Estruturas em Ciência

Edição de 2014 do

Compêndio em Linha de Problemas de Filosofia Analítica

2012-2015 FCT Project PTDC/FIL-FIL/121209/2010

Editado por
João Branquinho e Ricardo Santos

ISBN: 978-989-8553-22-5

Resumo

Este trabalho destaca o papel das estruturas matemáticas no estudo das teorias científicas, em especial das teorias da física. Identificamos a contraparte matemática de uma teoria científica com uma determinada estrutura abstrata, que descreve abstratamente os modelos da teoria, ou seja, as estruturas "concretas" às quais a teoria se aplica. Estas fornecem a contraparte empírica das teorias, e a noção de verdade assumida é a de *quase-verdade*. A tese é a de que a atividade científica, sendo uma atividade conceitual, se vale da noção de estrutura para organizar os conceitos que o cientista assume como primitivos (ainda que inconscientemente), e que elas servem de instrumento epistemológico para se alcançar o conhecimento em certos domínios. Destaca-se então uma nova forma de realismo estrutural, que denominamos de realismo estrutural *gnosiológico*. A base matemática na qual essas estruturas são erigidas é levada em consideração, o que não é comum nas discussões filosóficas usuais.

Palavras-chave

Realismo estrutural gnosiológico, estruturas conjuntistas, teorias científicas, quase-verdade, mecânica quântica

Abstract

This work emphasizes the role of mathematical structures in the study of scientific theories, in particular in the theories of physics. We identify the mathematical counterpart of a scientific theory with a certain abstract mathematical structure that describes the models of the theories, that is, the "concrete" structures to which the theory applies. These ones provide the experimental counterpart of the theories, and the assumed notion of truth is that of *quasi-truth*. The thesis of the paper is that the scientific activity, being a conceptual activity, makes use of the notion of structure in order to organize the concepts the scientist assumes as primitive (although sometimes unconsciously), and that act as an epistemological tool in certain domains. Then we enlighten a new form of structural realism, termed *gnosiological*. The mathematical basis where such structures are built is also taken into account, something that is not common in the standard approaches.

Keywords

Gnosiological structural realism, set-theoretical structures, scientific theories, quasi-truth, quantum mechanics

Estruturas em Ciência

1 Ciência: atividade conceitual

Suponha que desejamos investigar um domínio do conhecimento que chamaremos de D, nas ciências empíricas, humanas ou mesmo da matemática, como por exemplo a aritmética usual, um determinado gás, uma população de peixes ou o que consideramos um possível domínio da mecânica quântica não relativista (em princípio, o que diremos aplica-se a todas essas áreas, mas nos restringiremos principalmente à matemática e à física, com apenas um exemplo em biologia). Para abordar D, selecionamos, a partir de nossa experiência, conhecimentos prévios, intuição, o que quer que seja, uma coleção de *conceitos* que, em nossa opinião de cientista, refletem o que se passa em D, ao menos parcialmente, e sob um determinado ponto de vista. Na aritmética, é comum tomarmos os conceitos de número natural, zero e de sucessor de um número natural como primitivos; no estudo dos gases, podemos nos valer dos conceitos da mecânica dos fluidos e da termodinâmica; no estudo de peixes, podemos usar os conceitos de temperatura, gene, organismo, mutação, espécie (esses conceitos, com efeito, podem ser derivados de outros tomados como primitivos); na mecânica quântica não relativista, as formulações mais comuns valem-se dos conceitos de estado, observável, probabilidade, dentre outros.[1] Esta escolha de conceitos básicos tem muito a ver com a *expertise* do cientista e com o uso, mesmo que inconsciente, do método axiomático, mas conjecturamos mais: mesmo em uma área na qual o método axiomático ainda esteja para ser aplicado, procedemos da mesma forma. Um exemplo típico são as teorias da física atual, como as teorias quânticas de campos (QFT, para *quantum field theory*(*ies*)), as teorias de cordas, etc., que ainda não foram axiomatizadas adequadamente, mas nelas procede-se exatamente do mesmo modo, isto é, conceitualmente.

Há dois modos de se entender uma estrutura conceitual como as exemplificadas. Podemos ter uma “estrutura concreta”, dizendo

[1] De forma alguma estamos afirmando que os conceitos exemplificados em cada exemplo dado são suficientes para uma abordagem adequada ao campo. Constituem apenas *possíveis* exemplos.

Publicado pela primeira vez em 2014

respeito a um determinado domínio do saber e pressupondo o conhecimento desse domínio. Por exemplo, suponha que um biólogo esteja estudando uma determinada população de peixes de um determinado trecho de um riacho. Há muitos fatores envolvidos além daqueles "gerais" que se aplicam a outros domínios e a este em particular, como os de espécie, de salinidade, etc. Mas *naquele* estudo, várias coisas são levadas em conta especificamente em função das condições do local escolhido, como parece óbvio (as condições da mata ciliar, a quantidade de agrotóxico jogada na água, etc.). Ou seja, uma determinada estrutura conceitual, como uma teoria sintética da evolução (ver abaixo), pode estar *instanciada*, modelando uma determinada realidade. Assim, o cientista se vale em geral de vários conceitos que não precisa especificar, pois os pressupõe como dados *a priori*, de forma que, se for "estruturar" a sua análise, vai congregar apenas aqueles conceitos que dizem respeito ao domínio particular em estudo. Por exemplo, a mecânica usual vale-se de vários conceitos "emprestados" da matemática (e outros criados para este fim), como os de função, derivadas e integrais, que podem ser todos pressupostos como dados em alguma matemática que esteja por trás do desenvolvimento específico, no caso, uma teoria de conjuntos (este é, aliás, o procedimento de Suppes (2002), que evitando ter que descrever todos os detalhes lógicos e matemáticos das teorias científicas de que tratou, como queriam os positivistas lógicos, simplesmente *assumiu* que eles podiam ser colhidos na matemática subjacente).

Uma outra forma de ver essas estruturas é do ponto de vista abstrato, e isso importa principalmente para o estudo das próprias estruturas e das teorias científicas, ou seja, para o *meta* estudo da ciência, essencial para quem faz filosofia da ciência. Uma estrutura de um determinado campo, como aquela da população dos peixes do nosso riacho, pode ganhar uma certa *autonomia*, para empregar uma palavra cara a Popper (em sua teoria dos três mundos), e ser abstraída do domínio particular a que foi inicialmente proposta. A teoria dos espaços vetoriais, por exemplo, originada de nossa concepção intuitivas de vetores geométricos, pode ser aplicada a um sem número de outras situações, como matrizes, funções, polinômios, etc.; uma teoria sintética da evolução como a apresentada abaixo, foi usada para modelar a "evolução" de certas "populações" descritas computacionalmente, como hoje em dia é comum em computação biológica. Assim, temos não somente as estruturas "concretas", que dizem respeito a domínios particulares, mas "abstratas", que podem ter várias instâncias ou modelos.

Do ponto de vista dos fundamentos da ciência, nesta segunda acepção os conceitos são abstraídos de sua "concretude" e podem ser organizados, pelo menos em princípio, na forma de uma *estrutura matemática*, a qual postulamos capta aspectos de D. Assim, mesmo que "organismo" seja um conceito que tenha origem nas entidades biológicas, nada impede que adquira uma outra conotação, ou que instancie entidades de outra natureza, como "organismos cibernéticos", programas de computador – como se sabe, há simulações computacionais de teorias da biologia. Importante observar que, fazendo isso, fazemos um *recorte* de D, captando (pelo menos é o que pressupomos) *aspectos* de D, deixando de lado muitas outras coisas. Por exemplo, o caso mencionado abaixo da mecânica de partículas foi criticado por Clifford Truesdell e outros pelo fato de haver deixado de lado a mecânica dos corpos elásticos, algo que os proponentes não se propuseram a fazer (para uma discussão e referências, ver Krause (2002: §2.3)). Assim, há uma inter-relação entre as estruturas concretas e as abstratas, mas o que importa é que nossa *estrutura* é algo que virá parcialmente *substituir* D em certa medida e para certos propósitos. Em uma disciplina ainda não "fechada" que esteja ainda "sendo feita" (como muitas das QFTs), uma estrutura pode rapidamente ceder lugar a outra mais "adaptada" ao campo; como disse Imre Lakatos, na matemática informal (assim como na física), há heurística, o que para ele desaparece nos sistemas axiomatizados (Lakatos 1976).[2]

Por exemplo, uma sistematização simplificada da mecânica clássica de partículas, MCP, (seguindo a linha proposta por McKinsey, Sugar e Suppes – ver Suppes 2002), pode ser alcançada a partir dos conceitos de *partícula* (ou "ponto material"), *massa* (de uma partícula), *posição* de uma partícula em um instante de tempo, *forças* (que atuam sobre uma partícula em um determinado instante de tempo), e de um intervalo T de números reais, que desempenha o papel de *interva-*

[2] Este tema é interessante e daria um artigo por si só. Uma vez axiomatizada, uma teoria fica "fechada", pois podemos dizer, seguindo Lakatos, que todo o conteúdo informacional dos teoremas já se acha implícito nos axiomas, que só nos resta descobrir. Ou seja, não se criaria *informação nova* alguma.

lo de tempo. Uma força i que age sobre uma partícula p no instante t é denotada por $\boldsymbol{f}_i(p,t)$, o negrito indicando que se trata de uma grandeza vetorial. Sendo m uma função que associa um número real positivo a cada elemento de P, então dizemos que $m(p)$ denota a massa da partícula p. A posição de uma partícula p em um instante de tempo t é dado por uma função vetorial $\boldsymbol{s}(p,t)$, que é um vetor no espaço euclidiano R^3 (o negrito indica que $\boldsymbol{s}$ é também uma função vetorial). À medida em que t varia continuamente em T, $\boldsymbol{s}(p,t)$ descreve uma curva – supostamente contínua – no espaço R^3, que representa a *trajetória* da partícula no período de tempo considerado. Isto posto, podemos condensar isso tudo na forma de uma *estrutura* posta como uma quíntupla ordenada MCP $= \langle P, T, m, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{f}\rangle$. Esses conceitos são sujeitos a determinados postulados, que nos dão o seu caráter operacional; em síntese, os postulados são os seguintes: (1) a função $\boldsymbol{s}(p,t)$ é duplamente diferenciável em relação ao tempo, ou seja, para toda partícula p, podemos obter as derivadas $\mathrm{d}\boldsymbol{s}/\mathrm{d}t$ e $\mathrm{d}^2\mathbf{s}/\mathrm{d}t^2$, as quais representam, respectivamente, a velocidade $\boldsymbol{v}(p,t)$ e a aceleração $\boldsymbol{a}(p,t)$ da partícula p no instante t; (2) a série $\sum_{\mathrm{i}=1,2,\ldots}\boldsymbol{f}_i(p,t)$ deve ser absolutamente convergente, ou seja, mesmo que haja uma infinidade de forças, a soma é finita e independe da ordem em que as forças são consideradas. O fato de $\boldsymbol{s}$ ser duplamente diferenciável garante que haja sentido falar em trajetória, como fizemos acima. O postulado (3) é a famosa segunda lei de Newton, a saber, força é igual a massa vezes aceleração, ou seja, $\sum_{\mathrm{i}=1,2,\ldots}\boldsymbol{f}_i(p,t) = m(p).\,\boldsymbol{a}(p,t)$. Outros postulados são apresentados, mas não nos interessam aqui.

A partir desse esquema, podemos introduzir por definição vários outros conceitos que nos auxiliam a desenvolver nossa versão da referida mecânica, como os de *energia cinética*, *energia potencial*, dentre outros. Para grande parte das aplicações, é adequado estender o esquema acima de forma a incorporar a distinção entre forças internas que as partículas exercem uma sobre as outras e as forças externas, que agem sobre as partículas do sistema, tendo origem (como o nome sugere) externa ao sistema (uma abordagem mais rigorosa encontra-se em Suppes 2002). A estes novos conceitos são impostas outras condições, seja por axiomas adicionais, seja por meio de definições, as quais podem, por exemplo, representar as demais leis de Newton. A mecânica que se obtém, muito propriamente, denomina-se de *mecânica de partículas newtoniana.* As estruturas "concretas" de

MCP, que podem ser ditas serem os modelos da teoria determinada por esta estrutura (e seus axiomas) são os casos particulares de mecânicas de partículas, como gases, o sistema solar ou inúmeros outros.

Um outro exemplo no campo da biologia (para detalhes, ver Magalhães and Krause 2001, 2006). A teoria da seleção natural de Darwin e Wallace forneceu, entre outras coisas, uma explicação para as transformações dos seres vivos ao longo do tempo e para a origem das adaptações biológicas. Essa teoria é reconhecidamente uma das principais fontes do moderno pensamento biológico. Apesar de sua aceitação ter sido problemática no início, ao final do século XIX a evolução dos seres vivos já era aceita pela maioria dos cientistas. No início do século XX, os primeiros geneticistas aderiram ao paradigma evolutivo e, quando o fizeram, criaram uma nova teoria. O desenvolvimento da genética, especialmente da genética de populações, a melhor compreensão do mecanismo das mutações e os primeiros estudos sobre a variabilidade presente nas populações, permitiram o desenvolvimento da chamada 'teoria sintética' ou 'neodarwinismo', que viria a integrar também os outros ramos da biologia. Essa teoria, com importantes modificações, é ainda a visão predominante.

Uma *teoria sintética da evolução* pode ser vista como uma estrutura da forma TSE $= \langle B, G, \equiv, =_{loc}, ¥_m, E, \phi \rangle$ congregando os seguintes conceitos:

1. B é um conjunto finito cujos elementos são chamados *entidades biológicas*, que podem ser conjuntos de genes, de cromossomos, células, organismos, populações, etc.
2. G é um subconjunto não-vazio de B, cujos elementos são chamados de *genes*;
3. $\equiv$ é uma relação de equivalência sobre G (*indistinguibilidade genética*);
4. $=_{loc}$ (*identidade de loci*) é igualmente uma relação de equivalência sobre G;
5. $¥_m$ denota, para cada número natural m não nulo, uma relação binária sobre B, denominada de *ancestralidade de ordem m* (por exemplo, se $m=1$, falamos em pais; se $m=2$, em avós e assim por diante).
6. E é um conjunto não vazio cujos elementos são chamados *fatores ambientais*;

7. ϕ é uma função de B no conjunto dos reais positivos. Para cada x em B, $\phi(x)$ indica a *aptidão* de x para deixar descendentes. Postulados adequados regem o funcionamento desses conceitos, e a estrutura acima modela vários campos da biologia, como é bem sabido.

Esses exemplos ilustram a tese de que a atividade científica é uma atividade conceitual. Como disse Hilbert,

> O objetivo de qualquer ciência é, antes de tudo, estabelecer uma rede de conceitos baseados em axiomas os quais foram naturalmente sugeridos pela *intuição e experiência*. Idealmente, todos os fenômenos de um dado domínio aparecerão de fato como parte dessa rede conceitual e todos os teoremas que podem ser derivados dos axiomas encontrarão expressão em tal domínio (*apud* Corry 2004a: 124).

Assim, estruturas como as exemplificadas são postas para fazer o papel de um certo domínio sob investigação, e o substitui em nossas investigações. A estrutura abstrata, que congrega todas as estruturas concretas do mesmo tipo, passam a constituir as nossas possíveis "realidades", ao menos do ponto de vista da teoria adotada. Há portanto uma enorme simplificação do assunto; por exemplo, MCP não leva em conta o choque de partículas, o que necessita de outro tipo de estrutura, típica da *mecânica do contínuo*. A teoria sintética da evolução não leva em conta a biologia molecular, a aritmética usual não considera a estrutura mais fina dos números reais, a estrutura de espaço vetorial não envolve noções métricas, etc. Assim, dependendo do que desejamos congregar em nossa abordagem, diferentes estruturas (teorias) podem e devem ser consideradas, por exemplo, sair da aritmética para a teoria dos reais, acrescentar um produto interno à estrutura de espaço vetorial, etc.

Vários filósofos se acercaram de ideias parecidas sobre este papel epistemológico da noção de estrutura, como Popper (2002), e este tipo de abordagem parece assentada em nossa tradição filosófica sobre a ciência. Elaboramos conceitos, e as estruturas resultantes nos auxiliam a conjecturar o que entendemos (ao menos parcialmente) ser a (suposta) realidade que nos cerca, e os experimentos que realizamos nos dão garantia de que, em grande medida, nossas estruturas conceituais estão dando conta do recado. Há portanto um forte componente epistemológico na noção de estrutura, tal como posta acima. Claro está para o filósofo da ciência que muitos problemas e questões surgem de imediato, como qual o conceito de verdade utilizado, o significado da noção de 'realidade' empregado, etc. Na nossa opinião, nenhuma abordagem, seja de que teoria for, pode ser provada corresponder à *realidade* em si, seja lá o que entendamos por isso. Parodiando Newton da Costa, talvez possamos dizer que a filosofia pode buscar a *verdade*, mas a ciência só alcança a *quase-verdade* (sobre este conceito, consultar da Costa and French 2003). Quanto à noção de realidade, pensamos que só faz sentido falar de uma realidade, ou de uma ontologia, associada a uma teoria de acordo com uma possível interpretação. Reciprocamente, não cremos que haja a possibilidade de se analisar o mundo, em qualquer sentido deste termo, fazendo *tabula rasa*, independente de alguma concepção teórica, ou seja, conceitual, mas fazemos isso sempre sob o ponto de vista de alguma concepção prévia, ainda que ela possa vir a ser alterada no percurso. Falando em física, nenhuma teoria física determina sua ontologia, pois pode-se, pelo menos em princípio, associar ontologias diversas a uma mesma formulação matemática, caso típico da mecânica quântica não relativista. Assim, de certo modo nunca sabemos exatamente do que estamos falando, pois podemos não ser capazes de diferenciar uma ou outra estrutura "concreta" que exemplifica uma determinada estrutura abstrata, por exemplo, se nossa teoria for uma teoria elementar (de primeira ordem) e as estruturas forem elementarmente equivalentes (e, adaptando Bertrand Russell, também não podemos saber se aquilo que afirmamos é "verdadeiro" mas, quando muito, somente se é *quase-verdadeiro*).

Importante salientar que nem todas as teorias (estruturas) consideradas científicas se originam de análises de domínios, como sugerimos acima. Há aquelas que poderíamos chamar de 'teorias da poltrona' (*armchair theories*), produto da pura especulação intelectual, ainda que possam ter motivação em domínios empíricos. Um exemplo seria o das teorias de cordas, as supersimetrias (pelo menos por enquanto) e outras elaborações recentes que não tiveram ainda qualquer comprovação experimental (Greene 2001).[3] Isso não importa para o que estamos pretendendo esclarecer: que o nosso conheci-

[3] O leitor ganhará muito se acompanhar a discussão em Ellis and Silk 2014. Os autores discutem uma tendência atual de considerar como teorias aceitas em física mesmo aquelas que não têm comprovação experimental.

mento, mesmo que "puramente teórico" se dá por meio da elaboração de determinadas estruturas conceituais, que pelo menos em princípio podem ser coligidas na forma de uma estrutura matemática como as aqui exemplificadas. Essas estruturas abstratas descrevem as teorias científicas de modo alternativo, e sua apresentação equivale à sistematização dessas teorias; note-se aqui que esta abordagem é mais geral que a aplicação do método axiomático, pois podemos congregar conceitos em estruturas "concretas", dizendo respeito a domínios específicos, mesmo sem apresentar os axiomas respectivos, deixando que a interpretação dos conceitos forneça o seu significado operacional. Aliás, é deste modo que procede o cientista em geral, que via de regra não axiomatiza as teorias que usa no campo que está estudando.

2 Questões de fundamentos

A primeira coisa a observar é que não é possível sistematizar um corpo do conhecimento por meio de uma teoria como as acima sem o recurso da matemática. O físico norte-americano Leonard Susskind fala algo neste sentido a respeito da mecânica quântica. Diz ele:

> Há uma razão óbvia pela qual a mecânica clássica [que encerra a MCP acima] é intuitiva: os humanos, e os animais antes deles, a vêm usando muitas vezes todos os dias para sua sobrevivência. Mas ninguém havia utilizado a mecânica quântica antes do século XX. A mecânica quântica descreve coisas tão pequenas que elas estão completamente além da escala dos sentidos humanos. Isso mostra porque não desenvolvemos uma intuição para o mundo quântico. O único meio pelo qual podemos compreendê-lo é reescrevendo nossas intuições por meio da matemática abstrata. Por sorte, e por alguma estranha razão, desenvolvemos a capacidade para tal reescrita (Susskind and Friedman 2014: XIX).[4]

Mesmo nas ciências humanas, onde aparentemente a matemática não desempenharia papel tão preponderante, ela aparece (para além do uso de estatísticas, algo imprescindível em boa parte dessa área) implicitamente caso desejemos tratar de seus fundamentos, como mostrou Patrick Suppes em várias ocasiões, quando a noção de estrutura

[4] O interessante é que, na medida em que a mecânica quântica vai invadindo as demais áreas, como no caso da biologia, certamente a matemática abstrata se fará ainda mais presente nesses domínios. Sobre a biologia, ver a resenha de Lambert et al. 2013.

é (ao que tudo indica) necessariamente invocada (ver os artigos de Bachelder and Wexler e de Jamilson em Bogdan 1979, que descrevem o trabalho de Suppes na aplicação do método axiomático às ciências humanas). No entanto, não é esta a nossa finalidade neste artigo. O que desejamos, uma vez que concordemos no papel preponderante desempenhado pela noção de estrutura matemática na sistematização do nosso saber científico, é também chamar a atenção, e colocar os detalhes para uma discussão posterior, sobre o papel do aparato matemático utilizado para a elaboração do conceito de estrutura. Este é um ponto que tem sido muito pouco (ou nunca) discutido na literatura. Vejamos do que se trata.

O que se entende por uma estrutura no sentido acima? Primeiramente deve-se aceitar que se trata de uma *estrutura matemática*. Mas, o que é isso? *Grosso modo*, e pelo menos em princípio, uma estrutura é uma n-upla ordenada composta por um ou mais conjuntos, por relações e/ou operações (funções) sobre os elementos desses conjuntos. Ainda que haja arcabouços matemáticos alternativos para a elaboração de tais estruturas, como as lógicas de ordem superior (como usadas por Carnap (1958)) ou a teoria de categorias (Mac Lane 1971, e Geroch 1985 para o caso da física), o mais comum é a utilização do conceito de conjunto. Com efeito, na esquematização acima da MCP, fizemos uso das noções de conjunto (o conjunto P, o intervalo T), funções, derivadas e de várias outras coisas. Fixemo-nos pois na noção "conjuntista" de estrutura.

O conceito abstrato de estrutura surge no século XIX (Corry 2004b), e foi incrementado e desenvolvido para (praticamente) todas as áreas da matemática por Nicolas Bourbaki (2006) na primeira parte do século XX.[5] Para Bourbaki, a matemática é a ciência da estrutura, a disciplina que desenvolve e estuda estruturas abstratas no sentido descrito por ele; todas as estruturas (conhecidas) da matemática usual são certas combinações de *estruturas mães*, as algébricas, as de ordem e as topológicas. Assim, os números reais, por exemplo,

[5] Há áreas da matemática atual (já existentes na sua época) que não foram tratadas por Bourbaki, como a teoria dos números e a teoria de categorias, curiosamente surgida com um de seus membros, Samuel Eilenberg – lembramos que 'Nicolas Bourbaki' é o pseudônimo de um grupo de matemáticos, principalmente franceses, que tinham o objetivo esclarecer as estruturas fundamentais da matemática. Para uma visão geral do seu trabalho, consultar Mashaal 2006.

constituem um corpo (estrutura algébrica) ordenado (estrutura de ordem) completo (estrutura topológica). No entanto, *onde* essas estruturas são elaboradas? Há alguma importâncias em considerar este ponto? Veremos abaixo que as respostas a essas questões são relevantes e importantes, mas pelo que sabemos nunca foram levadas em conta seriamente.

A resposta à primeira pergunta, em se tratando de estruturas conjuntistas, parece óbvia: elas são erigidas na teoria de conjuntos. Mas, tendo em vista que não há *a* teoria de conjuntos, mas (potencialmente) uma infinidade delas, com propriedades distintas, a pergunta é pertinente. Ou seja, se há várias teorias e se elas apresentam propriedades distintas, parece que considerar distintas teorias de conjuntos pode sim ser relevante não somente para alcançarmos as estruturas matemáticas que nos interessam, mas igualmente para as estruturas científicas. Vejamos isso com mais vagar.

3 O alicerce lógico

Em matemática, parece não haver dúvida de que o alicerce matemático importa para o tipo de estrutura que desejamos considerar. Para as estruturas "comuns", como grupos, anéis, variedades, geometrias, etc., ZFC basta (Zermelo-Fraenkel com o Axioma da Escolha). Mas se quisermos considerar uma estrutura do tipo $\mathcal{V} = \langle V, \in \rangle$ que seja um "modelo" para ZFC, sendo V o universo de von Neumann (veja Jech (2003) para detalhes), ZFC, suposta consistente, não é suficiente. Com efeito, se erigíssemos uma estrutura como $\mathcal{V}$ no âmbito de ZFC, estaríamos provando sua consistência (existência de um modelo) na própria ZFC, o que vai de encontro ao segundo teorema de incompletude de Gödel. Para termos (formalmente) $\mathcal{V}$, necessitamos de algo "mais forte" do que ZFC, como uma teoria de universos ou que, por exemplo, postule a existência de um cardinal inacessível (deixaremos os detalhes técnicos de lado).

Um outro exemplo. Suposta consistente,[6] ZFC não admite a existência do chamado *conjunto de Russell*, a saber, o "conjunto"

[6] De acordo com a lógica clássica, se uma teoria não for consistente, nela podemos demonstrar qualquer proposição formulada em sua linguagem. Assim, para assumirmos que "algo" formulável por uma fórmula de sua linguagem não

$\mathcal{R} = \{x \notin x\}$. É fácil ver que se em ZFC admitirmos a existência do conjunto de Russell, seremos conduzidos a $\mathcal{R} \in \mathcal{R} \leftrightarrow \mathcal{R} \notin \mathcal{R}$, o que no contexto da lógica clássica conduz a uma contradição. Assim, se quisermos manter o conjunto de Russell, não podemos manter a lógica (teoria de conjuntos) clássica; as teorias *paraconsistentes* de conjuntos fornecem o que é necessário (da Costa et al. 2007). O "conjunto" de Russell aparece, por exemplo, na conceituação informal de conjunto; um conjunto de gatos não pertence a si próprio, porque não é um gato. Mas certamente o conjunto dos gatos pertence ao conjunto de Russell. Assim, ele faz sentido. Outro exemplo, relacionado com a física quântica, será mencionado abaixo.

Uma questão parece se impor: se usamos alguma matemática, como podemos saber que os conceitos que necessitamos (por exemplo, certos conjuntos) estão realmente ao nosso dispor? O cientista comum, e não ocupado com fundamentos, age em geral como se "tudo" o que ele necessita, como funções, ou certos conjuntos possuindo propriedades interessantes, estivesse ao seu alcance. Aparentemente, nenhum cientista, ou mesmo um matemático, se deparará com o conjunto de Russell, e por isso questões "periféricas" como a existência do referido conjunto, parecem estar fora de questão.[7] Do ponto de vista formal, a existência de certos conjuntos pode depender de hipóteses extremamente fortes. Uma teoria informal de conjuntos (não axiomatizada), é em geral inconsistente, e isso importa para estudos fundacionistas; as teorias axiomatizadas, se consistentes, têm limitações e "nem tudo" pode ser definido em seu escopo, como exemplificado acima.

Assim, se quisermos ser mais rigorosos, devemos assumir que trabalhamos em *alguma* teoria de conjuntos (ou em algum *modelo* de uma teoria de conjuntos) como ZFC, e ficaremos sujeitos ao que tal teoria pode nos fornecer; salientemos que a noção de conjunto não é absoluta, a mesma em qualquer contexto. O "conjunto" de Russell é

pode ser obtido em seu escopo, temos que assumir sua consistência. A consistência de ZFC pode ser demonstrada somente *relativamente* a alguma outra teoria, como as que estamos mencionando no texto.

[7] Isso é evidentemente falacioso, pois nunca saberemos o que será demandado pela ciência ou pela matemática. Relembramos as críticas de Poincaré e outros à teoria de conjuntos de Cantor.

um *conjunto* (lícito) em certas teorias paraconsistentes de conjuntos,[8] mas não é licito (não é um "conjunto"), por exemplo em ZFC (suposta consistente). Assim, se estivermos em ZFC, não podemos contar com algo como o conjunto de Russell entre seus elementos (desde que ela seja consistente). Mas, no escopo de ZFC, podemos contar com praticamente tudo o que desejamos para a chamada 'matemática do dia a dia' que se usa em física, pelo menos nas teorias físicas usuais. Vamos então inicialmente supor que estamos trabalhando com (em) ZFC; mais abaixo faremos considerações sobre outras teorias.

Para simplificar, vamos considerar estruturas com um único domínio não vazio D (nada impede que ele seja a união de vários conjuntos). Ademais, suporemos que há somente relações envolvidas, já que as operações (funções) podem ser consideradas como relações especiais, como se sabe de qualquer livro de lógica (do mesmo modo, elementos distinguidos podem ser subsumidos neste esquema). As estruturas que interessam para a matemática, e principalmente para as ciências empíricas como a física, são estruturas nas quais as relações não têm como *relata* (objetos relacionados) unicamente os elementos de D, mas podem relacionar subconjuntos (propriedades)[9] e outras relações de ordens mais altas.

Uma estrutura desse tipo, que podemos representar por um par ordenado $E = \langle \mathrm{D}, R_i \rangle$, onde R_i uma coleção de relações (em geral omitiremos chaves externas para simplificar, não escrevendo agora coisas como $\{R_i\}$). A maneira de se erigir E é esta: inicie com o conjunto escolhido D. Depois, usando operações conjuntistas básicas

[8] *Grosso modo*, uma lógica paraconsistente permite a existência de teorias envolvendo fórmulas que sejam uma a negação da outra, sem que isso implique que todas as fórmulas (da linguagem da teoria) sejam deriváveis (ou seja, sem que a teoria resulte ser *trivial*).

[9] Outra restrição, sobre a qual não daremos atenção aqui mas que em uma discussão mais pormenorizada deveria ser considerada, é que as teorias de conjuntos que consideramos são *extensionais*, ou seja, assumem alguma forma de Axioma de Extensionalidade, que informalmente diz que conjuntos como os mesmos elementos são iguais. Assim, uma propriedade unária, descrita por uma fórmula com uma única variável livre, corresponde a um conjunto; relações binárias a conjuntos de pares ordenados de elementos do domínio, e assim por diante. Sim, existem várias teorias *intensionais* de conjuntos, nas quais o referido axioma é modificado; veja por exemplo Shapiro 1985.

(essencialmente, uniões, produtos cartesianos e conjuntos das partes), vamos obtendo as relações (operações) que nos interessam. Por exemplo, a estrutura de grupos pode ser escrita $G = \langle \mathrm{G}, R \rangle$, onde G é um conjunto não vazio e R é um elemento de $\wp(\mathrm{G}\times\mathrm{G}\times\mathrm{G})$, que consiste em subconjuntos de triplas ordenadas de elementos de G, satisfazendo algumas condições (os axiomas de grupo). O mesmo pode ser dito das demais estruturas matemáticas, como a de espaço vetorial complexo, ou sobre o corpo dos números complexos (na notação usual) $V = \langle \mathrm{V}, \mathrm{C}, +, \cdot \rangle$, onde V é um conjunto de objetos chamados de vetores, C é o corpo dos complexos, $+$ é uma relação ternária sobre V (ou uma operação binária sobre V), e $\cdot$ é a multiplicação de vetor por número complexo (um subconjunto de $\wp(\mathrm{C}\times\mathrm{V}\times\mathrm{V})$), tudo isso satisfazendo os bem conhecidos axiomas de espaço vetorial. Essas estruturas, e todas as desse tipo, cujas relações têm como relata unicamente elementos do domínio (ou dos domínios – repare que no caso dos espaços vetoriais, poderíamos ter escolhido como domínio o conjunto $\mathrm{V} \cup \mathrm{C}$, desde que acrescentássemos à estrutura mais um predicado unário, digamos ν de forma que, se $x \in \mathrm{V} \cup \mathrm{C}$, então $\nu(x)$ significa que $x \in \mathrm{V}$, e é um número complexo em caso contrário) são estruturas de *ordem-1* (não vou demoniná-las estruturas de 'primeira ordem' para não confundir a terminologia com a ordem de uma linguagem). Um exemplo simples de uma estrutura de ordem mais alta é a de espaço *topológico*, $T = \langle \mathrm{T}, \tau \rangle$, onde T é um conjunto não vazio e τ é uma topologia sobre T, ou seja, um conjunto de subconjuntos de T (chamados de *abertos* de T), portanto, $\tau \in \wp\wp(\mathrm{T})$, satisfazendo os postulados característicos. As estruturas adequadas para as teorias físicas são bastante complexas, como a da MCP, que é relativamente simples se comparada a outras teorias físicas, como a relatividade geral ou a mecânica quântica, como veremos abaixo.

Porém, se ZFC for axiomatizada como uma teoria de primeira ordem, sendo consistente, terá modelo enumerável (como resulta de um teorema célebre, chamado de Teorema de Löwenheim-Skolem Descendente). Ora, neste modelo, aquilo que representa o conjunto dos números reais será finito ou enumerável. Mas em ZFC prova-se que o conjunto dos reais não é enumerável (teorema de Cantor). Este fato contra-intuitivo, que nada tem de paradoxal, é conhecido como 'paradoxo de Skolem', e tem uma solução simples, que se resume em reconhecer, como fez o próprio Skolem, que a bijeção entre os conjuntos dos reais e dos naturais (que atestaria a enumerabilidade dos reais) não pertence ao modelo enumerável, estando "fora" dele. Por outro lado, como os modelos de ZFC devem ser infinitos, devido ao Teorema Ascendente de Löwenheim-Skolem, esta teoria terá modelos de todas as cardinalidades infinitas. Assim, usando uma teoria como ZFC como metamatemática onde vamos erigir nossas estruturas (teorias), na verdade não sabemos em que "modelo" estamos trabalhando e, assim, de certo modo, não podemos saber *a priori* que não estamos fazendo física, por exemplo, a partir do modelo enumerável de ZF. Deste modo, em certo sentido, podemos afirmar que, ao fazermos ciência (em particular, matemática), nunca sabemos do que estamos falando: falamos de conjuntos enumeráveis ou não enumeráveis? Qual a noção de infinito que estamos utilizando? Se queremos falar de objetos usuais de nossa "realidade", como supomos nossas teorias serem capazes, devemos considerar espaço e tempo, ou espaço-tempo.[10] Mas, tratam-se do espaço e do tempo newtonianos, típicos das mecânicas clássica e quântica (não-relativista), ou trata-se do espaço-tempo relativista (restrita – minkowskiana – ou algum "tempo" da relatividade geral?) Estas são algumas questões que qualquer análise filosófica sobre a ciência deveria responder.

Por outro lado, digamos que nossa concepção filosófica (metafísica) nos leve a um intuicionismo ao estilo de Brouwer. Se for assim, deveremos erigir nossa matemática dentro deste espírito, e isso nos conduziria a uma visão científica completamente diferente daquela que teríamos se assumíssemos a matemática e a lógica usuais. Portanto, em se tratando de fundamentos, devemos indicar qual a matemática e qual a lógica estamos assumindo para começar a discussão. Mesmo se estivermos assumindo a lógica chamada de *clássica*, devemos estar cientes de que não há *a* lógica clássica, e que quando se fala desta lógica sem qualificação, não se tem em princípio ideia de qual particular teoria se trata: trata-se da lógica elementar usual? Pode ser ela de ordem superior à primeira? Podemos assumir que ela incorpora uma teoria de conjuntos? Questões como essas, em se tratando de fundamentos da ciência, são relevantes e não são fáceis de ser respondidas.

[10] Saliente-se que a lógica usual é atemporal, sem espaço e sem tempo.

Mas voltemos por um momento à nossa estrutura para a MCP vista acima. A própria terminologia 'mecânica clássica de partículas' denota aqui coisas distintas: primeiro, *uma particular* estrutura que obtemos quando especificamos o que seriam as entidades envolvidas (por exemplo, P representa o sol e seus planetas, etc.), aquilo que denominamos de 'estrutura concreta'; segundo, pode significar uma classe de estruturas (uma *espécie de estruturas*) que congrega todas as "mecânicas clássicas de partículas" (que seriam as estruturas dessa espécie), uma "estrutura abstrata". Por fim, a estrutura em questão representa também a *teoria* dessa espécie de estruturas, que podemos supor ser axiomatizada de modo a que MCP venha a ser um modelo dos axiomas selecionados. Uma tal axiomatização pode ser resumida por uma fórmula da linguagem da teoria de conjuntos considerada, chamada de *predicado de Suppes* da teoria; as estruturas que satisfazem o dito predicado são seus modelos, e desta forma o predicado determina uma classe de modelos, os modelos da teoria em questão. Mas, claro, para alcançarmos uma desejada teoria, devemos escolher a teoria de conjuntos que permita que as estruturas que serão os modelos do adequado predicado (equivalentemente, dos axiomas) possam "existir" como conjuntos dessa teoria. O mesmo pode ser dito, *mutatis mutandis*, da estrutura a seguir.

4 Um estudo de caso mais detalhado: a mecânica quântica

Pensemos agora no aparato matemático para a mecânica quântica não relativística para dar um exemplo interessante. No formalismo usual, que utiliza o conceito de espaço de Hilbert, os estados dos sistemas físicos são representados por subespaços unitários de um espaço de Hilbert H (representados por um vetor unitário que gera o subespaço). Os observáveis são representados por operadores auto-adjuntos sobre H. A dinâmica é dada por uma equação diferencial de primeira ordem linear denominada de equação de Schrödinger. Observáveis como posição e momento necessitam de espaços de Hilbert de dimensão infinita, de forma que em geral temos que estender os espaços de Hilbert para o que se denomina de *rigged spaces*. Os vetores de H podem ser escritos como combinações lineares (superposições) de vetores de qualquer base de H, e aqui surge um problema matemático interessante: como saber se um tal espaço tem uma base (um conjunto linearmente independente maximal de vetores)? Se a dimensão de H for finita, isso é simples, pois pode-se via de regra *exibir* uma base, mas no caso de dimensão infinita, necessitamos do Axioma da Escolha (na verdade, de uma proposição equivalente conhecida como Lema de Zorn). O axioma da escolha nos garante que todo espaço vetorial (em particular, os espaços de Hilbert) tem uma base. Como ZFC incorpora o axioma da escolha, tudo parece confortável. Mas, e se a matemática (teoria de conjuntos) fosse outra dentre as tantas que há em que o axioma da escolha não é válido? Poderíamos desenvolver (do modo usual) a mecânica quântica em tal base matemática? Surpreendentemente, assuntos como este nunca foram, ao meu ver, estudados detalhadamente até o momento. Uma outra questão, ainda envolvendo a matemática *onde* as teorias físicas são erigidas, é a vista abaixo, ainda relacionada à mecânica quântica – este campo do conhecimento é de fato extremamente relevante para a análise, ou reanálise, de conceitos filosóficos.

A questão é a seguinte. Temos um *formalismo* (teoria matemática) adequado para a mecânica quântica não relativista bem delineado; na verdade, há vários deles (em Styer et al. 2002, os autores apresentam nove modos de formular a mecânica quântica). Ficaremos com aquele que utiliza espaços de Hilbert. Este formalismo lida com (os conceitos de) *estados* de sistemas físicos e com *observáveis*, que expressam as quantidades físicas que podem ser *medidas*; "medimos" sempre o estado de um sistema, na verdade de um grande número de sistemas "preparados" de modo adequado, e obtemos uma certa distribuição de probabilidades. Tudo o que o formalismo nos dá são probabilidades de um sistema, após ser medido, estar em um ou em outro estado. Esta é a visão *operacional* de Niels Bohr: a mecânica quântica não nos conta como é o mundo, mas apenas nos dá (como se fosse um potente algoritmo) certas probabilidades disso ou daquilo ocorrer.

Mas, filosoficamente, é interessante indagar o que há por trás do formalismo, da expressão matemática que utilizamos. Como vimos em uma citação anterior (Susskind and Friedman 2014), aceitamos que a mecânica quântica lida com entidades em uma escala muito pequena para os nossos padrões, como átomos, moléculas e as "partículas elementares" como prótrons, elétrons, neutrons, etc. Assim, podemos sugerir que há uma ontologia (uma pelo menos) subjacente à teoria, e indagar o que seriam as entidades com as quais a teoria se compromete, ou pelo menos, como elas se comportam (sejam o que forem) se obedecerem os postulados da mecânica quântica. A resposta é surpreendente: pode-se na verdade assumir diferentes ontologias, incompatíveis entre si, associadas ao mesmo formalismo quântico. Antes de discutir este tema, que pode nos conduzir à necessidade de arcabouços matemáticos distintos dos usuais para a elaboração das estruturas correspondentes, vejamos como podemos considerar a mecânica quântica não relativista (MQNR, ou simplesmente MQ) em termos de estruturas.

Uma estrutura para a MQ pode ser dada da seguinte maneira. Pomos

$$\mathrm{MQ} = \langle S, \{H_i\}, \{O_j\}, \{U_k\}\rangle, \text{ com } i \in I,\ j \in J \text{ e } k \in K,$$

(I, J e K são meros conjuntos de índices) onde S é uma coleção de sistemas físicos, que podemos denominar de *objetos* (*sistemas*) *quânticos*, $\{H_i\}$ é uma coleção de espaços de Hilbert, $\{O_j\}$ é uma coleção de operadores auto-adjuntos sobre esses espaços, e $\{U_k\}$ é uma coleção de operadores unitários sobre esses espaços, que nos permitirão descrever a dinâmica dos sistemas (o leitor não especializado não precisa se preocupar em entender esses conceitos, mas somente a ideia geral). Claro que um determinado espaço de Hilbert pode ser o produto tensorial de outros espaços, no caso de desejarmos tratar de sistemas compostos de vários objetos quânticos. Neste caso, os operadores são adaptados adequadamente. Estes conceitos são regidos pelos seguintes axiomas, aqui colocados de forma abreviada e somente para estados *puros*:

1. A cada sistema $s \in S$ corresponde um espaço de Hilbert $H \in \{H_i\}$, cujos subespaços unitários correspondem aos estados do sistema s. Representaremos um desses subespaços por um vetor unitário $|\psi\rangle$, dito *vetor de estado* (ou *função de onda*) do sistema. Tais estados são estados *puros*.
2. A cada observável (ou *quantidade física*, na terminologia de von Neumann) corresponde um operador auto-adjunto $O \in \{O_j\}$. Os valores possíveis da medida do observável pertencem ao espectro de O (o conjunto de seus autovalores). Se $\{|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle, \ldots\}$ é uma base ortonormal para H formada por autovetores de O, podemos escrever $|\psi\rangle = \sum_i x_i\, |\alpha_i\rangle$, com

$x_i = \langle \alpha_i \mid \psi \rangle$, e se $a_1, a_2, \ldots$ são os autovalores associados a cada um desses vetores (ou seja, $O \mid \alpha_i\rangle = a_i \mid \alpha_i\rangle$), então a probabilidade de que a medida do observável representado por O ter como medida o autovalor a_n para o sistema no estado $\mid \psi\rangle$ é dada pela Regra de Born: $\mathrm{Prob}(O, \mid \psi\rangle, a_n) = |x_n|^2$ (para simplificar, consideraremos somente o caso não degenerado, ou seja, quando o operador não tem autovalores repetidos).

3. Após a medida do observável descrito por O com o sistema no estado $\mid \psi\rangle = \sum_i x_i \mid \alpha_i\rangle$, o vetor "colapsa" em um de seus auto-estados $\mid \alpha_i\rangle$ (vetores da base ortonormal) com probabilidade $|x_i|^2$.
4. Se em um tempo t_0 o sistema encontrava-se no estado $\mid \psi(t_0)\rangle$, em um tempo t o sistema encontrar-se-á no estado $\mid \psi(t)\rangle = U(t) \mid \psi(t_0)\rangle$, onde $U(t)$ é um operador unitário. Esta expressão é denominada de *equação de Schrödinger* dependente do tempo.
5. Sistemas múltiplos são tratados da mesma forma, com a conveniente escolha dos espaços de Hilbert e adaptando os postulados acima.

Os sistemas físicos, por sua vez, podem ser tratados também como certas estruturas; por exemplo, resumidamente,[11] podemos por, para um $s \in S$,

$$s = \langle E, O, P\rangle,$$

sendo E um conjunto cujos elementos são chamados de *estados* dos sistemas físicos, O é um conjunto de *observáveis físicos* (que são representados pelos operadores em $\{O_j\}$), P é uma função $P: E \times O \times \Delta \to [0,1]$, onde Δ é um adequado intervalo da reta real (um "boreliano") e $[0,1]$ é o intervalo fechado da reta real.[12] Podemos assumir como primitivos os conceitos de estado, observável e de probabilidade, evitando assim que precisemos listar os postulados correspondentes. Afim de conectar o esquema acima com aplicações físicas, assumimos que

[11] Certamente que mais detalhes necessitam ser dados, mas o que apresentamos é apenas esquemático.

[12] A sugestão de tratar os sistemas quânticos deste modo nos foi dada por Newton Costa mas, como ele mesmo observa, necessita melhoramentos.

cada sistema físico é representado por um conjunto de pontos do espaço-tempo usual, ou seja, quádruplas $(t,x,y,z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$. No caso de interpretações, ao sistema físico S, podemos associar ainda um conjunto $\mathcal{A}$ de "partículas quânticas", que dariam algum tipo de "realidade" ao formalismo. Mas aí entra uma questão interessante: para o tratamento matemático simplesmente, a hipótese do conjunto $\mathcal{A}$ é dispensável, mas se queremos assumir que estamos falando de algo, seria $\mathcal{A}$ sempre um *conjunto*? Vejamos do que se trata.

Se estivermos trabalhando no contexto de ZFC para definir as estruturas acima, nos deparamos com a seguinte dificuldade. Os elementos do conjunto $\mathcal{A}$ são *indivíduos* no sentido de que podem sempre, pelo menos em princípio, ser discernidos uns dos outros. Isso é uma característica de ZFC; como dizia Cantor, "um conjunto é uma coleção de objetos distintos de nossa intuição ou pensamento" (*apud* Krause 2002: 73), ou seja, os elementos de qualquer conjunto são sempre (em princípio) *discerníveis* uns dos outros. Mas os objetos quânticos podem não apresentar qualquer distinção entre eles: dois elétrons, ou dois prótons, ou quaisquer objetos quânticos de mesmo tipo são absolutamente indiscerníveis. Mesmo que haja uma distinção como nos valores de spin de elétrons, como entre os dois elétrons de um átomo de hélio em seu estado fundamental (de menor energia), não podemos identificar qual é qual, o que contraria fortemente a noção usual de indivíduo como uma entidade que "mantém" sua identidade e pode sempre (pelo menos em princípio, deve-se sempre ter isso em mente) ser discernido de qualquer outro. Assim, como representá-los por meio de conjuntos? Claro que isso pode ser feito matematicamente, por exemplo simulando essa indiscernibilidade por meio de uma relação de equivalência (ou melhor, por meio de certas *congruências*),[13] ou então simplesmente eliminar qualquer referência a $\mathcal{A}$, como dissemos acima ser possível, mas isso é nada mais do que um truque. De um ponto de vista de fundamentos, é importante pensar que as teorias físicas falam de algo, e podemos indagar o que é esse "algo". Ademais, seria interessante poder contar com coleções de objetos que sejam indiscerníveis de fato, e não apenas "feitos" indiscerníveis por meio desses tipos de truques, como

[13] Uma congruência, *grosso modo*, é uma relação de equivalência que preserva todas as relações da estrutura.

usar congruências. Assim, sob este ponto de vista, deveríamos poder erigir estruturas em uma *teoria quântica de conjuntos*, mais adaptada para este tipo de hipótese. Uma tal teoria existe, e é denominada de *teoria de quase-conjuntos*, mas não falaremos dela aqui (veja French and Krause 2006, Krause and Arenhart 2014). Este fato somente reforça a nossa tese de que para dar conta de determinadas pressuposições que assumimos (como a de que objetos quânticos possam ser indiscerníveis), devemos considerar um arcabouço matemático condizente. Na teoria de quase-conjuntos, podemos ter exatamente a construção acima de MQ, somente que agora S seria eventualmente um quase-conjunto *puro*, cujos elementos são todos indiscerníveis (outras adaptações teriam que ser levadas em conta, mas isso não importa aqui). Ou seja, na teoria de quase-conjuntos podemos selecionar S de forma que seus elementos não se distingam uns dos outros, e mesmo assim trabalhar com todo o restante aparelhamento matemático como se estivéssemos em ZFC.

Porque dissemos acima que "podemos assumir" que as entidades quânticas não se comportam como indivíduos em sentido usual? O motivo é que há uma intepretação (ontologia) possível, e igualmente lícita, das entidades quânticas como indivíduos na acepção usual. Este ponto é explorado em French and Krause 2006, de modo que não falaremos dele, exceto para dizer que é preciso restringir os estados em que os sistemas podem estar e os observáveis a serem considerados. Esta interpretação é também, por exemplo, compatível com a versão da mecânica quântica desenvolvida por David Bohm, que muitos acham se tratar de uma teoria diferente, ainda que dê as mesmas previsões empíricas. Há também outros problemas na versão bohmiana, como explicar o misterioso "potencial quântico" ou estendê-la a uma teoria relativista (ela não é "Lorentz-invariante"), mas a intepretação é cabível e tem muitos adeptos. Assim, não há problema de ordem fundacionista que a mecânica bohmiana seja erigida em ZFC. Mas, e se adotarmos a intepretação alternativa – e plausível – que vê essas entidades como não sendo indivíduos? Neste caso, seria muito mais interessante que tivéssemos um aparato matemático que os tratasse como tais *ab ovo* ou, como sugeriu Heinz Post, *right from the start* (ver French and Krause 2006), por exemplo, fazendo uso da teoria de quase-conjuntos. Isso mostra que as hipóteses que fazemos podem ser importantes para determinar o aparato matemático (que envolve a lógica) no qual as teorias científicas (ou suas estruturas correspondentes) são erigidas.

5 Realismo estrutural *gnosiológico*, REG

Na literatura filosófica recente, duas formas principais de realismo acerca de estruturas têm se apresentado nas discussões, resgatando um conceito introduzido no início do século XX, hoje denominado de realismo estrutural epistemológico; nos anos 1990, James Ladyman introduziu uma forma de realismo estrutural ontologicamente mais forte, por ele denominado justamente de realismo estrutural *ontológico*. O primeiro asserta, *grosso modo*, que tudo o que podemos conhecer acerca do mundo são determinadas estruturas, enquanto que o segundo afirma que tudo o que há são estruturas (para uma visão geral e dados históricos, consultar Ladyman 2014). Há no entanto uma outra forma de se pensar no papel desempenhado pelas estruturas, a saber, destacando o seu papel como modo de se *alcançar* conhecimento, pelo menos em teoria. Esta última qualificação se deve à nossa crença de que o máximo que podemos fazer é *postular* que certo conhecimento está sendo adquirido, o que nos é sugerido pelos experimentos que realizamos, mas tudo o que podemos dizer é que nossas teorias (condensadas na forma de certas estruturas, como visto acima) são tais que nos garantem unicamente que *tudo se passa como se* as coisas estivessem se dando como as teorias nos sugerem. Por exemplo, a mecânica newtoniana, útil para explicar eventos em nossa escala e em velocidades reduzidas em relação à da luz, nos faz pensar que em nossa escala tudo se passa como se ela fosse verdadeira de acordo com a teoria da correspondência; a mecânica quântica, por outro lado, faz o mesmo em escalas muito pequenas em relação à nossa, e a relatividade geral em escalas muito grandes se comparada com a nossa. Nenhuma delas pode ser dita ser *verdadeira* no sentido correspondentista, mas apenas que salvam as aparências em certo sentido, ou que são *quase-verdadeiras*, ou *parcialmente verdadeiras* apenas, em seus particulares domínios de aplicação (da Costa and French 2003). Mas não é sobre isso que queremos falar.

O conceito de estrutura como congregando referências (por meio de postulados adequados) a possíveis domínios de aplicação, objetos distinguidos desses domínios, relações e operações entre seus elementos e entre tais relações e operações (sendo portanto estruturas de ordem superior a 1), tem um papel epistemológico fundamental que deve ser enfatizado: é por meio delas que (teoricamente) adquirimos conhecimento de peculiaridades dos domínios aos quais as aplicamos. As estruturas "concretas" (no sentido de Hilbert de "axiomáticas concretas" em oposição a axiomáticas formais – ver Krause 2002) que modelam as estruturas abstratas dizem respeito a domínios particulares, e de certo modo "estruturam" esses domínios. Claro está que um mesmo domínio do conhecimento pode ser descrito de mais de um modo e por teorias (estruturas) distintas e mesmo incompatíveis, e cada uma delas pode ser útil para determinadas finalidades.

O conhecimento vem, portanto, de dois modos: um que podemos chamar de *abstrato*, dado pela estrutura abstrata formal, não interpretada. Este conhecimento se refere a domínios possíveis ou, dito de outro modo, a todos os *modelos* da referida estrutura, por isso entendendo as estruturas particulares que exemplificam uma dada estrutura abstrata. Por exemplo, a teoria de grupos nos diz coisas de todos os grupos, mas grupos particulares podem ser estudados, possuindo propriedades distintas de outros grupos (grupos comutativos de não comutativos, grupos simples de não simples, etc.). A outra forma de conhecimento é específica da particular estrutura que se está considerando, por exemplo um determinado grupo de movimentos rígidos no plano, caracterizado pela equação

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Da mesma forma, a estrutura vista da MCP nos dá indicações gerais de todas as possíveis mecânicas de partículas, e estruturas particulares (específicas mecânicas de partículas) podem ser estudadas em isolado.

O REG é uma forma de realismo porque aceita haver algo que as estruturas consideradas modelam e que independem do modo como elaboramos essas estruturas. Em geral, diferentes abordagens são possíveis para um mesmo campo do conhecimento. É "estrutural" por motivos óbvios, ou seja, por fazer uso da noção abstrata de estrutura e, como dito, 'gnosiológico' para enfatizar o seu papel como agente de conhecimento. O mote do REG pode ser posto da seguinte forma: *conhecemos por meio de estruturas que sistematizam as redes conceituais que lançamos sobre algum domínio do conhecimento*.[14]

Décio Krause
Grupo de Estudos em Lógica e Fundamentos da Ciência
Departamento de Filosofia
Universidade Federal de Santa Catarina

Referencias

Bogdan, Radu J. 1979. *Patrick Suppes*. Dordrecht: Reidel.
Bourbaki, Nicholas. 2006. *Théorie des Ensembles*. Berlin-Heidelberg: Springer.
Carnap, Rudolf. 1958. *Introduction to Symbolic Logic and its Applications*. New York: Dover.
Corry, Leo. 2004a. *David Hilbert and the axiomatization of physics (1898-1918)*. Netherlands: Springer.
Corry, Leo. 2004b. *Modern algebra and the raise of mathematical structures*. 2nd Ed. Basel: Birkhauser.
da Costa, Newton and French, Steven. 2003. *Science and Partial Truth: A Unitary Approach to Models and Scientific Reasoning*. Oxford: Oxford University Press.
da Costa, Newton, Krause, Décio and Bueno, Otávio. 2007. Paraconsistent logics and paraconsistency, in *Philosophy of Logic*, volume ed. by Dale Jacquette, in *Handbook of the Philosophy of Science*, series ed. by Dov M. Gabbay, Paul Thagard and John Woods.
Ellis, Brian and Silk, Joe. 2014. Scientific method: defend the integrity of physics. *Nature* 516: 321-323. doi:10.1038/516321a
French, Steven and Krause, Décio. 2006. *Identity in Physics*. Oxford: Oxford University Press.
Geroch, Robert. 1985. *Mathematical Physics*. Chicago: University of Chicago Press.
Greene, Brian. 2001. *O Universo Elegante: Supercordas, Dimensões Ocultas, e a Busca pela Teoria Final*. São Paulo: Companhia das Letras.
Jech, Thomas. 2003. *Set Theory*. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag.
Krause, Décio. 2002. *Introdução aos Fundamentos Axiomáticos da Ciência*. São Paulo: EPU.
Krause, Décio and Arenhart, Jonas Rafael Becker. 2014. Individuality, quantum physics, and a metaphysics of non-individuals: the role of the formal. A aparecer em *Individuals across science*, editado por Alexandre Guay e Thomas Pradeu.
Ladyman, James. 2014. "Structural Realism", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2014 Edition), Edward N. Zalta (ed.), http://plato.stanford.edu/archives/spr2014/entries/structural-realism.
Lakatos, Imre. 1976. *A Lógica do Descobrimento Matemático*. Rio de Janeiro: Zahar.
Lambert, Neill et al. 2013. Quantum biology. *Nature Physics* 9: 10-18.
Mac Lane, Saunders. 1998. *Categories for the Working Mathematician*. 2nd Ed. New York: Springer-Verlag (1st Ed. 1971).
Magalhães, João Carlos Marques and Krause, Décio. 2001. Suppes predicate for genetics and natural selection. *Journal of Theoretical Biology* 209: 141-153.

[14] Dedicado a Patrick Suppes (1922-2014).

Magalhães, João Carlos Marques e Krause, Décio. 2006. Teorias e modelos em genética de populações: um exemplo do uso do método axiomático em biologia. *Episteme* 11 (24): 269-291.
Mashaal, Maurice. 2006. *Bourbaki: a secret society of mathematicians*. Translated by Anna Pierrehumbert. Providence, Rhode Island. American Mathematical Society.
Popper, Karl Raymond. 2002. *The Logic of Scientific Discovery*. London and New York: Routledge.
Shapiro, Stuart. (ed.). 1985. *Intensional Mathematics*. Amsterdam: North-Holland.
Styer, Daniel F. et al. 2002. Nine formulations of quantum mechanics. *American Journal of Physics* 70 (3): 288-297.
Suppes, Patrick. 2002. *Representation and Invariance of Scientific Structures*. Stanford, California: CSLI publications.
Susskind, Leonard and Friedman, Art. 2014. *Quantum Mechanics: The Theoretical Minimum*. New York: Basic Books.