analítica de h com os resultados obtidos no exercício 35

O que concluís?

Espera-se que os alunos estabeleçam uma igualdade entre o valor obtido na alínea e o declive da equação da reta que define cada ramo da função:

Alínea	Ramo da função
35.1	Último
35.3	Primeiro
35.4	Quarto
35.5	Segundo

Trabalho autónomo	
Exercício 35	10 min
Extensão	15 min

Papel do Professor: Monitorizar o trabalho autónomo dos alunos, selecionar os alunos que irão responder a cada questão

Papel do aluno: Mobilizar conhecimentos para resolver a tarefa proposta. Analisar de forma critica os resultados obtidos. Comparar e/ou refutar as conclusões obtidas nesta tarefa com as obtidas na tarefa anterior

Dificuldades Previstas: Erros de cálculos; utilização da calculadora

Discussão	20 min

Objetivos: Relação entre a monotonia e a variação de uma função;

Interpretação geométrica da Taxa média de variação de uma função.

Papel do professor: Gerir as intervenções dos alunos e escolher

a as alíneas que suscitaram mais dificuldades b as alíneas onde surgiram diferentes resoluções

Conforme as produções dos alunos, estabelecer a conexão entre a t.m.v de uma função num dado intervalo e o declive da reta secante que passa nos pontos de abcissa que são os extremos do intervalo dado.

Papel do aluno: Analisar de forma critica os resultados apresentados e comparar com os que obteve. Participar construtivamente, utilizando linguagem matemática adequada.

Extensões:

Exercício 33 (pag. 59)

Exercício 38 (pag. 61)

TPC:

Exercícios de margem 33 (preparar para a aula seguinte), 34, 36 manual

Anexo 3 – Tarefa 1 e Plano da 2.ª aula, 18/Março

Agrupamento de Escolas n.º2 de Loures

Escola Secundária de José Afonso, Loures

Ficha de Trabalho Matemática A – 11º ano – Março de 2014

Tarefa 1

Considera a função quadrática, f, dada por: $f(x) = x^2 - x - 2$

a) Constrói um quadro de variação para a função f.

b) Determina a equação reduzida da reta AB, sendo $A(0, f(0))$ e $B(1, f(1))$.

c) Calcula a taxa média de variação de f no intervalo $[0,1]$.

d) Determina a taxa média de variação de f no intervalo $[1, 1+h]$.

e) À medida que h se aproxima de zero, o que acontece à taxa de variação da função f no intervalo $[1, 1+h]$?

Plano de Aula – Matemática A 11º Ano			
Escola Secundária José Afonso – Loures	Docente: Alexandra Bento Estagiária: Rute Gil		Ano Letivo 2013/2014
	Turma:11.º 2E	Nº Alunos:20	18.Março.2014

Tema: Introdução ao Cálculo Diferencial I

Conteúdo: Noção de Derivada de uma função

Objetivos Específicos: Introdução do conceito de derivada de uma função

Conceitos anteriores: taxa de variação média ou instantânea

variação e taxa média de variação (t.m.v.) de uma função num dado intervalo

Pretende-se que os alunos estabeleçam conexões entre:

a t.m.v. num dado intervalo e a derivada de uma função num ponto

a monotonia de uma função e a sua t.m.v./derivada num dado intervalo

a derivada num ponto e o declive da reta tangente ao gráfico da função nesse ponto.

Capacidades Transversais: Comunicação, linguagem e raciocínio matemático.

Usar corretamente os símbolos matemáticos, quer na comunicação oral quer na escrita;

Descobrir relações entre conceitos.

Conhecimentos Prévios:

- domínio, contradomínio, monotonia e extremos de uma função
- conceito de limite

Recursos: Geogebra, Calculadora Gráfica

Recolha de dados: foto do quadro; produções dos alunos

Desenvolvimento da aula	
Introdução da tarefa	10 min

Papel do professor:

Ponto de situação da aula anterior/ “contextualização”

TPC – exercício 33:

- esclarecimento de dúvidas;

- pequena discussão sobre custo médio e interpretação da variação do custo de produção num dado intervalo

- Na aula passada estudámos um modelo matemático, no contexto da velocidade, que é uma grande aplicação das derivadas. Hoje vamos estudar uma função quadrática sem restrições de domínio.

Papel do aluno: Analisar de forma critica os resultados apresentados e comparar com os que obteve. Participar construtivamente, utilizando linguagem matemática adequada.

Trabalho autónomo	
Parte I - Alíneas a), b), c)	10 min

Papel do Professor: Monitorizar o trabalho autónomo dos alunos, selecionar os alunos que irão responder a cada questão

Papel do aluno:

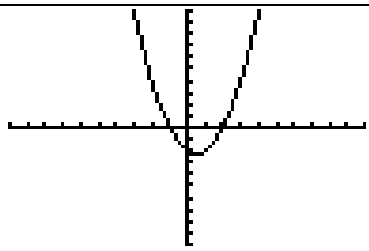
Mobilizar conhecimentos para resolver a Tarefa.

Analisar de forma critica os resultados obtidos.

Dificuldades Previstas: Erros de cálculos; conceito e cálculo da velocidade média; Interpretação do contexto.

Tarefa I – Parte I	Tempo (min)
	2

A expressão analítica da função f representada no gráfico ao lado é dada por $f(x) = x^2 - x - 2$



a) Constrói um quadro de variação para a função f.

Para a resolução desta alínea, os alunos podem recorrer:

- à análise do coeficiente do termo de maior grau;
- ao esboço do gráfico;
- à determinação dos zeros.
- à visualização do gráfico na calculadora

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	Mín	↗

Possíveis dificuldades:

- Determinação dos zeros
- construção do quadro de sinais em vez da tabela de variação

x	$-\infty$	-1		$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0

b) Determina a equação reduzida da reta AB, sendo $A(0, f(0))$ e $B(1, f(1))$. $y = mx + b$ $f(0) = -2 \Rightarrow b = -2$(ordenada na origem) $f(1) = -2$ Logo, $m = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = 0$ Donde $y = -2$ **Exploração**: obtivemos uma reta horizontal. A função f é constante no intervalo $[0,1]$?	5
c) Calcula a taxa média de variação de f no intervalo $[0,1]$. Compara o resultado obtido com a equação encontrada para a reta AB. $t.m.v._{[0,1]} = m = 0$ **Conclusão**: a taxa média de variação num dado intervalo é igual ao declive da reta secante que passe nos pontos cujas abcissas são os extremos do intervalo dado.	2

Discussão	10min
Alínea c)	

Objetivo: Interpretar geometricamente a t.m.v. de uma função num dado intervalo.

Papel do Professor: Projetar um ficheiro geogebra onde se explora a relação entre a t.m.v. de uma função num dado intervalo e o declive da reta secante que passa nos pontos cujas abcissas são os extremos do intervalo dado, promovendo a discussão.

Gerir as intervenções dos alunos por forma a abordar as dificuldades que os alunos encontraram e as diferentes resoluções

Papel do aluno: Analisar de forma critica os resultados apresentados e comparar com os que obteve. Participar construtivamente, utilizando linguagem matemática adequada.

2.º Momento de aula – Trabalho autónomo	
Alínea d) da Tarefa 1	10 min

Objetivo: Interpretar geometricamente a derivada de função.

Papel do Professor: Solicitar a participação dos alunos para resolver d) no quadro enquanto restante turma resolve no caderno

Papel do aluno: Analisar de forma critica os resultados apresentados e comparar com os que obteve. Participar construtivamente, utilizando linguagem matemática adequada.

d) Determina a taxa média de variação de f no intervalo $[1, 1+h]$. $t.m.v._{[1,1+h]} = \frac{f(1+h)-f(1)}{1+h-1}$ $\frac{(1+h)^2-(1+h)-2-(-2)}{h} = \frac{1+2h+h^2-1-h}{h} = \frac{h^2+h}{h} = h+1$

Dificuldades Previstas: Erros de cálculos; manipulação algébrica de casos notáveis; conceito de limite; utilização da calculadora

[Recolha de dados: foto do quadro]

Discussão e sistematização	20 min
alínea e) da Tarefa 1	

Objetivos: relação entre o declive da reta tangente a uma função num ponto e a derivada da função nesse ponto

Papel do professor: Gerir as intervenções dos alunos por forma a abordar as dificuldades que os alunos encontraram e as diferentes resoluções

Projetar um ficheiro Geogebra com a passagem da reta secante à reta tangente num ponto.

Incorporar as contribuições dos alunos para estabelecer a conexão entre a derivada da função num ponto e o declive da reta tangente à função nesse ponto.

Explorar o significado de $t.m.v._{[1,1+h]}$

Papel do aluno: Analisar de forma critica os resultados apresentados. Participar construtivamente, utilizando linguagem matemática adequada.

e) À medida que h se aproxima de zero, o que acontece à taxa de variação da função f no intervalo $[1, 1+h]$?

Estratégias possíveis:

-recorrer a tabela da calculadora

- substituir diretamente na expressão da t.m.v. para explorar valores de h cada vez menores

Sistematização/ Definições:

- Derivada de uma função num ponto enquanto limite da t.m.v.;
- Equação da reta tangente à curva num ponto
- função derivada.

3.º Momento de aula – Trabalho autónomo	
Tarefa 1 – Parte II	15 min

Papel do Professor: Introduzir a tarefa que os alunos deverão realizar.

Monitorizar o trabalho autónomo dos alunos, selecionar os alunos que irão responder a cada questão

Papel do aluno:

Mobilizar conhecimentos para resolver a tarefa proposta.

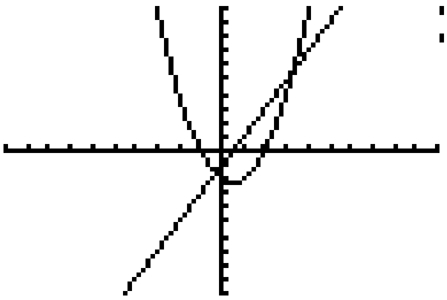
Analisar de forma critica os resultados obtidos.

Relacionar ou refutar as conclusões obtidas com a tarefa anterior

Dificuldades Previstas: Erros de cálculos; utilização da calculadora

Tarefa 1 – Parte II

Na calculadora gráfica, representa no mesmo referencial a função f e a sua derivada através do comando: nDerive(Y1, X, X).



Elabora um quadro de sinal para a derivada da função f e compara com o quadro de variação que construíste em a).

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

Discussão	20 min

Objetivos: Relação entre a monotonia e a variação de uma função;

Interpretação geométrica da Taxa média de variação

Papel do professor: Gerir as intervenções dos alunos e abordar

a) as maiores dificuldades
b) as resoluções diferentes

Explorações possíveis

Declive da reta tangente no ponto de abcissa ½

Solicitar aos alunos para visualizarem o gráfico de funções quadráticas e suas derivadas, variando diferentes parâmetros da função quadrática e tirarem conclusões.

Generalização: derivada de uma função quadrática é uma função afim;

Diferença entre a reta tangente e a função derivada

Papel do aluno: Analisar de forma critica os resultados apresentados e comparar com os que obteve.

Participar construtivamente, utilizando linguagem matemática adequada.

Exercícios de Aplicação/ TPC: 40, 41, 44, Paginas azuis

Agrupamento de Escolas n.º2 de Loures

Escola Secundária de José Afonso, Loures

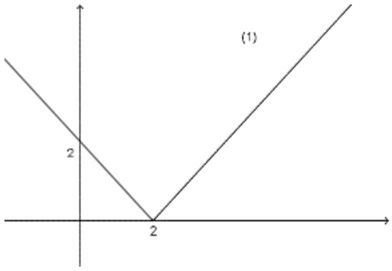
Ficha de Trabalho Matemática A – 11º ano – Março de 2014

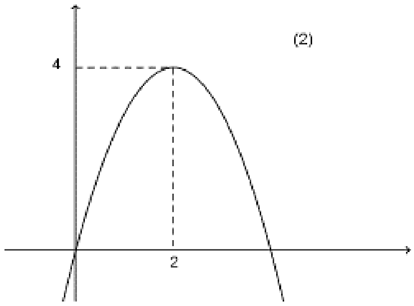
Tarefa 2[7]:

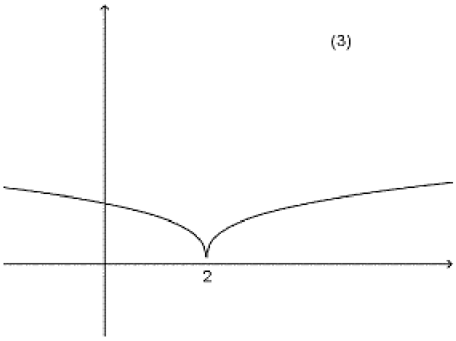
Parte I

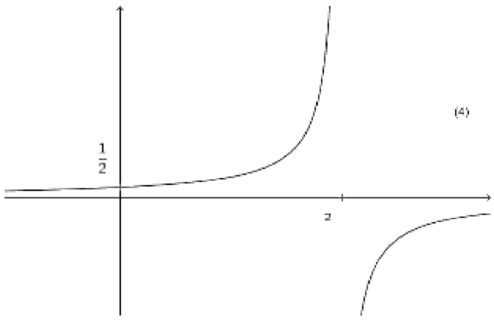
Dizemos que uma função é **diferenciável** num ponto se tiver derivada finita nesse ponto, ou seja, se existir a reta tangente ao gráfico da função nesse ponto e essa reta não for vertical.

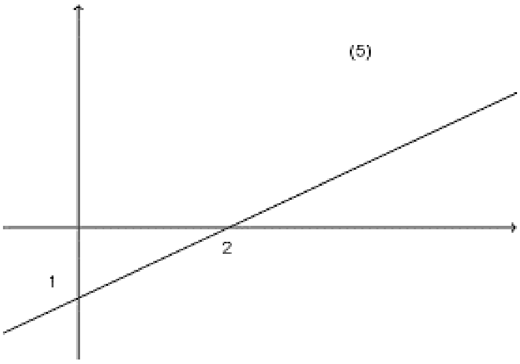
Observa os gráficos representados nas figuras seguintes e indica se as funções representadas são ou não diferenciáveis no ponto de abcissa 2.

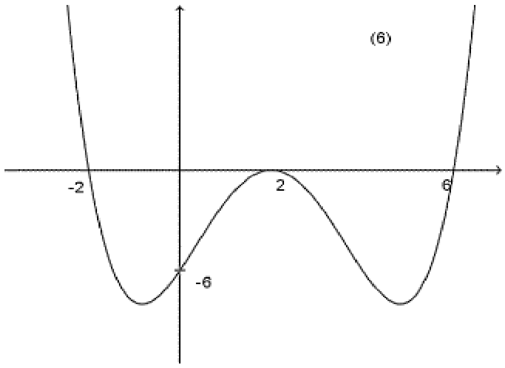












[7] Parte I (3.ª Aula, 18/Março) Parte II (5.ª Aula, 25/Março)

Agrupamento de Escolas n.º2 de Loures

Escola Secundária de José Afonso, Loures

Ficha de Trabalho Matemática A – 11º ano – Março de 2014

Tarefa 2:

Parte II

Considera agora uma função afim $f(x) = mx + p$ e escreve uma expressão que permita calcular a taxa média de variação da função f no intervalo $[a, a + h]$.

Escreve uma expressão que permita calcular a taxa de variação da função f e indica o valor da taxa no intervalo dado.

Plano de Aula – Matemática A 11º Ano			
Escola Secundária José Afonso – Loures	Docente: Alexandra Bento Estagiária: Rute Gil		Ano Letivo 2013/2014
	Turma: 11.º 2E	Nº Alunos:20	20.Março.2014

Tema: Introdução ao Cálculo Diferencial I

Conteúdo: Diferenciabilidade: continuidade e pontos angulosos

Objetivos Específicos:

Analisar gráficos de funções e identificar os pontos onde a derivada não está definida

Deduzir a expressão analítica da derivada de funções afins, quadráticas, racionais e irracionais.

Conceitos anteriores: variação e taxa média de variação (t.m.v.) de uma função num dado intervalo; Derivada de uma função num ponto.

Capacidades Transversais: Comunicação, linguagem e raciocínio matemático.

Usar corretamente os símbolos matemáticos, quer na comunicação oral quer na escrita;

Descobrir relações entre conceitos.

Conhecimentos Prévios:

- domínio, contradomínio, monotonia e extremos de uma função
- conceito de limite
- desenvolvimento dos casos notáveis

Recursos: Geogebra, Calculadora Gráfica, Tarefa 2

Recolha de dados: foto do quadro; produções dos alunos

Desenvolvimento da aula	
Introdução da tarefa	10 min

Papel do professor:

Ponto de situação da aula anterior / “contextualização”

TPC: esclarecimento de dúvidas

- Na aula deduzimos a definição de derivada de uma função num ponto através do limite da t.m.v. e a sua interpretação geométrica. Depois fizemos uma pequena exploração onde passada analisamos graficamente a derivada de uma função quadrática (afim, constante, racional). Hoje vamos tentar perceber se a derivada de uma função existe sempre, para toda e qualquer função, em que situações a derivada de uma função não existe e encontrar uma generalização para a derivada de uma função em alguns casos particulares.-

Papel do aluno: Analisar de forma critica os resultados apresentados e comparar com os que obteve. Participar construtivamente, utilizando linguagem matemática adequada.

Trabalho autónomo	
Tarefa 2 - Parte I	10 min

Papel do Professor: Monitorizar o trabalho autónomo dos alunos, selecionar os alunos que irão responder a cada questão

Papel do aluno: Mobilizar conhecimentos para resolver a Tarefa.

Analisar de forma critica os resultados obtidos.

Dificuldades Previstas: Erros de cálculos; conceito de limite; definição de derivada num ponto

<table>
<tr><td colspan="2">Tarefa 2 – Parte I
Observa os gráficos representados nas figuras seguintes e indica se as funções representadas são ou não diferenciáveis no ponto de abcissa 2.</td></tr>
<tr><td>Pretende-se que apenas através da análise gráfica, os alunos identifiquem características gráficas de algumas famílias de funções e consigam estabelecer a existência ou não de derivada no ponto indicado.
Estratégias possíveis:
- traçar a reta vertical
- traçar reta tangente no ponto
Os alunos devem identificar as funções (1), (3) e (4) como não sendo diferenciáveis no ponto de abcissa 2.</td><td>10 min</td></tr>
</table>

Os alunos devem ser capazes de identificar alguns gráficos, nomeadamente: (2) – parábola – gráfico de uma função quadrática (4) – hipérbole – gráfico de uma função racional (5) – reta – gráfico de uma função afim (6) – gráfico de uma função polinomial **Dificuldades:** funções (1), (3) – existe reta tangente ao gráfico no ponto que é horizontal.	

Discussão	30 min

Objetivo: Identificar pontos onde a derivada de uma função não existe

Papel do Professor: Projetar os gráficos, num ficheiro geogebra e solicitar a participação dos alunos.

Começar por registar as opiniões/respostas dos alunos em relação às funções que selecionaram como **não** sendo diferenciáveis

Gerir as intervenções dos alunos por forma a abordar as dificuldades que os alunos encontraram e as diferentes resoluções

Papel do aluno: Analisar de forma critica os resultados apresentados e comparar com os que obteve. Participar construtivamente, utilizando linguagem matemática adequada.

Gráfico (1) – resolução no quadro - Função módulo: $y = |x - 2|$

Não é diferenciável no ponto x=2 pois é um ponto anguloso (ponto onde a função muda de ramo)

Gráfico (2) – resolução oral – exemplo trabalhado na aula anterior - Função quadrática: $y = -(x - 2)^2 + 4$

(TPC – encontrar uma expressão analítica que possa ter aquela representação gráfica)

Gráfico (3) – resolução no quadro - Expressão analítica:$y = |\sqrt[3]{x - 2}|$

Não é diferenciável no ponto x=2 pois é um ponto anguloso

Estabelecer a ligação entre a t.m.v. da função em qualquer intervalo a direita do ponto de abcissa 2 e em qualquer intervalo à esquerda do ponto de abcissa 2

Concluir sobre o sinal da derivada à direita e à esquerda do ponto de abcissa 2

Explorar as derivadas laterais no ponto de abcissa 2

Conexões com o tópico operações entre funções:

Função irracional composta com função módulo ou função módulo composta com função irracional – Exploração das duas situações.

Gráfico (4) – resolução no quadro - Função racional: $y = \frac{-1}{x-2}$não é diferenciável pois o ponto de abcissa 2 não pertence ao domínio da função

Gráfico (5) – resolução oral – não aprofundar muito pois a parte II da tarefa incide nas funções afins - Função afim: $y = \frac{x}{2} - 1$

Gráfico (6) – resolução oral – se houver tempo senão TPC

2.º Momento de aula – Trabalho autónomo	
Tarefa I- Parte II	15 min

Objetivo: Deduzir a expressão analítica da derivada de uma função afim.

Papel do Professor: Monitorizar o trabalho dos alunos; registar as estratégias que adotam; questionar os seus raciocínios

Papel do aluno: Mobilizar conhecimentos para resolver a tarefa.

Analisar de forma critica os resultados que obteve.

Participar construtivamente, utilizando linguagem matemática adequada.

Dificuldades Previstas: Erros de cálculos; manipulação algébrica de casos notáveis; conceito de limite; utilização da calculadora

[Recolha de dados: produções escritas dos alunos;foto do quadro]

Discussão e sistematização	20 min

Objetivos: Generalização da expressão analítica de funções polinomiais, racionais e irracionais

Papel do professor: Gerir as intervenções dos alunos por forma a abordar as dificuldades que os alunos encontraram e as diferentes resoluções. Solicitar aos alunos a resolução no quadro da parte II da tarefa

Papel do aluno: Analisar de forma critica os resultados apresentados. Participar construtivamente, utilizando linguagem matemática adequada.

[Exploração do conceito de limite: À medida que h se aproxima de zero, o que acontece à taxa de variação da função f no intervalo $[1, 1+h]$?

Estratégias possíveis:

-recorrer a tabela da calculadora

- substituir diretamente na expressão da t.m.v.

para explorar valores de h cada vez menores

Sistematização/ Definições:

- Derivada de uma função num ponto enquanto limite da t.m.v.
- Equação da reta tangente à curva num ponto
- função derivada

Exercícios de Aplicação/ TPC: 48, 50, 51, 53, 57, 58, 60, 61

Anexo 5 – Plano 4.ª Aula, 24/Março

<table>
<tr><td colspan="4">Plano de Aula – Matemática A 11º Ano</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Escola Secundária José Afonso – Loures</td><td colspan="2">Docente: Alexandra Bento
Estagiária: Rute Gil</td><td>Ano Letivo
2013/2014</td></tr>
<tr><td>Turma:11.º 2E</td><td>Nº Alunos: 20</td><td>24.Março.2014</td></tr>
</table>

Tema: Introdução ao Cálculo Diferencial I

Conteúdo: Função derivada

Objetivos Específicos:

Consolidação dos conteúdos trabalhados:

Determinar a derivada de uma função num ponto;

Analisar gráficos de funções e identificar os pontos onde a derivada não está definida;

Regras de derivação de algumas funções

Capacidades Transversais: Comunicação, linguagem e raciocínio matemático.

Usar corretamente os símbolos matemáticos, quer na comunicação oral quer na escrita;

Descobrir relações entre conceitos.

Conhecimentos Prévios:

- domínio, contradomínio, monotonia e extremos de uma função
- conceito de limite
- desenvolvimento dos casos notáveis

Recursos: Calculadora Gráfica,

Recolha de dados: foto do quadro; produções dos alunos

Desenvolvimento da aula	
Introdução da tarefa	10 min

Papel do professor:

Ponto de situação da aula anterior / “contextualização”

TPC: esclarecimento de dúvidas

- Na semana passada introduzimos novos conceitos; deduzimos a definição de derivada de uma função num ponto através do limite da t.m.v. e exploramos a interpretação geométrica destes conceitos. Depois realizamos uma tarefa onde analisamos graficamente a derivada de uma função quadrática (afim, constante, racional). Vamos ainda tentar encontrar uma generalização para a derivada de uma função em alguns casos particulares.-

Os alunos deverão de seguida expor as suas dúvidas nos exercícios que ficaram indicados para TPC.

Caso não existam muitas duvidas ou os alunos não tenham tentado resolver os exercícios, dedicaremos os primeiros 45 minutos para a resolução de alguns exercícios de aplicação do caderno de atividades.

Papel do aluno: Analisar de forma critica os resultados apresentados e comparar com os que obteve. Participar construtivamente, utilizando linguagem matemática adequada.

1.º Momento da Aula	
Aula prática – esclarecimento de dúvidas	40 min

Papel do Professor: Solicitar aos alunos a ida ao quadro resolver alguns exercicios

Papel do aluno:

Mobilizar conhecimentos para resolver a Tarefa.

Analisar de forma critica os resultados obtidos.

Dificuldades Previstas: Erros de cálculos; conceito de limite; definição de derivada num ponto; interpretação geométrica de t.m.v. de uma função num intervalo dado e da derivada de uma função num ponto

Exercicios propostos para TPC:

Exercícios de margem do manual: 33,34, 36, 38, 40, 41, 42, 45

Livro de atividades pag. 30 – exercícios 6,7,8

2.º Momento de aula – Trabalho autónomo	
Tarefa I- Parte II	15 min

Objetivo: Deduzir a expressão analítica da derivada de uma função afim.

Papel do Professor: Monitorizar o trabalho dos alunos; registar as estratégias que adotam; questionar os seus raciocínios

Papel do aluno: Mobilizar conhecimentos para resolver a tarefa.

Analisar de forma critica os resultados que obteve.

Participar construtivamente, utilizando linguagem matemática adequada.

Tarefa 2 - Parte II
Considera agora uma função afim $f(x) = mx + p$ e escreve uma expressão que permita calcular a taxa média de variação da função f no intervalo [a, a+h]. Escreve uma expressão que permita calcular a taxa de variação da função f e indica o valor da taxa no intervalo dado.

Dificuldades Previstas: Erros de cálculos; manipulação algébrica de casos notáveis; conceito de limite; utilização da calculadora

[Recolha de dados: produções escritas dos alunos;foto do quadro]

Discussão e sistematização	20 min

Objetivos: Generalização da expressão analítica de funções polinomiais, racionais e irracionais

Papel do professor: Gerir as intervenções dos alunos por forma a abordar as dificuldades que os alunos encontraram e as diferentes resoluções

Sollicitar aos alunos a resolução no quadro da parte II da tarefa

Papel do aluno: Analisar de forma critica os resultados apresentados. Participar construtivamente, utilizando linguagem matemática adequada.

Sistematização/ Definições:

- função derivada;
- regras de derivação

Exercícios de Aplicação/ TPC: 48, 50, 51, 53, 57, 58, 60, 61

Anexo 6 – Plano da 7.ª Aula, 31 de Março

<table>
<tr><td colspan="4">Plano de Aula – Matemática A 11º Ano</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Escola Secundária José Afonso - Loures</td><td colspan="2">Docente: Alexandra Bento
Estagiária: Rute Gil</td><td>Ano Letivo
2013/2014</td></tr>
<tr><td>Turma:11.º 2E</td><td>Nº Alunos:20</td><td>Data:25/Março/2014[8]</td></tr>
</table>

Tema: Introdução ao Cálculo Diferencial I

Conteúdo: Sinal da derivada e sentido da variação

Objetivos Específicos: Pretende-se que os alunos estabeleçam conexões entre a monotonia de uma função e a sua derivada num dado intervalo

Capacidades Transversais: Comunicação, linguagem e raciocínio matemático.

Usar corretamente os símbolos matemáticos, quer na comunicação oral quer na escrita;

Descobrir relações entre conceitos.

Conhecimentos Prévios:

- Domínio, contradomínio e extremos de uma função
- Funções polinomiais: monotonia e extremos, factorização, sinal e zeros, variação.

Recursos: Calculadora Gráfica, Tarefa 2

Desenvolvimento da aula	
Início da aula	15 min

Papel do professor: Ponto de situação da aula anterior / “contextualização”

TPC – esclarecimento de dúvidas;

- Hoje vamos perceber uma das aplicações da derivada de uma função.–

Tarefa para a aula de hoje: Analisar o sinal das funções representadas graficamente na tarefa 2 que realizamos na aula passada. Analisar também o sinal da derivada da função e comparar os resultados obtidos.

[8] Aula previamente planificada para 25 de Março e lecionada a 31 de Março, embora sem a ligação à Tarefa 2.

Solicitar a um aluno que construa o quadro de variação de sinal para as funções (1); (6) da Tarefa 2, aplicada na aula de 20 de Março.

Papel do aluno: Analisar de forma critica os resultados apresentados e comparar com os que obteve. Participar construtivamente, utilizando linguagem matemática adequada

Trabalho autónomo	
	20 min

Papel do Professor: Monitorizar o trabalho autónomo dos alunos; selecionar os alunos que irão responder a cada questão.

Papel do aluno: Mobilizar conhecimentos para resolver a Tarefa. Analisar de forma critica e interpretar, no contexto do problema, os resultados obtidos.

Dificuldades Previstas: Confusão entre quadro de sinais e quadro de variação

Discussão	20min

Objetivo: estabelecer a relação entre o sinal da derivada da função e o sentido de variação da função

Papel do Professor: Gerir as intervenções dos alunos e escolher as alíneas que suscitaram mais dificuldades, promovendo a discussão sobre:

- exemplos em que é necessário ter atenção - funções racionais;
- exemplos em que a derivada não existe mas a função tem um extremo.
- exemplos em que a derivada se anula mas a função não tem um extremo.

Papel do aluno: Analisar de forma critica os resultados apresentados e comparar com os que obteve. Participar construtivamente, utilizando linguagem matemática adequada.

Trabalho autónomo	
Resolução de Exercícios: Exercícios de Margem: 69; 71; 72;73;74; 76; 81 Propostas Pag. Azuis: pag. 130-136 (escolha múltipla)	30 min

Papel do Professor: Monitorizar o trabalho autónomo dos alunos, selecionar os alunos que irão responder a cada questão

Solicitar aos alunos para irem ao quadro resolver alguns exercícios

Papel do aluno: Mobilizar conhecimentos para resolver a tarefa proposta.

Analisar de forma critica os resultados obtidos.

Dificuldades Previstas: Interpretação gráfica; aplicação da definição de derivada num ponto; aplicação das regras de derivada; Interpretação geométrica dos conceitos t.m.v. e derivada num ponto;

Discussão	20min

Objetivos: Consolidação da matéria e exploração de perceções erradas relativamente ao conceito de derivada

Papel do professor: Gerir as intervenções dos alunos e escolher

a as alíneas que suscitaram mais dificuldades

b as alíneas onde surgiram diferentes resoluções

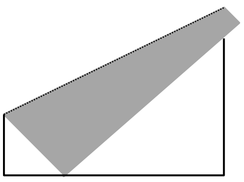
Papel do aluno: Analisar de forma critica os resultados apresentados e comparar com os que obteve. Participar construtivamente, utilizando linguagem matemática adequada.

Anexo 7 – Tarefa “Qual o triângulo de maior área” e Plano da 10.ª aula, 29/Abril

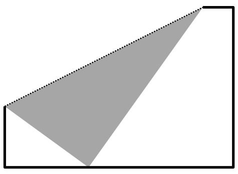
Agrupamento de Escolas n.º2 de Loures
Escola Secundária de José Afonso, Loures
Ficha de Trabalho Matemática A – 11º ano – Março de 2014

Qual é o triângulo de maior área?

Dobra uma folha de papel de modo que o canto superior esquerdo toque o lado inferior da folha, tal como mostra a figura. Qual é o triângulo (T) de maior área formado no canto inferior esquerdo da folha por efeito desta dobragem?



T



T

Investiga e faz um relatório da tua investigação explicando em pormenor a estratégia que utilizaste para resolver o problema.

<table>
<tr><td colspan="4">Plano de Aula – Matemática A 11º Ano</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Escola Secundária José Afonso - Loures</td><td colspan="2">Docente: Alexandra Bento
Estagiária: Rute Gil</td><td>Ano Letivo
2013/2014</td></tr>
<tr><td>Turma:11.º 2E</td><td>Nº Alunos: 20</td><td>29.Abril.2014</td></tr>
</table>

Tema: Funções

Conteúdo: Resolução de problemas envolvendo função derivada

Objetivos Específicos:

1- Derivada de funções polinomiais
2- Problemas de modelação e optimização

Capacidades Transversais: Resolução de Problemas; comunicação matemática, raciocínio matemático

Conhecimentos Prévios:

Teorema de Pitágoras
Cálculo de áreas
Manipulação algébrica de polinómios
Regras de Derivação

Recursos: A Tarefa, calculadora gráfica

Desenvolvimento
Início da aula (10 min) **Papel do professor:** Na Introdução da tarefa o professor exemplifica a construção do triângulo com a folha de papel e garante que todos os alunos compreendem a construção e o que lhes é pedido. Deverá garantir que os alunos identifiquem que o triângulo assim formado é sempre retângulo pois contem um canto da folha, questionando a turma como poderemos classificar o triângulo, podendo formular as seguintes questões: A folha forma que figura geométrica? Qual a amplitude dos ângulos formados pelos cantos da folha? Como podemos classificar o triângulo assim obtido? Os alunos deverão identificar que cada canto da folha forma um ângulo reto, e que portanto o triângulo é sempre retângulo.

Trabalho autónomo dos alunos (30 min)

Papel do professor: Monitorizar

Papel do aluno: Resolução da tarefa

Interpretar o contexto matemático do problema

Mobilizar conhecimentos para resolver a Tarefa

Analisar de forma critica os resultados obtidos

Elaborar os registos adequados à estratégia desenvolvida

Realização da Tarefa: Estratégias e dificuldades:

1.ª Estratégia: **Medição**, com régua, dos lados dos triângulos obtidos pelos alunos nas dobragens efetuadas.

Dificuldades nesta estratégia:

Além de incorrerem em erros nas medições, é necessário que os alunos testem vários triângulos, pelo que será difícil encontrar o triângulo de maior área desta forma. Se algum grupo utilizar esta opção, o professor deverá alertar para a necessidade de testar vários triângulos e organizar e registar os dados obtidos.

Para ajudar os alunos poderá questionar: De que forma poderemos organizar os dados? Como podem garantir que encontraram o triângulo de maior área?

Assim, o professor desperta os alunos para a necessidade de formalização, organização e generalização, sem o dizer explicitamente nem desvalorizar a estratégia utilizada.

2.ª Estratégia: Tentativa e erro

Os alunos poderão recorrer a uma tabela, dando valores a um lado do triângulo e utilizando o teorema de Pitágoras para determinar os restantes.

Dificuldades nesta estratégia:

A primeira dificuldade será decidir qual o lado que fixam. Ao fixar um dos lados do triângulo, os alunos poderão pensar que ficam ainda com duas incógnitas (os comprimentos da hipotenusa e do outro cateto), não conseguindo determinar o outro lado. Por outro lado, podem não se lembrar de recorrer ao teorema de Pitágoras.

O professor deve chamar a atenção para a construção do triângulo, para ajudar os alunos a escolher o lado de forma que consigam determinar os restantes lados, evitando denunciar que a soma da hipotenusa com um dos catetos será igual à largura da folha.

Poderá questionar os alunos: Que triângulos formam em cada tentativa? Como constroem o triângulo? Que relações existem entre os seus lados?

Uma limitação desta estratégia consiste na divisão da largura da folha em valores inteiros. O professor pode aproveitar este facto para incentivar os alunos a generalizar a expressão que representa o comprimento de um lado em função do outro, às custas do teorema de Pitágoras. Para ajudar os alunos, o professor poderá complementar as questões anteriores: Os lados só podem ter medidas inteiras? Será que conseguimos encontrar uma generalização para os vossos registos?

3.ª Estratégia: Encontrar a expressão algébrica que define a área do triângulo e utilização da calculadora gráfica

Os alunos recorrerem ao teorema de Pitágoras para encontrar a expressão que explicita um lado em função dos restantes e encontram a função que permite calcular a área do triângulo, utilizando depois a calculadora para determinar o máximo da função, obtendo assim o triângulo de área máxima.

Dificuldades nesta estratégia:

As maiores dificuldades prendem-se, à semelhança da estratégia anterior, com a escolha do lado que os alunos fixam para definir a expressão algébrica, com a manipulação algébrica de polinómios e de raízes e a introdução da função na calculadora.

4.ª Estratégia: Encontrar a expressão algébrica que define a área do triângulo e aplicação das regras de derivação

Os alunos recorrerem ao teorema de Pitágoras para encontrar a expressão que explicita um lado em função dos restantes e encontram a função que permite calcular a área do triângulo, aplicando de seguida as regras de derivação para encontrar a derivada da função e determinar o seu máximo através do estudo do sinal da derivada, obtendo assim o triângulo de área máxima.

Dificuldades nesta estratégia:

As maiores dificuldades prendem-se com a escolha do lado que os alunos fixam para definir a expressão algébrica, a manipulação algébrica de polinómios e de raízes, regras de derivação e estudo do sinal de uma função.

Discussão (20 min)

Papel do professor: Escolher as diferentes estratégias que surgiram, sequenciando-as e gerir as intervenções dos alunos.

Os grupos podem ir em simultâneo ao quadro, desde que as suas resoluções se completem, para rentabilizar o tempo de discussão, poupando na escrita das resoluções no quadro. Alternativamente, o professor poderá fotografar as resoluções e projetá-las, e os alunos apenas explicam a sua estratégia.

As estratégias de tentativa e erro (2.ª estratégia) seriam as primeiras a serem discutidas. Conforme a atividade que os grupos desenvolverem, o professor poderá escolher no máximo dois grupos para apresentarem, em função dos valores que tomaram para os lados do triângulo e dos lados que escolheram fixar. Se algum grupo utilizar esta estratégia e tiver conseguido generalizar irá expor juntamente com um grupo que não tenha generalizado.

A exploração com a calculadora e a utilização da derivada serão, no entanto, as estratégias privilegiadas.

Exploração da calculadora (10 min)

A 1.ª estratégia prevista seria aproveitada para explorar a calculadora, pois o facto de os alunos recolherem os dados empiricamente é um bom exemplo para aplicar a regressão e explorar esta opção, fazendo desta forma também a ligação com o momento seguinte da aula. É também útil para evidenciar que a estratégia escolhida deverá ser também eficaz, e que esta, mesmo utilizando a calculadora, iria produzir uma aproximação do resultado pretendido.

No caso de não surgir a 1.ª estratégia, poderão ser utilizados dados de algum grupo que não tenha apresentado mas que a tenha utilizado a 2.ª estratégia, sem generalizar.

Sistematização (20 min)

A última estratégia a ser discutida seria a que partisse da manipulação algébrica (3.ª estratégia). O professor deverá aproveitar para confrontar os alunos relativamente às diferenças entre os valores assim obtidos com os da regressão, tanto para os coeficientes da função para a área como da solução final.

Outras questões que o professor poderá colocar:

E se trabalhássemos com folhas de outras dimensões, o que alterava?

Papel do aluno:

Analisar de forma critica os resultados apresentados e comparar com os que obteve.

Participar construtivamente, utilizando linguagem matemática adequada.

Avaliação: A avaliação poderá ser feita através de:

Observação direta: Respeito pelas normas de trabalho/ interesse/ empenho /sociabilidade

Diálogo com os alunos: qualidade da participação

Aceitação, compreensão e realização da tarefa

Reflexão Estratégias desenvolvidas

Dificuldades não previstas

Plano de aula: Alterações

Anexos: Tarefa

Anexo 8 – Autorização

AGRUPAMENTO de ESCOLAS Nº2 de LOURES

Exmo.(a) Sr.(a) Encarregado(a) de Educação,

Eu, Rute Gil, estudante do Mestrado em Ensino da Matemática, estou a realizar o estágio pedagógico na Escola Secundária José Afonso, de Loures, no presente ano letivo. No âmbito do Estágio Curricular do Mestrado em Ensino da Matemática, da Universidade de Lisboa, estou a desenvolver um projeto de investigação intitulado “A aprendizagem da noção de derivada no 11.º Ano”. Para o desenvolvimento deste trabalho serão recolhidos dados em contexto de sala de aula na turma do(a) seu(sua) educando(a). Este projeto tem como principal objetivo compreender qual o significado que os alunos do 11.º ano atribuem à noção de derivada. Para tal tentarei perceber como é que os alunos do 11.º ano utilizam a noção de derivada na resolução de problemas, quais as estratégias que utilizam e as dificuldades que manifestam.

Serão objeto de análise os materiais produzidos, em aula, pelos alunos, que poderão ser complementados com transcrições de entrevistas, podendo ainda ser necessária a gravação áudio de alguns momentos da aula.

Em todo o processo serão salvaguardados os direitos de privacidade e anonimato que assistem ao seu(sua) educando(a). Da participação neste trabalho não resultará qualquer prejuízo para o(a) aluno(a), podendo, pelo contrário, trazer-lhe benefícios na aprendizagem da matemática.

Face ao exposto, solicita-se a autorização para a referida recolha de dados.

Agradeço antecipadamente a colaboração e atenção dispensada.

Com os melhores cumprimentos,

Lisboa, 13 de Fevereiro de 2014

A investigadora	A professora de Matemática	A Presidente da CAP
____________	________________________	______________________
(Rute Gil)	(Alexandra Bento)	(Irene Louro)

- -

Autorizo o(a) meu(minha) educando(a) ___________________________________ n.º___ do 11.º2E, a participar na recolha de dados dirigida pela investigadora Rute Gil, no âmbito de uma investigação sobre a aprendizagem da noção de derivada no 11.º Ano.

________________________________, ___ de _______________________de 2014

O/A Encarregado/a de Educação

____

Anexo 9 – Ficha de Caracterização de Aluno

Nome: ______________________________

Turma: _____ n.º _______ Data_Nasc: _______________

Lá em casa somos _____ pessoas.

Às refeições sentamo-nos assim:

Parentesco	Idade	Profissão	Habilitações

Temos _____ televisores e eu gosto de ver programas de:

____

____

____

____

Algumas revistas/ jornais que compramos são:

____

____

No ano passado, na minha escola, aquilo que eu gostava:

Mais :

Menos:

E o que mais gosto de estudar é

porque

Encarregado de Educação

Parentesco:

Nome:

Telefone(s):

Moro em:

____

Venho a pé/ de carro / autocarro/ comboio e demoro _____ min a chegar à escola.

Estudo e faço os meus trabalhos de casa no quarto/ na sala/ na cozinha/ noutro lugar.

Além de estudar, eu:

Trabalho / Ajudo a minha família

Utilizo o computador para:

(SIM)		(NÃO)
	Jogar	
	Word	
	Excel	
	Navegar na Net	
	Outros programas, quais?	

____

Problemas de saúde/alertas/alergias:

____

Ocupo os tempos livres com:

Leitura

Musica

TV

Computador/consola

Desporto. Qual?______________________

Outras atividades. Quais?

____

matemática é

Adaptado de Paulo Alvega

O que pensas sobre....

- ....a Matemática

____

____

____

____

- ...o papel dos alunos na sala de aula

____

____

____

____

- ...o papel do professor na sala de aula

____

____

____

____

Adaptado de Paulo Alvega

Anexo 10 – Guião de Entrevista

Datas	Horário
30 Maio	12:00
2 Junho	13:45
3 Junho	14:45; 15:30; 16:15;17:00
5 Junho	13:00

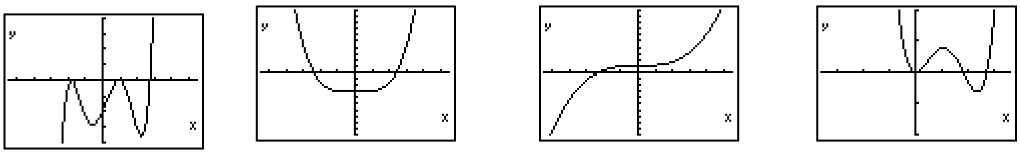
	Objetivos
Introdução	- Apresentar o objetivo da entrevista - Realçar que a entrevista não tem qualquer influência na avaliação da disciplina nem na correção do teste e explicar o motivo de ter selecionado o aluno - Motivar e deixar o entrevistado à vontade.
1.ª Parte: Significados desenvolvidos pelos alunos associados à noção de derivada	- O que é para ti a derivada de uma função? - Quando pensas em derivadas (quando ouves ou lês a palavra derivada), qual é a primeira ideia que te surge? - E geometricamente? [caso os alunos não identifiquem nenhum aspeto geométrico relacionado com a derivada] - Que conceitos matemáticos associas à derivada?
2.ª Parte: Discussão dos exercícios saídos nos momentos de avaliação	Discussão do exercício n.º 4 da ficha Interpretação geométrica, perceções e dificuldades dos alunos
	Discussão do exercício do Teste Interpretação do enunciado Erros e dificuldades encontradas Regras de Derivação/ Procedimento associado/ significados
3.ª Parte: Tarefa Extra	Apresentar aos alunos um exercício de optimização Conceitos matemáticos que os alunos relacionam Como utilizam a derivada de uma função Dificuldades encontradas

Exercício n.º4 da Ficha de Avaliação de 6 de Maio

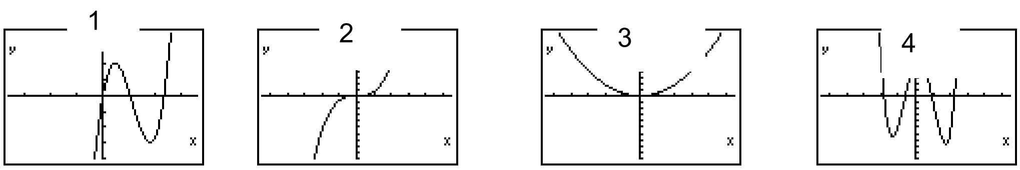
Associe a cada um dos gráficos representados o gráfico da sua função derivada:

Funções:

A B C D



Funções derivadas:



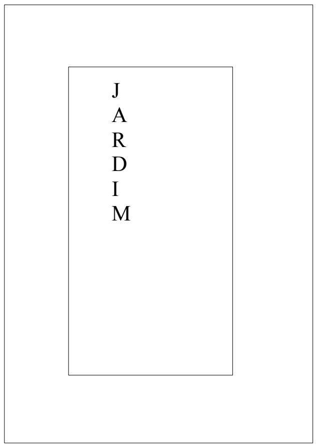
Questões:

Recordas-te deste exercício da ficha? [Se o aluno não se recordar, solicitar que o resolva no momento, explicando o que está a pensar]

Como resolveste este exercício? Que tipo de raciocínio ou associação fizeste para resolver este exercício?

Que dificuldades encontraste?

Exercício n.º3 do Teste de Avaliação de 27 de Maio



Os condóminos de um conjunto de apartamentos pretendem construir um jardim retangular.

O jardim tem uma zona envolvente, também retangular, e com uma área igual a 1734 metros quadrados.

Tal como se pretende ilustrar, na figura, o jardim deve ser plantado dentro da tal zona envolvente com um certo comprimento x **(a 3 metros da margem)** e uma certa largura y**(a 2 metros da margem)**.

3.1. Os condóminos pretendem saber as dimensões xe $y$da zona envolvente de modo a maximizar a área do jardim. Sem usar a calculadora, determina essas dimensões.

Para isso percorre os seguintes passos:

- Justifica que $y = \frac{1734}{x}$;
- Mostra que a área do jardim em metros quadrados é dada, em função de x, por $a(x) = 1758 - 4x - \frac{10404}{x}$;
- Determina as dimensões pedidas, em metros.

3.2. O conjunto solução da condição $a(x) \geq 1200$ é um intervalo fechado $[\alpha, \beta]$.

Recorrendo à calculadora, **determina**, graficamente, valores para α e β, arredondados às **centésimas**. **Interpreta** a resposta no contexto do problema.

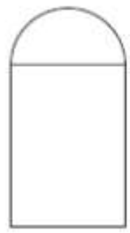
Nota: Reproduz, na folha de respostas:

- o gráfico, ou gráficos, visualizado(s) na calculadora, devidamente identificado(s);
- a janela de visualização utilizada;
- o(s) ponto(s) relevantes para a resolução do problema.

Questões são direcionadas à produção dos alunos durante o teste visando a compreensão das dificuldades encontradas

Tarefa Extra

4 Quer-se desenhar uma janela em forma de rectângulo encimado por um semicírculo, de forma que o perímetro seja 12 metros. Em que condições será máxima a área da janela?



(adaptado de 12.º Ano – Introdução ao estudo das funções reais de variável real, Luís Sanchez, FCUL, DM 2003, Reanimat)

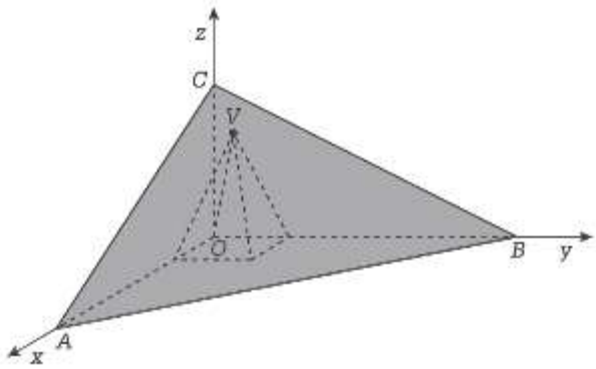
Solicitar aos alunos para interpretar e resolver o problema.

Que dificuldades encontras neste enunciado?

Que conceitos matemáticos relacionas/associas num problema deste tipo?

[Conforme as dificuldades que os alunos manifestarem questionar por forma a “desbloquear” o aluno; perceber as suas dificuldades e que significados desenvolveram

Anexo 11 – Grupo II da Ficha de Avaliação, 6/Maio



Na figura está representado um referencial o.n. $Oxyz$ em que:

- O ponto A pertence ao eixo Ox
- O ponto B pertence ao eixo Oy
- O ponto C pertence ao eixo Oz
- o plano ABC é definido pela equação $x + y + 2z - 8 = 0$

O ponto V desloca-se ao longo do plano ABC sendo sempre o vértice de uma pirâmide quadrangular regular, com a base contida no plano xOy, de tal modo que um dos vértices da base é a origem do referencial e dois dos restantes pertencem aos semieixos positivos Oxe Oy.

Seja a a medida da aresta da base da pirâmide $]0,4[$(*)

1. Determina as coordenadas do ponto V e o volume da pirâmide para $a = 2$
2. Considera a pirâmide cujo vértice V pertence ao plano de equação $z = 3,5$. Determine a medida da aresta da base.
3. Mostre que o volume da pirâmide é dado em função de a por:
$$V(x) = \frac{4}{3}a^2 - \frac{1}{6}a^3$$
4. Determina o valor da medida da aresta da base e a altura da pirâmide de volume máximo.

(*) intervalo deveria ser $]0,4]$