Universidade de Lisboa

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO FIGURAS GEOMÉTRICAS: UM ESTUDO NO 7.º ANO

Isabel Regina Gonçalves Magalhães

MESTRADO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

2014

Universidade de Lisboa

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO FIGURAS GEOMÉTRICAS: UM ESTUDO NO 7.º ANO

Isabel Regina Gonçalves Magalhães

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada orientado pela Professora Doutora Ana Henriques e coorientado pela Professora Doutora Isabel Simão

MESTRADO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

2014

Agradecimentos

Queria começar por agradecer à Professora Doutora Ana Henriques, pelo seu grande apoio, paciência e disponibilidade que sempre demonstrou ao longo deste ano. As suas sugestões e ensinamentos foram uma ajuda preciosa sem os quais não poderia ter concretizado este projeto e que me vão acompanhar no meu futuro enquanto professora. O meu mais sincero obrigada!

À Professora Doutora Isabel Simão queria agradecer a sua grande disponibilidade, a sua orientação, não só nos conceitos matemáticos mas também na prática pedagógica, e as suas palavras sempre muito motivadoras.

Para a professora Helena Fonseca, o meu grande agradecimento por me ter recebido nas suas aulas e por toda a ajuda que me deu ao longo do ano, sendo sempre muito simpática e prestável. A sua postura enquanto professora foi para mim uma grande inspiração e uma grande fonte de aprendizagem.

O meu agradecimento vai também para os professores que tive neste mestrado, com quem tanto aprendi.

O meu especial agradedimento à minha colega de mestrado, Cláudia Simãozinho, que me acompanhou nesta experiência letiva, pelo seu grande apoio, sugestões e ajuda nas minhas aulas.

Queria ainda agradecer a toda a comunidade escolar da Escola Secundária D. Luísa de Gusmão e em especial à Diretora do agrupamento, professora Laurinda Pereira e à diretora de turma do 7º A, a professora Helena Pinho pela sua disponibilidade.

O meu especial agradecimento aos alunos do 7º A e aos seus encarregados de educação, pela sua cooperação no meu estudo.

Queria também agradecer à minha família e amigos por todo o apoio e atenção que me deram.

Finalmente, queria agradecer ao João pelo seu constante incentivo, e por tudo mais...

Resumo

O trabalho apresentado foi realizado no âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática e é relativo à lecionação de doze aulas de 50 minutos na unidade "Figuras Geométricas" do domínio da Geometria e Medida, numa turma do 7.º ano da Escola Secundária D. Luísa de Gusmão durante o 2.º período do ano letivo de 2013/2014. Neste estudo, propus-me analisar o processo de resolução de problemas envolvendo figuras geométricas, procurando identificar: (i) As estratégias usadas pelos alunos, em particular as representações a que recorrem; (ii) Os conhecimentos que mobilizam, em particular as propriedades geométricas; e (iii) as dificuldades que evidenciam. Além de problemas, foram realizadas outras tarefas, nomeadamente de natureza exploratória, tendo sido também usado nas aulas um software de Geometria dinâmica.

A recolha de dados esteve assente na observação dos alunos nas aulas, nas suas resoluções escritas das tarefas e nas entrevistas realizadas a um grupo de alunos.

Os resultados evidenciam que os alunos na resolução de problemas geométricos usam diversas estratégias, aparentemente relacionadas com o tipo de problemas, sendo de destacar as de fazer um desenho ou a procura de problemas análogos anteriormente resolvidos. Frequentemente, usam mais do que uma estratégia no mesmo problema. As representações pictóricas são as mais usadas mas a linguagem natural é também muito utilizada, por exemplo na argumentação. Os alunos também tendem a usar representações múltiplas. O tipo de representação selecionada também parece estar associado a fatores como sejam as caraterísticas das tarefas, os conhecimentos prévios dos alunos ou a estratégia usada.

Além das propriedades das figuras geométricas, em particular as propriedades respeitantes aos quadriláteros, os alunos usam outros conhecimentos, tais como a resolução de equações ou construção de figuras. A visualização e a interpretação dos problemas surgem como as maiores dificuldades evidenciadas pelos alunos, sendo ainda de mencionar o uso das propriedades dos quadriláteros como um aspeto a melhorar.

Palvras-chave: Geometria; Figuras geométricas; Resolução de problemas; Representações matemáticas; Dificuldades dos alunos.

Abstract

In this report I present a study conducted in a teaching practice consisting in twelve lessons of 50 minutes each, on the unit "Geometric Figures" of the domain "Geometry and Measurement", at a grade 7 class of the secondary school D. Luísa de Gusmão. The intervention took place in the 2nd period, during the school year of 2013/2014.

The study aims to analyze the process of solving problems involving geometric figures seeking to identify: (i) the strategies used by the students, particularly the representations; (ii) the knowledge they mobilize, particularly the geometric properties; and (iii) the difficulties they faced.

Data collection included observation, written resolutions of the proposed tasks and interviews to a group of students.

The results show that students use diverse strategies to solve geometric problems, apparently related to the type of problems, with emphasis on the drawing or looking for similar problems. Often, they use more than one strategy in the same problem. Pictoric representations are the most used but natural language is also widely used, for example for argumentation. Students also tend to use multiple representations. The selected type of representation appears to be associated with factors such as the characteristics of the tasks, the students' prior knowledge and the strategy used.

Besides the properties of geometric figures, in particular the properties relating to quadrilaterals, students use other knowledge, such as solving equations or construction of geometric figures. The main difficulties highlighteded by the students were the visualization and interpretation of problems, but the use of the properties of quadrilaterals is also an aspect to improve.

Key words: Geometry; Geometric figures; Problem solving; Mathematical representations; Students' difficulties;.

Índice

Índice de Figuras

Índice de Quadros

Capítulo 1 - Introdução

O relatório aqui apresentado, de cariz investigativo, diz respeito à Prática de Ensino Supervisionada que realizei na Escola Secundária D. Luísa de Gusmão, no 2.º período do ano letivo de 2013/2014.Tem por base o estudo que efetuei no decorrer da lecionação de 12 aulas de 50 minutos na unidade "Figuras Geométricas", numa turma do 7º ano. Ao longo da lecionação da unidade referida, trabalhei com os alunos a resolução de problemas envolvendo figuras geométricas, além de outras tarefas, procurando dar cumprimento ao Programa de Matemática para o Ensino Básico em vigor.

1.1 - Motivações

> O que diferencia a espécie humana das demais espécies do reino animal é a capacidade de pensar, raciocinar, formular hipóteses, representar mentalmente situações, operar sobre uma situação inicial visando uma situação desejada, enfim, solucionar problemas.(Alves, 1999, p.1)

Quando iniciei a escolha de um tema para fazer o meu estudo, procurei que conjugasse o meu interesse pessoal com a adequação ao contexto em que iria decorrer o estudo, neste caso numa turma do 7.º ano, no domínio da Geometria.

Estando o contexto definido, fui então definir um tema, tendo a minha escolha sido determinada pelo interesse que tenho pela resolução de problemas e por compreender como é que os alunos abordam a resolução de um problema, em particular, a que estratégias e representações recorrem, que conhecimentos usam e as dificuldades que evidenciam. Este meu interesse aprofundou-se no contexto do mestrado em ensino da Matemática, em que a minha intervenção letiva esteve inserida, com o estudo da temática, o que me levou a refletir sobre a importância da resolução de problemas no processo ensino aprendizagem na disciplina de Matemática. Esse mesmo estudo, levou-me também a analisar o que envolve a resolução de problemas pelos alunos em sala de aula, desde a escolha dos problemas a apresentar até à forma como serão abordados na aula e o que podem trazer para a aquisição de conhecimentos e desenvolvimento de capacidades dos alunos, através da sua resolução e discussão em aula.

Tal como Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) também penso que a Matemática pode ajudar os alunos a tornarem-se indivíduos competentes, críticos e confiantes nos aspectos essenciais em que a sua vida se relaciona com a Matemática, devendo os mesmos desenvolver a sua capacidade de usar a Matemática para analisar e resolver situações problemáticas.

Por outro lado, o trabalho dos alunos na resolução de problemas fornece-lhes a oportunidade de experienciar e desenvolver importantes processos de raciocínio, além disso, proporciona aos alunos um ensino não repetitivo (Ponte, 1992) e desenvolve neles o gosto pela Matemática através do desafio que os problemas podem colocar, como preconizado pelas orientações curriculares, tanto nacionais (ME, 2013) como internacionais (NCTM, 2000).

A resolução de problemas no contexto específico da Geometria reveste-se de especial importância pois permite aos alunos compreenderem melhor o mundo à sua volta e usarem a visualização, o raciocínio espacial e o conhecimento geométrico na resolução dos mesmos (Breda, Serrazina, Menezes, Oliveira & Sousa, 2011). Na verdade, a Geometria revela-se uma boa fonte de problemas matemáticos e contribui para o desenvolvimento da capacidade de resolução dos mesmos (Abrantes, 1999). Também no Programa de Matemática para o Ensino Básico (ME, 2013), a resolução de problemas é referida como meta nos diferentes ciclos de ensino e domínios.

É ainda de salientar que, segundo os relatórios do GAVE de 2012, referentes ao exame do 9.º ano de Matemática e aos testes intermédios do 8.º ano e 9.º ano, o domínio da Geometria foi o que teve pior desempenho, destacando-se em particular, a dificuldade na resolução de problemas geométricos, sendo dada como sugestão didática a resolução de problemas nas aulas. Estes resultados evidenciam que este é um domínio em que os alunos demonstram sentir grandes dificuldades e era minha expetativa obter uma melhor perceção do modo como os alunos abordam a resolução de problemas em contexto geométrico, tendo em vista a minha prática futura.

As representações matemáticas foram também foco de atenção neste estudo pela importância de que se revestem no raciocínio matemático e, em particular, no trabalho com problemas geométricos (Duval, 2012), nos quais os alunos são chamados a usar diferentes tipos de representações, na interpretação dos problemas e resolução dos mesmos.

1.2 - Objetivo e questões de estudo

O estudo desenvolvido incidiu sobre o tópico "Figuras Geométricas", lecionado no 7.º ano e teve como objetivo analisar como os alunos resolvem problemas envolvendo figuras geométricas. Para isso, formulei as seguintes questões:

- Que estratégias os alunos utilizam na resolução de problemas envolvendo figuras geométricas? Em particular, a que representações matemáticas os alunos recorrem na resolução destes problemas?
- Quais os conhecimentos que os alunos mobilizam, em particular as propriedades geométricas, na resolução de problemas envolvendo figuras geométricas?
- Quais as dificuldades que os alunos evidenciam na resolução de problemas envolvendo figuras geométricas?

1.3 - Organização do estudo

Neste estudo começo por fazer uma 'Introdução', no primeiro capítulo, na qual explicito as motivações que me levaram à sua realização e apresento o objetivo do mesmo e as respetivas questões.

No segundo capítulo, 'Enquadramento da Problemática e Orientações Curriculares', faço uma uma revisão de literatura sobre os temas abordados visando a fundamentação do estudo. Discuto, igualmente, as perspetivas sobre o ensino e a aprendizagem da Geometria, enquadrando-as nas orientações curriculares.

No terceiro capítulo, 'Unidade de Ensino', começo por apresentar uma caraterização da escola e da turma onde decorreu o estudo e apresento sumariamente os conceitos matemáticos abordados durante a lecionação. Depois apresento e justifico as opções que tomei relativamente às estratégias de ensino e às tarefas e recursos utilizados, terminando com uma breve descrição das aulas lecionadas.

No quarto capítulo descrevo os 'Métodos e Procedimentos de Recolha de Dados' que utilizei e o quinto capítulo diz respeito à 'Apresentação e Análise de dados' realizada, focada nos aspetos que permitem responder às questões do estudo.

A terminar, encontra-se o sexto capítulo, ‘Reflexão sobre o trabalho realizado’, onde apresento as principais conclusões do estudo e faço uma reflexão sobre a minha experiência na unidade lecionada.

Capítulo 2 - Enquadramento da Problemática e Orientações Curriculares

2.1 - Resolução de Problemas

2.1.1 - Definição de Problema

A definição de problema não é consensual, podendo-se ter diferentes abordagens, tal como a de Polya (1945), para quem um problema é uma questão para a qual o aluno não dispõe de um método que permita a sua resolução imediata. Shoenfeld (1985), por seu lado, coloca a ênfase na relação dos alunos com as tarefas e não apenas nestas, permitindo os problemas "ajudá-los a aprender a pensar matematicamente" e proporcionando "actividades com sentido matemático" (Shoenfeld, 1992). Para este autor um problema constitui "uma questão difícil ou que levanta dúvidas; uma questão de pesquisa, discussão ou pensamento; uma questão que excita a mente" (Shoenfeld, 1985, p. 74)

Para Ponte (1992), um problema consiste numa tarefa para a qual o aluno não dispõe de um método imediato de resolução, enfatizando também o empenho ativo do aluno na sua resolução que lhe permite lidar com situações complexas, enfrentar dificuldades e tomar decisões. Este autor distingue um problema de um exercício ao considerar que o segundo exige apenas a aplicação de um método de resolução já conhecido. Define ainda uma diferença entre "problema" e "situação problemática" ao considerar que num problema existe uma formulação mais ou menos explícita do que é dado e do que é pedido enquanto que numa situação problemática existe um grau grande de indefinição acerca de um e outro, pressupondo-se que cabe ao próprio aluno um papel importante na sua precisão.

Nas normas do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1991, p.11) pode ver-se a seguinte definição para problema:

> Uma situação em que, para o indivíduo ou para o grupo em questão, uma ou mais soluções apropriadas precisam ainda de ser encontradas. A situação deve ser suficientemente complicada para constituir um desafio, mas não tão complexa que surja como insolúvel. (NCTM, 1991, p.11)

Esta definição vai ao encontro da abordagem acima referida em que a relação dos alunos com a tarefa é muito importante ao enfatizar que a tarefa deve constituir um desafio para os alunos que a estão a resolver.

Uma grande variedade de problemas pode ser utilizada num ensino que dê ênfase à resolução de problemas, estando a respectiva escolha dependente da perspectiva que se tem relativamente à natureza de um problema de Matemática e à sua resolução. Dada a dificuldade de entendimento sobre o que é um problema, alguns autores consideram que mais importante do que definir problema é encontrar uma tipologia que ajude a identificar o tipo de problema e de resolução que permite fazer face a determinada situação, uma vez que este aspecto constitui um factor decisivo no ensino da resolução de problemas.

Abrantes (1989), partindo da classificação de Borasi (1986), propõe para os problemas uma classificação de acordo com quatro aspetos que podem ser analisados nos mesmos: o contexto do problema, a sua formulação, a solução e o método de abordagem, criando uma caraterização para exercícios e problemas e, nestes, uma diferente tipologia, como se pode ver no seguinte quadro:

Quadro 2-1 - Tipos de problemas (Adaptada de Abrantes, 1989)

<table>
<tr><th></th><th>Contexto</th><th>Formulação</th><th>Solução</th><th>Método</th></tr>
<tr><td>Exercícios</td><td>Inexistente</td><td rowspan="5">Explícita e fechada</td><td rowspan="5">Única e exata</td><td rowspan="4">Uso de algoritmos previamente conhecidos</td></tr>
<tr><td>Problemas de palavras</td><td rowspan="4">Totalmente explícito no enunciado</td></tr>
<tr><td>Problemas para equacionar</td></tr>
<tr><td>Problemas para demonstrar</td></tr>
<tr><td>Problemas para descobrir</td><td>Insight</td></tr>
<tr><td>Problemas da vida real</td><td rowspan="3">Só em parte no enunciado</td><td rowspan="2">Implícita e aberta</td><td rowspan="3">Várias</td><td rowspan="3">Exploração do contexto

Criação de problemas</td></tr>
<tr><td>Situações problemáticas</td></tr>
<tr><td>Situações ainda não problemáticas</td><td>Inexistente</td></tr>
</table>

Do ponto de vista pedagógico, Polya (1981), define uma tipologia para os problemas, estando estes ordenados de acordo com o seu grau de dificuldade e valor educativo (menor para maior): (1) os problemas que se resolvem de uma forma mecânica usando uma regra que acabou de ser apresentada; (2) os problemas que podem ser resolvidos usando uma regra apresentada anteriormente mas em que se tem que usar alguma capacidade crítica; (3) os problemas que requerem na sua resolução a combinação de duas ou mais regras anteriormente apresentadas; e (4) os problemas que requerem a combinação de duas ou mais regras mas que apresentam diversas bifurcações e um elevado grau de raciocínio.

A perspetiva sobre a definição de problema que utilizei neste estudo, vai ao encontro da perspetiva dada pelos autores que enfatizam não só a natureza da tarefa mas também a relação dos alunos com a mesma, visto que a mesma tarefa pode constituir um desafio para alguns alunos e não para outros alunos.

2.1.2 - A resolução de Problemas

Do mesmo modo que existem várias perspectivas sobre o que é um problema, também a expressão 'resolução de problemas' aparece associada a significados diversos conforme os autores. Na resolução de problemas, Polya (1945) considera que o professor deve tentar colocar-se no lugar dos alunos e perceber o seu ponto de vista bem como procurar ajudá-los de modo a que estes desenvolvam o seu trabalho, mas não ajudar em demasia para que tenham um trabalho significativo.

O Modelo de Polya (1945) para resolver problemas não é único mas continua a ser uma referência na resolução de problemas. Este autor propõe um processo de quatro etapas: Compreensão do problema; Elaboração dum plano; Execução do plano e Verificação dos resultados. Na etapa dedicada à compreensão, os alunos devem identificar o que lhes é pedido, quais os dados de que dispõe e que condicionantes lhes são apresentadas e adotar a simbologia adequada. A elaboração de um plano permitirá definir quais os procedimentos necessários a adotar para se chegar à resposta. Depois da elaboração do plano, segue-se a sua execução de acordo com os procedimentos delineados. A última etapa permite aos alunos fazerem uma reflexão do trabalho realizado, da forma como resolveram o problema e consolidar os seus conhecimentos e capacidade de resolver problemas.

Para a resolução dos problemas, tanto Polya (1945) como Schoenfeld (1980), sugerem o uso de heurísticas, que podem ser definidas como sugestões gerais ou técnicas que ajudam os resolvedores de problemas a compreenderem ou resolverem os problemas (Schoenfeld, 1980). Polya (1945), no seu estudo, descreve um conjunto de heurísticas gerais, que permitem ao indivíduo resolver problemas, independentemente do assunto:

- Procurar problemas análogos anteriormente vistos ou que que tenham alguma similitude (considerando que é difícil que um problema não tenha qualquer similitude com outro já resolvido), que sejam mais simples.

Considera que é uma das mais usuais formas de raciocínio, tentar encontrar uma analogia com algo já encontrado anteriormente;

- Tentar encontrar uma variação do problema, tal como uma generalização, uma particularização, o uso de uma analogia, o não uso de uma parte das condições;
- Decompor um problema, por exemplo, analisando cada uma das condições. Pode levar a que se considerem novos dados ou incógnitas e que se encontre um grau de dificuldade diferente em cada parte do problema;
- Desenhar um diagrama, procurar regularidades, estabelecer objetivos intermédios, trabalhar do fim para o princípio, usar tentativa e erro, provar por contradição, tentar usar o método de indução ou reduzir o número de variáveis.

O uso explícito de heurísticas tem sido, entretanto, questionado, nomeadamente por Schoenfeld (1992) que considera que na resolução de problemas o conhecimento de heurísticas não é suficiente e se deve dar prioridade ao desenvolvimento das capacidades metacognitivas dos alunos devendo-se para isso, durante a resolução dos problemas, questioná-los sobre o seu trabalho para melhorar a forma de resolução.

Além do uso de heurísticas, Schoenfeld (2006) considera então que existem mais fatores que sustentam a resolução de problemas e que levam ao seu sucesso:

- Conhecimento ou Recursos - conhecimento de procedimentos e questões Matemáticas;
- Heurísticas - conhecimento de estratégias e técnicas para a resolução;
- Monitorização - decisões sobre que recursos usar e quando usá-los;
- Crenças - as crenças dos alunos em si mesmos e na tarefa a resolver, devido à sua experiência matemática, moldam o conhecimento que usam durante a resolução de problemas.

Na resolução de problemas matemáticos, podem identificar-se estratégias de resolução mais usuais, tais como as sugeridas por Echeverría e Pozo (1998): Uso de tentativa e erro; Aplicar a análise meios-fins; Dividir o problema em subproblemas; Estabelecer submetas; Decompor o problema; Procurar problemas análogos; Ir do conhecido até o desconhecido. Mais recentemente, Musser, Burger e Peterson (2006) também apresentam diversas estratégias usadas na resolução de problemas matemáticos no ensino básico. Estas estratégias encontram-se relacionadas com tipos de problemas onde são usualmente usadas e são apresentadas no quadro seguinte as que considero serem mais passíveis de usar em problemas envolvendo figuras geométricas:

Quadro 2-2 - Estratégias de resolução (Adaptado de Musser, Burger & Peterson,2006)

Estratégia	Problema
Uso de uma variável	- uma frase similar a "para qualquer número dado..." é usada, o problema sugere uma equação, uma prova ou solução geral é pedida, existe uma quantidade desconhecida relacionada com quantidades conhecidas, está-se a tentar encontrar uma expressão.
Fazer um desenho	- uma situação física está envolvida, figuras geométricas ou medidas estão envolvidas, se quer obter uma melhor compreensão do problema ou é possível uma representação visual do mesmo.
Usar raciocínio direto	- uma prova é requerida, uma expressão do tipo "se ... então..." é usada, se vê uma expressão que se quer implicar da coleção das condições conhecidas.
Usar raciocínio indireto	- o raciocínio direto é muito complexo ou não leva à solução, uma prová é requerida, assumir a negação do que se está a tentar provar diminui o escopo do problema.
Resolver um problema equivalente	- pode-se encontrar um problema equivalente mais fácil, um problema geométrico pode ser representado algébricamente ou o contrário, problemas físicos podem ser representados com números ou símbolos.
Trabalhar de trás para a frente	- o resultado final é claro e os dados iniciais não, um problema é complexo no início e simples no final, uma abordagem direta envolve uma equação complicada.
Resolver uma equação	- uma variável foi introduzida, as palavras "é", "é igual a" aparecem no problema, as condições enunciadas podem ser facilmente representadas por uma equação.
Procurar uma fórmula/expressão	- o problema sugere um padrão que pode ser generalizado, ideias como rácio, percentagem, distância ou área estão envolvidas.
Usar um modelo físico	- objetos físicos podem ser usados para representar ideias envolvidas, um desenho é demasiado complexo ou desadequado para dar uma visualização do problema.
Usar análise dimensional	- unidades de medida estão envolvidas.
Identificar submetas	- um problema pode ser separado em outros problemas mais simples, existe informação que se gostaria de ter para resolver o problema.
Usar coordenadas	- o problema pode ser representado usando duas variáveis, o problema envolve declives, linhas parelelas, perpendiculares, etc, um problema geométrico não pode ser facilmente resolvido por métodos tradicionais euclideanos.
Usar simetria	- em problemas geométricos que envolvam transformações, a simetria reduz o número de situações a considerar.

2.1.3 - Resolução de Problemas no Ensino da Matemática

A resolução de problemas surge para variados autores como sendo de grande importância, considerando mesmo Ponte (1992) que é a força motora da Matemática, podendo motivar outros problemas e permitindo aos alunos lidarem com situações complexas, enfrentando dificuldades, tomando decisões, correndo riscos e fazendo descobertas.

Na mesma perspetiva, para Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel (2008) a resolução de problemas proporciona aos alunos o recurso a diferentes representações e incentiva a comunicação, fomenta o raciocínio e a justificação, permite estabelecer conexões entre vários temas matemáticos e entre a Matemática e outras áreas curriculares e apresenta a Matemática como uma disciplina útil na vida quotidiana.

A resolução de problemas também permite focar os alunos na sua resolução, desenvolver a convicção nos alunos de que são capazes de fazer matemática e de que a matemática faz sentido, desenvolver o seu potencial matemático ou fornecer dados contínuos para a avaliação que podem ser usados para tomar decisões educacionais ou ajudar os alunos a ter bom desempenho (Van de Walle, 2006).

Lester (2013), considera ainda que a compreensão dos conceitos usados na resolução dos problemas contribui para o desenvolvimento dos processos metacognitivos, devendo o professor proporcionar aos alunos a resolução de muitos e variados problemas e incentivar a discussão em turma sobre as diferentes resoluções surgidas, sendo também preciso pensar como é que estes podem desenvolver as suas capacidades, não podendo essa atividade reduzir-se a "dar receitas" (Ponte 1992).

Quanto à integração da resolução de problemas em sala de aula, Polya (1945) considera que se pode desenvolver nos alunos o interesse pelo raciocínio, levando a um desenvolvimento intelectual e da capacidade inventiva, se nas aulas o professor desafiar os alunos com problemas compatíveis com os seus conhecimentos, auxiliando-os com indagações que os estimulem. O ensino usando a resolução de problemas também é mais centrado no aluno do que no professor sendo que a maioria dos conceitos e procedimentos matemáticos podem ser melhor ensinados através da resolução de problemas (Van de Walle, 2006). Por outro lado, a resolução de problemas, ao constituir uma parte significativa do pensamento matemático, pode ser um ponto de partida para discussões matemáticas em que os problemas e as suas soluções devem servir como introduções a importantes ideias matemáticas (Shoenfeld, 1996).

Em relação à forma como a resolução de problemas está inserida curricularmente, Ponte (1992) apresenta três perspetivas: o ensino da Matemática "enriquecido" com a resolução de problemas; a resolução de problemas como forma de surgimento de conhecimentos; e uma perspetiva que valoriza não só a resolução de problemas mas a forma como são resolvidos e também o desenvolvimento nos alunos das capacidades metacognitivas. Para Stanic e Kilpatric (1989) a resolução de problemas tem tido nos currículos de Matemática os seguintes papéis: a resolução de problemas como contexto, em que os problemas e a sua resolução são vistos como meios para atingir outros fins; a resolução de problemas como uma capacidade; e a resolução de problemas como uma arte. Schroeder e Lester (1990), citados em Lester (2013), apresentam também três perspetivas sobre a resolução de problemas no ensino: o ensino através da resolução de problemas, o ensino para a resolução de problemas e o ensino sobre a resolução de problemas, sendo este último considerado atualmente como um método menos legítimo.

Relativamente à resolução de problemas, o NCTM (2000) expressa a necessidade dos alunos serem capazes de:

- Construir novo conhecimento matemático através da resolução de problemas;
- Resolver problemas que surgem na Matemática e noutros contextos;
- Aplicar e adaptar várias estratégias apropriadas para resolver problemas;
- Monitorizar e refletir sobre o processo de resolução de problemas matemáticos.

Além disso, considera que a resolução de problemas não é apenas uma meta na Matemática, mas também um dos principais meios no processo de aprendizagem, não devendo ser um tópico isolado do currículo mas englobada no processo de aprendizagem. Sugerem, ainda, que as tarefas problemáticas a apresentar aos alunos devem dar-lhes a oportunidade de solidificar e ampliar os seus conhecimentos.

Nos objetivos gerais do Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), a resolução de problemas era apresentada como um objetivo e uma capacidade a ser desenvolvida. No PMEB (2013) a resolução de problemas surge como um dos objetivos gerais na unidade lecionada, Figuras Geométricas, e como devendo ser trabalhada na disciplina ao longo dos diferentes ciclos de ensino:

> A resolução de problemas envolve, da parte dos alunos, a leitura e interpretação de enunciados, a mobilização de conhecimentos de factos, conceitos e relações, a seleção e aplicação adequada de regras e procedimentos, previamente estudados e treinados, a revisão, sempre que necessária, da estratégia preconizada e a interpretação dos resultados finais. (PMEB, 2013, p. 5)

A resolução de problemas pode então considerar-se como sendo um elemento importante no processo ensino-aprendizagem na disciplina de Matemática, devendo ser trabalhado em sala de aula de modo a proporcionar aos alunos um maior desenvolvimento no seu raciocínio e capacidade de comunicação assim como aumentar o interesse pela disciplina.

2.2 - Representações Matemáticas e Visualização

2.2.1 - Representações Matemáticas

As representações matemáticas têm sido objeto de estudo de diversos autores, nomeadamente Goldin, para quem uma representação é "uma configuração que representa algo, de alguma forma. Por exemplo, uma palavra pode representar um objeto real, um numeral pode representar o número de elementos num conjunto, ou a posição de um número numa reta numérica" (Goldin, 2008, p. 180).

Nas representações, Goldin e Kaput (1996) definem dois sistemas: Os sistemas internos, possíveis configurações mentais dos indivíduos, tais como alunos e que não são diretamente observáveis mas apenas podem ser inferidas do que se observa das respostas dos alunos e os externos, em que as representações são observáveis tais como palavras, gráficos, imagens, equações. A interpretação das representações externas, por outro lado, também depende das representações internas de quem as interpreta existindo ainda uma relação entre as representações internas e externas: Um aluno pode exteriorizar as suas representações internas ou, através da leitura e interpretação, interiorizar representações.

Por outro lado, Duval (1999), faz a distinção entre as representações mentais e semióticas - que permitem fazer uma exteriorização das representações mentais com o fim de comunicar com outras pessoas, considerando que as representações semióticas são indispensáveis na Matemática pois permitem aceder a objetos matemáticos mas, alerta Duval (2012), não devem ser confundidas com os próprios objetos. Duval (1999) estabelece ainda a existência de dois tipos de representações cognitivas: 1) as que são produzidas deliberadamente usando qualquer sistema semiótico - frases, gráficos, diagramas, desenhos - cuja produção pode ser mental ou externa; e 2) as que são produzidas casualmente ou de forma automática quer por um sistema orgânico (sonho ou imagens visuais de memória) ou por um dispositivo físico (reflexões, fotografias, entre outras). O autor chama ainda a atenção para que não se pode tratar uma representação sem levar em conta o sistema em que é produzida e considera que existe a necessidade de existirem vários registos de representação sendo que nenhuma aprendizagem em Matemática pode progredir sem a compreensão de como se trabalha com os diferentes registros. Dentro dos registos semióticos, Duval (2006) apresenta uma tipologia definida da seguinte forma:

Quadro 2-3 - Representações semióticas (Adaptado de Duval, 2006, p.110)

	Representações Discursivas	Representações não discursivas (Figuras)
Registos Multifuncionais Os processos não são algoritmicos	Em linguagem natural Oralmente Em escrita: teoremas, provas	Icónicas: desenhos, esboços, padrões Não icónicas: figuras geométricas que podem ser feitas com ferramentas
Registos Monofuncionais A maioria dos processos são algorítmicos	Em sistemas simbólicos	Diagramas, gráficos

Na resolução de problemas, Preston e Garner (2003), apresentam uma classificação específica para o tipo de representações matemáticas que pode ser usada no processo de resolução de problemas matemáticos:

(i) verbal, na apresentação dos problemas ou discussão dos mesmos; (ii) pictórico, com recurso a desenhos ou imagens; (iii) numérico/tabular, usado na compreensão do problema, no uso de exemplos específicos que encaixam no problema ou em estratégias de tentativa e erro; (iv) gráfico, mostrando, por exemplo, aumentos ou diminuições e útil a mostrar resultados; e (v) algébrico, usado em generalizações e com uma maior apetência por uma minoria de alunos.

Para além das definições de representações e respetivas tipologias, existe também a forma como as representações estão presentes no processo ensino-aprendizagem, nomeadamente na forma como são trabalhadas. Duval (2006) considera existirem dois tipos de transformações de registos semióticos: Os tratamentos e as conversões. Os tratamentos são transformações de uma representação no mesmo registro em que foi formada. O cálculo é uma forma de tratamento próprio das expressões simbólicas (tais como cálculo numérico, cálculo algébrico). A conversão é a transformação de uma representação noutro tipo de registo, conservando a totalidade ou uma apenas uma parte do conteúdo da representação inicial. A ilustração pode ser a conversão de uma representação linguística numa representação figurativa. A conversão de representações é crucial na aprendizagem da Matemática nomeadamente na resolução de problemas por requerer a capacidade de mudar de registo (Duval, 1999).

Para Duval (2012), os problemas em Geometria exigem, na sua resolução, uma forma de raciocínio que implica referência a uma axiomática local, mas que se desenvolve no registo da língua natural, sendo que esta forma de raciocínio conduz ao desenvolvimento de um tipo de discurso que funciona por substituição, como se se tratasse de uma língua formalizada, ainda que situado num registo em que o discurso é construído de modo natural por associação e por acumulação. O autor considera também que a heurística de problemas de Geometria se refere a um registo de representações espaciais que originam formas de interpretações autónomas. Entre estas interpretações distinguem-se as apreensões: 1) sequencial, usada na construção de figuras ou na descrição, tendo por objetivo a reprodução de uma dada figura; 2) perceptiva, respeitante à interpretação das formas de uma figura geométrica permitindo identificar ou reconhecer diretamente o objeto; 3) discursiva, respeitante à explicitação de propriedades das figuras, para além das que são mostradas através de legendas ou hipóteses; e 4) operatória, referente a possíveis transformações das figuras iniciais e pela perceção de que essas transformações permitem obter novos dados que podem conduzir à solução de um problema.

A linguagem natural e as representações visuais surgem então com especial destaque no tipo de representações usadas nos problemas de Geometria, sendo em seguida abordadas.

A **linguagem natural** é, para Boero, Douek e Ferrari (2008), a forma de representação mais usada pelos alunos em argumentação, sobretudo em explicações e justificações na resolução de problemas, por vezes conjuntamente com representações simbólicas ou visuais. Para os autores isso deve-se a que o simbolismo algébrico tem um conjunto muito pequeno de predicados primitivos levando a que para representar quase todos os predicados seja necessário usar um pequeno conjunto de primitivas, pelo que há muitas expressões algébricas que não são semanticamente congruentes com as expressões verbais que traduzem. Outro problema reside em que a linguagem comum emprega várias expressões indiciais tais como "este número", "a idade da Maria", "o triângulo na parte superior", "o número de bolachas da Maria", que são atualizadas automaticamente de acordo com o contexto, mas não estão disponíveis no simbolismo algébrico. Consideram, ainda, que a linguagem natural desempenha as seguintes funções no trabalho em matemática:

- como forma de mediação entre processos mentais, expressões simbólicas específicas e organizações lógicas nas actividades matemáticas, em particular, as interrelações entre a linguagem natural e a algébrica;
- como ferramenta flexível, podendo ajudar os alunos a gerir linguagens específicas;
- como mediador na dialéctica entre a experiência, a emergência de objectos e propriedades matemáticas e o seu desenvolvimento em sistemas teóricos; e
- como ferramenta em actividades relacionadas com a validação de conjecturas (encontrar contra-exemplos, produzir e gerir argumentos aceitáveis para validação, etc.).

Kollofel (2008), por seu lado, considera que o uso de representações textuais, como a linguagem natural, são uma forma de auxiliar os alunos na análise e compreensão dos enunciados dos problemas, salientando aspectos do domínio que contextualizam os problemas e acompanhando representações aritméticas, por exemplo equações ao permitir percebê-las melhor. Por outro lado, as representações textuais permitem ter a informação de forma sequencial mantendo assim as relações lógicas e temporais.

As figuras, sob a forma de desenhos ou construções feitas com ferramentas**,** desempenham na Geometria, em particular, na resolução de problemas, um papel importante por serem intuitivas e pela sua função heurística (Flores & Moretti, 2006). Cavalcanti (2001) salienta que os desenhos podem ser usados na resolução de problemas, seja na sua interpretação ou como registo da estratégia de solução, podendo alguns alunos começar por fazer desenhos e depois passarem a usar números e sinais. A autora considera que ao desenharem, os alunos explicitam mais facilmente os significados do texto (por exemplo, palavras ou operações) e constroem uma representação mental dos mesmos, dando também mais informação aos professores sobre a forma como pensaram. Esta autora define três formas do uso de desenhos na resolução de problemas, em etapas: A representação de aspetos da situação apresentada, mas sem os relacionar; a representação completa do problema usando apenas desenhos; a mistura de desenhos e sinais matemáticos, podendo aqui interpretar-se como o aluno fazendo uso do desenho para interpretar o problema mas depois usando a escrita matemática para a resolução, como se relacionasse duas linguagens ou fazendo uma resolução numérica e usando o desenho para se certificar de que a sua solução está correta.

No entanto, as representações não devem ser vistas de forma isolada, podendo estar interligadas entre si, como Clement (2004) refere no modelo que apresenta e em que descreve algumas representações possíveis de serem usadas para representar uma ideia matemática, nomeadamente na resolução de problemas:

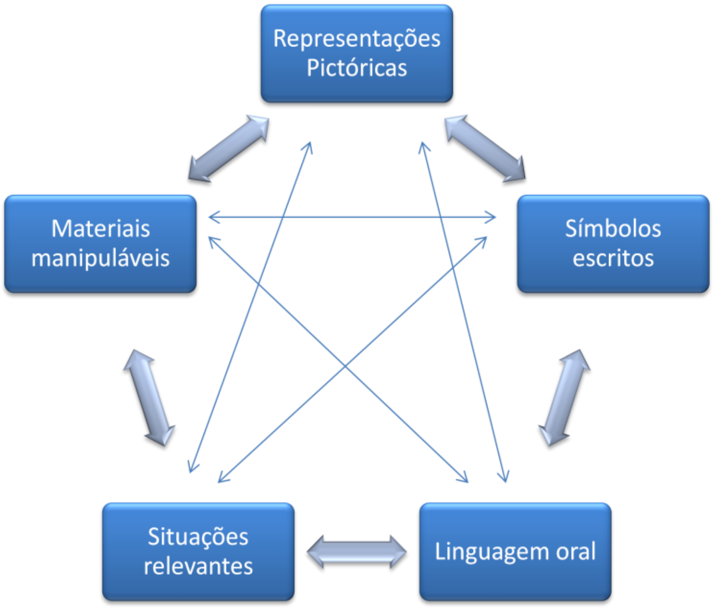


Figura 2.1 - Representações múltiplas (Clement, 2004)

Neste modelo, na figura 2.1, podem ver-se vários tipos de representações matemáticas, podendo ser usadas no mesmo problema, por exemplo, representações pictóricas e símbolos escritos.

O uso de mais do que um tipo de representação na resolução de tarefas aparece mesmo como sendo adequado (Henriques & Ponte, 2014), podendo trazer benefícios para o processo ensino-aprendizagem (Nistal, Van Dooren, Clarebout, Elen & Verschaffel, 2009).

Sobre os motivos do uso de diferentes tipos de representações, Nistal et al. (2009) apresentam três fatores para essa escolha por parte dos alunos, na resolução de uma tarefa:

- as caraterísticas da tarefa - para tarefas diferentes existirão representações mais adequadas sendo que os alunos demonstram um melhor desempenho se sabem selecionar a representação mais adequada.
- caraterísticas dos alunos - os conhecimentos prévios dos alunos também influenciam o uso de representações, nomeadamente o conhecimento concetual e processual anterior sobre as representações, o conhecimento condicional abstrato sobre representações, o conhecimento do domínio específico e a preferência de representação e fatores afetivos.
- caraterísticas do contexto - o contexto também pode ser uma condicionante ao uso de representações, por exemplo, um ensino mais rígido pode levar a que o uso das representações estaja pré-determinado pelo que costuma ser usado nas aulas. Por outro lado, também sugere que as representações estão ligadas às estratégias de resolução das tarefas.

Finalmente, de destacar a recomendação de Henriques e Ponte (2014), para quem "é fundamental ajudar os alunos a ganhar consciência dos diferentes papéis que as representações podem ter em determinado momento da sua exploração e a desenvolver a capacidade de as selecionar e manipular (articulando-as) de modo apropriado na realização dos seus processos de raciocínio."(p. 296).

2.2.2 - Visualização

Associada às representações matemáticas, surge a visualização como um elemento central na Geometria, podendo ser definida como o processo de produzir ou usar representações geométricas ou gráficas de conceitos matemáticos, princípios ou problemas, seja mentalmente, desenhados à mão ou gerados por computador (Zimmermann & Cunningham, 1991).

Para Duval (1999) a visualização baseia-se na produção de representações semióticas e não apenas na perceção (que, ao contrário da visão, não mostra os objetos como eles são em 3D ou numa projeção em 2D), sendo que uma representação semiótica mostra relações, ou melhor, uma organização de relações entre unidades de representação (por exemplo, figuras geométricas em 1D ou 2D, coordenadas, palavras). A visualização não é então intuição mas sim representação.

O autor identifica ainda, na Geometria, três tipos de processos cognitivos encontrando-se estes articulados entre si e devendo o ensino desenvolver os mesmos: 1) visualização - representação de uma afirmação, exploração heurística, verificação; 2) construção - uso de ferramentas: régua, transferidor, programa de computador; e 3) raciocínio - processos discursivos para explicação e prova.

A visualização e as representações aparecem então interligadas, chamando Duval (1999) a atenção para que a atividade geométrica requer mudanças contínuas entre visualização e discurso, sendo que o raciocínio e a visualização estão intrinsecamente ligados à utilização de representações semióticas. Para o autor, "representação e visualização estão no centro da compreensão em Matemática" (p. 1).

Em Henriques (2011), salienta-se a importância de desenvolver a capacidade de usar formas de representação visual, considerando-se que estas devem ser parte integrante da aprendizagem da Matemática. De facto, tanto Gutierrez (1996) como Goldin e Kaput (1996), consideram existir uma relação entre representações, visualização e a compreensão de conceitos matemáticos, tendo mesmo Arcavi (2003), relacionado as dificuldades na visualização com a falta de flexibilidade entre diferentes representações. Este último autor considera, ainda, que "A mostragem visual da informação permite-nos "ver" a história, vislumbrar alguma relação causa-efeito, e possivelmente relembrar isso" (p.218) e que a visualização pode ter um papel importante na resolução de um problema ao permitir interagir com conceitos e significados. Considera também que a visualização pode ter um papel importante no apoio e ilustração dos resultados essencialmente simbólicos, podendo acompanhar uma resolução simbólica, e na clarificação de intuições incorretas em que a informação visual atua de forma a evidenciar que a intuição está incorreta.

Mas a visualização não está apenas ligada ao uso de representações, como referem Ponte, Serrazina, Guimarães, Breda, Guimarães, Sousa, Menezes, Martins e Oliveira,(2007),

> A visualização engloba capacidades relacionadas com a forma como os alunos percepcionam o mundo que os rodeia, e envolve observação, manipulação e transformação de objectos e suas representações, e a interpretação de relações entre os objectos e entre estes e as suas representações. (Ponte et al., 2007, p.20).

Os autores acrescentam, ainda, que "O sentido espacial envolve ainda as noções de orientação e movimento, desempenhando um papel importante na percepção das relações espaciais" (Ponte et al., 2007, p.20).

Outras terminologias podem ser usadas no contexto das capacidades visuais, como por exemplo, raciocínio espacial, que Battista (2007) define como a capacidade para ver, investigar ou refletir sobre objectos espaciais, imagens, relações ou transformações. Clements (1999) apresenta o raciocínio espacial como incluindo a construção e manipulação mental de representações de objetos, relações e transformações, e a visualização espacial como sendo a capacidade de entender e executar movimentos imaginados de objetos a duas ou três dimensões, sendo para isso necessário criar uma imagem mental e manipulá-la. Deste modo, Gutierrez (1996) chama a atenção para que, na área do estudo das capacidades de visualização, não existe um acordo geral sobre a terminologia a ser usada, sendo que se pode ver, por exemplo nuns autores o termo "visualização" e noutros o termo "pensamento espacial" querendo usar o mesmo significado, refletindo a diversidade de áreas de onde provêm. Neste estudo vai ser usado o termo visualização num contexto abrangente baseado na caraterização dada por Ponte et al. (2007), englobando a capacidade de raciocinar sobre os objetos e a relação destes com as suas representações.

Em Loureiro (2009), as atividades realizadas em sala de aula no âmbito do ensino da Geometria surgem como uma forma de desenvolver a capacidade de visualização. Apresenta como exemplo o quadrado, para o qual podem existir formas diferentes de o ver ou representar, servindo raciocínios visuais diferentes, sugerindo que ao longo do processo de aprendizagem os alunos devem ter contacto com várias formas de representação, isoladas ou articuladas. A autora salienta, igualmente, que cada figura geométrica é representada por um protótipo que não deve ser rígido e que deve ir evoluindo ao longo da aprendizagem, alertando para que protótipos rígidos regulam o desenvolvimento do raciocínio geométrico nos alunos. Para que isto não aconteça, sugere o uso de estruturas geométricas diversificadas que permitam passar de uma representação para outra e estabelecer relações entre as mesmas, para que assim se fomente a construção de imagens mentais. Também para Breda et al. (2011), a visualização pode ser inicialmente desenvolvida através da construção e manipulação de representações concretas passando-se posteriormente para a representação mental de formas, relações e transformações, sendo este processo potenciado pelo trabalho com figuras geométricas, por exemplo, na identificação das suas caraterísticas ou analisando alterações nas suas propriedades.

David e Tomaz (2012), por seu lado, reforçam a importância de se usarem mais representações visuais e construções geométricas nas aulas, mas alertam para que isso por si só não é suficiente para o desenvolvimento da visualização, sendo necessário que os alunos percebam o que estão a construir.

Relativamente às representações matemáticas, as normas do NCTM (2000) preconizam que os alunos devem:

- criar e organizar representações para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas;
- selecionar, aplicar e traduzir entre representações matemáticas para resolver problemas;
- usar representações matemáticas para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociais e matemáticos.

No Programa de Matemática do Ensino Básico publicado em 2007, um dos objetivos gerais era explicitado do seguinte modo: "Os alunos devem ser capazes de lidar com ideias matemáticas em diversas representações" (p.4) e "Os alunos devem conhecer e compreender os diferentes tipos de representações, ser capazes de as utilizar em diferentes situações e de seleccionar a representação mais adequada à situação" (p.5). No PMEB (2013) não existe uma orientação geral sobre o uso de representações matemáticas, tendo por isso consultado as orientações do NCTM (2000) e do Programa de Matemática do Ensino Básico publicado em 2007.

2.3 - O Ensino e a Aprendizagem da Geometria

2.3.1 - Orientações Curriculares

Nas normas do NCTM (2000) relativas ao ensino da Geometria para os níveis 6 a 8 (onde se inclui o 7.º ano, que é foco deste estudo), a capacidade dos alunos em visualizar e raciocinar sobre relações espaciais são referidas como fundamentais, sendo importante que analisem, construam, componham e decomponham os objetos, podendo usar variados meios, tais como material de desenho, modelos geométricos ou *software* de geometria dinâmica. Os alunos devem também ser capazes de criar objetos a partir de uma descrição geométrica, e escrever uma descrição, incluindo as suas propriedades geométricas, para um determinado objeto.

O que se espera que os programas permitam aos alunos e o que se espera dos alunos no domínio da Geometria está representado no quadro seguinte:

Quadro 2-4 – Expetativas dos programas e das aprendizagens dos alunos em Geometria (NCTM, 2000)

Os programas devem permitir aos alunos:	Os alunos devem:
Analisar as caraterísticas e propriedades de figuras geométricas a duas e três dimensões e desenvolver argumentos matemáticos sobre relações geométricas	descrever com precisão, classificar e perceber as relações entre tipos de objetos de duas e três dimensões usando as propriedades que os definem; compreender as relações entre ângulos, medidas dos lados, perímetros, áreas e volumes de objetos similares; criar e criticar argumentos indutivos e dedutivos relativos a ideias geométricas e relações, tais como, congruência, semelhança e a relação pitagórica.
Especificar localizações e descrever relações espaciais usando coordenadas geométricas e outros sistemas de representação	usar coordenadas geométricas para representar e analisar propriedades de formas geométricas; usar coordenadas geométricas para analisar formas geométricas especiais, tais como polígonos regulares e os que têm pares de lados paralelos ou perpendiculares.
Aplicar transformações e usar a simetria para analisar situações geométricas	descrever tamanhos, posições e orientações de figuras sob transformações informais; analisar congruências, semelhanças.
Usar a visualização, o raciocínio espacial e a modelação geométrica para resolver problemas	desenhar objetos geométricos com propriedades específicas tais como comprimento de lados ou amplitudes de ângulos; usar representações de objetos a duas ou três dimensões para visualizar e resolver problemas tais como os que envolvem as áreas de superfícies ou volumes; usar ferramentas visuais tais como redes para representar e resolver problemas; usar modelos geométricos para representar e explicar relações numéricas e algébricas; reconhecer e aplicar ideias geométricas e relações noutras áreas, fora das aulas de Matemática.

2.3.2 - Perspetivas sobre o ensino e a aprendizagem da Geometria

Como forma de analisar como se desenvolve a aprendizagem na Geometria, Pierre e Dina van Hiele criaram um modelo teórico para a evolução do pensamento geométrico, como descrito em Crowley (1987). Este modelo - o Modelo de van Hiele - está assente numa sequência de níveis de compreensão dos conceitos através dos quais os alunos progridem. O progresso de um nível para o seguinte ocorre através da vivência de atividades adequadas e coordenadas, sendo os níveis de raciocínio descritos pelos autores os seguintes:

Nível 0. Visualização ou Reconhecimento - Nesta fase inicial, os alunos vêm o espaço apenas como algo que existe em torno deles. Os conceitos geométricos são vistos como entidades totais, não como tendo componentes ou atributos. As figuras geométricas, por exemplo, são reconhecidas, pela sua forma, como um todo e não pelas suas partes ou propriedades. Um aluno neste nível pode aprender vocabulário geométrico, pode identificar formas especificadas, por exemplo quadrados. No entanto, não reconheceria que os lados opostos nos quadrados são paralelos, ou seja não reconhece as relações entre as componentes das figuras nem entre as figuras;

Nível 1. Análise - Neste nível, inicia-se a análise de conceitos geométricos. Por exemplo, através da observação e experimentação os alunos começam a distinguir as características das figuras. Estas propriedades são depois utilizadas para classificar as formas, que são reconhecidas como tendo partes e são reconhecidas por estas. Neste nível, no entanto, as relações entre as propriedades ainda não são explicadas pelos alunos e as definições ainda não são compreendidas;

Nível 2. Dedução informal - Neste nível, os alunos conseguem relacionar propriedades tanto nas figuras (por exemplo, num quadrilátero, se os lados opostos são paralelos então os ângulos opostos têm a mesma amplitude) como entre figuras (um quadrado é um retângulo, porque tem todas as propriedades de um retângulo). Assim, podem deduzir propriedades de uma figura e reconhecer classes de figuras. A inclusão de classes é também compreendida, as definições são significativas, os argumentos informais podem ser seguidos e dados. Os alunos neste nível, no entanto, não compreendem o alcance da dedução como um todo ou o papel dos axiomas. Empiricamente os resultados obtidos são frequentemente utilizados em conjunto com técnicas de dedução. Os alunos conseguem seguir provas formais, mas não vêm como a ordem lógica pode ser alterada nem como construir uma prova a partir de premissas diferentes;

Nível 3. Dedução Formal - Neste nível, os alunos conseguem perceber o significado da dedução como uma maneira de estabelecer uma teoria geométrica dentro de um sistema axiomático. A relação e papel de termos indefinidos, axiomas, postulados, definições, teoremas e a prova são observados. Um aluno neste nível pode construir provas, podendo fazê-lo em mais do que uma forma. A interação de condições necessárias e suficientes é entendida. Os alunos entendem a Geometria como um sistema dedutivo;

Nível 4. Rigor - Neste nível, os alunos trabalham em diferentes sistemas axiomáticos (e conseguem compará-los), incluindo geometrias não euclidianas.

Crowley (1987), da sua análize ao modelo de van Hiele, concluiu que este apresenta as seguintes caraterísticas:

- É um modelo sequencial, ou seja, os alunos devem percorrer os diferentes níveis sequencialmente do nível mais básico ao mais elevado e aprender as estratégias de um nível para passarem ao seguinte;
- Existe um avanço dos alunos mais em função dos conteúdos trabalhados e métodos de ensino do que em função da sua idade, sendo que nenhum método de ensino permite saltar um nível. Diferentes métodos de ensino podem porporcionar um maior ou menor desenvolvimento do mesmo;
- É um modelo intrínseco e extrínseco uma vez que as aprendizagens feitas pelos alunos num nível são usadas no nível seguinte na obtenção de novas aprendizagens;
- Em cada nível existem símbolos linguísticos próprios e relações entre os mesmos sendo que uma relação correta num nível pode ser alterada noutro nível. Por exemplo, uma figura pode ser classificada, além de quadrado, como retângulo ou losango;

- Se o professor desenvolver o processo educativo para um nível mais elevado do que aquele em que os alunos se encontram, estes terão dificuldade em acompanhar o processo educativo e pode não ocorrer progresso.

Burger e Shaughnessy (1986), com o objetivo de investigarem os Níveis de van Hiele apresentados por alunos desde o pré-escolar até à universidade, fizeram um estudo longitudinal de três anos baseado em entrevistas sobre a realização de tarefas de Geometria. Neste estudo, puderam observar que cada aluno se encontrava predominantemente num dado nível de raciocínio e que se confirmava a natureza hierárquica dos níveis mas também que era difícil atribuir um nível a alguns alunos que aparentavam encontrar-se numa transição entre níveis. Notaram ainda que a colocação de um aluno num dado nível não dependia estritamente da sua idade ou ano escolar. Os autores puderam ainda obter algumas evidências que levam a concluir que os níveis de van Hiele não são discretos (ao contrário do que indicava o modelo) e que pode ocorrer um aluno evidenciar raciocínios de diferentes níveis em diferentes tarefas (ou até mesmo dentro da mesma tarefa).

Num outro estudo, também realizado com alunos de diferentes faixas etárias (incluindo alunos na faixa etária dos alunos do 7.º ano em Portugal), Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991) chegaram a conclusões semelhantes. Estes autores puderam observar que, apesar da maioria dos alunos mostrar, nas suas respostas, estar predominantemente num dado nível, também apresentam respostas típicas de outros níveis podendo até acontecer que os alunos demonstrem nas suas respostas dois níveis dominantes, concluindo que os níveis de van Hiele não são discretos. Além disso, observaram que demora muito tempo para um aluno conseguir atingir todas as aprendizagens de um dado nível, começando estes por não ter qualquer conhecimento nesse nível e seguindo uma progressão ao longo do tempo que lhes permite raciocinar de acordo com esse nível.

Como se pode verificar, o modelo de van Hiele não é consensual, pois os níveis não aparentam ser discretos mas aparece como um indicador das aprendizagens que os alunos podem fazer, ao se ter concluído que os alunos, na sua maioria, parecem estar predominantemente num determinado nível de raciocínio.

No seu trabalho realizado sobre o ensino da Matemática no ensino básico em Portugal, Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) consideram que deve existir uma evolução na forma como se dá o estudo de propriedades e relações geométricas, tendo início com experiências concretas e evoluindo para processos mais formalizados, para dessa forma promover o desenvolvimento da capacidade de organização lógica do pensamento.

Na Geometria, e mais especificamente em relação à classificação de figuras geométricas, Breda et al. (2011), apresentam a classificação como sendo a organização de um conjunto de objetos segundo determinados critérios, estando associada ao estabelecimento de relações entre os objectos, a identificação de características e a construção de definições e podendo ser considerada uma componente básica do raciocínio matemático ao exigir a identificação de semelhanças e diferenças entre objetos. A classificação dos objetos permite assim obter e relacionar caraterísticas dos mesmos. Os autores chamam a atenção para que o uso de determinados critérios para classificar os objetos pode evidenciar a consciência que se tem dos modos como se estes se relacionam uns com os outros. Com base em estudos prévios, estes autores também salientam alguns aspetos a considerar em classificação matemática, tais como a distinção entre os critérios que permitem classificar de outros que não o fazem; a verificação de que critérios diferentes podem dar origem à mesma classificação; a dedução de possíveis critérios que tenham dado origem a uma classificação; a sobreposição de classificações, refinando-as; a classificação pela via das transformações; a utilização de representações diversas para classificar.

Para ilustrar os aspetos referidos, Loureiro (2008) apresenta três possíveis formas de classificar quadriláteros, que se apresentam na figura abaixo:

Sem lados paralelos	Com lados paralelos

Sem lados paralelos	Com dois lados paralelos	Com dois pares de lados paralelos

Sem ângulos retos	Com 1 ângulos reto	Com dois ângulos retos	Com 4 ângulos retos

Figura 2.2 - Classificação de Quadriláteros (Loureiro, 2008, p.3)

Breda et al. (2011), analisando o trabalho de Loureiro (2008), definem também uma forma de classificar os quadriláteros em duas classes, com ou sem um par de lados paralelos e, considerando apenas o conjunto dos quadriláteros com pelo menos um par de lados paralelos (trapézios), apresentam uma possível forma de classificação:

Figura 2.3 - Classificação de Quadriláteros (Breda et al., 2011, p. 37)

No ensino da Geometria, Loureiro (2009) considera ainda que:

> O trabalho em geometria não deve centrar-se apenas nos objectos geométricos, devendo atender muito mais às acções que podem ser aplicadas sobre eles, sob pena das crianças só aprenderem nomes de figuras e começarem a distingui-las apenas pelo seu aspecto ou posição. As ações como classificação, composição, decomposição, construção e transformação devem ter um destaque especial ao longo de toda a aprendizagem. (Loureiro, 2009, p.63)

A necessidade de existir uma abstração na classificação está também patente em Leung (2008), quando adverte para que os alunos tendem a pensar sobre as figuras apenas pela sua aparência e não pelas propriedades comuns a todos os elementos de uma classe, inibindo a capacidade de resolver problemas geométricos abstractos que requeiram raciocínio cognitivo lógico. Assim, o ensino das figuras geométricas não se deve basear em apenas listar propriedades das mesmas associadas a uma imagem, podendo-se mostrar que um tipo de figuras, por exemplo um quadrilátero, tem propriedades também de outro tipo de figuras e que alterando propriedades, um tipo de quadrilátero pode transformar-se noutro. Este autor considera, também, que apenas comparar a forma de figuras entre si não ajuda à aprendizagem da inclusão de classes, mas é necessário saber o que distingue uma classe de outra, usando propriedades inclusivas e transitivas.

2.3.3 - A Resolução de Problemas em Geometria

A resolução de problemas no contexto da Geometria é preconizada por diversos autores, como Breda et al. (2011), que vêm nos problemas geométricos um campo de aplicação do raciocínio desenvolvido pelos alunos e uma forma de aprenderem a compreender melhor o mundo à sua volta. São ainda considerados um bom meio para os alunos desenvolverem a comunicação matemática, ao interpretarem um problema e ao explicarem o seu processo de resolução, sendo que os problemas geométricos que apresentam várias formas de resolução levam os alunos a encontrar uma estratégia que lhes pareça mais adequada.

Os autores acima referidos, consideram que, inicialmente, o professor deve permitir que os alunos resolvam o problema usando a estratégia com que se sentem mais confortáveis ou que consideram mais adequada, podendo posteriormente ser discutida em grande grupo a adequabilidade de algumas. Também sugerem que na discussão de problemas geométricos que estejam associados à observação de figuras, estas sejam projetadas para permitir um melhor acompanhamento por parte dos alunos. Defendem, igualmente, que o mesmo problema pode ser resolvido de forma diferente nos diferentes ciclos, havendo um progressivo uso de estratégias de resolução de natureza mais formal, podendo os alunos recorrerem a propriedades de polígonos que conhecem ou recorrer ao uso de materiais de desenho ou a *software* de geometria. A resolução de problemas em Geometria é também apresentada como podendo estar associada à criação de conjeturas e verificação das mesmas, podendo estas conjeturas ser confirmadas através da experimentação, em ciclos iniciais, ou através do uso de expressões matemáticas em anos mais avançados.

Em Abrantes (2001), considera-se que a Geometria é especialmente propícia a um ensino fortemente baseado na realização de descobertas e na resolução de problemas, fazendo apelo à intuição e à visualização. Os problemas na Geometria aparecem aqui como podendo ter várias tipologias nomeadamente de visualização e de representação, de construção e lugares geométricos, em torno das ideias de forma e de dimensão, envolvendo conexões com outros domínios da Matemática ou apelando a processos de "organização local" da Matemática, nomeadamente de classificação e hierarquização a partir de determinadas definições e propriedades.

2.3.4 Dificuldades dos alunos em Geometria

A Geometria é uma área da Matemática em que os alunos apresentam muitas dificuldades, de acordo com os relatórios sobre exames a provas de aferição elaborados pelo GAVE, podendo ver-se, por exemplo, no relatório sobre o exame de Matemática do 9.º ano de Matemática em 2011, que foi o domínio em que houve o pior desempenho. No exame de Matemática do 6.º ano em 2012, o tema Geometria e Medida apresentou apenas um valor de classificação média em relação à cotação total de 51,9%, sendo que no exame do 9.º ano (em 2012) o domínio da Geometria foi também aquele em que se verificou o pior desempenho. Também no relatório dos testes intermédios de Matemática do 8.º e 9.º anos de 2012, é referida a dificuldade dos alunos em resolver problemas de Geometria, nomeadamente na interpretação dos dados do enunciado.

Na resolução de problemas geométricos pode ver-se então uma incapacidade de extrair a informação necessária dos dados que lhes são apresentados, sendo que a linguagem geométrica aparece como uma barreira na aprendizagem (Idris, 2009; Muller, 1994), podendo ser um dos fatores que dificultam a resolução de problemas, ao não ser feita uma compreensão do vocabulário, nomeadamente nas definições e propriedades (Muller, 1994). Além da interpretação dos enunciados, também pode haver uma incapacidade para interpretar respostas e tirar conclusões (Idris, 2009). Por outro lado, pode acontecer que exista um raciocínio correto mas a escrita do mesmo não seja feita com argumentos precisos (Muller, 1994).

Em resumo, a resolução de problemas geométricos pode estar comprometida na interpretação dos enunciados, na escrita das resoluções ou na interpretação das respostas. No trabalho com figuras geométricas, os alunos também denotam dificuldades na visualização (Duval, 1999; Idris, 2009), nomeadamente em reconhecer componentes, propriedades e relações entre propriedades (Clements & Battista, 1992), ou em conseguir trabalhar com figuras geométricas de forma abstrata (Leung, 2008).

Capítulo 3 - Unidade de Ensino

3.1 - Contexto Escolar

3.1.1 - Caraterização da escola

A escola onde decorreu o estudo é a Escola Secundária D. Luísa de Gusmão. Esta escola encontra-se atualmente integrada no agrupamento de escolas Nuno Gonçalves e está situada na freguesia da Penha de França em Lisboa.

O agrupamento de escolas Nuno Gonçalves tem uma oferta educativa desde a educação pré-escolar até ao 12.º ano.

A Escola Secundária Dona Luísa de Gusmão, para além do 3.º ciclo do ensino básico, oferece, no âmbito do ensino secundário, os Cursos Científico-Humanísticos – Ciências e Tecnologias; Ciências Socioeconómicas; Ciências Línguas e Humanidades e Artes Visuais – e Cursos Profissionais Nível IV - Técnico de Gestão e Técnico de Apoio Psicossocial. No 3.º ciclo, existe como Oferta Complementar, Artes Musicais.

3.1.2 - Caraterização da turma

Este estudo incidiu sobre uma turma do 7.º ano da referida escola. É constituída por 20 alunos, sendo 12 do género feminino (uma das alunas apenas integrou a turma no decorrer no 2.º período) e 8 do género masculino. A turma integra dois alunos com Necessidades Educativas Especias e todos os alunos têm a língua portuguesa como língua materna.

Além disso, a turma apresenta 7 alunos que já tiveram pelo menos uma retenção no seu percurso escolar e, num dos casos, a retenção foi no 7.º ano, sendo que este aluno apresenta plano de recuperação. Os alunos que estão a frequentar o 7.º ano pela primeira vez são todos provenientes da Escola Básica Nuno Gonçalves, à exceção de uma aluna.

Da análise do Plano Anual da Turma, pode ver-se que as idades dos alunos estão compreendidas entre os 12 e os 15 anos, sendo a média de aproximadamente 13 anos (no início do ano letivo), que todos os alunos vivem com pelo menos um dos progenitores (maioritariamente a mãe) e que a maior parte dos pais trabalha. As características da turma, destacadas como pontos fortes, são descritas no referido documento como: Curiosidade face a novas aprendizagens, simpatia, consciência das regras do funcionamento da sala de aula, havendo contudo alguma inconsciência e infantilidade no cumprimento das mesmas. As características consideradas menos positivas são: Pouco empenho nas atividades propostas e falta de método e organização no trabalho, falta de assiduidade e pontualidade de alguns alunos, desrespeitando dessa forma as regras de funcionamento da sala de aula. Considera-se também que alguns alunos desrespeitam o trabalho dos professores e a aprendizagem dos colegas da turma e que são, no geral, pouco autónomos.

A visão que tenho da turma é muito similar à descrita acima, apenas acrescento, como aspeto positivo, o fazerem os trabalhos que são enviados para casa (no geral) e saliento a dificuldade em trabalharem em grupo devido a serem tendencialmente muito conversadores.

No gráfico seguinte apresentam-se os dados referentes à avaliação na disciplina de Matemática nos três períodos do corrente ano letivo, podendo ver-se o número de alunos para cada nível em cada período letivo. De notar que no 1º período existiam 19 alunos e nos períodos seguintes 20 alunos.

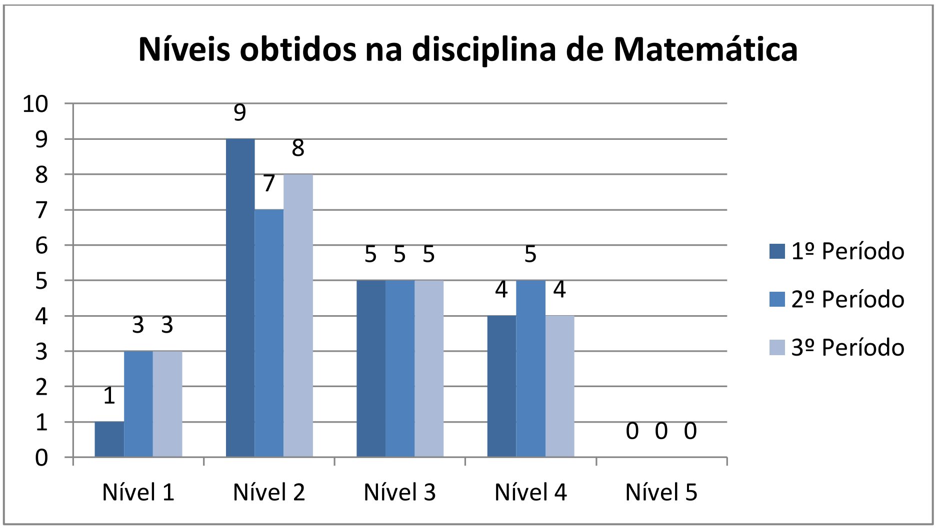


Figura 3.1 – Número de alunos por nível de classificação em cada período

Como se pode verificar, no final do 1º período a percentagem de níveis inferiores a três foi superior a cinquenta por cento e nenhum aluno obteve nível cinco.

No final do 2.º período, a percentagem de níveis inferiores a três, igualou a percentagem de níveis iguais ou superiores a três devido à subida de nível de um aluno em relação ao 2.º período. De destacar que houve três alunos com nível um e que aumentou a número de alunos com nível quatro.

No 3.º período letivo, voltou a aumentar a percentagem de alunos com nível inferior a três (ultrapassando os cinquenta por cento), devido ao aluno que tinha subido o seu nível no 2.º período, e que voltou a descer. Também se verificou que o aluno que tinha subido o seu nível de três para quatro voltou ao nível três. Não houve, novamente, nenhum aluno com nível cinco e mantiveram-se os alunos com nível um.

3.2 - Ancoragem da unidade de ensino no programa

A unidade de ensino sobre a qual se debruçou o estudo foi o tópico "Figuras Geométricas" do domínio "Geometria e Medida", no 7.º ano do Programa de Matemática para o Ensino Básico (ME, 2013).

Este tópico aparece no programa referido abordado nos 1.º e 2.º ciclos, sendo o objetivo no 3.º ciclo uma maior formalização dos conceitos, a par de uma inicialização das demonstrações, como se pode ler no programa "Este ciclo constitui uma importante etapa na formação matemática dos alunos, sendo simultaneamente um período de consolidação dos conhecimentos e capacidades a desenvolver durante o Ensino Básico e de preparação para o Ensino Secundário. Em particular, é fundamental que comecem a ser utilizados corretamente os termos (definição, propriedade, teorema, entre outros) e os procedimentos demonstrativos próprios da Matemática" (ME, 2013, p. 19).

Durante o 1.º ciclo, no 1.º e 2.º ano há uma primeira abordagem das figuras geométricas, em que o objetivo é os alunos conseguirem fazer um reconhecimento visual de figuras geométricas em variadas posições e desenhar algumas figuras. No 2.º ano, são ainda abordados os polígonos, linhas poligonais, triângulos e quadriláteros, identificando-as numa composição e efetuando composições de figuras geométricas. São também identificados e representados quadriláteros e reconhecidos os losangos e retângulos como casos particulares de quadriláteros e o quadrado como caso particular do losango. No 3.º e no 4.º ano, o foco do estudo de figuras geométricas recai sobre a circunferência. No 4.º ano, abordam também o conceito de ângulo, polígono regular e categorizam um retângulo como sendo um quadrilátero de ângulos retos. É feita a comparação de ângulos através da deslocação de pontos.

No 2.º ciclo, mais especificamente no 5.º ano, continua-se a desenvolver o estudo dos ângulos, nomeadamente nos triângulos, estuda-se os ângulos opostos e adjacentes de um paralelogramo e a congruência de triângulos.

Para o 3.º ciclo, e em específico para o 7.º ano onde lecionei esta unidade de ensino, o programa refere os seguintes conteúdos para o tópico "Figuras Geométricas":

Linhas Poligonais e Polígonos

- Linhas poligonais; vértices, lados, extremidades, linhas poligonais fechadas e simples; parte interna e externa de linhas poligonais fechadas simples;
- Polígonos simples; vértices, lados, interior, exterior, fronteira, vértices e lados consecutivos;
- Ângulos internos de polígonos;
- Polígonos convexos e côncavos; caracterização dos polígonos convexos através dos ângulos internos;
- Ângulos externos de polígonos convexos;
- Soma dos ângulos internos de um polígono;
- Soma de ângulos externos de um polígono convexo;
- Diagonais de um polígono.

Quadriláteros

- Diagonais de um quadrilátero;
- Paralelogramos: caracterização através das diagonais e caracterização dos retângulos e losangos através das diagonais;
- Papagaios: propriedade das diagonais; o losango como papagaio;
- Trapézios: bases; trapézios isósceles, escalenos e retângulos; caracterização dos paralelogramos;
- Problemas envolvendo triângulos e quadriláteros.

Nas metas, encontram-se os objetivos gerais para o tópico “Figuras Geométricas” que são: Classificar e construir quadriláteros e Resolver problemas.

No 7.º ano aborda-se de forma mais formal e completa as linhas poligonais e os polígonos, nomeadamente em relação à terminologia usada. Categoriza-se os polígonos em côncavos ou convexos. Em relação aos ângulos internos, generaliza-se a soma das amplitudes dos ângulos internos de triângulos para polígonos em geral em função do número de lados. Além disso, aprofunda-se o estudo dos quadriláteros, classificando-os e construindo-os em função das suas propriedades. É também introduzida a demonstração de propriedades geométricas, podendo estas integrar a resolução de problemas.

Para além das metas e conteúdos da unidade lecionada, pretende-se também que que os alunos vejam a matemática como um todo coerente e que sejam trabalhados o conhecimentos de factos e procedimentos, o raciocínio matemático, a comunicação matemática e a resolução de problemas de forma integrada no processo de ensino na disciplina, ao longo dos vários ciclos de ensino (PMEB, 2013).

3.3 - Conceitos Matemáticos

Apresento agora um resumo dos conceitos que foram abordados na unidade lecionada, "Figuras geométricas". Esta unidade inicia-se com o estudo de linhas poligonais e polígonos, seguindo-se o estudo de ângulos internos e externos nos polígonos. Numa segunda parte da unidade surgem então os quadriláteros, com as suas propriedades e classificação.

Linhas Poligonais e Polígonos

Uma **linha poligonal** é uma linha plana formada por segmentos de reta consecutivos (**lados**), tal que pares de **lados consecutivos** partilham um extremo (**vértice**), lados que se intersectam não são colineares e não existem mais de dois lados a partilhar um vértice.

Se as extremidades da linha coincidirem, a linha diz-se **fechada**. Uma linha poligonal é **simples** se os únicos pontos comuns a dois lados são vértices. Uma linha poligonal fechada divide o plano numa região limitada, a **parte interna**, e numa região ilimitada, **a parte externa** da linha.

O conjunto de pontos formado pela união de uma linha poligonal fechada com a sua parte interna chama-se **polígono simples**. A união dos lados do polígono designa-se fronteira. Designa-se por **[ABCD]** um polígono de lados [AB], [BC], [CD] e [DA].

Os polígonos podem ser côncavos ou convexos. Num polígono convexo, quaisquer que sejam dois dos seus pontos, o segmento de reta que os une está contido no polígono.

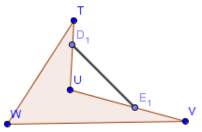


Figura 3.2 - Polígono Côncavo

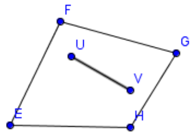


Figura 3.3 - Polígono Convexo

Ângulos Internos e Ângulos Externos

Um **ângulo interno** de um polígono é um ângulo de vértice coincidente com um vértice do polígono, de lados contendo os lados do polígono que se encontram nesse vértice, tal que um setor circular determinado por esse ângulo está contido no polígono.

Um **ângulo externo** de um polígono convexo é um ângulo suplementar e adjacente a um ângulo interno do polígono.

Um polígono é convexo quando (e apenas quando) os ângulos internos são todos convexos e, neste caso, o polígono é igual à interseção dos respetivos ângulos internos.

Num polígono com n lados, a **soma das amplitudes dos ângulos internos** é dada pela expressão: $(n-2)180°$.

Num polígono convexo, associando a cada ângulo interno um externo adjacente, a soma destes é 360^0.

Quadriláteros

Designa-se por **Quadrilátero** simples ou quadrilátero um polígono simples com 4 lados.

Designa-se por **Diagonal** de um dado polígono qualquer segmento de reta que une dois vértices não consecutivos. Um quadrilátero tem duas diagonais e se for convexo as suas diagonais intersetam-se num ponto interior ao quadrilátero.

Designa-se por **Trapézio** um quadrilátero simples com dois lados paralelos, designados por bases.

Trapézio Isósceles - os dois lados opostos não paralelos são geometricamente

Trapézio retângulo - um dos lados não paralelos é perpendicular às bases

Trapézio escaleno - os dois lados opostos não paralelos têm comprimentos

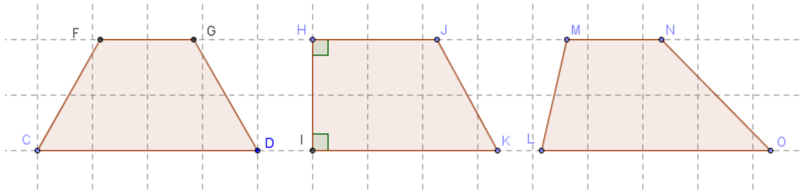


Figura 3.4 - Trapézio Isóscecles, Trapézio Retângulo e Trapézio Escaleno

Designa-se por **Paralelogramo** um quadrilátero com os lados paralelos dois a dois.

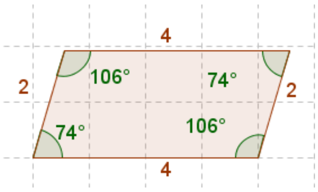


Figura 3.5 - Paralelogramo

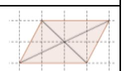
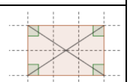
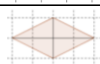
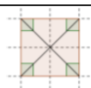
Um paralelogramo é um retângulo quando (e apenas quando) as suas diagonais são geometricamente iguais.

Um paralelogramo é um losango quando (e apenas quando) as diagonais são perpendiculares.

Um quadrilátero é um paralelogramo quando (e apenas quando) as suas diagonais se bissetam.

Todo o trapézio em que as bases são geometricamente iguais é um paralelogramo.

Quadro 3-1 - Paralelogramos

Paralelogramo	Em todos eles: Têm dois pares de lados paralelos e as diagonais bissetam-se. Os ângulos opostos têm a mesma amplitude. Dois ângulos consecutivos são suplementares. Os lados opostos são geometricamente iguais	
Paralelogramo Obliquângulo	Sem ângulos internos retos.	
Retângulo	Com quatro ângulos internos retos. As diagonais são geometricamente iguais.	
Losango	Com quatro lados geometricamente iguais. As diagonais são perpendiculares.	
Quadrado	Com quatro lados geometricamente iguais e quatro ângulos internos retos. As diagonais são geometricamente iguais e perpendiculares.	

Designa-se por **Papagaio** um quadrilátero com dois pares de lados consecutivos geometricamente iguais. As suas diagonais são perpendiculares. Um losango é um papagaio.

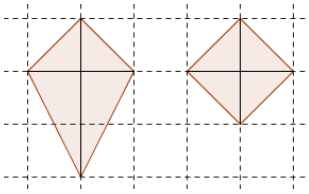


Figura 3.6 - Papagaios

As diagonais de um papagaio são perpendiculares.

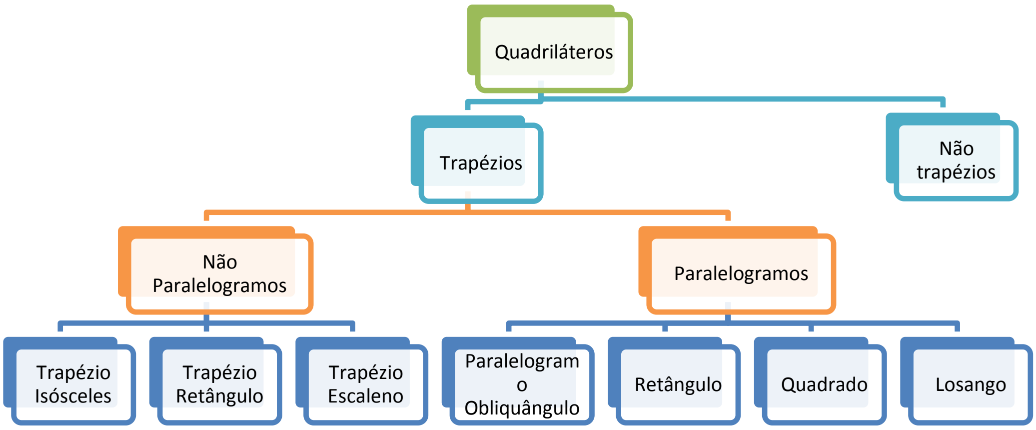


Figura 3.7 - Classificação de Quadriláteros

3.4 - Estratégias de Ensino e Recursos

No delineamento das estratégias de ensino tive como principal objetivo a promoção das aprendizagens dos alunos, com compreensão, procurando ir ao encontro das orientações do PMEB (ME, 2013), nomeadamente as finalidades do ensino da Matemática e os objetivos, bem como as metas apresentadas para esta unidade. Além disso, tive em observação a literatura, as orientações do NCTM (2000) no que respeita ao ensino da Geometria e à resolução de problemas e as principais dificuldades referidas na literatura em relação ao ensino da Geometria, nomeadamente na visualização e na interpretação de problemas. Como fator de grande importância surgiram também as caraterísticas da turma e os recursos disponíveis.

A resolução de problemas foi uma das estratégias de ensino que usei, em seguimento da literatura (Boavida et al., 2008 ; Lester, 2013; Ponte, 1992; Schoenfeld, 1996; Van de Walle, 2006;). Esta estratégia é, inclusivé, sugerida em relatórios do GAVE sobre exames e testes intermédios (ME, 2012; ME, 2013) e também em Ramalho (2005, p.57) como forma de se ultrapassar as dificuldades que os alunos sentem na interpretação de problemas, em expor raciocínios e na falta de espírito crítico. Procurei, no entanto, usar a resolução de problemas não de forma isolada e como uma meta a cumprir mas integrada no processo de ensino, tendo em vista desenvolver a aprendizagem dos alunos (NCTM, 2000). Seguindo as recomendações de Polya (1945) na resolução dos problemas, coloquei questões aos alunos, de forma a dar-lhes orientação na interpretação dos enunciados, procurando não dar demasiadas indicações.

Nas estratégias de ensino que delineei também procurei fazer conexões com outras áreas da Matemática (Boavida et al., 2008), nomeadamente com a Álgebra, através do uso de expressões algébricas e na construção e resolução de equações, promovendo desta forma uma visão mais abrangente da Matemática pelos alunos.

Procurei, dentro do possível, ter um ensino exploratório, em particular em tarefas investigativas ou na resolução de problemas, já que, desta forma "a ênfase desloca-se da atividade 'ensino' para a atividade mais complexa 'ensino-aprendizagem'" (Ponte, 2005, p. 13), criando um maior envolvimento dos alunos, implicando "da parte do professor um trabalho correspondente, tanto na fase de preparação como na aula, no acompanhamento e monitorização dos alunos" (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2012). Deste modo, houve uma fase de apresentação das tarefas, uma fase de trabalho autónomo pelos alunos e uma última fase de discussão e síntese (Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008)

Na fase de apresentação, procurei esclarecer dúvidas que surgissem mas de modo a não dar as respostas às questões. Durante o trabalho autónomo, fui esclarecendo dúvidas que surgissem e verificando que os alunos estavam a realizar as tarefas de acordo com os objetivos das mesmas, ao mesmo tempo que identificava possíveis erros e verificava as resoluções que íam surgindo e se correspondiam ao previsto na minha planificação. Por outro lado, durante esta fase, também identificava resoluções a serem discutidas, procurando as que trouxessem uma mais valia para o processo de ensino aprendizagem. A discussão em turma das tarefas após o trabalho autónomo dos alunos, permitiu aos alunos confrontarem as suas diferentes estratégias e resultados, identificarem os seus erros e outras resoluções possíveis ou mais adequadas, ainda que a sua forma de resolver estivesse correta. Nalgumas tarefas, foi também usada durante as discussões a projeção de figuras geométricas, usando o Geogebra para um melhor acompanhamento dos alunos (Breda et al., 2011).

Como forma de trabalho em sala de aula, optei por trabalho individual ou a pares pois na turma em questão os alunos demonstraram dificuldade em trabalhar em grupo, estando, aliás, uma parte significativa deles sentados isoladamente devido a serem tendencialmente muito conversadores. O trabalho em grupo de mais de dois alunos poderia fazer com que o tempo da aula não fosse frutuoso devido a conversas paralelas entre os alunos, pelo que evitei. Procurei, no entanto que o trabalho fosse a pares para a maioria dos alunos, permitindo desta forma que houvesse discussão de estratégias ou resultados entre eles.

Os recursos que usei também procuraram ir ao encontro das metas curriculares e dos objetivos definidos para esta unidade de ensino, tendo-se usado materiais de desenho e medida para construir quadriláteros: régua, esquadro e transferidor. O uso de materiais de desenho teve como objetivo desenvolver a capacidade de visualização, como sugerido nas normas do NCTM (2000) e em Loureiro (2009), devendo os alunos construir figuras a partir de uma descrição geométrica ou não. As construções de figuras foram usadas para aplicação das propriedades, procurando-se que nas tarefas houvesse necessidade de os alunos relacionarem as propriedades com o desenho que tinham que fazer, ou seja, houvesse a necessidade de pensarem, a partir dos dados que lhes eram fornecidos, sobre as propriedades e relações para construírem um quadrilátero. Como defendem Breda et al. (2011), à medida que progridem na escolaridade, os alunos devem ser encorajados a raciocinar sobre as propriedades das formas geométricas. Também foram usados na resolução de problemas, como parte constituinte da sua estratégia, para representarem figuras geométricas.

O uso de *software* de Geometria Dinâmica é aconselhado por diversos autores tais como Breda et al. (2011) ou Candeias e Ponte (2006) bem como pelo NCTM (2000), permitindo que se opere transformações sobre as figuras geométricas e verificar as alterações nas suas propriedades assim como fazer uma correspondência entre formas bi-dimensionais e as suas representações, desenvolvendo a capacidade de visualização. Devido a constrangimentos de tempo, não foi possível fazer uso de *software* de Geometria Dinâmica pelos alunos mas foi usado nas aulas o Geogebra na apresentação de conceitos e na discussão de tarefas, nomeadamente na discussão de problemas.

Nas entrevistas que realizei a alunos, este foi um dos aspetos mais salientados pelos mesmos como sendo algo que não só lhes tinha despertado a atenção mas também lhes permitiu perceber melhor as relações e propriedades e ver os polígonos em diferentes posições. Deste modo, puderam constatar que um dado polígono pode estar em diferentes posições e continuar a ter as mesmas propriedades e o que alterações feitas em polígonos afetam as suas propriedades.

3.5 - Planificação da unidade de ensino

Na escola onde decorreu a intervenção – D. Luisa de Gusmão, os tempos letivos estão organizados em períodos de 50 minutos, tendo sido atribuídos à disciplina de Matemática do 7.º ano dois blocos semanais de 100 minutos. Além disso, na planificação da disciplina para este ano letivo, o grupo disciplinar de Matemática atribuiu 6 blocos de 100 minutos a esta unidade, Figuras Geométricas, que foram integralmente lecionados por mim.

Ao planificar esta unidade de ensino procurei ir ao encontro dos objetivos para a unidade lecionada, que são "Classificar e construir quadriláteros" e "Resolver problemas" e também das metas definidas para a unidade. Procurei também ter em conta as orientações curriculares dadas pelo NCTM para o ensino da Geometria (e anteriormente descritas) nomeadamente no que concerne ao estudo de figuras geométricas e da resolução de problemas. Estes fatores, e também os recursos disponíveis e as caraterísticas da turma, determinaram as estratégias de ensino seguidas, as tarefas realizadas e a avaliação implementada.

Para iniciar a unidade, planeei uma revisão sobre os conceitos relativos a ângulos que já tinham sido abordados no 2.º ciclo mas que eu considerei mais relevantes os alunos terem presentes para acompanharem o trabalho a realizar este ano. Em particular pretendi rever as relações entre os ângulos ou aspetos de terminologia. Foi planeada também uma revisão de conceitos relativos a linhas poligonais e polígonos, bem como da manipulação de material de desenho a ser usado no decurso da unidade. Para a segunda aula, dia 18 de Março (entretanto houve um teste, previamente agendado), foi planificada a apresentação dos conceitos relativos a ângulos internos e externos e soma das amplitudes dos ângulos internos e externos. As aulas de dia 20 e 25 de Março foram planificadas para o estudo dos quadriláteros e suas propriedades. A primeira aula foi dedicada ao estudo dos trapézios e a segunda foi dedicada ao estudo dos paralelogramos e dos papagaios e das suas propriedades. Para a aula seguinte, de dia 27 de Março, foi planeada a resolução de tarefas para serem trabalhados conceitos que foram estudados na unidade. Finalmente, a aula de dia 1 de Abril, foi planificada para dois momentos: na primeira parte da aula pretendia que os alunos realizassem tarefas incidindo sobre os conceitos lecionados e na segunda parte (cerca de 40 minutos) previ a realização de uma questão de aula. No quadro seguinte pode ver-se a calendarização das aulas e as respetivas fichas de trabalho entregues com as propostas de tarefas para cada aula.

Quadro 3-2 - Planificação da unidade de ensino “Figuras Geométricas”

Figuras Geométricas		
Aula e Data	Ficha de trabalho	Tópicos Abordados
Aula 1 6 de Março	Ângulos e Polígonos	Revisões sobre ângulos; Polígonos e linhas poligonais; Revisão de uso de material de desenho
Aula 2 18 de Março	Ângulos Internos e Externos	Ângulos internos e externos; Soma das amplitudes dos ângulos internos em polígonos; Soma das amplitudes dos ângulos externos em polígonos convexos
Aula 3 20 de Março	Quadriláteros e Trapézios	Propriedades dos quadriláteros Trapézios
Aula 4 25 de Março	Paralelogramos e Papagaios	Classificação e propriedades de quadriláteros: paralelogramos, losangos, retângulos, quadrados e papagaios
Aula 5 27 de Março	Quadriláteros	Consolidação dos conceitos estudados
Aula 6 1 de Abril	Quadriláteros II Questão de aula	Consolidação e avaliação dos conceitos estudados

3.6 - As Tarefas

Na elaboração das tarefas para as aulas, procurei ter uma diversidade no tipo de tarefas: exercícios, problemas e tarefas investigativas ou exploratórias, apesar do meu estudo se debruçar sobre a resolução de problemas.

Assim, além de problemas, usei exercícios que tiveram como objetivo a consolidação de conhecimentos e como primeira abordagem de novos conceitos, sendo estes também propícios ao trabalho associado ao conhecimento de factos e procedimentos. Procurei também usar tarefas investigativas pois a Geometria é uma área propícia a que os alunos desenvolvam investigações, proporcionando-lhes um papel mais ativo, autónomo, dando mais ênfase ao raciocínio e aos processos de pensamento e da actividade matemática (Abrantes, 1999).

Para cada aula, foi elaborada uma ficha de trabalho com as tarefas a realizar pelos alunos no decorrer da mesma. Além disso, para todas as aulas, foram selecionadas tarefas do manual dos alunos para serem realizadas pelos que finalizassem as fichas de trabalho antes do tempo.

Na definição das tarefas, tive como principal preocupação que promovessem nos alunos o desenvolvimento de aprendizagens e capacidades aliadas ao fazer Matemática, de acordo com os objetivos e metas da unidade lecionada. As orientações curriculares do NCTM, nomeadamente as relativas ao ensino da Geometria, foram também muito relevantes, com destaque para a classificação de figuras geométricas usando as propriedades que as definem e a compreensão das relações entre ângulos. Procurei também valorizar o uso de tarefas que apelassem à visualização, inseridas ou não em problemas geométricos.

As tarefas propostas nas fichas de trabalho foram, na sua maioria, adaptadas de manuais de Matemática do 7.º ano em vigor neste ano letivo: do manual adotado pela escola onde decorreu a intervenção, o Pi7 da Editora Asa, e dos manuais Matemática Dinâmica, Novo Espaço e Matemática, todos da Porto Editora. Algumas tarefas foram também adaptadas do Caderno de Apoio às Metas Curriculares do Ensino Básico. A opção por usar maioritariamente tarefas já definidas prendeu-se com o ter encontrado nos diferentes manuais tarefas que correspondiam ao que procurava para as aulas que lecionei, sendo tarefas que foram submetidas a uma avaliação e revisão e estarão por conseguinte adequadas aos objetivos da unidade de ensino. Nas adaptações que fiz procurei ter em conta as caraterísticas da turma, os recursos disponíveis e o objetivo a atingir com a tarefa.

Ficha de trabalho "Ângulos e Polígonos"

Na aula de 6 de Março, apresentei uma ficha com dois grupos distintos de tarefas, em que o principal objetivo foi rever conceitos anteriormente abordados e o uso de material de desenho. O primeiro grupo incluía exercícios para que os alunos recordassem as relações entre ângulos e o segundo grupo era constituído por exercícios sobre linhas poligonais e polígonos, sendo que alguns deles requeriam o uso de material de desenho (régua, esquadro e transferidor).

Ficha de trabalho "Ângulos Internos e Externos"

A ficha de trabalho "Ângulos Internos e Externos", realizada na segunda aula, teve início com uma tarefa investigativa em que foi proposto aos alunos encontrarem a expressão que define a soma das amplitudes dos ângulos internos em polígonos. Nesta tarefa, os alunos usaram material de desenho, régua ou esquadro, para dividirem polígonos em triângulos e encontrarem as expressões sobre o número de triângulos em que os polígonos se podem dividir e a soma das amplitudes dos seus ângulos internos.

Na segunda parte da ficha, foram propostas diversas tarefas focadas na soma de amplitudes de ângulos internos e externos, sendo as três últimas problemas.

O primeiro problema proposto, foi adaptado de um manual e pretendia-se saber a amplitude de um ângulo interno. Neste problema, a visualização era trabalhada pois os alunos tinham que interpretar a figura dada e decompô-la em duas outras figuras.

O segundo problema proposto, adaptado do Caderno de Apoio às Metas Curriculares do Ensino Básico (2013), teve como objetivo encontrar o valor da soma das amplitudes dos ângulos externos num polígono convexo mas através de uma demonstração, dando seguimento à meta "Demonstrar que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a um ângulo giro." Este problema apresentava um polígono com quatro lados e, partindo da sua discussão, permitia demonstrar qual o valor da soma dos ângulos externos para um polígono (convexo) com qualquer número de lados. A visualização foi trabalhada no encontrar das relações entre ângulos partindo da interpretação da figura apresentada.

O terceiro problema proposto teve como objetivo trabalhar o caso particular da soma dos ângulos internos num polígono regular.

Ficha de trabalho "Quadriláteros e Trapézios"

Na aula de dia 20 de Março, a ficha que entreguei começou com uma tarefa de desenho, em que foi pedido aos alunos que desenhassem todas as diagonais de polígonos, visto que estava a prever que os alunos iriam construir figuras geométricas e que as diagonais seriam trabalhadas em discussões sobre quadriláteros. Seguiu-se uma tarefa sobre quadriláteros (com desenho de diagonais e questões sobre as suas caraterísticas) cuja discussão levou à conclusão sobre algumas propriedades destas figuras, tais como a soma das amplitudes dos ângulos internos. A tarefa seguinte teve como objetivo a realização de uma exploração sobre trapézios para que tirassem conclusões sobre as suas propriedades (os seus lados não paralelos), tendo sido debatidas e sintetizadas essas conclusões durante a discussão da tarefa. A visualização foi trabalhada nestas tarefas na análise das figuras.

A segunda parte desta ficha incluiu três problemas. No primeiro problema proposto, afirmava-se que um trapézio era retângulo com base na informação das amplitudes de três dos seus ângulos internos e no segundo problema descrevia-se as medidas de um trapézio isósceles. Estes problemas apelavam ao uso da visualização pois eram propícios a que os alunos construíssem uma representação do trapézio mencionado, externa ou não. Simultaneamente, os alunos tinham que usar as propriedades relativas aos trapézios para resolverem os problemas. No segundo problema proposto, os alunos também eram chamados a aplicar os conhecimentos abordados nesta unidade juntamente com outros anteriormente adquiridos sobre perímetros. O último problema teve como objetivo trabalhar conceitos introduzidos na aula anterior.

Ficha de trabalho "Paralelogramos e Papagaios"

Na aula de 25 de Março, os alunos começaram por ter uma tarefa de cariz exploratório em que, por observação de paralelogramos, foram solicitados a concluir sobre as medidas dos lados opostos, as amplitudes dos ângulos opostos, a existência de ângulos retos e caraterísticas das suas diagonais. Esta tarefa teve como objetivo também, durante a sua discussão, proporcionar o debate e síntese das conclusões obtidas e a observação de paralelogramos construídos no GeoGebra, nomeadamente as suas propriedades e as transformações operadas sobre os mesmos, proporcionando um desenvolvimento da capacidade de visualização.

A segunda parte da ficha integrou uma tarefa que solicitava a identificação de diferentes polígonos. Esta tarefa faz um forte apelo à visualização pois apresenta polígonos em posições diversas, sendo necessário fazer uma manipulação mental das imagens. Por outro lado, apresenta polígonos que podem ter simultaneamente diferentes classificações, por exemplo, retângulos e papagaios, levando ao debate sobre a classificação dos polígonos e as suas propriedades: "É um retângulo? Porquê? E é também um papagaio? Porquê?".

As duas tarefas seguintes foram problemas geométricos. O primeiro problema proposto pretendia que os alunos usassem os seus conhecimentos sobre paralelogramos para o resolver, podendo ser usada uma representação pictórica. A visualização é aqui usada na representação do paralelogramo assim como na reflexão sobre esse paralelogramo. O problema pretendia também que se fizesse a classificação do polígono, com base nas suas caraterísticas. O segundo problema proposto foi um problema geométrico de classificação. Esta tarefa apelava fortemente à análise das figuras geométricas, de forma a encontrar caraterísticas comuns entre as mesmas (Leung, 2008; Loureiro, 2009).

Ficha de trabalho "Quadriláteros"

Na aula de dia 27 de Março, apresentei uma ficha com diversas tarefas, com diferentes graus de dificuldade e objetivos. Teve início com um exercício em que o objetivo foi desenhar um quadrilátero tendo em conta o enunciado dado. Eram apresentados três pontos e um segmento de reta, sendo que era pedido para a partir destes dados se desenhar um paralelogramo. Nesta tarefa a visualização era trabalhada ao ser necessário criar uma representação do paralelogramo.

A tarefa seguinte foi um problema em que era apresentada a amplitude de um ângulo interno de um paralelogramo (ângulo reto) e pedia-se para classificar este. Na resolução deste problema, os alunos tinham que usar a amplitude dada para classificar o polígono partindo das suas propriedades (Leung, 2008; Loureiro, 2009).

Num outro problema, eram dadas as medidas de dois lados e a amplitude de um ângulo interno num paralelogramo, sendo pedido que fosse feita a construção do mesmo partindo dos dados fornecidos. Os alunos tinham que, usando os seus conhecimentos sobre paralelogramos, encontrar as medidas dos restantes lados e calcular as amplitudes dos restantes ângulos internos. A visualização é aqui trabalhada ao seu ser necessário fazer uma representação do paralelogramo com as caraterísticas encontradas.

No problema seguinte, de desenho, eram apresentados três pontos, a partir dos quais seria desenhado um paralelogramo. Mais uma vez, a visualização é trabalhada na construção deste quadrilátero ao ser necessário criar uma representação do paralelogramo e refletir como vai ser construído a partir dos pontos dados. Além disso, um dos pontos dados era o ponto de interseção das diagonais, levando a que tivessem que fazer uso das propriedades dos paralelogramos para a sua construção.

Em seguida, os alunos tiveram duas tarefas, problemas, para resolver mas que estavam interligadas (duas alíneas). Na primeira, o objetivo foi trabalhar a classificação de quadriláteros tendo os alunos que, partindo de uma propriedade, dizerem se podiam afirmar que era um quadrado ou simplesmente um losango. Na segunda alínea pretendia-se encontrar a amplitude de um ângulo sendo para isso necessário que os alunos usassem relações de ângulos e propriedades dos quadriláteros que conheciam. A visualização é aqui trabalhada, pela necessidade de criar uma representação da figura geométrica e pela necessidade de refletir sobre a figura geométrica.

A última tarefa proposta, um problema em que foi pedida uma demonstração, teve como objetivo desenvolver nos alunos a capacidade de fazerem demonstrações de propriedades geométricas recorrendo à congruência de triângulos. Este problema teve ainda como objetivo encontrar uma propriedade dos trapézios (os trapézios em que as bases têm o mesmo comprimento são paralelogramos), durante a sua discussão. A visualização é também aqui trabalhada ao ser necessário interpretar a figura.

Ficha de trabalho "Quadriláteros II"

Na aula de 1 de Abril, foi entregue uma ficha com duas tarefas. A primeira tarefa da ficha teve como objetivo consolidar os conhecimentos sobre o cálculo da soma das amplitudes dos ângulos internos num polígono. A segunda tarefa foi um problema em que eram apresentandas duas descrições para um quadrado, perguntando-se qual a correta, sendo aqui a classificação de quadriláteros trabalhada.

Num segundo momento da aula, foi proposta uma questão de aula com o objetivo de monitorizar as aprendizagens realizadas pelos alunos nesta unidade de ensino. Na questão de aula, tratando-se de um momento de avaliação com o tempo limitado, foram apresentadas tarefas com diferentes graus de dificuldade mas fechadas. De entre as tarefas apresentadas, houve lugar a dois problemas, um de classificação e outro de construção e classificação.

3.7 - Avaliação das Aprendizagens

A avaliação do processo ensino-aprendizagem tem sido em si alvo de estudo, pela sua importância, considerando Santos (2007) que "a avaliação não constitui uma componente isolada e dissociada de todo o processo educativo, mas acima de tudo ela é uma parte inseparável de um complexo sistema onde o fim último do acto educativo é a aprendizagem" (p.2). A avaliação pode ser perspetivada como sumativa ou formativa, sendo esta classificação definida pela função que assume no processo de ensino e aprendizagem (Pinto & Santos, 2006). A avaliação sumativa tem como principal função medir os conhecimentos dos alunos, sendo a informação obtida apenas usada para finalidades extrínsecas ao processo de ensino aprendizagem. A avaliação formativa, por seu lado, é apresentada como sendo um instrumento de regulação pedagógica, centrada nos alunos e nos processos de ensino e aprendizagem e em que as informações são reinvestidas na melhoria destes processos. Assim, a avaliação formativa é vista como um processo no qual se faz o acompanhamento do ensino e da aprendizagem, relegando para segundo plano a correção dos resultados e enfatizando a compreensão dos processos mentais dos alunos, tendo por isso o erro uma grande importância pela sua possível análise e interpretação (Santos, 2007).

Na intervenção letiva que realizei, a avaliação formativa foi privilegiada (conforme se pode ver nos instrumentos que adiante descrevo e a forma como foram usados) como forma de ajudar os alunos a superarem as suas dificuldades, procurando também usar instrumentos de avaliação diversos, que permitissem ter uma informação holística das aprendizagens dos alunos. A avaliação teve em conta os critérios de avaliação que foram definidos pela escola para a disciplina de Matemática, neste ano letivo e as respetivas ponderações: (i) Capacidades cognitivas (Testes, questões de aula) - 80%; (ii) Atitudes (Respeito, responsabilidade) – 20%.

Um dos instrumentos de avaliação formativa que usei foi uma grelha de observação que é usada na disciplina pela professora titular da turma e que adotei, em conformidade com os critérios de avaliação definidos, refletindo a participação dos alunos (a frequência e pertinência das suas intervenções), no seu comportamento (no cumprimento das regras de funcionamento da aula), na pontualidade e assiduidade e se faz os trabalhos de casa. As intervenções também foi um contributo para verificar se os conhecimentos estavam a ser apreendidos.

As fichas de trabalho realizadas pelos alunos na sala de aula e os trabalhos de casa, foram um instrumento fundamental da avaliação formativa - em cada aula fiz a recolha das resoluções dos alunos das fichas de trabalho e dos trabalhos de casa tendo feito a correção das mesmos e analisado como se estava a desenvolver o processo ensino aprendizagem. Na correção feita, procurei dar um feedback descritivo com foco na qualidade do seu trabalho e indicando em que poderiam melhorar (Black & William, 2001). As fichas foram depois devolvidas aos alunos e o mesmo processo se verificou com os trabalhos de casa. Para tarefas realizadas em casa, privilegiei as que tinham ficado por fazer das fichas das aulas ou outras tarefas que selecionei com a finalidade de reforçar o trabalho num conceito específico. Por vezes, também usei tarefas do manual.

Foi ainda usado como instrumento de avaliação formativa uma "questão de aula", que consta como elemento de avaliação nos critérios de avaliação da disciplina no agrupamento de escolas. Trata-se de um instrumento que tem um peso pequeno nos critérios de avaliação, de curta duração e que tem como objetivo monitorizar as aprendizagens dos alunos numa unidade ou subunidade específica. É de salientar que, apesar de ser um instrumento de avaliação em que são aferidos os conhecimentos, no contexto geral da disciplina, na turma e ao longo do ano letivo, tem um caráter formativo em que são recolhidas informações sobre um tópico específico que pode ser novamente trabalhado antes de um teste.

Ao longo da minha intervenção, também procurei fazer uma articulação destes momentos de avaliação com o trabalho realizado em sala de aula, nomeadamente trabalhando novamente conceitos a partir da minha observação das aulas e da correção das tarefas. Esta articulação esteve porém dificultada pela contingência do tempo, que nem sempre torna possível que isso se verifique.

3.8 - As aulas lecionadas

A planificação das aulas, apresentada anteriormente, foi sendo ajustada tendo em conta o modo como as aulas desta intervenção foram decorrendo. Apesar disso, as aulas lecionadas na unidade "Figuras Geométricas" nem sempre se cumpriram de acordo com os planos de aula elaborados e que se encontram em anexo. Seguidamente, começo por descrever alguns aspetos que foram comuns às aulas lecionadas e depois apresento uma síntese para cada uma dessas aulas, salientando as diferenças entre o planeado e o concretizado.

Todas as aulas tiveram início com a projeção do sumário escrito no computador, assim como os números das lições e a data (com exceção da primeira aula, em que não foi usado o computador). Esta informação já estava projetada quando os alunos entravam na aula, para que pudessem começar imediatamente a copiá-lo para o caderno assim que a aula se iniciava.

Durante os momentos das aulas em que os alunos realizaram trabalho autónomo, trabalhando a pares ou individualmente (consoante tivessem ou não um colega de mesa) circulei pela sala e estive sempre disponível para responder a questões em dificuldades que surgissem, nomeadamente de interpretação dos enunciados das tarefas. Procurei também, em tarefas com um maior grau de dificuldade, aquando da sua apresentação, colocar questões à turma sobre a tarefa de forma a quebrar eventuais bloqueios iniciais que podem surgir em tarefas com uma maior grau de complexidade.

As tarefas das fichas de trabalho foram sempre discutidas com a turma, sendo que naquelas em que houve menos dificuldades por vezes fiz eu a correção, mas sempre em interação com os alunos, questionando-os e obtendo a confirmação de outros alunos. Em tarefas em que, pelo seu grau de complexidade, diversidade de resoluções ou dificuldades observadas, a discussão foi realizada com a ida de alunos ao quadro apresentar as suas resoluções e confirmando a sua correção com o contributo de outros alunos. Procurei também colocar questões sobre as resoluções e, nalguns casos, recorrer ao Geogebra para evidenciar as conclusões ou resoluções. Na verdade, reconhecendo as potencialidades do uso das novas tecnologias nas aulas, procurei recorrer ao computador sempre que considerei pertinente, utilizando o Geogebra para apresentação de conceitos ou na discussão de tarefas.

No final das discussões das tarefas, fiz também uma sistematização das principais conclusões que foram escritas pelos alunos.

Aula 1 (6 de Março de 2014)

Esta aula tinha como um dos objetivos fazer uma revisão sobre ângulos pelo que comecei por questionar os alunos sobre o que se lembravam sobre ângulos e as suas relações. Entreguei em seguida uma folha com uma sistematização dos conceitos relativos aos ângulos e suas relações e fiz a sua leitura em conjunto com os alunos e com o preenchimento de espaços com base no questionamento aos mesmos. De seguida os alunos realizaram, sem grandes dificuldades, uma tarefa sobre as relações entre ângulos. A correção dos seis primeiros exercícios foi feita recorrendo ao questionamento oral dos alunos com validação de outros alunos. Os dois últimos exercícios, por serem menos diretos, foram corrigidos no quadro, por dois alunos, e discutidos em grande grupo.

Iniciei a segunda parte da aula com a entrega de uma ficha onde estavam descritos os conceitos sobre linhas poligonais e polígonos, tendo sido feita uma discussão em turma sobre estes conceitos. Em seguida fiz no quadro uma demonstração de como se usar o transferidor pois alguns alunos poderiam não se recordar de como o deveriam usar.

Os alunos fizeram então as tarefas propostas. Para a correção da primeira tarefa, optei por fazer eu a resolução, com questionamento a alunos e validação de outros alunos. Nas tarefas de desenho, pedi a alunos para irem ao quadro desenharem as linhas poligonais e polígonos que tinham feito.

A aula decorreu conforme o que estava planificado tanto nas atividades desenvolvidas como nos tempos que tinham sido definidos. Esta aula, tendo como principal objetivo a revisão de conceitos, cumpriu a sua planificação inicial, incluindo os objetivos delineados. Com as novas aprendizagens, que foram apenas algumas denominações e notações, notei que os alunos não mostraram dificuldades.

Aula 2 (18 de Março de 2014)

Esta aula incidiu sobre ângulos internos e externos pelo que iniciei a aula questionando os alunos sobre os seus conhecimentos nestes tópicos, visto que já tinham sido abordados no seu percurso escolar. Projetei no quadro uma figura de um polígono, com recurso ao Geogebra, com todos os ângulos internos e externos assinalados (em cores diferentes) e questionei os alunos no sentido de os identificarem, tendo obtido respostas corretas.

Antes de iniciarem a realização da ficha de trabalho, mostrei também no Geogebra, como traçar todas as diagonais a partir de um vértice, explicando que o poderiam fazer a partir de qualquer vértice. Seguidamente entreguei a ficha para realizarem e dei as indicações necessárias não tendo os alunos mostrado muitas dúvidas sobre o que era pedido para fazerem. A discussão da tarefa foi feita com a projeção no quadro da tabela semipreenchida e questionando os alunos qual o número de triângulos formados e o valor da soma dos ângulos internos. Na última linha da tabela, em que eram pedidas expressões para o número de triângulos e o valor da soma das amplitudes dos ângulos internos, questionei alguns alunos, tendo obtido a resposta correta e a validação positiva de outros alunos da turma. Penso que se tivesse havido mais tempo para discutir esta tarefa teria sido muito frutuoso pois nem todos os alunos perceberam nesse momento as expressões que tinham sido encontradas, nomeadamente a relação entre o número de triângulos que se pode obter e a expressão da soma das amplitudes dos ângulos internos. Noutras aulas voltei a abordar este tópico durante a discussão de outras tarefas ou em tarefas específicas.

Na segunda parte da aula, fiz a resolução da primeira tarefa com o contributo dos alunos, ou seja, a cada passo fui perguntando o que deveria escrever tendo os alunos mostrado grande recetividade e dei indicações que fossem feitas as duas tarefas seguintes, tendo pedido a alunos para irem ao quadro resolvê-las.

Para a resolução do problema 3, sugeri aos alunos que revissem as relações entre ângulos, tendo-se revelado uma boa indicação para que a resolução avançasse, e para a sua discussão, pedi a um aluno para fazer a resolução no quadro. No seguimento da resolução, e como também havia como objetivo encontrar o valor da soma dos ângulos externos num polígono convexo, fiz a demonstração algébrica de como encontrar esse valor. Como já se estava no final da aula, acabei por não fazer a demonstração com o tempo que queria e com a explicação que queria ter feito. Optei por retomar este assunto na aula seguinte (e com outra abordagem).

Nesta aula, embora a planificação quase tivesse sido cumprida (uma vez que não estava prevista a resolução da última tarefa), não senti que o seu propósito tivesse sido completamente cumprido na discussão da última tarefa, tendo notado que vários alunos ficaram com dúvidas de como era possível o valor da soma das amplitudes dos ângulos externos (em polígonos convexos) ser sempre 360º. Pareceu-lhes que se fosse um polígono com muitos lados o valor seria maior.

Aula 3 (20 de Março de 2014)

Na aula anterior a soma das amplitudes dos ângulos externos tinha sido abordada no final da aula e de uma forma mais abstrata (e também por sugestão das professoras orientadoras) pelo que comecei esta aula por este tema. Como forma de os alunos verem que a soma das amplitudes dos ângulos externos é sempre 360º (visto que tinham surgido dúvidas de que seria possível), desenhei no Geogebra vários polígonos com 4, 5, 8 e 10 lados com os ângulos externos assinalados. Mostrei o primeiro polígono e perguntei a um aluno qual era a soma das amplitudes dos ângulos externos. O aluno fez o cálculo e respondeu 360º. O processo repetiu-se para o polígono de 5 lados e 8 lados. No polígono de 10 lados, a resposta foi imediata pois já tinham concluído que era sempre 360º. Ao contrário do que tinha acontecido na aula anterior, notei que os alunos ficaram sem dúvidas sobre o valor encontrado.

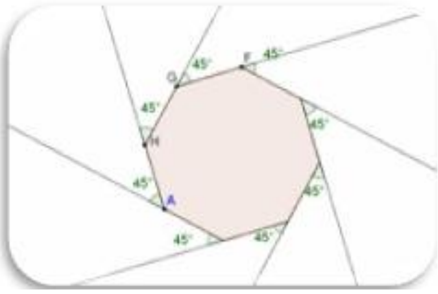


Figura 3.8 - Soma das amplitudes dos ângulos externos

Fiz em seguida uma demonstração, no Geogebra, de como traçar todas as diagonais num polígono (para vários polígonos) e expliquei que, ao contrário da aula anterior, iriam agora traçar todas as diagonais possíveis a partir de todos os vértices.

Quando começaram a fazer a ficha, alguns alunos ainda tiveram algumas dificuldades pois não estavam a desenhar todas as diagonais. Na tarefa quatro, em que eram chamados a tirar conclusões, começaram por ter dúvidas em relação ao que escrever. Notei (ao longo das aulas) que os alunos não se sentiam muito confortáveis a tirar conclusões mostrando sempre receio que não fosse "certo". Procurei explicar-lhes que não tinham que ter receio em escrever "respostas certas" ou "respostas erradas", apenas tinham que escrever o que concluíam. Acabaram por escrever as suas perceções, tendo havido muitas trocas de ideias.

Como as tarefas eram simples e fui verificando que os alunos estavam a realizá-las corretamente, optei por fazer eu a correção no quadro com projeção de figuras no Geogebra (puderam ver, por exemplo, que num polígono convexo as diagonais se intersetam no seu interior), com o questionamento e validação de alunos. Da discussão destas tarefas também foram tiradas conclusões sobre propriedades dos quadriláteros nomeadamente sobre a soma das amplitudes dos ângulos. Para a discussão da tarefa quatro, fui pedindo a alunos para lerem as suas conclusões e perguntando a outros alunos se concordavam ou não, se tinham algo a acrescentar. Os alunos também escreveram, como síntese, a descrição de cada trapézio.

Passando à segunda parte da ficha, dei indicação para que fossem feitas todas as tarefas (ainda que já não estivesse a prever que a última ainda fosse discutida/resolvida) tendo depois feito a discussão das duas primeiras tarefas, pedindo a um aluno para ir ao quadro mostrar a sua resolução da primeira. Durante a discussão os restantes alunos foram intervindo, até porque tinha havido perspetivas diferentes de resolução. Para a discussão da segunda tarefa, pedi a uma aluna para ir ao quadro, tendo também aqui havido intervenções de outros alunos com outras resoluções.

Não tendo havido tempo para a realização da última tarefa, esta ficou como trabalho para casa. Nesta aula, a planificação não foi cumprida pois não houve tempo para a resolução da última tarefa, mas a nível de objetivos penso que foram cumpridos, pois a última tarefa era de consolidação de conhecimentos da aula anterior, tendo sido resolvida pelos alunos como trabalho para casa.

Aula 4 (25 de Março de 2014)

Comecei esta aula por entregar aos alunos a ficha da aula (com as indicações previstas), tendo começado a resolução da primeira tarefa, sobre quadriláteros.

Para esta aula, preparei vários quadriláteros no Geogebra, que mostrei na discussão da tarefa, com as amplitudes dos ângulos internos, as medidas dos lados, a medida das diagonais e a medida dos segmentos de reta entre vértices e o ponto de interseção das diagonais. Nalguns casos, mostravam ainda os ângulos formados pelas diagonais.

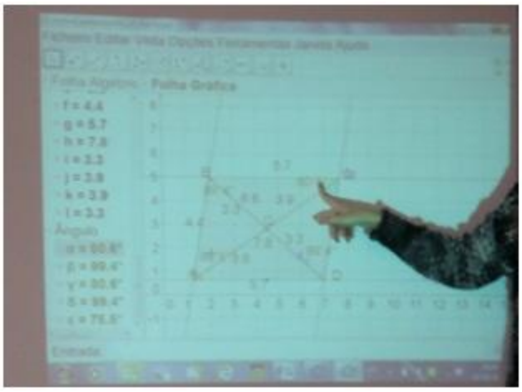


Figura 3.9 - Uso do Geogebra em aula

Comecei por questionar qual o valor da soma das amplitudes dos ângulos internos, ao que os alunos responderam rapidamente que era 360º e voltei a fazer a mesma questão depois de alterar o polígono no Geogebra, ao que responderam que continuava a ser 360º. Alguns alunos disseram então que era sempre 360º por ter quatro lados, recordando o resultado da aula anterior.

Seguidamente chamei a atenção para as amplitudes dos ângulos opostos e questionei qual a relação entre si ao que responderam que tinham a mesma amplitude. Fiz algumas alterações, perguntando se a igualdade se mantinha, ao que a resposta foi afirmativa. Questionei, igualmente, qual era o valor da soma de dois dos ângulos (consecutivos), tendo sido a resposta de 180º e repeti o processo para os outros ângulos consecutivos. Este mesmo processo foi repetido com os lados opostos e para a interseção das diagonais.

Continuando, mostrei os casos particulares do retângulo, tendo discutido a interseção das diagonais, do quadrado, tendo evidenciado que as suas diagonais formam ângulos retos entre si, dos losangos e dos papagaios, chamando a atenção porque é que um losango é um papagaio e um quadrado é um retângulo, um losango e um papagaio. Fui fazendo alterações nos polígonos e questionando os alunos sobre a classificação dos polígonos a cada alteração e também fazendo alterações na posição dos polígonos. Nesta discussão procurei desenvolver a capacidade de visualização dos alunos ao mostrar-lhes diferentes alterações nos polígonos e o que isso alterava as suas propriedades e classificação. Também lhes mostrei as relações entre as suas componentes (por exemplo os lados) e como essas componentes permitem classificar o polígono (Breda et al., 2011; Loureiro, 2009).

Esta discussão demorou algum tempo, mas notei que foi muito frutuosa pois no início os alunos estavam céticos em relação a figuras que não estavam na sua posição habitual mas, quando confrontados com questões como "Mas não tem esta caraterística?" e “Então como pode ser classificado?", concordavam que a sua intuição inicial estava errada e que era necessário olhar para além do que é a representação tradicional. Também se aperceberam que um polígono pode ter várias classificações, questionando "Mas pode ser um quadrado e um papagaio?". Percebi que tendencialmente achavam que um polígono apenas podia ser "um retângulo" ou "um quadrado" ou "um losango" não tendo sido muito fácil perceberem que na verdade pode ter todas estas classificações simultaneamente.

Após esta discussão, dei indicações para fazerem a segunda parte da ficha, composta por três tarefas. A primeira tarefa, de identificação de quadriláteros, foi muito bem acolhida pelos alunos e promoveu entre os alunos uma grande troca de ideias visto que nem sempre eram concordantes.

Em relação à segunda tarefa, houve mais dificuldades iniciais mas com algumas questões que coloquei em relação às propriedades dos paralelogramos, a resolução avançou.

Na terceira tarefa comecei a notar uma grande retração por parte dos alunos. Esta tarefa foi retirada integralmente do manual adotado (apenas trocando nomes e ordem de figuras) e estava assinalada como sendo difícil pois fazia um forte apelo ao raciocínio para agrupar as figuras de acordo com as suas propriedades. Perante esta retração, ainda resolvi eu, como exemplo, o primeiro dos três grupos mas mesmo assim as reticências continuaram pelo que a tarefa acabou por não ser resolvida. Esta tarefa revelou-se, de entre todas as aulas, aquela a que os alunos menos aderiram. Procurei mais tarde refletir em como poderia abordá-la de outra forma, por exemplo, resolver a tarefa em conjunto com os alunos.

Nesta aula, apesar de a última tarefa não ser resolvida, os objetivos da aula foram cumpridos, através das atividades desenvolvidas e da resolução das outras tarefas propostas, tendo nas aulas seguintes proposto aos alunos outros problemas sobre classificação a que os alunos tiveram uma melhor adesão.

Aula 5 (27 de Abril de 2014)

Para esta aula preparei uma ficha com tarefas para os alunos trabalharem os seus conhecimentos sobre quadriláteros. Dei indicação para fazerem a ficha toda (que tinha 6 tarefas), estando previsto fazer uma paragem para discussão das três primeiras tarefas a meio da aula. Os alunos começaram a fazer as tarefas sem revelarem grandes dificuldades e com um bom ritmo de trabalho pelo que acabei por fazer a primeira paragem prevista um pouco mais tarde do que o planificado e com a discussão das quatro primeiras tarefas, sendo que em todas as tarefas foram chamados ao quadro alunos para mostrarem a sua resolução. Para a discussão das tarefas de desenho, projetei no quadro o Geogebra com a grelha, de modo a simular o papel quadriculado.

Após a discussão das quatro primeiras tarefas, o ritmo de trabalho da turma abrandou, com os alunos a mostrarem-se mais dispersos. A tarefa 5, que se subdividia em duas alíneas, acabou por demorar mais tempo a resolver, em especial a segunda alínea. Como o fim da aula se aproximava, decidi fazer a discussão da tarefa

5, usando também uma figura geométrica no Geogebra, apesar de os alunos ainda não terem iniciado a 6, pedindo a uma aluna para ir ao quadro fazer a correção da primeira alínea. Para fazer a discussão da outra alínea, pedi a outro aluno que tinha pedido para fazer a correção desta alínea. Em relação à última tarefa também notei que os alunos se mostraram reticentes por envolver congruência de triângulos.

A planificação desta aula não se cumpriu por não ter sido resolvida nem discutida a última tarefa. No entanto, o objetivo de trabalhar com quadriláteros e as suas propriedades cumpriu-se.

Aula 6 (1 de Abril de 2014)

Nesta aula, os alunos entraram na sala com alguma falta de concentração e muito conversadores, reclamando que já era "a última semana de aulas". Estava previsto que a aula iria dividir-se em duas partes: uma parte de realização de tarefas e uma parte (de 40 minutos) em que os alunos fariam uma questão de aula.

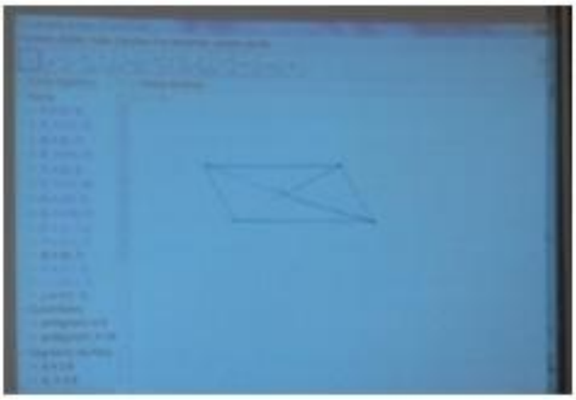


Figura 3.10 - Uso do Geogebra para fazer uma demonstração

Como a última tarefa da ficha apresentada na aula anterior não tinha sido resolvida, começou-se pela sua resolução (tratava de um problema em que era pedida uma demonstração usando congruência de triângulos). Antes disso, mostrei no quadro uma apresentação sobre congruência de triângulos (que foi lecionada no 2.º ciclo) com os diferentes critérios de congruência de triângulos. Em seguida projetei no quadro o enunciado da tarefa e como os alunos mostraram muitas dúvidas em relação à congruência de triângulos, pedi a uma aluna que fosse ao quadro fazer a resolução com a participação da turma. Tinha também preparado no Geogebra uma figura para apresentar durante a discussão desta demonstração, pelo que fui acompanhando a resolução da aluna com a explicação da figura no Geogebra. Partindo da demonstração (após a mesma e já sem a aluna no quadro) e com o questionamento a alunos, mostrei então a propriedade que se pode verificar (mais uma vez também com o recurso ao Geogebra).

Como já não tinha muito tempo e os alunos não estavam muito recetivos a escrever, decidi fazer a resolução e discussão da última tarefa prevista em conjunto com a turma. Nesta tarefa, um problema em que a classificação de quadriláteros era trabalhada, eram dadas duas descrições sobre um quadrado e perguntava-se qual estava correta. Comecei por questionar os alunos sobre a resposta à questão, tendo obtido diferentes respostas e pedi em seguida a uma aluna que fosse ao quadro fazer a resolução da tarefa, projetando ao mesmo tempo um quadrilátero no Geogebra. Durante a resolução/discussão fui questionando os alunos sobre a classificação do quadrilátero, que entretanto também fui alterando, e as suas propriedades. Nesta discussão, os alunos foram respondendo acertadamente às minhas perguntas, mesmo os que tinham dado uma resposta errada, tendo chegado à conclusão que a sua resposta inicial estava errada. Durante a aula os alunos, no geral, mostraram com um ritmo de trabalho muito lento nas tarefas no que respeitou à escrita, embora tivessem sido participativos, referindo por vezes o ser a última semana de aulas.

Entreguei em seguida os enunciados da questão de aula, dando as instruções necessárias, tendo os alunos iniciado a sua resolução com muito poucas dúvidas: apenas na primeira tarefa, se podiam criar mais um ponto e na segunda tarefa se era necessário medir lados ou ângulos. Notei que a sua velocidade de resolução das tarefas aumentou consideravelmente. Como todos os alunos terminaram a questão de aula antes do final da aula, após fazer a recolha da mesma, e como ainda restavam alguns minutos, decidi ainda fazer a correção de uma tarefa que tinha sido proposta como trabalho para casa.

A planificação desta aula foi quase cumprida na sua distribuição do tempo e objetivos propostos. Houve uma alteração à planificação na resolução na segunda tarefa da ficha que entreguei nessa aula, com a mesma a ser resolvida em conjunto e não como estava previsto.

Capítulo 4 - Métodos e procedimentos de Recolha de Dados

Durante a minha intervenção letiva, a recolha de dados foi um aspeto importante pois permitiu-me realizar o estudo que me propus fazer e em que os participantes foram os alunos da turma. Por outro lado, coloquei sempre como objetivo primordial o processo de aprendizagem dos alunos, procurando sempre que os objetivos da disciplina fossem cumpridos e que houvesse um efetivo desenvolvimento das capacidades matemáticas e a aquisição de conhecimentos. Para isso, procurei que o meu trabalho como investigadora tivesse a mínima interferência no decorrer das aulas.

Procurei adequar os métodos de recolha de dados aos objetivos do estudo, selecionando vários métodos de recolha de dados, dando seguimento à recomendação de Cohen, Manion e Morrison (2005). Tuckman (2012) também refere que existem três grandes grupos de métodos de recolha de dados adequados às investigações qualitativas - observação, entrevista e recolha documental, os quais foram usados neste estudo, com diferentes objetivos.

A **recolha documental** permite obter evidências para fundamentar as afirmações do investigador (Ludke & André, 1986). A recolha documental utilizada neste estudo incidiu, sobretudo, nas resoluções dos alunos dos problemas feitos nas aulas lecionadas, dos problemas propostos na questão de aula e dos problemas resolvidos nas entrevistas. Estas resoluções dos alunos, feitas em folhas brancas ou quadriculadas disponibilizadas nas aulas e na entrevista, foram recolhidas e digitalizadas para posterior análise. As folhas quadriculadas foram usadas porque algumas tarefas envolveram a construção de figuras geométricas. Dei também indicação de que deveriam usar caneta e que não deveriam apagar o que tinham escrito ou usar corretor para ter uma maior evidência das dificuldades e forma de resolução. Com este método de recolha, pretendi obter dados sobre a forma como os alunos resolveram os problemas, as dificuldades que evidenciaram, as estratégias que usaram e os conhecimentos que mobilizaram, em particular as propriedades das figuras geométricas.

A **observação** que foi feita na turma foi outro método de recolha de dados que usei, neste caso a observação participante já que eu própria participei no estudo enquanto professora a lecionar a unidade, por ser um método que permite aceder a informação que não se consegue obter com outros métodos (Ludke & André, 1986), por exemplo, o decorrer da aula ou as reações dos alunos, nomeadamente as dificuldades que surgem na apresentação de um problema.

Esta observação, por ser participante, foi também um desafio ao meu duplo papel de professora e investigadora pois o papel enquanto professora era decisivo para o processo ensino-aprendizagem dos alunos e portanto tinha que se sobrepor ao de investigadora, mas este também estava presente. A minha colega de mestrado foi uma preciosa ajuda neste processo pois durante as aulas foi recolhendo apontamentos sobre as mesmas, além de impressões que me transmitiu no final das aulas e que por vezes são mais ilustrativas até do que impressões escritas. A professora titular da turma e as professoras orientadoras foram também um grande auxílio, no final das aulas e durante a discussão das mesmas.

Na observação dos alunos em sala de aula usei uma grelha de observação (em anexo), usada pela professora titular da turma por estar de acordo com os critérios de avaliação da disciplina, que me permitiu sistematizar certos aspetos observados, tais como a participação dos alunos na aula e se fizeram os trabalhos enviados para casa, tendo sido esta grelha preenchida no final de cada aula. Seguindo a recomendação de Bogdan e Biklen (1994), a partir da observação foram também feitas notas de campo, por mim e pela minha colega de mestrado, sobre as nossas percepções gerais do decorrer das aulas, interações ocorridas ou questões que ocorreram na apresentação, realização e discussão das tarefas. No final das aulas, fiz também um resumo das mesmas com a descrição dos aspetos que me pareceram mais relevantes para o estudo e também como auxílio à reflexão sobre o decorrer das aulas. Como não foi possível obter autorizações de gravação áudio de todos os alunos, optei por fazer gravação de voz apenas nas entrevistas.

As **entrevistas** são usadas para recolher dados descritivos dos próprios alunos, podendo ser usadas com outros métodos de recolha de dados para os complementar (Bogdan & Biklen, 1994). Neste estudo, as entrevistas foram usadas para compreender de modo mais aprofundado como os alunos resolvem problemas, para além do que as resoluções mostravam (mesmo com justificações), nomeadamente em relação aos raciocínios que utilizam, às opções que tomam relativamente às estratégias e às dificuldade que evidenciam e também para obter as suas perceções sobre o decorrer das aulas. Com este objetivo, recorri a entrevistas semiestruturadas, com base num guião (em anexo). Este guião não inviabilizou, contudo, que, de acordo com as respostas dadas, fossem colocadas outras perguntas. A opção por uma entrevista semiestruturada deveu-se a que, sendo aberta, correr-se-ia o risco de não ter no final da entrevista respostas adequadas por não terem sido preparadas as perguntas que permitiam responder ao que se pretendia. Se a entrevista fosse completamente estruturada, poder-se-á correr o risco de se perder informações importantes, respostas que os alunos poderiam dar e que não eram expectáveis.

As entrevistas foram áudio-gravadas, com posterior transcrição e análise, pelo que elaborei pedidos de autorização à escola e encarregados de educação para a sua realização. Foram realizadas após o término da unidade, a três alunos da turma, que se voluntariaram. A seleção dos alunos teve como critérios: 1) diversidade nas dificuldades evidenciadas e formas de resolução, tendo como objetivo analisar as diferentes formas como abordam os problemas; e 2) capacidade de comunicação, atendendo a que uma boa capacidade de comunicação é fundamental para recolher mais dados e para as entrevistas serem mais ricas em informação. Aqui não considerei a capacidade de comunicação como sendo a "comunicação matemática" mas sim a capacidade de descrever os seus raciocínios.

Os alunos entrevistados foram os seguintes, usando-se aqui nomes fictícios:

João - É um aluno de nível 4 a Matemática mas que por vezes, devido à falta de atenção na leitura de enunciados, não faz uma correta interpretação dos mesmos. Além disso, nem sempre justifica as suas respostas de forma completa.

Manuel - Também é um aluno de nível 4 mas que procura fazer uma leitura atenta dos enunciados e também denota algum cuidado nas suas justificações. Apresentou algumas dificuldades na classificação de quadriláteros.

António - É um aluno de nível 3, que procura fazer uma leitura atenta dos enunciados, embora por vezes isso não aconteça, comprometendo as suas resoluções. Apresentou algumas dificuldes ao longo da unidade lecionada. De notar que não recorreu com muita frequência a representações pictóricas.

Para as entrevistas também elaborei dois problemas para os alunos resolverem durante as mesmas, tendo sido colocadas questões sobre a forma como os resolveram (estes problemas encontram-se em anexo, no guião da entrevista). O objetivo de propor estes problemas durante a entrevista foi ter uma melhor perceção de como os alunos resolvem os problemas, as estratégias e conhecimentos que usam e as dificuldades que sentem na sua resolução pois, fazendo apenas questões sobre problemas resolvidos anteriormente podiam não se recordar exatamente de como os resolveram.

Capítulo 5 - Apresentação e Análise de Dados

Neste capítulo apresento a análise dos dados recolhidos a partir das resoluções dos alunos (das fichas de trabalho e da questão de aula), das notas de campo resultantes da observação das aulas e das entrevistas que realizei a 3 alunos. Para isso, não fiz apenas uma recolha de dados mas também foi necessário fazer uma análise interpretativa dos mesmos, ou seja, partindo dos dados fui interpretá-los de modo a responder às perguntas que formulei.

A análise dos dados seguiu uma abordagem qualitativa, sendo esta a abordagem mais adequada num contexto de ensino e aprendizagem (Fernandes, 1991), em que, neste caso, queria verificar como é que os alunos abordam a resolução de problemas.

Nesta análise procuro identificar as estratégias e as representações que os alunos usaram para resolver os problemas, bem como os conhecimentos a que recorreram e as principais dificuldades que evidenciaram na resolução dos mesmos.

Apesar da análise se focar em todos os alunos da turma, darei um especial enfoque aos alunos que foram entrevistados quando tal se tornar relevante para a análise. Além disso, para não tornar a análise exaustiva, apresento uma seleção de tarefas que melhor evidencia o desempenho dos alunos ao longo desta unidade de ensino, no que respeita aos aspetos em análise e que permitem responder às questões de estudo.

5.1 - Ficha "Ângulos Internos e Externos"

Problema 2 (Grupo II)

Este problema tinha como objetivo a determinação da amplitude de um ângulo interno numa figura geométrica. A figura apresentada era a de um triângulo equilátero mas que estava dividido no interior em duas outras figuras geométricas: um triângulo e um quadrilátero, sendo a amplitude a determinar a de um ângulo interno do quadrilátero. Os alunos tinham que interpretar a figura e usar a informação de que o triângulo era equilátero para resolver o problema.

Ao apresentar a tarefa, e por ser o primeiro problema apresentado nesta unidade, os alunos mostraram alguma resistência em iniciar a sua resolução, considerando que "Este é mais difícil!", uma vez que não era uma tarefa de resolução imediata. Notei que, no geral, perceberam o que tinham que determinar mas não conseguiam encontrar uma estratégia, devendo-se em parte à dificuldade na interpretação da figura. Na verdade, não estavam a usar a informação sobre o triângulo maior ser equilátero e, por isso, não referiram as amplitudes dos seus ângulos internos que eram necessárias para articular com a informação disponível.

Ao verificar que existiam estas dificuldades sobre como começar a resolver a tarefa, questionei a turma sobre as propriedades dos triângulos equiláteros, tendo alguns alunos respondido que os seus ângulos internos têm todos a mesma amplitude e que, determinando a amplitude de cada ângulo, se ficaria a saber a amplitude dos ângulos ACB e CBA. Como as dificuldades continuaram por não conseguirem interpretar a figura, pedi para a observarem com mais atenção, tendo alguns alunos identificado que a figura inicial podia ser decomposta em outras duas figuras: um triângulo e um quadrilátero.

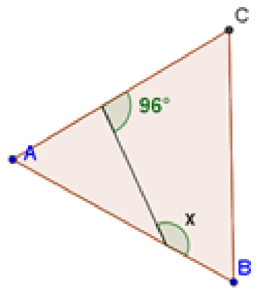


Figura 5.1 - Figura inicial do problema 2 da ficha "Ângulos Internos e Externos

Partindo desta discussão em turma, e sabendo que num triângulo a soma das amplitudes dos ângulos internos é 180º, todos os alunos encontraram a amplitude dos ângulos internos do triângulo maior, dividindo 180º por 3 e obtendo 60º para a amplitude dos ângulos BAC, ACB e CBA. No entanto, a maioria dos alunos apresenta apenas as expressões numéricas, sem descreverem a que se referem, tal como na figura 5.2.

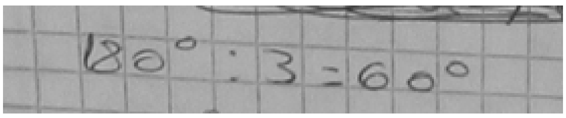


Figura 5.2 - Determinação das amplitudes dos ângulos internos do triângulo equilátero do problema 2 da ficha "Ângulos Internos e Externos"

Neste problema, depois de encontrarem a amplitude dos ângulos do triângulo equilátero, e apesar de poderem usar o triângulo menor para encontrar a resposta ao problema, todos os alunos usaram o quadrilátero e a propriedade relativa à soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono com quatro lados, tendo-se aqui observado diferentes formas de determinar o valor e usar a expressão para a soma das amplitudes dos ângulos internos.

Apesar dos alunos já terem determinado o valor da soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono com quatro lados numa tarefa anterior, a maioria foi novamente determiná-lo, tal como fez o Manuel na sua resolução, na figura 5.3.

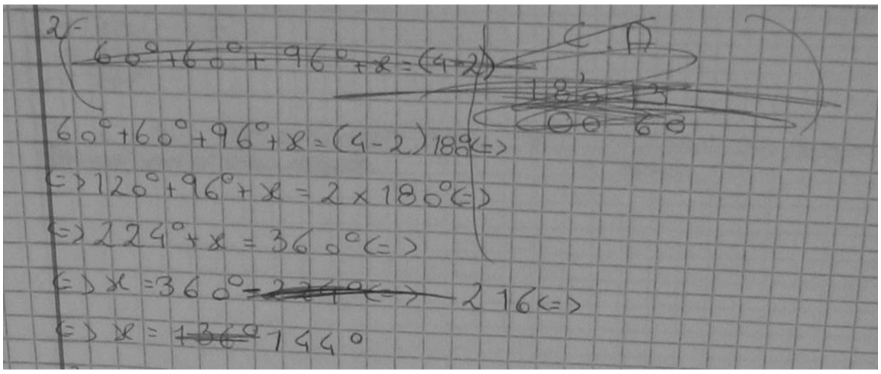


Figura 5.3 - Resolução do Manuel do problema 2 da ficha "Ângulos Internos e Externos"

Este aluno, como a maioria dos colegas, resolveu uma equação em que a incógnita era a amplitude do ângulo a determinar (x),

embora não o tenha explicitado. Para isso, igualou corretamente a soma das amplitudes dos ângulos internos do quadrilátero do problema ao valor da soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono com quatro lados, revelando conhecer esta propriedade.Também resolveu corretamente a equação mas não respondeu no final ao problema, indicando que a amplitude do ângulo x era 144º.

Outros alunos, como o João, não escreveram a expressão algébrica da soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono com quatro lados e apenas indicaram o cálculo realizado ‘2×180º = 360º’, como se pode ver na figura 5.4.

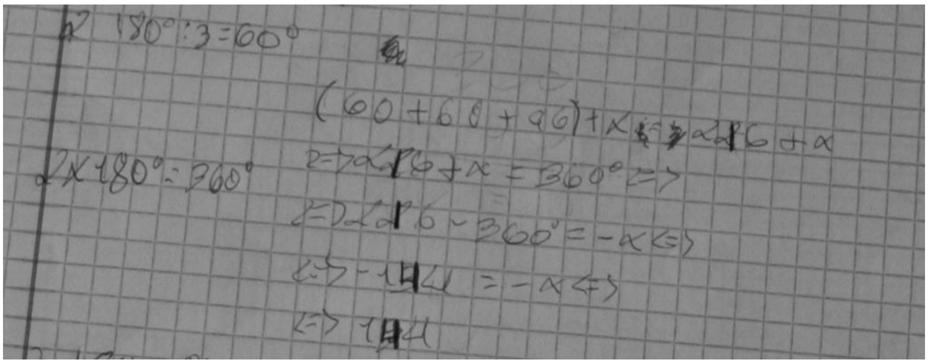


Figura 5.4 - Resolução do João do problema 2 da ficha "Ângulos Internos e Externos"

O aluno começou por definir uma expressão algébrica para a soma das amplitudes dos ângulos internos no quadrilátero, utilizando a variável x para representar a amplitude do ângulo x e simplificou-a. Depois, igualou esta expressão algébrica ao valor determinado anteriormente da soma das amplitudes dos ângulos internos de um quadrilátero e, usando um raciocínio semelhante ao aluno anterior, resolveu a equação.

Na determinação da amplitude do ângulo, alguns alunos construíram uma equação de forma diferente, colocando no primeiro membro a incógnita, neste caso indicando também o símbolo de amplitude, e no outro membro a expressão 360 - (96+60+60), após determinar a soma das amplitudes dos ângulos internos num quadrilátero, cujo resultado era 360º, como na resolução da figura 5.5.

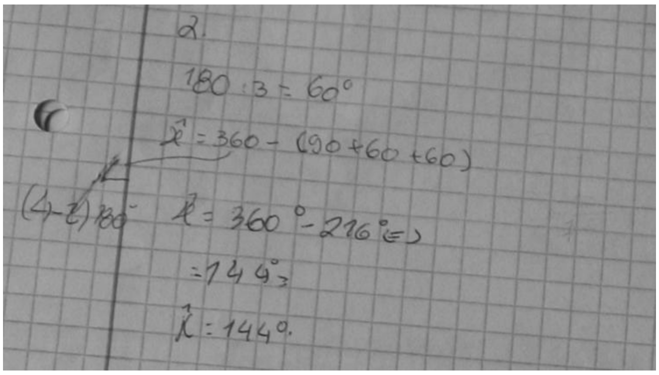


Figura 5.5 - Resolução do problema 2 da ficha "Ângulos Internos e Externos"

Esta forma de resolução (figura 5.5) indica que os alunos pensaram antes de começarem a escrever que o valor da amplitude em falta é a diferença entre o valor da soma total das amplitudes dos ângulos internos e a soma das amplitudes conhecidas, o que está correto.

Nas resoluções, a linguagem natural foi várias vezes usada na explicitação do significado de expressões ou do que representavam as variáveis, como se pode observar na resolução da figura 5.6. Este mesmo aluno apresenta o resultado a que chegou mas, tal como a maioria dos alunos, não responde ao problema, apresentando apenas o valor encontrado para a incógnita.

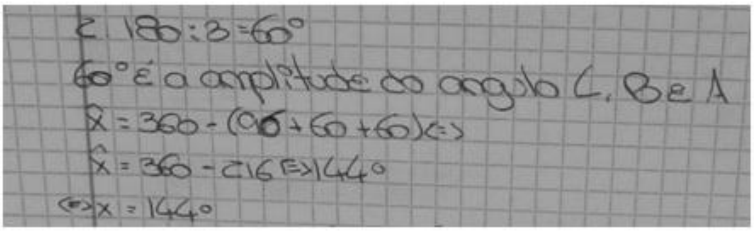


Figura 5.6 -Resolução com linguagem natural do problema 2 da ficha "Ângulos Internos e Externos"

A maior dificuldade que os alunos evidenciaram neste problema está relacionada com a visualização, em particular com a apreensão operatória (Duval, 2012), observada na interpretação do problema. Na verdade, os alunos tiveram dificuldades em percecionar a figura inicial como podendo ser transformada em outras duas figuras (apesar de no enunciado já estarem visíveis) e em usar propriedades do triângulo equilátero, ou seja, em retirar informação que não era explicitamente mostrada na figura.

Observei dificuldades também no uso da notação simbólica, nomeadamente no uso do símbolo para a amplitude de um ângulo, apesar de todos os alunos mostrarem que o conhecem de anos anteriores, levando-me a pensar que não o fizeram por esquecimento. Um erro bastante comum, que observei nas resoluções dos alunos e durante as aulas, foi a imprecisão no uso dos sinais de igualdade e equivalência, tal como o João na figura 5.4. Isto poderá ser devido aos alunos ainda terem alguma dificuldade em perceber a diferença entre igualdade e equivalência.

5.2 - Ficha "Quadriláteros e Trapézios"

Problema 1 (Grupo II)

Neste problema, pedia-se aos alunos para avaliarem a veracidade de uma afirmação sobre a classificação de um polígono, dadas as amplitudes de alguns dos seus ângulos internos. Como os alunos mostraram alguma dificuldade em saber como começar a resolução do problema, questionei-os sobre o que é que caraterizava um trapézio retângulo. A resposta correta foi imediata: tem que ter dois ângulos internos retos. A partir desta discussão incial com a turma, vários alunos começaram por construir uma figura geométrica com as amplitudes indicadas no enunciado, como mostrado na figura 5.7.

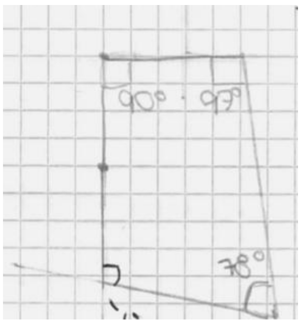


Figura 5.7 - Figura geométrica inicial do problema 1 da ficha "Quadriláteros e Trapézios"

Alguns alunos, após construirem a figura geométrica, afirmaram que o ângulo desconhecido não podia ser reto, por observação da figura ou medição da amplitude do ângulo. A figura, neste caso, é utilizada como evidência para a falsidade da afirmação, tendo depois os alunos feito uma verificação através do uso de expressões numéricas, usando os conhecimentos sobre as propriedades de um trapézio retângulo no que respeita às amplitudes dos seus ângulos internos.

O aluno cuja construção está apresentada na figura 5.7, tal como a maioria, adicionou à figura geométrica símbolos para representar ângulos e também representações simbólicas das amplitudes.

O Manuel, na figura 5.8, começou por fazer uma resolução usando apenas expressões numéricas, considerando, erradamente, que num trapézio retângulo teriam que existir três ângulos internos de 90º (cuja soma seria 270º), induzido por uma interpretação errada do enunciado que só referia três ângulos e comparou com a soma das amplitudes dos ângulos dados, levando-o a concluir que a afirmação era falsa. No entanto, apercebeu-se do erro cometido e optou por construir uma figura geométrica onde representou todos os ângulos, após determinar numericamente a amplitude que era desconhecida, recorrendo à propriedade da soma dos ângulos internos que perfaziam 360º. Apesar disso, na resolução não fica claro se o aluno considera que o trapézio teria que ter dois ângulos internos retos ou se teria que ter três.

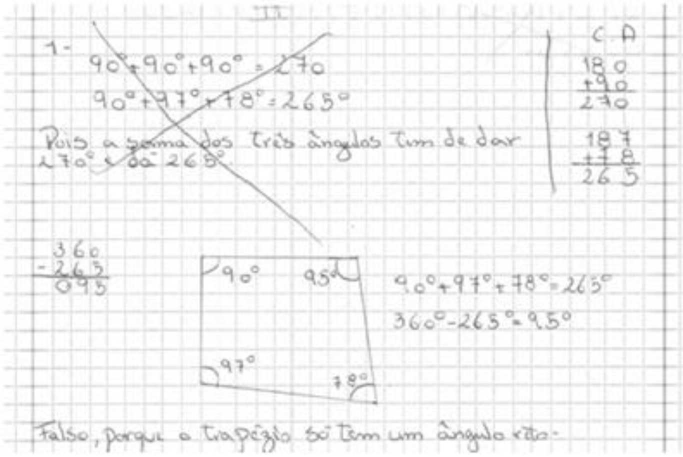


Figura 5.8- Resolução do Manuel do problema 1 da ficha "Quadriláteros e Trapézios"

Em seguida, tal como a maioria dos alunos, usou uma prova por contradição para, mostrando que a amplitude desconhecida era 95º, concluir que a afirmação era falsa por ter apenas um ângulo reto. Na prova usou expressões numéricas, representando as amplitudes e as operações feitas com as mesmas e linguagem natural usada na prova por contradição na sua parte final, para responder ao problema.

O Manuel usou o conhecimento sobre o valor da soma das amplitudes dos ângulos internos de um quadrilátero (360º) não tendo havido nenhum aluno a usar a expressão da soma das amplitudes dos ângulos internos num polígono, tal como previsto já que no decorrer da aula tinha sido estudado o caso particular da soma das amplitudes dos ângulos internos num quadrilátero, que era de 360º.

Alguns alunos não usaram nenhuma construção, tal como o João, na figura 5.9.

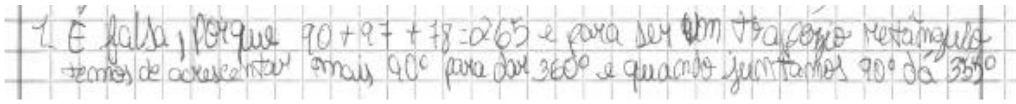


Figura 5.9 - Resolução do João do problema 1 da ficha "Quadriláteros e Trapézios"

Este aluno também usou uma estratégia de prova por contradição mas de uma forma diferente, assumindo que o trapézio retângulo teria que ter dois ângulos retos e, somando 90º à soma das amplitudes dos ângulos conhecidos, não obtinha 360º mas sim 355º, o que impossibilitava a verificação do requisito referente à soma das amplitudes dos ângulos internos de 360º. O aluno revela que se baseou no seu conhecimento das propriedades de um trapézio retângulo no que respeita às amplitudes dos seus ângulos internos, sem necessidade de criar uma representação externa do mesmo.

Na figura 5.10 o aluno construiu um trapézio retângulo, sem ter em conta as amplitudes referidas no enunciado, e após encontrar o valor da amplitude em falta colocou essa informação na figura, mas num dos ângulos retos. Esta resolução evidencia que o aluno construiu inicialmente um trapézio retângulo para o auxiliar na interpretação do problema, mas posteriormente não teve o cuidado de fazer uma nova construção ou não colocar na construção já feita as amplitudes. Poderá também revelar dificuldades na visualização, ao fazer uma representação simbólica da amplitude de um ângulo que não corresponde à amplitude do mesmo na construção.

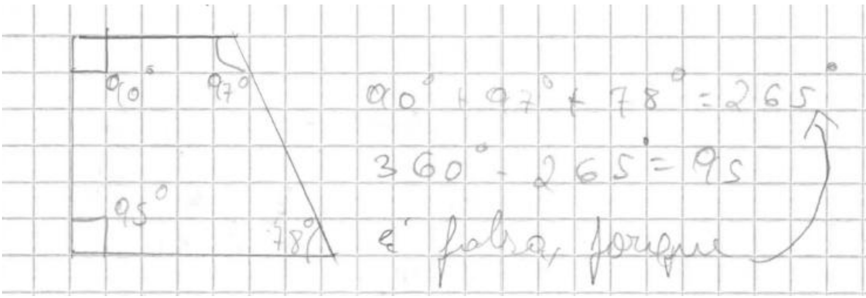


Figura 5.10-Ângulo reto com amplitude errada no problema 1 da ficha "Quadriláteros e Trapézios"

Na resolução da figura 5.11 o aluno assinala com um valor de 97º a amplitude de um ângulo que na figura desenhada tem amplitude inferior a 90º, evidenciado pelas linhas do papel quadriculado.

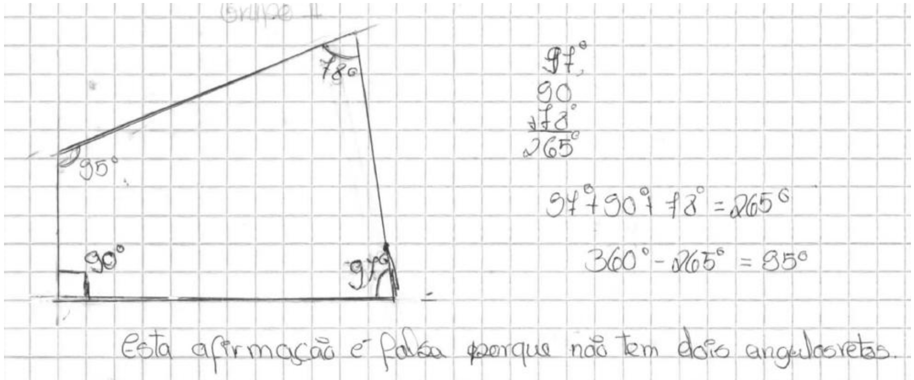


Figura 5.11 - Ângulo com amplitude errada no problema 1 da ficha "Quadriláteros e Trapézios"

Este aluno mostra aqui dificuldades na visualização ao fazer uma representação simbólica da amplitude de um ângulo que não está em consonância com a verdadeira amplitude.

Problema 2 (Grupo II)

Neste problema, os alunos teriam que recorrer às propriedades dos trapézios isósceles, já suas conhecidas, para determinar as medidas dos seus lados a partir da informação sobre o seu perímetro e a relação entre a medida dos seus lados não paralelos e as bases. Comecei por questionar a turma sobre o que carateriza um trapézio isósceles, tendo obtido respostas corretas dos alunos: tem os dois lados não paralelos geometricamente iguais.

Alguns alunos tiveram dificuldade em definir as medidas das bases a partir da medida dos lados não paralelos, mas foram-se recordando de problemas semelhantes que tinham resolvido anteriormente, em que tinham que definir valores a partir de outros.

Na resolução deste problema a maioria dos alunos construiu corretamente uma figura geométrica representando um trapézio isósceles, como se pode ver na resolução da figura 5.12, sendo esta representação uma forma de auxílio à interpretação do problema, permitindo interagir com o conceito de trapézio isósceles e explicitar mais facilmente os dados do enunciado.

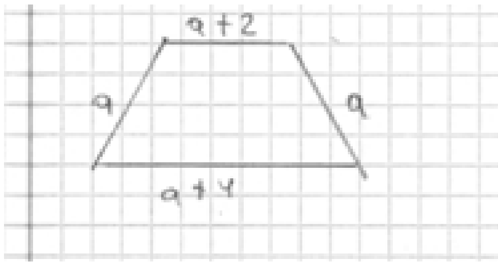


Figura 5.12- Construção inicial de um trapézio isósceles no problema 2 da ficha "Quadriláteros e Trapézios"

Também, tal como a maioria dos alunos, este definiu uma variável para representar a medida de um dos lados não paralelos (a), usando o seu conhecimento de que nos trapézios isósceles estes lados têm a mesma medida. Fazendo uma correta interpretação do enunciado, definiu então expressões algébricas representativas das medidas das bases, partindo da medida dos lados não paralelos ($a + 2$ e $a + 4$) que inseriu na figura geométrica construída. Para encontrar o valor da medida dos lados não paralelos, a maioria dos alunos resolveu uma equação, igualando a expressão da soma de todos os lados do trapézio ao valor do perímetro, dado no enunciado, como se pode ver no exemplo da figura 5.13.

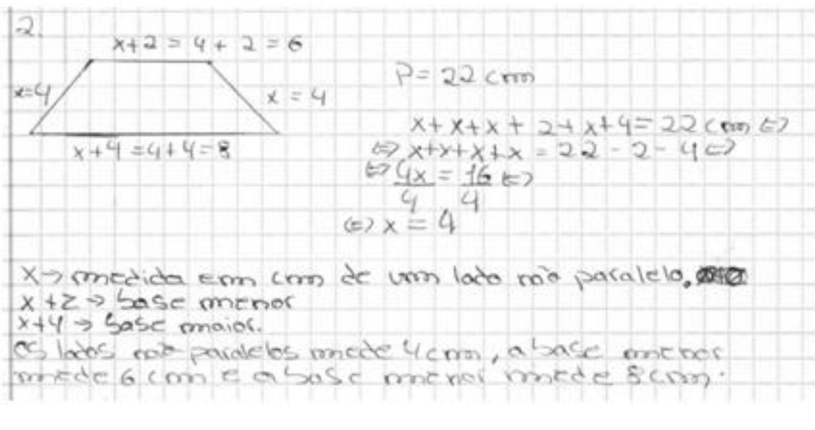


Figura 5.13 – Resolução de equação a partir da figura geométrica do problema 2 da ficha "Quadriláteros e Trapézios"

Neste exemplo, o aluno usou também a linguagem natural para indicar o significado da variável e das expressões algébricas usadas no problema e, depois, para responder ao problema. Neste caso, como não usou designação para os vértices do quadrilátero, o aluno sentiu necessidade de usar linguagem natural e fê-lo corretamente, indicando na sua resposta as unidades de medida, através do seu símbolo (cm para centímetros). É de salientar que só alguns alunos apresentaram as medidas de todos os lados do trapézio, como solicitado, substituindo a variável nas expressões algébricas pela solução da equação, como neste exemplo.

Houve, no entanto, alguns alunos que fizeram uma interpretação errada do enunciado, considerando que a medida de uma base era 2 cm e a medida da outra base era 4 cm, tal como João, na figura 5.14.

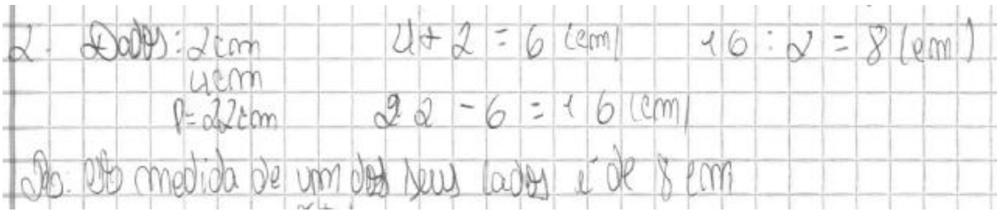


Figura 5.14- Resolução com interpretação errada do João do problema 2 da ficha "Quadriláteros e Trapézios"

Com base nesses pressupostos, o aluno fez a determinação das medidas em falta usando apenas expressões numéricas já que neste caso não havia incógnita. Quando solicitado a ler novamente o enunciado, o João apercebeu-se do seu erro, assumindo que tinha lido o enunciado sem muita atenção. Nessa altura construiu uma figura geométrica representando um trapézio isósceles, como auxiliar na interpretação do problema, indicando na mesma as expressões algébricas das medidas dos lados e definindo uma incógnita para a medida dos lados não paralelos, como se pode ver na figura 5.15.

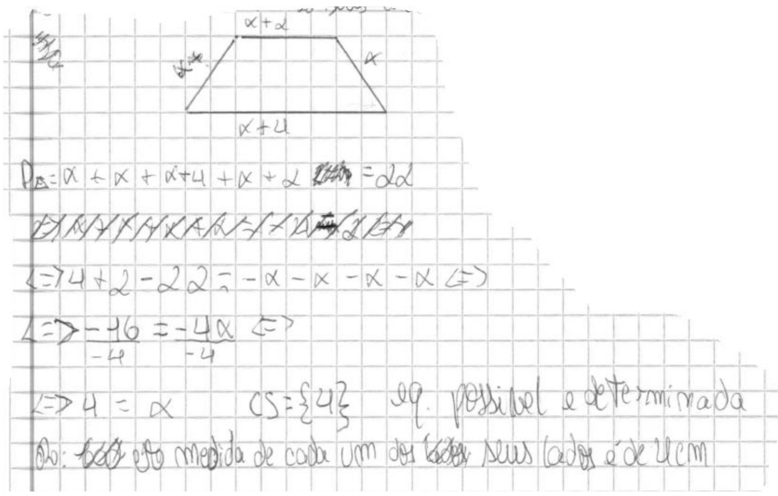


Figura 5.15 - Resolução de João do problema 2 da ficha "Quadriláteros e Trapézios"

Teve ainda o cuidado de indicar o conjunto solução, usando a simbologia adequada e de classificar a equação como 'possível e determinada' usando linguagem natural.

Outros alunos, contudo, optaram por não construir uma figura geométrica, tal como o António, cuja resolução se pode ver na figura 5.16, traduzindo de imediato o enunciado por uma equação.

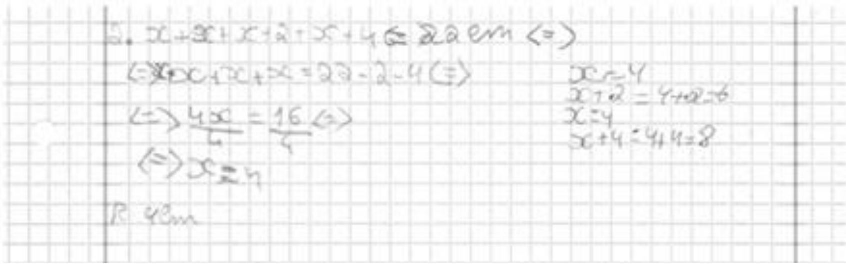


Figura 5.16- Resolução do António do problema 2 da ficha "Quadriláteros e Trapézios"

Na entrevista, quando questionei o aluno sobre o motivo de não fazer muito uso de figuras geométricas na resolução dos problemas que apresentei, respondeu-me que gostava de "puxar pela cabeça", indiciando que considera que um desenho ou figura geométrica ao ajudarem na resolução ou interpretação de um problema promove um menor desenvolvimento do raciocínio. Este aluno denotou algumas dificuldades na visualização, no entanto tem facilidade no uso de expressões algébricas, podendo residir aqui o motivo para preferir não usar desenhos.

É de salientar que todos os alunos construíram o trapézio na mesma posição, ou seja, as bases na horizontal, apesar de eu ter mostado no Geogebra, durante as aulas, trapézios em diversas posições e de eles os terem identificado em tarefas feitas anteriormente. Este comportamento poderá dever-se à facilidade de desenho da figura no papel quadriculado disponível ou a um contacto mais frequente com este posicionamento.

5.3 - Ficha "Paralelogramos e Papagaios"

Problema 1 (Grupo II)

Neste problema, os alunos tinham que usar propriedades sobre paralelogramos, em particular sobre ângulos internos, para, sabendo a amplitude de um ângulo interno e que todos os lados tinham a mesma medida, classificá-lo e determinar as amplitudes em falta.

A maioria dos alunos começou por construir uma figura geométrica representando um paralelogramo, tal como o Manuel, na figura 5.17, que construiu um paralelogramo obliquângulo, com representações simbólicas dos ângulos, da medida de um lado e das amplitudes que entretanto determinou. Esta determinação terá sido feita recorrendo ao cálculo mental pois a construção foi feita com as amplitudes corretas e os cálculos são apresentados depois, e como justificação para as amplitudes encontradas. Neste caso, a construção permite interagir com o conceito de paralelogramo e ilustrar os resultados a que chegou na sua determinação das amplitudes, não tendo no entanto as medidas de lados corretas.

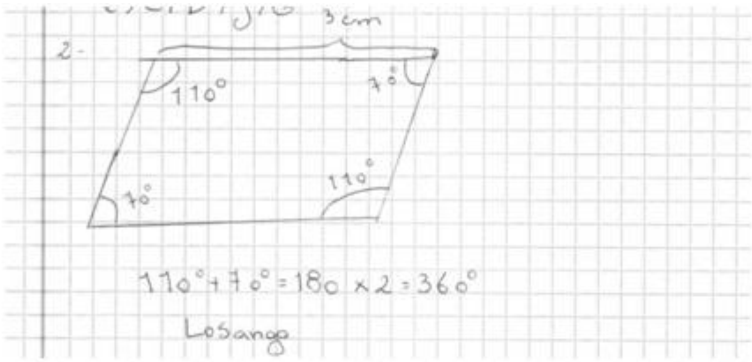


Figura 5.17 - Resolução do Manuel do problema 1 da ficha "Paralelogramos e Papagaios"

De notar que a maioria dos alunos, tal como o Manuel, também adicionou à construção representações simbólicas de ângulos e nalguns casos de amplitudes e medidas de lados.

O aluno usou o seu conhecimento de que num paralelogramo as amplitudes de dois ângulos consecutivos somam 180º e que a soma das amplitudes dos ângulos internos é de 360º. Mostra também que sabe que os ângulos opostos têm a mesma amplitude ao indicar que o processo se repete. Esta indicação está no entanto incorreta, embora se perceba qual é a intenção do aluno e também não apresenta as justificações para os seus passos.

Classificou corretamente o quadrilátero como sendo um losango, tal como a maioria dos alunos, mostrando que sabe que um paralelogramo em que todos os lados têm a mesma medida é um losango mas a construção feita não é de um losango mas sim de um paralelogramo na sua representação mais habitual. Na sua resposta apenas usou linguagem natural para classificar o quadrilátero, tal como a maioria dos alunos e tal como esperado.

Alguns alunos não construíram uma figura geométrica, tal como o António, na figura 5.18, que usou expressões numéricas e linguagem natural.

Figura 5.18 - Resolução do António do problema 1 da ficha "Paralelogramos e Papagaios"

Na resolução apresentada, o aluno começou por determinar a amplitude de um ângulo consecutivo a um com uma amplitude de 110º. Depois, pretende indicar que a soma das amplitudes restantes é de 360º - 180º, mas de forma confusa pois limita-se a dizer que é 180º sem indicar como chega às restantes amplitudes. A resposta está correta, mas a resolução está incompleta.

Uma forma diferente de raciocínio pode ser destacada na figura 5.19.

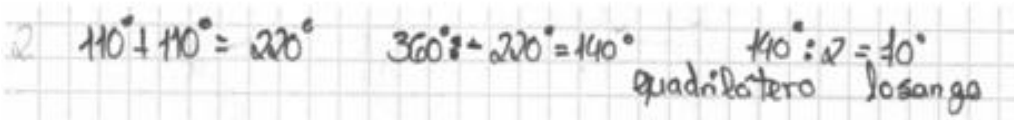


Figura 5.19 - Resolução usando as propriedades do problema 1 da ficha "Paralelogramos e Papagaios"

Nesta resolução, que está correta embora incompleta por não apresentar justificações para os passos realizados, o aluno, sabendo que o ângulo oposto tem a mesma amplitude, foi somar as amplitudes desses dois ângulos e subtraiu essa soma a 360º (que é o valor da soma das amplitudes dos ângulos internos num quadrilátero). Em seguida, sabendo mais uma vez que os dois ângulos restantes tinham a mesma amplitude, foi dividir o valor de 140º por 2, obtendo 70º.

Este aluno usou aqui os seus conhecimentos sobre as propriedades dos ângulos internos de um paralelogramo de forma diferente, não fazendo uso da relação entre os ângulos consecutivos mas apenas entre os opostos.

Todos os alunos, nas suas resoluções, usaram o valor da soma das amplitudes dos ângulos internos nos quadriláteros bem como relações entre ângulos internos num paralelogramo. Nalgumas resoluções, tal como as das figuras 5.17 e 5.20, os alunos construíram figuras geométricas que não correspondiam ao enunciado nem à sua resolução.

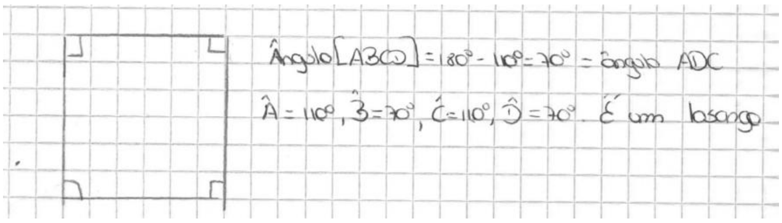


Figura 5.20 - Construção do paralelolgramo no problema 1 da ficha "Paralelogramos e Papagaios"

No primeiro caso (figura 5.17) o requisito de todos os lados terem a mesma medida não foi satisfeito e no segundo caso (figura 5.20) a construção respeitou o requisito de ter todos os lados com a mesma medida, mas as amplitudes dos ângulos internos estão erradas. Identifica-se na resolução da figura 5.17, tal como na resolução da figura 5.20, uma dificuldade na capacidade de visualização ao apresentarem representações da figura que não correspondem à resolução. Estas construções poderão ter origem numa conceção rígida para representar um paralelogramo (no primeiro caso) e um paralelogramo em que todos os lados têm a mesma medida (no segundo caso).

A dificuldade mais frequente que os alunos demonstraram foi em justificar os seus passos não tendo o cuidado de escrever as resoluções de forma completa, com o uso de relações entre os ângulos internos.

5.4 - Ficha "Quadriláteros"

Problema 2

Neste problema o objetivo era classificar um quadrilátero, [ABCD], tendo em conta que se tratava de um paralelogramo com um ângulo interno reto, tendo que se usar os conhecimentos sobre propriedades dos paralelogramos para fazer a classificação.

A maioria dos alunos começou por construir uma figura geométrica representando um quadrilátero, tal como o da resolução da figura 5.21.

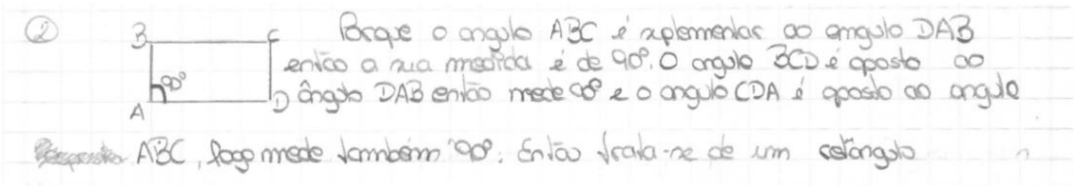


Figura 5.21 - Resolução com representação pictórica do problema 2 da ficha "Quadriláteros"

Este aluno assinalou na figura os vértices do quadrilátero, usando letras (as mesmas que eram referidas no enunciado), e o ângulo reto no vértice referido no enunciado acrescentando uma representação simbólica da amplitude, o que não era necessário e denota que precisa de ter essa indicação para reconhecer o ângulo como sendo reto. A figura construída serviu como auxílio à interpretação do problema, explicitando dados do enunciado. A maioria dos alunos colocou também nas figuras geométrica símbolos de ângulos retos mas poucos identificaram os vértices.

Usou em seguida raciocínio direto (tal como a maioria dos alunos) para a sua argumentação, que está correta, usando linguagem natural com representações simbólicas para os ângulos (letras que usou para identificar os vértices) e amplitudes. O aluno justifica o primeiro valor encontrado para uma amplitude identificando os dois ângulos como suplementares, o que está correto, mas não menciona que são ângulos consecutivos. No segundo passo, justifica corretamente que são ângulos opostos, logo com a mesma amplitude. O terceiro passo também está correto, ao justificar novamente que são ângulos opostos. Na sua resposta não justifica claramente porque é um retângulo, embora a frase subentenda que é uma continuação das frases anteriores e que estas justificam a classificação, ou seja, que é retângulo por ter os quatro ângulos internos retos. Na sua argumentação usou as relações entre ângulos opostos e consecutivos num paralelogramo.

Alguns alunos, contudo, resolveram o problema recorrendo essencialmente à linguagem natural, com representação simbólica para amplitudes, usando raciocínio direto, tal como na resolução da imagem 5.22.

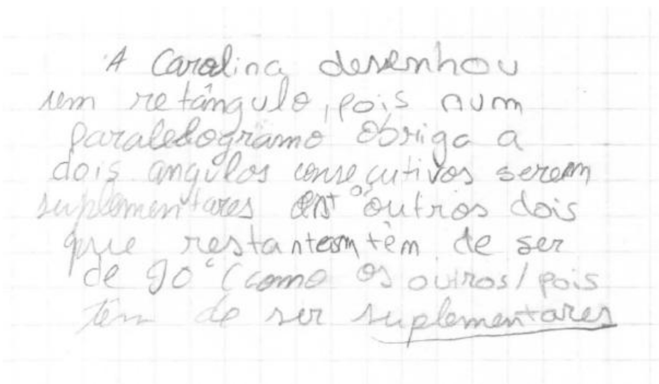

A Carolina desenhou
um retângulo, pois num
paralelogramo obriga a
dois angulos consecutivos serem
suplementares ~~os~~ outros dois
que restantem têm de ser
de 90° (como os outros/ pois
têm de ser suplementares

Figura 5.22 - Resolução com linguagem natural do problema 2 da ficha "Quadriláteros"

Este aluno não faz uso da designação dos vértices do paralelogramo referido no enunciado justificando a sua classificação com propriedades dos paralelogramos. Justifica primeiro, corretamente, que dois ângulos consecutivos são suplementares.

Depois diz que os outros dois ângulos têm que ter de amplitude 90º pois também são suplementares mas está incompleto pois não refere que são ângulos que têm como ângulo oposto um dos primeiros referidos. O aluno denota, tal como a maioria dos alunos nas diferentes tarefas, alguma dificuldade em escrever os seus argumentos.

Destaco ainda a seguinte resolução, que apesar de não dar uma resposta ao problema apresenta uma construção que, sem estar justificada, corresponde ao descrito. A construção, neste caso, poderá ter sido usada como resolução em si já que fazendo-a de acordo com o enunciado o que se obtinha era exatamente um retângulo.

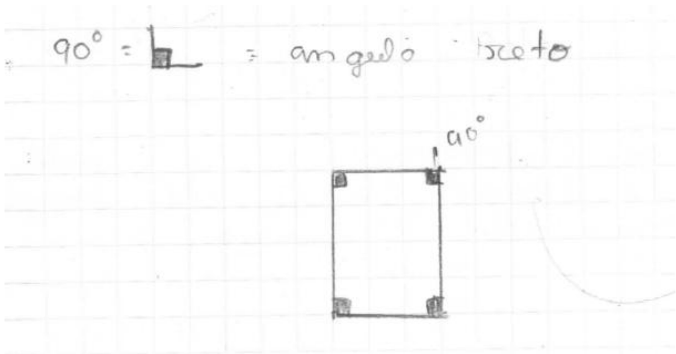


Figura 5.23 - Resolução com construção de figura do problema 2 da ficha "Quadriláteros"

Este aluno (na figura 5.23) construiu um quadrilátero assinalando os ângulos internos, que neste caso são retos, com uma simbologia diferente da habitual e assinala que esse símbolo corresponde a um ângulo de 90º, reforçando que é um ângulo reto usando linguagem natural - tal como noutras resoluções que já aqui mostrei em que se usa linguagem natural para dar indicações sobre uma representação simbólica. Esta simbologia, que é usada, por vezes, em manuais, não é a usual quando se está a desenhar usando material de desenho mas sim desta forma:

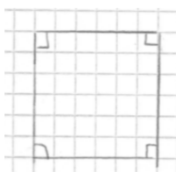


Figura 5.24 - Simbologia habitual para os ângulos retos

Outros alunos desenharam também as diagonais do paralelogramo, como o da figura 5.25.

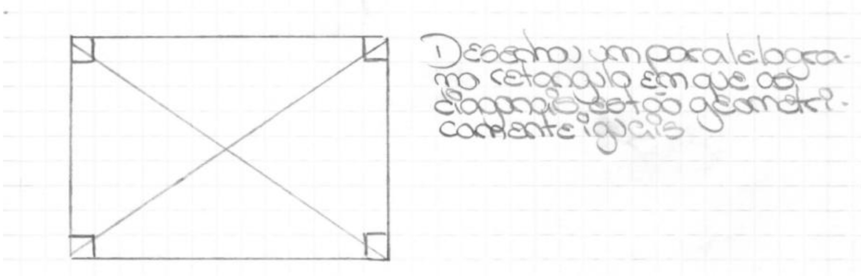


Figura 5.25 - Resolução com desenho de diagonais do problema 2 da ficha "Quadriláteros"

Este aluno não apresenta mais nenhuma justificação para a sua resposta, além da figura geométrica, mas na sua resposta refere que "as diagonais estão geometricamente iguais", o que está correto mas estas não eram referidas no enunciado. O aluno terá inferido que era um retângulo (não apresentando a sua justificação) e fez uma construção do mesmo. Como sabia que num retângulo as diagonais são geometricamente iguais, poderá ter pensado que era necessário referir que a representação que fez tem efetivamente as diagonais geometricamente iguais.

O António, na figura 5.26, também refere as diagonais, justificando claramente a sua resposta com base nas mesmas.

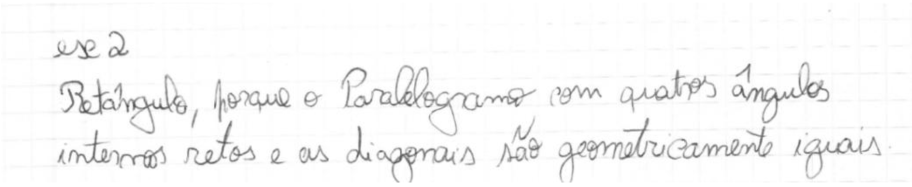


Figura 5.26 - Resolução do António do problema 2 da ficha "Quadriláteros"

O aluno justifica a sua classificação com os quatro ângulos retos do paralelogramo, não mostrando como chegou a esta conclusão, e com as diagonais, que não são mencionadas no enunciado. Estas respostas denotam que estes alunos, ao conhecerem uma propriedade que lhes foi recentemente apresentada, usam-na sem ser necessária ou sem terem informação sobre a mesma, apenas porque a conhecem e pensarem que é necessário usá-la.

A maior dificuldade evidenciada na resolução deste problema foi com o uso de propriedades invocadas sem serem necessárias, tendo os alunos também evidenciado dificuldades em escrever justificações completas, omitindo por vezes os passos que os levaram a tirar certas conclusões.

Problema 5.a)

Neste problema era dito sobre um paralelogramo [ABCD] que as suas diagonais se intersetavam num ponto X e que o ângulo BXA tinha de amplitude 90º, sendo que o objetivo era identificar se a figura era um quadrado (o João estava certo) ou se apenas se podia afirmar que era um losango (a Catarina estava certa).

A maioria dos alunos usou apenas linguagem natural ou linguagem natural com representações simbólicas para resolver este problema, tal como o da figura 5.27 que usa uma prova por contradição e uma representação simbólica para a amplitude de um ângulo.

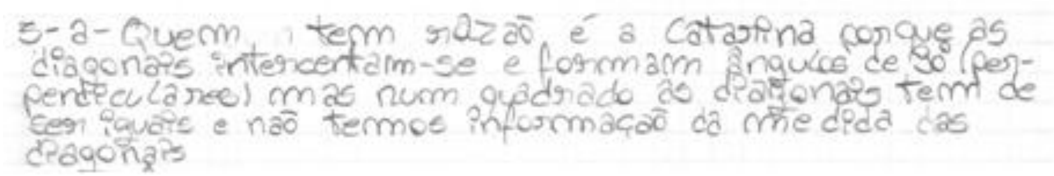


Figura 5.27 - Resolução com linguagem natural do problema 5.a) da ficha "Quadriláteros"

O aluno afirma, corretamente, que quem tem razão é a Catarina porque as diagonais formam entre si ângulos retos. Depois também refere corretamente que num quadrado as diagonais têm "de ser iguais", quando deveria ter escrito "geometricamente iguais", e que não tem informação sobre as medidas, o que está correto. O aluno usa as propriedades referentes às diagonais num quadrado para provar que não se pode inferir que o paralelogramo possa ser assim classificado.

O aluno cuja resolução se pode ver na figura 5.28 construiu uma figura geométrica com símbolos que representam os vértices referidos no enunciado.

Figura 5.28 - Resolução com figura geométrica do problema 5.a) da ficha "Quadriláteros"

A sua justificação é no entanto insuficiente e é de notar que a figura geométrica construída é um quadrado, o que, não estando errado, é no entanto um caso particular de um losango em que as diagonais são geometricamente iguais, podendo dever-se a pensar inicialmente que era um quadrado.

O António, na figura 5.29, justifica que apenas se pode afirmar que é um losango devido às diagonais serem perpendiculares.

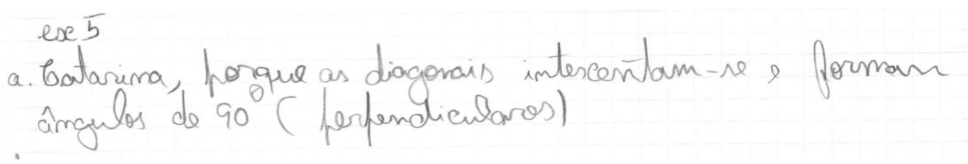


Figura 5.29 - Resolução do António do problema 5.a) da ficha "Quadriláteros"

Este aluno evidencia saber que, num losango, as diagonais são perpendiculares. No entanto, esta justificação não se aplica a este problema e o que se pretendia era que justificasse se poderia ser um caso particular dos losangos tendo em conta as medidas das sua diagonais. Esta resposta poderá revelar dificuldades do aluno no uso das propriedades.

Outro aluno, cuja resolução está na figura 5.30, afirma que ambas as afirmações estão certas.

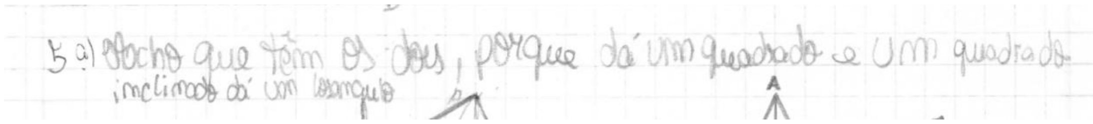


Figura 5.30 - Resolução com quadrado inclinado do problema 5.a) da ficha "Quadriláteros"

O aluno infere que é um quadrado, sem justificar, e depois coloca o quadrado como sendo um losango se estiver numa posição em particular. O aluno poderá ter interpretado que o quadrado é um caso particular dos losangos numa posição específica. Este aluno revela considerar que a posição de um quadrilátero tem implicações na sua classificação, não invocando propriedades do quadrilátero e revelando aqui algumas dificuldades na visualização ao criar um protótipo rígido para a representação de figuras geométricas.

É de notar que antes da resolução deste problema os alunos tinham feito já várias construções em outras tarefas anteriores, o que poderá ter influenciado a não construção de figuras geométricas nesta tarefa, recorrendo a outras já feitas, tal como aconteceu durante a entrevista.

Problema 6

Não irei fazer aqui a análise da resolução deste problema pois foi resolvido em turma, com a finalidade de se deduzir uma propriedade a partir da resolução, no entanto, o enunciado foi inicialmente trabalhado pelos alunos tendo surgido muitas dificuldades na interpretação da figura geométrica, pelo que estas dificuladades serão aqui focadas.

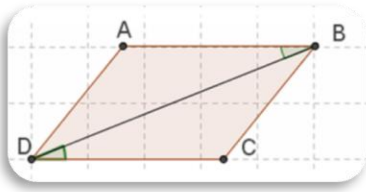


Figura 5.31 - Figura do problema 6 da ficha "Quadriláteros"

A figura (Figura 5.31) mostrava um trapézio com uma das diagonais desenhadas, era dada a informação de que [AB] e [CD] eram geometricamente iguais e os alunos tinham que demonstrar que os triângulos [ABD] e [BCD] eram congruentes (recorrendo a critérios de congruência). Os alunos mostraram muita dificuldade em fazer a interpretação da figura, não conseguindo fazer a decomposição nos dois triângulos e trabalhar a informação dada sobre ângulos e lados.

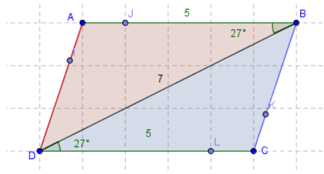


Figura 5.32 - Figura do Geogebra do problema 6 da ficha "Quadriláteros"

Perante as dificuldades evidenciadas, resolvi fazer uma discussão em turma usando a figura que tinha feito no Geogebra para ser usada na discussão do problema, após a resolução pelos alunos. A figura (na figura 5.32) mostrava as medidas dos dois lados opostos referidos no enunciado e da diagonal e as amplitudes dos ângulos assinalados. Cada triângulo também tinha uma cor diferente o que ajudou os alunos a perceberem que existiam dois triângulos. Fui colocando questões sobre que critério de congruência poderia ser usado, tendo em conta a informação disponível sobre medidas de lados e amplitudes de ângulos e os alunos responderam então, corretamente, que era o LAL (Lado-ângulo-Lado). Os alunos mostraram na resolução deste problema dificuldades na visualização no que diz respeito à interpretação da figura que era dada, em particular na sua decomposição.

5.5 - Questão de Aula

Problema I

O primeiro problema apresentava, em linguagem natural, um quadrilátero com dois pares de lados paralelos, as diagonais geometricamente iguais e a formarem entre si ângulos retos. Pedia-se para o classificar tendo os alunos, na sua resolução, que recorrer às propriedades de quadriláteros. De notar que os alunos tinham material de desenho.

A maioria dos alunos construiu uma figura geométrica representando um quadrilátero tal como o João, na figura 5.33. O aluno construiu um quadrado com as suas diagonais, assinalando os ângulos internos, não os ângulos formados pelas diagonais (este aspeto é discutido à frente).

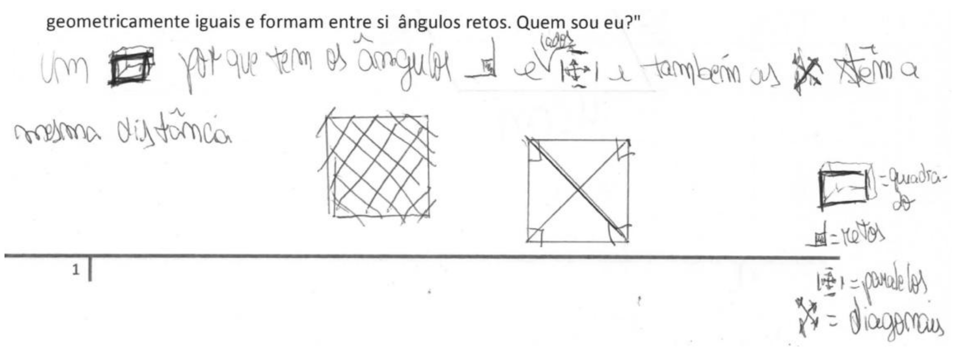


Figura 5.33 - Resolução do problema 1 da questão de aula do João

Esta construção serviu para ilustrar a sua argumentação, usando raciocínio direto, que consta de linguagem natural mas também de representações símbólicas, que o aluno mostra ao lado o que significam. Estes símbolos são símbolos usados pelo aluno para representar conceitos matemáticos, revelando uma grande apetência pelo uso de uma simbologia mas com uma representação muito própria.

O aluno também argumentou com base nos seus conhecimentos sobre a relação entre os lados dos paralelogramos e sobre as medidas das suas diagonais. No entanto, refere os ângulos internos retos, que assinalou na figura e não os ângulos formados pelas diagonais apesar de a figura deixar antever que o aluno considera que os ângulos formados por estas são retos. Durante a entrevista, na resolução de um problema semelhante, desenhou um quadrado onde já assinalou os ângulos internos retos mas não os mencionou para justificar que era um quadrado, tendo, para isso, recorrido aos ângulos formados pelas diagonais. O João mostra, assim, que embora use no seu raciocínio a informação sobre as diagonais formarem entre si ângulos retos, na representação que faz vai buscar a propriedade que define os retângulos (enquanto paralelogramos) e que os quadrados também apresentam.

Na resolução do problema, alguns alunos apenas fizeram uma construção de uma figura geométrica, como o da figura 5.34.

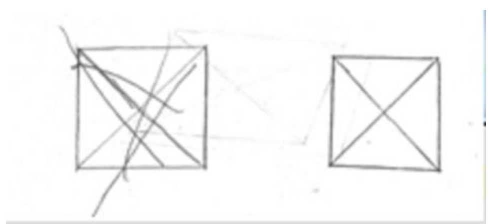


Figura 5.34 - Resolução do problema 1 da questão de aula - apenas desenho

Estes alunos não respondem à pergunta do problema, no entanto, a construção feita corresponde a uma correta interpretação dos dados do enunciado. Apesar de não terem assinalado os ângulos retos, nota-se que o seu objetivo foi desenhar um paralelogramo com as diagonais geometricamente iguais e a formar ângulos retos entre si. Poderão ter considerado que o desenho de uma figura geométrica, por si só, responderia ao problema, aparentando uma maior apetência pelo uso de representações pictóricas.

Alguns alunos apresentaram uma resolução apenas em linguagem natural, como o Manuel na figura 5.35, usando raciocínio direto na resolução do problema.

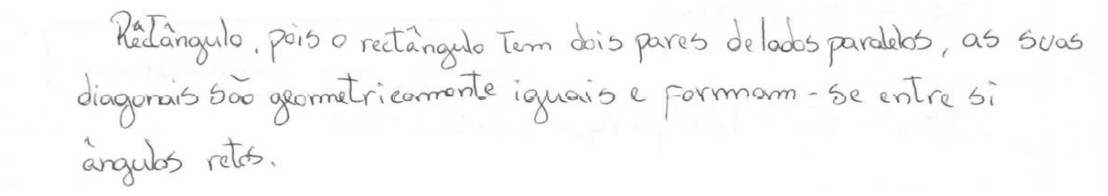

Rectângulo, pois o rectângulo tem dois pares de lados paralelos, as suas diagonais são geometricamente iguais e formam-se entre si ângulos retos.

Figura 5.35 - Resolução do problema 1 da questão de aula do Manuel

O Manuel também usa as propriedades dos quadriláteros mas, incorretamente, assume que as diagonais de um retângulo formam entre si ângulos retos, o que não é necessariamente verdade, não estando esta justificação correta.

O António, por seu lado, teve em conta apenas os ângulos formados pelas diagonais, como se pode ver na figura 5.36.

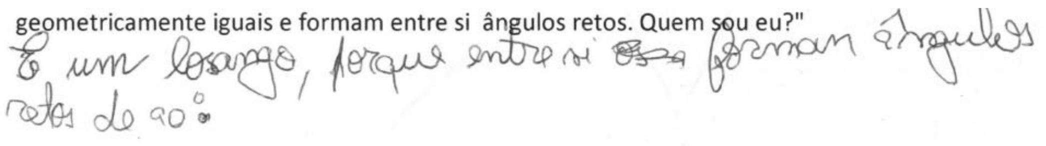

geometricamente iguais e formam entre si ângulos retos. Quem sou eu?"
É um losango, porque entre si ~~essa~~ formam ângulos retos de 90º.

Figura 5.36 - Resolução do problema 1 da questão de aula do António

Sendo um quadrado um losango, tem a particularidade de ter as diagonais geometricamente iguais, dado que o aluno não usou.

Na entrevista as dificuldades evidenciadas pelo Manuel e pelo António irão novamente surgir na resolução de um problema semelhante a este, como se poderá ver.

A resolução seguinte, mostra mais dificuldades no uso de propriedades de quadriláteros. O aluno da figura 5.37 classificou o quadrilátero de papagaio argumentando, erradamente, que um papagaio tem dois pares de lados paralelos (não necessariamente) e que as suas diagonais são geometricamente iguais (não necessariamente).

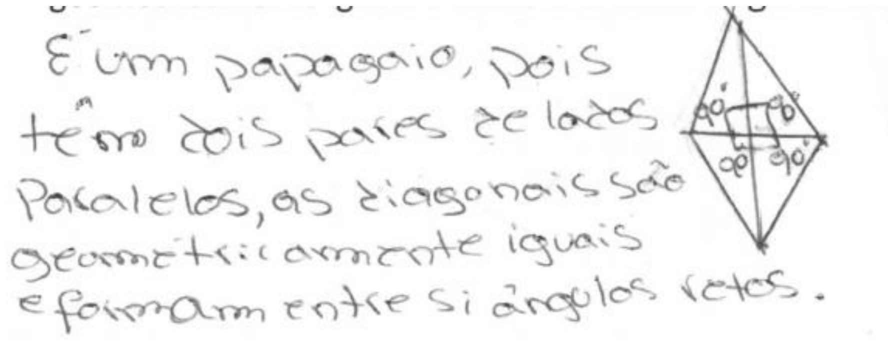


Figura 5.37 - Resolução incorreta do problema 1 da questão de aula

Na figura desenhada, de um papagaio, assinala corretamente os ângulos retos formados pelas diagonais. No entanto, estas não têm a mesma medida (relativamente aos lados opostos, o desenho não permite concluir se houve intenção de que fossem paralelos). O aluno revela alguma dificuldade no uso das propriedades nos quadriláteros, assim como de visualização, ao fazer uma representação que não corresponde aos dados do enunciado nem à sua justificação.

Os alunos usaram muito pouco as representações simbólicas na resolução deste problema o que corresponde ao esperado já que se tratava de um problema de classificação em que se esperava que fosse usada língua natural, que poderia ser acompanhada por representações pictóricas.

Na resolução deste problema, as maiores dificuldades que os alunos revelaram foi no uso das propriedades, nomeadamente as referentes às diagonais, concluindo alguns deles que a figura era um retângulo ou um losango mas não que era um quadrado, ou seja, um caso particular dos retângulos e dos losangos. Nalguns casos, também mostraram algumas dificuldades na visualização.

Problema II

No segundo problema, de construção e classificação de uma figura geométrica, era dada a informação sobre a amplitude de um ângulo interno de um quadrilátero com dois pares de lados paralelos, a medida de um lado e o seu perímetro. Na resolução deste problema os alunos tinham que usar os seus conhecimentos sobre quadriláteros para construir um, após determinar as medidas e amplitudes em falta e depois classificá-lo.

Para obterem os dados para a construção, os alunos foram usar as propriedades sobre paralelogramos, como o Manuel, na figura 5.38.

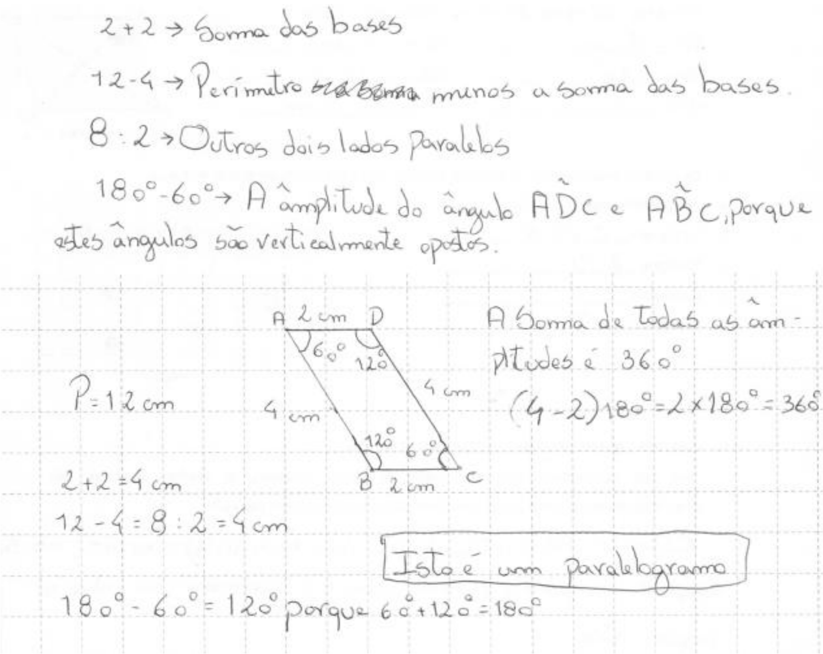


Figura 5.38 - Resolução do problema 2 da questão de aula do Manuel

Este aluno, usando raciocínio direto, e sabendo que têm que existir dois lados medindo 2 cm (pois os lados opostos têm a mesma medida), somou esses dois valores e retirou o resultado ao valor do perímetro. Para determinar a medida dos outros lados usou o mesmo conhecimento. O diálogo seguinte mostra a estratégia usada pelo aluno:

Professora: Como é que chegaste a estes valores?

Aluno: Primeiro pensei que as bases eram paralelas logo tinham que ter o mesmo valor.

Professora: Porque são lados...

Aluno: Opostos.

Professora: E como é que foste calcular os outros dois?

Aluno: Depois fiz 12 menos quatro, que dava 8 e depois dividi por 2.

Professora: Porque tinha que haver mais dois lados com...

Aluno: ...a mesma medida.

O aluno também usa expressões matemáticas para mostrar o seu raciocínio na determinação das medidas e linguagem natural para explicar o que significam.

Em seguida foi determinar as amplitudes dos ângulos.

Aluno: Se um ângulo tinha 60º teria que haver outro ângulo com 120 porque 120 mais 60 dá 180. [entretanto foi apontando para o desenho que tinha feito]

Professora: Porque esses dois ângulos são...

Aluno: Suplementares.

O Manuel evidencia saber que os ângulos internos consecutivos num paralelogramo são suplementares. No entanto, não usa a designação "consecutivos", tal como irá fazer na entrevista, talvez por não se lembrar dessa designação. Usa ainda a expressão da soma das amplitudes dos ângulos internos para justificar porque é que usa o valor de 360º, o que não era aqui necessário.

Na quarta linha apresenta algumas incorreções ao indicar que os ângulos são verticalmente opostos (são opostos) e ao usar o símbolo da amplitude para designar os ângulos. Na última linha justifica como é que encontrou o valor de 120º.

Este aluno faz muito uso da linguagem natural para justificar os seus passos, usando também representações simbólicas, nomeadamente expressões matemáticas na determinação das medidas dos lados e das amplitudes dos ângulos. Na construção feita adicionou à mesma representações simbólicas para os ângulos, os vértices e as medidas dos lados. A maioria dos alunos também adicionou à sua construção representações simbólicas dos ângulos e/ou medidas dos lados e/ou vértices.

Outros alunos, como o João cuja resolução apresento na figura 5.39, fizeram uma construção correta e também classificaram corretamente, no entanto não apresentaram os cálculos da determinação das medidas e amplitudes.

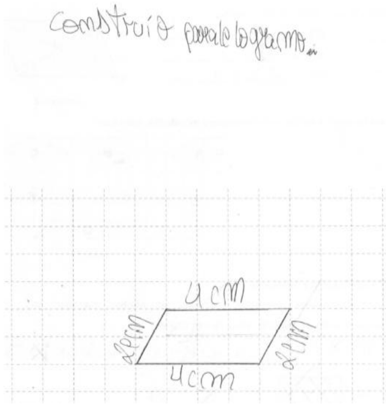


Figura 5.39 - Resolução do problema 2 da questão de aula do João

Na entrevista, o aluno disse que tinha feito os cálculos mentalmente, tendo-lhe pedido para me explicar como fez o seu raciocínio para encontrar as medidas dos lados. Explicou:

Professora: Como é que chegaste a estes resultados?

Aluno: Então um lado tinha 2 cm, para ser um paralelogramo os lados paralelos têm que ser iguais, 2 mais 2, depois de 12 subtraí 4, ficou 8 e dividi por 2.

Para determinar as amplitudes dos ângulos disse (apontando para o desenho que tinha feito) que era "60 mais 60" referindo-se aos dois ângulos opostos com 60º e "Para calcular este [o consecutivo do ângulo dado] tive que fazer 180 menos 60."

O aluno evidenciou usar os seus conhecimentos sobre as propriedades dos paralelogramos, em particular no que concerne às relações entre os lados opostos e às relações entre ângulos internos opostos e consecutivos.

Alguns alunos, como o da imagem 5.40, também desenharam as diagonais na construção que fizeram do paralelogramo.

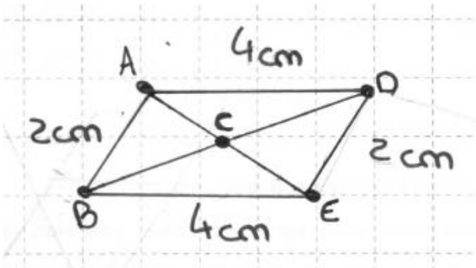


Figura 5.40 - Resolução do problema 2 da questão de aula - diagonais

Na construção não era necessário desenhar as diagonais, este aluno ao desenhá-las mostra que poderá ter ficado com a ideia de que era necessário fazê-lo por terem sido trabalhadas nas aulas.

Na resolução deste problema surgiram algumas dificuldades na construção das figuras geométricas, que nem sempre corresponderam ao que era pedido, como ilustram as duas resoluções seguintes.

O aluno cuja resolução apresento na figura 5.37, evidencia novamente dificuldades neste problema (nas figuras 5.41 e 5.42) com o uso de propriedades e de visualização ao considerar novamente que está perante um papagaio (em concordância com a resolução do problema anterior). Mostra saber que têm que existir dois pares de lados com a mesma medida e dois pares de ângulos internos com a mesma amplitude, no entanto, na construção feita, os lados opostos não são paralelos nem têm a mesma medida, assim como dois dos ângulos opostos não têm a mesma amplitude.

Que quadrilátero construíste?

2 dos lados medem 2 cm cada e os outros 2 medem
4 cm cada, dois dos ângulos internos têm 60° de amplitude
e os outros dois 120° cada um, pois assim dá 360°
Desenhei um papagaio.

Figura 5.41 - Resolução do problema 2 da questão de aula - papagaio 1

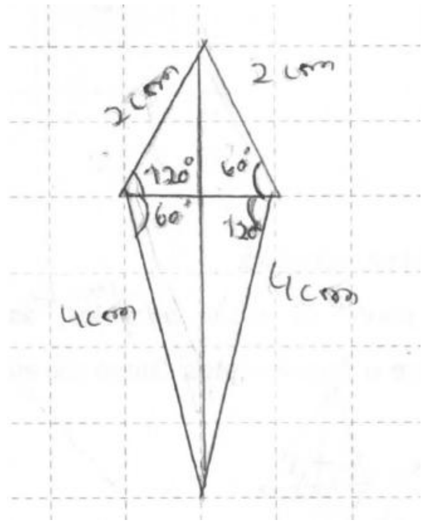


Figura 5.42 - Resolução do problema 2 da questão de aula - papagaio 2

Na construção, o aluno atribuiu medidas muito diferentes (o dobro) a amplitudes iguais (aproximadamente) assim como assinalou medidas de amplitudes que somadas iriam perfazer 180º, não estando no entanto representado um ângulo raso (resultado da soma dos ângulos).

O aluno cuja resolução apresento na figura 5.43, terá feito uma interpretação errada do enunciado - poderá ter interpretado "dois pares de lados paralelos" como sendo dois lados paralelos entre si - e terá pensado que teria que construir um trapézio pois as duas construções feitas mostram essa intenção, tendo primeiro construído um trapézio isósceles e depois um trapézio retângulo.

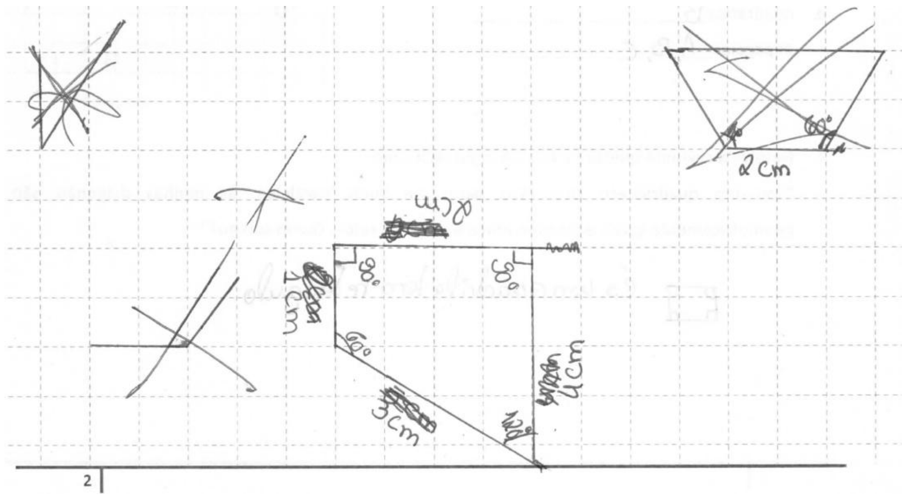


Figura 5.43 - Resolução incorreta do problema 2 da questão de aula

O aluno usou o valor da soma das amplitudes dos ângulos internos num quadrilátero, a partir do qual terá determinado a amplitude em falta através de cálculo mental, já que duas das amplitudes seriam de 90º. Na construção feita, o aluno assinalou, incorretamente, a amplitude de um ângulo agudo como sendo de 120º e de um ângulo obtuso como sendo de 60º (na primeira construção cometeu o mesmo erro), apesar de estar a usar papel quadriculado, evidenciando dificuldades na visualização. A sua incorreta interpretação também levou a que a determinação das medidas dos lados ficasse comprometida (de notar que os valores assinalados não perfazem 12 centímetros).

5.6 - Tarefas da Entrevista

A entrevista foi composta por questões sobre a resolução dos problemas da questão de aula (já abordadas), questões relacionadas com o decorrer das aulas por mim lecionadas e a resolução de dois problemas que são aqui mostradas.

Problema 1

Neste problema, idêntico ao primeiro apresentado na questão de aula, era apresentado um quadrilátero com dois pares de lados paralelos e em que as suas diagonais eram perpendiculares e geometricamente iguais e pedia-se para classificá-lo, sendo o objetivo ver como os alunos o resolviam.

João

Aluno: Então, um quadrilátero tem quatro lados, tem dois pares de lados paralelos.....então é um quadrado.

[Começa a fazer um desenho com um esboço de diagonais e lados, na figura 5.45]

Figura 5.44 - Resolução da tarefa 1 da entrevista do João

Professora: Então explica como é que lá chegaste.

Aluno: Tem quatro lados, dois pares de lados paralelos, as diagonais são perpendiculares...

[vai apontando para o desenho, a mostrar o seu raciocínio]

Professora: Achas que as diagonais assim são perpendiculares?

Aluno: Não, é do desenho....

[desenha novamente]

O aluno foi mostrando com um desenho o seu raciocínio pois tem dificuldade em explicar por palavras como estava a pensar. O João mostrou que sabia que as diagonais eram perpendiculares entre si mas não assinalou os ângulos retos formados por estas mas sim os ângulos internos, evidenciando que enfatiza mais esta propriedade num quadrado.

Manuel

Na entrevista, o Manuel diz erradamente que: "Um quadrilátero com dois pares de lados paralelos... tem que ser um paralelogramo. As diagonais são perpendiculares, geometricamente iguais....logo também têm de formar ângulos retos e então acho que vai ser um retângulo!", evidenciando que para ele um paralelogramo com as diagonais geometricamente iguais que formam entre si ângulos retos são classificados de retângulos. Faz um desenho que pretende ser ilustrativo do seu raciocínio, que apresento na figura 5.45.

1. Desenhei um quadrilátero com dois pares de lados paralelos, as suas diagonais são perpendiculares e geometricamente iguais, que quadrilátero desenhei?

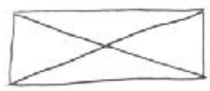


Figura 5.45 - Resolução da tarefa 1 da entrevista do Manuel

Professora: As diagonais são geometricamente iguais, agora vê lá se são perpendiculares entre si...

Aluno: São.

Professora: Se puseres assim [colocando o desenho obliquamente], vê lá se formam ângulos retos entre si....

[depois de observar o desenho]

Aluno: Ai não!

O aluno fez uma classificação de acordo com o seu conhecimento das propriedades, tal como tinha feito na questão de aula. Quando fez o desenho (que não tinha feito na questão de aula), foi o de um retângulo, correspondendo à sua classficação mas não correspondendo à descrição do enunciado, já que as diagonais não eram perpendiculares entre si.

Professora: Então e se desenhares com as diagonais perpendiculares?

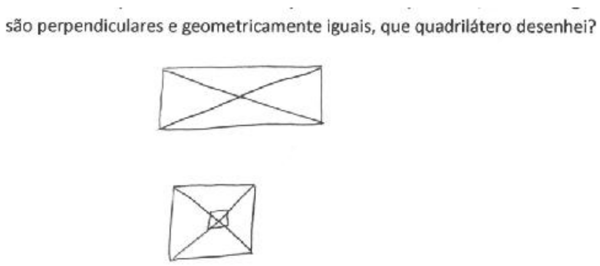


Figura 5.46 - Nova resolução da tarefa 1 da entrevista do João Manuel

Seguindo a minha sugestão, o Manuel faz outro desenho, agora sim, com as diagonais perpendiculares (aproximadamente).

Aluno: Ah! Assim já dá!

Professora: Então é o quê?

Aluno: É um quadrado!

Com o segundo desenho (na figura 5.46) concluiu que se tratava de um quadrado, percebendo que o seu uso de propriedades não estava correto.

António

Aluno: É um quadrado.

Professora: Então porque é que é um quadrado?

Aluno: Acho que é um quadrado porque um quadrado tem dois pares de lados paralelos e tem ângulos retos...

O aluno deduz que o quadrilátero tem ângulos (internos) retos, sem ser referido no enunciado. Também classifica o quadrilátero de quadrado por ter dois pares de lados paralelos e ângulos (internos) retos, o que não está correto já que nesse caso apenas poderia dizer que era um retângulo.

Professora: Mas olha que o que diz aqui é que as diagonais formam entre si ângulos retos...

Aluno: Ah... Então não é um quadrado.

Entretanto, o aluno tinha feito um desenho aproximado dum quadrado (na figura 5.47), assinalando um ângulo interno reto e desenhando as diagonais, mas ainda sem assinalar os ângulos formados pelas diagonais, o que fará posteriormente.

Figura 5.47 - Resolução da tarefa 1 da entrevista do António

[olhando para o quadrado que desenhou e referindo-se aos ângulos formados pelas diagonais]

Aluno: Mas aqui as diagonais não formam ângulos de 90º, formam...

[começa a fazer outro desenho, na figura 5.48]

Aluno:Tem que ser assim, como por exemplo um losango. Isto não parece bem um losango.

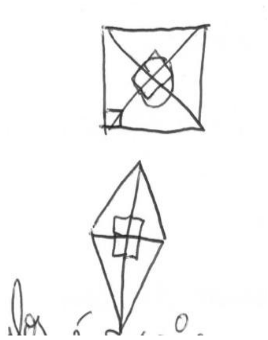


Figura 5.48 - Resolução da tarefa 1 da entrevista do António com losango

Professora: Então os ângulos retos têm que estar sempre assim? E se puseres assim? [colocando um pouco na diagonal o primeiro desenho] Achas que não são retos?

[Agora sim, assinala os ângulos formados pelas diagonais.]

Aluno: São. Então é um quadrado.

Professora: E um quadrado não é um losango?

Aluno: É.

O António desenhou inicialmente uma figura que classificou corretamente de quadrado no entanto, perante a chamada de atenção de que o que era referido no enunciado era que as diagonais eram perpendiculares entre si, reformulou a sua resposta dizendo que não podia ser um quadrado por ter a perceção de que nos quadrados as diagonais não formam entre si ângulos retos. Também colocou um quadrado como não sendo um losango ao dizer " Então não é um quadrado.... Tem que ser assim, como por exemplo um losango ".

Quando lhe pedi para ver o desenho do quadrado inclinado apercebeu-se que os ângulos eram efetivamente retos (aproximadamente). Neste caso, tal como com o Manuel, o desenho foi uma evidência para o aluno de que a sua conceção estava errada. É de notar que na questão de aula não fez um desenho, tal como o Manuel. Também, tal como o Manuel, o António evidenciou algumas dificuldades no uso das propriedades.

Na resolução deste problema durante a entrevista, mesmo os alunos que na questão de aula não tinham feito um desenho aqui fizeram-no, podendo ter sido por estarem a descrever o seu raciocínio à professora e usarem o desenho para tal.

Problema 2

Neste problema apresentava-se o valor da amplitude de três ângulos internos num paralelogramo e perguntava-se se essa descrição era possível.

João

Aluno: Um paralelogramo tem quatro lados, paralelos entre si, a soma é 360 e supostamente como há dois ângulos de 100 tem de haver dois de 60 [embora não faça um desenho vai apontando para o desenho que fez anteriormente]...

Aluno: ....e isto aqui é igual a 120... e isto é igual a 320, não dá.

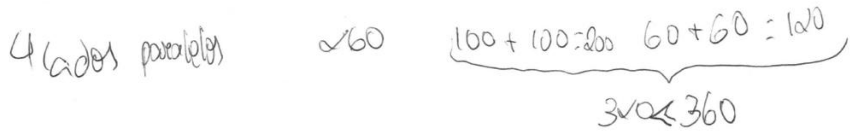


Figura 5.49 - Resolução da tarefa 2 da entrevista do João

Professora: Porquê?

Aluno: Porque tem que dar 360.

O João (figura 5.49) usa aqui as propriedades relativas aos ângulos internos nos paralelogramos e o valor da soma das amplitudes dos ângulos internos num quadrilátero e verifica que não pode ter um paralelogramo, usando uma prova por contradição.

A sua forma de raciocínio está patente nas expressões numéricas ao fazer 100 + 100 = 200 e 60+60=120 representando os dois pares de ângulos opostos e a soma das suas amplitudes (já tinha anteriormente mostrado como determina as amplitudes de ângulos internos opostos e consecutivos num paralelogramo). O aluno pensou então que tinha que ter dois pares de amplitudes iguais, foi somá-las e verificar que não obtinha o valor de 360.

Usou linguagem natural para escrever uma informação do enunciado, na resolução usou apenas representações simbólicas para as amplitudes, a sua soma e a relação entre essa soma e o valor da soma das amplitudes dos ângulos internos num quadrilátero.

Manuel

Aluno: Não!

Professora: Então diz-me lá porquê.

[começa a escrever e vai falando a mesmo tempo]

2. Num paralelogramo [ABCD] 3 dos seus ângulos internos têm as seguintes amplitudes: 100º, 100º e 60º. Será que é verdade?

Não, porque 100°+60° = 1~~8~~60° e para ser um paralelo- ~~pre~~ gramo necessita de Ter 180°

Figura 5.50 - Resolução da tarefa 2 da entrevista do Manuel

Aluno: Não porque 60 mais 100 dá 160 e para ser um paralelogramo é necessário ter 180º.

Aluno: É preciso fazer um desenho?

Professora: Achas que conseguias fazer um desenho de um paralelogramo?

Aluno: Não!

O Manuel (figura 5.50) usou o conhecimento de que num paralelogramo dois ângulos consecutivos têm que somar 180º e como tal de entre as amplitudes apresentadas duas delas tinham que somar 180º, não usando o valor da soma das amplitudes dos ângulos internos nem indo determinar a amplitude que faltava. O aluno mostrou aqui que pensou logo nas implicações de se ter um paralelogramo e em como as amplitudes dadas impossibilitavam essas implicações. Usou os valores de 100º e 60º porque terá pensado que teria que haver mais um ângulo de 60º, que seria oposto ao de 60º dado e então os de 100º e 60º seriam consecutivos. Esta dedução tem por base as resoluções feitas pelo aluno em diferentes tarefas assim como o raciocínio que descreveu no segundo problema da questão de aula. O Manuel usou aqui uma prova por contradição, usando linguagem natural e representações simbólicas para as amplitudes.

António

Aluno: Não. Eu acho que por ser um paralelogramo ... pode ser se tivesse mais um ângulo de 100...podia dar 360.

Professora: Então e sendo um paralelogramo, achas que é possível?

Aluno: Se é um paralelogramo, tem que ter quatro lados, acho que é possível sim.

O António considera, erradamente, que poderia ter três ângulos com a amplitude de 100º e um com a amplitude de 60º, considerando apenas o requisito de que a sua soma perfaça 360º.

Professora: Então e lembras-te dos paralelogramos... [com o Geogebra aberto mostrando um paralelogramo obliquângulo com as amplitudes dos ângulos internos indicadas e as diagonais desenhadas] Olha lá para aqui, olha aqui para os ângulos e recorda-te lá...

[observando o paralelogramo]

Aluno: Acho que pode ser 60.

Professora: Então faz lá a conta.

Aluno: 100 mais 100 dá 200, mais 120 dá 320. Não.

Professora: Não?

Aluno: Se temos quatro lados a soma dos ângulos vai ser 360, então acho que é 100.

Professora: E 100 pode ser?

Aluno: Então se tivéssemos aqui 100 e aqui 100 [apontando para a figura no Geogebra] aqui ia ser 60 e 60, mas não vai dar 360.

Professora: Então pode ser?

Aluno: Não, então não pode ser.

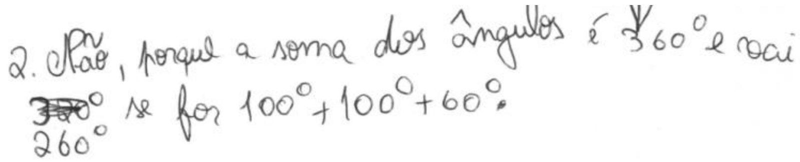


Figura 5.51 - Resolução da tarefa 2 da entrevista do António

O aluno (figura 5.51) conclui que com 60º não obtém os 360º de que precisa, para isso seria preciso ter 100º. Olhando para a figura do Geogebra conclui que não pode ser pois o ângulo oposto ao ângulo de 60º teria que ser também de 60º.

O António revelou ter algumas dificuldades no uso das propriedades dos ângulos internos nos paralelogramos. Usou apenas linguagem natural e representações simbólicas para as amplitudes dos ângulos e operação de soma, resolvendo usando raciocínio direto e depois prova por contradição.

Neste problema, nenhum dos alunos fez um desenho na sua resolução, usando todos eles uma prova por contradição ou raciocínio direto (inicialmente o António) com recurso a linguagem natural e expressões numéricas para representarem as amplitudes dos ângulos ou as relações entre estas. No entanto nalguns casos usaram um desenho que tinham feito anteriormente para explicar o seu raciocínio apontando para os mesmos, levando-me a questionar se não teriam feito um desenho se não tivessem nenhum disponível.

5.7 - Questões sobre as aulas

No final da entrevista coloquei aos alunos questões sobre o decorrer das aulas e que apresento abaixo, seguidas de uma análise às mesmas.

> Professora: Nas tarefas que fizeste nas aulas, quais foram as tuas maiores dificuldades?
>
> João: Não senti muitas dificuldades, era só perceber, ler com atenção e raciocinar um bocado, estar com atenção. As que pareciam mais difíceis, era falta de concentração, porque eram fáceis.
>
> Manuel: Acho que senti um bocado mais de dificuldade na parte de explicar se era ou não paralelogramo e porquê e também distinguir a diferença entre papagaios e losangos. À medida que fui fazendo mais exercício fui achando cada vez mais fáceis.
>
> António: A soma dos ângulos internos de resto não tive muito mais dificuldades.
>
> Professora: E agora diz-me dois assuntos de que te lembras destas últimas aulas.
>
> João: Trapézios, paralelogramos, os quadriláteros, aquele exercício... de quantos triângulos cabem num quadrilátero... era os lados menos dois vezes 180. Se um ângulo tem 60 este [apontando para um outro ângulo oposto] tem que ser 60 e este mais este [um consecutivo] tem que dar 180.
>
> Manuel: Lembro de nos mostrar no computador as figuras, de pedir a diferença entre um losango e um papagaio e depois perguntar se era um quadrado ou não.
>
> António: Lembro-me da soma dos triângulos, que dá 180, da soma dos ângulos internos que dá número de lados menos dois vezes 180 e os retângulos que as diagonais são iguais e têm quatro ângulos retos.

Relativamente às dificuldades, há a destacar a leitura atenta dos enunciados, a justificação dos passos nas resoluções e o uso de propriedades, que já tinham sido identificadas na análise das suas resoluções. Os alunos também referem, tal como também fui observando, que as suas dificuldades em relação aos problemas foram diminuindo. Em particular notei os alunos menos receosos em iniciar a resolução dos problemas e mais confiantes em como conseguiam resolvê-los.

De entre os aspetos das aulas referidos pelos alunos, destaco a importância do uso do Geogebra por permitir, por exemplo, ver transformações operadas nos polígonos e o seu contributo para a classificação das figuras.

Capítulo 6 - Reflexão Sobre o Trabalho Realizado

6.1 - Síntese do Estudo

Este estudo foi realizado na unidade "Figuras Geométricas" do domínio "Geometria e Medida", no 7.º ano que integra o Programa de Matemática para o Ensino Básico promulgado em 2013, no decorrer do 2.º período na Escola Secundária D. Luísa de Gusmão. Nas doze aulas de 50 minutos da unidade lecionada, foram propostas tarefas de natureza diversa, tendo o estudo incidido sobre a resolução de problemas.

Noe estudo procurei analisar a resolução de problemas envolvendo figuras geométricas por alunos do 7º ano, respondendo às seguintes questões:

- Que estratégias os alunos utilizam na resolução de problemas envolvendo figuras geométricas? Em particular, a que representações matemáticas os alunos recorrem na resolução destes problemas?
- Quais os conhecimentos que os alunos mobilizam, em particular as propriedades geométricas, na resolução de problemas envolvendo figuras geométricas?
- Quais as dificuldades que os alunos evidenciam na resolução de problemas envolvendo figuras geométricas?

A análise dos dados foi feita a partir da recolha documental, incidindo sobre as resoluções de problemas feitos durante as aulas, as resoluções dos problemas da questão de aula e as resoluções de problemas propostos na entrevista, da observação das aulas e respetivas notas de campo e também dos registos áudio das entrevistas realizadas a alguns alunos.

6.2 - Principais conclusões

Apresento em seguida as principais conclusões que retirei da análise dos dados que fiz, estando estas organizadas por questão do estudo.

Que estratégias os alunos utilizam na resolução de problemas envolvendo figuras geométricas? Em particular, a que representações matemáticas os alunos recorrem na resolução destes problemas?

Na resolução dos problemas propostos, pude observar que os alunos usaram diversas estratégias tais como a prova por contradição em problemas nos quais foram chamados a verificar a veracidade de uma afirmação, através do uso de propriedades das figuras geométricas. O raciocínio direto, por vezes em conjunto com outras estratégias, integrou a resolução de vários problemas, nomeadamente de classificação em que foram usadas as propriedades das figuras para as classificar.

O uso de uma variável, foi usada para a determinação de um valor desconhecido com base noutros conhecidos, fosse a medida de um lado ou uma amplitude, estando por vezes associada à resolução de uma equação - representava as condições do enunciado.

Notei que os alunos ao serem-lhes apresentados problemas idênticos a outros que já tinham feito nesta unidade tiveram a tendência para usar a mesma forma de resolução e também observei que esta estratégia deixava os alunos mais confiantes na sua resolução, indo esta observação ao encontro do que afirma Polya (1945).

O uso de figuras, em desenhos ou em construções feitas com material de desenho, foi muito frequente e teve maior incidência no início da resolução dos problemas, auxiliando a sua interpretação, confirmando a função heurística identificada por Flores e Moretti (2006). Mesmo nos casos em que os alunos começaram por resolver os problemas sem recurso à construção de uma figura, ao depararem-se com dificuldades, optam pela sua construção para os auxiliarem na resolução do problema.

Depois de ser encontrada a resposta ao problema, alguns alunos também construíram figuras para se certificarem de que a resolução estava correta havendo ainda algumas situações em que a resolução foi toda conseguida com o recurso a desenhos. Estas observações vêm ao encontro do que se pode ler em Cavalcanti (2001) sobre o uso de desenhos, não tendo no entanto observado nas resoluções destes alunos uma das formas que a autora refere: a representação de diversos aspetos da situação apresentada, mas sem os relacionar.

Pude observar que os alunos tiveram tendência para usar várias estratégias de resolução no mesmo problema, por exemplo, a construção de uma figura geométrica com uma prova por contradição ou raciocínio direto, a definição de uma variável em conjunto com a resolução de uma equação e/ou a construção de uma figura geométrica ou o uso de uma forma de resolução idêntica a problemas semelhantes com outras estratégias. O uso de várias estratégias no mesmo problema permitiu que estas funcionassem de forma integrada na resolução, complementando-se - por exemplo no caso da definição de uma variável e da resolução de uma equação - ou como auxílio - por exemplo no caso do uso de raciocínio direto e da construção de uma figura.

As estratégias selecionadas pelos alunos parecem ter alguma relação com o tipo de problema apresentado. Em problemas envolvendo a determinação de amplitudes ou medidas de lados, houve uma certa tendência para a definição de variáveis, resolução de equações ou outra manipulação algébrica ou numérica. Nos problemas envolvendo a classificação das figuras, houve lugar, no geral, ao uso de raciocínio direto ou prova por contradição (com ou sem manipulação algébrica ou numérica). A construção de figuras geométricas foi, por outro lado, usada em todos os problemas que não apresentavam no enunciado uma figura, embora com diferentes graus de incidência.

A linguagem natural foi muito usada nas resoluções em que foram requeridas provas ou em que foi usado raciocínio direto, isto é em situações em que foi necessário argumentar, tal como referem Boero et al. (2008). Foi também muito utilizada para explicar a que se referiam variáveis ou expressões algébricas ou numéricas ou por vezes apenas para escrever dados do enunciado como que para perceber melhor o enunciado (Kollofel, 2008). As respostas aos problemas de classificação foi também feita maioritariamente em linguagem natural, o que é expectável já a classificação de figuras geométricas é apresentada aos alunos sob a forma de nomes de figuras, em linguagem natural.

As representações simbólicas foram usadas, além de associadas a figuras geométricas, na determinação de valores, com o uso de expressões algébricas ou numéricas e em conjunto com linguagem natural, nomeadamente, para representar valores numéricos ou designação de ângulos.

As representações pictóricas, sob a forma de construções de figuras geométricas ou em desenhos, foram uma das formas de representação mais usadas na resolução dos problemas apresentados. Foram maioritariamente usadas conjuntamente com representações simbólicas para representarem ângulos (retos, por exemplo) assim como expressões numéricas ou algébricas para representarem amplitudes de ângulos ou medidas de lados, evidenciando que uma representação mostra relações (Duval, 1999). Também, consoante o tipo de problema ou estratégia usada, assim pude observar a maior incidência de algumas representações: nos problemas envolvendo a determinação de valores numéricos, foi privilegiado o uso de expressões algébricas - por exemplo, com a resolução de uma equação - ou numéricas, sendo que nalguns casos foi quase de uso exclusivo, demonstrando que os alunos privilegiam este tipo de representações quando está em causa a determinação de valores numéricos. Nos problemas envolvendo a classificação de figuras geométricas, com resolução através de prova por contradição ou raciocínio direto, a linguagem natural teve uma maior incidência.

As representações pictóricas foram um tipo de representação transversal, sendo usado em todos os tipos de problema, evidenciando a importância da visualização na resolução de problemas envolvendo figuras geométricas e confirmando que "a apresentação visual da informação permite-nos "ver" a história" (Arcavi, 2003, p.218) e a "representação e visualização estão no centro da compreensão em Matemática" (Duval, 1999, p.1). Evidencia também a importância que Arcavi (2003) encontra para as representações visuais na resolução de um problema, podendo acompanhar uma resolução simbólica e ao permitirem interagir com conceitos e significados e clarificarem intuições incorretas.

Também pude observar que embora a maioria dos alunos revele uma grande apetência pelo uso de representações pictóricas, alguns alunos mostram mais facilidade no uso de representações simbólicas ou linguagem natural. As observações descritas em relação ao uso de diferentes tipos de representações estão em consonância com Nistal et al. (2009), em que o tipo de tarefa, as caraterísticas dos alunos ou a estratégia usada condicionam as representações usadas.

Como observação final, pude constatar que houve uma grande tendência para serem usados vários tipos de representações na resolução do mesmo problema, tal como Clement (2004) identificou e que está descrito no seu modelo.

Quais os conhecimentos que os alunos mobilizam, em particular as propriedades geométricas, na resolução de problemas envolvendo figuras geométricas?

Os problemas que apresentei apelavam todos, na sua resolução, ao uso de propriedades de figuras geométricas podendo os alunos fazer resoluções de forma mais ou menos completa, notando, no entanto, que em todos eles usaram as propriedades que conheciam e consideravam pertinentes para usar nesse problema, sendo o seu uso determinante na procura da solução (Breda et al., 2011). As propriedades relativas a quadriláteros estiveram em destaque, com o uso de informação sobre lados, ângulos ou diagonais para fazer a classificação dos mesmos e/ou construí-los.

Uma das minhas primeiras observações foi que os alunos tiveram tendência para usar os últimos conhecimentos que adquiriram, nomeadamente no uso da expressão da soma das amplitudes dos ângulos internos num polígono, passaram a usar o valor de 360º para um quadrilátero quando tiveram conhecimento desse valor. No entanto, em tarefas feitas posteriormente continuaram a usar essa expressão quando necessária.

Na resolução dos problemas, os alunos também integraram conhecimentos geométricos que já conheciam, como a soma das amplitudes dos ângulos internos num triângulo ou o perímetro de um quadrilátero e o uso de notação geométrica, nomeadamente a relativa a ângulos e amplitude de ângulos. Em problemas envolvendo amplitudes de ângulos usaram ainda as relações que já conheciam, e das quais foi feita uma revisão, nomeadamente as relativas a ângulos suplementares e opostos. A construção de figuras geométricas usando material de desenho quando pedido explicitamente ou como forma de auxílio à interpretação dos problemas foi também utilizada.

Além de conhecimentos de Geometria, os alunos também mobilizaram conhecimentos sobre Álgebra, nomeadamente em problemas em que a resolução foi feita com recurso à definição de uma variável e no caso em que foi feita a resolução de uma equação. Também houve recurso à definição de expressões algébricas e de expressões numéricas, com manipulação destas. O cálculo também esteve presente no trabalho com amplitudes de ângulos ou medidas de lados.

Na resolução dos problemas também pude observar que os alunos tendem a dar mais uso a algumas propriedades, nomeadamente para classificarem as figuras, não sendo esta preferência igual para todos os alunos, e que serão as que retêm da sua imagem mental da figura (Leung, 2008).

Pude observar que os alunos na classificação de figuras geométricas vão pensando em propriedades e colocando-as em categorias. Por exemplo, pensam "Tem quatro lados, então é um quadrilátero." "Tem dois pares de lados paralelos, então é um paralelogramo." "Tem as diagonais geometricamente iguais, então é um retângulo", como se tivessem um "diagrama mental" em que, em cada nível, um ramo é escolhido tal como no esquema apresentado em Breda et al. (2011).

Os alunos também usaram as propriedades das figuras geométricas em problemas em que usaram prova por contradição ou raciocínio direto para argumentar, dando a sua resposta através do uso explícito das propriedades, nomeadamente dizendo que devido às mesmas uma afirmação era verdadeira ou falsa ou justificando a sua resposta.

Nalguns casos, os alunos demonstraram que pensam nas consequências das propriedades antes de começarem a escrita da resolução, por exemplo ao determinarem a amplitude em falta de um ângulo como sendo a diferença entre o valor da soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono com n lados e a soma das amplitudes que conhecem. Ou como dizerem que uma afirmação é falsa porque não se pode observar uma determinada propriedade, mesmo sem usarem outras propriedades. No uso das propriedades referentes aos ângulos internos nos paralelogramos, alguns alunos pensam imediatamente que têm que ter dois ângulos internos que são suplementares. Outros alunos usam apenas os ângulos opostos e outros aindausam os ângulos consecutivos e pensam em que o processo se repete.

Também nas construções feitas, pude observar que os alunos usam as propriedades aplicando-as e pensando nas mesmas antes de fazerem a construção. Por vezes podem fazer construções que não correspondem ao pedido, sendo esta questão abordada na questão seguinte.

Quais as dificuldades que os alunos evidenciam na resolução de problemas envolvendo figuras geométricas?

Na apresentação dos problemas, em especial nos primeiros, foram evidentes as dificuldades dos alunos em interpretar os enunciados, em particular em retirar dos mesmos os dados. Por esse motivo, procurei discuti-los com os alunos de modo a que tivessem uma primeira orientação sobre a leitura que podiam fazer do enunciado, colocando-lhes questões sobre o mesmo. Esta observação vem ao encontro do já referido em Muller (1994) e Idris (2009), quando consideram que uma parte das dificuldades dos alunos na resolução de problemas geométricos é devido ao vocabulário, nomeadamente com as definições e propriedades matemáticas o que dificulta a extração da informação necessária dos dados apresentados.

As justificações dos vários passos das resoluções ou das respostas também ficaram por vezes muito incompletas ou imprecisas, nomeadamente na escrita das propriedades que os alunos estavam a usar, apesar da evidência de que estavam a usá-las, tendo isso ocorrido também nas discussões, no expressar das suas respostas e justificações. Como exemplo, conheciam (na sua maioria) as relações entre os ângulos num paralelogramo, mas era-lhes difícil expressá-las, confirmando o que Muller (1994) afirma, quando considera que existem muitas dificuldades na escrita e que pode levar a que, mesmo havendo um raciocínio correto, as respostas tenham falta de argumentos precisos.

Nos problemas de classificação, os alunos mostraram algumas dificuldades no uso das propriedades, atribuindo erradamente propriedades aos quadriláteros ou evidenciando que não conhecem algumas. Por vezes também inferiram propriedades sem terem dados no enunciado para isso, usando-as para justificar a sua classificação. Houve também situações em que referiram propriedades na sua resposta, por exemplo de diagonais, revelando que, devido a terem-lhes sido apresentadas recentemente, concluíram que tinham que as referir, sem que isso fosse necessário. Estas dificuldades no uso das propriedades também tiveram repercussão na construção de figuras, nomeadamente pela atribuição errada de propriedades ou pela inferência de outras.

Como foi revelado na entrevista, algumas situações de classificação incorreta estavam associadas a uma perceção errada da figura geométrica, por exemplo relativamente às suas diagonais, tendo, perante a evidência de desenhos, percebido que a sua perceção estava errada. Estas observações vão ao encontro do que Leung (2008) diz sobre os alunos tenderem a pensar sobre as figuras apenas pela sua aparência e não pelas propriedades comuns a todos os elementos de uma classe, o que leva a que quando pensam numa determinada figura geométrica pensem com uma determinada forma que construíram mentalmente, inibindo a capacidade de resolver problemas geométricos abstratos que requeiram raciocínio cognitivo lógico.

Uma das maiores dificuldades evidenciadas foi na visualização, tal como Duval (1999) e Clements e Battista (1992) tinham referido, patente na interpretação de figuras partindo da sua observação, em que era necessário decompô-las e retirar informação das mesmas, nomeadamente referente às suas propriedades.

Também no campo da visualização, pude constatar que existiam entraves evidenciados na construção de figuras geométricas com medidas de lados, diagonais ou amplitudes de ângulos que não estavam de acordo com o resto da resolução. Destaco aqui os ângulos em que a sua amplitude era diferente da amplitude usada nas representações simbólicas, por exemplo assinaladas na figura construída, ou linguagem natural que acompanhava as contruções, tendo isso ficado evidenciado pelo uso de papel quadriculado. Algumas das construções, pareceram apontar para a existência de uma representação rígida das figuras geométricas para alguns alunos, estando esta dificuldade também patente nalgumas respostas em que a posição das figuras determina a sua classificação.

As conclusões descritas nos parágrafos acima vão assim ao encontro do que defendem Gutierrez (1996) e Goldin e Kaput (1996), quando consideram que existe uma relação entre representações, visualização e a compreensão de conceitos matemáticos, neste caso em particular, de propriedades das figuras geométricas e sua classificação.

6.3 - Reflexão pessoal

Na introdução deste trabalho referi que a escolha deste tema surgiu devido ao interesse que tenho pela resolução de problemas, ao vê-los como uma excelente forma de desenvolver o raciocínio nos alunos, e se tinha intensificado com o estudo deste tipo de tarefas durante a frequência do mestrado em ensino de Matemática. Durante a lecionação da unidade pude então colocar em prática o que tinha aprendido (e que muita satisfação me deu) relativamente a diversos aspetos tais como a seleção dos problemas a apresentar aos alunos nas aulas. Foi um aspeto a que dediquei muita atenção assim como às adequações que quase sempre optei por fazer aos problemas. Finalmente, prever como iria apresentar os problemas, como os alunos os iriam resolver, que dúvidas iriam surgir e como seria a sua discussão foram outros aspetos que muito contribuíram para a minha aprendizagem.

Antes de iniciar este estudo, a minha visão era a de que os alunos não eram muito recetivos à resolução de problemas, tendo-se confirmado na maioria dos alunos ao expressarem que as tarefas eram difíceis. Também tinha a ideia de que a resolução de problemas se por um lado poderia criar inicialmente alguma resistência, quando o problema era apresentado, depois de o resolverem os alunos ficavam com a sensação de terem conseguido fazer uma tarefa que parecia difícil e portanto com a sensação de que conseguiam fazê-la. Foi o que pude observar no decorrer das aulas, em particular, observei que a atitude dos alunos foi ficando mais positiva em relação à resolução de problemas e foram ficando mais confiantes. Começaram a perceber que era uma questão de se concentrarem e pensarem em como podiam encontrar uma forma de resolver a tarefa, como referiu um aluno na entrevista.

Relativamente à planificação das aulas, esta nem sempre se cumpriu, tendo havido algumas vezes necessidade de reajustamento em planos que já tinha feito e que tiveram que abarcar algum tempo dedicado a tarefas ou explicações mais aprofundadas de conceitos apresentados. Procurei, é claro, cumprir os objetivos da unidade, mas também percebi que por vezes a planificação de uma aula pode ter que ficar comprometida pela necessidade de reforçar aspetos em que os alunos podem estar a apresentar mais dificuldades. Apesar destes reajustamentos, pude constatar que a planificação de uma unidade é fundamental e tem diversas implicações, tais como o definir a avaliação que se vai aplicar ou os recursos que se vai usar de entre os disponíveis, nomeadamente o tempo.

Relativamente às tarefas que apresentei aos alunos, procurei sempre que fossem tarefas que promovessem as aprendizagens e desenvolvessem as suas capacidades, que fossem diversificadas, com graus de dificuldade diferentes e penso que este meu objetivo foi conseguido. Apesar de o estudo estar centrado na resolução de problemas, em todas as aulas apresentei outros tipos de tarefas que, não sendo objeto de estudo, tiveram o seu papel no processo de ensino da unidade.

A discussão das tarefas foi um dos aspetos das aulas mais instrutivos para mim, tendo percebido o quanto este momento é importante nas aprendizagens dos alunos e tendo progressivamente, por exemplo, usado mais o computador nas mesmas. Na verdade, o uso do Geogebra nas aulas ajudou-me na apresentação e exploração das figuras e na discussão de várias tarefas em que a projeção de figuras ajudou na sua discussão. Não tendo sido possível o seu uso pelos alunos, ainda assim, penso que foi uma grande mais valia para as aulas pois notei que o seu uso permitiu aos alunos terem uma perceção mais dinâmica das figuras geométricas, pelas transformações que permite operar nas mesmas. Este foi, aliás, um aspeto que alguns alunos referiram na entrevista como sendo dos que sobressaíram para eles nestas aulas. Futuramente, gostaria de ter oportunidade de poder usar este *software* ou outro deste tipo mas num contexto em que os alunos também pudessem fazer explorações por si mesmos e pudessem fazer as construções e transformações nas figuras, pois penso será muito positivo para a sua aprendizagem da Geometria. Tenho pena de não ter podido aprofundar mais os conceitos que apresentei pela falta de tempo, em particular por não ter sido possível aprofundar mais a exploração dos quadriláteros e das suas propriedades, através do uso de um *software* ou de material de desenho.

Um aspeto muito positivo da experiência, e que penso que terá reflexo na minha futura prática, foi a discussão das aulas, após as mesmas, com as minhas professoras orientadoras, a professora titular da turma e a minha colega de mestrado. Estas discussões foram muito produtivas pois permitiram-me perceber quais os aspetos mais e menos bem conseguidos e como poderia melhorá-los. Também me ajudaram na minha reflexão pessoal sobre as aulas, a pensar em que poderia melhorar e o que seria para manter pois a verdade é que nem sempre conseguimos ter uma perfeita perceção do nosso desempenho ou de pormenores que ocorrem nas aulas.

Foi também muito gratificante ver ser aplicado na prática o que tinha aprendido ao longo do mestrado e não apenas em relação à resolução de problemas mas também noutros aspetos, tais como a avaliação ou a planificação.

Como investigadora também foi uma experiência muito enriquecedora, não só por ser nova para mim mas também o que isso exigiu, começando com as leituras feitas relativas aos temas sobre os quais incidiu a unidade letiva e o estudo e que foram mais uma forma de aprendizagem. A análise dos dados e o tirar de conclusões foram passos muito interessantes desta experiência e que também me levaram a fazer uma nova reflexão do trabalho feito na lecionação da unidade letiva, além de que, como investigadora me levaram a um exercício de seleção da informação e análise da mesma. Além disso, penso que também me trouxe uma postura ainda mais questionadora sobre o processo ensino-aprendizagem dos alunos nos seus diversos aspetos.

Referências

Abrantes, P. (1989). Um (bom) problema (não) é (só)... *Educação e Matemática*, *8*, 7-10 e 35.

Abrantes, P, Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação/Departamento da Educação Básica.

Abrantes, P. (1999). Investigações em geometria na sala de aula. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 153-168). Lisboa: APM e Projecto MPT.

Alves, E. V. (1999). *Um estudo exploratório dos componentes da habilidade matemática requeridos na solução de problemas aritméticos por estudantes do ensino médio*. (Tese de Mestrado, Universidade de Campinas, Brasil).

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 215-241.

Battista, M.T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Reston, VA:NCTM.

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., Timóteo, M. C. (2013). *Caderno de Apoio 3.º Ciclo.* Lisboa: Ministério da Educação.

Black, P., and D. Wiliam. 1998b. Inside the black box: Raising standards through classroom assessment. PHI Delta Kappan 80, no. 2: 139–44.

Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G. Vale, I. & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação/DGIDC.

Boero, P., Douek, N., & Ferrari, P. L. (2008). Developing mastery of natural language. In L. D. English, M. B. Bussi, G. A. Jones, R. A. Lesh, B. Sriraman & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 262-295). New York, NY: Routledge.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Boggino, N. (2009). A avaliação como estratégia de ensino. Avaliar processos e resultados. *Sísifo. Revista de Ciências da Educação, 9*, 79-86

Breda, A., Serrazina, L., Menezes, L., Oliveira, P., Sousa, H. (2011). Geometria e medida no ensino básico. Lisboa: Ministério da Educação/DGIDC.

Brocardo, J. (1993). A resolução de problemas na aula de matemática: uma experiência no 7º ano de escolaridade (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, l7(1), 31-48.

Cai, J., & Lester, F. (2010). Why is teaching with problem solving important to student learning? Retirado de http://www.nctm.org/uploadedFiles/Research_News_and_Advocacy/Research/Clips_and_Briefs/Research_brief_14_-_Problem_Solving.pdf

Canavarro, A. P. & Santos, L. (2012). Explorar tarefas matemáticas. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds.), Investigação em Educação Matemática – Práticas de ensino da Matemática: Atas do EIEM2012 (pp. 99-104). Vila Viçosa: SPIEM.

Candeias, N., & Ponte, J. P. (2006). Uma proposta curricular para o ensino da geometria do 8.º ano, Actas do XV Encontro de Investigação em Educação Matemática (CD-ROM). Encontro de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação (pp. 7-9). Monte Gordo: SPIEM. SEM-SPCE

Candeias, N., & Ponte, J. P. (2006). Uma proposta curricular para o ensino da geometria do 8.º ano. In Actas do XV Encontro de Investigação em Educação Matemática (CD-ROM). Monte Gordo: SEM-SPCE.

Cavalcanti, C. T. (2001). Diferentes formas de resolver problemas. In K. Smole & M. Diniz (Eds.), *Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática* (pp. 121-149). Porto Alegre: Artmed.

Clement (2004). A model for understanding, using and connecting representations. *Teaching Children Mathematics, 11*(2), 97-102.

Clements, D. H. (1999). Geometric and spatial thinking in young children. In J. V. Copley (Ed.), *Mathematics in early years* (pp. 66-79). Reston, VA: NCTM.

Clements, D. H. & Battista, M.T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 420-464). New York, NY: Macmillan.

Cohen, L., & Manion, L. (1994). *Research methods in education* (5.ª ed.). London: Routledge.

Crowley, M. L. (1987). The van Hiele model of the development of geometric thought. In M. M. Lindquist (Ed.), *Learning and teaching geometry, K-12* (pp. 1-16). Reston, VA: NCTM.

David, M. M., & Tomaz, V. S. (2012). The role of visual representations for structuring classroom mathematical activity. *Educational Studies in Mathematics*, 80(3), 413-431.

De Villiers, M. (2010). Some reflections on the van Hiele Theory**.** *Educação Matemática Pesquisa*, *12*(3), 400-431.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of 21st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3-26). Columbus, OH: ERIC.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131.

Duval, R. (2012). Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In S. D. A. Machado (Ed.), *Aprendizagem em Matemática. Registros de Representação Semiótica*, 2(7), 11-33. Retirado de https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/viewFile/1981-1322.2012v7n2p266/23465 em 22-06-2014.

Echeverría, M. P. P., & Pozo, J. I. (1998). Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In J. I. Pozo (Ed.), *A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender* (pp. 13-42). Porto Alegre: Artmed.

Fernandes, D. (1991). *Notas sobre os paradigmas de investigação em educação*. Noesis, 18, 64-66.

Flores, C., & Moretti, M. (2006). As figuras geométricas enquanto suporte para a aprendizagem em geometria: um estudo sobre a heurística e a reconfiguração. *Revista Electrónica de Educação Matemática,* 5, 5-13. Retirado de file:///C:/Users/Isabel/Downloads/12986-40040-1-PB%20(3).pdf em 22-06-2014.

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning and problem solving in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 137-165.

Goldin, G. A. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp.197-218). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Goldin, G. A. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English, M. B. Bussi, G. A. Jones, R. A. Lesh, B. Sriraman & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp.176-201). New York, NY: Routledge.

Goldin, G. A., & Kaput J. J. (1996). A joint perspective on the idea of representations in learning and doing mathematics. In S. P., Leslie & N. Pearla (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 397-432). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In L. Puig, & A.Gutiérrez, (Eds). In *Proceedings of the 20th International Conference for Psychology of Mathematics Education*. (Vol. 1, pp. 3-19). Valencia: Universitat de València, Dept. de Didàctica de la Matemática.

Gutierrez, A., Jaime, D., & Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(3), 237-251.

Henriques, A. C. (2011). O pensamento matemático avançado e aprendizagem da Análise Numérica num contexto de atividades de investigação (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa).

Henriques, A., & Ponte, J. P. (2014). As representações como suporte do raciocínio matemático dos alunos quando exploram atividades de investigação. *BOLEMA*, *28*(48), 276-298.

Idris, N. (2009). The impact of using Geometer's Sketchpad on Malaysian students' achievement and van Hiele geometric thinking. *Journal of Mathematics Education*, 2(2), 94-107.

Kolloffel, B. (2008). *Getting the picture. The role of external representations in simulation based inquiry learning* (Tese de doutoramento, Universidade de Twente, Holanda).

Lester. F. K. (2013). Thoughts about research on mathematical problem-solving instruction. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1&2), 245–278.

Leung, I. (2008). Psychological aspects of inclusive and transitive properties among quadrilaterals by deductive reasoning in the aid of SmartBoard. *ZDM*, *40*, 1007-1021.

Loureiro, C. (2009). Geometria viva no ensino básico. In Atas do ProfMat 2009. Viana do Castelo. Retirado de http://www.apm.pt/files/_Cd_Loureiro_4a70368e0a087.pdf em 21-06-2014.

Loureiro, C. (2009). Geometria no Novo Programa de Matemática do Ensino Básico: Contributos para uma gestão curricular reflexiva. *Educação e Matemática*, *105*, 61-66.

Ludke, M., & André, M. (1986). *Pesquisa em educação: Abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.

Matos, J. M. & Gordo, M. F. (1993). Visualização espacial: algumas actividades. *Educação e Matemática*, *26*, 13-17.

Merriam, S. B. (2002). *Qualitative research and case study applications in education*. São Francisco, CA: Jossey-Bass.

Ministério da Educação – Gabinete de Avaliação Educacional (ME-GAVE) (2012). *Exames Nacionais, Relatório 2011*. Retirado de http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=24&fileName=Rel_Exames_2011.pdf em 23-06-2014.

Ministério da Educação – Gabinete de Avaliação Educacional (ME-GAVE) (2012). *Projeto testes intermédios, Relatório 2012*. Retirado de http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=24&fileName=Relatorio_TI_2012.pdf em 23-0-6-2014.

Ministério da Educação – Gabinete de Avaliação Educacional (ME-GAVE) (2013). *Relatório Provas Finais de Ciclo e Exames Finais Nacionais 2012*. Retirado de http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=24&fileName= RelExames_2012_23jul.pdf em 23-06-2014.

Ministério da Educação (2013). *Programa de matemática. Plano de organização do ensinoaprendizagem (3.º ciclo do ensino básico)*. Retirado de http://www.dgidc.min-edu.pt/ensinobasico/index.php?s=directorio&pid=29 em 23-06-2014.

Muller, J. P. (1994). La démonstration em géométrie en quatrième et en troisième. *Repère-IREM*, *15*, 7 – 24. Topiques Edition.

Musser, G. L., Burger, W. F., & Peterson, B. E. (2006). *Mathematics for elementary teachers.* New York, NY: John Wiley & Sons.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Normas para o currículo e avaliação da Matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE.

National Council of Teachers of Mathematics (1999). *Normas para a avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: APM. (Tradução portuguesa da edição original de 1995).

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Nistal, A. A., Van Dooren, W., Clarebout, G., Elen, J., & Verschaffel, L. (2009). Conceptualising, investigating and stimulating representational flexibility in mathematical problem solving and learning: a critical review. *ZDM*, 41, 627-636.

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2012). Recursos didáticos numa aula de ensino exploratório: Da prática à representação de uma prática. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds.), Investigação em Educação Matemática – Práticas de ensino da Matemática, 2012.

Peres, A. (2012). *O uso de critérios de avaliação na resolução de problemas* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa).

Pinto, J., & Santos, L. (2006). *Modelos de avaliação das aprendizagens*. Lisboa: Universidade Aberta.

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Pólya, G. (1975). *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência.

Pólya, G. (1981). Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving (combined ed.). New York, NY: Wiley.

Ponte, J. P. (1992). Problemas de Matemática e situações da vida real. *Revista de Educação, 2,* 95-108.

Ponte, J. P. (2005). Gestão Curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M., & Oliveira, P. (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa: Ministério de Educação/DGIDC.

Ponte, J. P., & Velez, I. (2011). As representações matemáticas nas conceções dos professores do 1.º ciclo do ensino básico: Um estudo exploratório. *Atas do EIEM* (pp. 117-194). Póvoa do Varzim.

Programa de Matemática para o Ensino Básico (2013).Ministério da Educação e Ciência. Lisboa: Direção Geral da Educação.

Preston, R. & Garner, A. S. (2003). Representation as a vehicle for solving and communicating. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *9*(1), 38-43.

Ramalho, G. (2006). Matemática no Ensino Básico: Algumas reflexões sobre as dificuldades encontradas pelos nossos alunos. *Noesis*, *65*, 48-55.

Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. In L. Menezes; L. Santos; H. Gomes & C. Rodrigues (Eds.), *Avaliação em Matemática: problemas e desafios*, (pp. 11-35). Viseu: Seção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Schoenfeld A.H. (1980). Teaching problem-solving skills. *American Mathematical Montly*, *87*, 794- 805.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York, NY: MacMillan.

Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), Investigar para aprender Matemática (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT.

Schoenfeld, A. H. (2006). Problem solving from cradle to grave. *Annales de didactique et de science cognitives*, *11*, 41-73.

Stanic, G. M., & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R. I. Charles & E. A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving*. Reston, VA: NCTM e Lawrence Erlbaum.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Helping teachers learn to better incorporate student thinking.

Mathematical Thinking and Learning, 10(4), 313-340.

Tuckman, B. (2012). *Manual de investigação em educação*. Lisboa. Fundação Calouste Gulbenkian.

Usiskin, Z. (1982). *van Hiele levels of achievement in secondary school geometry*. Chicago, IL: University of Chicago.

Van de Walle, J. A. (2006). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (6th ed.). Boston, MA: Pearson Education.

Vieira, C. R. (2010). *Reinventando a Geometria no Ensino Médio: uma abordagem envolvendo materiais concretos, softwares de geometria dinâmica e a Teoria de van Hiele* (Tese de Mestrado, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, Brasil).

Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991): Editor's introduction: What is mathematical visualization. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, (pp. 1-8). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Anexos

Anexo I - Plano de aula de 6 de Março

<table>
<tr><td>Data</td><td>6/Março/2014</td><td>Hora</td><td>10:15–
11:55</td><td>Turma</td><td>7º A</td></tr>
<tr><td>Lições nº</td><td>87 e 88</td><td>Tema</td><td colspan="3">Geometria</td></tr>
<tr><td>Tópicos</td><td colspan="5">Ângulos
Linhas poligonais e polígonos
Polígonos côncavos e convexos</td></tr>
<tr><td>Pré-Requisitos</td><td colspan="5">Conceito de ângulo e amplitude de um ângulo
Uso de material de desenho</td></tr>
<tr><td>Objectivos Específicos</td><td colspan="5">Rever propriedades sobre ângulos: suplementares, complementares, verticalmente opostos e correspondentes.</td></tr>
<tr><td>Material</td><td colspan="5">Régua e Transferidor;
Ficha "Ângulos e Polígonos";
Manual;
Material de escrita</td></tr>
<tr><td>Metodologia de Trabalho</td><td colspan="5">Trabalho a pares ou individualmente</td></tr>
<tr><td>Capacidades transversais a desenvolver</td><td colspan="5">Comunicação matemática - esta capacidade será trabalhada ao longo da aula, na discussão das questões.
Argumentaçao matemática - esta capacidade será desenvolvida durante as discussões, em que os alunos são chamados a justificar as suas respostas.</td></tr>
<tr><td>Estrutura da Aula</td><td colspan="5">Duração total: 100 min
1. Início da aula - 5 min
2. Discussão dos conceitos a rever - 15 min
3. Grupo I da ficha - 30 min
4. Apresentação dos conceitos relativos a linhas poligonais e polígonos e revisão do uso de material de desenho- 20 min
5. Grupo II da ficha - 30 min</td></tr>
</table>

Desenvolvimento da aula

1. Início da aula - 5 min

Neste espaço será escrito o sumário no quadro.

Sumário: Revisões sobre ângulos. Linhas poligonais e polígonos. Polígonos côncavos e convexos. Resolução da ficha "Ângulos e polígonos".

NOTA: Faz-se uma distinção entre dificuldades e erros. Nas primeiras são dadas sugestões aos alunos, por exemplo, na interpretação de uma pergunta. Os erros, são erros que podem ser cometidos na resolução. Sempre que detetados, sem se explicitar como se resolvem, será sugerido aos alunos que revejam a sua resolução.

Durante a resolução os alunos estarão a trabalhar autonomamente, sendo que irei circular pela sala/alunos/grupos para esclarecer eventuais dúvidas que possam surgir e certificar-me que os alunos estão a realizar a tarefa.

Durante as discussões das resoluções procurar-se-á perguntar ou pedir para ir ao quadro alunos que ainda não tenham respondido ou ido ao quadro durante a aula.

2. Discussão dos conceitos a rever - 15 min

Será entregue uma folha contendo os conceitos a rever sobre ângulos.

Os alunos serão questionados acerca dos seus conhecimentos sobre ângulos e as suas relações. Serão preenchidos em conjunto com os alunos os espaços por preencher. Neste preenchimento os alunos serão questionados, procurando-se que sejam eles a dar as respostas que permitem preencher os espaços.

3. Grupo I da ficha - 30 min

Entrega do enunciado da tarefa. Será explicado que devem fazer o grupo I, no qual têm diversas imagens com ângulos e com a indicação da amplitude do ângulo c, e terão, em cada caso, que calcular a amplitude do ângulo x (ou x e y).

Será explicado que poderá ser feita em pares ou individualmente e que a resolução será feita na folha fornecida pela professora, juntamente com o enunciado.

Resolução - 15 min

Resolução esperada:

Para cada uma das figuras seguintes, encontra o valor da amplitude dos ângulos x e y, apresentando o teu raciocínio:

1. $\hat{x} = 90^0 - \hat{c} = 90^0 - 40^0 = 50^0$ Porque x e c são ângulos complementares.
2. $\hat{x} = 180^0 - \hat{c} = 180^0 - 100^0 = 80^0$ Porque x e c são ângulos suplementares.
3. $\hat{x} = \hat{c} = 100^0$ Porque x e c são ângulos verticalmente opostos.

   $\hat{y} = 180^0 - \hat{c} = 180^0 - 100^0 = 80^0$ Porque y e c são ângulos suplementares.

   ou $\hat{y} = 180^0 - x = 180^0 - 100^0 = 80^0$ Porque y e x são ângulos suplementares.
4. $\hat{x} = \hat{c} = 42^0$ Porque x e c são ângulos alternos externos determinados por duas retas paralelas e uma reta que as corta.
5. $\hat{x} = \hat{c} = 30^0$ Porque x e c são ângulos correspondentes determinados por duas retas paralelas e uma reta que as corta.
6. $\hat{x} = \hat{c} = 145^0$ Porque x e c são ângulos alternos internos determinados por duas retas paralelas e uma reta que as corta.
7. $\hat{x} = 180^0 - \hat{c} = 180^0 - 60^0 = 120^0$ Porque o ângulo c é verticalmente oposto a um ângulo suplementar do ângulo x.
8. $\hat{x} = 180^0 - \hat{c} = 180^0 - 40^0 = 140^0$ Porque o ângulo c é verticalmente oposto a um ângulo suplementar do ângulo x.

Erros:

Podem ser feitos erros de cálculo (não usam calculadora pois devem trabalhar a realização de cálculos, que foi iniciada no tema dos Números).

Dificuldades:

Podem não identificar as relações entre ângulos revistas na aula. Nesse caso pode-se questionar: "Qual a relação entre estes ângulos?"

Nas duas últimas alíneas, poderão ter dificuldade em verificar que podem usar a relação entre ângulos verticalmente opostos para fazer os cálculos. Pode-se questionar: "Qual a relação do ângulo verticalmente oposto ao ângulo c com o ângulo x?".

Discussão - 15 min

A discussão será feita com a escrita no quadro das resoluções, pela professora (exceto as 7 e 8), a partir do questionamento feito a alunos sobre as suas resoluções.

A cada alínea será questionado um aluno e a validação da correção será feita pela turma. Em cada caso, irá ser questionado qual a relação usada. As duas últimas alíneas, por poderem suscitar mais dúvidas, serão feitas por alunos no quadro.

Os alunos que terminarem a resolução da tarefa antes do tempo dado, fazem os exercícios 2 e 4 das páginas 40 e 41 do manual.

4. Apresentação dos conceitos relativos a linhas poligonais e polígonos e revisão do uso de material de desenho - 20 min

Aqui vai-se apresentar as designações que se encontram na página 2 da folha entregue. Em cada passo, vai-se questionando os alunos sobre os seus conhecimentos relativos às designações dadas, pois várias delas já terão sido anteriormente abordadas no seu percurso escolar. Os alunos devem ir seguindo a explicação com a consulta da folha distribuída.

Começa-se pelo conceito de linha poligonal discutindo os exemplos apresentados no quadro. Continuando com as linhas poligonais fechadas, pergunta-se em relação aos exemplos: "Destas, quais são linhas poligonais fechadas?". A mesma abordagem para linhas poligonais simples. Continua-se com a parte interna e a parte externa de uma linha poligonal fechada e questiona-se, a partir de um exemplo, qual a parte interna e a externa da mesma. Após a definição de polígono e fronteira do mesmo, pede-se para identificarem lados e vértices de um exemplo e a designação ($[A_1...A_n]$).

Abordam-se os polígonos côncavos e convexos. Pergunta-se aos alunos, em relação a exemplos no quadro: "Quais destes são côncavos?" "E convexos?" Formaliza-se a designação. Em seguida, recorda-se como se usa o material de desenho, nomeadamente o tranferidor, fazendo no quadro exemplos com desenho de ângulos e polígonos, que os alunos devem acompanhar no seu caderno.

5. Grupo II da ficha- 30 min.

Indicar que deve agora ser realizado o grupo II da ficha, em pares ou individualmente. Será também dada indicação de que a resolução será feita nas folhas anteriormente entregues. Será explicado que na questão 1, têm diversas imagens e terão que identificar quais representam polígonos côncavos e quais representam polígonos convexos.

Resolução - 15 min

1) *Considera os polígonos da figura seguinte e indica, justificando, quais são:*
   a) *Polígonos côncavos*
   b) *Polígonos convexos*

   Resolução esperada:

   a) [ABCD] e [KLMNOP]

   Porque em ambos se consegue traçar segmentos de reta unindo dois pontos do polígono e que não estão contidos no polígono

   b) [EFG] e [QRST]

   Porque qualquer segmento de reta que se trace entre dois pontos contidos nestes polígonos, está contido nos polígonos.

   Dificuldades:

   Se houver dificuldades na identificação dos polígonos pode-se sugerir que tracem segmentos de reta entre pontos do polígono de modo a verificarem se conseguem traçar um que não esteja contido num dado polígono.

   Podem surgir dificuldades na notação. Pode-se questionar: "Quais os lados do polígono?" "Então como se designa o mesmo?"

   Erros:

   Podem fazer uma identificação errada dos polígonos. Podem usar a notação de forma errada.

2) *Usando o material adequado, desenha :*
   a) *Uma linha não poligonal.*
   b) *Uma linha poligonal fechada.*
   c) *Um polígono convexo com 4 lados, em que um dos ângulos mede 60 graus, assinalando-o com a letra x.*
   d) *Um polígono côncavo com 5 lados em que um dos ângulos mede 40 graus, assinalando-o com a letra x.*

   Resolução esperada:

   A resolução é livre, apenas obedecendo aos requisitos do que é pedido. Será explicado que devem usar o material de desenho, nomeadamente o transferidor. Durante a resolução será verificado se os alunos estão a fazer os desenhos corretamente.

Dificuldades:

Podem ter dificuldade em manipular o material de desenho, nomeadamente no desenho de ângulos.

Na alínea b) podem surgir dúvidas sobre se a linha tem que ser simples. Será explicado que o único requisito é que seja fechada.

Nas alíneas c) e d) pode-se sugerir aos alunos que comecem por desenhar o ângulo e a partir dos dois lados desenhados, que desenhem os restantes lados.

Erros:

Podem desenhar as figuras erradamente, nomeadamente os ângulos.

Discussão - 15 min

A discussão das questões 1) e 2) será feita separadamente. A discussão da pergunta 1) será feita questionando um aluno por cada alínea sobre as respostas. A validação será feita pela turma. As resposta serão escritas pela professora. Em cada alínea será questionado porque é que são côncavos ou convexos. A discussão da pergunta 2) será feita com o desenho no quadro de exemplos feitos pelos alunos.

Nas alíneas a) e b) procurar-se-á pedir a alunos que tenham feito linhas diferentes das mostradas na aula. Na alínea b) questionar-se-á se a linha é simples.

Nas alíneas c) e d) será pedido a alunos que tenham desenhado corretamente os polígonos. Será questionado à turma: se têm o número de lados correto, se é côncavo/convexo e porquê, se o ângulo está bem desenhado.

Os alunos que terminarem a tarefa antes do tempo dado podem fazer os exercícios 3 e 5 das páginas 60 e 61 do manual.

Os alunos não terão TPC relativo ao tema da aula pois as aulas seguintes serão de revisões para o teste e o teste. No entanto, será dado como TPC o estudo para o teste. As folhas usadas para a realização da tarefa serão recolhidas.

Avaliação

A avaliação dos alunos será feita tendo em conta:

- a sua participação na aula
- a realização das tarefas

Anexo II - Plano da aula de 18 de Março

Data	18/Março/2014	**Hora**	10:15–11:55	**Turma**	7º A
Lições nº	93 e 94	**Tema**	Geometria		
Tópicos	Ângulos internos de polígonos Ângulos externos de polígonos convexos Soma dos ângulos internos de um polígono Soma de ângulos externos de um polígono convexo				
Pré-Requisitos	Conceito de ângulo Conceito de ângulo côncavo e convexo Uso de material de desenho				
Objectivos Específicos	Saber determinar a soma das amplitudes dos ângulos internos num polígono Saber o valor da soma das amplitudes dos ângulos externos num polígono convexo Saber que num polígono convexo todos os ângulos internos são convexos				
Material	Régua; Transferidor; Ficha "Ângulos Internos e Externos"; Manual; Material de escrita				
Metodologia de Trabalho	Trabalho a pares ou individualmente				
Capacidades transversais a desenvolver	**Comunicação matemática** - esta capacidade será trabalhada ao longo da aula, nomeadamente na discussão da parte I da Ficha, em que os alunos são solicitados a encontrar a expressão algébrica para definição da soma das amplitudes dos ângulos internos em polígonos convexos. Na parte II, terão também que interpretar e explicar a forma como resolvem os problemas propostos. **Conhecimento de factos e procedimentos** - esta capacidade será trabalhada, nomeadamente, nas alíneas da tarefa 1 do grupo II, no uso das expressões anteriormente encontradas. **Resolução de problemas** - esta capacidade será trabalhada no grupo II da ficha, nas tarefas 2, 3 e 4.				

Estrutura da Aula	Duração total: 100 min 1. Início da aula - 5 min 2. Apresentação com o Geogebra – 10 min 3. Grupo I da ficha - 25 min 4. Grupo II da ficha - 60 min

Desenvolvimento da aula

1. Início da aula - 5 min

Neste espaço será escrito o sumário.

Sumário: Ângulos internos num polígono. Ângulos externos num polígono convexo. Soma das amplitudes dos ângulos internos num polígono. Soma das amplitudes dos ângulos externos num polígono convexo. Resolução da ficha "Ângulos Internos e Externos".

NOTA: Faz-se uma distinção entre dificuldades e erros. Nas primeiras são dadas sugestões aos alunos, por exemplo, na interpretação de uma pergunta. Os erros, são exatamente erros que podem ser cometidos na resolução. Sempre que detetados, sem se explicitar como se resolvem, será sugerido aos alunos que revejam a sua resolução.

Durante a resolução os alunos estarão a trabalhar autonomamente, sendo que irei circular pela sala/alunos/grupos para esclarecer eventuais dúvidas que possam surgir e certificar-me que os alunos estão a fazer a tarefa. Durante as discussões das resoluções procurar-se-á perguntar ou pedir para ir ao quadro alunos que ainda não tenham respondido ou ido ao quadro durante esta aula.

2. Apresentação com o Geogebra - 10 min

Será mostrado no computador um polígono feito no Geogebra em que estão assinalados os ângulos internos e externos do mesmo e as suas amplitudes, sendo feita uma discussão sobre estes tópicos, evidenciando-se que a soma da amplitude de um qualquer ângulo interno do polígono com a amplitude de um ângulo externo que lhe é adjacente é 180º.

Será também mostrado, no computador, que num polígono convexo os ângulos internos são todos convexos.

Serão mostrados no quadro dois exemplos de decomposição de um polígono (que também se encontram no enunciado) com quatro e cinco lados. Serão mostrados os polígonos ainda sem as diagonais, que serão traçadas na aula. No enunciado aparecem os polígonos com as diagonais já traçadas.

Será explicado que se pode traçar as diagonais a partir de qualquer vértice e que apenas se traça a partir de um vértice.

Entrega do enunciado da tarefa e uma folha quadriculada em branco.

Será explicado que a tarefa poderá ser feita em pares ou individualmente.

Será também explicado que devem a questão 1, do grupo I, que a resolução será feita no próprio enunciado traçando as diagonais a lápis com o auxílio de uma régua e que têm 10 minutos.

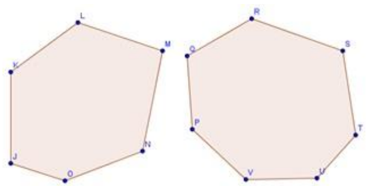
Durante a resolução, os alunos estarão a trabalhar autonomamente, mas com o apoio da professora para eventuais dúvidas.

3. Grupo I da Ficha - 25 min

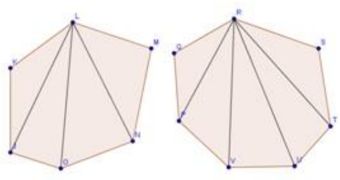
Resolução - 10 min

Resolução esperada:

1. *Considera os seguintes polígonos representados nas figuras:*



a) *Divide os polígonos em triângulos, traçando todas as diagonais possíveis a partir de um dos vértices do polígono.*



Erros:

Podem traçar mal as diagonais: por exemplo, traçar diagonais em demasia (de todos os vértices para todos os vértices) ou não traçarem para todos os vértices.

Dificuldades:

Podem não perceber que podem usar qualquer vértice para traçar as diagonais. Relembrar que podem traçar as diagonais a partir de qualquer vértice.

b) *Preenche a seguinte tabela, tendo em conta o resultado da decomposição que fizeste e tendo em conta que a soma as amplitudes dos ângulos internos num triângulo é* 180^0*:*

Polígono	**Número de lados**	**Número de triângulos em que pode ser decomposto**	**Soma das amplitudes dos ângulos internos**
Quadrilátero	4	2	$\mathbf{2} \times 180^{\mathbf{0}}$
Pentágono	5	3	$\mathbf{3 \times 180^0}$
Hexágono	6	4	$\mathbf{4 \times 180^0}$
Heptágono	7	5	$\mathbf{5 \times 180^0}$
Polígono com 8 lados	8	6	$\mathbf{6 \times 180^0}$
Polígono com n lados	n	n-2	$(\boldsymbol{n} - \mathbf{2}) \times \mathbf{180^0}$

Na penúltima linha qualquer valor é válido para o número de lados. O valor colocado é exemplificativo.

Erros:

Podem preencher mal a tabela por terem traçado mal as diagonais.

Dificuldades:

Podem surgir dificuldades na definição da expressão que define o número de triângulos: podem não conseguir ver a relação entre o número de lados e o número de triângulos. Pode-se questionar: "Qual a relação que podes ver entre os valores da 2ª coluna e os da 3ª?".

Na penúltima linha, podem ter dificuldades em "escolher" um número. Pode-se informar de que podem escolher qualquer valor.

Podem ter dificuldades no preenchimento da última coluna por não entenderem o que representa 2×180^0. Pode-se questionar "O que é que representa o número 2 e o número 180?"

c) *Considera o caso particular de um polígono regular:*

I. Se tiver 4 lados e a soma das amplitudes dos ângulos internos for 360^0*, qual será o valor da amplitude de cada ângulo interno?*

360 ⁰⁄4 = 90 ⁰

II. *Se tiver 5 lados e cada ângulo interno tiver de amplitude* 108^0, *a soma das amplitudes dos ângulos internos poderá ser determinada por* $108^0 \times 5$=*540 ⁰*

Dificuldades:

Na alínea i. podem ter dificuldade em perceber que têm que dividir o valor da soma das amplitudes dos ângulos internos pelo número de lados. Pode-se questionar:"Qual é o número de ângulos? São todos geometricamente iguais?"

Na alínea ii., podem não perceber que não têm que usar a expressão que definiram anteriormente. Esta dúvida será tratada durante a discussão desta alínea.

Discussão - 15 min

1. a) A discussão será feita oralmente, com mostragem de uma resolução pela professora.

b) Na discussão desta alínea, mostra-se a tabela com a coluna referente ao número de lados preenchida, sendo as últimas colunas preenchidas pela professora com respostas (e validação) dos alunos.

Na penúltima linha, perguntar-se-á a um aluno que valor escolheu para número de lados, que número de triângulos obteria e qual a soma obtida.

Na última linha da tabela, referente ao número de triângulos será perguntado a um aluno qual a expressão encontrada, que será validada pela turma.

Na última linha da tabela, referente à soma das amplitudes dos ângulos internos, será questionado qual o significado do 2 e de 180. Será perguntado a um aluno qual a expressão encontrada, que será validada pela turma.

Os alunos completarão a caixa de texto com a síntese desta discussão.

c) Perguntar-se-á a um aluno a resposta que será validada pela turma. Será depois acrescentado à resposta a seguinte síntese, para os alunos escreverem na ficha: amplitude de cada ângulo interno= soma das amplitudes dos ângulos internos /nº lados,

explicando-se que num polígono regular se pode calcular o valor da amplitude de cada ângulo interno dividindo a soma das amplitudes dos ângulos internos pelo número de lados do polígono.

Na alínea ii. explicar-se-á que num polígono regular, se se souber o valor da amplitude de um dos ângulos internos então, como todos os ângulos têm a mesma amplitude, a soma das amplitudes dos ângulos internos pode ser calculada multiplicando o valor da amplitude de um ângulo pelo número de lados e que o resultado é o mesmo de se usar a expressão anteriormente encontrada, escrevendo na ficha a seguinte síntese: soma das amplitudes dos ângulos internos=amplitude de cada ângulo interno×nº lados = (n-2)180^0 = 3×180^0 =540^0

4. Grupo II da Ficha - 60 min.

Indicar que agora se vai realizar o grupo II, em pares ou individualmente. Será também dada indicação de que as questões devem ser feitas numa folha fornecida pela professora.

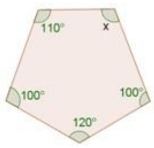
Será dada indicação de que devem fazer as resoluções a caneta, que não devem usar corretor e que, se se enganarem, devem colocar entre parentesis e continuar a resolução, não riscando o que está errado.

A primeira alínea da questão 1 será feita em conjunto com os alunos, solicitando a sua participação oral na resolução, para que possam ver como se resolve um exercício deste tipo. Os alunos terão 10 minutos para resolver a alínea b) da 1 e a tarefa 2. Serão ocupados mais 10 minutos para a realização da alnea a). Terão mais 10 minutos para a realização da tarefa 3.

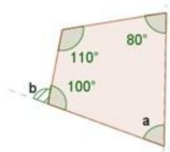
Resolução - 30 min.

1. *Em cada alínea, encontra o valor da amplitude dos ângulos a,b e x apresentando o teu raciocínio.*

a)



b)



Resolução esperada:

a) número de lados = 5 então a soma das amplitudes dos ângulos internos=

$(5-2) \times 180^0$ = 3×180^0 = 540^0

$\hat{x}$+ 100^0+120^0+100^0+110^0 = 540^0 <=>

$\hat{x}$ = 540^0 - $(100^0+120^0+100^0+110^0)$ <=> $\hat{x}$ = 540^0 - 430^0<=> $\hat{x}$ = 110^0

b) o número de lados é 4 então a soma das amplitudes dos ângulos internos=

2×180^0 = 360^0 então:

$\hat{a}+ 80^0+110^0+100^0 = 360^0 \iff \hat{a}= 360^0 - 80^0-110^0-100^0 \iff \hat{a} = 70^0$

O ângulo b é suplementar do ângulo de 100^0 pelo que $\hat{b} = 180^0 - 100^0 = 80^0$

Erros:

Podem ser cometidos erros de cálculo, em especial por não se poder usar calculadora.

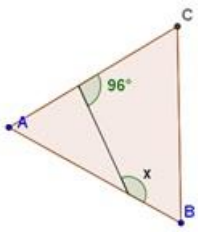
Dificuldades:

Na alínea b) podem surgir dúvidas na definição da equação. Sugerir que verifiquem bem a alínea anterior. Pode-se questionar qual o valor da soma das amplitudes dos ângulos internos e a que é igual.

Podem surgir dificuldades no cálculo da amplitude do ângulo b. Pode-se questionar qual a relação deste com o ângulo de 100^0.

2. *Na figura ao lado está representado um triângulo equilátero [ABC]. Determina a amplitude do ângulo x. Explica o teu raciocínio.*

(Adaptada do caderno de atividades do manual Π 7)



Resolução esperada:

Dados:

- Triângulo equilátero
- Quadrilátero em que um dos ângulos tem de amplitude 96^0

A resolução deste problema pode partir de duas perspetivas:

- trata-se de um triângulo equilátero, logo os lados são todos geometricamente iguais, então os ângulos têm todos a mesma amplitude (porque num triângulo a lados geometricamente iguais opõe-se ângulos geometricamente iguais). Sabendo-se que que a soma das amplitudes dos ângulos internos num triângulo é 180^0, a amplitude de cada ângulo interno do triângulo é de $180^0/3 = 60^0$,
- trata-se de um polígono com 3 lados, então a soma é dada por $(3-2) \times 180^0 = 180^0$. Mas como é um triângulo equilátero os lados são todos geometricamente geometricamente iguais logo os ângulos têm todos a mesma amplitude (porque num triângulo a lados geometricamente iguais opõe-se ângulos geometricamente iguais), então é um polígono regular e a

amplitude de cada ângulo interno é dada por $180^0/3 = 60^0$. A partir deste ponto, pode ter duas resoluções diferentes:

- Usando o quadrilátero: O polígono da imagem tem quatro lados, então a soma das amplitudes dos ângulos internos é $(4-2)\times 180^0 = 2\times 180^0 = 360^0$, então:

$\hat{x} + 60^0 + 60^0 + 96^0 = 360^0$ <=>

$\hat{x} = 360^0 - (60^0 + 60^0 + 96^0)$ <=> $\hat{x} = 144^0$

A amplitude do ângulo x é 144^0

- Usando o triângulo menor: Sabe-se que a soma das amplitudes dos ângulos internos é dada por 180^0. Um dos ângulos deste triângulo é suplementar do ângulo de 96^0 dado no enunciado então a amplitude desse ângulo é $180^0 - 96^0 = 84^0$. Como a soma das amplitudes dos ângulos internos é 180^0 então: $180^0 = 60^0 + 84^0 + \hat{y}$ => $\hat{y} = 180^0 - 84^0 - 60^0 = 36^0$. Este ângulo é suplementar do ângulo x. Então $\hat{x} = 180^0 - 36^0 = 144^0$

A amplitude do ângulo x é 144^0.

Erros:

Podem cometer erros de cálculo ou na resolução de equações.

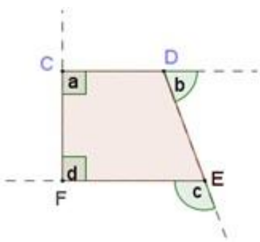
Dificuldades:

Podem ter dificuldade em perceber que têm que começar por determinar a amplitude dos ângulos internos do triângulo.

Podem surgir dificuldades por não se recordarem de que um triângulo equilátero é um triângulo em que todos os lados são geometricamente iguais, logo os ângulos também são todos geometricamente iguais.

Pode-se questionar o que carateriza um triângulo equilátero.

3. *Considera o quadrilátero convexo da figura, em que [CD] e [FE] são paralelos. Qual o valor da soma das amplitudes dos seus ângulos externos? Explica o teu raciocínio.*
(Adaptada do Caderno de Apoio às Metas Curriculares do Ensino Básico)



Resolução esperada:

Uma estratégia:

Vai-se primeiro encontrar o valor da amplitude dos ângulos suplementares dos ângulos a e d:

Os ângulos a e d têm, cada um, 90^0 de amplitude pois são ângulos retos, então os seus suplementares também são retos.

Vai-se depois encontrar o valor da soma das amplitudes dos ângulos b e c (já que não se tem informação sobre a sua amplitude):

Os ângulos b e c são suplementares, pelo que a soma das suas amplitudes é 180^0.

Então a soma das amplitudes dos ângulos externos é $90^0+90^0+180^0 = 360^0$

Outra estratégia: como num polígono convexo, unindo cada ângulo interno a um externo adjacente se forma um ângulo raso, têm-se então 4 ângulos rasos, sendo a soma das amplitudes destes ângulos 4×180^0

A soma das amplitudes dos ângulos internos é:

$(4-2) \times 180^0 = 2 \times 180^0$

A soma das amplitudes dos ângulos externos será a diferença entre estes dois valores ou seja:

$4 \times 180^0 - 2 \times 180^0 = 2 \times 180^0 = 360^0$

Erros:

Podem ser cometidos erros de cálculo.

Dificuldades:

Podem não se lembrar das relações entre ângulos. Pode-se sugerir que se relembrem das relações entre ângulos.

Discussão - 30 min

A resolução e discussão da tarefa 4 será feita na aula seguinte.

A discussão das questões será feita com a ida ao quadro de alunos. A validação das resoluções será preferencialmente feita pela turma.

Se forem detetadas estratégias de resolução diferentes (corretas) das aqui apresentadas e houver tempo serão discutidas.

Será feita a correção da alínea b) da questão 1 em conjunto com a tarefa 2, mas por alunos diferentes.

Será depois feita a discussão da tarefa 3.

Na 2 será escolhido preferencialmente um aluno que tenha usado a expressão da soma das amplitudes dos ângulos internos e depois o quadrilátero. Se algum aluno usou depois o triângulo menor, discute-se esta resolução.

Na 3, será preferencialmente escolhido um aluno que tenha resolvido pela segunda forma de resolução para, a partir daí se chegar à expressão da soma das amplitudes dos ângulos externos num polígono convexo.

Irá depois questionar-se (à turma) qual o número de ângulos rasos que se têm na imagem e qual o valor da soma das suas amplitudes: 4×180^0 = $n \times 180^0$

Questiona-se também qual a expressão que define a soma das amplitudes dos ângulos internos do polígono: 2×180^0 = $(n-2) \times 180^0$

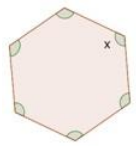
Mostra-se depois que a diferença entre o valor da soma das amplitudes dos ângulos rasos e este valor é 2×180^0 : $n \times 180^0$ - $(n-2) \times 180^0$ = $n \times 180^0$ - $n \times 180^0 + 2 \times 180^0$ = 2×180^0 = 360^0, que é o valor da soma das amplitudes dos ângulos externos em polígonos convexos.

Os alunos irão copiar para o caderno o desenvolvimento desta tarefa, feito pela professora, até se chegar ao valor da soma das amplitudes dos ângulos externos em polígonos convexos e completarão a síntese da ficha. Se algum aluno tiver usado a primeira estratégia, será discutida. Se não, será questionado se não se poderia ter usado essa estratégia (se houver tempo).

Os alunos que terminarem a tarefa antes do tempo previsto fazem a tarefa 8 da página 61 do manual.

Como TPC, terão a tarefa seguinte, entregue numa folha à parte:

Na figura está representado um hexágono regular. Encontra o valor da amplitude do ângulo x, apresentando o teu raciocínio.



A folha usada para a realização do grupo II será recolhida.

Avaliação

A avaliação dos alunos será feita tendo em conta:

- a sua participação na aula
- a realização da parte II da ficha

Anexo III - Plano da aula de 20 de Março

<table>
<tr><td>Data</td><td>20/Março/2014</td><td>Hora</td><td>10:15–11:55</td><td>Turma</td><td>7º A</td></tr>
<tr><td>Lições nº</td><td>95 e 96</td><td>Tema</td><td colspan="3">Geometria</td></tr>
<tr><td>Tópicos</td><td colspan="5">Quadriláteros
Trapézios</td></tr>
<tr><td>Pré-Requisitos</td><td colspan="5">Uso de material de desenho</td></tr>
<tr><td>Objectivos Específicos</td><td colspan="5">Saber desenhar diagonais num polígono
Saber que um quadrilátero tem duas diagonais e que se intersetam no seu interior no caso de ser convexo
Identificar um trapézio
Identificar trapézios isósceles, retângulos e escalenos</td></tr>
<tr><td>Material</td><td colspan="5">Régua; Transferidor; Ficha "Quadriláteros e Trapézios"; Manual; Material de escrita</td></tr>
<tr><td>Metodologia de Trabalho</td><td colspan="5">Trabalho a pares ou individualmente</td></tr>
<tr><td>Capacidades transversais a desenvolver</td><td colspan="5">Comunicação matemática - esta capacidade será trabalhada ao longo da aula, nomeadamente na discussão da primeira parte da ficha, em que os alunos são chamados a discutir as suas conclusões relativas a características dos quadriláteros e dos trapézios. Na segunda parte, têm que interpretar e explicar a forma como resolvem os problemas propostos.
Resolução de problemas - esta capacidade será trabalhada na segunda parte da ficha, nas tarefas 1, 2 e 3.</td></tr>
<tr><td>Estrutura da Aula</td><td colspan="5">Duração total: 100 min
1. Início da aula - 5 min
2. Apresentação no Geogebra de polígonos e a soma das amplitudes dos ângulos externos - 10 min
3. Grupo I da ficha- 35 min
4. Grupo II da ficha- 50 min</td></tr>
</table>

Desenvolvimento da aula

1. Início da aula - 5 min

Neste espaço será escrito o sumário no quadro.

Sumário: Continuação do estudo da soma dos ângulos externos em polígonos convexos. Propriedades de quadriláteros e trapézios. Resolução da ficha "Quadriláteros e Trapézios".

- **NOTA**: Faz-se uma distinção entre dificuldades e erros. Nas primeiras são dadas sugestões aos alunos, por exemplo, na interpretação de uma pergunta. Os erros, são exatamente erros que podem ser cometidos na resolução. Sempre que detetados, sem se explicitar como se resolvem, será sugerido aos alunos que revejam a sua resolução.

Durante a resolução os alunos estarão a trabalhar autonomamente, sendo que irei circular pela sala/alunos/grupos para esclarecer eventuais dúvidas que possam surgir e certificar-me que os alunos estão a fazer a tarefa.

Durante as discussões das resoluções procurar-se-á perguntar ou pedir para ir ao quadro alunos que ainda não tenham respondido ou ido ao quadro durante esta aula.

2. Apresentação no Geogebra de polígonos e a soma das amplitudes dos ângulos externos - 10 min

No seguimento da demonstração feita na aula anterior sobre a soma dos ângulos externos de um polígono convexo, serão mostrados exemplos no Geogebra de polígonos com os respetivos ângulos externos assinalados e com os seus valores.

Mostra-se um polígono com quatro lados e pergunta-se a um aluno qual a soma das amplitudes dos ângulos externos.

Depois mostra-se um polígono regular com 5 lados e pede-se a outro aluno para dizer qual a soma das amplitudes dos ângulos externos.

Mostra-se ainda outro exemplo de um octógono regular e faz-se o mesmo procedimento.

Mostra-se um polígono com 10 lados e pergunta-se a outro aluno qual será a soma das amplitudes dos seus ângulos externos. Espera-se aqui que a resposta seja 360 graus.

Mostra-se que a conta é efetivamente 360 graus (num ficheiro excel).

A professora irá reforçar que a soma das amplitudes dos ângulos externos num polígono convexo é 360 graus, independentemente do número de lados.

No final da aula será entregue uma folha com exemplos (os apresentados na aula e mais um) cuja leitura e preenchimento será parte do TPC.

3. Grupo I da ficha- 35 min

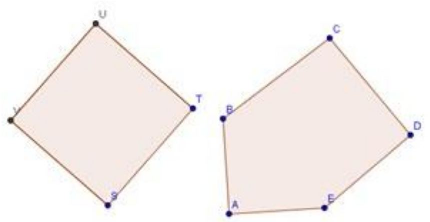
Demonstração no computador de como se traçam todas as diagonais num dado polígono.

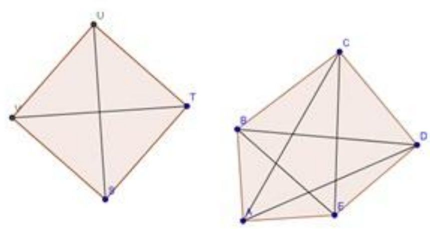
Entrega do enunciado da tarefa.

Será explicado que devem fazer o grupo I, que pode ser feita em pares ou individualmente, que será feita no enunciado e que têm 10 minutos. Durante a resolução, os alunos estarão a trabalhar autonomamente, mas com o apoio da professora para eventuais dúvidas. Será indicado que não devem ainda preencher as caixas de texto abaixo dos polígonos.

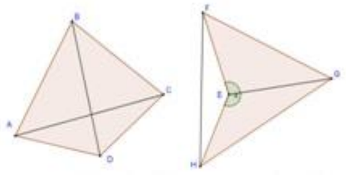
Resolução - 10 min + 5 min (demonstração)

1. *Considera os seguintes polígonos. Traça todas as diagonais possiveis em cada um.*





2. *Considera os* ***quadriláteros*** *[ABCD] e [EFGH]. Em cada um deles, desenha as suas diagonais.*



a) *Quantas diagonais tem o quadrilátero [ABCD]?* 2 *E no quadrilátero[EFGH]?* 2

b) *As diagonais intersetam-se no quadrilátero [ABCD]?* Sim *E no quadrilátero [EFGH]?* Não

3. *Relativamente ao quadrilátero [ABCD] indica:*

a) *dois lados opostos*

Por exemplo: [AB] e [CD]

b) *dois ângulos opostos*

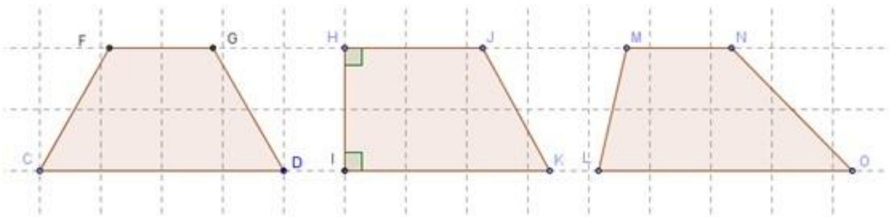
Por exemplo: ABC e ADC

c) *a soma das amplitudes dos seus ângulos internos.*

Como o número de lados é 4, então a soma das amplitudes dos ângulos internos é $(4-2)\times 180^0 \ = 2\times 180^0 \ = 360^0$.

4. Considera os seguintes quadriláteros simples com dois lados paralelos, designados de ***trapézios****.*

Escreve no teu caderno, em 2 ou 3 linhas, o que concluis quanto aos lados não paralelos de cada um deles.



Dificuldades:

Na pergunta 1, podem surgir dificuldades no desenho das diagonais. Relembrar que é para se desenhar todas as possíveis.

Podem surgir dificuldades a traçar as diagonais no quadrilátero côncavo. Relembrar que uma diagonal é um segmento de reta que une dois vértices não consecutivos e questionar quais os segmentos de reta que podem ser traçados nestas condições.

Se surgirem dúvidas na pergunta 3. c) pode-se sugerir que recordem a expressão encontrada na aula anterior.

Na pergunta 4, se surgirem dúvidas em relação a quais são os lados não paralelos, pode-se questionar quais são os lados paralelos. Pode-se também questionar sobre o que concluem em relação às suas medidas ou se são perpendiculares entre si.

Discussão - 20 min

A discussão será feita através do questionamento de alunos e validação da turma.

Na pergunta1. será mostrada uma resolução feita no computador pela professora.

Nas alíneas da pergunta 2 e da pergunta 3, será questionado um aluno para cada alínea e será validado pela turma.

Será mostrado que num quadrilátero convexo as suas diagonais se intersetam num ponto interior.

Na pergunta 2 a) vão escrever: Um quadrilátero tem exatamente duas diagonais. Na pergunta 2 b) vão escrever: Num quadrilátero convexo, as suas diagonais intersetam-se num ponto interior ao quadrilátero. Na pergunta 3.c) será discutido porque é que é 2×180^0

Na pergunta 4, serão mostrados no computador vários trapézios procurando-se que os alunos tenham uma melhor perceção das caraterísticas dos trapézios e não fiquem com uma ideia rígida destes - nomeadamente em relação ao posicionamento das bases.

Serão também discutidas as classificações dos trapézios: retângulo, isósceles e escaleno recorrendo aos trapézios mostrados no computador e questionando alunos quanto às suas conclusões. Serão completadas as frases na caixa de texto referente aos trapézios.

4. Grupo II da ficha- 50 min.

Indicar que agora se vai realizar o grupo II, em pares ou individualmente. Será também dada indicação de que as questões devem ser feitas na folha fornecida pela professora. Será dada indicação de que devem fazer as resoluções a caneta, que não devem usar corretor e que, se se enganarem, devem colocar entre parentesis e continuar a resolução, não riscando o que está errado. Terão 15 minutos para realizarem as tarefas 1, 2 e 3.

Resolução - 15 min.

1. *Lê esta afirmação: "Desenhei no meu caderno um trapézio retângulo em que três dos seus ângulos internos têm as seguintes amplitudes: 90 ^{0}, 97 ^{0} e 78 ^{0}". Mostra que esta afirmação é falsa.*

Resolução esperada:

Para ser um trapézio retângulo tem que ter dois ângulos com 90^0 de amplitude. Um dos ângulos tem 90^0 de amplitude, vai-se ver se o outro também tem.

Começando por calcular a soma das amplitudes dos ângulos internos:

nº de lados =4 então

soma das amplitudes dos ângulos internos =$(4-2)\times 180^0$ =2×180^0 = 360^0

Outra estratégia poderia ser usar logo o valor que já se conhece para os quadriláteros, em que a soma das amplitudes dos ângulos internos é 360^0.

Construindo uma equação que traduza a situação:

x - representa, em graus, a amplitude desconhecida.

$$90^0+97^0+\ 78^0+\ x=360^0\ \Leftrightarrow x=\ 360^0-\ (90^0+97^0+78^0)\ \Leftrightarrow$$
$$x\ =\ 360^0-\ 90^0-\ 97^0-\ 78^0 \Leftrightarrow x=\ \ 95^0$$

Como a amplitude que se desconhece é 95^0 então não pode tratar-se de um trapézio retângulo, ou seja, a afirmação é falsa.

Erros:

Podem resolver mal a equação ou fazer erros de cálculo.

Dificuldades:

Podem ter dificuldades em perceber que, como é um trapézio retângulo, então tem que ter dois ângulos retos e que vão ter que verificar se isso é verdade determinando a amplitude do ângulo que falta. Pode-se questionar o que carateriza um trapézio retângulo.

2 . *Num trapézio isósceles, a medida de uma base excede em 2 cm um dos lados não paralelos e a medida da outra base excede em 4 cm o mesmo lado não paralelo. O seu perímetro é de 22 cm. Qual a medida, em cm, de cada um dos seus lados?*

Resolução esperada:

Se é um trapézio isósceles, então os seus lados não paralelos têm a mesma medida.

Se x representar a medida, em cm, de um lado não paralelo, então:

$x + 4$ representa a medida, em centímetros, de uma base

$x + 2$ representa a medida, em centímetros, da outra base

o perímetro do trapézio é 22 cm

Construindo uma equação que traduza a situação:

$x + x + x + 4 + x + 2 = 22 \Leftrightarrow 4x + 6 = 22 \Leftrightarrow 4x = 22 - 6 \Leftrightarrow 4x = 16$

$\Leftrightarrow x = 4$

Então, cada um dos lados não paralelos mede 4 cm.

Base maior: mede 8 cm

Base menor: mede 6 cm.

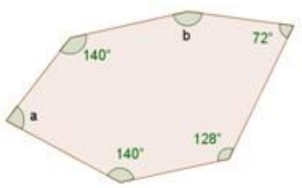
Erros:

Podem resolver mal a equação ou fazer erros de cálculo.

Dificuldades:

Podem ter dificuldades em perceber que, como é um trapézio isósceles então os dois lados não paralelos têm a mesma medida e que as medidas dos outros lados se definem a partir da medida de um dos lados não paralelos. Pode-se questionar o que carateriza um trapézio isósceles e o que se quer encontrar.

3. *Considera o polígono com 6 lados na figura. Determina a amplitude do ângulo a e do ângulo b, sabendo que o ângulo b tem o dobro da amplitude do ângulo a. Explica o teu raciocínio.*



(Adaptada do manual Matemática PI 7)

Resolução esperada:

A soma das amplitudes dos ângulos internos deste polígono é:

$(6 - 2) \times 180^0 = 4 \times 180^0 = 720^0$

Então, construindo uma equação em que $\hat{b} = 2\hat{a}$:

$140^0 + 2\hat{a} + 72^0 + 128^0 + 140^0 + \hat{a} = 720^0 \Leftrightarrow 3\hat{a} = 720^0 - (140^0 + 72^0 + 128^0 + 140^0) \Leftrightarrow$

$3\hat{a} = 720^0 - 480^0 \Leftrightarrow 3\hat{a} = 240^0 \Leftrightarrow \hat{a} = 80^0$

então $\hat{b} = 2 \times 80^0 = 160^0$

O ângulo a tem 80^0 de amplitude e o ângulo b tem 160^0 de amplitude.

Outra forma de resolver:

Definir a amplitude do ângulo a a partir da amplitude do ângulo b (e depois a mesma forma de resolver)

Erros:

Podem ser cometidos erros de cálculo ou na resolução da equação.

Dificuldades:

Podem ter dificuldade em definir a amplitude do ângulo b a partir da amplitude do ângulo a.

Discussão - 35 min

A discussão será feita conjuntamente, com a ida ao quadro de um aluno para cada tarefa.

Se forem detetadas estratégias de resolução diferentes (corretas) das aqui apresentadas e houver tempo serão discutidas.

Na 1, será escolhido de preferência um aluno que tenha usado a expressão da soma das amplitudes dos ângulos internos. Será questionado se se podia usar diretamente o valor que se conhece sobre a soma das amplitudes dos ângulos internos nos quadriláteros. Será também questionado se se trata de um trapézio retângulo pois o ângulo que se encontrou não é reto. Se for ao quadro um aluno que use diretamente o valor de 360 graus, discute-se a possibilidade de se usar a expressão encontrada na aula anterior.

Na 2, questionar-se-á porque é que apenas é necessário referir um dos lados não paralelos. Os alunos que terminem a tarefa antes do tempo fazem os exercícios 3.1 e 3.2 da pág. 65 do manual. As folhas usadas para a resolução do grupo II serão recolhidas. O TPC será a tarefa 4 da ficha "Ângulos Internos e Externos" e a leitura e preenchimento da folha entregue.

Avaliação

A avaliação dos alunos será feita tendo em conta:

- a sua participação na aula
- a realização das tarefas propostas no grupo II da ficha

Anexo IV - Plano da aula de 25 de Março

Data	25/Março/2014	**Hora**	10:15–11:55	**Turma**	7º A
Lições nº	97 e 98	**Tema**	Geometria		
Tópicos	Papagaios Paralelogramos				
Pré-Requisitos	Uso de material de desenho				
Objectivos Específicos	Saber identificar um paralelogramo Saber identificar um papagaio Saber classificar quadriláteros				
Material	Régua; Transferidor; Ficha "Paralelogramos e Papagaios"; Manual; Material de escrita				
Metodologia de Trabalho	Trabalho a pares ou individualmente				
Capacidades transversais a desenvolver	**Comunicação matemática** - esta capacidade será trabalhada ao longo da aula, nomeadamente na discussão da primeira parte da ficha, em que os alunos são chamados a discutir as suas conclusões relativas a características dos paralelogramos. Na segunda parte, têm que interpretar e explicar a forma como resolvem os problemas propostos. **Resolução de problemas** - esta capacidade será trabalhada na segunda parte da ficha, nas tarefas 2 e 3. **Raciocínio Matemático** - esta capacidade será trabalhada na resolução da tarefa 3 da segunda parte da ficha, em que os alunos terão que fazer uma conjetura sobre os agrupamentos criados.				
Estrutura da Aula	Duração total: 100 min 1. Início da aula - 5 min 2. Grupo I da ficha- 30 min 3. Grupo II da ficha- 50 min 4. Propriedades das diagonais - 15 min				

Desenvolvimento da aula

1. Início da aula - 5 min

Neste espaço será escrito o sumário no quadro.

Sumário: Estudo e classificação de quadriláteros. Resolução da ficha "Paralelogramos e Papagaios".

NOTA: Faz-se uma distinção entre dificuldades e erros. Nas primeiras são dadas sugestões aos alunos, por exemplo, na interpretação de uma pergunta. Os erros, são exatamente erros que podem ser cometidos na resolução. Sempre que detetados, sem se explicitar como se resolvem, será sugerido aos alunos que revejam a sua resolução.

Durante a resolução os alunos estarão a trabalhar autonomamente, sendo que irei circular pela sala/alunos/grupos para esclarecer eventuais dúvidas que possam surgir e certificar-me que os alunos estão a fazer a tarefa.

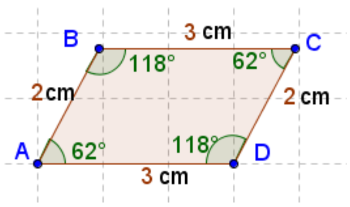
Durante as discussões das resoluções procurar-se-á perguntar ou pedir para ir ao quadro alunos que ainda não tenham respondido ou ido ao quadro durante esta aula.

2. Grupo I da ficha- 30 min

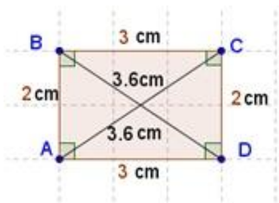
Entrega do enunciado da tarefa. Será explicado que devem fazer o grupo I, que pode ser feita em pares ou individualmente, que será feita no enunciado e que têm 10 minutos. Durante a resolução, os alunos estarão a trabalhar autonomamente, mas com o apoio da professora para eventuais dúvidas.

Resolução - 10 min

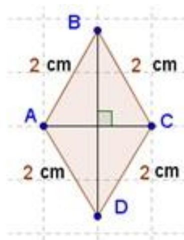
1. *Considera os seguintes trapézios, designados paralelogramos:*



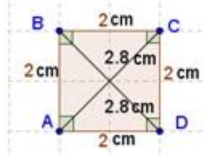
A



B



C



D

a) *O que podes observar quanto aos seus lados opostos?*

Os seus lados opostos são paralelos e têm a mesma medida.

b) *No paralelogramo A, o que podes observar quanto aos seus ângulos opostos?*

Os seus ângulos opostos têm a mesma amplitude.

c) *Nos paralelogramos B e D, o que podes observar quanto ao comprimento das suas diagonais?*

As suas diagonais têm o mesmo comprimento.

d) *No paralelogramo C, o que podes observar quanto às suas diagonais?*

As suas diagonais são perpendiculares.

e) *Os paralelogramos B e D, quantos ângulos internos retos têm?*

Têm ambos 4 ângulos internos retos.

Dificuldades:

Na a) se surgirem dificuldades, questionar se são paralelos e qual a relação entre as suas medidas.

Discussão - 20 min

A discussão será feita com o questionamento a um aluno, em cada alínea. As respostas serão validadas perguntando a outro aluno se concorda.

Entrega da folha sobre quadriláteros.

Apresentação no Geogebra de paralelogramos com as medidas dos lados e amplitudes dos ângulos internos podendo-se ver que os seus lados opostos têm a mesma medida e que os ângulos internos opostos têm a mesma amplitude. Será questionado "Porque é que um paralelogramo é um trapézio?"

Será também mostrado que num paralelogramo as diagonais se bissetam, que num retângulo têm o mesmo comprimento, que num losango são perpendiculares e que num quadrado têm o mesmo comprimento e são perpendiculares.

Será também discutida a hierarquia que se pode estabelecer na classificação dos quadriláteros. Quadriláteros: Trapézios e não trapézios. Dentro dos trapézios: Paralelogramos e não paralelogramos. Dentro dos paralelogramos: Paralelogramo obliquângulo, retângulo, quadrado e losango. Será discutido que o quadrado é simultaneamente um retângulo e um losango.

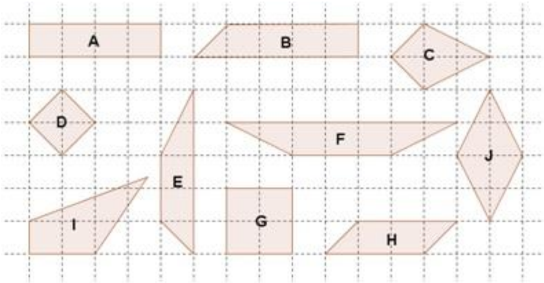
Apresentação no Geogebra de papagaios como sendo quadriláteros com dois pares de lados consecutivos geometricamente iguais e em que as diagonais são perpendiculares. Será discutido que um losango é um papagaio.

3. Grupo II da ficha- 50 min.

Indicar que agora se vai realizar o grupo II, em pares ou individualmente. Será também dada indicação de que as questões devem ser feitas na folha fornecida pela professora. Será dada indicação de que devem fazer as resoluções a caneta, que não devem usar corretor e que, se se enganarem, devem colocar entre parentesis e continuar a resolução, não riscando o que está errado. Terão 20 minutos para realizarem as tarefas.

Resolução - 20 min.

1. *De entre os quadriláteros na imagem abaixo indica, pela letra correspondente, todos os:*



a) trapézios não paralelogramos
b) retângulos
c) losangos
d) quadrados
e) papagaios

Resolução esperada:

a) B, E, F   b) A, D, G   c) D, G, J   d) D, G   e) C, D, G, J

2. Num paralelogramo [ABCD], o ângulo interno de vértice em A tem 110 graus de amplitude. Determina a amplitude dos restantes ângulos internos. Sabendo que os seus lados medem todos 3 cm, classifica o quadrilátero.

Resolução esperada:

Como se trata de um paralelogramo então:

os seus ângulos internos opostos têm a mesma amplitude

dois ângulos internos consecutivos são suplementares

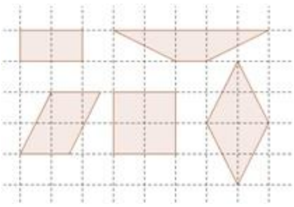
Assim, a amplitude do ângulo interno de vértice em C é 110º, pois é o ângulo interno oposto ao ângulo interno de vértice em A. A amplitude do ângulo interno de vértice em B é 70º (180º - 110º) pois é um ângulo interno consecutivo ao ângulo interno de vértice em A e a amplitude do ângulo interno de vértice em D é 70º, pois é o ângulo interno oposto ao ângulo interno de vértice em B (aqui também se poderia justificar como sendo um ângulo interno consecutivo ao ângulo interno de vértice em A).

Como todos os lados têm o mesmo comprimento trata-se de um losango.

Dificuldades:

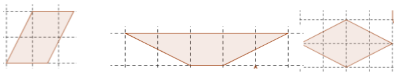
Podem ter dificuldades em perceber que num paralelogramo os ângulos internos opostos têm a mesma amplitude e que dois ângulos consecutivos são suplementares. Pode-se questionar o que carateriza um paralelogramo quanto aos seus ângulos internos.

3. Os alunos João, Maria e Catarina formaram dois grupos com quadriláteros da imagem ao lado. Esses grupos estão representados abaixo:

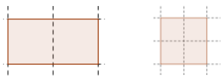


João:

Grupo A

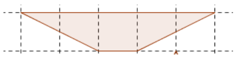


Grupo B

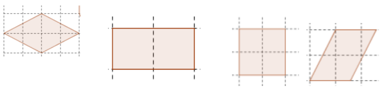


Maria:

Grupo A

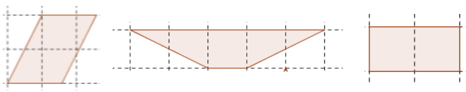


Grupo B

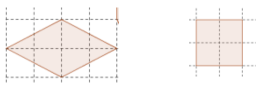


Catarina:

Grupo A



Grupo B



Explica em que pensou cada um dos alunos para formar estes grupos. (Adaptado do Manual pi 7)

Resolução esperada:

João: Grupo A: Quadriláteros não retângulos

Grupo B: Quadriláteros retângulos

Maria:Grupo A: Não paralelogramos

Grupo B: Paralelogramos

Catarina:Grupo A: Quadriláteros sem os quatro lados geometricamente iguais

Grupo B: Quadriláteros com os quatro lados geometricamente iguais

Dificuldades:

Prevê-se que surjam dificuldades em encontrar regularidades nos grupos. Pode-se sugerir que observem os quadriláteros quanto aos lados e ângulos.

Discussão - 30 min

A discussão da 1. será feita com o questionamento a um aluno por cada alínea. A validação será feita por outro aluno. Em cada alínea, questionar-se-á o que carateriza o quadrilátero em questão. A discussão da 2 será feita com a ida ao quadro de um aluno. Será questionado se poderá ser um quadrado (por todos os lados terem o mesmo comprimento).

A discussão da 3. será feita com o questionamento a um aluno por cada nome (Ex. João), de preferência um aluno que não tenha uma resposta válida. A validação será feita por outro aluno, de preferência um aluno que tenha uma resposta válida. Serão discutidas outras respostas no sentido de se verificar se são válidas.

4. Propriedades das diagonais - 15 min

Com o acompanhamento do computador, será feita uma revisão sobre critérios de igualdade de triângulos. Serão apresentados exemplos e será questionado a alunos qual o critério de igualdade de triângulos usado. Será feita a entrega da folha com as demonstrações. A leitura desta será acompanhada com o Geogebra em que vão sendo evidenciados os diferentes passos percorridos.

Os alunos que terminarem a tarefa antes do tempo, fazem a tarefa 6 da página 75 do manual. O TPC serão as tarefas 2 da página 48 e 2 da página 64 do manual.

Avaliação

A avaliação dos alunos será feita tendo em conta:

- a sua participação na aula
- a resolução das tarefas do grupo II

Anexo V - Plano da aula de 27 de Março

Data	27/Março/2014	**Hora**	10:15–11:55	**Turma**	7º A
Lições nº	99 e 100	**Tema**	Geometria		
Tópicos	Quadriláteros				
Pré-Requisitos	Uso de material de desenho				
Objectivos Específicos	Resolver exercícios e problemas envolvendo propriedades de quadriláteros e igualdade de triângulos.				
Material	Régua; Transferidor; Ficha "Quadriláteros"; Manual; Material de escrita				
Metodologia de Trabalho	Trabalho a pares ou individualmente				
Capacidades transversais a desenvolver	**Comunicação matemática** - esta capacidade será trabalhada ao longo da aula, nomeadamente na discussão das tarefas. **Resolução de problemas** - esta capacidade será trabalhada nas tarefas 2, 4, 5 e 6. **Raciocínio matemático** - esta capacidade será trabalhada na tarefa 6, em que os alunos são chamados a fazer uma demonstração.				
Estrutura da Aula	Duração total: 100 min 1. Início da aula - 5 min 2. Ficha "Quadriláteros" - 95 min				

Desenvolvimento da aula

1. Início da aula - 5 min

Neste espaço será escrito o sumário no quadro.

Sumário: Continuação do estudo de quadriláteros. Resolução da ficha "Quadriláteros".

NOTA: Faz-se uma distinção entre dificuldades e erros. Nas primeiras são dadas sugestões aos alunos, por exemplo, na interpretação de uma pergunta. Os erros, são exatamente erros que podem ser cometidos na resolução. Sempre que detetados, sem se explicitar como se resolvem, será sugerido aos alunos que revejam a sua resolução.

Durante a resolução os alunos estarão a trabalhar autonomamente, sendo que irei circular pela sala/alunos/grupos para esclarecer eventuais dúvidas que possam surgir e certificar-me que os alunos estão a fazer a tarefa.

Durante as discussões das resoluções procurar-se-á perguntar ou pedir para ir ao quadro alunos que ainda não tenham respondido ou ido ao quadro durante esta aula.

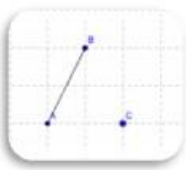
2. Ficha "Quadriláteros" - 95 min

Entrega do enunciado da tarefa.

Será explicado que devem fazer a ficha, que pode ser feita em pares ou individualmente e que será feita na folha quadriculada entregue. Será dada indicação de que devem fazer as resoluções a caneta, que não devem usar corretor e que, se se enganarem, devem colocar entre parentesis e continuar a resolução, não riscando o que está errado.

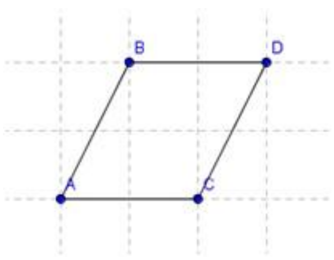
Durante a resolução, os alunos estarão a trabalhar autonomamente, mas com o apoio da professora para eventuais dúvidas. Será indicado que não devem ainda preencher as caixas de texto abaixo dos polígonos.

Resolução - 45 min



1. *Numa folha quadriculada desenha um segmento de reta e um ponto, como mostrado na figura 1. Desenha um paralelogramo que tenha como vértices os pontos A, B e C.*

Resolução esperada:



Dificuldades:

Se surgirem dificuldades, sugerir que comecem por desenhar o segmento de reta [AC].

2. *A Cristina desenhou um paralelogramo [ABCD] em que o ângulo interno de vértice em A tem de amplitude 90 graus. Que paralelogramo desenhou? Explica o teu raciocínio.* *(Adaptado do manual Matemática 7)*

Resolução esperada:

Como é um paralelogramo, então:

os ângulos internos opostos têm a mesma amplitude

dois ângulos internos consecutivos são suplementares

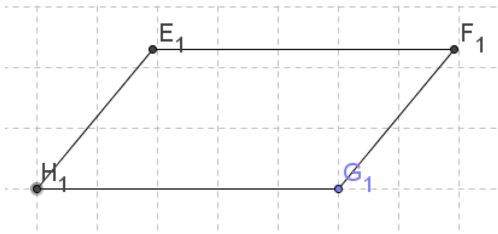
Então, o ângulo interno oposto ao ângulo de vértice em A tem 90º de amplitude e os dois ângulos consecutivos ao ângulo de vértice em A têm ambos 180º- 90º=90º. Como todos os ângulos internos têm 90º de amplitude, trata-se de um retângulo.

Dificuldades:

Podem surgir dificuldades por não se lembrarem que em paralelogramos os ângulos internos opostos têm a mesma amplitude e dois ângulos internos consecutivos são suplementares. Pode-se questionar o que carateriza um paralelogramo.

3. *Numa folha quadriculada desenha um paralelogramo em que dois dos lados consecutivos meçam 5 cm e 3 cm e o ângulo por eles formado tenha 50 graus de amplitude.*

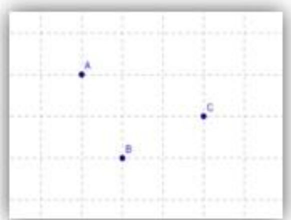
Resolução Esperada:



Difculdades:

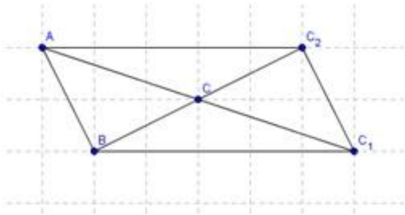
Se surgirem dificuldades no desenho, sugerir que comecem por desenhar um dos lados, por exemplo o de 5 cm, e em seguida desenhem o ângulo.

4. *Na figura 3, podes ver os pontos A, B e C assinalados. Copia os três pontos para uma folha quadriculada e constrói um paralelogramo de modo que A e B sejam vértices do paralelogramo e C seja o ponto de*



interseção das suas diagonais.

Resolução esperada:



Dificuldades:

Podem surgir dificuldades por não conseguirem relacionar o ponto de interseção das diagonais com as suas medidas. Pode-se questionar o que carateriza um paralelogramo.

5. *As diagonais de um paralelogramo [ABCD] intersetam-se no ponto X. Sabe-se que $B\hat{X}A = 90^{o}$.*

   a. *O João acha que [ABCD] é um quadrado. A Catarina não concorda e afirma que, com as informações fornecidas, apenas se pode garantir que [ABCD] é um losango. Qual dos dois achas que tem razão? Justifica a tua opinião.*

   b. *Sabendo que $X\hat{D}A = 60^{o}$ e $X\hat{B}A = 60^{o}$, determina as amplitudes dos ângulos CDA e DAB.*

Resolução esperada:

a) Como $B\hat{X}A = 90^{o}$, então as suas diagonais são perpendiculares, tratando-se por isso de um losango. Como nada é dito sobre se as diagonais são geometricamente iguais, apenas se pode dizer que é um losango e não se pode afirmar que é um quadrado. Assim, a Catarina é que tem razão.

b) Como se trata de um paralelogramo, então os seus lados opostos são paralelos e os seus ângulos internos opostos têm a mesma amplitude.

Os ângulos XDA e XBC são alternos internos, então têm a mesma amplitude, $X\hat{B}C = 60^0$. Logo , $A\hat{B}C = 60^0 + 60^0 = 120^0$.

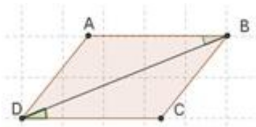
O ângulo CDA, como é o ângulo interno oposto ao ângulo ABC, tem a mesma amplitude deste, ou seja, 120^0.

O ângulo DAB, como é um ângulo interno consecutivo ao ângulo CDA, mede $180^0 - 120^0 = 60^0$ de amplitude.

Dificuldades:

Podem ter dificuldade em concluir que não se pode afirmar que é um quadrado. Sugerir que revejam as propriedades dos losangos e quadrados.

Na b), mais uma vez, pode-se sugerir que revejam as propriedades dos losangos.



6. *Considera o seguinte trapézio, em que as bases [AB] e [CD] são geometricamente iguais.*

   a. *Explica porque é que os triângulos [ABD] e [BDC] são geometricamente iguais.*

   b. *O que podes concluir quanto às medidas dos lados [AD] e [BC]? E quanto às amplitudes dos ângulos DAB e DCB?*

Resolução esperada:

a) Os triângulos [ABD] e [BCD] têm um lado em comum - o lado [BD]. Por outro lado, os ângulos ABD e BDC têm a mesma amplitude, pois são ângulos alternos internos, e os lados [AB] e [CD] têm o mesmo comprimento. Então, pelo critério LAL, os triângulos [ABD] e [BDC] são geometricamente iguais.

b) Os lados [AD] e [BC] têm a mesma medida e os ângulos DAB e DCB têm a mesma amplitude.

Dificuldades:

Podem surgir dificuldades em perceber como fazer a demonstração. Pode-se sugerir relembrar os critérios de igualdade de triângulos.

Discussão - 50 min

A discussão das tarefas será feita com a ida ao quadro de um aluno para resolver cada um das tarefas e com a validação da turma.

Prevê-se um momento de discussão das tarefas ao fim de 20 minutos de iniciarem a resolução, com a discussão das 3 primeiras.

O segundo momento de discussão será antes do final da aula, para se discutir as tarefas 4, 5 e 6.

Na tarefa 1, estará no quadro projetado o Geogebra com a grelha de modo a simular uma folha quadriculada. O mesmo acontecerá para a correção das outras tarefas em que seja conveniente.

Na tarefa 2, questionar-se-á se pode ser um quadrado e porquê.

Na tarefa 3, irá ser questionado qual a amplitude dos restante ângulos e qual a medida dos restantes lados e porquê.

Na tarefa 4, irá ser questionado porque é que se desenhou dessa forma (espera-se que a resposta seja: porque num paralelogramo as diagonais se bissetam e então o ponto C era o ponto médio das diagonais).

Na tarefa 5, na a) serão discutidas resoluções com as duas opções: João com razão ou Catarina com razão. Na b) questionar-se-á se esta informação confirmará a resposta da alínea anterior. Questionar-se-á se existem outras formas de resolução e, se forem válidas, serão discutidas.

Na tarefa 6, no seguimento da resolução, irá escrever-se, para os alunos copiarem: "Então, [AD] e [BC] são paralelos e geometricamente iguais.

Um trapézio com bases geometricamente iguais é um paralelogramo"

Os alunos que terminarem as tarefas antes do tempo, resolvem as tarefas 10 e 11 da página 76 do manual, que serão o TPC.

Avaliação

A avaliação dos alunos será feita tendo em conta:

- a sua participação na aula
- a realização das tarefas propostas

Anexo VI - Plano da aula de 1 de Abril

Data	1/Abril/2014	**Hora**	10:15–11:55	**Turma**	7º A
Lições nº	101 e 102	**Tema**	Geometria		
Tópicos	Quadriláteros				
Pré-Requisitos	Uso de material de desenho				
Objectivos Específicos	Fazer revistões sobre os tópicos estudados Fazer uma questão de aula				
Material	Régua; Transferidor; Ficha "Quadriláteros"; Ficha "Quadriláteros II"; Questão de aula; Manual; Material de escrita				
Metodologia de Trabalho	Trabalho a pares ou individualmente, durante a realização da ficha. Trabalho individual na resolução da questão de aula.				
Capacidades transversais a desenvolver	**Comunicação matemática** - esta capacidade será trabalhada ao longo da aula, nomeadamente na discussão das tarefas e na justificação dos resultados nas tarefas. **Resolução de problemas** - esta capacidade será trabalhada na tarefa 6 da ficha "Quadriláteros", na tarefa 2 da ficha "Quadriláteros II" e nas tarefas 4 e 6 da questão de aula. **Raciocínio matemático** - esta capacidade será trabalhada na tarefa 6 da ficha "Quadriláteros", em que os alunos são chamados a fazer uma demonstração.				
Estrutura da Aula	Duração total: 100 min 1. Início da aula - 5 min 2. Tarefa 6 da ficha "Quadriláteros"- 25 min 3. Ficha "Quadriláteros II" - 30 min 4. Questão de aula - 40 min				

Desenvolvimento da aula

1. Início da aula - 5 min

Neste espaço será escrito o sumário no quadro.

Sumário: Revisões dos tópicos estudados. Questão de aula.

- **NOTA**: Faz-se uma distinção entre dificuldades e erros. Nas primeiras são dadas sugestões aos alunos, por exemplo, na interpretação de uma pergunta. Os erros, são exatamente erros que podem ser cometidos na resolução. Sempre que detetados, sem se explicitar como se resolvem, será sugerido aos alunos que revejam a sua resolução.

Durante a resolução os alunos estarão a trabalhar autonomamente, sendo que irei circular pela sala/alunos/grupos para esclarecer eventuais dúvidas que possam surgir e certificar-me que os alunos estão a fazer a tarefa.

Durante as discussões das resoluções procurar-se-á perguntar ou pedir para ir ao quadro alunos que ainda não tenham respondido ou ido ao quadro durante esta aula.

2. Tarefa 6 da ficha "Quadriláteros"- 25 min

A discussão e resolução desta tarefa encontram-se descritas no plano de aula de 27 de Março. Os alunos terão 10 minutos para a sua realização e prevê-se 15 minutos para a discussão da mesma.

A discussão da tarefa será acompanhada por uma figura feita no Geogebra.

No início da aula será entregue uma folha quadriculada (a cada aluno) e será explicado que as tarefas podem ser feitas em pares ou individualmente e serão feitas na folha entregue. Será dada indicação de que devem fazer as resoluções a caneta, que não devem usar corretor e que, se se enganarem, devem colocar entre parentesis e continuar a resolução, não riscando o que está errado. Durante a resolução, os alunos estarão a trabalhar autonomamente, mas com o apoio da professora para eventuais dúvidas.

3. Ficha "Quadriláteros II" - 30 min

Entrega do enunciado da ficha "Quadriláteros II". Será dada indicação de que devem continuar a resolução na folha quadriculada anteriormente entregue.

Resolução - 10 min

1.Como calcularias a soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono de 8 lados?

Resolução Esperada:

nº lados =8 então

soma das amplitudes dos ângulos internos $=(8-2)\times 180^0 = 6\times 180^0 = 1080^0$

Dificuldades:

Se surgirem dificuldades, sugerir que revejam como se determina a soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono.

2. O professor da Cristina e da Andreia pediu-lhes que escrevessem uma descrição de um quadrado. As descrições foram as seguintes:

Cristina: "Um quadrado é um paralelogramo com quatro lados geometricamente iguais".

Andreia: "Um quadrado é um losango com quatro ângulos retos".

Achas que as definições delas estão ambas corretas? Justifica e explica o teu raciocínio.

(Adaptado do manual Pi 7)

Resolução Esperada:

Apenas a descrição da Andreia está correta. A descrição da Cristina não está correta pois pode-se ter um paralelogramo em que os lados são todos geometricamente iguais mas os seus ângulos internos não são retos.

Dificuldades:

Podem surgir dificuldades em perceber que não estão ambas corretas e, percebendo que a primeira está errada, em explicar a sua justificação. Sugerir que revejam as propriedades dos quadriláteros.

Discussão - 20 min

A discussão da tarefa 1 será feita com a ida ao quadro de um aluno que tenha a resposta correta (preferencialmente). A validação será feita pela turma.

A discussão da tarefa 2 será feita com a ida ao quadro de um aluno que tenha a resposta correta (preferencialmente). A validação será feita pela turma. A discussão será feita com o acompanhamento de um paralelogramo, no Geogebra, com todos os lados geometricamente iguais mas que não é um quadrado.

No seguimento da discussão das tarefas, e de acordo com o tempo disponível, será feita uma discussão sobre quadriláteros com o auxílio do Geogebra e com a intervenção dos alunos.

Os alunos que terminem as tarefas antes do tempo, fazem as tarefas 4.1 e 4.2 da página 74 do manual.

Avaliação

A avaliação dos alunos será feita tendo em conta:

- a sua participação na aula
- a realização das tarefas da ficha

4. Questão de Aula - 40 min

Será entregue o enunciado da questão de aula. Será explicado que devem fazer a questão de aula no enunciado, individualmente e que dispõe de 40 minutos. Será dada indicação de que devem fazer as resoluções a caneta, que não devem usar corretor e que, se se enganarem, devem colocar entre parentesis e continuar a resolução, não riscando o que está errado.

Durante a resolução da questão de aula, podem ser esclarecidas dúvidas de interpretação do enunciado, se surgirem.

Anexo VII - Ficha "Ângulos e Polígonos"

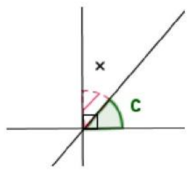
	Agrupamento de Escolas de Nuno Gonçalves	**Ano Letivo 2013/2014** **7º ano**

Ângulos e Polígonos

Grupo I - Ângulos

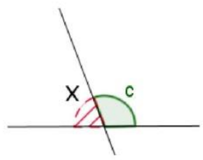
Para cada uma das figuras seguintes, encontra o valor da amplitude dos ângulos x e y, apresentando o teu raciocínio:

1.



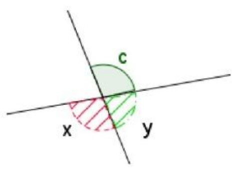
$\hat{c} = 50°$

2.



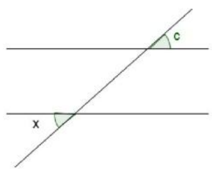
$\hat{c} = 110°$

3.



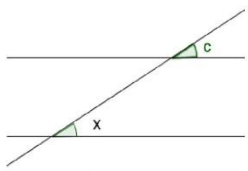
$\hat{c} = 100°$

4.



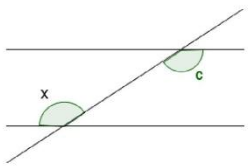
$\hat{c} = 42°$

5.



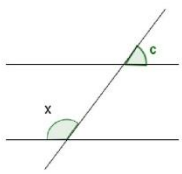
$\hat{c} = 30°$

6.



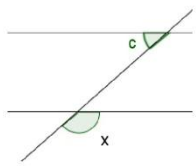
$\hat{c} = 145°$

7.



$\hat{c} = 60°$

8.



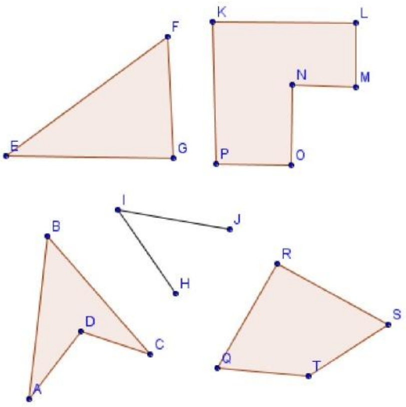
$\hat{c} = 40°$

Grupo II -Polígonos

1) Considera os polígonos da figura seguinte e indica, justificando, quais são:

a) Polígonos côncavos

b) Polígonos convexos



2) Usando o material adequado, desenha :

a) Uma linha não poligonal.

b) Uma linha poligonal fechada.

c) Um polígono convexo com 4 lados, em que um dos ângulos mede 60 graus, assinalando-o com a letra x.

d) Um polígono côncavo com 5 lados em que um dos ângulos mede 40 graus, assinalando-o com a letra x.

Bom trabalho!

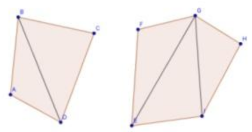
Anexo VIII - Ficha "Ângulos Internos e Externos"

Agrupamento de Escolas de Nuno Gonçalves	Ano Letivo 2013/2014 7º ano

Ângulos Internos e Externos

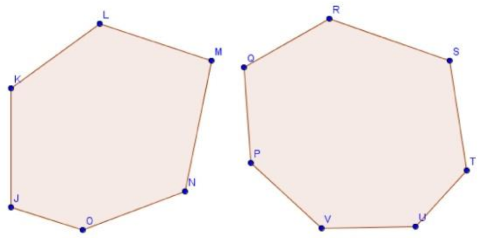
Parte I

Qualquer polígono convexo com mais de três lados pode ser decomposto, a partir de um dos seus vértices, em triângulos.



1. Considera o hexágono e o heptágono representados nas figuras.

(Adaptada do manual Π 7)



a) Divide os polígonos em triângulos, traçando, nas figuras, diagonais a partir de um dos vértices em cada polígono.

b) Preenche a seguinte tabela, tendo em conta o resultado da decomposição e tendo em conta que a **soma as amplitudes dos ângulos internos num triângulo é 180^0:**

Polígono	Número de lados	Número de triângulos que se podem formar	Soma das amplitudes dos ângulos internos
Quadrilátero	4	**2**	$\mathbf{2} \times 180^0$
Pentágono			
Hexágono			
Heptágono			
Polígono com __ lados			
Polígono com n lados			

Adiciona um polígono com mais de 7 lados

c) Considera o **caso particular** de um polígono regular:

i. Se tiver 4 lados e a soma das amplitudes dos ângulos internos for 360^0, qual será o valor da amplitude de cada ângulo interno?

ii. Se tiver 5 lados e cada ângulo interno tiver de amplitude 108^0, a soma das amplitudes dos ângulos internos poderá ser determinada por $108^0 \times$ __ =_____

Num polígono com n lados, a soma das amplitudes dos ângulos internos é ________________________ .

Num polígono **regular com *n* lados**:

- a amplitude de cada ângulo interno é: ____
- a soma das amplitudes dos ângulos internos é definida por: _________________________________

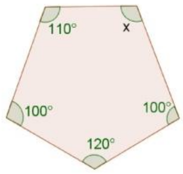
mas também se pode definir por: ____

1

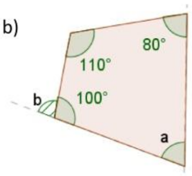
Parte II

1. Em cada alínea, encontra o valor da amplitude dos ângulos a, b e x, apresentando o teu raciocínio.

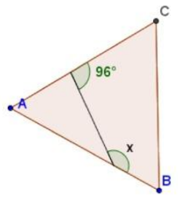
a)

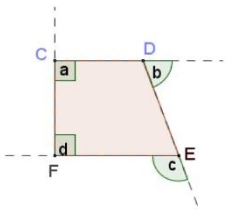


b)



2. Na figura ao lado está representado o triângulo equilátero [ABC]. Determina a amplitude do ângulo x. Explica o teu raciocínio.
(Adaptada do caderno de atividades do manual Π 7)





3. Considera o quadrilátero convexo da figura, em que [CD] e [FE] são paralelos. Qual o valor da soma das amplitudes dos seus ângulos externos? Explica o teu raciocínio.
(Adaptada do Caderno de Apoio às Metas Curriculares do Ensino Básico)

4. O João desenhou um polígono regular em que cada ângulo interno tem de amplitude 135º. De que polígono se trata? Explica o teu raciocínio.

Um ângulo interno de um polígono é um ângulo de vértice coincidente com um vértice do polígono, de lados contendo os lados do polígono que se encontram nesse vértice, tal que um setor circular determinado por esse ângulo está contido no polígono.
Um «ângulo externo» de um polígono convexo é um ângulo suplementar e adjacente a um ângulo interno do polígono.
Num polígono convexo, associando a cada ângulo interno um externo adjacente, a soma destes é _____
Um polígono é convexo quando (e apenas quando) os ângulos internos são todos convexos e, neste caso, o polígono é igual à interseção dos respetivos ângulos internos.

Bom trabalho!

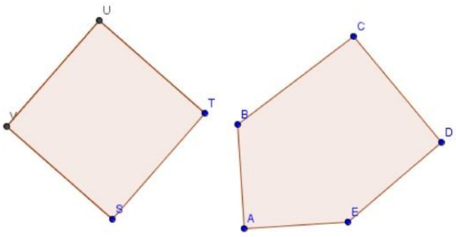
Anexo IX - Ficha "Quadriláteros e Trapézios"

Agrupamento de Escolas de Nuno Gonçalves	Ano Letivo 2013/2014 7º ano

Quadriláteros e Trapézios

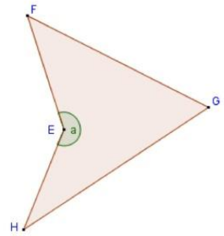
Grupo I

1. Considera os seguintes polígonos. Em cada um deles, desenha todas as diagonais possíveis.



2. Considera os **quadriláteros [ABCD] e [EFGH]** nas imagens abaixo**.** Em cada um deles, desenha todas as diagonais possíveis.

   a) Quantas diagonais tem o quadrilátero [ABCD]?
   E o quadrilátero [EFGH]?



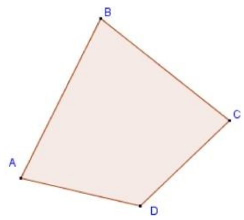
   b) As diagonais intersetam-se no quadrilátero [ABCD]?
   E no quadrilátero [EFGH]?

3. Relativamente ao quadrilátero **[ABCD]** indica:

   a) Dois lados opostos

   b) Dois ângulos opostos

   c) A soma das amplitudes dos seus ângulos internos.

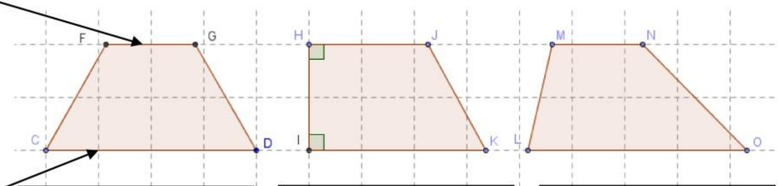


Um quadrilátero tem duas diagonais e se for convexo as suas diagonais intersetam-se num ponto interior ao quadrilátero.
Quadrilátero simples ou quadrilátero-polígono simples com 4 lados.
Diagonal de um dado polígono - qualquer segmento de reta que une dois vértices não consecutivos.

1

4. Considera os seguintes quadriláteros simples, designados de **trapézios**, em que dois dos seus lados, as bases, são paralelos. Escreve no teu caderno, em 2 ou 3 linhas, o que concluis quanto aos lados não paralelos de cada um deles.

Base



Base

a

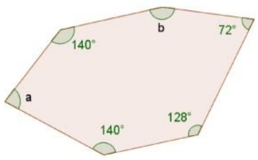
Trapézio Isósceles	Trapézio retângulo	Trapézio escaleno

Grupo II

1. Lê esta afirmação: "Desenhei no meu caderno um trapézio retângulo em que três dos seus ângulos internos têm as seguintes amplitudes: 90º, 97º e 78º". Mostra que esta afirmação é falsa. (Adaptada do manual Matemática 7)

2. Num trapézio isósceles, a medida de uma base excede em 2 cm um dos lados não paralelos e a medida da outra base excede em 4 cm o mesmo lado não paralelo. O seu perímetro é de 22 cm. Qual a medida, em cm, de cada um dos seus lados?

3. Considera o polígono com 6 lados na figura.
Determina a amplitude do ângulo a e do ângulo b, sabendo que o ângulo b tem o dobro da amplitude do ângulo a. Explica o teu raciocínio. (Adaptada do manual PI 7)



Bom trabalho!

Trapézio isósceles - os dois lados não paralelos ____

Trapézio retângulo - um dos lados não paralelos ____

Trapézio escaleno - os dois lados não paralelos ____

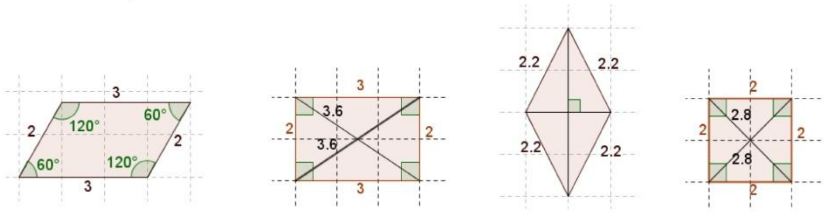
Anexo X - Ficha "Paralelogramos e Papagaios"

	Agrupamento de Escolas de Nuno Gonçalves	Ano Letivo 2013/2014 7º ano

Paralelogramos e Papagaios

Grupo I

1. Considera os trapézios nas imagens, designados paralelogramos, em que as medidas indicadas nos lados e diagonais estão em centímetros.



A B C D

a) O que podes observar quanto aos seus lados opostos?

b) No paralelogramo A, o que podes observar quanto aos seus ângulos opostos?

c) Nos paralelogramos B e D, o que podes observar quanto ao comprimento das suas diagonais?

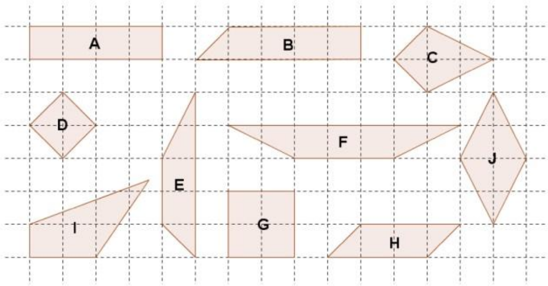
d) No paralelogramo C, o que podes observar quanto às suas diagonais?

e) Os paralelogramos B e D, quantos ângulos internos retos têm?

Grupo II

1. De entre os quadriláteros na imagem abaixo indica, pela letra correspondente, todos os:

a) trapézios não paralelogramos
b) retângulos
c) losangos
d) quadrados
e) papagaios

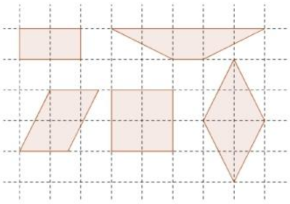


1

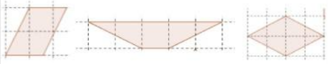
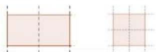
	Agrupamento de Escolas de Nuno Gonçalves	**Ano Letivo 2013/2014** **7º ano**

2. Num paralelogramo [ABCD], o ângulo interno de vértice em A tem 110 graus de amplitude. Determina a amplitude dos restantes ângulos internos. Sabendo que todos os seus lados medem 3 cm, classifica o quadrilátero. (Adaptado de Caderno de Apoio às Metas Curriculares do Ensino Básico)

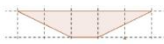
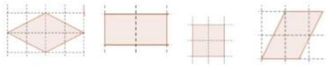
3. Os alunos João, Maria e Catarina formaram dois grupos com quadriláteros da imagem ao lado. Esses grupos estão representados abaixo:



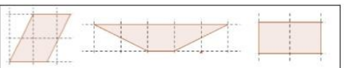
João:

Grupo A	
Grupo B	

Maria:

Grupo A	
Grupo B	

Catarina:

Grupo A	
Grupo B	

Explica em que pensou cada um dos alunos para formar estes grupos.

Bom trabalho!

Anexo XI - Ficha "Quadriláteros"

	Agrupamento de Escolas de Nuno Gonçalves	Ano Letivo 2013/2014 7º ano

Quadriláteros

1. Numa folha quadriculada desenha um segmento de reta e um ponto, como mostrado na figura 1.
   Desenha um paralelogramo que tenha como vértices os pontos A, B e C.

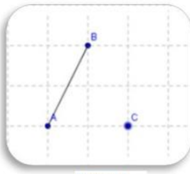


Figura 1

2. A Cristina desenhou um paralelogramo [ABCD] em que o ângulo interno de vértice em A tem de amplitude 90º. Que paralelogramo desenhou? Explica o teu raciocínio.

(Adaptado do manual Matemática 7)

3. Numa folha quadriculada desenha um paralelogramo em que dois dos lados consecutivos meçam 5 cm e 3 cm e o ângulo por eles formado tenha 50º de amplitude.

4. Na figura 2, podes ver os pontos A, B e C assinalados. Copia os três pontos para uma folha quadriculada e constrói um paralelogramo de modo que A e B sejam vértices do paralelogramo e C seja o ponto de interseção das suas diagonais.

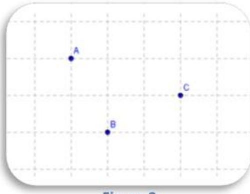


Figura 2

5. As diagonais de um paralelogramo [ABCD] intersetam-se no ponto X. Sabe-se que $B\hat{X}A = 90^{o}$.
   a. O João acha que [ABCD] é um quadrado. A Catarina não concorda e afirma que, com as informações fornecidas, apenas se pode garantir que [ABCD] é um losango. Qual dos dois achas que tem razão? Justifica a tua opinião.
   b. Sabendo que $X\hat{D}A = 60^{o}$ e $X\hat{B}A = 60^{o}$, determina as amplitudes dos ângulos CDA e DAB.

(Adaptado do Caderno de Atividades de Pi 7)

6. Considera o trapézio da figura 3, em que as bases [AB] e [CD] são geometricamente iguais.
   a. Explica porque é que os triângulos [ABD] e [BDC] são geometricamente iguais.
   b. O que podes concluir quanto às medidas dos lados [AD] e [BC]? E quanto às amplitudes dos ângulos DAB e DCB?

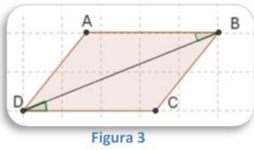


Figura 3

1

Anexo XII - Ficha "Quadriláteros II"

	Agrupamento de Escolas de Nuno Gonçalves	**Ano Letivo 2013/2014** **7º ano**

Quadriláteros II

1. Como calcularias a soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono de 8 lados?

2. O professor da Cristina e da Andreia pediu-lhes que escrevessem uma descrição de um quadrado. As descrições foram as seguintes:
   Cristina: "Um quadrado é um paralelogramo com quatro lados geometricamente iguais".
   Andreia: "Um quadrado é um losango com quatro ângulos retos".
   Achas que as definições delas estão ambas corretas? Justifica e explica o teu raciocínio.

Bom trabalho!

1

Anexo XIII - Questão de Aula

Agrupamento de Escolas de Nuno Gonçalves	Ano Letivo 2013/2014 7º ano

Número:	Nome:	Turma:	A

Duração: 40 minutos. Lê atentamente o enunciado das tarefas.
Responde às questões no enunciado, usando caneta e sem recorrer à calculadora ou corretor.
Indica **todos os cálculos** que tiveres de efetuar e **todas as justificações necessárias**.

1. Na imagem 1 encontram-se assinalados os pontos A, B e C. Constrói um paralelogramo (na imagem 1) em que A, B e C sejam 3 dos seus vértices.

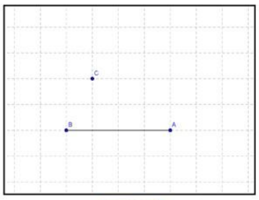
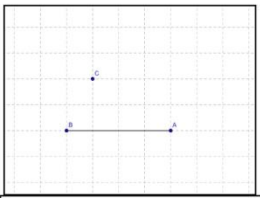


Imagem1



Para ser usado **apenas** se te enganares na imagem 1

2. Considera o quadrilátero na imagem 2, em que [EFGH] é um **paralelogramo**. Sabe-se que:

$\overline{FG}$ = 4 cm, $\overline{GH}$ = 3 cm, $\overline{FH}$ = 5 cm, $E\hat{F}G$ = 110º. Indica:

$\overline{FE}$ =______________________ $\overline{EH}$ = ______________________

$F\hat{G}H$ =______________________ $G\hat{H}E$ =______________________

$H\hat{E}F$ =______________________ $\overline{FI}$= ______________________

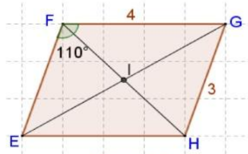


Imagem 2

3. De entre os quadriláteros na imagem 3 indica, pela letra correspondente, todos os:

a. não paralelogramos________________
b. retângulos______________________
c. losangos________________________
d. quadrados_______________________
e. papagaios_______________________

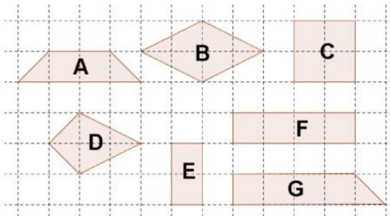


Imagem 3

4. Resolve a seguinte questão e explica o teu raciocínio:

"Sou um quadrilátero com dois pares de lados paralelos, as minhas diagonais são geometricamente iguais e formam entre si ângulos retos. Quem sou eu?"

1

5. Considera o polígono com 5 lados na imagem 4. Determina a soma das amplitudes dos seus ângulos internos.

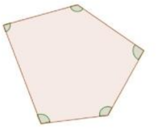


Imagem 4

6. Num quadrilátero [ABCD] sabe-se que: existem dois pares de lados paralelos, um dos lados mede 2 cm, o seu perímetro é 12 cm e um dos ângulos internos tem 60º de amplitude.
   Determina as medidas dos seus lados, em cm, e as amplitudes dos seus ângulos internos. Constrói o quadrilátero.
   Que quadrilátero construíste?

Cotações:

1	2	3	4	5	6
10	6*5 = 30	5*5=25	10	10	15

Anexo XIV - Apoio às Aulas

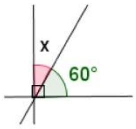
	Agrupamento de Escolas de Nuno Gonçalves	Ano Letivo 2013/2014 7º ano

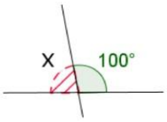
Relações entre Ângulos

Ângulo Côncavo

Um ângulo é **convexo** se a sua amplitude está entre 0º e 180º. Um ângulo é **côncavo** se a sua amplitude é maior que 180º.

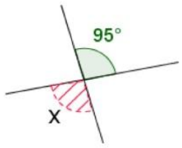
1. Dois ângulos são **complementares** se a soma das suas amplitudes é igual a um ângulo reto (90º) $\hat{x} = 90° - \_\_\_ \quad = \_\_\_$





2. Dois ângulos são **suplementares** se a soma das suas amplitudes é igual a 180º.
$\hat{x} = 180° - \_\_\_ \quad = \_\_\_$

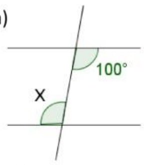
3. Dois ângulos **verticalmente opostos** têm a mesma amplitude
$\hat{x} = \_\_\_\_$



4. Se duas retas são paralelas:

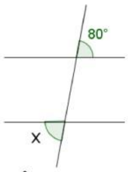
- são iguais os ângulos **alternos internos,** a), **alternos externos,** b), e **correspondentes,** c), determinados por uma reta que as corte

a)



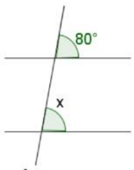
$\hat{x} = \_\_\_\_$

b)



$\hat{x} = \_\_\_\_$

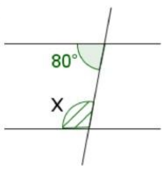
c)



$\hat{x} = \_\_\_\_$

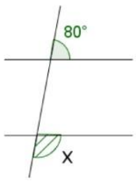
- são **suplementares** os **ângulos internos,** d), e **externos,** e), do mesmo lado de uma reta que as corte

d)



$\hat{x} = 180° - \_\_\_ \quad = \_\_\_$

e)



$\hat{x} = 180° - \_\_\_ \quad = \_\_\_$

[1]

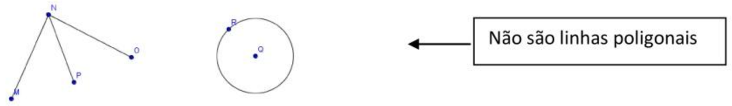
	Agrupamento de Escolas de Nuno Gonçalves	**Ano Letivo 2013/2014** **7º ano**

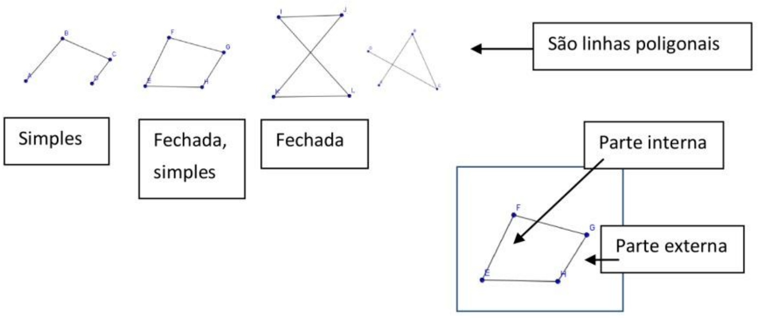
Linhas Poligonais e Polígonos

Uma linha poligonal é uma linha plana formada por segmentos de reta consecutivos (**lados**) e não alinhados. Os **lados consecutivos** partilham um extremo (**vértice**) e não existem mais de dois lados a partilhar um vértice.

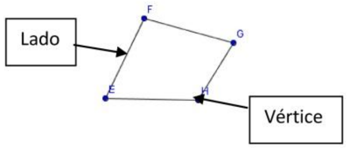
Se as extremidades da linha coincidirem, a linha diz-se **fechada**. Uma linha poligonal é **simples** se os únicos pontos comuns a dois lados são vértices.

Uma linha poligonal divide o plano numa região limitada, a **parte interna**, e numa região ilimitada, **a parte externa** da linha.





O conjunto dos pontos formado por uma linha poligonal fechada com a sua parte interna chama-se **polígono simples**.

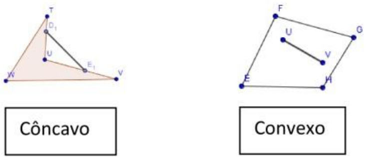


Fronteira - união dos lados

Polígono [EFGH] de lados [EF], [FG], [GH] e [HE]

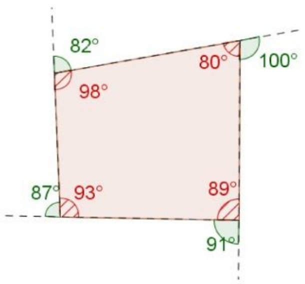
Exemplo de **vértices consecutivos**: E e F. Exemplo de **lados consecutivos**: [EF] e [FG].

Os polígonos podem ser **côncavos ou convexos**. Num polígono convexo, quaisquer que sejam dois dos seus pontos, o segmento de reta que os une está contido no polígono.



	Agrupamento de Escolas de Nuno Gonçalves	**Ano Letivo 2013/2014** **7º ano**

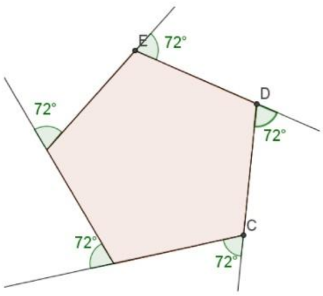
Completa os espaços que se encontram na tabela:

<table>
<tr><th>Polígono</th><th>Soma das Amplitudes dos ângulos internos e externos</th></tr>
<tr><td>


</td><td>
Número de lados = 4

Soma das amplitudes de todos os ângulos internos e externos correspondentes = 4×180^{o}

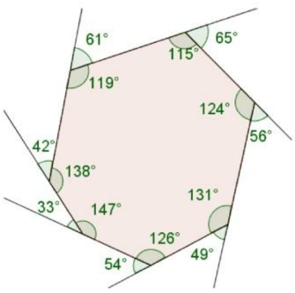
Soma das amplitudes dos ângulos internos = $(4-2)\times180^{o}$ = 2×180^{o}

Soma das amplitudes dos ângulos externos = 4×180^{o} - 2×180^{o} = 2×180^{o} = 360^{o}
</td></tr>
<tr><td>


</td><td>
Número de lados = 5

Soma das amplitudes de todos os ângulos internos e externos correspondentes = 5×180^{o}

Soma das amplitudes dos ângulos internos = $(5-2)\times180^{o}$ = 3×180^{o}

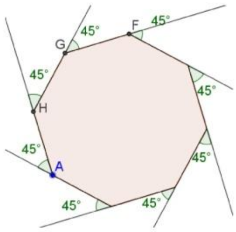
Soma das amplitudes dos ângulos externos = 5×180^{o} - 3×180^{o} = 2×180^{o} =______
</td></tr>
<tr><td>


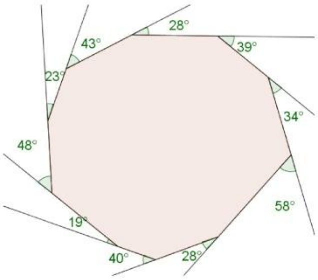
</td><td>
Número de lados = 7

Soma das amplitudes de todos os ângulos internos e externos correspondentes = 7×180^{o}

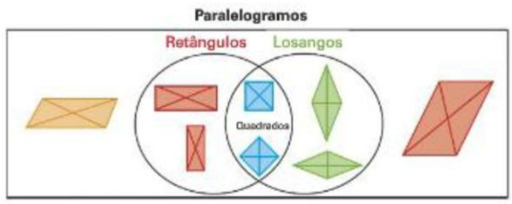
Soma das amplitudes dos ângulos internos = $(7-2)\times180^{o}$ = 5×180^{o}

Soma das amplitudes dos ângulos externos = ______ - ______ = _______ = _____
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Polígono</th><th>Soma das Amplitudes dos ângulos internos e externos</th></tr>
<tr><td>


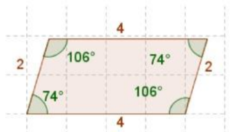
</td><td>
Número de lados = 8
Soma das amplitudes de todos os ângulos internos e externos correspondentes = 8×180º
Soma das amplitudes dos ângulos internos = ________ = _______
Soma das amplitudes dos ângulos externos = ______ - ______= ________ = ______
</td></tr>
<tr><td>


</td><td>
Número de lados = 10
Soma das amplitudes de todos os ângulos internos e externos correspondentes = _________
Soma das amplitudes dos ângulos internos = __________ = _________
Soma das amplitudes dos ângulos externos = ______________ = __________ = ________
</td></tr>
</table>



(Imagem do Manual Matemática 7)

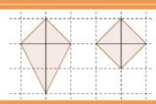
Paralelogramo	**Em todos eles: têm dois pares de lados paralelos e as diagonais bissetam-se.**
Paralelogramo Obliquângulo	Paralelogramo sem ângulos internos retos.
Retângulo	Paralelogramo com quatro ângulos internos retos. As diagonais são geometricamente iguais.
Losango	Paralelogramo com quatro lados geometricamente iguais. As diagonais são perpendiculares.
Quadrado	Paralelogramo com quatro lados geometricamente iguais e quatro ângulos internos retos. As diagonais são geometricamente iguais e perpendiculares.



Nos paralelogramos:

- os ângulos opostos têm a mesma amplitude
- dois ângulos consecutivos são suplementares
- os lados opostos são geometricamente iguais

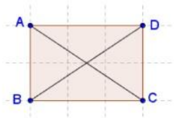
Papagaio - quadrilátero com dois pares de lados consecutivos geometricamente iguais. As diagonais são perpendiculares.



	Agrupamento de Escolas de Nuno Gonçalves	Ano Letivo 2013/2014 7º ano

Propriedades dos Paralelogramos

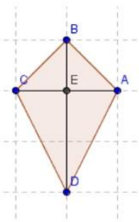
1. Observa o retângulo [ABCD] e as respetivas diagonais [AC] e [BD]. Como [ABCD] é um paralelogramo os lados opostos têm o mesmo comprimento. Então $\overline{AB} = \overline{DC}$ e $\overline{AD} = \overline{BC}$. Pelo critério Lado-Ângulo-Lado (LAL), **os triângulos [BCA] e [BAD] são geometricamente iguais pois têm um lado de igual comprimento ($\overline{AD} = \overline{BC}$), têm um lado em comum ([AB]), e o ângulo por eles formado geometricamente igual ($\hat{A}$=90º e $\hat{B}$=90º)** Como em triângulos geometricamente iguais, a ângulos geometricamente iguais se opõe lados de igual comprimento, então $\overline{BD} = \overline{AC}$.



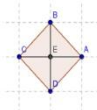
<u>Um paralelogramo é um retângulo quando (e apenas quando) as suas diagonais são geometricamente iguais.</u>

2. Considera o papagaio [ABCD] em que , $\overline{BA} = \overline{BC}$. Como, por hipótese, $\overline{BA} = \overline{BC}$, também se tem $\overline{DA} = \overline{DC}$. Assim, os pontos B e D são ambos equidistantes dos pontos A e C, pelo que pertencem à mediatriz do segmento [AC]. Logo a reta BD é a mediatriz do segmento de reta [AC].

Então, [AC] e [BD] são perpendiculares pois a mediatriz de um segmento de reta é uma reta perpendicular a esse segmento de reta.



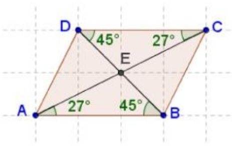
<u>As diagonais de um papagaio são perpendiculares.</u>



<u>Um paralelogramo é um losango quando (e apenas quando) as diagonais são perpendiculares.</u>

3. Observa o paralelogramo [ABCD] em que E é o ponto de interseção das diagonais:

Como [ABCD] é um paralelogramo, os lados opostos são paralelos e têm o mesmo comprimento. Logo, $\overline{DC} = \overline{AB}$ e, como DC é paralela a AB, os ângulos alternos internos DCA e BAC são geometricamente iguais, assim como os ângulos CDB e ABD. Então, pelo **critério Ângulo-Lado-Ângulo (ALA), os triângulos [AEB] e [BEA] são geometricamente iguais**. Do mesmo modo se prova que os triângulos [AED] e [BEC] são geometricamente iguais.



Como em triângulos geometricamente iguais, a ângulos geometricamente iguais opõe-se lados com igual comprimento, tem-se $\overline{AE} = \overline{EC}$ e $\overline{BE} = \overline{ED}$.

<u>Um quadrilátero é um paralelogramo quando (e apenas quando) as suas diagonais se bissetam.</u>

Anexo XV - Grelha de Observação

	7.ºA	Registo Diário - ___º Período															
N.	Nome	C	P	A/P	TPC	C	P	A/P	TPC	C	P	A/P	TPC	C	P	A/P	TPC
1																	
2																	
3																	
4																	
5																	
6																	
7																	
8																	
9																	
10																	
11																	
12																	
13																	
14																	
15																	
16																	
17																	
18																	
19																	
20																	

Legenda: ***C*** - Comportamento; **P** - Participação; ***A/P/M*** - Assiduidade/Pontualidade/Material; **TPC** - Trabalhos para casa;

Anexo XVI - Guião da Entrevista e tarefas

1. No problema 4 da questão de aula, como é concluíste que era um (polígono da resposta)?
2. No problema 6 da questão de aula, como é que encontraste os valores das medidas dos lados?
3. E como é que determinaste as amplitudes dos ângulos?
4. Nas tarefas que fizeste nas aulas por mim lecionadas, quais foram as tuas principais dificuldades?
5. Consegues dizer-me duas das tuas aprendizagens neste capítulo (dos polígonos) lecionado por mim?

E outras que surjam das suas resoluções.

Tarefas da entrevista:

1. Desenhei um quadrilátero com dois pares de lados paralelos, as suas diagonais são perpendiculares e geometricamente iguais, que quadrilátero desenhei?

2. Num paralelogramo [ABCD] 3 dos seus ângulos internos têm as seguintes amplitudes: 100º, 100º e 60º. Será que é verdade?

Anexo XVII - Autorizações

Ex.ª Sra. Professora Laurinda Pereira,

Diretora do Agrupamento de Escolas Nuno Gonçalves

Eu, Isabel Regina Gonçalves Magalhães, aluna do Mestrado em Ensino da Matemática do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, estando a realizar a minha intervenção de prática letiva supervisionada na turma A do 7.º ano de escolaridade, no ano letivo 2013/2014, sob a orientação da professora Helena Fonseca, venho, por este meio, solicitar autorização para desenvolver, neste âmbito, um trabalho de investigação que integrará o meu relatório final.

O principal objetivo deste trabalho é analisar a resolução de problemas envolvendo figuras geométrias. Para a sua realização, necessito recolher dados através da gravação áudio de aulas onde se discuta a resolução de probelmas e da realização de entrevistas a alunos.

O desenvolvimento desta investigação não interfere com o normal funcionamento das atividades letivas e não traz qualquer prejuízo para os participantes, estando garantida a confidencialidade dos dados recolhidos e o anonimato dos alunos em posteriores divulgações da investigação realizadas no âmbito do Mestrado.

Irei, ainda, proceder ao pedido de autorização dos Encarregados de Educação dos alunos para a referida recolha de dados.

Agradeço, desde já, a colaboração,

Lisboa, 14 de Janeiro de 2014

____

Exmo. Sr.(a) Encarregado(a) de Educação

Eu, Isabel Regina Gonçalves Magalhães, pretendo desenvolver um trabalho de investigação, no ano letivo 2013/2014, no âmbito do relatório da prática supervisionada para obtenção do Mestrado em Ensino da Matemática que me encontro a concluir no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. O principal objetivo deste trabalho é analisar a resolução de problemas envolvendo figuras geométricas sendo que, na sua realização, necessito recolher dados através da gravação áudio de aulas onde se discutam a resolução de problemas e da realização de entrevistas a alunos. O desenvolvimento do trabalho não interfere com o normal funcionamento das atividades letivas e não traz qualquer prejuízo para os alunos. Ao abrigo da Lei 67/98 de 26 de Outubro, será garantida a confidencialidade dos dados recolhidos e o anonimato de todos os alunos em posteriores divulgações da investigação realizadas no âmbito do Mestrado.

Solicito, assim, autorização para implementar o trabalho de investigação anteriormente descrito através do preenchimento da declaração em anexo.

Agradeço, desde já, a sua colaboração,

Lisboa, 20 de Fevereiro de 2014

A Professora

____

AUTORIZAÇÃO

Eu,____,
encarregado de educação do(a) aluno(a) ____, n.º ____, da turma A do 7.º ano, declaro que tomei conhecimento dos objectivos do trabalho de investigação desenvolvido pela Isabel Magalhães no âmbito do seu trabalho de Mestrado e da necessidade da respectiva recolha de dados. Autorizo a participação do meu educando com a garantia do respectivo anonimato.

__________________, ____/01/2014

O(a) Encarregado(a) de Educação

____