

Información Importante

La Universidad de La Sabana informa que el(los) autor(es) ha(n) autorizado a usuarios internos y externos de la institución a consultar el contenido de este documento a través del Catálogo en línea de la Biblioteca y el Repositorio Institucional en la página Web de la Biblioteca, así como en las redes de información del país y del exterior con las cuales tenga convenio la Universidad de La Sabana.

Se permite la consulta a los usuarios interesados en el contenido de este documento para todos los usos que tengan finalidad académica, nunca para usos comerciales, siempre y cuando mediante la correspondiente cita bibliográfica se le de crédito al documento y a su autor.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, La Universidad de La Sabana informa que los derechos sobre los documentos son propiedad de los autores y tienen sobre su obra, entre otros, los derechos morales a que hacen referencia los mencionados artículos.

BIBLIOTECA OCTAVIO ARIZMENDI POSADA
UNIVERSIDAD DE LA SABANA
Chía - Cundinamarca

Visibilización del Pensamiento Matemático Apoyado en Objetos Manipulativos Virtuales

Nancy Moreno Niño

Yinny Esperanza Ruiz Pérez

UNIVERSIDAD DE LA SABANA

CENTRO DE TECNOLOGÍAS PARA LA ACADEMIA

MAESTRÍA EN INFORMÁTICA EDUCATIVA

CHÍA, 2016

Visibilización del Pensamiento Matemático apoyado en objetos manipulativos virtuales

Presentado Por:

Nancy Moreno Niño

Yinny Esperanza Ruiz Pérez

Directora:

Mg. Sonia Calderón D’Martino

Trabajo presentado como requisito para optar el título de

Magíster en Informática Educativa

UNIVERSIDAD DE LA SABANA

CENTRO DE TECNOLOGÍAS PARA LA ACADEMIA

MAESTRÍA EN INFORMÁTICA EDUCATIVA

CHÍA, 2016

*A Dios nuestro Padre Celestial de quien emanan todas las cosas,
a nuestra familia por su apoyo y comprensión, especialmente a Valentina y a Soledad,
a nuestros estudiantes y compañeros docentes, a Jeaneth Hernández y
Angelita Torres por su ayuda incondicional,
y a todos aquellos que contribuyeron a que este proyecto se hiciera realidad.*

Tabla de Contenido

	Pag.
Resumen.....	8
Abstract.....	9
1. Introducción.....	10
2. Justificación.....	12
3. Contexto.....	15
3.1 Contexto Educativo Colegio Villemar El Carmen.....	15
3.2 Contexto Educativo Colegio Carlos Pizarro Leongómez.....	17
4. Planteamiento del problema.....	20
4.1 Pregunta de investigación.....	26
4.2 Objetivo General y Objetivos Específicos.....	26
5. Marco Teórico Referencial.....	27
5.1 Estado del Arte.....	27
5.2 Marco Teórico.....	35
5.2.1 Referente Pedagógico.....	37
5.2.2 Referente Disciplinar.....	41
5.2.3 Referente Tic en Educación.....	56
5.2.4 Ambiente de Aprendizaje.....	63
5.2.5 Diseño del Ambiente de Aprendizaje.....	64
6. Metodología.....	78
6.1 Categorías de Análisis.....	81
6.2 Población y muestra.....	85

6.3 Consideraciones éticas.....	87
6.4 Prueba piloto.....	87
6.5 Fase de Implementación.....	88
7. Resultados.....	90
7.1. Aula Diferencial.....	91
7.2. Aula Regular.....	111
7.3 Comparación de los casos.....	131
8. Conclusiones y prospectiva.....	141
9. Aprendizajes.....	150
Referencias.....	151
Anexos.....	161

Lista de Tablas

	Pag.
Tabla 1. Referentes y conceptos identificados en el desarrollo de la investigación.....	36
Tabla 2. Tipos de Imágenes según Brown y Presmeg.....	51
Tabla 3. Tipos de Problemas de Suma y Resta según Carpenter y Moser.....	53
Tabla 4. Niveles y estrategias de Adición según Carpenter y Moser.....	55
Tabla 5. Categorías de análisis e instrumentos de registro que las abordan.....	81
Tabla 6. Número de sesiones implementadas con cada estudiante.....	90
Tabla 7. Resumen de hallazgos por referentes para ambos casos.....	131
Tabla 8. Tipos de imágenes y estrategias utilizadas por cada estudiante.....	136
Tabla 9. Ventajas y desventajas de las herramientas empleadas.....	140

Lista de Figuras

	Pag.
Figura 1. Árbol de Problemas.....	25
Figura 2. . Interfaz de las herramientas manipulativas virtuales aplicadas en el ambiente de aprendizaje.	66
Figura 3. Secuencia de un diseño de casos múltiples.	79
Figura 4. Ejemplos de tipos de imágenes identificadas para el caso de Aula Diferencial.	91
Figura 5. Respuestas registradas por el estudiante de Aula Diferencial durante la sesión 0.	93
Figura 6. Ejemplos de representación tanto numérica como en imagen de unidades, decenas y centenas abordadas a partir de la sesión 1.....	95
Figura 7. Actividad que muestra un ejemplo de problema creado por el estudiante según el modelo Tipo 1 y su representación en recta numérica.....	98
Figura 8. Actividad que muestra una estrategia de conteo comenzando por las unidades y reagrupando con ayuda de la recta numérica.	101
Figura 9. Actividad de paso a hoja.....	102
Figura 10. Actividad de representación gráfica del número 48 con manipulativo virtual Bloques de Base correspondiente a la sesión 1.....	108
Figura 11. Actividad donde se muestra el intento de enlace de las unidades.....	109
Figura 12. Desacierto en la representación del problema en recta numérica, donde el estudiante por descuido representa desde un número diferente de 0.	111
Figura 13. Ejemplos de tipos de imágenes identificadas para el caso de Aula Regular...	112
Figura 14. Respuestas registradas por el estudiante de Aula regular durante la sesión 1.	115

Figura 15. Actividad realizada por el estudiante de Aula regular durante la sesión 2....	116
Figura 16. Actividad realizada por el estudiante de Aula regular durante la sesión 3.....	118
Figura 17. Actividad realizada por el estudiante de Aula regular durante una sesión 4 adicional.....	120
Figura 18. Actividad realizada por el estudiante de Aula regular durante la sesión 5....	122
Figura 19. Actividad de representación gráfica del número 154 con manipulativo virtual Bloques de Base correspondiente a la sesión 1.....	127
Figura 20. Actividad realizada por el estudiante de Aula regular donde representa gráficamente problema cambio tipo 1 con manipulativo <i>Recta Numérica Barras</i>	130

Resumen

El presente estudio tiene como propósito describir el proceso de estructuración del pensamiento matemático en un estudiante de primaria de aula regular y uno de aula diferencial para Déficit Cognitivo, pertenecientes a colegios Distritales de la ciudad de Bogotá. Se diseña e implementa un Ambiente de Aprendizaje presencial, apoyado por objetos manipulativos virtuales, donde el objetivo es la resolución de problemas tipo Cambio, correspondiente al concepto matemático Adición. El estudio se realizó bajo la metodología de estudio de caso cualitativo. Se tiene en cuenta la habilidad de visualización matemática y el uso de imágenes mentales. Al comparar los casos se encontró que es fundamental considerar los tiempos mínimos de aprendizaje para cada uno, así como la identificación de elementos propios de la mediación tanto docente como de las herramientas empleadas, que posibilitan la experiencia de aprendizaje.

Palabras Claves: Pensamiento matemático, manipulativos virtuales, concretismo, ambiente de aprendizaje, visualización, andamiajes, inclusión.

Abstract

The purpose of the present research is to describe the structuring process of mathematical thinking of primary level students in both a typical class and also from a Cognitive Deficit level class; those being performed at the District schools from Bogota, Colombia. The research uses qualitative methodology to perform a comparative study of cases, analysing the way students solve problems of "Change" corresponding to the Addition Mathematical Concept. The study was designed and implemented in an on- site learning environment, supported by virtual manipulative objects. Additionally, the ability of mathematical visualization and the use of mental images has been considered. When these cases were compared, it was found fundamental to consider the minimal teaching time per subject, as well as the teaching elements and tools used to facilitate the learning experience.

Keywords: Mathematical thinking, virtual manipulatives, concretism, learning environment, mathematical visualization, instructional scaffolding, inclusive pedagogy.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

1. Introducción

El presente estudio nace no solo del interés en probar otras formas de enseñanza de la matemática, sino también de la necesidad de buscar estrategias que permitan mejorar las habilidades de pensamiento matemático, en particular la Habilidad para Resolver Problemas.

El estudio se desarrolla con un niño de primaria correspondiente a población con Necesidades Educativas Permanentes (Déficit Cognitivo) y con un niño de aula regular, ambos de instituciones distritales de la ciudad de Bogotá. El objetivo de esta investigación es describir el proceso de estructuración del pensamiento matemático de los estudiantes, mientras resuelven problemas asociados al concepto matemático Suma, como concepto común a ambos casos según los lineamientos curriculares para el nivel de primaria en el que se enmarca el estudio.

Para abordar las dificultades identificadas en relación al tema, se tiene en cuenta el principio de Visualización propuesto por Arcavi (2003) y lo planteado por Vygotsky respecto a la importancia de las herramientas y del acompañamiento de otro “más capaz”, como mediadores del aprendizaje.

Se propone entonces el diseño e implementación de un Ambiente de Aprendizaje Presencial donde se introduzca el concepto Suma apoyado en el uso de Objetos Manipulativos Virtuales, que sumado a la interacción con el docente buscan visibilizar los esquemas de pensamiento en la resolución de tareas derivadas de cada sesión.

En los primeros capítulos de este documento, se abordan aspectos del contexto y las dificultades que motivan el planteamiento del proyecto, y que dan origen a su pregunta de investigación y objetivos principal y específicos; esto es, describir el proceso de pensamiento matemático en ambos participantes cuando en el proceso media no solo el docente sino una herramienta tecnológica en particular: los manipulativos virtuales.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Enseguida se presenta el marco referencial, donde se mencionan las investigaciones pertinentes más recientes sobre el tema a abordar y los referentes teóricos (pedagógicos, disciplinares y TIC en la Educación) que orientan y sustentan el desarrollo de la propuesta. Allí es posible ilustrar al lector sobre qué se entiende por pensamiento matemático y su importancia más allá del contexto escolar, las operaciones, procesos y dinámicas que lo caracterizan, así como la necesidad de profundizar en estrategias basadas en la visualización.

Más adelante se describe la metodología que orienta el desarrollo del estudio, esto es, el enfoque cualitativo y diseño de investigación, así como las técnicas e instrumentos aquí implementados propios de la metodología de estudio de casos.

Bajo este capítulo también se consideran las técnicas y didácticas, así como el modelo de evaluación según Stufflebeam y Shinkfield (1987), claves en el diseño del ambiente de aprendizaje realizado específicamente para este estudio.

Posteriormente se presentan los principales hallazgos, según observaciones derivadas de la fase de implementación para ambos casos y una comparación de los mismos a la luz de las categorías de análisis *Pensamiento Matemático*, *Aprendizaje Matemático*, *Mediación docente* y con herramientas.

Por último se presenta una breve discusión según los resultados reportados para ambos casos y que responden a la pregunta de investigación planteada. Se consideran algunas de las implicaciones y sugerencias para próximas investigaciones y para el desarrollo/mejora de material educativo semejante al implementado.

2. Justificación

Para toda la población en general, el pensamiento matemático debe estructurarse desde los primeros niveles de educación, como base de aprendizajes esenciales para la vida, ya que como lo menciona Stacey (2007) tiene un impacto en el desarrollo de diferentes sectores de una sociedad.

Sin desconocer el aporte de las distintas áreas y querer relacionar el área de la matemática como exclusivo del pensamiento matemático, es importante mencionar que ésta es de las que plantea mayor dificultad a los estudiantes, por requerir estructuras cognitivas cada vez más complejas (Van Garderen, 2006, Moyer-Packenham et al, 2002; Clements, 2000).

Esta dificultad es mayor en población con Déficit Cognitivo. Ante dicha dificultad se sugiere el uso de mediadores apropiados o elementos que faciliten el andamiaje cognitivo (Núñez del Río y Lozano, 2003, entre otros). El cómo entrenar en la planificación para resolver problemas ayudándolos a centrar la atención en la utilización de esquemas de acción lógicos sobre lo que se debe hacer en primer y segundo lugar, o derivaciones posibles, es un camino aún por investigar especialmente en este tipo de población (Castejón y Navas, 2009, Pérez y Tomás, 2010).

Puntualmente para el área de matemáticas y siguiendo lo propuesto por Vygotsky (1978), es a partir de las cuatro operaciones básicas, que se estructuran niveles más complejos de pensamiento, siendo estas un ejemplo claro de dominios iniciales de aprendizaje.

De manera paralela este estudio considera importante no solo abordar un concepto matemático, sino también aportar en el entendimiento de unas dinámicas de pensamiento tan importantes para todo ser humano.

En el estudio se consideró la operación básica *Suma* como concepto propio del currículo común al ciclo 1 objetivo de estudio y el cual representa algunas dificultades a la hora de aplicarlo a un problema dado. Una de las mayores dificultades observadas en el aula asociadas a

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

este concepto, radica en la dificultad para organizar los dígitos (reagrupación) y la apropiación de estrategias claras que permitan una posterior aplicación para la resolución de problemas.

En el intento de abordar este tipo de dificultades bajo una mirada comprensiva, se tiene en cuenta lo propuesto por Arcavi (2003), quien plantea las posibilidades de la visualización matemática. Esta es una habilidad que podría estar jugando un papel esencial en el aprendizaje y desempeño en el área de matemáticas, siendo ésta mejorable en los estudiantes.

Teniendo en cuenta lo propuesto por este autor, así como el papel mediador de las herramientas tecnológicas y del maestro según Vygotsky, se buscó aplicar una didáctica y metodología que permitiera observar esquemas de pensamiento en estudiantes de ciclo 1, tanto de aula exclusiva como de aula regular, cuando apropian y aplican el concepto matemático abordado en el estudio.

Se consideró el reporte de diferentes estudios en aula regular en varios niveles educativos, sobre las ventajas en el uso de objetos manipulativos virtuales (Moyer- Pakenham, Ulmer y Anderson, 2012; Matus y Miranda, 2010; Uribe, 2009; Heddens, 2005; Alvarez-Grayeb, 2011, entre otros) como recursos tecnológicos que responden al principio de visualización y que se constituyen en mediadores y facilitadores de la creación de esquemas mentales sobre conceptos matemáticos.

Los manipulativos virtuales son recursos o representaciones de sus antecesores físicos (bloques lógicos, regletas, etc.) empleados en el campo del aprendizaje, especialmente pensados para aplicación en población con algún grado de discapacidad cognitiva, y cuyo uso milenario proviene de recursos como piedras de contar y ábaco (Valenzuela, 2012).

Gracias al avance tecnológico, es posible contar hoy día con recursos manipulativos que desde la virtualidad se convierten en herramientas novedosas y disponibles a todos por encontrarse en Internet, gran número de ellas de acceso libre. Las ventajas que traen consigo es

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

un aspecto aún por explorar (Uribe, 2009, Álvarez-Grayeb, 2011) y más desde sus cualidades como herramientas psicológicas (Coll, 2008) o aplicadas a ambientes con población con déficit cognitivo.

A partir de lo anterior, el estudio se centró en describir el proceso de estructuración del pensamiento matemático como lo fundamenta Burton (1984) y Stacey (2007), bajo la metodología de estudio de casos con un estudiante de ciclo 1 de aula exclusiva para déficit cognitivo y un estudiante de aula regular, mediante la implementación de un ambiente de aprendizaje apoyado en manipulativos virtuales, como recursos mediadores y posibles facilitadores en el proceso de estructuración del pensamiento matemático o creación de esquemas de acción.

Este objetivo no solo permite tener un acercamiento a la forma como los estudiantes de ambas poblaciones estructuran un concepto matemático, sino que además aporta a nuevas formas de metodología en aula inclusiva, según los objetivos de las políticas educativas para una educación de calidad (Unesco, 2007, 2015); abre paso a otras investigaciones sobre la aplicación de este tipo de herramientas tecnológicas, así como una perspectiva de mejora o ideas de desarrollo de nuevo material tecnológico.

3. Contexto

El estudio se desarrolló en el contexto urbano de la ciudad de Bogotá, esto es en la localidad novena (Fontibón) y la localidad séptima (Bosa). A continuación se presenta una caracterización de los contextos educativos, así como las dificultades que motivaron el estudio aquí planteado.

3.1 Colegio Villemar El Carmen I.E.D. La institución se ubica en el área urbana de la localidad novena (Fontibón) de la ciudad de Bogotá, en el barrio Villemar y atiende población principalmente de estratos 3. Las familias esencialmente son empleadas de fábricas, empresas o de pequeños negocios dentro de la localidad.

Según el Horizonte Educativo, la institución tiene como lema del Proyecto Educativo Institucional “Villemaristas líderes en comunicación, convivencia y participación”. Su misión es “formar jóvenes en competencias, habilidades y saberes comunicativos y de convivencia democrática para contribuir al éxito en su proyecto de vida y en la transformación de su entorno, incluyendo estudiantes con necesidades cognitivas especiales” (Agenda 2012, p 10).

Lo anterior permite aclarar que la institución atiende no solo población regular, sino que además brinda atención a población con discapacidad cognitiva bajo dos modalidades: Integración al aula regular y Aulas diferenciales. La institución es líder en la localidad al contar con un programa de atención específico a población con necesidades educativas especiales; desde allí se atiende población remitida para valoración interdisciplinar por posible retardo mental con el fin de determinar si precisa de un sistema de educación especial exclusiva, inclusiva o regular.

El colegio cuenta con tres sedes, pero es la sede A ubicada en la Calle 20 D No. 96G 51, la que atiende tanto a estudiantes de bachillerato como de necesidades educativas especiales en su modalidad de aula diferencial: En la mañana atiende los grados Transición, Primero y Segundo, esto es, ciclo 1; en la tarde atiende los grados Tercero, Cuarto y Quinto de Primaria o ciclo 2. Las

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

edades entre las que oscilan los estudiantes van de los 6 a los 11 años para ciclo 1 y de los 12 a los 15 años para ciclo 2. La modalidad de atención en aula diferencial de la institución admite estudiantes con deficiencia cognitiva bajo los criterios establecidos por la Secretaría de Educación de Bogotá y los establecidos de manera particular por la institución. Según el Manual de Convivencia 2015 algunos de estos criterios son:

- Tener un diagnóstico del nivel cognitivo o CI emitido por el sector salud no menor a 50 que le permita una funcionalidad en el ámbito escolar.
- Poseer conductas adaptativas que permitan el aprendizaje y que no interfieran con el trabajo pedagógico.
- Contar con habilidades comunicativas, sociales y de autonomía (aseo, alimentación) básicas.

Por aula se tiene un número máximo de 15 estudiantes. Entre los diagnósticos se hallan estudiantes con Síndrome de Down y Retardo Moderado a Leve. Es importante anotar que la población sobre la cual se centra el presente estudio es el ciclo 1 de necesidades educativas especiales.

Adicionalmente, es importante mencionar que el área de necesidades educativas especiales cuenta con un equipo interdisciplinario integrado por 3 Educadoras Especiales, 1 Fonoaudióloga y 1 Psicóloga para la jornada de la mañana. Para la jornada de la tarde se cuenta con 3 Educadoras Especiales y 1 Terapeuta Ocupacional. El equipo se encarga de adaptar e implementar la malla curricular estructurada en campos de pensamiento a desarrollar durante 3 períodos académicos.

En la malla curricular se proponen una serie de desempeños e indicadores de desempeño esperados para cada área y grado que compone el ciclo, bajo un modelo pedagógico holístico-ecológico coherente con la filosofía de escuela inclusiva, al tener en cuenta que el aprendizaje

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

“no puede concebirse como exclusivamente intrínseco al alumno, sino derivado de todo el proceso didáctico o de alguno de sus elementos: el profesor, el currículo, el contexto escolar y social” (manual de convivencia y sistema institucional de evaluación SIEV, p. 69). El propósito de la dimensión ecológica es conectar al estudiante a otros contextos e integrarlo al mundo social y laboral. De esta manera, se busca transversalizar todas las áreas en los proyectos pre-vocacionales de cocina y manualidades, así como de salidas pedagógicas que favorezcan los procesos.

Común a todas las áreas se encuentra como objetivo general acercar al estudiante al mundo que lo rodea a través de diferentes actividades; para ello es importante el fortalecimiento de habilidades básicas como lo son la atención, memoria, generación de hábitos y seguimiento de instrucciones. Específicamente para el área de matemáticas se tiene como objetivo general “utilizar sus conocimientos matemáticos y su capacidad de razonamiento en un ambiente próximo a la vida cotidiana para resolver situaciones y problemas reales. (Malla Curricular, 2015)”

Teniendo en cuenta lo anterior, es importante que en la labor docente se explore y aplique aquellos recursos que puedan colaborar en el progreso de los aprendizajes y en general el fortalecimiento de habilidades que les permita ser competentes en su contexto. Si se propone una mayor participación del estudiante, es útil el uso de recursos que integren diferentes canales sensoriales, especialmente los visuales, así como de recursos tecnológicos que se tengan a mano (MEN, 2006, p. 40-42). Las aulas exclusivas de la institución objeto de estudio cuentan con valiosos recursos tecnológicos (p.e. videobin por aula, 1 tablero digital, tablets), que esperan ser explorados e implementados a través de ambientes de aprendizaje novedosos.

3.2 Colegio Carlos Pizarro LeónGómez I.E.D. El proyecto se realiza en el Colegio Distrital Carlos Pizarro Leongómez ubicado en la ciudad de Bogotá, localidad 7 (Bosa) en el

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

barrio El Recreo. Esta institución fue inaugurada el 26 de junio del 2007, dentro del programa del Alcalde Luis Garzón que buscaba construir colegios dignos para los sectores menos favorecidos. Es uno de los denominados Megacolegios pertenecientes al sector público, de carácter mixto, inclusivo, con énfasis en educación empresarial. En el momento atiende la educación formal en los niveles de básica primaria, básica secundaria y media en calendario A.

El Proyecto Educativo Institucional (PEI) se orienta en “La Educación participativa y democrática para mejorar la calidad de vida” trabaja el modelo Cognitivo – Constructivista enfocado al Aprendizaje significativo. La institución tiene el lema de Educar con Responsabilidad, Afecto y Democracia. El PEI es fundamentado en los principios de la formación integral, construcción de valores, compromiso social, formación académica, principios que deben ser asimilados por todos los miembros de la comunidad educativa (Agenda 2014).

Su infraestructura cuenta con una biblioteca, un comedor, canchas de baloncesto y microfútbol, tres salas de informática, tres salas de profesores, setenta y dos salones de clase jardines interiores y parqueadero de vehículos. En la actualidad presta servicio de educación a 5072 estudiante en dos jornadas y dos sedes; en su planta de personal cuenta con 170 docentes y 20 administrativos. La Institución educativa toma el nombre de Carlos Pizarro Leóngomez, personaje polémico, seminarista, estudiante de derecho de la Universidad Javeriana, comprometido en buscar cambios y disminuir desigualdades, militante del M19 y posteriormente candidato presidencial.

El presente proyecto se desarrolla con estudiantes de primaria pertenecientes al ciclo 1 de la jornada mañana. Los estudiantes cuentan con edades entre los 7 y 8 años y su núcleo familiar en muchas ocasiones es disfuncional, a cargo de la madre. Los estudiantes pertenecen en su generalidad al estrato socioeconómico 2. Los padres son en su gran mayoría trabajadores, empleados no profesionalizados e independientes.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Frente al desempeño académico en el área de matemáticas se encuentra que según los resultados obtenidos en las pruebas de estado (Saber) correspondientes a los años 2013-2014, hay un incremento porcentual del 2% en el nivel *insuficiente*, mientras que en los niveles *mínimo* y *satisfactorio* no variaron significativamente. El nivel *avanzado* mostró un decremento de un 6% respecto al año anterior. En conclusión estos resultados evidencian una disminución en los niveles óptimos esperados.

4. Planteamiento del Problema

Como se puede entender según la contextualización de ambas instituciones, se encuentra que las dos atienden población diversa. Esto obedece a la necesidad de incluir al sistema educativo a la numerosa población con algún tipo de discapacidad que según lo informa la Organización Mundial para la Salud OMS del año 2011, ha aumentado en porcentaje.

Según el informe referido, en el mundo podría haber más de mil millones de personas con algún tipo de discapacidad, lo que equivale a un 15% de la población mundial, cifra que a su vez está en aumento. Para el caso específico de Colombia el Ministerio de Educación Nacional a partir de lo reportado por el DANE en el censo Nacional de Población aplicado en el año 2005, refiere que las personas con discapacidad llegan a la cifra de 6,4 por cada 100 habitantes, con un total de 2'632.255 casos. El porcentaje más alto lo obtiene la discapacidad cognitiva con un 34,8% del gran total (MEN, 2012, p. 10).

Por otra parte, la Unesco (2007) explica que “las personas y colectivos más vulnerables se encuentran en una situación de desigualdad en lo que se refiere al acceso, a la continuidad de estudios y a los logros de aprendizaje” (p. 5). De aquí, que una de las metas de la denominada Revolución Educativa del Ministerio de Educación Nacional para el 2010, haya sido incluir al sistema educativo a la mayor parte de la población vulnerable, entre la que se cuenta aquella con Necesidades Educativas Especiales, exigiendo por parte de las Secretarías de Educación modelos y didácticas pertinentes de atención (MEN, 2007, p.2).

Para la Unesco (2007) una educación es de calidad “si ofrece los recursos y ayudas necesarias para que todos los estudiantes alcancen los máximos niveles de desarrollo y aprendizaje, de acuerdo con sus capacidades” (p. 34). Esta concepción se sustenta en los principios de equidad, pertinencia, relevancia, eficiencia y eficacia:

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Desde la perspectiva de la *equidad*, es preciso equilibrar los principios de igualdad (lo común) y diferenciación (lo diverso). Es una obligación de los sistemas educativos asegurar la equidad en una triple dimensión: en el acceso, en los procesos y en los resultados. La educación debe tratar de forma diferenciada lo que es desigual en el origen para llegar a resultados de aprendizaje equiparables y no reproducir las desigualdades presentes en la sociedad (Unesco, 2007, p. 9).

Según la declaración de Incheon (2015) una visión de la educación para los próximos 15 años ha de “garantizar una educación inclusiva y equitativa de calidad y promover oportunidades de aprendizaje permanente para todos” (p.3). Una de sus metas es centrar esfuerzos en población con discapacidad y asegurar el acceso a la educación para todas las personas. La declaración contempla la importancia del uso de las TIC en ambientes de aprendizaje dentro de una educación de calidad. Así se cita en el documento borrador de dicha declaración:

La educación de calidad necesita, como mínimo, que los alumnos desarrollen competencias de lectura y matemáticas fundamentales como cimientos para un mayor aprendizaje además de competencias de mayor nivel. Esto requiere de métodos y contenidos de enseñanza y aprendizaje relevantes, que satisfagan las necesidades de todos los educandos, educados por docentes capacitados y bien calificados, adecuadamente remunerados y motivados, usando enfoques pedagógicos apropiados y apoyados por tecnologías de la información y la comunicación (TIC), así como de la creación de entornos seguros, saludables, receptivos al género, inclusivos y que cuenten con recursos adecuados que faciliten el aprendizaje (UNESCO, 2015, p. 19).

Tanto los principios de pertinencia como de relevancia buscan cumplir con una educación significativa que se ajuste a lo exigido socialmente y al desarrollo personal del individuo. Para

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

una educación pertinente en población con déficit cognitivo el MEN (2006) citando a Troncoso (1995), menciona el planteamiento de los siguientes objetivos de aprendizaje:

- Los más importantes y necesarios actualmente para la vida del estudiante, los que le sirven aquí y ahora.
- Los que tienen una mayor aplicación práctica en la vida social y los que se pueden aplicar a un mayor número de situaciones.
- Los que sirven de base para futuras adquisiciones.
- Los que favorezcan el desarrollo de sus potenciales: atención, percepción, memoria, comprensión, expresión, autonomía, socialización (MEN, 2006, p 38).

En línea con lo referido anteriormente y teniendo en cuenta las características de los contextos en los cuales se enmarca esta investigación, se considera pertinente ir más allá de la enseñanza mecánica de algunos conceptos estimados como esenciales para la vida. Es necesario buscar estrategias de aprendizaje-enseñanza en población diversa, que contribuya a mejorar formas de pensamiento y favorezca la funcionalidad de estos conceptos.

La búsqueda de estrategias apropiadas en ambientes inclusivos, supone entender formas de pensamiento. Una de las formas de pensamiento más retadora en el ejercicio docente es la asociada al campo matemático. El reto está en llevar al estudiante a niveles superiores de abstracción de los conceptos, que le permitan su aplicación a situaciones problémicas.

Uno de los aprendizajes básicos establecido en la malla curricular de ciclo 1, es el concepto de suma y resta y su aplicación a situaciones cotidianas. Dichos conceptos requieren estrategias de aprendizaje que vayan acompañadas de actividades que permitan un paso de niveles concretos a superiores de abstracción (Van Garderen, 2006), algo que costoso para ambas poblaciones, pero mucho más para la población con déficit cognitivo.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Según lo explican Molina y Arraiz (1993) referido por Pérez y Tomás (2010) en un estudio comparativo entre niños sin discapacidad (5 y 8 años) y con discapacidad cognitiva (9 y 12 años) se encontró que los últimos tienen mayor dificultad para procesar adecuadamente la información simultánea, sucesiva y de planeación. La primera está asociada a habilidades de síntesis y pensamiento reversible, como por ejemplo, descubrir el elemento que falta para completar una serie lógica. La segunda, hace alusión al procesamiento de la información en orden serial, importante en tareas de recuerdo secuencial, organización de historietas lógicas, entre otras. La tercera, está relacionada con la toma de decisiones de acuerdo con un plan de acción a partir de la información que se tenga a mano. Este tipo de procesamiento es requerido en tareas de resolución de problemas (aplicar conceptos).

Según Castejón y Navas (2009), el déficit cognitivo es más evidente cuando tratan de organizar y planificar la información, “porque les falla esa visión o esquema general del problema, y por tanto tratan de resolverlo parcialmente”, además de haber una “incapacidad para utilizar la metacognición y la transferencia, o no saber aplicar lo aprendido a contextos diferentes” (p.372).

Para Beltrán y otros (1987), en Pérez y Tomás (2010), “la capacidad de planificar es básica puesto que la inteligencia no reside tanto en el procesamiento simultáneo o sucesivo, sino más bien en el uso de la información codificada para alcanzar la meta” (p. 63).

Respecto al tema objeto de estudio se encuentra que los estudiantes de ciclo 1 de ambas instituciones presentan dificultades para apropiarse y aplicar el concepto matemático Suma. Muestran detención frente a operaciones con números de tres cifras, reagrupación de números (escribir dos números sin tener en cuenta el valor posicional) y su aplicación a problemas.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Dicho de otro modo, en ambos contextos se identifica que los estudiantes presentan dificultades a la hora de interiorizar los conceptos matemáticos y por ende, aplicar o transferir los aprendizajes sobre estos conceptos a situaciones problema cotidianos.

Las posibles causas de estas dificultades podrían estar asociadas a la escasa habilidad para crear andamiajes mentales (Moyer-Packenham et al, 2002; Clements, 2000) y a su vez a la dificultad para visualizar los conceptos matemáticos (Arcavi, 2003). Otro factor asociado sería la necesidad de ajustes en los escenarios de aprendizaje que consideren otro tipo de recursos, que permitan la transición entre estructuras concretas a otras más abstractas (Clements, 2000, Van Garderen, 2006), así como la mediación del docente para lograr esta transición evitando confusiones (Heddens, 2005).

En relación al cumplimiento de los objetivos de aprendizaje, se deben suponer metodologías acordes con la forma de pensar y actuar del estudiante. En efecto, en la práctica diaria con estudiantes con déficit cognitivo es apreciable que el aprendizaje es más lento y que particularmente los conceptos matemáticos representan mayor dificultad para este tipo de población; por lo cual es necesaria la creación de estrategias que permitan la adquisición de los diferentes conceptos. Parte de las estrategias consistiría en mediar los aprendizajes a través de herramientas tecnológicas que permitan el paso de un nivel de conocimiento a otro más evolucionado o abstracto.

Por otra parte, se observa la falta de acompañamiento en casa para fortalecer los procesos de aprendizaje en ambos contextos. La figura 1, ilustra bajo el modelo de Árbol de Problemas, las dificultades encontradas para ambos contextos, así como los objetivos derivados de la identificación de tales dificultades.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

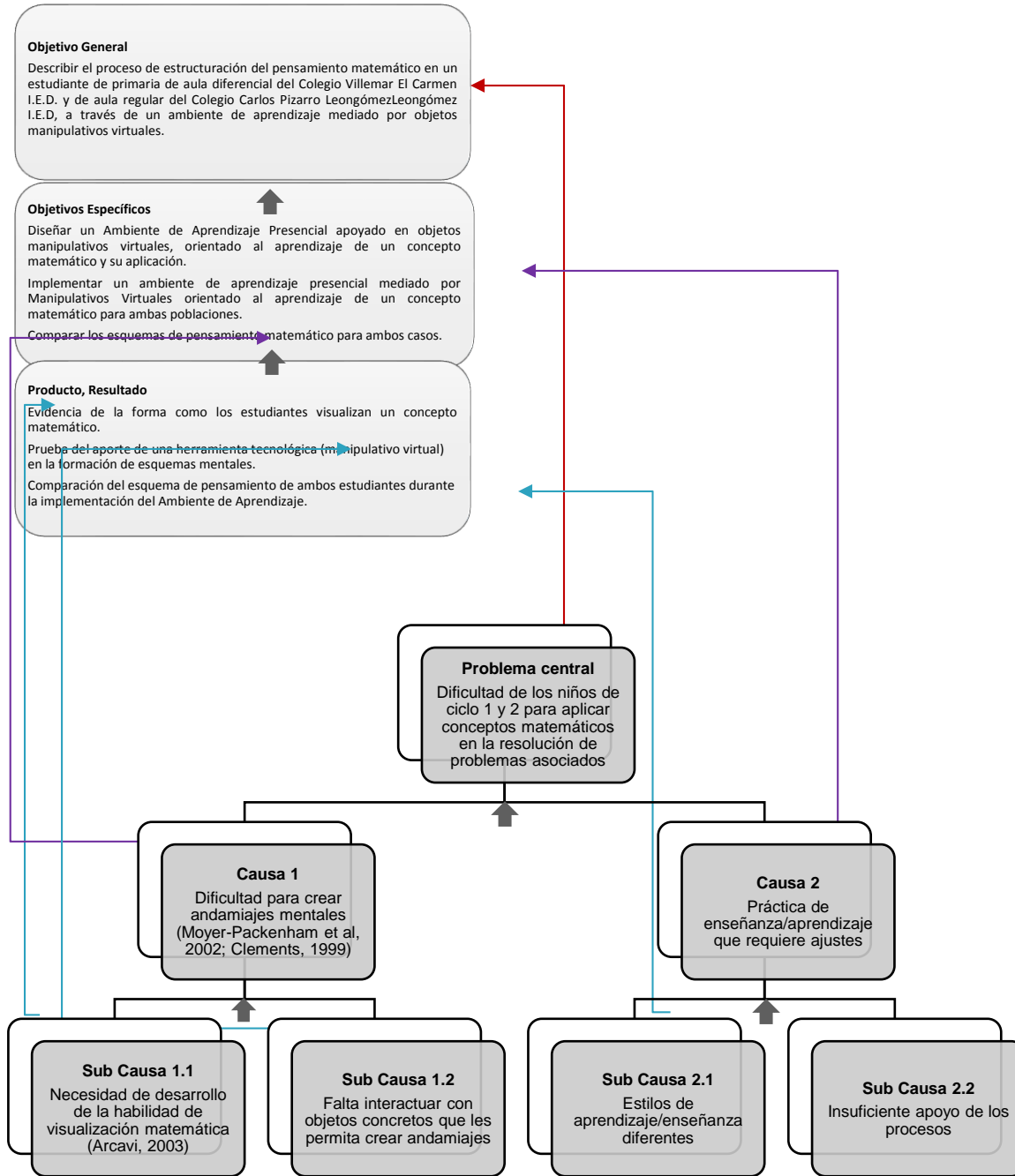


Figura 1. Árbol de Problemas

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

4.1 Pregunta de Investigación

Teniendo como punto de referencia las dificultades identificadas en ambos contextos educativos, se plantea la siguiente pregunta de investigación:

¿De qué manera un ambiente de aprendizaje mediado por objetos manipulativos virtuales, colabora en el proceso de estructuración del pensamiento matemático en estudiantes de primaria de ciclo 1 de aula diferencial o exclusiva del colegio Villemar El Carmen y de aula regular del colegio Carlos Pizarro Leongómez?

4.2 Objetivo General y Objetivos Específicos

Describir el proceso de estructuración del pensamiento matemático en un estudiante de primaria de aula diferencial del Colegio Villemar El Carmen I.E.D. y uno de aula regular del Colegio Carlos Pizarro Leongómez I.E.D., a través de un ambiente de aprendizaje mediado por objetos manipulativos virtuales.

De acuerdo con el objetivo general se plantean los siguientes objetivos específicos:

- Diseñar un Ambiente de Aprendizaje Presencial apoyado en objetos manipulativos virtuales, orientado al aprendizaje de un concepto matemático y su aplicación a problemas.
- Implementar un ambiente de aprendizaje presencial mediado por Manipulativos Virtuales orientado al aprendizaje de un concepto matemático para ambas poblaciones.
- Comparar los esquemas de pensamiento matemático para ambos casos.

5. Marco Teórico Referencial

El presente capítulo busca enmarcar el estudio bajo dos aspectos importantes a saber: El estado del arte, donde se mencionan las últimas investigaciones hechas alrededor del tema objeto de estudio, así como los fundamentos teóricos que orientan el desarrollo del mismo.

5.1 Estado del Arte

Con el fin de hacer una aproximación al tema de Resolución de Problemas asociados al concepto matemático *Suma o Adición* en población de primaria, en edades comprendidas entre los 7 y 11 años, de aula regular y diferencial exclusiva, se hizo una consulta bibliográfica en artículos de revistas en línea, libros digitales, documentos en línea de páginas especializadas y tesis doctorales sobre el uso de recursos TIC en ambientes de aprendizaje para el tema de Suma en población ya referida, en particular al uso de Manipulativos Virtuales.

La búsqueda se realizó a través de las bases de datos disponibles como Scopus, a través de los servicios de la Biblioteca de la Universidad de La Sabana, Google Scholar, Google Books, Redalyc y Dialnet, debido a que representan fuentes confiables y de carácter científico. Se consideró la revisión de documentos en su mayoría publicados durante los últimos 10 años.

De acuerdo con los lineamientos planteados por el Ministerio de Educación Nacional (1998), en Colombia uno de los objetivos de aprendizaje es ir avanzando en niveles de competencias cada vez más complejas, donde el estudiante debe ponerse a prueba frente a situaciones *problémicas, significativas y comprensivas*. Este objetivo permite inferir que en el estudiante ha de generarse habilidades de pensamiento que le permita dicho progreso, para en últimas tener el conocimiento sobre qué estrategias son más adecuadas frente a la resolución de un problema cotidiano.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Es a partir de los primeros niveles de escolaridad, donde es esencial el aprendizaje de los conceptos que gradualmente le permitirán enfrentarse a situaciones cada vez más complejas. La resolución de problemas como habilidad esperada del Pensamiento Matemático, ha de ser desarrollada a lo largo de la vida de todo ser humano; sin embargo, es uno de los mayores retos a los que se enfrentan los docentes por los niveles de abstracción asociados a sus conceptos.

La forma como los maestros abordan el tema en el aula de clase según lo refieren Godino, Font y Wilhelmi (2006), es de cierta manera dependiente de los libros de texto o material digital disponible, constituyéndose en fuentes de registro y acumulación de la práctica de algunos maestros y que se replican.

En este punto es necesario retomar el principio de calidad educativa propuesto por la Unesco (2007), donde se ha de verificar la presencia de “recursos y ayudas necesarias para que todos los estudiantes alcancen los máximos niveles de desarrollo y aprendizaje, de acuerdo con sus capacidades” (p. 34).

Uno de los grandes retos para una educación de calidad ante la diversidad es el estudio del pensamiento matemático en población con déficit cognitivo. Esto es lo expresado por Núñez del Río y Lozano (2003), quienes llevaron a cabo un estudio comparativo entre población de estudiantes de la ciudad de Madrid (España), con déficit cognitivo (Cociente Intelectual C.I 35-84) y sin déficit, tomando una muestra de 315 estudiantes para el primer grupo y 579 del segundo.

El estudio consistió en un análisis de varianza de las respuestas derivadas de la aplicación del test TEMA-2 (test of early mathematics abilities). En su estudio encontraron que los estudiantes con déficit cognitivo en el plano informal (concreto) “mostraron un nivel de competencia similar” a los estudiantes sin déficit, respecto a habilidades de conteo y enumeración de conjuntos con números pequeños.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Adicionalmente, muestran dificultades a la hora de emplear técnicas avanzadas de conteo, conceptos de magnitud relativa y realización de cálculos sencillos, ya sea que cuenten con elementos concretos a su alcance o por otro lado, les demande una abstracción de las cantidades.

En el plano formal (simbólico), las investigadoras encontraron que los estudiantes con déficit se desempeñan mejor en tareas que requerían la identificación de una regla que permitiera la mecanización (escritura de números, sumas sin llevar). Mientras los estudiantes sin déficit logran superar la suma sin llevar a partir de los 7 años y llevando a los 8 años, los que presentan déficit requieren una edad mental de 9 años para resolver sumas sin llevar. Para ambas poblaciones es difícil la resolución de restas prestando y con ceros intermedios.

Uno de los puntos de discusión referido por las investigadoras, es la dificultad que representa el estudio de las habilidades y desarrollo del pensamiento matemático cuando se tiene como referente el Cociente Intelectual, ya que se considera que existen otros factores independientes del CI que influyen en el aprendizaje y que a su vez dificulta la conformación de subgrupos cuando se ha de hacer un análisis de la población.

Finalmente, para responder a la pregunta ¿Cómo mejorar el pensamiento matemático de los alumnos con déficit intelectual? Explican que a partir de su experiencia con este tipo de población, las recomendaciones de otros autores y a partir de lo encontrado, se hace necesario:

- Hacer explícito el propósito de cada tarea a realizar y repetirlo en diferentes momentos (antes, durante el proceso y al finalizar) ya que usualmente están acostumbrados a memorizar datos (sin cuestionarse sobre el por qué o para qué).
- Hacer que el estudiante se centre en los datos relevantes a través de preguntas, patrones significativos, semejanzas y diferencias.
- Demostrarles sus errores, falsas creencias.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

- Guiar a la formación de ideas sobre el número, sus relaciones, usos y aplicaciones a través de manipulativos concretos.
- Reflexionar sobre los procesos de solución de tareas.
- Afrontar la valoración de su propia actividad sobre la tarea.
- Usar juego de reglas, tareas de equivalencias, verbalización y materiales reales.
- Intentar que el estudiante pase a un código escrito sus tareas y elaboraciones (siempre que no resulte demasiado costoso o pesado).
- Proponerles modelos de representación y de acción diferentes con el fin de facilitarles la ejecución de determinadas tareas (recordemos que son capaces de realizar cálculo informal si está presente el modelo de representación y de acción, e incluso sus relativamente buenas habilidades en lectura y escritura de números, que no deja de ser un aprendizaje basado en el modelo).
- Es necesario enfrentarlos a multitud de situaciones lo más relacionadas y cercanas a situaciones cotidianas.
- Disponer de múltiples materiales concretos que les permita avanzar en su pensamiento concreto (patrón de dedos, línea numérica) (Núñez del Río et al, 2003, p. 559-561)

Además de las recomendaciones referidas y de gran valor para el desarrollo del presente estudio, se consideran de importancia los retos investigativos planteados por las mismas autoras: Necesidad de ahondar en métodos de análisis de dificultades en matemáticas, la identificación de tareas que faciliten el desarrollo del sentido numérico, así como los contenidos relevantes y el tiempo de práctica necesario para alcanzarlos; por último identificar qué tipo de apoyos ofrecen mejores resultados y el avance en la búsqueda de métodos que promuevan progresos significativos en sus aprendizajes (Núñez del Río et al, 2003, p. 561)

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Actualmente y gracias al desarrollo de nuevas herramientas tecnológicas, el docente tiene a su disposición variedad de posibilidades a aplicar en el aula. La forma como se emplean los recursos TIC, las oportunidades y efectos son aún un tema por investigar (OCDE, 2010).

Particularmente y en relación al uso de manipulativos virtuales en el aula, Matus y Miranda (2010), los caracterizan como herramientas que facilitan la comunicación de ideas matemáticas y la resolución de problemas. Adicionalmente, refieren un incremento de uso por parte de los docentes, aunque se halle poco registro de estudios sobre el tema, en parte porque son herramientas de reciente desarrollo.

Los autores refieren que en un comienzo los estudios sobre el uso de este tipo de herramientas, se llevaron a cabo en Estados Unidos, enfocados en contrastar su uso frente a material manipulativo en físico. Un segundo momento de estudio sobre la implementación de estas herramientas, se centra en identificar las ventajas que ofrecen para la enseñanza y el aprendizaje, permitiendo reconocer posibilidades y limitantes, cuando son implementadas en los grados tercero, cuarto y quinto de primaria.

Moyer, Niezgoda y Stanley (2005), realizaron un estudio en el estado de Virginia (Estados Unidos), sobre Valor Posicional y Suma con 19 niños de segundo grado, 15 de los cuales hablaban un idioma diferente al inglés, por pertenecer a familias provenientes de diferentes partes del mundo (Hispanos, caucásicos y asiáticos). El objetivo del estudio era abordar el concepto Suma, a partir de la reagrupación de dígitos de una a dos cifras a través de una herramienta manipulativa virtual –Virtual Base Ten Blocks- dibujos o representaciones de la misma y explicaciones escritas sobre la forma como resolvían las sumas.

La razón para apoyarse en la herramienta manipulativa obedeció a la necesidad de hacer conexiones entre: 1) manipulaciones concretas de objetos, 2) imágenes o visualización de esos

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

objetos, 3) abstracciones de ideas matemáticas y conceptualizaciones y 4) procesos subyacentes a estos conceptos (Moyer et al, 2005, p 33).

Durante las dos sesiones que tomó el estudio, se hizo un registro de interacciones y discusiones frente al computador. En el día 1, los estudiantes trabajaron en el computador haciendo uso del manipulativo y en hojas de trabajo realizando 12 sumas. En el día 2, los niños trabajaron en el aula resolviendo 4 sumas en hojas y sin apoyo del manipulativo. El porcentaje de precisión en las tareas para las dos sesiones fue de un 75%, observándose un uso de estrategias de conteo más elaboradas al segundo día.

Al final se concluyó que los estudiantes comprendieron el significado y proceso de la suma, facilitando la estructuración y verbalización de las ideas matemáticas, especialmente para estudiantes no nativos angloparlantes. Los investigadores recomiendan explorar estas herramientas en otros ambientes, así como formas adecuadas de implementarlas con todos los niños.

Respecto a otros estudios realizados con estudiantes de primaria en el aula, apoyándose de Manipulativos Virtuales, aunque para otros conceptos diferentes a la suma, se encuentra el realizado por Suh, Moyer y Geo (2005) en Matus y Miranda (2010) quienes recolectaron información a través de la observación, entrevistas y videos con estudiantes de grado quinto de primaria sobre el tema de fraccionarios. El estudio indicó que los MV ayudaron a los estudiantes a hacer una mayor conexión entre el concepto simbólico y pictórico de las fracciones; además facilitó la experimentación, generación de hipótesis y el descubrimiento de los patrones matemáticos detrás de las operaciones matemáticas. El estudio recomienda el uso de aplicativos manipulativos virtuales con estudiantes que les favorezca el aprendizaje visual.

En un estudio realizado por Moyer-Packenham, Ulmer y Anderson (2012), con niños de tercer grado de primaria, se tuvo en cuenta la aplicación de material visual estático y material

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

dinámico en el aprendizaje de las unidades fraccionarias. La muestra de 19 niños entre los que había estudiantes con bajo desempeño mostró que los manipulativos virtuales apoyaron significativamente a los niños con bajo desempeño, mientras que la ganancia para los más avanzados fue a nivel numérico. Esto significa que los manipulativos tienen efectos diferentes según el nivel de desempeño del estudiante.

Respecto al aporte de cada tipo de material, los investigadores explican que tanto las representaciones estáticas como las dinámicas impactaron en el aprendizaje de la unidad temática; sin embargo, el material dinámico provee al estudiante de oportunidades que le permiten visualizar los conceptos y aporta al pensamiento del tema objeto de estudio, al facilitar la construcción de un andamiaje del tema en estudiantes con bajo desempeño. Se concluye que la habilidad de visualización en matemáticas no se da de manera natural en todos los estudiantes. El uso de manipulativos virtuales contribuiría en mejorar este tipo de habilidad en estudiantes que lo requieran.

Otros reportes se enfocan en poblaciones de secundaria, mencionando las ventajas de las herramientas virtuales en mención, siempre sobre conceptos matemáticos como suma y resta de enteros, aprendizaje de la Derivada (Bolyard y Moyer-Packenham, 2012; Alvarez-Grayeb, 2011).

Uribe (2009), en su disertación sobre el papel de la manipulación como mediador entre las prácticas docentes y de aprendizaje, menciona que hay estudios que revelan la relación positiva de los manipulativos virtuales con el desempeño del estudiante (Bolyard, 2005; Suh, 2005; Suh & Moyer, 2007; Suydam & Higgins, 1977; Trespalacios, 2008) y hay otros que reportan parcial o escasa influencia sobre éste (Drickey, 2006; McClung, 1998; Posadas, 2004). Explica que al parecer, los resultados de estos estudios pueden estar asociados al conocimiento que tenga el docente sobre el material, la experticia del estudiante sobre el uso de los recursos informáticos o con el programa, la intención u objetivo de uso (como ayuda en la construcción de conceptos o por

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

el contrario solo como herramienta de práctica), así como a la metodología de los estudios (medición del logro de aprendizaje en 2 momentos y no como proceso continuo o que va en aumento, o según el estilo de aprendizaje). Así lo explica Uribe (2009):

En resumen, los estudios que miden el impacto del uso de los manipulativos han empleado diferentes diseños y a menudo han encontrado diferentes resultados. Mientras algunos estudios tuvieron grupos control para medir dicho impacto, otros estudios no tuvieron. Los estudios también variaron en la cantidad de tiempo empleado por los estudiantes haciendo uso del manipulativo, por ejemplo, un día (Trespacios, 2008), una semana (Suh y Moyer, 2007), cinco semanas (Posadas, 2002), o a lo largo de nueve semanas (McClung, 1998).

Además, en todos los estudios discutidos, los análisis se hicieron tomando en cuenta uno o dos momentos en el tiempo, dentro de todo el proceso de aprendizaje del estudiante.

Medir el aprendizaje basándose en tan solo dos momentos, no necesariamente provee precisión en lo que se pretende medir. Los dos momentos en los que se mide el alcance de los logros es semejante a una línea recta invariable, mientras que un retroceso ajustado a más momentos puede proveer una representación más precisa de avance en el tiempo. Ningún estudio ha evaluado las variaciones individuales en crecimiento o cambio, como por ejemplo, el aprendizaje individual del estudiante, por un período de tiempo extendido cuando se estudia el uso del manipulativo (p. 30-31).¹

Según la National Education Association (2002), un 85% de profesores de primaria y un 65% a cargo de niveles educativos varios puntúan en la categoría *Muy Alto* la efectividad de este tipo de recursos.

¹ Traducción realizada por Nancy Moreno N.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Hasta este punto, todos estos reportes permiten concluir que los manipulativos virtuales se convierten en herramientas que potencian aprendizajes especialmente en el área de matemáticas, pero que su éxito depende de la planeación e implementación que haga el maestro a la hora de probarlos en el aula. Surge la necesidad de probar este tipo de herramientas en ambientes de aprendizaje para diferentes poblaciones y temas. Hasta el momento no se hallaron reportes de estudios haciendo uso de manipulativos virtuales en población con Déficit Cognitivo o para aulas inclusivas.

5.2 Marco Teórico

Con el fin de hacer una revisión teórica que permita abordar y comprender las concepciones, aproximaciones y otras variables asociadas al tema de estudio, esto es, Resolución de problemas como parte del Pensamiento matemático, se presenta un análisis de las diferentes perspectivas que sustentan la presente investigación. Esto se hará a partir de los referentes Pedagógico, Disciplinar y TIC en la Educación.

Una síntesis de las categorías teóricas y conceptuales identificadas durante toda la revisión se presenta en la tabla 1:

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Tabla 1

Referentes y conceptos identificados en el desarrollo de la investigación.

Referente	Categoría/Conceptos identificados/Autores
Referente Pedagógico	Teoría del Aprendizaje en términos de <i>mediación docente</i> y mediación de herramientas o <i>artefactos</i> . Vygotsky (1978), Galperin, Alvarez Grayeb (2011)
Referente Disciplinar	<i>Pensamiento matemático</i> (Teorías Cognitivas, Burton, 1984; Stacey, 2007) <i>Aprendizaje Matemático</i> (Duval, 1999) <i>Habilidad de Visualización matemática</i> (Arcavi, 2003) <i>Tipos de Imágenes</i> (Presmeg, 1993). <i>Tipos de Problemas verbales con Suma</i> (Carpenter et al., 1983, 1984, 1988)
Referente Tic en Educación	<i>Objetos Manipulativos Virtuales</i> (Moyer, Bolyard y Spikell, 2002. Clements, 2000, Heddens, 2005; Manches y O'Malley, 2012)

La intención del referente pedagógico es retomar los fundamentos de la teoría de Vygotsky (1978) para describir el proceso de pensamiento mientras se aprende un concepto y se aplica en resolución de problemas. Bajo este referente se considera fundamental el papel del docente como agente más experto cuya función es la de mediar en el proceso de aprendizaje.

Bajo el referente disciplinar se consideran las bases teóricas sobre las cuales se sustenta la enseñanza de la matemática y el aporte de Arcavi (2003) como sustento sobre el cual se enmarca el proyecto de investigación. Como objeto matemático que permita visibilizar cambios en el

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

esquema de pensamiento se ha querido referir diferentes aspectos asociados al concepto Suma, concepto esencial en la malla curricular para el área de matemáticas del nivel de primaria.

Bajo el referente TIC en educación, se busca presentar los objetivos de las políticas globales y locales alrededor de la implementación de recursos tecnológicos en la educación y la necesidad de formar en competencias para el siglo XXI. A modo de explorar nuevas posibilidades de recursos en el aula y bajo el mismo referente, se plantean los aportes de herramientas de reciente desarrollo como lo son los Objetos Manipulativos Virtuales (MV) según el tema de investigación.

5.2.1 Referente Pedagógico. Para comprender el proceso de pensamiento en los niños y su habilidad para resolver problemas se ha considerado retomar los aportes de Lev Vygotsky para el campo de la educación. Un primer aporte retomado es el presupuesto de que todo niño ya trae unos conocimientos previos a la etapa de escolarización, Así lo explica el autor: “Por ejemplo, los niños empiezan a estudiar aritmética en la escuela, pero mucho tiempo antes han tenido ya alguna experiencia con cantidades; han tenido ocasión de tratar con operaciones de división, suma, resta y determinación de tamaños” (Vygotsky, 1978, p 9). Esto contrasta con los supuestos de otras posturas para las que el aprendizaje se centra primordialmente en estadios de desarrollo biológico.

Thornton (2000), en su libro *La resolución infantil de problemas*, explica que es necesario contar con unas destrezas generales para la resolución de problemas, es decir, contar con la habilidad de inferencia y lógica como mecanismo asociado. Estas destrezas permiten comprender la información disponible y hacer deducciones. Esta capacidad de inferencia y lógica para autores como Piaget, es desarrollada a medida que el niño adquiere la madurez mental propia de los

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

estadios de Operaciones Concretas (6-12 años) y Operaciones Formales (12 años a adulto) (Craig, 1997).

Si se reflexiona sobre la necesidad de unas condiciones de desarrollo según edad cronológica, como determinantes en la posibilidad de resolución de problemas, es posible identificar que dicho supuesto contrasta con lo propuesto por autores como Vygotsky, para quien el contexto es vital en la forma como los niños dan soluciones a situaciones planteadas. De hecho, Thornton explica que Piaget basó sus planteamientos bajo resultados de investigaciones experimentales donde se obviaban situaciones familiares para el niño. Tanto adultos como niños requieren de situaciones familiares que les permitan entender el problema para darle solución.

La labor del docente y el valor de las instituciones educativas teniendo en cuenta lo planteado por Vygotsky, consiste en intervenir en el logro de avances de los aprendizajes según su nivel evolutivo, ya sea *real* (actividades que los niños pueden realizar por sí solos y que muestran sus capacidades mentales) o *potencial* (actividades que los niños pueden realizar bajo la mediación o ayuda de otros, en este caso, el docente y/o compañeros más capaces). Así lo aclara Vygotsky (1978):

Cuando por primera vez se demostró que la capacidad de los niños de idéntico nivel de desarrollo mental para aprender bajo la guía de un maestro variaba en gran medida, se hizo evidente que ambos niños no poseían la misma edad mental y que, evidentemente, el subsiguiente curso de su aprendizaje sería distinto. Esta diferencia entre doce y ocho, o nueve y ocho, es lo que denominamos la zona de desarrollo próximo. No es otra cosa que la distancia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz. (p. 10).

Las anteriores consideraciones plantean la necesidad de ver el proceso de aprendizaje en términos evolutivos de ciclos y procesos de maduración ya alcanzados, en proceso y por alcanzar. Este aspecto es importante ya que lleva a una reflexión sobre la práctica docente en medio de la diversidad o particularidades del individuo, cobijando bajo esta perspectiva la posibilidad de evolución en poblaciones tan complejas como lo son las pertenecientes a Déficit Cognitivo.

Álvarez-Grayeb (2011) hace una revisión de las formas de mediación docente tan importante en la postura constructivista. Retomando los aportes de Weil Barais y Dumas-Carré comentados por Morge (2000), refiere que “en grados diversos según los momentos y las circunstancias, los profesores involucrados intervienen tanto en el modo de *tutela* como en el de *mediación*” (p. 155).

Explica que en ambos casos hay puntos en común (animarlo en el desarrollo de la tarea y a que ofrezca sus explicaciones, así como centrar su atención); algunas de las diferencias entre un modo y otro radican en 3 aspectos: 1) el modo y duración del discurso entre el profesor y el estudiante, 2) el tipo de guía ofrecida ante tareas complejas, 3) la manera de tomar en cuenta los errores del alumno.

El modo de tutela tendría un discurso más abundante de parte del profesor, mientras que el modelo mediador mostraría un mayor equilibrio entre ambos discursos. En el segundo modelo el estudiante tendría un papel más activo y reflexivo, el docente tendría por su parte un papel negociador (Álvarez-Grayeb, 2011, p. 156-157).

Para el desarrollo de esta investigación se ha considerado valioso retomar el modelo mediador según lo presenta Álvarez Grayeb (2011) a partir de su revisión frente al tema. El autor

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

define tres niveles de interacción en la mediación según el grado de apoyo requerido por el estudiante frente a una tarea de aprendizaje a saber:

Suave: Mediación de un nivel de apoyo bajo, “centrada en inducir al aprendiz a supervisar sus respuestas y dar retroalimentación inmediata a sus acciones, estimulando con esto un comportamiento auto-regulado.”

Moderada: Mediación de apoyo mayor donde “se ofrecen ejemplos y se muestran estrategias útiles a la tarea para que el aprendiz las tome en cuenta y se decida por una de ellas por su cuenta”.

Fuerte: “se muestra directamente la estrategia requerida y no encontrada por el aprendiz de manera que se pueda responder exitosamente a la pregunta o problema planteado” (p. 158).

Además de las posibilidades en el modo de interacción del docente como mediador, es necesario mencionar la importancia de la mediación de herramientas o artefactos culturales (p.e. compás, escritura, computador, notación matemática) y signos (herramientas psicológicas, la palabra como forma más universal) en el proceso de aprendizaje o formación de estructuras psicológicas superiores como refiere Vygotsky (Esteban, 2010, p. 73; Alvarez-Grayeb, 2011, p. 65-67).

Montealegre (2007) amplía un poco más este aspecto cuando explica que para Vygotsky, “la solución de problemas se analiza en aspectos cognitivos y socio cognitivos, partiendo de la conceptualización de solución de problemas como función psicológica superior, lo cual hace referencia a la combinación de instrumentos y signos culturales que median en actividades psíquicas humanas (p. 22)”.

Galperin bajo la misma escuela de pensamiento de Vygotsky, describe 3 pasos en la internalización de los conceptos: 1) realizar una actividad con objetos 2) pasar a una actividad

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

verbal sin objetos 3) realizar una actividad mental (Arievitch y Haenen, 2005 citado por Alvarez-Grayeb, 2011). De esta manera las herramientas o artefactos inicialmente están fuera del individuo, en el plano intersíquico; después se internalizan como parte de un proceso intrapsíquico a través del uso de tales herramientas.

Así “el desarrollo de la actividad superior humana siempre va a estar mediada por artefactos culturales” y otros adultos con los que se interactúa. El lenguaje entonces es una de las herramientas que permiten mediar los procesos de memoria, atención e inteligencia, está última necesaria para la resolución de problemas (Esteban, 2010, p. 73- 74), y a partir del cual el niño planea la solución de un problema antes de ejecutarlo, controla conductas impulsivas y domina la conducta (Montealegre, 2007, p.21).

Para Coll (2008), las TIC son instrumentos psicológicos “en el sentido vygotskiano cuando su potencialidad semiótica es utilizada para planificar y regular la actividad y los procesos psicológicos propios y ajenos” (p. 9). Aclara que particularmente las TIC digitales, tienen una mayor potencialidad semiótica por integrar los diferentes recursos semióticos conocidos (letras y textos escritos, imágenes fijas y en movimiento, lenguaje oral, sonidos, datos numéricos, gráficos, etc).

Teniendo en cuenta el avance tecnológico de nuestros días y los supuestos de Vygotsky sobre el uso de artefactos o herramientas sumado al papel mediador del docente, es importante reconocer y probar aquellas que potencien el aprendizaje o internalización de los diferentes conceptos. Hoy día es posible contar con variedad de posibilidades como libros digitales, juegos interactivos, aplicaciones, videos, audios, entre otros artefactos.

5.2.2. Referente Disciplinar. Cuando se pretende abordar el tema de Resolución de Problemas como factor asociado al esquema de pensamiento matemático, es importante considerar los básicos de las corrientes teóricas que orientan no solo la enseñanza sino las

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

aproximaciones de lo que ha de ser entendido como pensamiento matemático. La enseñanza de las matemáticas se ha sustentado esencialmente en los principios de dos corrientes o teorías psicológicas: La Teoría Conductista y la Cognitiva.

La Teoría Conductista considera que el aprendizaje de las matemáticas se da a través del adiestramiento en relaciones estímulo-respuesta, teniendo como referente la Ley de la Ejercitación y del Efecto, donde la función del docente es la de transmitir los conocimientos a un estudiante cuyo rol es pasivo y donde la *memorización* es importante. La Teoría Cognitiva por su parte, considera la *comprensión* como pilar del aprendizaje de las matemáticas, teniendo en cuenta la formación de estructuras, dadas por las relaciones entre conceptos (Castro, del Olmo y Castro, 2002).

Antes de ofrecer un marco de referencia sobre la enseñanza de las matemáticas, es necesario precisar un marco que permita entender qué es el pensamiento matemático, como eje central de este proyecto. Es sobre la postura cognitiva que se retoma lo expuesto por autores prominentes en este campo.

Una de las posturas más sobresalientes es la aproximación de Leone Burton (1984), quien explica que pensamiento matemático no es lo mismo que pensar en asuntos del área de las matemáticas, aunque sí es un estilo de pensamiento que está en función de operaciones, procesos y dinámicas claramente de las matemáticas; en pocas palabras, no debe confundirse pensamiento matemático con pensar en matemáticas o su contenido de conocimiento.

Con la intención de proponer un modelo que defina y explique el pensamiento matemático, la autora aclara que su propuesta tiene origen en la premisa de que el *pensamiento* es el medio por el cual los seres humanos mejoran su entendimiento y ejercen un control sobre su entorno. El *pensamiento matemático* provee los medios para lograr este objetivo. Una breve

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

revisión² de los postulados más relevantes de su propuesta titulada *Mathematical Thinking: The struggle for meaning*, se presenta a continuación.

Ante todo la autora aclara que el estilo de pensamiento matemático es pertinente a cualquier contenido o campo en el cual sea este aplicado, semejante al método científico, que no es necesariamente particular a las ciencias. El pensamiento matemático es usado cuando se afrontan problemas en el contexto de cualquier área, aunque preguntas de naturaleza matemática pueden estar más fácilmente expuestas en este tipo de pensamiento. Un problema es apropiado cuando provoca el uso de operaciones, procesos y dinámicas de pensamiento matemático a saber:

Operaciones. Para pensar es requerido algún estímulo o evento (idea, observación suceso). El pensamiento busca representar y relacionar estos eventos de alguna manera, usando para ello métodos u operaciones matemáticas, tales como la enumeración, repetición o iteración, relación y transformación. Esto es expresado cuando se ordenan los eventos o elementos, se hacen correspondencias y se forman equivalencias; combinando o sustituyendo, adicionando o sustrayendo.

Procesos. Para activar el pensamiento matemático y lograr una aplicabilidad general, se requiere de cuatro procesos:

Explorar. Cuando se está de cara a un problema o pregunta, una valiosa forma de explorar su significado es examinando modelos particulares. Esta es la clave de una mirada inductiva en el aprendizaje y es observada de manera natural en los niños. Cada modelo provee la oportunidad de manipular elementos que son concretos en el pensamiento de los niños, si ellos son manifestaciones físicas o ideas.

² La publicación original en inglés es traducida y presentada al español en algunas de sus partes en este documento por Nancy Moreno N.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Conjeturar. Cuando ya se han examinado suficientes modelos, automáticamente se hacen conjeturas sobre las relaciones que los conectan; a través de este proceso se explora, expresa y corrobora un patrón subyacente.

Generalizar. Cuando se reconoce un patrón o regularidad, se provoca la declaración de una generalización. Estas declaraciones parecen construcciones de bloques usados por los aprendices para dar orden y sentido a la abrumadora naturaleza cuantitativa de la información; el comportamiento depende en gran medida de tales generalizaciones.

Convencer. Para ser sólida una generalización debe ser probada hasta que convenza. El pensante debe convencerse primero a sí mismo y luego al mundo que lo rodea, siendo este proceso el medio a través del cual una generalización se mueve de una postura personal hacia una pública.

Según Burton (1984), al invertir los procesos se da lugar a una aproximación *inductiva* (explorar, conjeturar, generalizar) o *deductiva* (generalizar, conjeturar, explorar).

Montealegre (2007) ofrece una conceptualización un tanto más detallada de este tipo de razonamientos. Explica que la deducción “es toda inferencia en general” donde el análisis y la abstracción son los procesos fundamentales de este tipo de razonamiento. La inducción por su parte y según cita a Pellegrino (1986), es “la capacidad cognitiva de generalizar a partir de experiencias específicas para formar conceptos nuevos y más abstractos”. Este tipo de razonamiento “se basa en el desarrollo de reglas, ideas o conceptos generales a partir de grupos o conceptos específicos de ejemplos”. Para que haya deducción se requiere de inducción (Montealegre, 2007, p. 21-22).

Dinámicas. Las dinámicas del pensamiento matemático según Burton (1984), son desplegadas en un número indefinido de bucles, sobre los cuales se cimientan los pensamientos y se logra conocimiento. La dinámica empieza cuando se encuentra un elemento que provoque la

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

curiosidad y exploración a través de la manipulación. Este elemento puede ser un objeto físico, un diagrama, idea o símbolo que sea inspirador e invite a la interpretación. Se percibe entonces un vacío entre lo esperado antes de manipular el elemento y lo que realmente sucede al manipularlo, generando una tensión que a su vez lleva a buscar un patrón. La búsqueda de un patrón ayuda a liberar tensión hacia una sensación de logro, mayor curiosidad o expectativa que hacen que el proceso se mantenga.

Antes de lograr una articulación es necesario un nivel mayor de manipulación del elemento. Una articulación no necesariamente tiene que ser verbal, puede ser expresada a través de un diagrama, símbolo o de forma concreta, lo importante es que transmita o condense la esencia del patrón subyacente al acto de manipulación. El logro de una nueva articulación hace que comience de nuevo un bucle hacia pensamientos más complejos.

Lo que distingue al pensamiento matemático de la actividad científica, es que la noción de prueba o verificación es a su vez una noción o argumento matemático.

Además de considerar el uso de operaciones, procesos y dinámicas, Burton (1984) menciona tres fases afectivas en el pensamiento matemático. La primera de ellas consiste en *entrar* al problema. Esto sucede cuando el problema despierta curiosidad, sorpresa o tensión provocando una necesidad afectiva de querer resolverlo; lleva a una mayor exploración del problema, satisfaciendo una necesidad cognitiva (mitigar el conflicto cognitivo), cuando se busca un patrón subyacente. De aquí se desprenden dos posibilidades de respuesta: Abandonar el problema por una sensación de incapacidad y fallar en el intento, o atacarlo e ir más allá. Esta segunda opción está asociada a personas que han tenido experiencias exitosas en otros “ataques” y están seguras de poder enfrentar una posible falla en el nuevo “ataque”.

La fase de *ataque* entonces se asocia a momentos de manipulación del problema, dando confianza al pensante en la búsqueda de un patrón asociado. La curiosidad y la tensión hacen que

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

se mantenga el ataque hasta que se logre una articulación. La sensación de satisfacción ante el logro lleva a una tercera fase denominada *Revisión*. Esta fase permite situar el conocimiento alcanzado en un contexto más amplio.

Stacey (2007), quien ha acompañado el trabajo de Burton señala la importancia de esta actividad altamente compleja. Explica la importancia del pensamiento matemático en tres aspectos, esto es a) como meta educativa, b) en el aprendizaje de las matemáticas y c) en la enseñanza de las matemáticas.

Respecto al primer aspecto, señala que la habilidad de pensamiento matemático es tan importante en el desarrollo de la ciencia, la tecnología y la economía de un país, que los gobiernos cada vez más están apoyando la capacitación a la población en éste tipo de habilidades. El programa PISA de la OCDE busca evaluar precisamente las habilidades que tienen los estudiantes, y que están asociadas a este tipo de pensamiento en situaciones problema de la vida diaria.

Sobre este mismo punto, el Ministerio de Educación Nacional (2006), propone en sus lineamientos curriculares del área de matemáticas el abordaje de las habilidades de pensamiento matemático, aunque aclara que no es exclusiva su aplicación a ésta área. En la propuesta es subdividido en cinco tipos de pensamiento que han de ser articulados para el logro de diferentes competencias. Estos tipos de pensamiento matemático son: numérico, espacial, métrico o de medida, aleatorio o probabilístico y el variacional. Hace énfasis en los conocimientos conceptuales (derivados de la actividad cognitiva, asociados al saber qué y el por qué) y procedimentales (asociado al saber cómo, a las técnicas y estrategias que llevan a un hacer, o transformación de las representaciones que permitan elaborar, comparar y ejercitar algoritmos para la argumentación) que debe tener un estudiante para ser competente en el campo de pensamiento matemático.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Continuando con el segundo aspecto de importancia según Stacey (2007), el aprendizaje de las matemáticas radica en que los estudiantes que tienen un conocimiento de las habilidades de pensamiento matemático, pueden más fácilmente dar sentido a los contenidos de aprendizaje. Así por ejemplo, si no fuera clara una pregunta dada, los estudiantes podrían decidirse a ensayar un modelo (explorar) y ver qué sucede; si son orientados a la construcción de argumentos (convencer), podrían aprender más sobre razones que sobre reglas.

Como tercer aspecto de importancia se aclara que los profesores requieren de este tipo de habilidades para poder proveer al estudiante de oportunidades de aprendizaje de las mismas. Se debe tener entonces la habilidad para 1) analizar un tema, 2) planear las lecciones según el objetivo propuesto, 3) anticiparse a las respuestas de los estudiantes 4) seguir el proceso del estudiante minuto a minuto como observador y colaborador del mismo, y 5) tener experticia tanto en matemáticas como en pedagogía.

Ahora que hay claridad frente a lo particular del pensamiento matemático como proceso, es importante referir algunas posturas y conceptos asociados al *aprendizaje de las matemáticas*.

Para comprender cómo se produce el aprendizaje matemático, se mencionan tres ideas claves en el análisis de este proceso según Duval (1999):

Carácter paradójico del conocimiento matemático. Solo podemos acceder al mundo de las matemáticas a través de representaciones semióticas; contrario al mundo de las ciencias donde podemos tener representaciones de un mundo real externo, pero no necesitamos de ellas para acceder a él. Aquí es necesario reconocer que el conocimiento matemático requiere de sistemas semióticos para su representación, y que no debe confundirse *Objeto Matemático* (p.e. los números) con sus *representaciones semióticas* (imágenes o representaciones en los diferentes sistemas numéricos, como por ejemplo 1, 2, $\frac{3}{4}$, 20,5, etc). Así por ejemplo, no es posible indicar la existencia del número 1 como un objeto palpable de nuestra realidad, pero sí podemos indicar

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

su existencia cuando usamos representaciones de dicho número (1, uno). Éste y otros elementos del mundo numérico están en el abstracto y solo podemos abordarlos mediante representaciones semióticas.

Ambigüedad en el significado del término representación. No es posible tratar una representación sin tener en cuenta el sistema semiótico en el cual es producida. Hay dos tipos de representaciones cognitivas. Aquellas que se producen de manera intencional, usando un sistema semiótico como por ejemplo, oraciones, gráficas, diagramas, dibujos, etc. Las segundas se refieren a aquellas que son producidas de manera casual y automática tanto por el “sistema orgánico” (un sueño o imágenes por memoria visual), como por dispositivos en físico (fotografías o imágenes).

Necesidad de varios sistemas semióticos. La historia ha mostrado desde la antigüedad el desarrollo de varios sistemas semióticos que han permitido el progreso de las matemáticas. El desarrollo de los mismos está ligado al lenguaje y a la imagen. Es así como se tiene que la notación del álgebra se vale del lenguaje escrito mientras las gráficas permiten explicar ecuaciones. Cada nuevo sistema semiótico provee de formas específicas de representación y procesamiento al pensamiento matemático. De esta manera, el autor explica que tenemos varios registros de representación discursiva y varios de sistemas de visualización; así mismo contamos con dos tipos de registro, según estructura de tríada (lenguaje natural, representación de figuras bidimensionales o tridimensionales) o dual (notación simbólica, lenguajes formales, diagramas).

Respecto a cómo es el proceso, Duval (1999) explica que es posible a partir de *operaciones cognitivas del pensamiento matemático*. Debemos ser capaces de activar en paralelo dos o tres registros de representaciones. Esto determina los tres requerimientos específicos para el aprendizaje de las matemáticas, que son 1) comparar representaciones similares con el mismo registro, con el fin de discriminar valores relevantes en un conocimiento matemático, 2) convertir

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

una representación de un registro a otro y 3) discriminar una forma específica de trabajar para comprender el proceso matemático que se lleva a cabo en ese registro. Explica que debido a que no se está familiarizado con esta forma de pensamiento, se busca dar seguridad y sentido a la actividad propuesta, a través de manipulaciones concretas o a través de aplicaciones a situaciones reales. Las representaciones y la visualización como corazón de las matemáticas, son útiles cuando involucran objetos físicos o situaciones concretas.

Considerando lo anterior, se resalta el aporte de Arcavi (2003) sobre el rol de la visualización en matemáticas y su relación con tecnologías cognitivas.

Para el autor la “*Visualización* es la capacidad o habilidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre figuras, imágenes, diagramas, en nuestra mente, sobre el papel o con herramientas tecnológicas con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar en la comprensión” (Arcavi, 2003, p.217)³.

Así, para el autor la visualización hace visible lo invisible. Esto se refiere a la habilidad de ver el mundo abstracto, lo que ninguna tecnología o dispositivo óptico hace o posee.

De acuerdo con Pea (1987) y considerando la naturaleza paradójica de las matemáticas referida por Duval (1999), Arcavi (2003) plantea la posibilidad de que los seres humanos necesitemos de una “tecnología cognitiva” que nos permita trascender las limitaciones de la mente frente a actividades de pensamiento, aprendizaje y solución de problemas. Así lo describe frente al campo de la Matemática:

Tales tecnologías podrían desarrollar medios visuales que permitan mejores formas de ver los conceptos e ideas matemáticas. La Matemática, como creación humana y cultural, trata con objetos y entidades muy diferentes de los fenómenos físicos (como planetas o

³ Traducción del inglés al español realizada por Nancy Moreno N.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

células sanguíneas); depende pesadamente (posiblemente más de lo que los matemáticos desearían admitir) de la visualización en sus diferentes formas y niveles, más allá del obvio campo visual de la geometría o la visualización espacial.” (Arcavi, 2003, p. 216-217)⁴

Para el autor esta habilidad no está únicamente relacionada a propósitos ilustrativos sino que es parte esencial del razonamiento, (profundamente ligada a lo conceptual y no solamente a lo perceptivo), a la resolución de problemas y a la comprobación (Arcavi, 2003, p. 235).

Van Garderen (2006) explica a partir de diferentes estudios que la habilidad de visualización es desplegada más exitosamente en estudiantes talentosos ($CI > 130$) y estudiantes promedio, que en estudiantes con dificultad en el aprendizaje ($CI < 85$) a la hora de resolver problemas verbales. Mientras los primeros reportaban el uso de imágenes mentales (como por ejemplo imaginar su participación en el problema) o *esquemas* (formas elaboradas de representación visual) para representar los problemas, los estudiantes con dificultad no reportaban ninguna estrategia visual a la hora de dar una respuesta, o se valían de representaciones pictóricas que se correlacionaba negativamente con el desempeño en las tareas.

Según Presmeg (2006), se encuentra que hay individuos visualizadores y no visualizadores frente a la preferencia de uso de métodos de resolución de problemas. Dentro de las posibilidades de visualización según la autora, refiere el uso de imágenes. Para ella una imagen es un esquema mental utilizado para representar información visual o espacial. En un estudio realizado con estudiantes de quinto grado de primaria y once grado de secundaria, Brown y Presmeg (1993), presentan una clasificación sobre el tipo de imágenes usadas en el

⁴ Traducción realizada por Nancy Moreno N.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

razonamiento matemático, así como aquellas más usadas por la muestra seleccionada de ambos grupos. La Tabla 2 relaciona los cinco tipos de imágenes propuestos y su descripción.

Tabla 2.

Tipos de Imágenes según Brown y Presmeg (1993).

Tipo de imágenes	Descripción
Concretas Pictóricas	Imágenes figurativas de objetos físicos. Dibujo en la mente con alto detalle, sin movimiento. Suelen no ser muy útiles en el entendimiento de la matemática.
Fórmulas de memoria	Visualización mental de fórmulas o relaciones esquemáticas de la misma manera en que aparecerían por ejemplo, en los libros de texto. Cuando son semejantes a la concretas pueden no ayudar en el entendimiento de la matemática.
Cinéticas	Imágenes en parte físicas y en parte mentales, que involucran actividad muscular de algún tipo. Usualmente se hacen movimientos de manos o dedos. Muy frecuentes en los estudiantes más pequeños.
Dinámicas	Demandan una habilidad para mover o transformar una imagen visual. Imágenes mentales en las que los objetos o algunos de sus elementos se mueven o transforman.
De patrones	Imágenes de esquemas visuales correspondientes a relaciones altamente abstractas (son imágenes de orden superior como las que pudiera manejar Einstein). A diferencia de las anteriores, no se visualiza la relación propiamente dicha (una fórmula generalmente), sino alguna representación gráfica de su significado. Relaciones puras, sin detalles.

Nota. La Información de esta tabla es una recopilación de las definiciones ofrecidas por Presmeg (1986) sobre los cinco tipos de imágenes, que son retomadas en posterior investigación publicada por Brown y Presmeg (1993), recopilada por la PME y que son traducidas al español por Nancy Moreno.

En el estudio mencionado, se halló que todos los estudiantes exhibían algún tipo de imagen. Los más habilidosos en matemática mostraban un mayor uso de imágenes dinámicas y de patrones, es decir de orden más abstracto. Los menos habilidosos mostraron un manejo de

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

imágenes concretas y de memoria. Tan solo un estudiante de cada grupo hizo uso de imágenes por patrones.

Los autores que reconocen la importancia de este tipo de modelos, y su evolución según los diferentes momentos del desarrollo histórico de la matemática y sus tendencias, explican que debido al auge de la corriente conductista (behaviorism) en el siglo XX, la investigación en el campo de las representaciones mentales iniciado en el siglo XIX se discontinuó. Tras décadas de priorización del pensamiento analítico, re-emerge la investigación sobre visualización en matemáticas hacia finales de la década de los 70 y comienzos de los 80, siendo la de los 90 la de mayor reconocimiento y aporte en el campo en la educación. Más adelante el avance tecnológico suscitó la necesidad de investigar sobre el tema, algo que actualmente continúa siendo un referente significativo de investigación (Presmeg, 2006, Guzmán, 1993).

Para el tema específico que desarrolla el presente estudio, ha de considerarse no solo un marco propio de pensamiento matemático, sino que además ha de mencionarse aspectos formales del concepto matemático a abordar con la población objeto de estudio, en este caso la Suma.

Una conceptualización de los tipos de problemas en los que es útil la suma, es ofrecida por Carpenter y Moser (1983), cuando caracterizan los problemas verbales de adición y resta en 4 grupos: Cambio, combinación, comparación e igualamiento. La Tabla 3 presenta ejemplos de problemas con suma y resta según los autores.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Tabla 3.

Tipos de Problemas de Suma y Resta según Carpenter y Moser (1983).

Unión	Separación
Cambio	
1. María tiene 5 cromos, Jaime le da ocho más, ¿cuántos tiene ahora?	María tiene 13 cromos y le da 5 a Jaime, ¿con cuántos se ha quedado?
2. María tiene 5 cromos, ¿cuántos tiene que conseguir para tener 13?	María tiene 13 cromos y da algunos a Jaime. Si ahora tiene 8, ¿cuántos le dio?
3. A los cromos que tenía María, Jaime le añadió 5. Si ahora tiene 13, ¿cuántos tenía al principio?	María tenía algunos cromos de los que dio 5 a Jaime. Si ahora tiene 8, ¿cuántos tenía al comenzar?
Combinación	
María tiene cinco canicas rojas y 8 azules, ¿cuántas canicas tiene en total?	María tiene 13 canicas, cinco de ellas rojas y el resto azules. ¿Cuántas canicas azules tiene?
Comparación	
María tiene 13 años y Jaime 5, ¿cuántos años tiene María más que Jaime?	María tiene 13 años y Jaime 5, ¿cuántos años tiene Jaime menos que María?
Jaime tiene 5 años y María 8 más que él, ¿cuántos años tiene María?	Jaime tiene 5 años, 8 menos que María. ¿Cuántos años tiene María?
María tiene 13 años, cinco más que Jaime, ¿cuántos años tiene Jaime?	María tiene 13 años y Jaime tiene 8 menos, ¿cuántos años tiene Jaime?
Igualamiento	
María tiene 13 cromos y Jaime 5 ¿Cuántos tiene que conseguir Jaime para tener tantos como María?	María tiene 13 cromos y Jaime 5 Para tener tantos como Jaime, ¿cuántos debe perder María?
Jaime tiene 5 cromos, si gana 8 tendrá tantos como María ¿Cuántos tiene María?	Jaime tiene 5 cromos, si María perdiera 8 tendría tantos como él ¿Cuántos cromos tiene María?
María tiene 13 cromos, si Jaime gana 5 tendrá tantos como María ¿Cuántos cromos tiene Jaime?	María tiene 13 cromos, si pierde 5 tendrá tantos como Jaime ¿Cuántos cromos tiene Jaime?

Nota: La información contenida en esta tabla es elaborada según el trabajo original de Carpenter y Moser (1983), por el profesor Luis Carlos Contreras, de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Huelva en España, quien la presenta en página web institucional.

Como puede apreciarse en la Tabla 3, los problemas de Unión para la tipología Cambio, tratados en este estudio, permiten identificar 3 momentos en el tiempo: Una *situación inicial*, un *cambio* que le precede y que lleva a una *condición final*. Carpenter, Moser y Bebout (1988),

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

explican que la representación de problemas verbales con enunciado numérico de tipo $a + b = ?$ y $a - b = ?$ son más fáciles de resolver para los niños por las acciones sencillas de unión y separación que las caracteriza. Caso contrario a si el lugar de la incógnita cambia y demanda un cambio en el patrón de resolución del problema, como en el caso de las situaciones problema 2 y 3 presentadas en la Tabla 2, donde se plantearían los enunciados numéricos de tipo $a + ? = c$ y $? + b = c$.

La razón dada a la dificultad para escribir los enunciados numéricos y solucionar más fácilmente este tipo de problemas verbales, consiste en que los niños de manera mucho más natural acuden a estrategias informales de conteo y representación del problema. Cuando se busca que representen la estrategia empleada en enunciados numéricos abiertos⁵, acuden a representaciones simbólicas de un modelo convencional (de unión o separación sencilla). (Carpenter et al, 1988, p. 347).

Otra dificultad mencionada tiene que ver con el tamaño de las cifras dadas. Los mismos autores explican que las mismas estrategias de modelamiento con objetos físicos y conteo son efectivas para números pequeños, más no para problemas con números mayores o más complejos. De ahí la importancia de formas de representación numérica y la necesidad de aplicar procedimientos algorítmicos (Carpenter et al, 1988, p. 345).

En publicación previa, Carpenter y Moser (1984) identifican tres niveles de estrategias empleadas en la resolución de problemas de adición o suma:

- Elaboración de un modelo con dedos o con objetos físicos.
- Estrategias basadas en el uso de secuencias de recuento.

⁵ Según Carpenter et al (1988), un enunciado numérico abierto es del tipo $a + ? = c$ y $? + b = c$, mientras que un enunciado formal corresponde a planteamientos de tipo $a + b = ?$ y $a - b = ?$

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

- Estrategias basadas en datos numéricos recordados.

La tabla 4 permite identificar las estrategias al interior de cada nivel según lo describen los autores:

Tabla 4.

Niveles y estrategias de Adición según Carpenter y Moser (1984).

Nivel	Estrategia	Descripción
Elaboración de un modelo con dedos o con objetos físicos.	Contar todo	Representa ambos conjuntos usando objetos físicos, los dedos. Cuenta la unión de estos dos conjuntos.
Estrategias basadas en el uso de secuencias de recuento.	Contar desde el primero	La secuencia de conteo inicia con el primer número dado en el problema y continúa con el número de unidades representadas por el segundo número. La respuesta es el número final de la secuencia.
	Contar desde el mayor	La secuencia de conteo comienza con el mayor de los dos números dados en el problema y continúa con el número de unidades representadas por el más pequeño o menor. La respuesta es el número final de la secuencia.
Estrategias basadas en datos numéricos recordados.	Recordar	Se hace un recobro inmediato desde la memoria a largo plazo y no parece haber un conteo.
	Dato derivado	El dato numérico es derivado de un dato recordado

Nota: La información contenida en esta tabla es adaptada por las investigadoras del presente proyecto según la propuesta en el documento original (Carpenter y Moser, 1984, p. 181). La traducción es realizada por Nancy Moreno.

La pregunta que surge ahora sobre este mismo aspecto es ¿Qué estrategias emplean los estudiantes con algún tipo de discapacidad cognitiva cuando se trata de resolver problemas verbales de suma o resta? La respuesta a esta pregunta la ofrece Moscardini (2010), a partir de su investigación con estudiantes de primaria diagnosticados con Déficit Moderado en Escocia. El autor en su investigación encuentra que los estudiantes con dicho diagnóstico mostraron el amplio rango de estrategias descrito por Carpenter et al (1984, 1999).

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Adicionalmente, el grupo fue capaz de inventar, transferir y retener las estrategias de resolución de los problemas; las respuestas de los estudiantes se da de manera mucho más intuitiva, algo que debe ser aprovechado por los profesores en lugar de introducir de primera mano una demostración sobre cómo debe desarrollarse el problema. Ha de emplearse una metodología de instrucción cognitiva basada en la interacción profesor-estudiante, que permita la identificación de los procesos particulares de pensamiento matemático y así poder guiar el aprendizaje (Moscardini, 2010, p. 134-136). Pérez y Tomás (2010) explican que los niños con discapacidad intelectual requieren un mayor espacio de tiempo para el logro de los aprendizajes según el nivel de desarrollo cognitivo.

5.2.3. Referente TIC en Educación. El auge de las Tecnologías de la Información y la Comunicación desde finales del siglo XX, ha traído consigo retos a los diferentes ámbitos de la sociedad. En el campo de la educación, este auge tan acelerado según Domínguez (2009), ha dificultado la reflexión sobre las posibilidades, usos, bondades y consecuencias cuando se introducen al aula.

La Sociedad del Conocimiento exige un replanteamiento de los roles y finalidades de la educación, como por ejemplo, desarrollar destrezas necesarias en el nuevo siglo, que al final apunten al desarrollo de las sociedades bajo un principio de equidad, como establece la Unesco (2013). Bajo este principio todo país debe garantizar unas condiciones mínimas para la incorporación de herramientas TIC en los espacios educativos; así como buscar formas “múltiples de respuesta a diferentes contextos y estudiantes diversos” (Unesco, 2013, p. 17-28).

Según el Centro Virtual de Noticias de la Educación (2013), en Colombia el Ministerio de Educación ha venido adelantando políticas orientadas a la capacitación docente, la incorporación de las TIC en el currículo, la creación de una cultura de la investigación y generación de

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

conocimientos, así como aumento y mejora en la calidad de la enseñanza, aparte de la posibilidad de acceso ilimitado al conocimiento por parte de los estudiantes. Colombia Aprende es una de las iniciativas del Gobierno Nacional, calificado por la Unesco como uno de los tres mejores portales educativos de Latinoamérica y El Caribe, el cual permite a docentes y estudiantes la creación de redes de aprendizaje y pone a su disposición contenidos digitales.

En el contexto distrital, la Secretaría de Educación ha hecho esfuerzos por ampliar el ancho de banda que permita posibilitar el acceso a contenidos digitales en diferentes formatos (aplicaciones, tutoriales, animaciones, etc) que permitan la innovación y enriquecimiento de las prácticas de enseñanza-aprendizaje (Secretaría de Educación de Bogotá, 2014).

Hasta este punto es posible observar que Colombia ha buscado situar sus políticas educativas en relación al desarrollo de ciertas habilidades exigidas tanto de los docentes como de los estudiantes. El camino por recorrer como bien se plantea es desarrollar investigación e innovación alrededor de las posibilidades de uso de las TIC en los ambientes educativos.

En coherencia con los objetivos de innovación e investigación en adopción de herramientas TIC al aula, el presente estudio busca probar las ventajas de herramientas de reciente desarrollo denominadas *Objetos Manipulativos Virtuales (MV)*.

Pero ¿Qué significa Objeto Manipulativo Virtual? Según Moyer, Bolyard y Spikell (2002), un objeto manipulativo virtual (MV) es “una representación visual de un objeto dinámico e interactivo, basado en la Web, que presenta oportunidades para la construcción del aprendizaje matemático y que puede ser manipulado como lo pudiera ser en lo físico” (p. 2).

Valenzuela (2012) ofrece un recuento bastante interesante sobre la evolución de lo que hoy denominamos manipulativos. Según la autora, la historia refiere que una manera de hacer concretas las operaciones matemáticas en la antigüedad, fue a través de quemaduras en madera, anudado de cuerdas, cuentas de piedra u otro tipo de objetos. Tiempo después apareció el ábaco

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

como herramienta que hizo posible una conexión entre la escritura de los números y las operaciones.

Ya en el campo de la educación especial, se encuentra que Itard (1774-1836) y Séguin (1812-1880) ámbos médicos franceses, hicieron uso de diferentes materiales como método de aprendizaje sensorial. Séguin crea escuelas para niños con deficiencia mental en Europa y América donde hace uso de las tablas que llevan su nombre, las cuales inspiraron a María Montessori a desarrollar la metodología que en esencia busca partir de lo concreto. A Dienes se le debe la introducción de Blóques que llevan su nombre (Valenzuela, 2012, p. 36).

A nuestros días según Churchill (2005), el avance de la tecnología permite crear objetos que potencian el aprendizaje; las características visuales e interactivas las posicionan como herramientas mediadoras de gran utilidad en la generación de residuos cognitivos, mejorando al final la capacidad intelectual del aprendiz. Este avance entonces ha hecho posible recrear en la virtualidad y mediante lenguajes de programación como Java, algunos de los materiales ya mencionados, permitiendo una interacción semejante a la que pudiera realizarse con manipulativos en físico. La efectividad de los manipulativos virtuales (MV) en el aula y sus posibilidades es un tema relativamente nuevo que hasta ahora está siendo investigado.

Moyer, Bolyard y Spikell (2002) citan entre sus ventajas en la enseñanza de las matemáticas las siguientes:

- Fácil accesibilidad por estar disponibles en internet (usualmente).
- Permiten enlazar información icónica y simbólica.
- Guardar un registro de tareas o actividades.
- Permiten involucrarse tanto como los manipulativos físicos.
- No se limitan únicamente al aula. Pueden ser consultados por estudiantes y/o padres de familia en casa u otros lugares.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

- Permiten alteraciones (agregar color, trazar líneas, señalar partes de una figura, etc).
- Posibilidad de acceso a un gran número de estudiantes, contrario a los manipulativos físicos (que pueden ser insuficientes en número y ocupar cierto espacio).

Un concepto asociado al de objeto manipulativo virtual es el de *Objetos manipulativos concretos*. Clements (2000), hace una reformulación del concepto *Concretismo* derivado de las teorías psicológicas y del aprendizaje, para dar lugar a un nuevo concepto asociado a objetos manipulativos. El nuevo concepto refiere que no son únicamente objetos físicos o “reales” sino que también pueden ser imágenes que conectan a otros niveles de representación. Para el autor existen 2 niveles de conocimiento Concreto⁶:

Conocimiento Concreto sensorial: Se refiere a la necesidad de usar elementos o material sensorial para tener una idea de lo que se requiere conocer. Se evidencia en los niños que a temprana edad necesitan tener objetos a la mano para resolver problemas de conteo, suma o resta.

Conocimiento Concreto Integrado: Se refiere al conocimiento construido mientras se aprende. Es el conocimiento que está conectado de maneras especiales. Lo que hace fuerte al pensamiento integrado concreto es la combinación de muchas ideas interconectadas en una estructura de conocimiento. Lo que hace a una idea de tipo Concreta Integrada es qué tan significativamente se conecta a otras ideas y situaciones. El autor cita el ejemplo de Jacob, un niño de primaria a quien le preguntaron cuánto era $\frac{3}{4} + \frac{3}{4}$. La respuesta de Jacob ($1 \frac{1}{2}$), fue hallada a partir de la relación de los conceptos planteados (unidades fraccionarias) con otros conceptos (en términos de monedas). Para él $\frac{3}{4}$ es igual a 75 centavos de dólar, por lo tanto $75 + 75$ da como resultado 1, 50. Traducido a fracciones $1 \frac{1}{2}$. Jacob mostró una estructura de

⁶ Traducción realizada por Nancy Moreno del documento original en inglés.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

pensamiento fuerte donde se interrelacionan conocimientos, objetos físicos, acciones ejecutadas con ellos y abstracciones.

MacLellan (2011), explica que los profesores que usan manipulativos virtuales llevan a que sus estudiantes tengan un aprendizaje intuitivo de los contenidos, colabora al pensamiento crítico, a un aprendizaje comprensivo. Sobre su uso, Heddens (2005) ofrece algunas recomendaciones a los docentes que aplican objetos manipulativos virtuales en sus clases, con el fin de evitar conocimientos errados o percepciones equívocas, como por ejemplo tener la percepción de 2 tipos de matemática (una simbólica y otra manipulable). Para evitar confundir a los estudiantes el profesor procurará:

- Escuchar al estudiante cuando expresa su pensamiento matemático.
- Observar al estudiante cuando trabaja individualmente y en grupo.
- Formular preguntas de tipo cómo y por qué, más que responder.
- Hacer que los estudiantes escriban una solución a un problema más que una respuesta de valor correcto o incorrecto.

Las recomendaciones de Heddens irían de la mano con la afirmación de Clements (2000), quien indica que un objeto virtual no garantiza por sí solo un aprendizaje correcto de las matemáticas. Durante la implementación del objeto, el maestro debe cumplir con unas condiciones mínimas que orienten dicho proceso de aprendizaje, esto es, favorecer las habilidades de pensamiento matemático e ir progresando en los aprendizajes.

En un análisis sobre el uso de manipulativos para el aprendizaje, Manches y O'Malley (2012), no solo coinciden en la importancia de la mediación docente en el uso de este tipo de materiales, sino que además tipifican los múltiples beneficios de los manipulativos bajo 2 categorías: Beneficios Teóricos y Pragmáticos. Los primeros refieren la utilidad de este tipo de

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

herramientas cuando se quiere lograr representaciones concretas y simbólicas; los segundos, recopilan todas aquellas ventajas de uso y economía ya referidas.

Según los autores, a partir de la revisión de diferentes estudios sobre el uso de manipulativos en físico y virtuales (a lo que ellos denominan digitales), la posibilidad de integrar tecnología a objetos físicos ha animado el desarrollo de nuevos materiales educativos. Sin embargo, hay un gran vacío o falta de claridad frente a cómo estos materiales permiten el aprendizaje, ya que en su generalidad no responden a un diseño pensado en cómo afectan los procesos cognitivos (Manches y O'Malley, 2012, p. 405-407).

Dichos autores explican que los manipulativos en general soportan y colaboran en los procesos de pensamiento mediante 2 mecanismos:

Descarga Cognitiva: Los manipulativos colaboran en liberar recursos cognitivos durante la resolución de problemas; es decir, minimizan el esfuerzo cognitivo. Este mecanismo permite el andamiaje en actividades de aprendizaje, al ayudar al niño a procesar información relevante.

Metáforas Conceptuales: La información perceptual o las acciones con los objetos tienen una correspondencia con la estructura de conceptos más simbólicos. Este tipo de materiales permitirían diferentes representaciones de una estructura abstracta (re-representaciones de un problema). Los manipulativos proveen entonces una metáfora con la cual razonar de manera explícita sobre conceptos novedosos, valiéndose del lenguaje como medio de expresión consciente (*razonamiento analógico*); también involucran experiencias perceptuales derivadas de la interacción con este tipo de materiales o lo que los autores denominan *embodied cognition*.

En síntesis, durante el proceso de pensamiento hay que considerarse tanto la actividad cognitiva como las experiencias perceptuales asociadas a ella. Un ejemplo de metáfora conceptual provista por un manipulativo es la del sistema de base 10, representada mediante los bloques Base Diez de Dienes.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

La invitación de los autores es a avanzar en investigaciones que permitan entender estos mecanismos y así aportar en el diseño de materiales más efectivos. En el desarrollo de esta investigación, esto supone la identificación de recursos que a nuestros días prometan una ayuda en los procesos de aprendizaje y probarlos bajo una nueva mirada.

Actualmente una de las fuentes más completa de consulta de manipulativos virtuales la constituye la *National Library of Virtual Manipulatives (NLVM)*, donde es posible encontrar recursos dirigidos a diferentes grados desde preescolar a secundaria. La biblioteca maneja un índice temático sobre 5 ejes de la matemática: Números y Operaciones, Álgebra, Geometría, Medidas y Análisis de Datos y Probabilidad. La biblioteca como tal es financiada por la National Science Foundation y las herramientas allí encontradas son desarrolladas por la Universidad del Estado de Utah. Estas herramientas son de acceso directo y libre en la Web y en varias plataformas gracias a que son applets desarrollados en lenguaje Java.

Otras fuentes en línea y no descargables son *Illuminations* (presenta diferentes recursos para diferentes edades desde grado preescolar a niveles de secundaria, sobre diferentes temas de la matemática como geometría, algebra, análisis de datos y probabilidad, entre otros), la cual tiene un reconocimiento por la Presidential Awards for Excellence in Mathematics and Science Teaching.

Didacticprimaria.com es una página que ofrece una amplia variedad de recursos clasificados en bibliotecas de manipulables para grado primaria y unos pocos para niveles superiores; incluye aplicaciones sobre lógica, razonamiento inductivo, deductivo, analógico, entre otros.

A partir de lo ya mencionado sobre los aspectos propios de los manipulativos virtuales, podemos entender que son herramientas de data antigua que han evolucionado hasta posicionarse hoy día como herramientas novedosas gracias a la virtualidad. Tal ha sido su impacto a lo largo

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

de la historia en los procesos de enseñanza, que actualmente se plantea la importancia de indagar en los aportes y mejores formas de implementación en el aula, teniendo en cuenta población diversa. Sobre este último aspecto es importante también definir lo que aquí se entiende por Ambiente de Aprendizaje y los elementos que lo componen.

5.2.4 Ambiente de Aprendizaje. Al hacer una revisión de la definición de Ambiente de Aprendizaje, se encuentra que son diferentes las posturas frente a este concepto. Así por ejemplo, se encuentra la definición mencionada por la Secretaría de Educación Distrital (2013) donde los ambientes de aprendizaje son “espacios donde se generan oportunidades para que los individuos se empoderen de saberes, experiencias y herramientas que les permiten ser más asertivos en las acciones que desarrollan durante la vida” (p.9).

Dicha definición más adelante es replanteada desde la reorganización curricular por ciclos, donde se les define como “el proceso pedagógico que conjuga, los sujetos, las necesidades y los contextos a la luz de nuevas propuestas didácticas, permite generar condiciones y nuevas perspectivas de aprendizaje, mediante el fomento de la reflexión y la creatividad, evocando espacios de reconocimiento individual, colectivo y de apropiación de experiencias significativas para la vida de los sujetos” (p.9).

Para el desarrollo de este proyecto se ha considerado el aporte de Tobón (2010) quien define un Ambiente de Aprendizaje como “ “lugares”, ya sean presenciales, semipresenciales o virtuales, que se crean para ejercer el acto de la enseñanza y propiciar el aprendizaje a través de diferentes medios” (p. 8). El propósito de los ambientes de aprendizaje según la misma autora, sería fortalecer las habilidades de resolución de problemas cotidianos, ante lo cual es necesario un cambio de los roles docente – estudiante, siendo el primero un guía dentro de los procesos de aprendizaje y el segundo, un sujeto activo y ávido de conocimiento.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

5.2.5 Diseño del Ambiente de Aprendizaje. En el diseño del Ambiente de Aprendizaje aquí propuesto, se ha considerado un proceso continuo o cíclico de evaluación de los aprendizajes según el modelo de Stufflebeam y Shinkfield, (1987) mencionado por Escudero (2003). Para los autores es importante contar con cuatro momentos a saber:

Contexto (ámbito). Análisis de los problemas o necesidades educativas. De aquí se fijan metas y objetivos (generales y específicos). A partir de estos se establece un programa.

Entrada. Diseño y manejo de recursos. La Evaluación de estrategias de acción, qué y cómo utilizar estas estrategias.

Proceso. Camino hacia la meta. Permite detectar fallas en el diseño del procedimiento.

Salida o Producto. Resultados obtenidos. En la evaluación del producto el objetivo es la medición e interpretación de los resultados del programa, no solo cuando este finaliza sino también durante el desarrollo del mismo, teniendo como punto de referencia y comparación los objetivos iniciales.

De acuerdo con este modelo, para el diseño del ambiente de aprendizaje aquí propuesto, se tiene un primer momento de identificación de saberes previos, como primer momento de contextualización que permite detectar fortalezas y debilidades. Una segunda forma de evaluación se da de manera interna a las sesiones, cuando a partir de cada una de las actividades se ofrece realimentación inmediata. Un tercer momento decisivo y previo a la evaluación del objetivo de la sesión, es la revisión de tareas o actividades de casa.

Un último momento de evaluación es al final de cada sesión, donde se verifica el cumplimiento de cada objetivo de evaluación según rúbrica diseñada para este fin. Al final del ambiente de aprendizaje se cuenta con una evaluación sumativa que permite verificar la consolidación de los nuevos aprendizajes. En este momento también se cuenta con una rúbrica, que

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

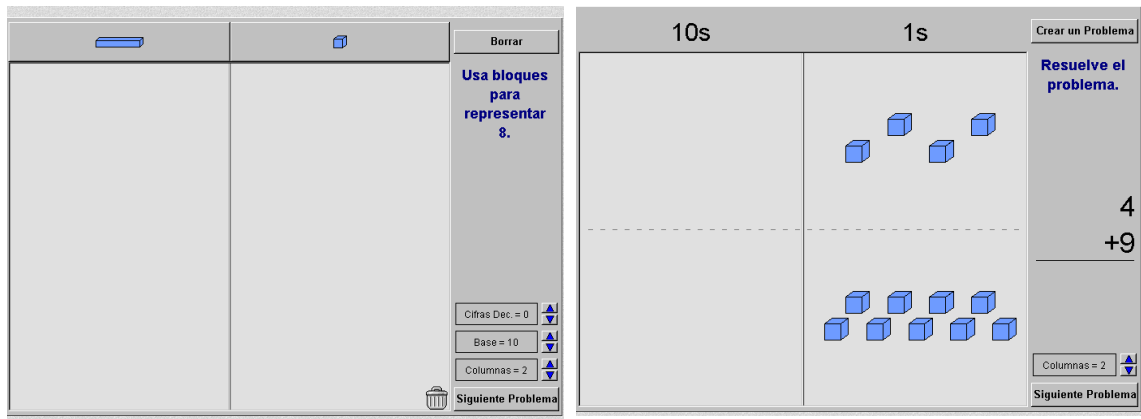
permite verificar el cumplimiento de cada uno de los objetivos según sesiones previas, que a su vez facilitan alcanzar el objetivo general.

De manera concreta el diseño busca el logro del objetivo, *Aplicar el concepto Suma en la resolución de problemas*. Cada sesión tiene un tiempo de desarrollo de 45 minutos, y los objetivos de aprendizaje para cada una son los siguientes:

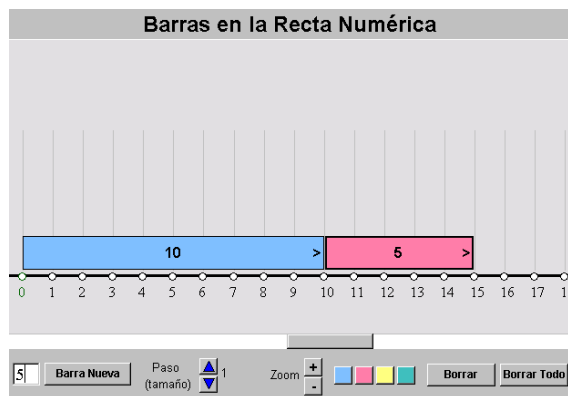
- Identificar saberes previos sobre el concepto suma (sesión 0)
- Representar cantidades según el valor de posición en números de mínimo 2 dígitos, aplicando la regla de reagrupación cuando corresponda (sesión 1).
- Reconocer los símbolos y notación propios de la suma (sesión 2)
- Plantear, representar y resolver problemas sencillos que involucren la suma o adición (para las sesiones 3, 4, 5).
- Aplicar el concepto Suma en resolución de problemas (sesión 6, verificación de conocimientos nuevos).

Como mediadores en el proceso de aprendizaje según los objetivos del ambiente, se han seleccionado tres herramientas del índice temático *Números y Operaciones* de la National Library of Virtual Manipulatives (NLVM); estas herramientas manipulativas virtuales son “Bloques de Base”, “Bloques de Base adición” y “Recta numérica”. La figura 2 muestra un pantallazo de la interfaz de dichas aplicaciones.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO



Bloques de Base



Bloques de Base Adición

Recta Numérica

Figura 2. Interfaz de las herramientas manipulativas virtuales aplicadas en el ambiente de aprendizaje. Estas herramientas son parte de los recursos de la National Library of Virtual Manipulatives (NLVM).

Frente a los roles de los diferentes actores del ambiente se acude al modelo pedagógico referido por la teoría de Vygotsky, donde los manipulativos virtuales y la mediación del docente cumplirían una función de enlace entre elementos concretos, conceptos y símbolos asociados al tema. El rol del estudiante es *interactuar* con el docente, *explorar* las herramientas presentadas y *explicar* los procedimientos realizados para cada tarea.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Una descripción de cada una de las sesiones diseñadas se presenta a continuación: (Es posible acceder nuevamente a esta descripción y a las rúbricas de evaluación de cada sesión, así como a la guía docente y formatos de actividades en los anexos A y B de este documento).

Estrategia didáctica

Objetivo General: Aplicar el concepto Suma en la resolución de problemas.

Objetivos específicos:

- Identificar saberes previos sobre el concepto suma.
- Representar cantidades según el valor de posición en números de mínimo 2 dígitos, aplicando la regla de reagrupación cuando corresponda.
- Reconocer los símbolos y notación propios de la suma
- Plantear, representar y resolver problemas sencillos que involucren la suma o adición.

Tema central de la estrategia didáctica:

La Suma:

- Valor de posición y regla de reagrupación.
- Representación de la suma (símbolos, notación)
- Resolución de situaciones en las que se aplique la suma.

Las técnicas a aplicar según las estrategias son las siguientes:

Aprendizaje Interactivo:

Exposición del docente: Permite introducir los nuevos conceptos y aclarar dudas cuando sea necesario, así como orientar las actividades programadas en el desarrollo de la estrategia.

Esta técnica se aplica en el desarrollo de las siguientes actividades:

Instrucción sobre actividad de identificación de pre saberes y familiarización con el software.

Explicación de conceptos del tema (suma, notación, aplicación).

Aclaración e introducción de conceptos a partir de las actividades generadas (conteo de unidades a partir de material en físico, aclaración e introducción de concepto de valor posicional y agrupación a partir del uso de manipulativos virtuales (“Bloques de Base”, “Bloques de Base Adición” y “Recta Numérica Barras” de la National Library of Manipulatives NLVM); planteamiento y solución de problemas o situaciones asociadas al tema).

Orientación general de las actividades programadas en el desarrollo de la estrategia.

Evaluación de los aprendizajes a través de actividades en clase y verificación de logro de objetivo según el planteado para cada sesión.

Autoaprendizaje:

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Tareas individuales de desarrollo en clase y en casa: Permiten manejar y relacionar los conceptos, para posteriormente aplicarlos.

Asignación de tareas de desarrollo individual en clase y en casa: Ejercicios sobre representación gráfica de sumas, notación o representación numérica y solución de problemas.

Para facilitar la relación de conceptos, la discusión y aclaración entre pares sobre el tema se tiene previsto el desarrollo de las siguientes actividades:

Resolver situaciones problema haciendo uso del manipulativo virtual “Bloques de Base adición” y “Recta numérica Barras” de la National Library of Virtual Manipulatives (NLVM).

Plantear situaciones que involucren adición o suma mediante aplicativo o virtual manipulable “Bloques de Base adición” y “Recta Numérica Barras” de la National Library of Virtual Manipulatives (NLVM).

Instrucción para desarrollar las técnicas de la Estrategia Didáctica:

Visibilización del esquema de pensamiento: Para lograr evidenciar la formación de esquemas mentales el docente deberá:

Escuchar a los estudiantes cuando expresan su pensamiento sobre las situaciones o actividades planteadas, llevar una observación del trabajo y formular preguntas de tipo *Cómo* (lo sabes?, lo hiciste?...) y *Por qué* (crees que..), en vez de tratar de responder.

Realizar una actividad en hoja, posterior al uso del manipulativo donde se pueda evidenciar el posible cambio o variación de los esquemas mentales.

Diseño del Ambiente de Aprendizaje

Número de estudiantes : 1

Sesión No. 0 (Identificación de presaberes)

Tiempo : 45 minutos

Objetivo de aprendizaje: Identificar saberes previos sobre el concepto suma (métodos o estrategias sobre el proceso de adición o suma, valor posicional y reagrupación).

Recursos: Videgrabadora, hojas de ejercicios, tablero, material manipulativo en físico (palitos, fichas ábaco, y otros), lápiz, marcador para tablero. Formato de registro de observaciones sobre la actividad.

Introducción, conocimientos previos:

Identificación de estrategias sobre el tema central a partir de actividad con fichas y en hoja/tablero.

Identificación de experiencia previa con manipulativo virtual.

El docente dejará sobre la mesa el material en físico en caso de que el estudiante desee hacer uso del mismo, para la resolución de los ejercicios o preguntas planteadas.

El docente desarrollará la sesión según lo indicado en la guía de desarrollo anexa.

El docente hará un registro de lo observado según proceso y respuestas del estudiante en formato correspondiente.

El docente presentará la ficha de experiencia previa con manipulativo virtual para verificar familiarización con la herramienta. Registrará en formato Anexo correspondiente.

El docente diligenciará la ficha o rúbrica de evaluación de presaberes.

(Estrategia de Aprendizaje Interactivo por Exposición del docente)

Cierre:

Se indagará sobre impresiones de la actividad y se indicará al estudiante la fecha de la siguiente sesión.

Sesión No. 1

Objetivo de aprendizaje:

- Representar cantidades según el valor de posición en números de mínimo 2 dígitos, aplicando la regla de reagrupación cuando corresponda.

Recursos:

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Computador con o sin conexión a internet, aplicativo en línea o descargable del Objeto Manipulativo Virtual Bloques de Base de la NLVM.

Hoja de trabajo en clase con 10 ejercicios de valor posicional reagrupación.

Guía de trabajo en casa.

Para la observación:

Software de registro de pantalla y de audio, videgrabadora.

Tiempo : 45 minutos

Introducción Conocimientos previos:

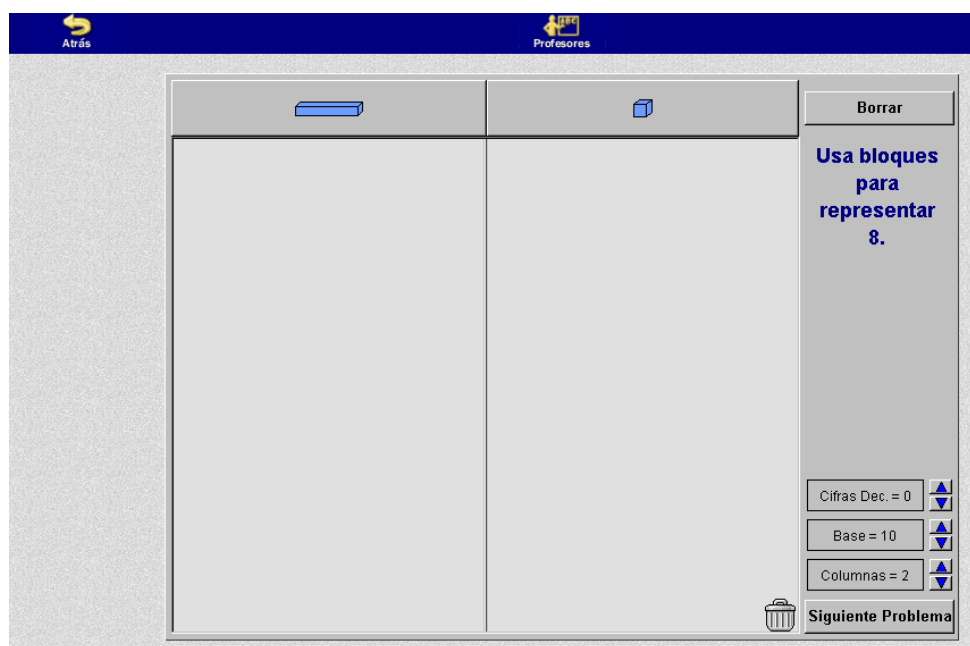
(Estrategia de Aprendizaje Interactivo por Exposición del docente)

Introducción del tema a modo individual a partir de actividad con herramienta manipulativa virtual (3 ejercicios de exploración guiada) sobre actividad de conteo y conformación de decenas y centenas según guía de desarrollo docente para la sesión.

Aplicación:

(Aprendizaje Interactivo Autoaprendizaje)

Trabajo individual en computador con uso del aplicativo MV (Bloques de Base). Se entrega hoja de ejercicios de reagrupación en unidades y decenas (ejercicio adicional de centenas).



Cierre: (Autoaprendizaje)

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Trabajo en casa. El estudiante desarrollará una tarea en hoja de trabajo 1 y 2 según actividad con aplicativo usado en clase.

Sesión No. 2Objetivo de aprendizaje :

Evaluar el logro del objetivo de aprendizaje sesión 1.

Reconocer los símbolos y notación propios de la suma.

Recursos:

Formato de Evaluación sesión 1 y respectiva rúbrica de evaluación.

Computador con o sin conexión a internet, aplicativo en línea o descargable del Objeto Manipulativo Virtual Bloques de Base Adición de la National Library of Virtual Manipulatives NLVM.

Guía de trabajo en casa.

Para la observación:

Software de registro de pantalla y de audio, videgrabadora.

Tiempo: 45 minutos

Introducción, conocimientos previos:

(Estrategia de Aprendizaje Interactivo por Exposición del docente)

Revisión de tarea de casa y aclaración de dudas.

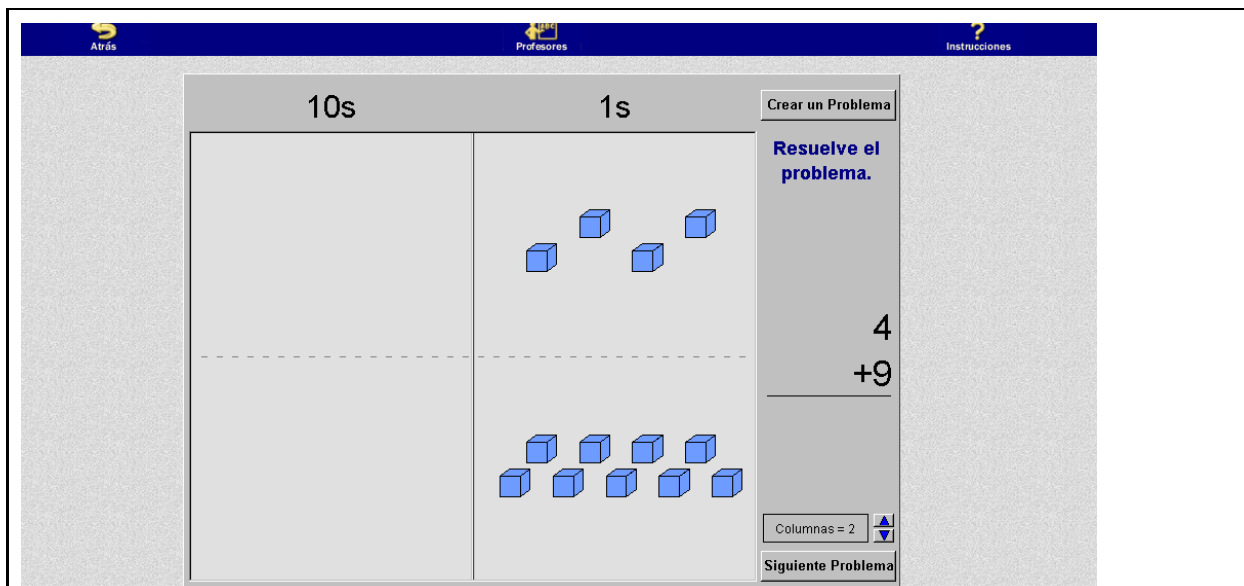
Evaluación del objetivo de aprendizaje sesión 1 (según el resultado se establecen sesiones de refuerzo o continuar).

Introducción del tema a través de la explicación por parte del docente con el uso del Objeto Manipulativo Virtual “Bloques de Base Adición” según guía de desarrollo docente para la sesión.

Aplicación :

Actividad individual, desarrollo de guía de ejercicios manipulativo sobre representación de sumas con sumandos de 2 dígitos, con ayuda de Manipulativo Virtual Bloques de Base Adición (10) según guía docente de sesión.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO



Durante la actividad el docente visibilizará el esquema de pensamiento mediante preguntas de tipo ¿Cómo...? ¿Por qué...? ¿Para qué...? etc. Posteriormente asignará el desarrollo de una tarea en hoja, sin uso de manipulativo.

Cierre:

(Autoaprendizaje)

Tarea en hoja semejante a la actividad realizada con MV para desarrollo en casa, sobre representación de sumas (gráfica y numéricamente).

Sesión No. 3

Objetivo de aprendizaje:

Evaluar el objetivo de aprendizaje de la sesión 2.

Plantear, representar y resolver problemas sencillos que involucren la suma o adición (Verbal Cambio Tipo 1).

Recursos:

Formato de Evaluación de objetivo de aprendizaje de sesión 2 con respectiva rubrica.

Computador con o sin conexión a internet, aplicativo en línea o descargable del Objeto Manipulativo Virtual Recta Numérica de la NLVM.

Guía de trabajo en clase para registro de respuestas (procedimiento y respuesta) (Anexo 5)

Guía de trabajo en casa (Anexo 6).

Hojas, lápices, colores, borrador, tajalápiz.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Barras en la Recta Numérica

Para la observación:
Software de registro de pantalla, Videgrabadora.

Introducción, conocimientos previos:

(Estrategia de Aprendizaje Interactivo por Exposición del docente)

Revisión de tarea de casa y aclaración de dudas.

Evaluación del objetivo sesión 2 (según el resultado se establecen sesiones de refuerzo o continuar)

Introducción del tema a través de la explicación por parte del docente con el uso del Objeto Manipulativo Virtual “Recta Numérica”.

Aplicación :

(Autoaprendizaje)

Desarrollo de actividad de resolución de problemas cotidianos con aplicación de la suma según guía de trabajo (3 ejercicios con manipulativo con registro en hoja) (3 ejercicios en hoja sin manipulativo) (Anexo 5).

Durante la actividad el docente visibilizará el esquema de pensamiento mediante preguntas de tipo ¿Cómo...? ¿Por qué...? ¿Para qué...? etc.

Cierre:

(Autoaprendizaje)

Guía de desarrollo en casa según actividad de aplicación en clase (Anexo 6).

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Sesión No. 4Objetivo de aprendizaje:

Evaluar el objetivo de aprendizaje de la sesión 3.

Plantear, representar y resolver problemas sencillos que involucren la suma o adición (Verbal Cambio, Pregunta tipo 2).

Recursos:

Formato de evaluación sesión 3 con respectiva rubrica.

Computador con o sin conexión a internet, aplicativo en línea o descargable del Objeto Manipulativo Virtual Recta Numérica de la NLVM.

Guía de trabajo en clase para registro de respuestas (procedimiento y respuesta) (Anexo 5)

Guía de trabajo en casa (Anexo 6).

Hojas, lápices, colores, borrador, tajalápiz.

Para la observación:

Software de registro de pantalla, Videgrabadora.

Introducción, conocimientos previos:

(Estrategia de Aprendizaje Interactivo por Exposición del docente)

Revisión de tarea de casa y aclaración de dudas.

Evaluación de la sesión 3 (según el resultado se establecen sesiones de refuerzo o continuar).

Introducción del tema a través de la explicación por parte del docente con el uso del Objeto Manipulativo Virtual “Recta Numérica”.

Aplicación :

(Autoaprendizaje)

Desarrollo de actividad de resolución de problemas cotidianos con aplicación de la suma según guía de trabajo (3 ejercicios con manipulativo con registro en hoja) (3 ejercicios en hoja sin manipulativo) (Anexo 5).

Durante la actividad el docente visibilizará el esquema de pensamiento mediante preguntas de tipo ¿Cómo...? ¿Por qué...? ¿Para qué...? etc.

Cierre:

(Autoaprendizaje)

Guía de desarrollo en casa según actividad de aplicación en clase.

Sesión No. 5Objetivo de aprendizaje:

Evaluar el objetivo de aprendizaje de la sesión 3.

Plantear, representar y resolver problemas sencillos que involucren la suma o adición (Verbal Cambio, Pregunta tipo 3).

Recursos:

Formato de evaluación sesión 4 con respectiva rubrica.

Computador con o sin conexión a internet, aplicativo en línea o descargable del Objeto Manipulativo Virtual Recta Numérica de la NLVM.

Guía de trabajo en clase para registro de respuestas (procedimiento y respuesta) (Anexo 5)

Guía de trabajo en casa (Anexo 6).

Hojas, lápices, colores, borrador, tajalápiz.

Para la observación:

Software de registro de pantalla, Videgrabadora.

Introducción, conocimientos previos:

(Estrategia de Aprendizaje Interactivo por Exposición del docente)

Revisión de tarea de casa y aclaración de dudas.

Evaluación de la sesión 4 (según el resultado se establecen sesiones de refuerzo o continuar).

Introducción del tema a través de la explicación por parte del docente con el uso del Objeto Manipulativo Virtual “Recta Numérica”.

Aplicación :

(Autoaprendizaje)

Desarrollo de actividad de resolución de problemas cotidianos con aplicación de la suma según guía de trabajo docente.

Durante la actividad el docente visibilizará el esquema de pensamiento mediante preguntas de tipo ¿Cómo...? ¿Por qué...? ¿Para qué...? etc.

Cierre:

(Autoaprendizaje)

Guía de desarrollo en casa según actividad de aplicación en clase (Anexo 6).

Sesión No. 6

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Objetivo de aprendizaje:

Aplicar la suma en resolución de problemas (verbales de cambio bajo preguntas tipo 1, 2 y 3).

Recursos:

Hoja de registro de ejercicios para los problemas a enunciar (oralmente).

Hojas, lápices.

Videocámara.

Tiempo: 45 minutos

Introducción a la actividad evaluativa

(Estrategia de Aprendizaje Interactivo por Exposición del docente)

Revisión de tarea de casa y aclaración de dudas.

Instrucción sobre registro de procedimientos y respuestas sobre problemas con suma (Cambio).

Aplicación:

(Autoaprendizaje)

Diligenciamiento de hoja de trabajo según objetivos de aprendizaje. El docente lee los problemas uno a uno (3 problemas en total, uno para cada pregunta). Espera a que el estudiante lo resuelva uno a uno (se toma registro de tiempo para cada uno).

Cierre:

(Autoaprendizaje)

Revisión de la actividad de evaluación y aclaración de dudas.

Para el desarrollo de cada una de las sesiones se requiere contar con:

Formato de registro de impresiones al final de la sesión.

Registro o copia de las actividades realizadas en cada sesión (hojas de trabajo en clase y en casa) como insumo de análisis, además de los registros de pantalla y de audio-video.

6. Metodología

De acuerdo con la pregunta de investigación y el objetivo planteado a partir de la misma, se retoman los principios del enfoque cualitativo y la metodología de diseño de Estudio de Caso.

Como lo propone Stake (1999), “lo característico de los estudios cualitativos es que dirigen la pregunta de la investigación a casos o fenómenos, buscan modelos de relaciones inesperadas o previstas” (p. 45). Para el autor, el estudio de caso cualitativo debe generar “descripciones abiertas, comprensión mediante la experiencia y realidades múltiples” (p.46).

Según lo explica Hernández-Sampieri (2009), existen dos modalidades de estudio de caso, siendo una de ellas el estudio de casos múltiples. Diferentes autores proponen dos tipologías de estudio de casos múltiples, siendo la primera de ellas la de *Múltiples unidades de análisis o casos*, donde se busca “evaluar cada uno por sí mismo holística o integralmente para después establecer tendencias y comunalidades”; el segundo de ellos, es el de *Múltiples Casos cruzados, anidados o entrelazados*, que a diferencia del primero es que “desde el inicio se pretende revisar comparativamente los casos entre sí para tratar de detectar similitudes y diferencias”. Para esta segunda tipología “se pueden contrastar los casos de manera holística o eligiendo ciertas dimensiones o variables, pero siempre se analizan sistemáticamente” (Hernández-Sampieri, 2009, p.8).

Para el logro del objetivo de investigación, que es describir el proceso de estructuración del pensamiento matemático, específicamente considerando un caso con déficit cognitivo y otro sin déficit, cuando media en el aprendizaje un recurso manipulativo virtual, estableciendo diferencias y similitudes, así como patrones en ambos casos, se adopta el diseño de estudio de Casos Múltiples cruzados. Es así que este tipo de diseño permite no solo describir lo que sucede a cada caso sino que permite cumplir con el objetivo específico de compararlos según si se tiene en

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

cuenta las particularidades de los contextos educativos en los que se enmarcan (aula exclusiva y aula regular), bajo un currículo común, inmerso a su vez en un ciclo en común (ciclo 1).

Hernández-Sampieri (2009), ofrece un esquema sobre la secuencia de un diseño de casos múltiples, donde es posible observar las etapas de desarrollo en el tiempo, que van desde una etapa inicial de conceptualización y diseño, pasando por una de recolección y análisis, para finalmente llegar a una de metainferencias y discusión (Ver figura 3).

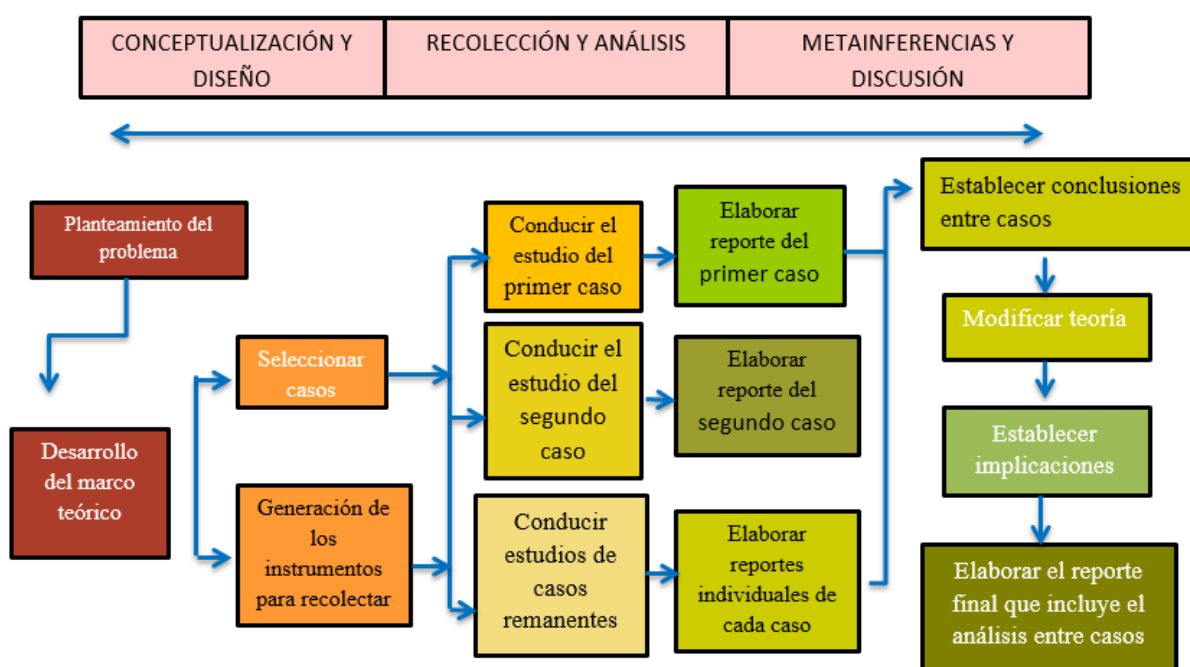


Figura 3. Secuencia de un diseño de casos múltiples. Fuente: Hernández-Sampieri (2009).

Como lo propone la figura 3, para el desarrollo de la investigación se han considerado diferentes fases que van desde la identificación de una situación problema, pasando por una revisión del estado del arte, el planteamiento de unos objetivos de investigación, la consolidación de un marco referencial y por último el diseño de una metodología apropiada según dichos objetivos. El anexo C muestra el cronograma que guía el desarrollo de este estudio.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

El alcance del diseño aquí planteado es como ya se mencionó, hacer una descripción de la forma como los estudiantes con déficit y sin déficit cognitivo estructuran su pensamiento matemático, cuando media en el aprendizaje un recurso manipulativo virtual. Este tipo de diseño permitiría identificar aspectos o nuevas categorías que a futuro pueden dar lugar a nuevas investigaciones frente al tema de estudio, la posibilidad de diseño de nuevas herramientas tecnológicas y metodologías de enseñanza-aprendizaje para ambas poblaciones objeto de estudio.

Debido a que es importante la experiencia del investigador durante el desarrollo de esta metodología, se tienen en cuenta la técnica de observación participante. Según DeWalt (s.f.), es un método por el cual el observador se involucra en las actividades diarias, rituales, interacciones y eventos particulares de las personas objeto de estudio, todo esto como forma que le permite aprender sobre los aspectos explícitos y tácitos de su cultura.

Refiere su importancia en que mejoran la calidad de la información obtenida durante el trabajo de campo y de la interpretación de la información, de modo que es una herramienta tanto de recolección como de análisis de datos. Es necesario el registro de observaciones o notas de campo de mano del mismo investigador, y puede emplear técnicas varias como entrevista, cuestionarios, entre otras (DeWalt, s.f., pp. 259-264).

DeWalt y DeWalt (2011), mencionan las siguientes recomendaciones que han de ser tenidas en cuenta a la hora de desarrollar esta metodología:

- Vivir en el contexto por un periodo amplio de tiempo.
- Participar en un amplio rango de actividades diarias del contexto observado.
- Usar el lenguaje o dialecto local.
- Utilizar el diálogo como técnica de entrevista.
- Hacer observaciones en momentos de informalidad.
- Registrar las observaciones como notas de campo organizándolas de manera cronológica.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

- Usar la información tácita y explícita en el análisis (DeWalts, 2011, p. 5)

Las técnicas de recolección de información son la Observación y la Entrevista Semiestructurada, teniendo como herramientas o instrumentos de recolección de datos el registro en diario de campo, formatos de registro de las diferentes tareas y la formulación de preguntas según cuestionario semiestructurado común a todas las actividades (ver anexos B y D). Es importante mencionar que las sesiones son registradas a través de dispositivos de audio y video, así como a través de software de captura de pantalla, lo cual aporta confiabilidad interna.

Los instrumentos de recolección de información son validados y verificados en su utilidad durante la prueba piloto, así como cada una de las actividades de desarrollo, de entrada y salida. El procesamiento de la información obtenida se hace a través del programa para análisis cualitativo de información Atlas.ti v. 7.5.4.

6.1 Categorías de análisis

La descripción de los casos se realiza tomando como referencia las categorías de análisis derivadas de la revisión teórica y de los reportes de investigación relacionados, realizados previamente. La Tabla 5 hace una presentación de las principales categorías identificadas, así como los instrumentos de registro a emplear en el ambiente de aprendizaje.

Tabla 5

Categorías de análisis e instrumentos de registro que las abordan.

Pregunta de investigación: *¿De qué manera un ambiente de aprendizaje mediado por objetos manipulativos virtuales, colabora en el proceso de estructuración del pensamiento matemático en estudiantes de primaria de ciclo 1 de aula diferencial o exclusiva del colegio Villemar El Carmen y de aula regular del colegio Carlos Pizarro Leongómez?*

Objetivo General: Describir el proceso de estructuración del pensamiento matemático en un estudiante de primaria de aula diferencial del Colegio Villemar El Carmen I.E.D. y uno de aula regular del Colegio Carlos Pizarro Leongómez I.E.D., a través de un ambiente de aprendizaje mediado por objetos manipulativos virtuales.

Objetivos específicos:

- Diseñar un Ambiente de Aprendizaje Presencial apoyado en objetos manipulativos virtuales, orientado al aprendizaje de un concepto matemático y su aplicación a problemas.
- Implementar un ambiente de aprendizaje presencial mediado por Manipulativos Virtuales orientado al aprendizaje de un concepto matemático para ambas poblaciones.
- Comparar los esquemas de pensamiento matemático para ambos casos.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Enfoque: Cualitativo		Diseño: Estudio de Caso Múltiple – Observación participante	Alcance: Descriptivo
Técnica: Observación, Entrevista Semiestructurada		Instrumentos de Recolección: Diario de campo, Formatos de registro de observación por actividades según sesión, cuestionario guía semiestructurado de preguntas; audio video y software de captura de pantalla.	
Referente	Categoría	Importancia	Herramienta de registro
Pedagógico	Mediación (docente) (Vygotsky, 1978, Heddens, 2005, Alvarez-Grayeb, 2011)	Establecer elementos de mediación docente y de las herramientas virtuales requeridos por el estudiante cuando resuelve la tarea frente a la herramienta manipulativa virtual. Responde la pregunta: ¿Qué elementos de la mediación docente apoyan el aprendizaje de los conceptos abordados en ambos casos?	Cuaderno de registro de observaciones.
Disciplinar	Pensamiento Matemático Operaciones, Procesos y Dinámicas del (Burton, 1984) y (Stacey, 2007) Aprendizaje Matemático Concepto matemático. Suma (Carpenter y Moser, 1983) Representaciones semióticas como función cognitiva (Duval, 1999). Visualización matemática. Habilidad de Visualización Matemática (Arcavi, 2003, Presmeg, 1993).	Identificar dinámicas de pensamiento matemático y estrategias de resolución de tareas antes y después de usar las herramientas tecnológicas, así como posibles estrategias de visualización matemática. Responde a las preguntas: ¿Qué tipo de dinámicas de pensamiento matemático exhiben los estudiantes a lo largo del ambiente de aprendizaje? ¿Qué tipo de imágenes mentales emplean ambos estudiantes, antes de usar manipulativos virtuales? ¿Qué tipo de imágenes mentales emplean los estudiantes de ambas instituciones tras el uso de los manipulativos virtuales?	Cuaderno de registro de observaciones. Formatos de actividades sesiones 0 a 6 Formatos de registro de tareas Sesión 1, 3, 5, (con uso del manipulativo). Formato de registro de tarea Sesión 2, 4, 6 (tras uso de manipulativo)
TIC	Mediación (con artefactos o herramientas) (Manipulativos Virtuales) (Heddens, 2005, Clements, 2000, Moyer et al, Manches y O'Malley, 2012)	Verificar posibles conexiones entre manipulaciones concretas de objetos, visualizaciones o imágenes de esos objetos, abstracciones del concepto matemático y procesos subyacentes a esos conceptos. Ayuda a responder la pregunta: ¿Qué elementos de la mediación con artefactos apoyan el aprendizaje de los conceptos abordados en ambos casos?	Formato de registro sobre experiencia previa con MV (sesión 0). Formato de registro de tareas durante y tras uso del manipulativo, (todas las sesiones). Cuestionario guía semiestructurada (preguntas guía de indagación sobre

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

			procedimientos y tareas) Todas las sesiones. Cuaderno de registro de observaciones.
--	--	--	--

Para responder a la pregunta de investigación y cumplir con el objetivo general y los objetivos específicos, se plantean cuatro preguntas orientadoras en el proceso de análisis de la información, las cuales buscan ser contestadas a partir de la organización de la información según cada una de las tres categorías identificadas y sus subcategorías. Las preguntas orientadoras son:

¿Qué tipo de dinámicas de pensamiento matemático exhiben los estudiantes a lo largo del desarrollo del ambiente de aprendizaje?

¿Qué tipo de imágenes mentales emplean ambos estudiantes, antes de usar manipulativos virtuales?

¿Qué tipo de imágenes mentales emplean los estudiantes de ambas instituciones tras el uso de los manipulativos virtuales?

¿Qué elementos de la mediación docente y con artefactos apoyan el aprendizaje de los conceptos abordados en ambos casos?

A continuación se presenta una descripción de las tres categorías de análisis establecidas, que buscan responder a las preguntas planteadas anteriormente:

Pensamiento Matemático. Dentro de esta categoría se reúnen todos los aspectos observados en el estudiante que dan indicio de su proceso interno de pensamiento en términos de operaciones, procesos y dinámicas; todo esto mediante la interacción docente-estudiante, estudiante-herramienta. Esta categoría busca responder la pregunta ¿Qué tipo de dinámicas de pensamiento matemático exhiben los estudiantes a lo largo ambiente de aprendizaje?

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Mediación. Esta categoría busca responder a la pregunta ¿Qué elementos de la mediación docente y con artefactos apoyan el aprendizaje de los conceptos abordados en ambos casos?

Refiere a la interacción del estudiante ya sea con el docente o con el artefacto tecnológico. De esta categoría se desprenden las subcategorías que dan cuenta 1) del grado de interacción o intervención del docente cuando se aborda el concepto y 2) la evidencia de transferencia de procesos a partir de la interacción con el manipulativo virtual, que permite una mayor apropiación de los conceptos (esto considerando que tales herramientas se constituyen en vehículos de metáforas conceptuales). Respecto al grado de mediación o interacción docente se consideran las subcategorías Fuerte, Moderada y Suave según las refiere Alvarez-Grayeb (2011).

Aprendizaje Matemático. Bajo esta categoría se abordan tanto las estrategias de visualización matemática, como los conceptos asociados al objeto matemático. Se propone responder a las preguntas ¿Qué tipo de imágenes mentales emplean ambos estudiantes, antes de usar manipulativos virtuales? ¿Qué tipo de imágenes mentales emplean los estudiantes de ambas instituciones tras el uso de los manipulativos virtuales? Se tienen en cuenta las siguientes subcategorías:

Visualización: Según Arcavi (2003), es entendida como “la capacidad o habilidad, proceso y producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre figuras, imágenes y diagramas en nuestra mente, sobre el papel o con herramientas tecnológicas con el fin de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar en la comprensión” (p.217) Por medio de esta esta subcategoría se ha de observar los tipos de imágenes que según Presmeg (2006) pueden ser empleadas por el estudiante, o la estrategia de resolución del problema presentado en cada actividad, antes y después de usar el manipulativo: Concretas, fórmulas en la memoria, cinéticas, dinámicas y de patrones.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Conceptos matemáticos: Hace referencia al concepto matemático abordado y a sus características o propiedades según los objetivos de aprendizaje planteados para cada sesión. En este caso refiere el objeto matemático Suma: valor posicional y su representación en problemas tipo Cambio. Bajo esta subcategoría se evidencian las fortalezas y debilidades del estudiante frente al concepto abordado.

6.2 Población y Muestra

Los estudiantes seleccionados corresponden a la población de ciclo 1 de ambas instituciones educativas distritales, ambas con modalidad de inclusión al aula regular. La muestra de dos (2) estudiantes se toma teniendo en cuenta que un estudiante corresponda a la modalidad de aula regular (sin diagnóstico de déficit cognitivo) y el otro, a la modalidad de aula exclusiva para déficit cognitivo, lo que exige contar con un diagnóstico especializado. La selección del número de casos (uno (1) por institución para la fase de pilotaje y 1(uno) por institución para la implementación final), se hace teniendo en cuenta el alcance del estudio (descriptivo), el número de sesiones en el tiempo según diseño del ambiente de aprendizaje y a la naturaleza misma de la metodología adoptada, la cual no busca la generalización sino el entendimiento a profundidad de los casos. Todo lo anterior supone una gestión exhaustiva del gran volumen de información derivado de cada caso (Hernández-Sampieri, 2009, p. 10-11).

La selección de los casos se hace teniendo en cuenta los siguientes criterios:

- Contar con diagnóstico de C.I. Leve a Moderado (Para estudiantes con déficit cognitivo) y que no tenga mayor compromiso sobre la capacidad de memoria.
- Estudiantes pertenecientes a ciclo 1 (edades entre los 7 y 8 años para aula regular, 9-12 para aula exclusiva).

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

- Tener habilidades de lenguaje expresivo oral y escrito (esta última característica para estudiantes de aula regular).
- Tener desarrolladas habilidades motrices que faciliten el uso de herramientas (tecnológicas y otro tipo de artefactos).
- Tener noción de cantidad numérica (conteo y su representación simbólica).
- No estar familiarizado con las herramientas manipulativas virtuales a emplear.

Es así que para la fase de pilotaje se seleccionó un estudiante del grado 204 del colegio Carlos Pizarro Leongómez como representante de aula regular y uno del grado 2° de Aula Exclusiva o Diferencial del Colegio Villemar El Carmen IED.

Para la fase de implementación se seleccionaron los siguientes estudiantes según modalidad:

Aula Regular. Estudiante de ciclo 1, género masculino de 8 años de edad; familia constituida por papá (ocupación independiente, constructor de techos), mamá (empleada no calificada en supermercado de cadena), hermana mayor de 16 años (estudiante de bachillerato). La familia pertenece a estrato socioeconómico 2, no cuenta con recursos tecnológicos en casa donde se pueda apoyar académicamente. El niño tiene las habilidades propias de su edad.

Aula Exclusiva o Diferencial. Estudiante de ciclo 1, género masculino de 10 años de edad, diagnóstico de déficit cognitivo leve (C.I. 66); familia constituida por papá (ocupación conductor escolta), mamá (auxiliar contable), hermana gemela quien se encuentra cursando grado quinto de primaria. La familia pertenece a estrato socioeconómico 2, y cuenta con recursos tecnológicos entre ellos computador con conexión a Internet. El niño no cuenta con suficiente habilidad en lectoescritura. Dentro de sus fortalezas se cuenta la motivación por los retos, tiempos de permanencia en actividades mientras estas no le demanden demasiado esfuerzo.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Dentro de sus debilidades se encuentra tendencia a la mecanización y ansiedad que a veces dificulta la realización de las actividades.

6.3 Consideraciones éticas.

Como consideraciones éticas, se solicitó la autorización tanto de Consejo Directivo para la implementación del proyecto en cualquiera de sus fases, así como el consentimiento por escrito de parte de los padres/acudientes o representantes de los niños seleccionados. La carta de aprobación de la institución y modelo de consentimiento informado a padres de familia, se presentan como Anexos E, F y G.

6.4 Prueba piloto

De manera particular, y como ya se refirió, se diseñó un ambiente de aprendizaje presencial cuyo objetivo principal fue la aplicación del concepto matemático Suma en problemas de cambio. En su etapa de pilotaje, el ambiente constó de siete sesiones, siendo la primera de ellas (sesión 0) la que permitió evidenciar los conocimientos y estrategias empleadas por los niños frente a aspectos asociados al objeto matemático, antes de la intervención con objetos manipulativos.

De la misma forma, la sesión 6 buscó evidenciar el posible cambio en la estructura de pensamiento de los casos seleccionados al final de la implementación. El pilotaje se llevó a cabo con un estudiante por institución según los criterios anteriormente mencionados.

Esta fase permitió contar con un registro de las observaciones sobre cada una de las tareas realizadas y evidencia de cambio en la forma como los estudiantes estructuran los conceptos asociados al concepto matemático abordado. Permitted además considerar nuevas formas de codificar y agrupar la información (semejante a una línea de base) como sustento de arranque en el análisis de los datos derivados en la fase de implementación.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Así mismo, la fase de pilotaje permitió validar los instrumentos diseñados para el registro de las observaciones y hacer los debidos ajustes, tanto de los instrumentos como del número de sesiones extra a considerar, especialmente para el caso de Aula Diferencial.

6.5. Fase de Implementación.

Para la fase de implementación se seleccionó igualmente un estudiante por modalidad, es decir, un estudiante de aula diferencial para déficit cognitivo y uno de aula regular.

Durante esta fase se hizo el debido registro según los instrumentos de recolección planteados en el apartado de metodología. Cada una de las sesiones programadas se realizaron considerando cumplir con el diseño del ambiente de aprendizaje (ver anexos A y B), el cual tomó 9 sesiones para aula regular y 15 sesiones para aula diferencial de 45 minutos aproximadamente cada una. La mayoría de las sesiones con ambos estudiantes se llevaron a cabo en las primeras horas de la mañana (7 a 9 am), debido a que según lo observado durante la sesión de pilotaje, los estudiantes están más motivados durante las primeras horas de la mañana; además que para el caso de aula diferencial, la segunda parte de la jornada coincide con la hora de descanso de los estudiantes de bachillerato y hay bastantes interferencias que entorpecen el desarrollo de las actividades (interrupciones, ruido).

Es útil recordar que según el diseño del ambiente de aprendizaje se considera las siguientes sesiones y objetivos para cada uno:

- Sesión 0: Identificar saberes previos sobre el concepto suma.
- Sesión 1. Representar cantidades según el valor de posición en números de mínimo 2 dígitos, aplicando la regla de reagrupación cuando corresponda.
- Sesión 2. Reconocer los símbolos y notación propios de la suma.
- Sesión 3, 4 y 5. Plantear, representar y resolver problemas sencillos que involucren la suma o adición.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

- Sesión 6. Aplicar el concepto Suma en resolución de problemas, (verificación de conocimientos nuevos).

7. Resultados

Un primer paso en el reporte de resultados es presentar el número de sesiones desarrolladas en cada caso. La tabla 6 reporta el número de sesiones implementadas según diseño, refiriendo el número de sesiones extra por cada concepto abordado para cada estudiante.

Tabla 6

Número de sesiones implementadas con cada estudiante.

Sesión	Concepto abordado	Número de sesiones extra		Número total de sesiones	
		Diferencial	Regular	Diferencial	Regular
0	Saberes previos	0	0	1	1
1	Valor de posición	0	0	1	1
2	Notación Suma	1	0	2	1
3	Problema Tipo 1 $a + b = ?$	1	0	2	1
4	Problema Tipo 2 $a + ? = c$	4	1	5	2
5	Problema Tipo 3 $? + b = c$	2	1	3	2
6	Verificación	0	0	1	1
Total		8	2	15	9

Nota: Cada sesión tuvo una duración aproximada de 45 minutos.

A partir de los registros de observación derivados de las interacciones en cada una de las sesiones, y teniendo en cuenta las preguntas y categorías propuestas según los objetivos de investigación, se reportan los siguientes hallazgos de la fase de implementación para cada caso teniendo en cuenta tres momentos de desarrollo del ambiente: Sesión 0, sesiones de desarrollo de conceptos y sesión de verificación.

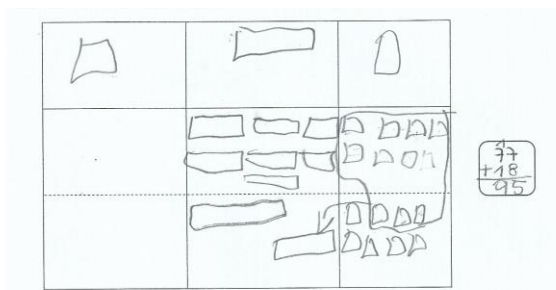
VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

7.1 Aula Diferencial:

La información derivada de la categoría *Aprendizaje Matemático*, fue organizada bajo las subcategorías *Visualización*, *Concepto* y *Estrategias*. La primera permitió reconocer 3 tipos de imágenes empleadas por el estudiante a lo largo de las sesiones. Desde la sesión 0 fue posible observar la resolución de preguntas mediante el conteo mitad en la mente, mitad con los dedos, lo que refiere el uso de imágenes *cinéticas*. Por otra parte fue posible identificar representaciones que refieren una imagen de tipo *fórmula en la memoria*; a partir de la primera sesión, la inclusión de una nueva estrategia de visualización tras el uso de las herramientas manipulativas virtuales, esto es, imágenes *dinámicas*, donde es observable una transformación en las representaciones según lugar de posición o ubicación dentro del continuo numérico.

$$\begin{array}{r} 10 \\ + 25 \\ \hline 35 \end{array}$$

Formula en la memoria



Dinámica

P: ¿O sea que seis más siete cuánto te da?

E: ¡Uno más tres! (señala la interfaz del manipulativo Bloques de Base Adición).

P: ...¿Cuánto?

E: (suma con los dedos) ¡Trece!

P: ...¿Estas sumando con los dedos?

(P14, 00:21.98)

Cinética

Figura 4. Ejemplos de tipos de imágenes identificadas para el caso de Aula Diferencial.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

La subcategoría *Concepto* permitió identificar momentos de acierto y desacierto frente a los conceptos abordados durante las sesiones, que dan pista de las estrategias empleadas por el estudiante. Durante la sesión 0, es decir de evaluación de conocimientos previos, se encontró que el estudiante representa numéricamente cantidades de un dígito, respetando valor posicional y resolviendo correctamente la suma. Sin embargo, ante sumandos de dos dígitos evidencia fallas en la acomodación de los datos según valor posicional. Sus representaciones numéricas son a pedido en un comienzo, opta por la notación vertical y muestra acierto en aplicación de regla de reagrupación numérica. En sumas con patrón de 10 muestra procedimiento escrito desde la izquierda.

Ante preguntas sobre resolución de problemas sencillos, muestra acierto frente a los que contienen cantidades de pocos dígitos (p.e. $5+4$, $15+5$) o cuando se trata de sumandos que permitan la estrategia de conteo por decenas (p.e. $10 + 25$) (estrategia de recuerdo de datos numéricos).

Frente al acierto ante los tres tipos de problemas de Cambio presentados (Tipo 1, 2 y 3), se encuentra que el estudiante resuelve preguntas Tipo 1 y 2 e intenta resolver la de Tipo 3, pero falla en los diferentes momentos de ataque. Muestra dificultad para resolver problemas Tipo 2 cuando los sumandos son cantidades de dos dígitos diferentes de patrón de 10.

Dentro de las estrategias desplegadas durante la sesión 0 está el conteo desde el primer dato presentado, la resolución a la cabeza y con ayuda de conteo de dedos (cinéticas), así como generalizar un modelo o patrón de suma ya aprendido (fórmula de memoria), esto es el formal ($a + b = ?$). En problemas abiertos tipo 2 ($a + ? = c$) busca completar la secuencia desde el primer dato del problema, pero tiene dificultad en el conteo y acomoda los datos a un formato algo más manejable ante números de dos dígitos; hace tanteos ya que no son suficientes los dedos y al final se rinde.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Ante problemas Tipo 3 ($? + b = c$), se lanza a responder que la solución es el primer dato presentado en el problema y a pesar de que hace cinco intentos, no logra una respuesta acertada. Intenta hacer sumas entre los datos presentados y un intento de resolución por resta, pero con fallas en procedimiento. Finalmente se pierde en la lógica del problema y abandona convencido que el número solicitado es el primero del problema. La figura 5 presenta las respuestas a las diferentes preguntas según formato para sesión 0.

Handwritten mathematical work showing five attempts at solving a problem:

- ①
$$\begin{array}{r} 8 \\ + 3 \\ \hline 11 \end{array}$$
- ②
$$\begin{array}{r} 15 \\ + 5 \\ \hline 20 \end{array}$$
- ③
$$\begin{array}{r} 5 \\ + 4 \\ \hline 9 \end{array}$$
- ④
$$\begin{array}{r} 10 \\ + 8 \\ \hline 18 \end{array}$$
- ⑤_a
$$\begin{array}{r} 10 \\ + 25 \\ \hline 35 \\ 1 \\ \hline 36 \\ 1 \\ \hline 37 \\ 1 \\ \hline 38 \\ 1 \\ \hline 39 \end{array}$$
- ⑤_b
$$\begin{array}{r} 10 \\ - 23 \\ \hline 10 \end{array}$$
- ⑤_c
$$\begin{array}{r} 10 \\ + 25 \\ \hline 35 \end{array}$$
- ⑤_d
$$\begin{array}{r} 18 \\ \downarrow \\ 10 \\ + 25 \\ \hline 33 \end{array}$$

7₃
decenas

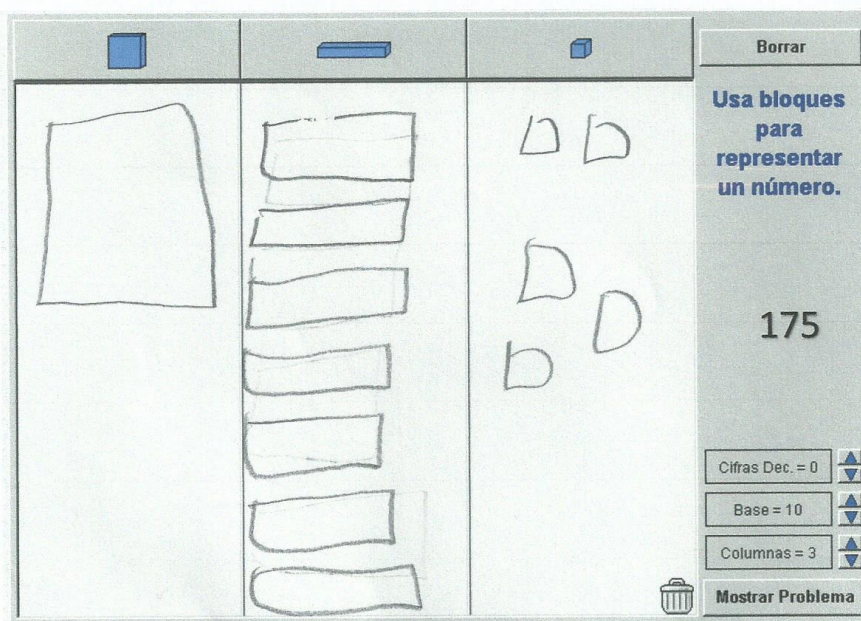
Figura 5. Respuestas registradas por el estudiante de Aula Diferencial durante la sesión 0. En el registro se cuenta un mayor número de intentos ante el enunciado abierto Tipo 3 ($? + b = c$), dentro de ellos un intento de resta (intento 5b).

La sesión 1 cuyo objetivo fue representar cantidades de no menos de 2 dígitos según el valor de posición, aplicando la regla de reagrupación cuando corresponda, permitió observar poca

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

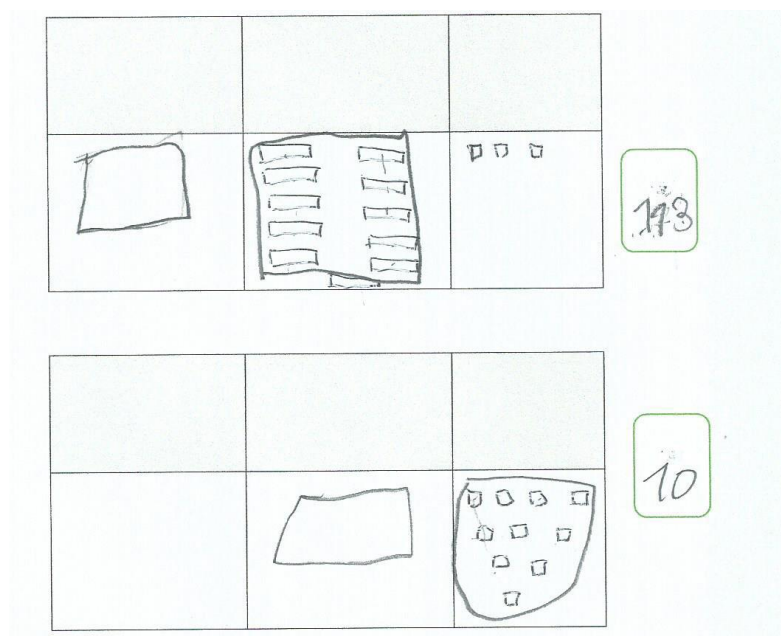
comprensión de estos conceptos. Las actividades con el manipulativo virtual Bloques de Base, permitieron descentrar al estudiante del conteo y lectura numérica mecánica, así como enfocarlo en la comprensión de la regla de reagrupación. Fue necesario orientar en la estrategia de representación directa o simplificada ofrecida por la herramienta, ya que la tendencia era saturar la casilla de unidades para luego reagrupar.

El paso en hoja fue efectivo respecto a la ubicación de cada una de las cifras según número dado (cantidad de cien); sin embargo, hubo fallas en la lectura de decenas, y en el orden de representación (izquierda a derecha). En hoja es necesario recordar los pasos en la representación numérica, entre ellos no olvidar hacer el enlace a la hora de reagrupar para evitar confusiones en el paso de decenas y/o centenas. Para el estudiante es más sencilla la representación a partir de un número dado, que deducir el número a partir de una representación (Ver Figura 6).



Representación a partir de un número

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO



Representación numérica

Figura 6. Ejemplos de representación tanto numérica como en imagen de unidades, decenas y centenas abordadas a partir de la sesión 1. En la representación numérica se parte de una imagen dada y así aplicar reagrupación de ser necesario.

La sesión 2, cuyo objetivo era reconocer los símbolos y notación propios de la suma, permitió observar progreso en la estrategia de reagrupación abordada en sesión 1, así como estrategia de conteo con dedos para resolver la suma presentada en manipulativo virtual Bloques de Base Adición. Es decir, el estudiante no identificó en un primer momento las posibilidades y correspondencias entre la actividad presentada mediante el algoritmo y su representación en unidades (cubos). Es necesario llevarlo a identificar cada uno de los detalles de interfaz y verificar que comprende la ubicación de cada sumando. Durante el desarrollo de esta actividad frente al manipulativo, el estudiante se mostró animado y expresó confianza por los aciertos.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

En el paso a hoja, se observa que el estudiante comienza a representar los sumandos fragmentándolos. Inicia con las unidades de ambos sumandos, agrupa y luego pasa a decenas; continúa con la representación de las decenas, donde omite una de ellas por confusión a raíz de la agrupación previa. Es necesario recordar los pasos en la representación de los números, así como la importancia de hacer más evidente el paso a decenas o centenas cuando se reagrupa, específicamente derivando del enlace una flecha hacia la unidad reagrupada.

Este tema demandó un mayor número de actividades complementarias y el recuerdo de los pasos a seguir en la representación y resolución de las sumas:

1. Ubicación de sumando 1 (con todas sus cifras).
2. Ubicación de sumando 2 (con todas sus cifras).
3. Reagrupación de ser necesario (verificando unidades posibles por casilla según valor de posición).
4. Hacer evidente la reagrupación.
5. Verificar la respuesta (correspondencia entre representación en rejilla y notación o algoritmo horizontal y vertical).

La sesión 3, cuyo objetivo era plantear, representar y resolver problemas sencillos con suma según estructura de Cambio Tipo 1, $a + b = ?$ evidenció familiarización inmediata con la herramienta *Recta Numérica*, aunque a pesar de su uso, inicialmente la estrategia de resolución fue mediante el conteo con dedos. Fue necesario orientar en la necesidad de escuchar primero el enunciado completo y comprender qué era lo que se estaba preguntando, ya que la tendencia del estudiante era representar al tiempo que se leía el problema y emitir una respuesta antes de enunciar la pregunta (anticiparse). También fue necesario orientar sobre las posibilidades de la recta, como por ejemplo identificar que el resultado para este tipo de problemas está al final de la unión de

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

sumandos. El estudiante se mostró maravillado ante las posibilidades de representación mediante esta herramienta.

Desde un primer momento y mientras se estuvo frente a la herramienta manipulativa, fue de utilidad orientar al estudiante en la ubicación de las partes del todo (sumandos), desde el número 0, así como orientarlo en el conteo o salto de unidades.

Al paso en hoja el estudiante inmediatamente identifica qué se espera de él ante el problema presentado. Sin embargo, tiene un momento de bloqueo cuando trata de resolver el cómo deslizar la recta (así como lo podía hacer en el manipulativo virtual), para completar las unidades faltantes no representadas en hoja. Es necesario orientar sobre la posibilidad de extensión de la recta y verificar que haga un conteo correcto de unidades, especialmente cuando adiciona el segundo sumando. También es necesario recordarle la importancia de hacer evidente las partes dentro de un todo representado y la correspondencia con el algoritmo (vertical y horizontal).

En la actividad de creación de un problema, el estudiante busca replicar el modelo presentado previamente, usando los mismos datos numéricos y olvidando plantear la pregunta. Recuerda que el planteamiento debe mencionar por lo menos un sujeto y que hay algo que agregar a algo que ya se tiene, pero omite mencionar los detalles de este cambio. La tendencia es resolver el problema y emitir la respuesta en lugar de plantearlo; en su intento acude a plantear situaciones mencionando personas del contexto escolar (profesora y compañero cercano), así como acudir a datos de cuya respuesta está seguro.

Esta sesión permitió identificar el desconocimiento de la ley conmutativa de la suma (piensa que al invertir el orden de los sumandos la respuesta cambia). Otra falla identificada durante la realización de un problema, fue la representación de una cantidad (29) mediante la ubicación de los dígitos que lo conformaban (2 y 9) (Ver figura 7).

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Hoja de Trabajo Estudiante sin MV
Ejercicios Sesión 3 (Creo un problema)

(Copie este formato cuantas veces sea necesario, según número de ejercicios)

No. De Sesión: 3. Cambio T1	Fecha: 29-01-2016	Hora: 10:00
Lugar:	Estudiante:	Edad:
Observador:		

Represento y resuelvo un problema (Escribo aquí mi problema):

Quisina tiene 29 perros y Alejandro le regala 1 más. ¿Cuántos perros completos?

Barras en la Recta Numérica

Suma Vertical:
$$\begin{array}{r} 29 \\ + 1 \\ \hline 30 \end{array}$$

Suma Horizontal: $29 + 1 = 30$

Explicación:

Figura 7. Actividad que muestra un ejemplo de problema creado por el estudiante según el modelo Tipo 1 y su representación en recta numérica. Nótese la selección de los números 2 y 9 sobre la recta, como forma de ubicar el número 29.

A pesar que se le recordó la posibilidad de representación mediante rejilla de valor posicional (vista en la sesión2), prefirió el uso de la recta numérica. Al final de la sesión mostró mayor confianza y precisión en el planteamiento de problemas Tipo 1.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

La sesión 4, cuyo objetivo era plantear, representar y resolver problemas sencillos con suma según estructura de Cambio Tipo 2, mostró que para los dos primeros problemas presentados frente al manipulativo virtual, el estudiante llegó a una respuesta correcta mediante un conteo rápido a la cabeza. Es de recordar que los dos primeros problemas corresponden a números menores de 10 y de patrones de 10, y cuya pregunta es ¿Cuánto le hace falta para completar X? Su argumento sobre la respuesta dada es mediante explicación por conteo de dedos, partiendo desde el primer número hasta llegar al final de la secuencia:

P: Valeria tiene 5 pulseras

P: ¿Cuánto le falta para completar 10?

E: Otras 5

P: ¿Cómo supiste?

E: Con los dedos.

(P42, 0:07:09.06)

El problema 3, que plantea algunos detalles adicionales al esquema de problema, ya no es tan claro para el estudiante. Hubo la necesidad de desglosarle el problema para una mejor comprensión, y es posible observar que la frase “al llegar la tarde” es un distractor para él. Al representar los datos en la recta, transfiere el patrón de suma formal Tipo 1 ($a + b = ?$):

P: Nicolás organizó una fiesta de cumpleaños.

P: Al llegar la tarde han llegado 12 amigos.

P: Si invitó 20 ¿Cuántos amigos falta por llegar?

E: ¿Cómo?

P: ¿Te lo repito? (Se repite el problema).

E: (Piensa y representa cada número del problema según tipo 1, 12 y 20).

P: Espera, empecemos representando los invitados que llegaron.

E: Ahora imaginemos el problema. ¿Cuántos eran los invitados que tenía Nicolás en total?

En la creación de problemas igualmente recurre al modelo Tipo 1. Tanto en la representación como en la creación de problemas de este tipo, se orienta en el planteamiento de números por él manejables mientras se familiariza aún más con este tipo de esquema. Es necesario mediar de manera más directa en la información clave del problema y el orden de los datos según

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

el mismo. Así entonces se orienta sobre la imposibilidad de ubicar el total o suma en el lugar de los sumandos, y la evidencia de un sumando faltante o número misterioso.

Durante esta sesión fue necesario sacarlo del manipulativo para hacer más tangible la experiencia de representación del problema, además que mediante la herramienta lograba representar con facilidad cada sumando, pero no evidenciaba comprensión del patrón de problema una vez se apartaba de la herramienta.

Fueron necesarias 5 sesiones extra para una comprensión aceptable del patrón de problema. Al final de estas sesiones extra se observa un progreso en la forma de representar el problema, tomando apuntes del mismo y recurriendo a la recta numérica para tratar de hallar el número faltante ante números más complejos para él, como por ejemplo $38 + ? = 67$. Aquí ya es visible una estrategia de recuerdo de un procedimiento previamente estructurado para este de incógnita.

A pesar del progreso aún es necesario mediar en el procedimiento para la búsqueda del sumando faltante cuando se tienen datos como el del ejemplo anterior. Aquí se indica al estudiante sobre la necesidad de ubicar el número 8 (unidades) sobre la recta y de ahí contar cuantas unidades faltan para llegar al próximo número terminado en 7 (es decir, el 17); ubicar el número faltante (es decir, 9) en el lugar del sumando faltante para las unidades, reagrupar la decena del 17 (el 1) y seguir el mismo procedimiento con el número faltante para las decenas. Para avanzar y fortalecer este aspecto fue necesario entrenamiento extra mediante ejercicios de resolución de algoritmos bajo el esquema de problema Tipo 2 con ayuda de la recta numérica (Ver Figura 8).

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

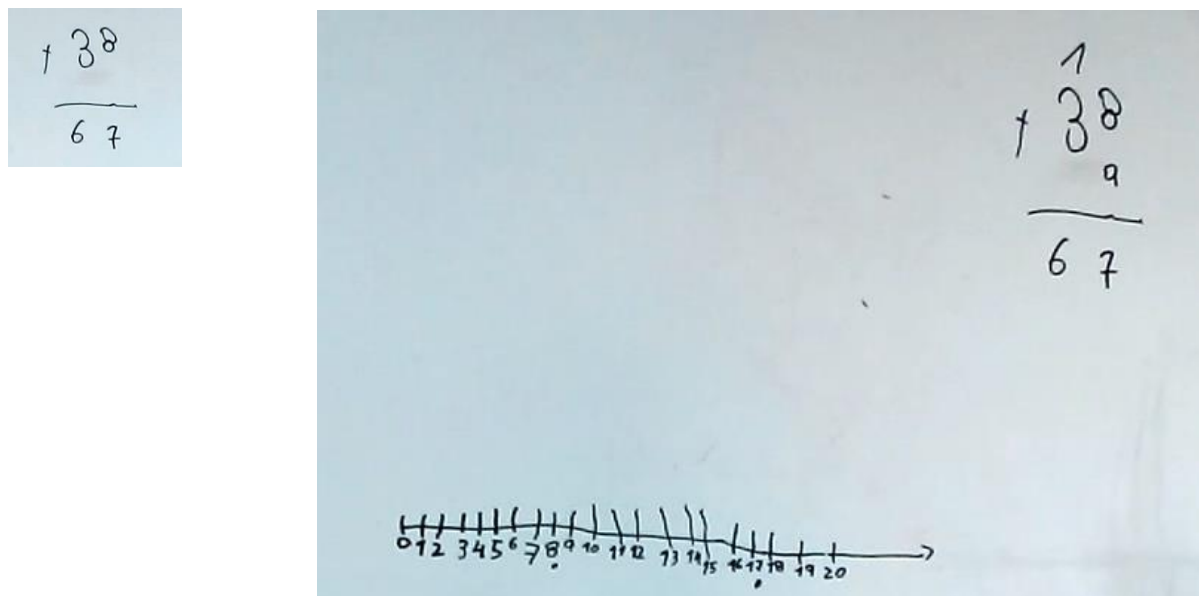


Figura 8. Actividad que muestra una estrategia de conteo comenzando por las unidades y reagrupando con ayuda de la recta numérica. Allí el estudiante parte del planteamiento del problema, donde el sumando 2 es el número faltante; empieza ubicando el número 8 (de las unidades) y busca llegar al siguiente número sobre la recta que termina en 7 (en este caso el 17).

La sesión 5 se proponía plantear, representar y resolver problemas sencillos con suma según estructura de Cambio Tipo 3, $?+b=c$. A esta altura del diseño del ambiente se aprecia una actitud más motivada frente a los problemas presentados. Sabe que hay un número “misterioso” que espera ser hallado; sin embargo, se requirió una mediación mucho más directa sobre el manipulativo a la hora de identificar el dato faltante. En este punto el estudiante reflexiona mucho más sobre el problema presentado, solicitando que se le repita varias veces. Uno de los desaciertos a la hora de plantear el problema es representar el número total como si fuera uno de los sumandos (problema Tipo 1).

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

El paso en hoja permitió observar el mismo desacierto (ver figura 9), por lo cual fue útil hacer énfasis en los datos claves del problema así como una insinuación (mediante señalamiento) sobre los datos del problema y el lugar del total. La representación mediante algoritmo vertical fue correcta pero no en la horizontal. La creación de problemas bajo este modelo también fue compleja para él; una forma de evidenciarse la complejidad de este tipo de conceptos es cuando el estudiante muestra cansancio y se torna poco colaborador. Fueron necesarias 3 sesiones extra acompañadas de ejercicios complementarios para la casa para tener un resultado aceptable.

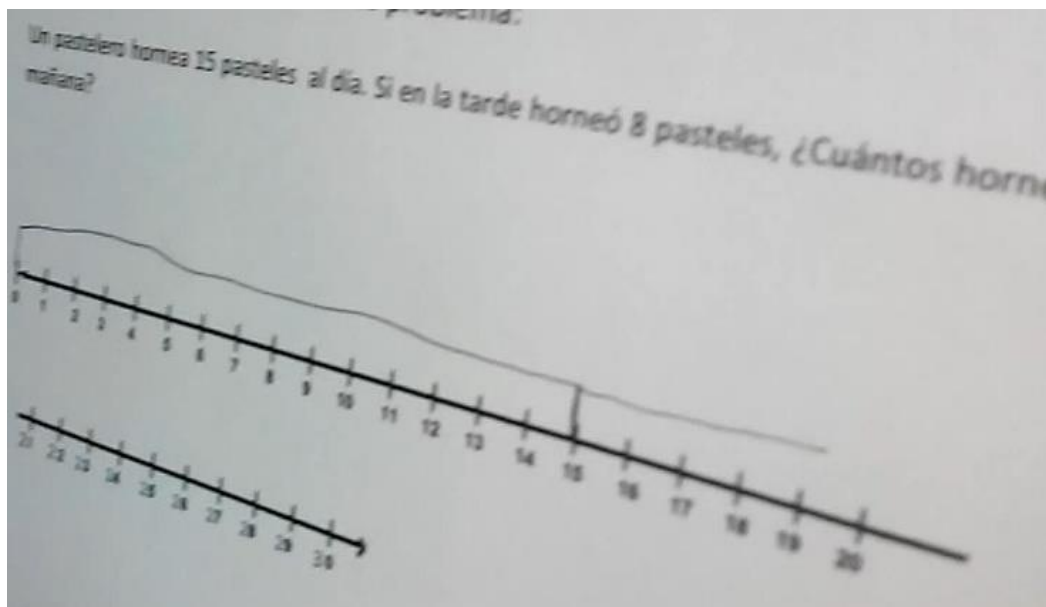


Figura 9. Actividad de paso a hoja. Aquí es posible observar como el estudiante busca representar el problema de manera como se representan los problemas formales Tipo 1. Ubica el total como un sumando y luego agrega el siguiente dato dado.

Al final de la intervención con este modelo de problema, se pudo observar que el estudiante identifica más fácilmente el patrón de procedimiento cuando se le presentan ejemplos de suma vertical a completar. Para resolver estos ejemplos el estudiante se vale de la recta numérica y los

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

representa bajo modelo Tipo 2. Después de las sesiones extra, el manipulativo virtual colaboró en la comprensión del problema, visible en el momento en el que el estudiante ya pudo identificar el lugar de cada dato.

La *sesión 6* o de verificación sumativa del proceso desarrollado durante toda la implementación, permitió identificar un mejor desempeño frente a los problemas Tipo 2 y 3 que frente al problema Tipo 1. La estrategia del estudiante fue generalizar el patrón de pregunta tipo 2 en los 3 tipos de problema; como resultado tuvo acierto en las preguntas de enunciado abierto o Tipo 2 y 3.

La creación o invención de problemas a esta altura todavía representa carga al estudiante; en el intento se vale primero de un planteamiento mediante dedos, luego paso a hoja mediante representación en algoritmo y finalmente acude a la recta y a plasmar la respuesta sobre ella. A esta altura aún se encuentran fallas en procedimiento y muestra impulsividad o tendencia a adelantarse a resolver sin antes escuchar el problema (tomar los números del problema y representarlos directamente sobre la recta a modo de procedimiento mecánico).

A partir de la información obtenida a lo largo de todas las sesiones implementadas, es posible ahora presentar una descripción de lo sucedido en relación a las categorías Pensamiento Matemático y Mediación.

Durante la sesión 0 o de identificación de presaberes se encuentra que bajo la categoría de *Pensamiento Matemático*, que hace referencia a las operaciones, procesos y dinámicas exhibidas frente a las situaciones propuestas, el estudiante busca representar los conceptos y situaciones a partir de operaciones con el fin de dar orden a la información presentada. El proceso empleado durante este momento inicial en el diseño del ambiente, refiere una dinámica de pensamiento deductiva en la resolución de preguntas de tipo formal $a + b = ?$, donde se parte de un proceso de

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

generalización de un patrón ya aprendido y donde se observan respuestas argumentativas (proceso de convencimiento o argumentación).

Caso contrario es la dinámica de tipo inductivo, desplegada ante preguntas de enunciado tipo 3, donde se parte de un proceso de exploración del problema, generalmente ante un cuestionamiento del docente frente a qué tan seguro está de su respuesta y donde no logra ser tan claro el argumento empleado.

Respecto a las fases afectivas asociadas a las dinámicas de pensamiento matemático, se encuentra que el estudiante muestra un momento de entrada-ataque y revisión del problema en preguntas sencillas o de baja complejidad (de tipo formal o de cantidades de 1 solo dígito). Ante problemas de difícil solución para él como el enunciado Tipo 3 o el enunciado Tipo 2 con números de 2 cifras, muestra varios momentos de entrada-ataque sin pasar a revisar el problema a menos que haya intervención docente.

Durante las sesiones de desarrollo 1 a 5, se evidencian ambas dinámicas de pensamiento con algo más de presencia de procesos deductivos durante la sesión 2, donde se abordó el concepto de notación de sumas; aquí el estudiante parte de una generalización ante un patrón aprendido o ya conocido por él.

Igualmente se observa una tendencia del estudiante a generalizar un patrón previamente trabajado en 2 tipos de situaciones: 1) cuando el objetivo de la actividad es crear un problema semejante al modelo presentado y 2) cuando se aborda un nuevo tipo de problema. El proceso de generalización no significa acierto en las diferentes actividades planteadas o en la creación de problemas por parte del estudiante.

La actividad de creación o planteamiento de problemas según patrón de suma, permite observar en el estudiante un proceso de exploración hacia uno de conjetura y argumentación o convencimiento; sin embargo, este tipo de actividad es costosa para el estudiante y suele rendirse

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

o abandonar el proceso, además de recurrir nuevamente a patrones ya conocidos (tipo 1), sin revisar si hay correspondencia con la situación a recrear.

Se observan momentos de exploración durante todas las sesiones excepto la de verificación. Este proceso está presente en actividades con manipulativos y en hoja, especialmente cuando trata de comprender cualquiera de los tres tipos de problema con suma y cuando se aborda por primera vez una herramienta manipulativa virtual y su paso a hoja.

Asociado a las fases afectivas, se observa que el estudiante mostró más episodios de cansancio durante la sesión 5 (problemas tipo 3).

Respecto a la categoría *Mediación*, el análisis de información se consolida bajo las dos subcategorías descritas anteriormente: Mediación docente y Mediación con Herramientas.

Bajo la subcategoría Mediación docente se encuentra que la intervención del docente principalmente se hizo bajo la modalidad de suave y moderada. Se acude a una mediación suave durante la sesión 0 al preguntar sobre la justificación de cada respuesta dada y cuando a lo largo de las sesiones se estimula al estudiante a monitorear sus estrategias y respuestas, de manera que pudiera verificarse inmediatamente una comprensión del tema y evitar estrategias mecánicas de resolución. El siguiente es un ejemplo de mediación suave correspondiente al tema de valor posicional:

P: ¿No te falta nada acá?

E: No.

P: ¿Seguro?

E: Ajá.

P: ¿Cuántas te caben máximo ahí?

E: Nueve.

P: ¿Cuántas hay?

E: Diez.

P: ¿Entonces que tienes que hacer con esas 10?

E: Pasarlas acá.

P: Ah, bueno.

(P19:1)

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

La mediación moderada se presenta durante todas las sesiones, particularmente cuando era necesario mostrar de forma más directa las posibilidades de los manipulativos virtuales y aclarar aspectos de correspondencia con los conceptos abordados. Esta modalidad tuvo predominancia en la sesión 4 (problemas T2), y concretamente en actividades de creación de problemas y revisión de tareas/actividades.

P: ¿Pero si estás empezando desde cero?

E: (El estudiante reubica las barras sobre la recta en manipulativo virtual)

E: ¡Siete!

P: Bueno, cuando a ti te dicen *total* (se hace énfasis) en qué parte de la recta te fijas?

E: En los de aquí (señala números de la recta)

P: En los números de abajo.

P: O sea que si te dicen en total él recogió 5 cantinas, ¿qué número estás mirando?

E: Siete profe.

P: No, yo te estoy diciendo que en total fueron 5. O sea que esta barrita no me la puedes dejar ahí.

P: Esta (barrita de dos) hace parte de este número (señala la barra de 5).

P: Nos tocaría ponerla, mira... acá (señala el lugar sobre la barra de 5 que corresponde a un espacio entre 0 y 2). Esto fue lo que recogió en la tarde. Entonces faltan 3 (señala el espacio en blanco o faltante sobre la barra de 5) para llegar a las 5.

(P87:3)

Muy asociado a la mediación docente y como se ejemplifica en diálogo anterior, se encuentra que es útil el acento sobre palabras claves en la presentación de la información al estudiante. Hacer énfasis en la lectura de un número según su valor de posición, o hacer señalamientos sobre los datos representados en cualquiera de las posibilidades de representación ofrecidas al estudiante, le permiten identificar con mayor facilidad información útil y diferencias entre un problema u otro. Bajo este mismo aspecto es necesario recordar que el estudiante aún no cuenta con las habilidades de lecto-escritura suficientes para leer él mismo los problemas o actividades; aquí dependen de la intervención docente y todo el despliegue de gestos o señalamientos que éste haga.

Respecto a la subcategoría *mediación con herramientas* es posible identificar diferentes aspectos que colaboraron o que presentaron un obstáculo en la tarea de convertirse en mecanismos de descarga cognitiva y de metáfora conceptual.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

En la sesión 0 no se hizo uso de material en físico, a pesar de que se puso a disposición del estudiante. A partir de la sesión 1 donde se parte del uso de manipulativos virtuales, se menciona lo siguiente:

Manipulativos en físico. Fueron útiles en la revisión y representación tangible en la tarea de creación de problemas, cuando el estudiante tendía a asociar un patrón incorrecto a una situación y mostraba desinterés o cansancio, esto durante la sesión 4, problemas tipo 2.

Manipulativos virtuales. Según la herramienta empleada se citan las siguientes observaciones:

Bloques de Base. Permitió introducir el tema de Valor Posicional y la regla de reagrupación. En un comienzo no es evidente la forma simplificada de representación gráfica de los números por decenas (selección directa de barras de 10) y la correspondencia entre número-gráfico (o representación por bloques). Observemos el siguiente ejemplo:

P: Me vas a hacer el número 48.

E: El 4 y el 8 (Empieza a seleccionar unidades).

P: ¿Crees que hay una manera rápida de hacerlo?

E: (señala los botones de base 10 y columnas que tiene un número indicador de la base sobre la cual se está trabajando y el número de casillas o columnas presentadas al estudiante según unidades, decenas, centenas o miles).

P: Te voy a mostrar el número que acabaste de hacer. Es decir el 30.

E: ¡Ay profe!

P: (Risas). ¿Cómo sería el número que te acabé de preguntar?

E: El 4 (señala columna de decenas) y el 8 (señala columna de unidades).

(P.8, 8:9)

Una vez se hace notar al estudiante cada uno de los detalles de interfaz pasados por alto, la herramienta presenta una ventaja cuando se quiere identificar la comprensión de la correspondencia número-gráfico. Un ejemplo de detalle pasado por alto es el número que aparece cuando se reagrupa gráficamente, o inicialmente el conteo de cubos o unidades ignorando el número de la derecha que le corresponde a ese conteo. La figura 10 permite observar el resultado de la tarea de representación según el ejemplo anteriormente presentado, donde ya se empieza a hacer consciente la correspondencia entre la representación numérica y gráfica de ese número.

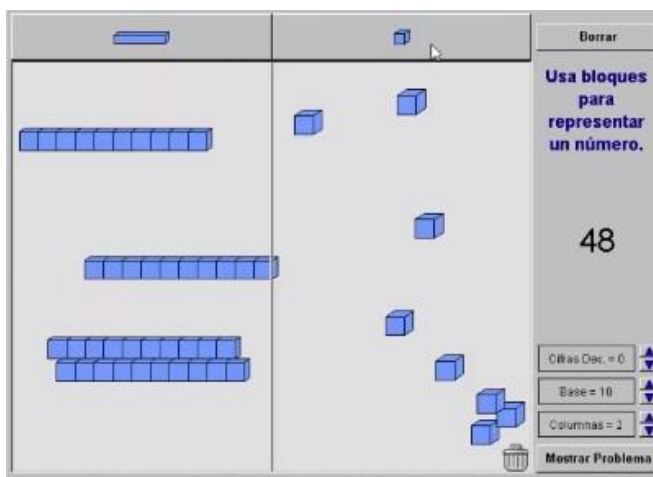


Figura 10. Actividad de representación gráfica del número 48 con manipulativo virtual Bloques de Base correspondiente a la sesión 1.

Dentro de las dificultades observadas en el uso de la herramienta está el enlace de las unidades cuando están ubicadas muy cerca de los límites superior o inferior de la respectiva casilla. Se hace necesario entrenar en el uso del ratón y la amplitud del enlace para tomar las unidades requeridas. La dificultad en el enlace puede distraer y así perder el hilo conductor de la actividad (Ver figura 11).

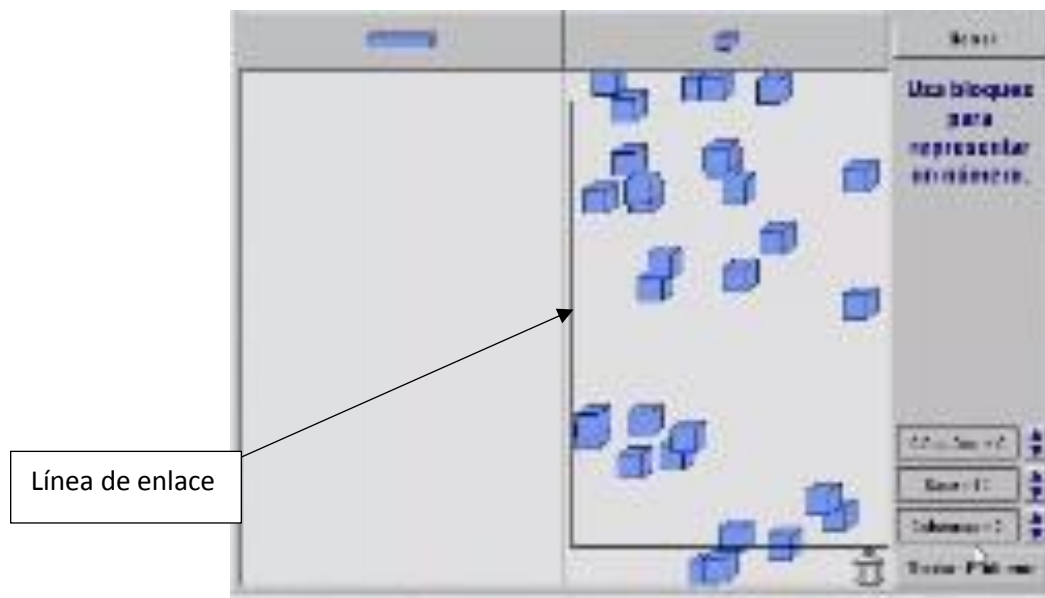


Figura 11. Actividad donde se muestra el intento de enlace de las unidades. Las unidades tanto en el nivel superior como inferior son difíciles de enlazar, lo que distrae al estudiante.

Bloques de Base Adición. A partir de esta herramienta se introduce el concepto de adición o suma de manera que el estudiante pueda comprender el proceso de reagrupación cuando corresponda y la notación vertical/horizontal.

Dentro de las ventajas de interfaz de la herramienta está la presentación por cuadrantes (superior e inferior), que permiten observar como agrupa el estudiante y como después de varios ejercicios, el estudiante empieza a verificar la representación gráfica con el número resultante.

Sobre este mismo aspecto, es posible identificar una dificultad en la correspondencia entre la representación gráfica por cuadrantes (sumando 1 y 2 donde no hay un lugar aparte para la representación del total o suma), y de la representación numérica o algoritmo (este presenta de manera vertical los sumandos y el resultado o suma). Este aspecto debe ser trabajado en hoja con la ayuda docente para evitar equivocaciones.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Al paso en hoja, se encuentra que el estudiante parte de la casilla de decenas (izquierda a derecha) para números de 2 cifras, situación que lleva a cometer errores de correspondencia entre número y representación gráfica. Algo similar sucede cuando en su intención de representar los sumandos, los segmenta; es decir, empieza representando el número de unidades de cada sumando, agrupa si corresponde, después representa las decenas de cada sumando y reagrupa si corresponde.

En el intento, el estudiante permite observar equivocaciones cuando al adelantarse en la reagrupación deja de representar una cifra de alguno de los sumandos (por considerar que ya está representada). Aquí es necesario recordar continuamente la correspondencia entre lo visto en la interfaz y su representación en hoja, así como los pasos en el procedimiento de representación.

Recta Numérica Barras. Esta herramienta permitió abordar la metáfora parte-todo para cada uno de los problemas de suma trabajados con el estudiante. Dentro de las ventajas se menciona a) la facilidad para visualizar la representación de las unidades, permitiendo ver en un solo pantallazo los datos relevantes del problema y b) entender la ley conmutativa de la suma. Pareciera que lo primero que visualiza el estudiante es el componente gráfico y en un segundo momento, a través de mediación docente, el componente numérico.

Una de las dificultades identificadas y ejemplificadas en la figura 12, es que la barra de unidades se puede desplazar a un número diferente de 0 (cero) y generar errores en la respuesta cuando tiene en cuenta esta representación. Es necesario recordar al estudiante la revisión de la ubicación correcta de las unidades. Otra dificultad se ubica en la opción que permite extender las barras de unidades. Cuando el número supera la longitud de la recta en pantalla, al intentar ir más allá (alargarla a la derecha), la barra se extiende más allá de lo deseado.



Figura 12. Desacuerdo en la representación del problema en recta numérica, donde el estudiante por descuido representa desde un número diferente de 0.

7.2 Estudiante Aula regular:

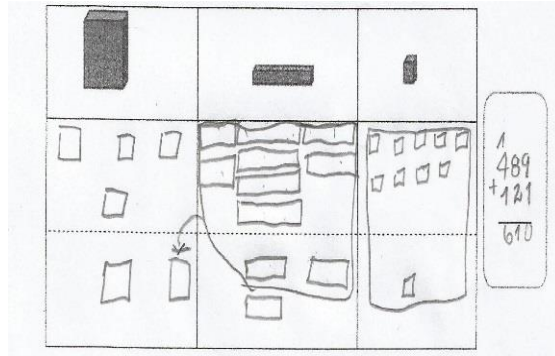
Es importante recordar que la categoría *Aprendizaje Matemático* presenta el análisis de tres subcategorías: *Visualización*, *Concepto* y *Estrategias*. Al mencionar la Subcategoría de *Visualización* se encuentra que el estudiante empleó en la sesión 0 o de preconceptos 2 clases de imágenes para dar solución a los diferentes problemas: *Cinéticas* y *formulas en la memoria*. Las primeras se evidenciaron mientras hacía conteo parte en la mente y parte apoyado en dedos y movimientos muy suaves de cabeza; las segundas al resolver mentalmente por patrones de decenas y centenas (p.e. $10+8$). La figura 13 ejemplifica el tipo de imágenes evidenciadas en el estudiante.

En las sesiones de desarrollo de conceptos se identificó el uso de imágenes *dinámicas* durante y posterior al uso de la herramienta manipulativa virtual.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

$$\begin{array}{r} 1 \\ 25 \\ +15 \\ \hline 40 \end{array}$$

Formula en la memoria



Dinámica

E: Se necesita 40 profe

P: ...¿sí?

E: Si

P: ...¿Qué sumaste? Daniel tiene 50 canicas ¿Cuántas le hacen falta para tener 90? ¿Cuál fue la respuesta que diste?

E: 40

P: y ¿Qué contaste?

E: 51,52... (muestra el conteo con sus dedos)

P: contaste de 50 en adelante ¿hasta llegar a?

E: 90

(P13, 04:38.64)

Cinética

Figura 13. Ejemplos de tipos de imágenes identificadas para el caso de Aula Regular.

En la subcategoría *Concepto* se identificaron momentos de acierto y desacierto durante las diferentes sesiones. A continuación se mencionan las estrategias empleadas por el estudiante e identificadas para cada momento.

Durante la sesión 0 se observó que el estudiante representa cantidades de dos dígitos teniendo en cuenta el valor posicional de cada número, reagrupando cuando había lugar y resolviendo las sumas de manera vertical correctamente.

Al pedir al estudiante la resolución de problemas de Tipo 1, es observable el cálculo a la cabeza, mostrando acierto en la solución de problemas con cifras pequeñas de uno o dos dígitos. Cuando el problema dado es de dos cifras, lo puede realizar en la mente siempre y cuando una de ellas sea grande y la otra pequeña (p.e. 15+3); en este caso utiliza la estrategia *Contar desde el*

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

mayor. Para dar respuesta a los problemas de cambio Tipo 1 con cifras un poco más grandes, utiliza la notación suma vertical ubicando los números de izquierda a derecha, reagrupando cuando hay lugar y usando la estrategia *Contar desde el primero*. En la solución de esta clase de problemas el estudiante mostró siempre acierto.

Ante problemas de cambio Tipo 2 el estudiante hizo conteo desde el primer dato dado, a la mente y con dedos. Empleó la estrategia de adición *contar desde el primero* y usó imágenes *cinéticas*; no hizo ninguna clase de representación gráfica o numérica en hoja.

Al presentar un problema de este tipo con números pequeños o con patrones de decenas (p.e. $10 + ? = 18$), resuelve a la cabeza de manera acertada sin conteo de dedos, haciendo un recobro en la memoria por un dato recordado, lo que refiere el uso de la estrategia de adición *recordar*.

Frente a problemas Tipo 3 ($? + b = c$), se observó que estos le causan mayor dificultad al estudiante. Inicialmente explora el problema haciendo relectura del mismo para lograr entenderlo; ante la resolución de este tipo de problema, se observa el uso de imágenes *cinéticas*, conteo de dedos de manera regresiva tomando el último dato dado hasta llegar al primero; es decir, resuelve por resta.

Cuando se le presenta un problema con números pequeños hay acierto, pero cuando los números son más grandes falla. Aquí realiza un correcto conteo regresivo, pero en el intento de ayudarse con los dedos pierde la cuenta (no son suficientes); es aquí donde presenta el desacierto.

El siguiente diálogo recrea un ejemplo de lo observado en este tipo de problemas:

E: 15 profe

P: ¿cómo lo hiciste?

E: sumando de para atrás

P: ¿otra vez haciendo como el anterior? ¿De para atrás?

E: Sí (con movimiento de cabeza)

P: y arrancaste en ... ¿Cómo lo hiciste?

E: arranqué desde 25

P: ¡ah!

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

E: 25,24 ... hasta llegar a 10

P: ¡Muy bien!

(P14, 04:04.96)

La *sesión 1* cuyo objetivo fue presentar el valor de posición en números de mínimo dos dígitos, aplicando la regla de reagrupación cuando corresponda, permitió observar que aunque el estudiante podía hacer reagrupaciones en la representación de la suma de manera vertical, no tenía claro el concepto ni el valor de posición de cada dígito en un número.

El manipulativo virtual *Bloque de Base* lleva al estudiante a hacer uso de imágenes *dinámicas* permitiendo la comprensión del valor posicional y la regla de reagrupación. Durante el desarrollo de esta actividad se aprovechó el uso del manipulativo para afianzar la lectura de números de tres y cuatro cifras y el valor de la decena y centena.

Al paso en hoja hizo una relación inmediata con el manipulativo, logrando ubicar en las casillas correspondientes los valores dados. Sin embargo, cuando se le solicita hacer lectura de los valores presentados de forma gráfica y escribir el número correspondiente, olvida la reagrupación fallando en la representación numérica.

Representa en dos casillas la misma cantidad olvidando que la reagrupación se hace trasladando la cantidad a la casilla siguiente, formando una nueva cantidad (p.e escribió 2903 en lugar de 223). Escribió 90 en las decenas cuando había 12 barras en este valor; reagrupó con nueve barras formando una nueva centena.

Otra concepción errada observada frente a la reagrupación, es que pensaba que se hacía con nueve barras de 10 o de 100 dependiendo la ubicación, en lugar de 10. Aquí hubo lugar para la aclaración de este aspecto y apoyar con más ejercicios (Ver figura 14).

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

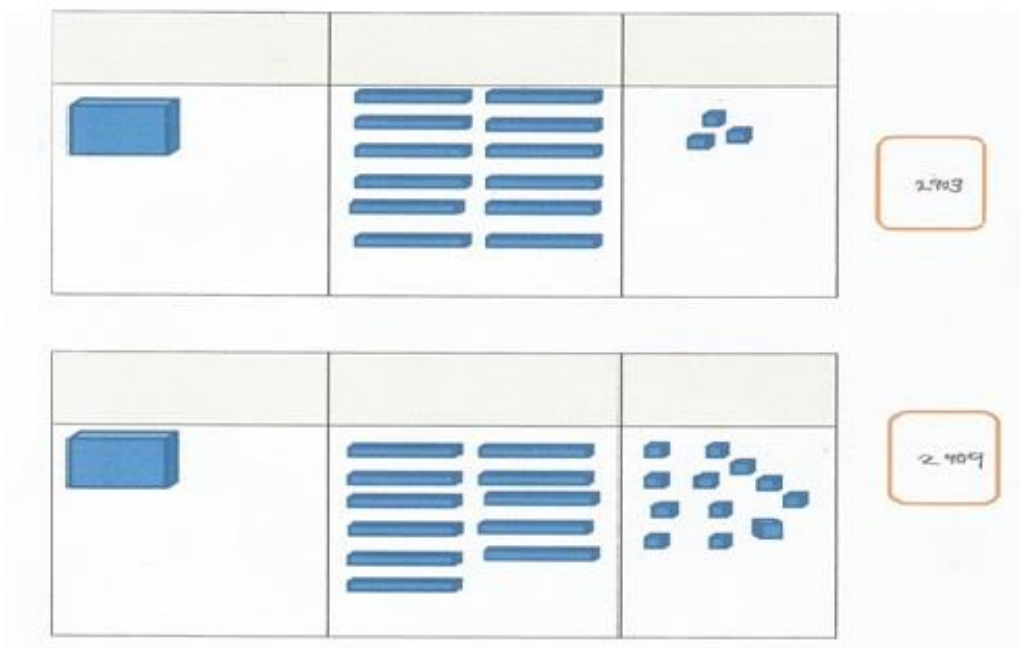


Figura 14. Respuestas registradas por el estudiante de Aula regular durante la sesión 1 donde falla en la representación numérica.

La *Sesión 2*, cuyo objetivo era reconocer los símbolos y notación propios de la suma, permitió retomar la estrategia de agrupación abordados en la sesión 1. Al desarrollar el trabajo en el manipulativo virtual *Bloque de Base Adición*, el estudiante hace una relación visual inmediata entre los sumandos representados y la notación numérica. El manipulativo mostró problemas de adición de manera aleatoria; esto motivó al estudiante ante el aumento en la complejidad y los aciertos obtenidos incluso con problemas de cifras hasta de 4 dígitos; este manipulativo permitió a su vez afianzar el concepto de reagrupación y la lectura de cifras (Ver Figura 15)

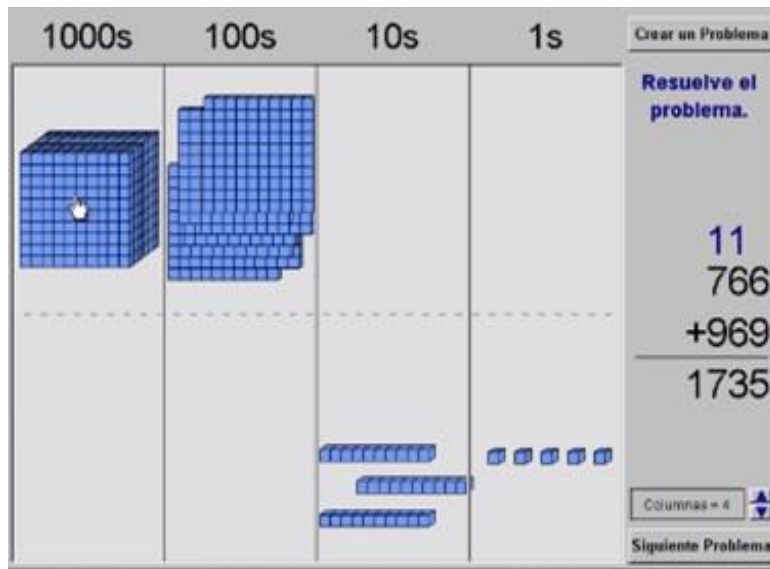


Figura 15. Actividad realizada por el estudiante de Aula regular durante la sesión 2, donde reagrupa y relaciona con representación numérica.

Al paso en hoja el estudiante no hace una relación inmediata y se le dificulta la ubicación de los sumandos. Se ve la necesidad de mostrarle en el manipulativo la organización de las cifras (primer sumando parte superior, segundo sumando parte inferior) posterior a esta aclaración el estudiante acierta tanto en la representación gráfica como en la numérica.

Para la resolución grafica del problema hace reagrupación encerrando los bloques reagrupados y usa una flecha mostrando la nueva barra formada. Esto refiere uso de imágenes *dinámicas* la cual le permite no tener confusión a la hora de realizar el conteo o emitir el total. El estudiante ubica el total dado en la representación gráfica y mediante algoritmo vertical, verificándolo de manera numérica.

Sesión 3, el objetivo era plantear, representar y resolver problemas sencillos con suma según estructura Cambio Tipo1, $a + b = ?$ Para ello se aborda la sesión con el uso del

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

manipulativo virtual *Recta Numérica Barras*, donde es visible que el estudiante emplea la herramienta sin dificultad. Esta es usada para realizar el conteo y la representación a través de barras de los datos numéricos dados. Al representar las dos cifras, logra identificar que la respuesta al problema está al final de las barras representadas, haciendo evidente que los dos conjuntos son parte de un todo.

Al paso en hoja se puede observar una correcta relación con el manipulativo. Sin embargo, al realizar la lectura del problema el estudiante muestra dificultad en este aspecto; lee sin tener en cuenta los signos de puntuación lo que le dificulta la comprensión del mismo, se ve la necesidad de orientar en pautas de lectura que le permitan realizar un buen análisis.

Cuando resuelve problemas representa correctamente los valores dados de forma gráfica, aunque en un primer intento falla con la representación numérica, se orienta en este aspecto lo que le permite avanzar; también se pudo identificar que el estudiante no estaba familiarizado con la construcción de problemas, lo que le dificultó realizar planteamientos. Se brinda la estrategia de construcción de problemas por temáticas inmediatas utilizando situaciones cotidianas (p.e. granja, cooperativa, supermercados); realizando varios ejemplos, finalmente mostró habilidad para realizar planteamientos de problemas de cambio tipo1 (Ver figura 16).

Se le facilitó la resolución de este tipo de problemas tanto en herramienta como en hoja y siempre se mostró motivado.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

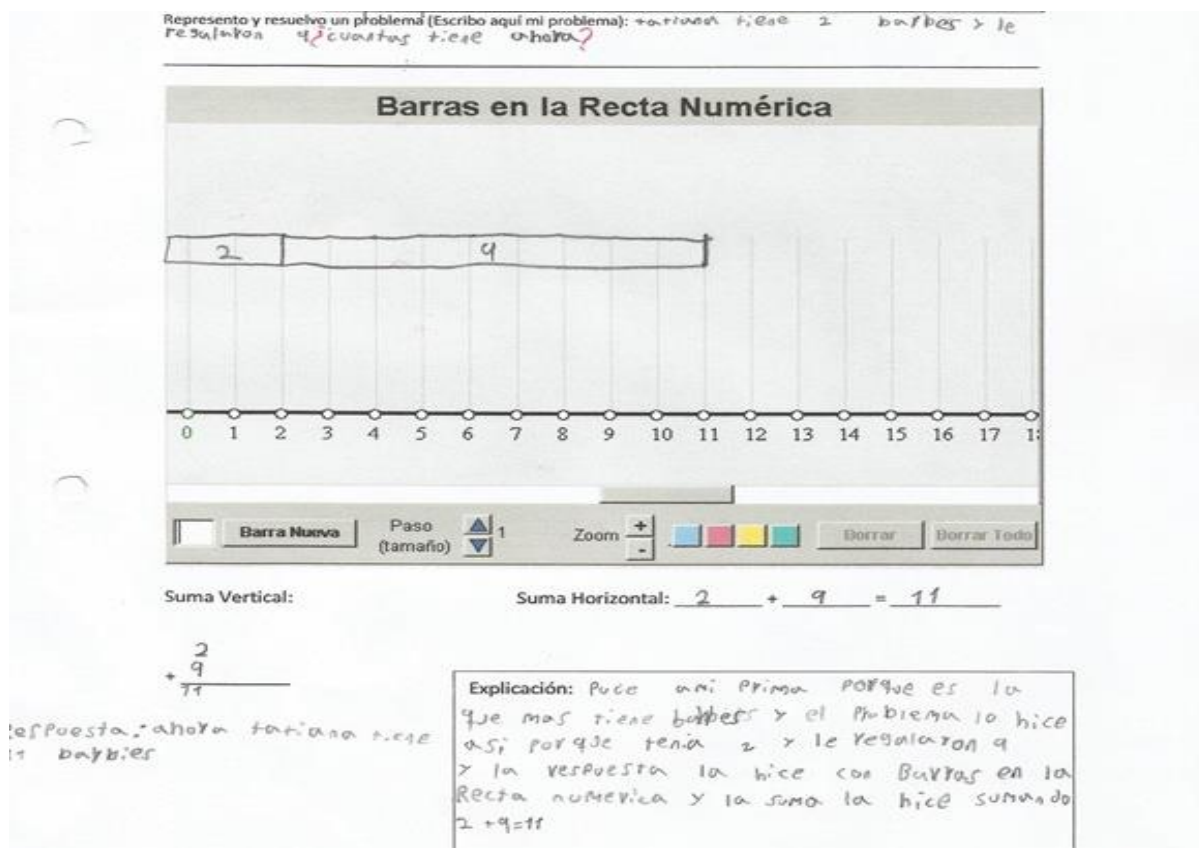


Figura 16. Actividad realizada por el estudiante de Aula regular durante la sesión 3 donde plantea y resuelve problema Cambio tipo 1 apoyado en la representación en Recta Numérica.

La *Sesión 4*, cuyo objetivo era plantear, representar y resolver problemas sencillos según estructura de Cambio Tipo 2 permitió observar que al desarrollar el trabajo frente al manipulativo virtual el estudiante muestra claridad con la ubicación de la incógnita en este tipo de problema. Utiliza la recta numérica para realizar el conteo y resolver la pregunta. En este caso hace conteo desde el primer número hasta llegar al final de la secuencia; es decir, usa la estrategia de adición *Conteo desde el primero*.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Cuando soluciona acertadamente se le elogia por sus aciertos, lo cual tiene una connotación importante en el trabajo posterior, haciéndolo de manera más rápida y con mayor seguridad.

Al paso en hoja se le presenta al estudiante la posición de la incógnita en la representación numérica para que haga relación con el tipo de problema anterior (Tipo 1) y pueda establecer diferencias. En hoja representa y resuelve acertadamente, sin embargo, presenta dificultad a la hora de realizar planteamientos. En un primer intento plantea un problema cambio Tipo 1 en vez de Tipo 2; él mismo cae en cuenta que no es el problema solicitado. En un segundo intento copia los valores dados del problema presentado. Finalmente, después de mostrarle varios ejemplos, logra construir un problema Tipo 2. Se lleva al estudiante para que solucione numéricamente y compare entre lo representado en recta y notación numérica, de tal manera que luego resuelva sin necesidad de la representación gráfica.

Cuando resuelve numéricamente el estudiante se apoya en el conteo de dedos lo que quiere decir, que continúa usando imágenes *Cinéticas*.

Aunque el estudiante logró resolver los problemas de este tipo se vio la necesidad de trabajar aún más en la construcción de problemas y afianzar más el patrón de suma. Durante este tipo de actividad, el estudiante presentó desacierto en la resolución de problemas de forma numérica, cuyo resultado terminaba en ceros (p.e. 100, 500) debido a que no encontraba un número que sumado con el sumando 1, diera como resultado 0 en el total. Se orientó en este aspecto.

Posterior a la actividad se logró plantear y resolver numéricamente problemas con cifras hasta de tres dígitos, sin necesidad de representar gráficamente (Ver figura 17).

en la tienda de don Julián han vendido 57 bolsas de leche. Pero don Julián quiere vender las 100 que tiene en la semana, ¿cuántas bolsas de leche le faltan para cumplir su meta?

$$\begin{array}{r} 100 \\ - 57 \\ \hline 43 \end{array}$$

• Julián tiene 125 sacos en el almacén pero también quiere 500 sacos en el almacén nuevo que le compraron. ¿cuántos sacos le hacen falta para llegar a 500?

$$\begin{array}{r} 125 \\ + 375 \\ \hline 500 \end{array}$$

Rt a don Julián le faltaban 375 sacos

Figura 17. Actividad realizada por el estudiante de Aula regular durante la sesión 4 extra, donde logra resolver con cifras de tres dígitos y cuyo resultado es una cantidad que contiene dígitos ceros.

En la *Sesión 5*, el objetivo era plantear, representar y resolver problemas sencillos según estructura de Cambio Tipo 3. El estudiante resuelve los diferentes problemas planteados con ayuda del manipulativo *Recta Numérica Barras*. Se apoyó en la herramienta para representar los datos dados y realizar conteo acertando en su respuesta. Cuando el problema se plantea de manera diferente, se confunde y no logra solucionar.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Al paso en hoja presentó falla en la representación en la recta numérica; desacierta en la representación de los datos, esto es, representando como si fuera un problema Tipo 2 anteriormente visto. Hubo necesidad de mostrar la estrategia de ubicación de los datos en el manipulativo para que recordara.

La creación del problema fue difícil para él. Le tomó varios intentos poder construir correctamente el problema de este tipo. Durante esta sesión el estudiante mostró cansancio, lo que dificultó el trabajo. Seguramente esto llevó a que fuera una de las sesiones donde más desaciertos obtuviese.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Se necesitó de una sesión extra acompañada de ejercicios complementarios para realizar en casa, para la comprensión del patrón del problema. La figura 18 ejemplifica el paso en hoja para esta sesión.

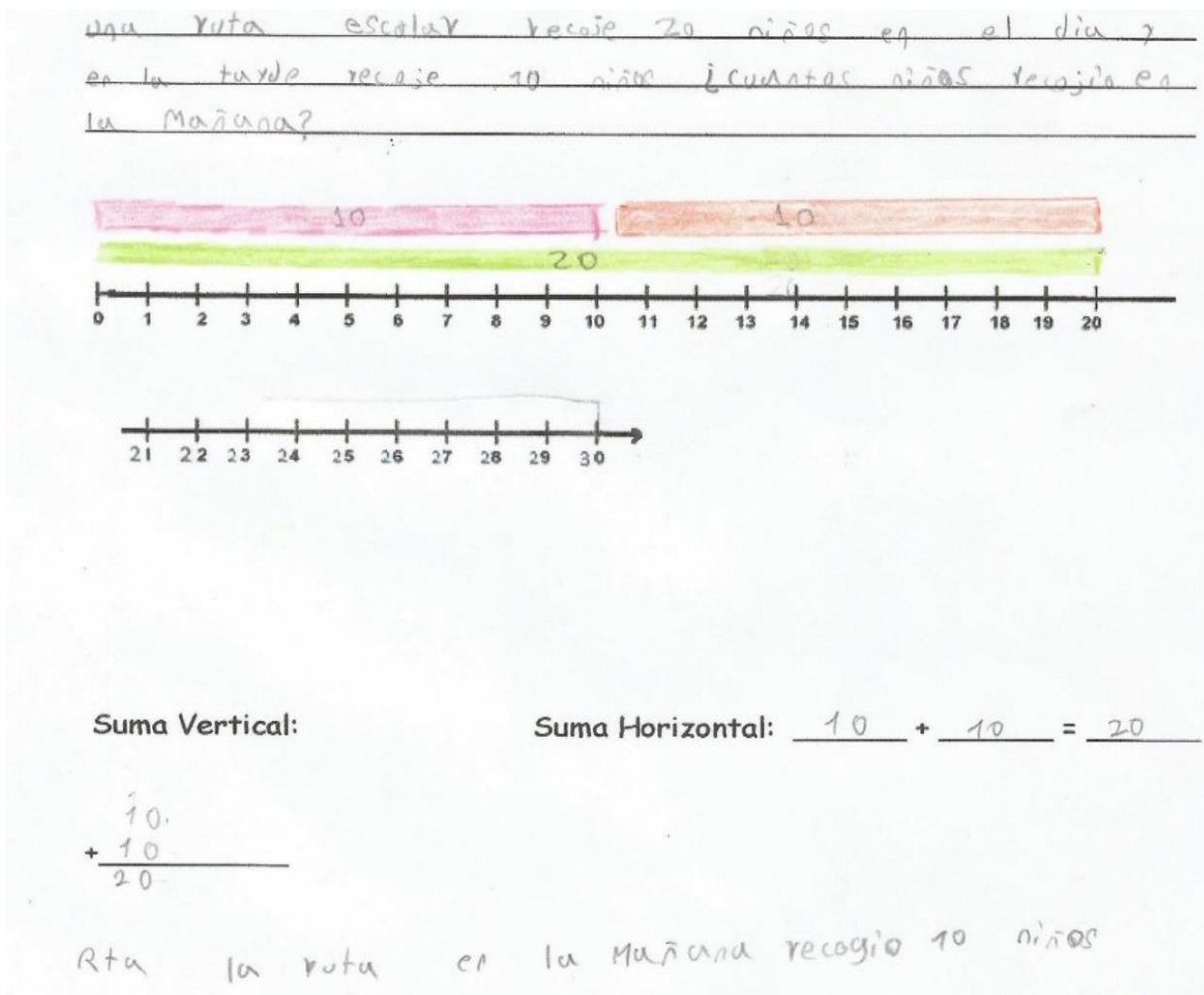


Figura 18. Actividad realizada por el estudiante de Aula regular durante la sesión 5 donde logra crear y resolver problema de cambio Tipo 3.

La *Sesión 6* o de verificación del proceso desarrollado durante toda la implementación, permitió identificar lo siguiente:

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

El estudiante resuelve correctamente el problema cambio Tipo 1. Inicialmente analiza muy bien el problema, hace conteo apoyado en dedos ubicando el resultado o total en la recta; posteriormente representa en la recta numérica los datos dados. Es evidente que el estudiante ya no necesita el manipulativo virtual para resolver el problema, lo hace por solicitud de la docente.

Cuando resuelve el problema cambio Tipo 2 se toma de nuevo el tiempo para analizar el problema, marca los datos en la recta aunque prefiere resolver primero de forma numérica. Para él era claro que se le presentarían los tres tipos de problemas y prefiere analizar muy bien de manera que pudiera identificar y resolver correctamente.

Frente al problema cambio Tipo 3, se confunde y resuelve haciendo unión de conjuntos. Cae en cuenta que ese no es el resultado y corrige resolviendo y argumentando su procedimiento correctamente. Se le pide al estudiante que cree y resuelva dos tipos de problemas de su preferencia. Escoge el Tipo 1 y 2 creando y resolviendo correctamente bajo representación numérica con cifras grandes de tres dígitos.

Se describe a continuación una descripción de lo sucedido en relación a las categorías Pensamiento Matemático y Mediación.

Bajo la categoría *Pensamiento Matemático* se encontró que durante la sesión 0 o de identificación de presaberes, el estudiante de aula regular emplea un proceso de pensamiento deductivo (generalizar, convencer, conjeturar, explorar) cuando resuelve problemas cambio Tipo 1, 2 y 3; emplea en la resolución un patrón que ya reconoce y logra dar un argumento claro a su respuesta, aunque este argumento no tenga correspondencia con un planteamiento algorítmico convencional.

Al mencionar las fases afectivas en el pensamiento matemático, se puede apreciar que el estudiante muestra momentos de entrada – ataque y revisión, cuando se enfrenta a problemas de enunciado Tipo 1 y Tipo 2 con números de uno o dos dígitos. Ante los enunciados Tipo 3 -de

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

difícil solución para él-, muestra momentos de entrada y ataque sin pasar a la etapa de revisión para números grandes. Es importante mencionar que en ningún momento el estudiante abandonó por sensación de incapacidad.

Durante las sesiones de desarrollo de 1 a 5, se observa ambas dinámicas del pensamiento matemático; sin embargo, la dinámica de mayor tendencia es la deductiva principalmente en la sesión 2 donde se trabajó el concepto notación suma. En esta sesión el estudiante usa el patrón previamente aprendido en la resolución de problemas.

En todas las sesiones exceptuando la 6 (verificación), el estudiante usa la dinámica inductiva, haciendo una exploración de un nuevo tipo de problema o pregunta mientras reconoce el patrón, para posteriormente utilizar la dinámica deductiva. De ahí pasa a realizar generalizaciones. Estas dinámicas fueron desplegadas tanto en el trabajo con manipulativo virtual como en hoja.

Aunque el estudiante no estaba acostumbrado a la construcción de problemas, a medida que se fueron abordando las sesiones, pudo hacer diferencia entre los 3 tipos de problema abordados, realizar planteamientos similares y dar solución a cada uno de ellos. Este proceso en el estudiante fue inductivo (hace primero un proceso de exploración pasando por uno de conjetura y generalización hasta llegar al de convencimiento o argumentación).

Con relación a la categoría de *mediación* y sus subcategorías; mediación docente y mediación con herramientas se observó lo siguiente:

En la subcategoría *mediación docente*, se realizó principalmente una mediación suave y moderada. Estas fueron usadas durante las sesiones de desarrollo de conceptos. La mediación docente en su modalidad de *suave*, específicamente se utilizó para supervisar las respuestas dadas por el estudiante y dar una retroalimentación inmediata a sus acciones, encaminando y estimulando su avance en el proceso.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Esta modalidad de mediación estuvo presente durante todas las sesiones, pero con mayor frecuencia en la sesión número dos, donde se abordó el concepto de notación suma. El siguiente es un ejemplo de mediación suave correspondiente al tema de problema cambio tipo 1:

P: Representa de forma vertical

P: ¿Cuánto te dio? ¿32?

E: Si

P: Mira, verifica ¿cuánto te dio acá?

E: 22

P: ¿y porque aquí te da 32?

E: (observa, relaciona)

P: haz la suma $3 + 9$ ¿Cuánto es? No $13 + 9$ lo estás haciendo de para abajo, cuenta

E: (Hace conteo con dedos) 12

P: Ah, bueno. Te da lo mismo así (señala, representación recta) o así (señala, notación vertical).

(P: 32, 36:37,31)

La mediación moderada al igual que en la mediación docente suave se presenta durante todas las sesiones, pero menos que esta. Esta modalidad de mediación se usó para brindar mayor apoyo al estudiante ofreciendo ejemplos y estrategias útiles a la solución de una tarea.

Las sesiones donde más se hizo mediación docente moderada, fueron las sesiones 4 y 5, principalmente en las actividades de creación y solución de problemas de tipo 2 y 3. El siguiente es un ejemplo de mediación moderada presentado en la sesión 4, correspondiente al tema de problemas cambio tipo 2.

P: Nicolás organiza una fiesta de cumpleaños. Al llegar la tarde han llegado 12 amigos. Si invito 20 ¿Cuántos amigos faltan por llegar? (lee nuevamente el problema)

E: (trata de representar una barra de 12)

P: ¿Recuerdas qué pasa cuando vamos a representar un valor mayor a 10?

P: El máximo que nos deja representar es 10.

E: (Asiente con la cabeza, representa una barra de 10 y estira la barra para extenderla representado el número 12)

P: ¡Perfecto te acordaste! Listo, 12 amigos... si invito 20....

E: (representa una barra de 10)

P: Él invito solo 20, la barra debe llegar hasta 20 no más.

E: (intenta colocar una barra de 20)

P: mmmm nooo, él invito 20 amigos ¿cierto? Y han llegado 12 amigos la barrita debe llegar hasta acá (señala el número 20 en la recta numérica) no se puede pasar, entonces vamos a colocar una barra ¿de cuánto? mira (señalando con el puntero el número 12) 12 (señala cada número a partir del 12 haciendo conteo) contamos uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho ¿cuantos amigos faltaban?

E: 8

P: Coloca una barra de 8 a ver si llega hasta 20

E: (representa una barra de 8 unidades)

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

P: Colócala de otro color si quieres

E: (marca el color amarillo)

P: ¿llego hasta el 20?

E: si (Asiente con la cabeza)

P: ¿entonces cuántos amigos le faltaban por llegar?

E: 8

P: porque nos estaban dando un resultado acá (señala el 20 en la recta), nos dan un valor inicial que era este ¿Cierto? (señala el 12) y nos dicen que teníamos que llegar a este (señala el 20); teníamos que mirar qué era lo que nos faltaba en este pedacito. Teníamos este (señala 12), teníamos que llegar a este (señala 20), teníamos que averiguar este (señala el espacio entre 12 y 20)

E: (Asiente con la cabeza)

P: Bueno, otro... (da otro problema para que lo represente el estudiante)...

Dentro de los aspectos asociados a esta categoría y que fueron de importancia en el desarrollo de las diferentes sesiones, está el brindar al estudiante una estrategia de construcción de problemas por temáticas como por ejemplo: la granja, tienda escolar, supermercado, entre otras. Esto permitió al estudiante tener diferentes opciones reales y cercanas para la construcción de problemas.

Otra estrategia es apoyar en la correcta lectura de los problemas, haciendo pausas en los datos relevantes y énfasis en la pregunta señalada. Esto colabora en la comprensión y análisis de los mismos y en determinar el tipo de procedimiento que debe realizar.

Respeto a la categoría *mediación con herramientas*, se citan los aspectos asociados a éstas que colaboraron o dificultaron en el desarrollo de las diferentes actividades. Ante todo hay que señalar que solo fue necesario el uso de manipulativos virtuales. A pesar que en la sesión 0 o de presaberes el estudiante fue expuesto a una serie de herramientas en físico para su uso, no utilizó ninguna de ellas; prefirió realizar el conteo con sus dedos para dar solución a los diferentes problemas planteados.

En las sesiones de desarrollo de conceptos donde se emplearon manipulativos virtuales, se mencionan las siguientes observaciones según la herramienta empleada:

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Bloques de Base. La herramienta se empleó para introducir el tema de valor posicional y regla de agrupación. Colaboró en la comprensión del valor que toma un dígito de acuerdo a la posición que ocupa dentro de un número (unidades, decenas, centenas), teniendo claridad frente al cambio de ubicación de un solo dígito; es decir, la reagrupación altera el valor total de la cifra. Aportó en el entendimiento de esta regla, procesos que el estudiante realizaba mecánicamente solo con unidades, pero sin ninguna comprensión.

Otra ventaja de la herramienta es que colaboró al presentar en simultánea, la cantidad representada y su número, permitiendo al estudiante hacer una relación inmediata. Se aprovechó esta herramienta para fortalecer la lectura de números (Ver Figura 19).

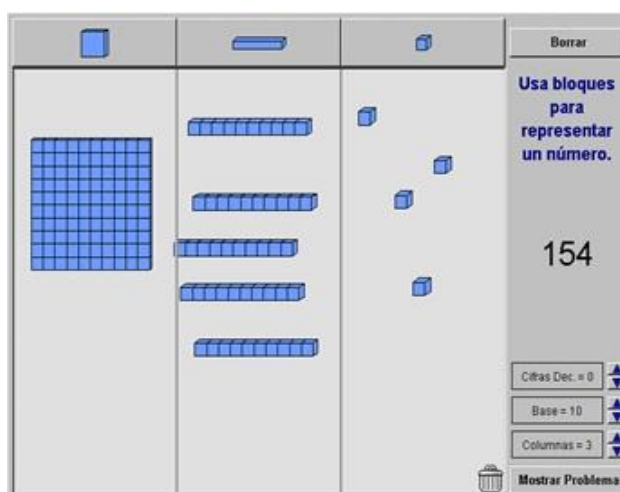


Figura 19. Actividad de representación gráfica del número 154 con manipulativo virtual Bloques de Base correspondiente a la sesión 1, donde se relaciona cantidad y representación gráfica de esa cantidad.

Bloques de Base Adición. Con esta herramienta se introduce el concepto de adición o suma, se afianza la noción de reagrupación de números dentro de la unión de conjuntos y se reconocen los símbolos y notación propios de la suma.

Dentro de las ventajas que brinda la herramienta, está la posibilidad de representar dos sumandos en los recuadros (superior e inferior) que presenta la interfaz, permitiendo al estudiante

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

observar numéricamente que sucede cuando se hace la agrupación correspondiente (aparece el número sobre la posición a la que debe reagrupar). Al hacer el procedimiento correcto podrá observar la suma o total en representación numérica. Es de notar que la interfaz de la herramienta no cuenta con un espacio especial para la unión de conjuntos (esto es un lugar exclusivo para el total o suma). Se pierde la correspondencia entre lo gráfico y lo numérico cuando no se cuenta con una franja aparte para la unión de conjuntos.

Otro aspecto importante de mencionar, es que con tan solo mover un elemento gráfico la herramienta visualiza el total de la suma, sin haberse completado la unión de conjuntos. La figura 15 anteriormente presentada permite observar un ejemplo de reagrupación y su representación gráfica y numérica.

La herramienta permite dar la opción de crear problemas de manera aleatoria, lo cual reta al estudiante a solucionar problemas con cifras cada vez más grandes; esto fue beneficioso para el estudiante ya que siempre estuvo motivado al logro.

Otra de las ventajas es la posibilidad de verificar la suma o total haciendo el conteo de los bloques por cada posición, permitiendo afianzar el conteo de números por patrones de 10, de 100 y de 1000.

Al pasar al trabajo en hoja, éste le cuesta al estudiante en un principio cuando se busca la representación de los sumandos, pese a que se muestra la interfaz de una manera muy similar al del manipulativo virtual (excepto en sus colores). Fue necesario mostrarle la herramienta virtual para que hiciera la respectiva relación y darle la estrategia de encerrar los bloques cuando hace reagrupación. Así mismo fue necesario mostrarle la estrategia de como dibujar una flecha indicadora cuando se tiene un nuevo bloque formado; esto con el fin de evitar que los cuente doble vez, tanto en la nueva posición como en la posición original.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Recta numérica barras. Esta herramienta permitió realizar la representación de los problemas de suma cambio Tipo 1, 2 y 3. Dentro de las ventajas que la herramienta ofreció se puede decir lo siguiente:

Permitió al estudiante realizar una visualización de las cantidades dadas, mostrando el número al que se debía llegar; facilitó la resolución de problemas al poder hacer un conteo de los valores dados. Al tener la posibilidad de dar un color a cada cifra representada, el estudiante pudo hacer una visualización diferenciadora de cada dato dado y por ende un mejor análisis del problema y reconocimiento del patrón presentado.

Otra de las ventajas de la herramienta, es que muestra en las barras los números representados. Visualmente facilita la suma de los datos y la confirmación del resultado tal como se aprecia en la figura 20.

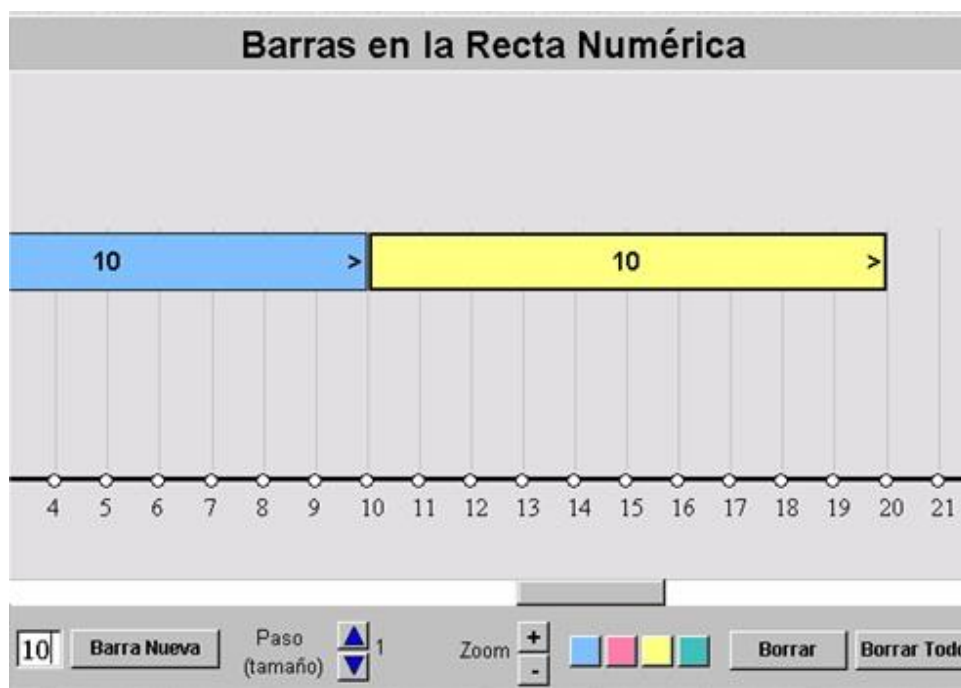


Figura 20. Actividad realizada por el estudiante de Aula regular donde representa gráficamente un problema cambio tipo 1 con el manipulativo *Recta Numérica Barras*, presentado en la sesión 4.

Una de las dificultades observadas en la herramienta, es la movilidad de la barra hacia números negativos y la inestabilidad desde el inicio (desde el número 0). Se facilitaría la representación si estuviera fijo el valor 0 (cero) al inicio de la recta y adicionalmente permitiera hacer acercamientos o alejamientos sobre la representación en recta, cuando los números son cantidades grandes (que requieren una mayor extensión de las barras). Esto facilitaría una mayor visibilidad de los datos evitando que el estudiante los pierda de vista.

7.3 Comparación de los casos

De acuerdo con los resultados obtenidos por estudiante, a continuación se busca precisar los aspectos más relevantes para ambos casos, teniendo en cuenta las preguntas orientadoras y que responden al objetivo general de *Describir el proceso de estructuración del pensamiento matemático* y el objetivo específico de *compararlos*. Para tener una comparación sintética de los hallazgos más relevantes derivados de la implementación del ambiente de aprendizaje, se condensó la información según referentes y categorías de análisis en la siguiente tabla (Ver tabla 7). Posterior a ella se presenta en detalle dichos hallazgos.

Tabla 7.

Resumen de hallazgos por referentes para ambos casos.

Referente	Categoría	Preguntas según categoría	Hallazgos	
			Aula Regular	Aula Diferencial
Pedagógico	Mediación (docente) (Vygotsky, 1978, Heddens, 2005, Alvarez-Grayeb, 2011)	Establecer elementos de mediación docente y de las herramientas virtuales requeridos por el estudiante cuando resuelve la tarea frente a la herramienta manipulativa virtual. Responde la pregunta: ¿Qué elementos de la mediación docente apoyan el aprendizaje de los conceptos abordados en ambos casos?	Mediación de tipo suave a moderada. Mediación moderada en actividades de creación de problemas Señalamientos, gestos, énfasis en los datos claves del problema ante la relectura y sentido dado por signos de puntuación. Ampliación del repertorio de posibilidades para crear problemas o aplicación de los conceptos.	Mediación de tipo suave a moderada. Mediación moderada en actividades de creación de problemas Señalamientos, gestos, énfasis en los datos claves del problema ante la necesidad de lectura del mismo y la identificación y relación de elementos de interfaz en el procesamiento simultáneo de la información. Ampliación del repertorio de posibilidades para crear problemas o aplicación de los conceptos.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Disciplinar	Pensamiento Matemático	Identificar dinámicas de pensamiento matemático y estrategias de resolución de tareas antes y después de usar las herramientas tecnológicas, así como posibles estrategias de visualización matemática.	Tipo de dinámicas exhibidas	
	Operaciones, Procesos y Dinámicas del (Burton, 1984) y (Stacey, 2007)	Responde a las preguntas:	Razonamiento deductivo ante enunciados de tipo formal (concepto ya conocido por el estudiante).	Razonamiento deductivo ante enunciados de tipo formal (concepto ya conocido por el estudiante).
	Aprendizaje Matemático	¿Qué tipo de dinámicas de pensamiento matemático exhiben los estudiantes a lo largo del ambiente de aprendizaje?	Razonamiento deductivo frente a los 3 tipos de problema con cifras pequeñas.	Razonamiento deductivo frente a los problemas tipo 1 y 2 con cifras pequeñas.
	Concepto matemático. Suma (Carpenter y Moser, 1983) Representaciones semióticas como función cognitiva (Duval, 1999).		Razonamiento inductivo frente a la creación de problemas mientras se familiariza con el patrón de suma.	Razonamiento inductivo ante la necesidad de argumentación frente a enunciados tipo 2 y 3.
	Visualización matemática. Habilidad de Visualización Matemática (Arcavi, 2003, Presmeg, 1993).		El problema tipo 3 representa mayor esfuerzo y por lo tanto carga cognitiva.	Razonamiento inductivo frente a la creación de problemas mientras se familiariza con el patrón de suma. Estrategia de mecanización de un patrón de suma, que es transferido a otras situaciones así no aplique. El problema tipo 3 representa mayor esfuerzo y por lo tanto carga cognitiva.
		¿Qué tipo de imágenes mentales emplean ambos estudiantes, antes de usar manipulativos virtuales? ¿Qué tipo de imágenes mentales emplean los estudiantes de ambas instituciones tras el uso de los manipulativos virtuales?	Tipos de imágenes	
			Antes: Imágenes cinéticas (predominante) Formulas a la memoria Después: Imágenes cinéticas (predominante) Formulas a la memoria Dinámicas	Antes: Imágenes cinéticas (predominante) Formulas a la memoria Después: Imágenes cinéticas (predominante) Formulas a la memoria Dinámicas
TIC	Mediación (con artefactos o herramientas) (Manipulativos Virtuales) (Heddens, 2005, Clements, 2000, Moyer et al, Manches y O'Malley, 2012)	Verificar posibles conexiones entre manipulaciones concretas de objetos, visualizaciones o imágenes de esos objetos, abstracciones del concepto matemático y procesos subyacentes a esos conceptos. Ayuda a responder la pregunta: ¿Qué elementos de la mediación con artefactos apoyan el aprendizaje de	Atención a elementos gráficos (pictóricos) y numéricos. Imágenes dinámicas (enlace, rejilla de unidades, paso de unidades, posibilidad de desplazamiento de elementos gráficos, colores) que permiten la comprensión de los conceptos y hacen visible las formas de representación (numérica y pictórica o gráfica).	Mayor atención en elementos gráficos (pictóricos). Imágenes dinámicas (enlace, paso de unidades, posibilidad de desplazamiento de elementos gráficos) que permiten la comprensión de los conceptos y hacen visible las formas de representación (numérica y pictórica o gráfica).

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

los conceptos abordados en ambos casos?	-Apoyo en lectura y representación numérica por representación graduable de rejilla de valor posicional.	-Apoyo en lectura y representación numérica por representación graduable de rejilla de valor posicional.
	- Facilitan la visualización del problema de manera global, identificar los datos importantes y su ubicación dentro del enunciado numérico.	- Facilitan la visualización del problema de manera global, identificar los datos importantes y su ubicación dentro del enunciado numérico.
	-Facilitan la introducción de conceptos y el empalme con otros.	- Aclaran otras propiedades o conceptos asociados a la suma (ley conmutativa).
		- Facilitan la introducción de conceptos y el empalme con otros.

Respecto a la pregunta ¿Qué tipo de dinámicas de pensamiento matemático exhiben los estudiantes a lo largo del desarrollo del ambiente de aprendizaje? Se encontró que antes del uso de herramientas manipulativas, ambos estudiantes parten de un proceso de generalización-conjeturación-exploración, ante enunciados de tipo formal ($a + b = ?$); es decir, exhiben una dinámica deductiva de pensamiento matemático, donde sus argumentos son convincentes.

Mientras el estudiante de aula regular muestra una dinámica de pensamiento deductivo ante la resolución de los tres tipos de problemas, el estudiante de diferencial pasa a una dinámica de pensamiento inductivo –explorar-conjeturar-convencer-generalizar- cuando se está de cara a problemas de tipo 3 o abiertos ($a + b = c$).

La dinámica de pensamiento deductiva empleada en un comienzo para este tipo de problemas, cambia a una inductiva cuando por requerimiento o insinuación docente el estudiante debe dar un argumento de sus respuestas, ante lo cual no logra ser convincente, ya que tiende a valerse del planteamiento formal. En este caso el estudiante busca resolver el problema mediante estrategia de ensayo error, donde además del planteamiento formal de suma, es posible observar el patrón de resta como parte de sus intentos.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Los dos estudiantes mostraron ambas dinámicas de pensamiento matemático a lo largo de las sesiones de desarrollo. Sin embargo, durante la sesión 2 predominó la dinámica deductiva, donde ambos acuden a una generalización del patrón de notación de sumas ya conocido por ellos.

Ambos estudiantes tienden a hacer generalización de los patrones aprendidos; sin embargo, es más frecuente en el estudiante de aula diferencial cuando se enfrenta a un nuevo esquema de problema y cuando el objetivo de la actividad es crear un problema. Se vale del modelo tipo 1 para crear problemas Tipo 2 y 3, y del modelo tipo 2 para resolver problemas Tipo 3.

El estudiante de aula regular tan solo presentó un momento de generalización del patrón de problema Tipo 2, cuando se le solicitó crear un problema de Tipo 3.

Para ambos estudiantes es costosa la creación de problemas, sin importar el tipo de enunciado. Inicialmente buscan copiar el problema inicial o modelo abordado con ellos, ajustándolo a su contexto inmediato. Es fundamental para ambos casos apoyar en identificación de temáticas diferentes y de la vida diaria que permita la aplicación de los conceptos a otros contextos.

Respecto a las fases afectivas asociadas a estas dinámicas de pensamiento, se encuentra que ambos estudiantes muestran momentos de entrada y ataque para todos los tipos de enunciados. Es visible un momento de revisión a pedido y mayor cansancio durante la sesión 5 en ambos estudiantes, es decir cuando se aborda el problema Tipo 3.

Frente a la pregunta ¿Qué tipo de imágenes mentales emplean ambos estudiantes, antes de usar manipulativos virtuales? Se encontró que ambos emplean imágenes *cinéticas* y de *fórmulas a la memoria*. La imagen que más emplean es la *cinética*, es decir, conteo mitad en la mente, mitad movimiento de alguna de las partes de su cuerpo (dedos o cabeza).

Para la pregunta ¿Qué tipo de imágenes mentales emplean los estudiantes de ambas instituciones tras el uso de los manipulativos virtuales? Se encontró que ambos estudiantes al paso en hoja y a lo largo de las sesiones sin manipulativo, mantenían el tipo de imágenes

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

cinéticas y de fórmula a la memoria, aunque incluyeron aquellas de tipo *dinámicas* propuestas por las herramientas virtuales, donde es observable y comprensible una transformación en las representaciones de los datos presentados. En ambos casos predomina el uso de imágenes cinéticas, como primer recurso mental al que acuden los estudiantes desde el inicio hasta el fin del ambiente de aprendizaje.

Si se busca comparar las imágenes mentales desplegadas antes y durante el desarrollo del ambiente de aprendizaje, en relación a los niveles y estrategias de adición, se encuentra que ambos estudiantes se valen de estrategias basadas en el uso de secuencias, como contar desde el primero o desde el mayor (esta última para el caso de aula regular), así como en estrategias basadas en datos numéricos recordados (suma de decenas, suma de cantidades de un dígito).

Adicionalmente, el uso de la estrategia de dato derivado exhibida por el estudiante de aula regular, cuando opera en su mente un cálculo más complejo (p.e. hace una suma de 5 en 5 y después iguala hasta obtener el número esperado (11)). La tabla 8 permite establecer la relación entre imagen mental y estrategias de adición según los dos principales momentos de desarrollo del ambiente de aprendizaje (antes y durante).

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Tabla 8

Tipos de imágenes y estrategias utilizadas por cada estudiante.

Estudiante	Aula Diferencial		Aula Regular	
	Antes	Durante	Antes	Durante
Tipos de Imágenes	<ul style="list-style-type: none"> • Cinética • Fórmulas de memoria 	<ul style="list-style-type: none"> • Cinética • Fórmulas de memoria • Dinámicas 	<ul style="list-style-type: none"> • Cinética • Fórmulas de memoria 	<ul style="list-style-type: none"> • Cinética • Fórmulas de memoria • Dinámicas
	Tipo de estrategia	<ul style="list-style-type: none"> • Contar desde el primero • Recordar 	<ul style="list-style-type: none"> • Contar desde el primero • Recordar • Dato derivado 	<ul style="list-style-type: none"> • Contar desde el primero • Contar desde el mayor • Recordar

Respecto a la pregunta ¿Qué elementos de la mediación docente y con artefactos apoyan el aprendizaje de los conceptos abordados en ambos casos? Se encuentra lo siguiente:

Elementos de mediación docente que apoyan el aprendizaje. Para ambos casos fue necesaria una mediación de tipo suave y moderada, ambas direccionadas a monitorear la comprensión de los conceptos y aclarar posibles confusiones o equivocaciones. Se hizo necesaria una mediación moderada principalmente en la sesión 4 y 5, especialmente frente a actividades de creación de problemas.

Asociado a este tipo de mediación están los señalamientos, gestos y/o énfasis sobre los datos claves del problema. Esto facilitaba la identificación de la información útil dentro del problema y diferenciar un tipo de problema de otro, de manera especial para el caso de aula diferencial, al no tener las suficientes habilidades de lectoescritura que le permitieran abordar los problemas directamente del texto en hoja. Sobre este mismo aspecto, para el estudiante de aula

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

regular, fue de gran ayuda el apoyo en la relectura de los problemas, cuando se orienta en signos de puntuación.

Elementos de mediación con herramientas que apoyan el aprendizaje. Dentro de los elementos que colaboraron en el proceso de enseñanza-aprendizaje se identificó que para el tema Valor Posicional y Regla de Reagrupación, fueron útiles ambas formas de representación (gráfica y numérica) ofrecidas por las herramientas *Bloques de Base* y *Bloques de Base Adición*. Aunque el estudiante de aula diferencial en un comienzo se centró en el elemento gráfico, con mediación docente logró incluir el elemento numérico como ayuda para la verificación de sus ejercicios frente a la herramienta.

Ambas herramientas apoyaron en la comprensión de los conceptos, al hacer visible la regla de reagrupación mediante imágenes dinámicas y al mostrar la correspondencia entre ambas formas de representación (diferencia el número indicador de reagrupación con color azul, una vez el niño hace el enlace o agrupación y antes de ubicar en la columna indicada).

En ambos casos se identificó la incorporación de imágenes dinámicas a partir de las herramientas: sin embargo, fue necesario ayudarles en la estrategia de enlace y flecha indicadora de reagrupación (no presentada en manipulativo virtual), para evitar equivocaciones de representación y conteo.

Lo anterior reafirma que es requerida la mediación docente para sacar al estudiante de concepciones equivocadas que pudieran derivarse del uso de las herramientas, como por ejemplo, verificar que se comprende la regla de reagrupación o que la representación gráfica tiene correspondencia con la numérica. La actividad de paso a hoja es la que colabora en detectar qué tan claro es el concepto para los estudiantes o posibles fallas en procedimiento.

La presentación gráfica a partir de columnas graduables según criterio docente, ya sea en unidades-decenas o en unidades-decenas-centenas (o para el caso del estudiante de aula regular,

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

hasta cantidades de mil), apoyó la lectura y representación numérica. En tan poco tiempo es notorio un avance en la habilidad de lectura de cantidades para ambos estudiantes, siendo esta una de las actividades más motivadoras para ellos.

Respecto a los elementos facilitadores o que colaboraron en la introducción de los tres modelos de suma, la herramienta *Recta Numérica Barras* permitió visualizar a ambos estudiantes cada uno de los datos del problema e identificar el lugar de la incógnita. Esta herramienta permitió aclarar otros conceptos asociados como ley conmutativa de la suma en el caso de aula diferencial.

De manera similar al uso de las herramientas ya referidas para valor posicional y notación de sumas, el estudiante de aula diferencial en un primer momento se centra en el aspecto gráfico (barras) por encima del elemento numérico de la recta. Es necesario llevarlo a comprender la correspondencia con el doble componente numérico (barras y recta), el punto de partida en la recta numérica (para números positivos), y después a su paso en hoja, verificar el correcto conteo de las unidades. El estudiante se familiariza tanto con la herramienta y se percibe en él la posibilidad de “movimiento” de las cantidades, que al paso en hoja presenta un bloqueo frente a cómo extenderlas.

Mientras para el estudiante de aula diferencial no fue impactante el uso de colores sobre las diferentes unidades, el estudiante de aula regular parecía valerse de estos para diferenciar cada dato y así comprender mejor el patrón de problema dado.

Los componentes gráfico y numérico de esta herramienta fueron retomados como parte de la solución a los problemas con suma.

Las herramientas fueron empleadas no solo para introducir los conceptos, sino que además permitieron hacer empalme en algunos aspectos que no eran tan claros en hoja.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Además de los elementos de las herramientas que colaboraron en el proceso, es importante recuperar aquellos que de una u otra manera fueron de difícil manejo:

Elementos de mediación de las herramientas que pueden ser de difícil manejo durante las actividades. Dentro de los elementos de difícil manejo en el uso de las herramientas se encuentran:

Bloques de Base:

- Dificultad en el enlace de unidades cuando se requiere reagrupar.

Bloques de Base Adición:

- La interfaz presenta los cuadrantes correspondientes a sumando 1 y 2, lo que dificulta hacer la correspondencia con el número total mostrado a la derecha.
- Con solo mover un elemento de la representación gráfica, la herramienta se adelanta en la representación numérica de la suma o total, sin haberse concluido la unión de conjuntos.

Recta numérica Barras:

- La recta numérica es versátil al tener la posibilidad de representación con números positivos y negativos. Sin embargo, para el tema de estudio y la población objetivo, esta posibilidad puede generar confusión en el punto de inicio de la representación con barras (diferente de 0).
- El arrastre o extensión de las barras puede ser de difícil manipulación, cuando supera el ancho de vista de la interfaz de la herramienta.

La tabla 9 resume los elementos mencionados que se consideran ventaja y de desventaja en las herramientas empleadas a lo largo del ambiente de aprendizaje.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Tabla 9

Ventajas y Desventajas de las herramientas empleadas.

Herramienta	Ventajas	Desventajas
<i>Bloques de Base</i>	<ul style="list-style-type: none"> - La representación simultanea gráfica y numérica. - Hace visible la regla de reagrupación y el paso de un lugar a otro según valor. - Permite una imagen dinámica del concepto. 	<ul style="list-style-type: none"> - Dificultad en el enlace de unidades.
<i>Bloques de Base Adición</i>	<ul style="list-style-type: none"> - Permite una imagen dinámica del concepto. - Diferencia el número indicador de reagrupación que corresponde al enlace gráfico. - Hace visible la regla de reagrupación y muestra la correspondencia entre las dos formas de representación. 	<ul style="list-style-type: none"> - La interfaz representa las casillas correspondientes a los sumandos pero no al lugar del total o suma. - Aparición anticipada de la respuesta o suma con solo mover un elemento.
<i>Recta Numérica</i>	<ul style="list-style-type: none"> - Permite una imagen dinámica del concepto. - Facilita la visualización de los datos claves del problema - Se diferencia más fácilmente el tipo de problema. - El uso de colores puede ser un elemento de ayuda en la comprensión de los problemas. 	<ul style="list-style-type: none"> - Puntos de inicio diferentes de 0 - Difícil manipulación en el arrastre o extensión de las barras cuando supera el ancho vista de la interfaz.

8. Conclusiones y Prospectiva

Al inicio de la investigación y teniendo en cuenta las necesidades de los dos contextos educativos objetivo de estudio, se plantea responder la pregunta *¿De qué manera un ambiente de aprendizaje mediado por objetos manipulativos virtuales, colabora en el proceso de estructuración del pensamiento matemático en estudiantes de primaria de ciclo 1 de aula diferencial o exclusiva del colegio Villemar El Carmen y de aula regular del colegio Carlos Pizarro Leongómez?*

Para responder al interrogante se propuso como objetivo general, describir el proceso de estructuración del pensamiento matemático en un estudiante por institución considerando la modalidad de aula diferencial (Colegio Villemar El Carmen I.E.D) y la modalidad aula regular (Colegio Carlos Pizarro Leongómez I.E.D), todo esto a través del diseño e implementación de un ambiente de aprendizaje mediado por objetos manipulativos virtuales.

De acuerdo con el objetivo específico de comparar cada caso, se propuso un análisis de la información a partir de categorías clave según referentes pedagógicos, disciplinar y TIC en la educación: Pensamiento Matemático, Mediación (docente y con herramientas) y Aprendizaje Matemático.

Dentro de los resultados obtenidos se halla que los tres modelos de suma a abordar, representaron algo de dificultad para los estudiantes y aspectos importantes de los conceptos no eran comprendidos por ellos.

De manera intuitiva los niños buscaron soluciones a los planteamientos, y como pudo observarse en la sesión de identificación de saberes, hubo acierto en por lo menos 2 tipos de problema. La dificultad de ambos estudiantes consistió en representar todos los problemas mediante algoritmo propio del enunciado formal tipo 1 o convencional ($a + b = ?$) y así argumentar sus respuestas.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Esto es explicado por Carpenter y Moser (1988), quienes refieren que los niños buscan representar mediante formato de unión sencilla (enunciado formal), este tipo de problemas (enunciados abiertos).

Por otra parte se hace evidente que ambos estudiantes se valen de formas de representación propias del lenguaje de la matemática (uso de representaciones semióticas). Sin embargo, el estudiante de aula diferencial normalmente no recurre a este tipo de semiótica (algoritmos), mientras el problema sea de fácil resolución para él (no requiere plasmar en el papel un algoritmo, a menos que se le solicite).

Este aspecto resalta la importancia de la incorporación de nuevas formas de representación formal mediante algoritmos propios al enunciado, según lo proponen Carpenter y Moser (1988) y según lo refiere Duval (1999), ante la necesidad de aprender el lenguaje formal de la matemática como herramienta clave para la solución de problemas. En este estudio ambos estudiantes mostraron un avance en esta forma de representación formal de los problemas, ya que de manera más reflexiva buscan comprenderlos en un lenguaje propio de la disciplina y lo usan además como argumento. Aquí se considera que el lenguaje formal es evidencia de un proceso de pensamiento que evoluciona de un nivel inductivo a uno deductivo (Burton, 1984, Montealegre, 2007).

Una ayuda importante en la comprensión de los conceptos y modelos de suma de Cambio 1, 2 y 3, fueron las herramientas manipulativas virtuales. Estas herramientas aportaron en la comprensión de los problemas, dotando a ambos estudiantes de una nueva estrategia de visualización de los conceptos; esto es mediante *imágenes dinámicas* según las define Presmeg (1993), gracias a una habilidad presente y potenciabile en ambos estudiantes como lo refiere Arcavi (2003) en su principio de visualización matemática.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Particularmente si se tiene en cuenta lo referido por Castejon y Navas (2009), Molina y Arraiz (1993) y Beltrán y otros (1987) sobre la dificultad de la población con déficit cognitivo, para procesar adecuadamente la información de manera simultánea, sucesiva y de planeación, es pertinente notar que las herramientas manipulativas empleadas en este estudio presentaban la información de manera simultánea. Esta propiedad de las herramientas sugerirían una mayor exigencia para la población; de hecho los resultados mostraron que gracias a la mediación docente, el estudiante pudo identificar elementos de interfaz no relacionados en un primer momento. Su mirada se centró inicialmente en lo pictórico más que en la representación numérica. A pesar de la dificultad frente al uso de este tipo de herramientas, se considera que son recursos que potencian habilidades de procesamiento de la información, siempre de mano del docente.

Adicionalmente, la ayuda en la comprensión de los conceptos estaría relacionada con el elemento de *metáfora conceptual* según Manches y O'Malley (2012), cuando explican que las herramientas manipulativas facilitarían el aprendizaje de los conceptos por la correspondencia entre ellos.

Aun así, se observó que hay algunos elementos de interfaz y de programación de las herramientas que dificultan la actividad de vinculación de los conceptos. Así por ejemplo, se considera que hay una dificultad de correspondencia entre la representación numérica de la suma vertical y la posibilidad de representación gráfica mediante dos filas en la herramienta Bloques de Base Adición.

En el espacio ofrecido por la interfaz de la herramienta es posible hacer la unión de conjuntos ya sea juntando en el cuadrante superior o inferior las unidades; sin embargo, este procedimiento pareciera sugerir la necesidad de un espacio o franja de representación de la respuesta tras la unión de tales conjuntos y así haber una mejor relación con el algoritmo vertical.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Por otra parte, se observó que para ambos casos las herramientas manipulativas también ayudaron a centrar la atención y mantener al estudiante en la actividad durante periodos de tiempo mayores. Para los estudiantes las 3 herramientas empleadas fueron novedosas y atractivas. Esto sugiere además una ayuda mediante el elemento de *descarga cognitiva* mencionada por los mismos autores, provista por los elementos visuales y “táctiles” de las herramientas manipulativas, los cuales facilitan al estudiante centrarse en la información relevante del problema y facilitar las dinámicas de pensamiento.

A pesar de que las tres herramientas manipulativas colaboraron en el desarrollo de los conceptos facilitando la comprensión de los mismos, permitiendo además la identificación de vacíos conceptuales, errores de procedimiento y de tendencia a procedimientos mecánicos, no fueron suficiente soporte en las actividades de creación de problemas con suma.

Aunque es una dificultad común a ambos casos, es más notoria en el estudiante de aula diferencial. Se observa que los niños inicialmente son limitados en las posibilidades de creación de los problemas, por lo cual es necesario irlos sacando de su zona de confort e invitarlos a probar con nuevas temáticas reales como la granja, el supermercado u otras de interés. Al respecto, es necesario citar a Pellegrino (1986) en Montealegre (2007), quien afirma que “al analizar las similitudes y diferencias entre las experiencias específicas, se pueden extraer las características generales de las clases de objetos, sucesos y situaciones. Las generalizaciones, al aplicarlas a nuevas experiencias, se refinan y modifican y así pasan a formar parte de nuestra base de conocimientos permanentes” (p. 21-22).

Este tipo de estrategias sugerirían la importancia de ayudar al estudiante a dar un paso entre un nivel de *conocimiento concreto sensorial* (necesidad de manipular elementos o material sensorial para tener una idea de lo que se quiere conocer), a uno de *conocimiento concreto integrado*, a través del cual se combinan las ideas asociadas a los objetos físicos manipulados, las

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

acciones realizadas sobre ellos y sus abstracciones; es decir apoyar en la internalización y solidificación de las estructuras de pensamiento (Arievitch y Haenen (2005); Clements, 2000; Moyer, Niezgodá y Stanley, 2005).

Lo anterior permite hacer énfasis sobre la apreciable importancia de la mediación docente en el fortalecimiento de las dinámicas de pensamiento matemático (Burton, 1984, Stacey, 2007, Manches y O'Malley, 2012) en particular la de tipo deductivo (generalizar, convencer, conjeturar, manipular), y dentro de estas el proceso de argumentación. Esto corrobora la afirmación de Heddens (2005), quien aclara que las herramientas por si solas no colaboran en el correcto entendimiento de los conceptos matemáticos; es necesaria la mediación docente que apoye la comprensión de los mismos.

En el desarrollo del ambiente de aprendizaje se buscó tener una postura mediadora más que de tutela según lo describe Alvarez-Grayeb (2011), cuando se le permitió explorar al estudiante y además expresar lo que sabía (o no sabía) del concepto, procurando favorecer las habilidades de pensamiento matemático.

La experiencia reitera la necesidad de que el docente sepa escuchar al estudiante e intervenir de manera oportuna y asertiva (Burton, 1984, Stacey, 2007, Clements, 2000, Heddens, 2007, entre otros). Para ello es importante que los docentes en su papel mediador tengan no solo planeadas sus lecciones, sino también tener una serie de habilidades de análisis y experticia tanto en matemáticas como pedagogía, que les permita entender y apoyar el proceso del estudiante de manera minuciosa según lo aclara Stacey (2007).

Para el caso de aula diferencial, es de considerar las similitudes en el tipo de estrategias desplegadas frente a los conceptos, en relación al caso de aula regular. Los resultados evidencian un mayor número de sesiones requeridas para el primer caso, en línea con lo mencionado por Pérez y Tomás (2010) y Núñez del Ríó y Lozano (2003), así como la necesidad de una

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

metodología de interacción profesor-estudiante donde sea posible guiar al estudiante según lo refiere Moscardini (2010). Sobre este mismo aspecto también es necesario tener en cuenta lo mencionado por Castejón y Navas (2009), respecto a que los niños con déficit cognitivo no tienen estrategias de repaso, de manera que es necesario ayudarlos no solo a tener una visión global del problema y atender a la información relevante, sino también considerar formas de solidificación de los aprendizajes.

A partir de lo anterior, un ambiente de aprendizaje como el que aquí se diseñó e implementó, colabora en la estructuración del pensamiento matemático en ambos contextos cuando:

- Se consideran elementos de mediación docente combinados con herramientas o artefactos que permitan la exploración o actividad material en un primer paso en la apropiación de los conceptos, en este caso manipulativos virtuales.
- Se identifica la habilidad de visualización matemática (uso de imágenes mentales) desplegada en las diferentes estrategias de solución de los problemas presentados, y se provee de nuevas formas de desarrollo de esta habilidad.
- Se le brindan otras estrategias de identificación de la información relevante del problema mediante la exploración de los datos, en lo que es de valiosa ayuda el apoyo en manipulativos virtuales como los referidos en esta investigación, y además se promueve la habilidad argumentativa.
- Se busca un equilibrio entre el diálogo docente y el diálogo del estudiante, que haga posible identificar las necesidades reales de cada caso y guiarlo hacia procesos más abstractos.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

- Se acepta la diferencia en los tiempos de aprendizaje asociados a procesamiento de información.

Todo lo anterior permite recomendar a los docentes el apoyo en manipulativos virtuales como los abordados en la experiencia de aprendizaje; esto siempre bajo una mirada objetiva que permita la mejora de los elementos perceptuales de tales recursos, según la metáfora conceptual que refieren.

Al considerar el papel fundamental de los docentes como mediadores en los procesos de aprendizaje, se cuestiona la posibilidad de apoyo a cada estudiante cuando en el aula se cuenta con grupos numerosos de estudiantes, donde los momentos de mediación se verían disminuidos para cada uno. Una sugerencia de trabajo en aula regular que posiblemente permita minimizar esta dificultad, consistiría en organizar las actividades por grupos de trabajo, donde se considere además de la mediación docente-herramienta la ayuda entre pares. Esta sugerencia puede motivar el desarrollo de una nueva investigación, donde además se intervenga con aulas donde se atienda a población mixta (regular y déficit cognitivo u otros).

De acuerdo con lo aquí encontrado, para estudiantes con déficit cognitivo es importante aclarar lo mencionado por Núñez del Río et al (2003), respecto a las considerables diferencias en las habilidades entre estudiantes con un mismo diagnóstico de cociente intelectual (C.I) que deriva en múltiples exigencias y formas de abordaje. Mosquino (2010) también es claro en mencionar la importancia del papel del docente como agente acompañante del proceso de aprendizaje, siempre vigilante del paso a paso hacia mejores niveles de habilidad. Lo observado confirma ambas apreciaciones, y es no sólo una mayor demanda de tiempo en el logro de objetivos de aprendizaje por parte de esta población, sino que además es valioso el acompañamiento permanente en sus procesos. Los estudiantes con déficit cognitivo suelen ser rutinarios, mecánicos y en algunos casos impulsivos en la realización de las actividades. En

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

grupos numerosos se restaría tiempo de mediación docente que ayude a sacarlos de sus errores o falsas creencias.

Frente a posibilidades de diseño de software, se recomienda seguir la indicación de Manches y O'Malley respecto a la necesidad de idear materiales que cumplan con el principio de correspondencia entre el concepto a representar mediante metáfora conceptual.

Dentro de las mejoras o sugerencias respecto a las herramientas empleadas a lo largo del estudio, se considera el diseño y desarrollo de herramientas menos genéricas que contengan elementos visuales y manipulativos más acordes a la edad. Cuando son herramientas tan genéricas se puede distraer al estudiante del verdadero objetivo de la actividad. Así por ejemplo, se considera que el punto de inicio en la representación de las unidades cuando es diferente de cero (0), es decir, el contener la opción de desplazamiento sobre números positivos y negativos en la herramienta Recta Numérica Barras, puede no ser tan funcional y confundir a un estudiante de ciclo 1 según el objetivo de aprendizaje.

Para futuras investigaciones se considera relevante diseñar y explorar otras herramientas que no solo apoyen la apropiación de otros conceptos, sino que también colaboren en el desarrollo y fortalecimiento de habilidades de pensamiento en poblaciones con estilos cognitivos diversos. Algunas ideas de desarrollo podrían incluir dentro de sus diseños, elementos que faciliten la apropiación de nuevo vocabulario o ampliación del repertorio de posibilidades que faciliten la creación de problemas.

Por otra parte, se considera importante la exploración y diseño de herramientas que permitan el desarrollo de habilidades cognitivas, que de una u otra forma tienen incidencia en los procesos de pensamiento, y que se considera previo a los conceptos vistos. Así por ejemplo, juegos de seriación (tamaño, color, forma, número), secuencias, ubicación espacial y razonamiento abstracto entre otras, ajustado a las edades.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

El haber abordado la investigación bajo la metodología de estudio de caso permitió entender formas de pensamiento frente a un concepto propio de ciclo 1, es decir la suma en problemas de cambio. Esto permite más que generalizar hacer una reflexión sobre lo que puede encontrar un docente al interior del aula y posibilidades de estrategias en temas como el investigado. Las guías y en general los recursos empleados, así como la estrategia didáctica diseñada e implementada no pretenden ser una ruta de trabajo invariable, sino más bien una fuente de consulta que espera ser mejorada o replanteada según el contexto.

Es importante también considerar la importancia de la continuidad de los procesos que trascienda el diseño e implementación de un ambiente de aprendizaje. De aquí que una última consideración es la importancia del rol docente como investigador. Es el docente quien de primera mano se encuentra de cara a la realidad de sus estudiantes; es a partir de sus experiencias y del deseo de mejorar su práctica diaria que se exploran y perfeccionan nuevas didácticas.

9. Aprendizajes

El desarrollo de la investigación permite reconocer la dificultad que representa el estudio del pensamiento; esto requiere de una mirada rigurosa de múltiples factores. El diseño del ambiente de aprendizaje fue un recurso valioso según los objetivos que se pretendió alcanzar y porque permitió develar procesos ocultos a nuestros ojos.

Por otra parte observamos que la investigación se constituye en sí misma un reto no solo por la población y el tema de estudio que la orienta, sino que además abre camino frente a la consideración de otras maneras de abordar la matemática; en este caso, a partir de la posibilidad de estrategias de visualización, que si bien no es un tema nuevo, reta a ser explorado en nuevos ambientes según el avance de la tecnología.

Otro aprendizaje es que a pesar de estar inmersos en medios inclusivos, falta una mayor capacitación docente que aporte a mejorar el trabajo en aula y romper con mitos frente a las posibilidades en diferentes estilos cognitivos. La mirada cambia cuando cada situación se ve con nuevos ojos: a la luz de la teoría y de otras experiencias, de manera que aún es posible maravillarse ante nuevos hallazgos.

Referencias

- Álvarez-Grayeb, A. (2011). Internalización del significado de objetos matemáticos a través de la acción con manipulativos virtuales. Un estudio microgenético. (Tesis Doctoral). Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Occidente, Puebla, México.
- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215-241
- Arievitch, I. y Haenen, J. (2005). Connecting sociocultural Theory and Educational Practice: Galperin's Approach. *Educational Psychologist*, 40(3), 155–165. *Lawrence Erlbaum Associates, Inc.*
- Beltrán, J. (1987). Psicología de la Educación. Eudema. Madrid.
- Bolyard, J. y Moyer, P. (2012). Making sense of integer arithmetic: The effect of using virtual manipulatives on student's representational fluency. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 31(2), 93-113
- Brown, D. L. y Presmeg, N. C. (1993). Types of Imagery used by elementary and secondary school students in mathematical reasoning. En Ichiei, H. (Ed.). *Proceedings of the International Conference on the Psychology of Mathematics Education (PME)*. (p. 137-144). Tsukuba: Japan
- Burton, L. (1984). Mathematical Thinking: The struggle for meaning. *Journal for Research in Mathematics Education*. 15(1), 35-49
- Carpenter, T. y Moser, M. (1983). The Acquisition of Addition and Subtraction Concepts. En Lesh, R. Y Landau, M. (Eds.) *Acquisition of Mathematical Concepts and Development*.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

New York: Academic Press. Recuperado de

http://www.uhu.es/luis.contreras/temas_docentes/adicion-sustraccion.htm

Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1984). The Acquisition of Addition and Subtraction Concepts in Grades One through Three. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(3), 179–202. doi.org/10.2307/748348

Carpenter, T. P., Moser, J. M., & Bebout, H. C.. (1988). Representation of Addition and Subtraction Word Problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(4), 345–357. doi.org/10.2307/749545

Carpenter, T.P., Fennema, E., Franke, M., Levi, L., y Empson, S. (1999). *Children's Mathematics – cognitively guided instruction*. Portsmouth, NH: Heinemann

Castejón, J.L. y Navas, L. (2002). *Unas bases psicológicas de la educación especial*. España: Editorial Club Universitario.

Castro, E., Del Olmo, M.A. y Castro, E. (2002). *Desarrollo del Pensamiento Matemático Infantil*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, Facultad de Ciencias de la Educación, Granada: España.

Churchill, D. (2005). Learning objects: an interactive representation and a mediating tool in a learning activity. *Educational Media International*, 42(4), 333-349.

Clements, D. (2000). 'Concrete' Manipulatives, Concrete Ideas, *Contemporary Issues in Early Childhood*, 1(1), 45-60. Recuperado de: <http://dx.doi.org/10.2304/ciec.2000.1.1.7>

Coll, C. (2008). Aprender y Enseñar con las TIC. Expectativas, realidad y potencialidades. *Boletín de la Institución Libre de Enseñanza*, (72), pp. 17-40 Madrid, España.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Colegio Carlos Pizarro Leongómez (2014). Agenda 2014. Colegio Carlos Pizarro Leongómez
I.E.D. Bogotá

Colegio Villemar El Carmen (2012). Agenda 2012. Colegio Villemar El Carmen I.E.D.
Subdirección Imprenta Distrital. Bogotá.

Colegio Villemar El Carmen (2012). Manual de Convivencia 2015. Colegio Villemar El Carmen
I.E.D. Subdirección Imprenta Distrital. Bogotá.

Craig, J. (1997). Psicología del Desarrollo. México: Prentice Hall

DeWalt, K. (s.f.). Participant Observation. Recuperado de:

http://isites.harvard.edu/fs/docs/icb.topic205747.files/October_15/Dewalt.pdf

DeWalt, K. y DeWalt, B. (2011). Participant Observation. A Guide for fieldworkers. United
States of America: Altamira Press. Recuperado de:

https://books.google.com.co/books?hl=es&lr=&id=wxUVY019-LYC&oi=fnd&pg=PP1&ots=QRwi52GR4c&sig=7Fph9gZsYzkI_r84-OXvcDSIHZg#v=onepage&q&f=false

Domínguez, R. (2009). La Sociedad del Conocimiento y los nuevos retos. Revista EticaNet. Año
7 (8). Universidad de Granada España. Recuperado de

<http://www.ugr.es/~sevimeco/revistaeticanet/numero8/Articulos/Formato/articulo9.pdf>

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitives functions in mathematical
thinking. Basic issues for learning. Proceedings of the Annual Meeting of the North
American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics
Education (21st, Cuernavaca, Morelos, Mexico, October 23-26)

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Escudero, T. (2003). Desde los tests hasta la investigación evaluativa actual. Un siglo, el XX, de intenso desarrollo de la evaluación en educación. *Relieve*, 9 (1), 11-43

Esteban, M. (2010). Geografía del Desarrollo Humano. Una aproximación a la Psicología cultural. Editorial Aresta SC: España. Recuperado de http://books.google.com.co/books/about/Geograf%C3%ADas_del_desarrollo_humano.html?id=PUWunsy1dw4C&redir_esc=y

Godino, J. Font, V. y Wilhelmi, M (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Relime, Número Especial*. P. 131-155.

Guzman, M. (1993). Enseñanza de las Matemáticas. En: Gil, D. y Guzman, M. (Eds.). *Enseñanza de las ciencias y la matemática. Tendencias e innovaciones*. Recuperado de <http://www.oei.org.co/oeivirt/ciencias.pdf>

Heddens, J. W. (2005). Improving Mathematics Teaching by Using Manipulatives. Kent State University. Recuperado de: <http://www.fed.cuhk.edu.hk/~fllee/mathfor/edumath/9706/13hedden.html>

Hernández S. (2009). Metodología de la Investigación CD anexo capítulo 4. (México, Mc Graw Hill). Recuperado de: <http://novella.mhhe.com/sites/dl/free/000001251x/1058642/CAPITULO04.pdf>

Manches, A. & O'Malley, C. (2012). Tangibles for learning: A representational analysis of physical manipulation. *Personal and Ubiquitous Computing*, 16 (4), 405-419

Matus, C. & Miranda, H. (2010). Lo que la investigación sabe acerca del uso de manipulativos virtuales en el aprendizaje de la matemática. Recuperado de:

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

<http://educ808.wikispaces.com/file/view/641-1842-2->

[B%20%281%29.pdf/169547221/641-1842-2-PB%20%281%29.pdf](http://educ808.wikispaces.com/file/view/641-1842-2-PB%20%281%29.pdf/169547221/641-1842-2-PB%20%281%29.pdf)

Mc Lellan, J. (2011). Benefits of Teaching Science with Manipulative Models. Recuperado de:

<http://manipulatives.yolasite.com/resources/Benefits%20of%20Teaching%20Science%20With%20Manipulative%20Models.pdf>

Ministerio de Educación Nacional, (1998). Lineamientos curriculares en el área de matemáticas,

p. 47-54. Recuperado de: mineduccion.gov.co

Ministerio de Educación Nacional, (2006). Estándares básicos de competencias en Lenguaje,

Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y

saber hacer con lo que aprenden. *Revolución Educativa Colombia Aprende*, p. 46- 79

Recuperado de: [http://www.mineduccion.gov.co/cvn/1665/articles-](http://www.mineduccion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf)

[116042_archivo_pdf2.pdf](http://www.mineduccion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf)

Ministerio de Educación Nacional (2006). Orientaciones Pedagógicas para la atención educativa

a estudiantes con discapacidad cognitiva. Recuperado de:

www.colombiaprende.edu.co/html/.../articles-320691_archivo_5.pdf

Ministerio de Educación Nacional, (2007). *Revista Al Tablero*, (43), p. 1-28. Recuperado de:

www.mineduccion.gov.co/1621/propertyvalue-36246.html

Ministerio de Educación Nacional, (2012). Orientaciones generales para la atención educativa de

las poblaciones con discapacidad –PcD-, en el marco del derecho a la Educación.

Documento de trabajo.

Ministerio de Educación Nacional (2013). Centro Virtual de noticias de la Educación. Colombia

avanza a paso firme en innovación educativa y uso pedagógico de las TIC. Disponible en

<http://www.mineduccion.gov.co/cvn/1665/w3-article-324021.html>

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Molina, S. y Arraiz, A. (1993). Procesos y estrategias cognitivas en niños deficientes mentales.

Pirámide. Madrid.

Montealegre, R. (2007). La Solución de problemas cognitivos. Una reflexión cognitiva sociocultural. *Avances en Psicología Latinoamericana*. Julio diciembre, año/vol. 25, número 002, Universidad del Rosario: Bogotá, Colombia, p. 20-39. Recuperado de: <http://redalyc.uaemex.mx>

Morge, L. (2000). Former les enseignants a interagir avec les élèves en classe de sciences. *Recherche et Formation*. No. 34, 101-112. IUFM de Clermont-Ferrand, UREST, INRP.

Moscardini, L. (2010). 'I Like instead of maths': How pupils with moderate learning difficulties in Scottish primary special schools intuitively solved mathematical word problems. *British Journal of Special Education*. 37(3), 130-138 doi: 10.1111/j.1467-8578.2010.00461.x

Moyer, P. S.; Bolyard, J.J.; Spikell, M.A. (2002). What Are Virtual Manipulatives? *Teaching Children Mathematics Journal*, 8 (6), 372-77. Recuperado de: <http://manipulatives.yolasite.com/resources/Virtual%20Manipulatives%20in%20the%20K-12%20Classroom.pdf>

Moyer, P.S., Ulmer, L. y Anderson, K. (2012). Examining Pictorial Models and Virtual Manipulatives for Third Grade Fraction Instruction. *Journal of Learning Interactive Online Learning*, 11(3), 103-120.

Moyer, P, Niezgodá, D., y Stanley, J. (2005). Young Children's Use of Virtual Manipulatives and Other Forms of Mathematical Representations. In W.J. Masalski & P.C. Elliot (2005,

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Eds.) *Technology Supported Mathematics Learning Environments (17-34)*, Reston, VA: NCTM.

National Education Association (2002). Research on the benefits of Manipulatives. Recuperado de:

<http://manipulatives.yolasite.com/resources/Research%20on%20the%20Benefits%20of%20Manipulatives.pdf>

Nuñez del Río, M.C y Lozano, I. (2003). Evaluación del Pensamiento Matemático temprano en alumnos con déficit intelectual, mediante la prueba TEMA-2. *Revista Española de Pedagogía*, 226, 547-544

OMS, Banco Mundial. (2011). Informe mundial sobre discapacidad. Malta: World Health Organization. Recuperado de: www.who.int/disabilities/world_report/2011/es

Organización para la cooperación y el desarrollo económicos (OCDE), (2010). Habilidades y Competencias del siglo XXI para los aprendices del nuevo milenio en los países de OCDE. Instituto de tecnologías educativas: España. P. 1-17

Pea, R. (1987). Cognitive Technologies for mathematics education. En A. H. Schoenfeld (Ed.). *Cognitive Science and Mathematics Education*. Erlbaum, Hillsdale, NJ, pp. 89-122

Pérez, J. y Tomás, V. (2010). Aspectos Evolutivos del niño con discapacidad intelectual. En García, J.M., Berruezo, P.P., Pérez, J. (Ed.), *Discapacidad Intelectual. Desarrollo, comunicación e intervención* (p. 53-67). Madrid: España, CEPE.

Presmeg, N. (2006). Research on Visualisation in Learning and Teaching Mathematics. Emergence from Psychology. En Gutierrez, A. y Boero, P. (Eds.). *Handbook of Research*

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

on the Psychology of Mathematics Education: Past Present and Future, (p.205-236).

Rotterdam: The Netherlands, Sense Publishers

Secretaría de Educación de Bogotá, (2013). Ambientes de Aprendizaje. Reorganización

Curricular por Ciclos. Herramienta de consulta y orientación para el Diseño e

Implementación de los Ambientes de Aprendizaje. Recuperado de:

http://www.redacademica.edu.co/archivos/redacademica/colegios/politicas_educativas/ciclos/cartillas_ambientes_aprendizaje/vol1.pdf

Secretaría de Educación de Bogotá, (2014). Dirección de Ciencias, Tecnologías y Medios

Educativos. Recuperado de

<http://www.educacionbogota.edu.co/archivos/Temas%20estrategicos/Documentos/Ciencia%20y%20Tecnologia.pdf>

Stacey, K. (March, 2007). What is mathematical thinking and why is it important? In Progress

report of the APECT project: Collaborative studies on innovations for teaching and learning

mathematics in different cultures (II) – Lesson study focusing on mathematical thinking,

CRICED and University of Tsukuba, pp. 39 Recuperado de:

http://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec/apec2007/paper_pdf/Kaye%20Stacey.pdf

Stake, R. (1999). Investigación con estudio de casos. España: Morato

Thornton, S. (2000). La Resolución infantil de problemas. Madrid: Morata, S.L. Recuperado de

https://books.google.com.mx/books?id=KeeceQzovlYC&pg=PA5&hl=de&source=gb_selected_pages&cad=2#v=onepage&q&f=false

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Tobón, M. I. (2010). Del Aula a los Ambientes de Aprendizaje. Boletín Informativo Educación

Superior No 16, julio de 2010. Ministerio de Educación Nacional. Recuperado de:

http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-92779_archivo_pdf_Boletin16.pdf

Unesco, (2007). Educación de calidad para todos: Un asunto de derechos humanos. Documento de discusión sobre políticas educativas en el marco de la II Reunión Intergubernamental del Proyecto Regional de Educación para América Latina y el Caribe (EPT/PRELAC).

Buenos Aires, Argentina. Recuperado de:

<http://unesdoc.unesco.org/images/0015/001502/150272s.pdf>

Unesco, (2013). Enfoques estratégicos sobre las TIC en educación en América Latina y El Caribe. Oficina Regional de Educación para América Latina y El Caribe. Santiago.

Recuperado de

<http://www.unesco.org/new/fileadmin/MULTIMEDIA/FIELD/Santiago/images/ticsesp.pdf>

[f](#)

Unesco, (2015). Educación 2030. Declaración d´Incheon y Marco de Acción. Hacia una educación inclusiva y equitativa de calidad y un aprendizaje a lo largo de la vida para todos (proyecto final para adopción). (Borrador). Corea. Recuperado de

unesdoc.unesco.org/images/0023/002331/233137s.pdf

Uribe, J. (2009). *Teacher variables and student mathematics learning related to manipulative use*. (Tesis Doctoral). Virginia Polytechnic Institute and State University, Virginia, EU.

Valenzuela, M. (2012). Uso de Materiales didácticos manipulativos para la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Un estudio sobre algunos colegios de Chile. (Tesis Magister). Universidad de Granada, España.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Van Garderen, D (2006). Spatial visualization, visual imagery, and mathematical problem solving of students with varying abilities. *Journal of Learning Disabilities*. 39(6):496-

506. Recuperado de:

<http://ideal-group.org/visualization-research/Spatial-Visualization-Visual-Imagery-and-Mathematical-Problem-Solving-of-Students-with-Varying-Abilities.pdf>

Vygotsky, L.S. (1978). El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. Editorial Crítica,

Grupo Editorial Grijalbo, Barcelona. P. 1-13 Recuperado de

http://www.terras.edu.ar/biblioteca/6/TA_Vygotsky_Unidad_1.pdf

Anexo A

Estrategia didáctica

Objetivo General: Aplicar el concepto Suma en la resolución de problemas.

Objetivos específicos:

- Identificar saberes previos sobre el concepto suma.
- Representar cantidades según el valor de posición en números de mínimo 2 dígitos, aplicando la regla de reagrupación cuando corresponda.
- Reconocer los símbolos y notación propios de la suma
- Plantear, representar y resolver problemas sencillos que involucren la suma o adición.

Tema central de la estrategia didáctica:

La Suma:

- Valor de posición y regla de reagrupación.
- Representación de la suma (símbolos, notación)
- Resolución de situaciones en las que se aplique la suma.

Las técnicas a aplicar según las estrategias son las siguientes:

Aprendizaje Interactivo:

Exposición del docente: Permite introducir los nuevos conceptos y aclarar dudas cuando sea necesario, así como orientar las actividades programadas en el desarrollo de la estrategia.

Esta técnica se aplica en el desarrollo de las siguientes actividades:

Instrucción sobre actividad de identificación de pre saberes y familiarización con el software.

Explicación de conceptos del tema (suma, notación, aplicación).

Aclaración e introducción de conceptos a partir de las actividades generadas (conteo de unidades a partir de material en físico, aclaración e introducción de concepto de valor posicional y agrupación a partir del uso de manipulativos virtuales (“Bloques de Base”, “Bloques de Base Adición” y “Recta Numérica Barras” de la National Library of Manipulatives NLVM); planteamiento y solución de problemas o situaciones asociadas al tema).

Orientación general de las actividades programadas en el desarrollo de la estrategia.

Evaluación de los aprendizajes a través de actividades en clase y verificación de logro de objetivo según el planteado para cada sesión.

Autoaprendizaje:

Tareas individuales de desarrollo en clase y en casa: Permiten manejar y relacionar los conceptos, para posteriormente aplicarlos.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Asignación de tareas de desarrollo individual en clase y en casa: Ejercicios sobre representación gráfica de sumas, notación o representación numérica y solución de problemas.

Para facilitar la relación de conceptos, la discusión y aclaración entre pares sobre el tema se tiene previsto el desarrollo de las siguientes actividades:

Resolver situaciones problema haciendo uso del manipulativo virtual “Bloques de Base adición” y “Recta numérica Barras” de la National Library of Virtual Manipulatives (NLVM).

Plantear situaciones que involucren adición o suma mediante aplicativo o virtual manipulable “Bloques de Base adición” y “Recta Numérica Barras” de la National Library of Virtual Manipulatives (NLVM).

Instrucción para desarrollar las técnicas de la Estrategia Didáctica:

Visibilización del esquema de pensamiento: Para lograr evidenciar la formación de esquemas mentales el docente deberá:

Escuchar a los estudiantes cuando expresan su pensamiento sobre las situaciones o actividades planteadas, llevar una observación del trabajo y formular preguntas de tipo *Cómo* (lo sabes?, lo hiciste?...) y *Por qué* (crees que..), en vez de tratar de responder.

Realizar una actividad en hoja, posterior al uso del manipulativo donde se pueda evidenciar el posible cambio o variación de los esquemas mentales.

Diseño del Ambiente de Aprendizaje

Número de estudiantes : 1

Sesión No. 0 (Identificación de presaberes)

Tiempo : 45 minutos

Objetivo de aprendizaje: Identificar saberes previos sobre el concepto suma (métodos o estrategias sobre el proceso de adición o suma, valor posicional y reagrupación).

Recursos: Videgrabadora, hojas de ejercicios, tablero, material manipulativo en físico (palitos, fichas ábaco, y otros), lápiz, marcador para tablero. Formato de registro de observaciones sobre la actividad.

Introducción, conocimientos previos:

Identificación de estrategias sobre el tema central a partir de actividad con fichas y en hoja/tablero.

Identificación de experiencia previa con manipulativo virtual.

El docente dejará sobre la mesa el material en físico en caso de que el estudiante desee hacer uso del mismo, para la resolución de los ejercicios o preguntas planteadas.

El docente desarrollará la sesión según lo indicado en la guía de desarrollo anexa.

El docente hará un registro de lo observado según proceso y respuestas del estudiante en formato correspondiente.

El docente presentará la ficha de experiencia previa con manipulativo virtual para verificar familiarización con la herramienta. Registrará en formato Anexo correspondiente.

El docente diligenciará la ficha o rúbrica de evaluación de presaberes.

(Estrategia de Aprendizaje Interactivo por Exposición del docente)

Cierre:

Se indagará sobre impresiones de la actividad y se indicará al estudiante la fecha de la siguiente sesión.

Sesión No. 1

Objetivo de aprendizaje:

- Representar cantidades según el valor de posición en números de mínimo 2 dígitos, aplicando la regla de reagrupación cuando corresponda.

Recursos:

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Computador con o sin conexión a internet, aplicativo en línea o descargable del Objeto Manipulativo Virtual Bloques de Base de la NLVM.

Hoja de trabajo en clase con 10 ejercicios de valor posicional reagrupación.

Guía de trabajo en casa.

Para la observación:

Software de registro de pantalla y de audio, videgrabadora.

Tiempo : 45 minutos

Introducción Conocimientos previos:

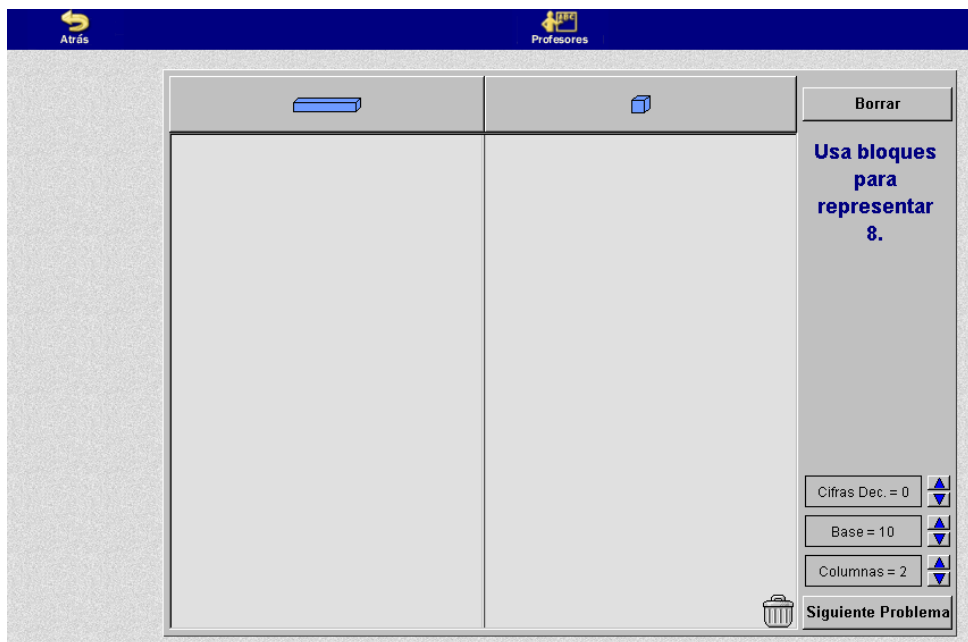
(Estrategia de Aprendizaje Interactivo por Exposición del docente)

Introducción del tema a modo individual a partir de actividad con herramienta manipulativa virtual (3 ejercicios de exploración guiada) sobre actividad de conteo y conformación de decenas y centenas según guía de desarrollo docente para la sesión.

Aplicación:

(Aprendizaje Interactivo Autoaprendizaje)

Trabajo individual en computador con uso del aplicativo MV (Bloques de Base). Se entrega hoja de ejercicios de reagrupación en unidades y decenas (ejercicio adicional de centenas).



Cierre: (Autoaprendizaje)

Trabajo en casa. El estudiante desarrollará una tarea en hoja de trabajo 1 y 2 según actividad con aplicativo usado en clase.

Sesión No. 2

Objetivo de aprendizaje :

Evaluar el logro del objetivo de aprendizaje sesión 1.

Reconocer los símbolos y notación propios de la suma.

Recursos:

Formato de Evaluación sesión 1 y respectiva rúbrica de evaluación.

Computador con o sin conexión a internet, aplicativo en línea o descargable del Objeto Manipulativo Virtual Bloques de Base Adición de la National Library of Virtual Manipulatives NLVM.

Guía de trabajo en casa.

Para la observación:

Software de registro de pantalla y de audio, videgrabadora.

Tiempo: 45 minutos

Introducción, conocimientos previos:

(Estrategia de Aprendizaje Interactivo por Exposición del docente)

Revisión de tarea de casa y aclaración de dudas.

Evaluación del objetivo de aprendizaje sesión 1 (según el resultado se establecen sesiones de refuerzo o continuar).

Introducción del tema a través de la explicación por parte del docente con el uso del Objeto Manipulativo Virtual “Bloques de Base Adición” según guía de desarrollo docente para la sesión.

Aplicación :

Actividad individual, desarrollo de guía de ejercicios manipulativo sobre representación de sumas con sumandos de 2 dígitos, con ayuda de Manipulativo Virtual Bloques de Base Adición (10) según guía docente de sesión.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Durante la actividad el docente visibilizará el esquema de pensamiento mediante preguntas de tipo ¿Cómo...? ¿Por qué...? ¿Para qué...? etc. Posteriormente asignará el desarrollo de una tarea en hoja, sin uso de manipulativo.

Cierre:

(Autoaprendizaje)

Tarea en hoja semejante a la actividad realizada con MV para desarrollo en casa, sobre representación de sumas (gráfica y numéricamente).

Sesión No. 3

Objetivo de aprendizaje:

Evaluar el objetivo de aprendizaje de la sesión 2.

Plantear, representar y resolver problemas sencillos que involucren la suma o adición (Verbal Cambio Tipo 1).

Recursos:

Formato de Evaluación de objetivo de aprendizaje de sesión 2 con respectiva rubrica.

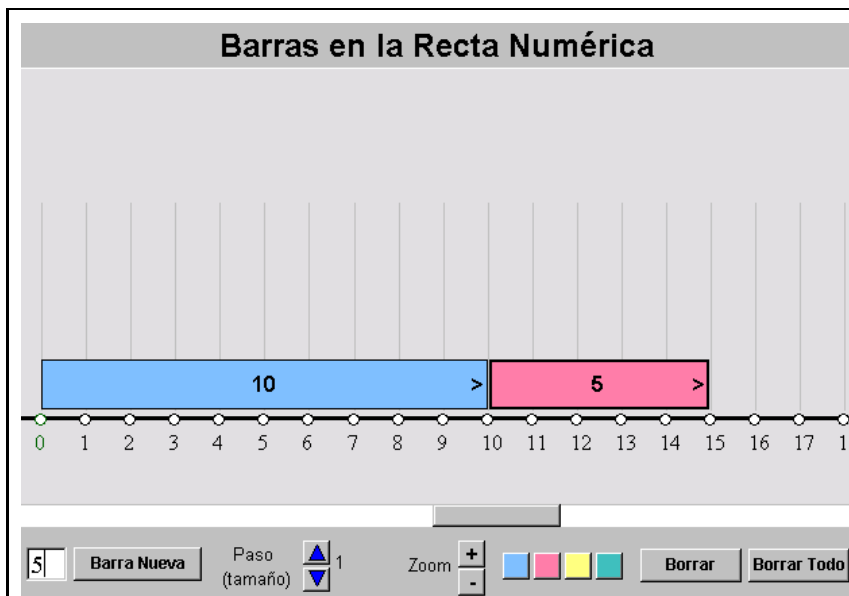
Computador con o sin conexión a internet, aplicativo en línea o descargable del Objeto Manipulativo Virtual Recta Numérica de la NLVM.

Guía de trabajo en clase para registro de respuestas (procedimiento y respuesta) (Anexo 5)

Guía de trabajo en casa (Anexo 6).

Hojas, lápices, colores, borrador, tajalápiz.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO



Para la observación:

Software de registro de pantalla, Videgrabadora.

Introducción, conocimientos previos:

(Estrategia de Aprendizaje Interactivo por Exposición del docente)

Revisión de tarea de casa y aclaración de dudas.

Evaluación del objetivo sesión 2 (según el resultado se establecen sesiones de refuerzo o continuar)

Introducción del tema a través de la explicación por parte del docente con el uso del Objeto Manipulativo Virtual “Recta Numérica”.

Aplicación :

(Autoaprendizaje)

Desarrollo de actividad de resolución de problemas cotidianos con aplicación de la suma según guía de trabajo (3 ejercicios con manipulativo con registro en hoja) (3 ejercicios en hoja sin manipulativo) (Anexo 5).

Durante la actividad el docente visibilizará el esquema de pensamiento mediante preguntas de tipo ¿Cómo...? ¿Por qué...? ¿Para qué...? etc.

Cierre:

(Autoaprendizaje)

Guía de desarrollo en casa según actividad de aplicación en clase (Anexo 6).

Sesión No. 4Objetivo de aprendizaje:

Evaluar el objetivo de aprendizaje de la sesión 3.

Plantear, representar y resolver problemas sencillos que involucren la suma o adición (Verbal Cambio, Pregunta tipo 2).

Recursos:

Formato de evaluación sesión 3 con respectiva rubrica.

Computador con o sin conexión a internet, aplicativo en línea o descargable del Objeto Manipulativo Virtual Recta Numérica de la NLVM.

Guía de trabajo en clase para registro de respuestas (procedimiento y respuesta) (Anexo 5)

Guía de trabajo en casa (Anexo 6).

Hojas, lápices, colores, borrador, tajalápiz.

Para la observación:

Software de registro de pantalla, Videgrabadora.

Introducción, conocimientos previos:

(Estrategia de Aprendizaje Interactivo por Exposición del docente)

Revisión de tarea de casa y aclaración de dudas.

Evaluación de la sesión 3 (según el resultado se establecen sesiones de refuerzo o continuar).

Introducción del tema a través de la explicación por parte del docente con el uso del Objeto Manipulativo Virtual “Recta Numérica”.

Aplicación :

(Autoaprendizaje)

Desarrollo de actividad de resolución de problemas cotidianos con aplicación de la suma según guía de trabajo (3 ejercicios con manipulativo con registro en hoja) (3 ejercicios en hoja sin manipulativo) (Anexo 5).

Durante la actividad el docente visibilizará el esquema de pensamiento mediante preguntas de tipo ¿Cómo...? ¿Por qué...? ¿Para qué...? etc.

Cierre:

(Autoaprendizaje)

Guía de desarrollo en casa según actividad de aplicación en clase.

Sesión No. 5Objetivo de aprendizaje:

Evaluar el objetivo de aprendizaje de la sesión 3.

Plantear, representar y resolver problemas sencillos que involucren la suma o adición (Verbal Cambio, Pregunta tipo 3).

Recursos:

Formato de evaluación sesión 4 con respectiva rubrica.

Computador con o sin conexión a internet, aplicativo en línea o descargable del Objeto Manipulativo Virtual Recta Numérica de la NLVM.

Guía de trabajo en clase para registro de respuestas (procedimiento y respuesta) (Anexo 5)

Guía de trabajo en casa (Anexo 6).

Hojas, lápices, colores, borrador, tajalápiz.

Para la observación:

Software de registro de pantalla, Videgrabadora.

Introducción, conocimientos previos:

(Estrategia de Aprendizaje Interactivo por Exposición del docente)

Revisión de tarea de casa y aclaración de dudas.

Evaluación de la sesión 4 (según el resultado se establecen sesiones de refuerzo o continuar).

Introducción del tema a través de la explicación por parte del docente con el uso del Objeto Manipulativo Virtual “Recta Numérica”.

Aplicación :

(Autoaprendizaje)

Desarrollo de actividad de resolución de problemas cotidianos con aplicación de la suma según guía de trabajo docente.

Durante la actividad el docente visibilizará el esquema de pensamiento mediante preguntas de tipo ¿Cómo...? ¿Por qué...? ¿Para qué...? etc.

Cierre:

(Autoaprendizaje)

Guía de desarrollo en casa según actividad de aplicación en clase (Anexo 6).

Sesión No. 6

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Objetivo de aprendizaje:

Aplicar la suma en resolución de problemas (verbales de cambio bajo preguntas tipo 1, 2 y 3).

Recursos:

Hoja de registro de ejercicios para los problemas a enunciar (oralmente).

Hojas, lápices.

Videocámara.

Tiempo: 45 minutos

Introducción a la actividad evaluativa

(Estrategia de Aprendizaje Interactivo por Exposición del docente)

Revisión de tarea de casa y aclaración de dudas.

Instrucción sobre registro de procedimientos y respuestas sobre problemas con suma (Cambio).

Aplicación:

(Autoaprendizaje)

Diligenciamiento de hoja de trabajo según objetivos de aprendizaje. El docente lee los problemas uno a uno (3 problemas en total, uno para cada pregunta). Espera a que el estudiante lo resuelva uno a uno (se toma registro de tiempo para cada uno).

Cierre:

(Autoaprendizaje)

Revisión de la actividad de evaluación y aclaración de dudas.

Para el desarrollo de cada una de las sesiones se requiere contar con:

Formato de registro de impresiones al final de la sesión.

Registro o copia de las actividades realizadas en cada sesión (hojas de trabajo en clase y en casa) como insumo de análisis, además de los registros de pantalla y de audio-video.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Anexo B*Guía docente, rúbricas de evaluación, formatos de registro de observaciones y de actividades por sesión***Guía docente de Ejemplos de Problemas de Cambio**

Problema	Propósito	Respuesta
Valentina tiene en su álbum 25 stickers y Juan le regala 15 que le faltaban ¿Cuántos stickers tiene ahora Valentina?	Identificar que el estudiante resuelve problemas de suma de Cambio Tipo 1. Adjunción, estado-transformación-estado	$\begin{array}{r} 25 \\ +15 \\ \hline ? \end{array}$
Daniel tiene 50 canicas ¿Cuántas le hace falta para tener 90?	Identificar que el estudiante resuelve problemas de suma de Cambio Tipo 2. Sustracción complementaria (STS)	$\begin{array}{r} 50 \\ +? \\ \hline 90 \end{array}$
Laura recibe 25 dulces de Carlos. Si Laura ahora tiene 45 dulces ¿Cuántos dulces tenía Laura al principio?	Identificar que el estudiante resuelve problemas de suma de Cambio Tipo 3. Sustracción complementaria (STS)	$\begin{array}{r} ? \\ +25 \\ \hline 45 \end{array}$

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Guía docente de Saberes Previos (Sesión 0)

Sesión 0 Identificación de saberes previos	Propósito	Preguntas al estudiante
Pregunta 1 Tener a mano material concreto para conteo de ser requerido por el estudiante.	Reconocer si el estudiante hace unión de conjuntos y representa esta unión numéricamente (con números de 1 cifra).	$8 + 3 = \underline{\quad}$
Pregunta 2	Reconocer si el estudiante realiza sumas de más de un dígito bajo el criterio de reagrupación.	$15 + 5 = \underline{\quad}$
Pregunta 3	Identificar si el estudiante resuelve un problema sencillo de suma bajo el criterio de cambio , con cifras de 1 dígito (Tipo 1)	Juan tiene 5 lápices y le regalan 3 más. ¿Cuántos lápices completa?
Pregunta 4	Identificar si el estudiante resuelve un problema sencillo de suma bajo el criterio de cambio , con cifras de 1 dígito (Tipo 2)	Pedro tiene 10 gallinas ¿Cuántas le hace falta para completar 18?
Pregunta 5	Identificar si el estudiante resuelve un problema sencillo de suma bajo el criterio de cambio , con cifras de 1 dígito (Tipo 3)	La abuela María recibe 10 flores de su nieta Camila. Si la abuela tiene ahora 25 flores ¿Cuántas tenía al comienzo?

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Rubrica de Evaluación Conocimientos Previos

Concepto	Satisfactorio	Aceptable	Insuficiente
Representación de Unión de conjuntos (notación de números de 1 dígito) (P1)	Evidencia representación de los datos de manera numérica usando los símbolos propios de la suma, respetando valor posicional y lugar de los diferentes símbolos según lo convencional. Resuelve correctamente la situación planteada.	Representa los datos con simbología propia de la suma, aunque tiene algunas fallas en la notación y/o valor posicional. Resuelve correctamente la situación planteada.	Representa con dificultad todos o algunos de los datos planteados; presenta algunas fallas en la notación y/o valor posicional. Evidencia dificultad para resolver la situación planteada.
Representación de Unión de conjuntos (regla de reagrupación) (P2)	Evidencia representación de los datos de manera numérica usando el criterio de reagrupación cuando es necesario. Resuelve correctamente la situación planteada.	Evidencia familiaridad con la regla de reagrupación aunque con algunas fallas.	Evidencia desconocimiento en la aplicación de la regla de reagrupación.
Resolución de un problema sencillo de suma bajo el criterio de cambio (Tipo 1) (P3)	Resuelve un problema sencillo Tipo 1.	Resuelve con algo de dificultad un problema sencillo de Suma Tipo 1.	No resuelve un problema sencillo de Suma Tipo 1.
Resolución de un problema sencillo de suma bajo el criterio de cambio (Tipo 2) (P4)	Resuelve un problema sencillo Tipo 2.	Resuelve con algo de dificultad un problema sencillo de Suma Tipo 2.	No resuelve un problema sencillo de Suma Tipo 2.
Resolución de un problema sencillo de suma bajo el criterio de cambio (Tipo 3) (P5)	Resuelve un problema sencillo Tipo 3.	Resuelve con algo de dificultad un problema sencillo de Suma Tipo 3.	No resuelve un problema sencillo de Suma Tipo 3.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Formato de Registro de Observaciones Sesión 0
Estrategias de resolución de problemas con Suma

No. De Sesión: 0	Fecha:	Hora:
Lugar:	Estudiante:	Edad:
Observador:		

Tema de la Pregunta	No Plantea	Plantea con operación diferente	Resuelve con estrategia ensayo-error.	Resuelve con Estrategia basada en elaboración de un modelo con dedos o con objetos físicos.	Resuelve con Estrategia basada en el uso de secuencias de recuento.	Resuelve con estrategias basadas en datos numéricos recordados.	Otras formas de resolución o estrategia
Resolución de problemas por Cambio T1							
Resolución de problemas por Cambio T2							
Resolución de problemas por Cambio T3							

Notas:

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Formato de Registro de Observaciones Sesión 0
Estrategias de resolución de problemas con Suma



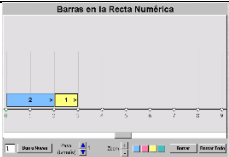
No. De Sesión: 0		Fecha:		Hora:	
Lugar:		Estudiante:		Edad:	
Observador:					
Valor posicional	No ubica dígitos	Ubica los dígitos de izquierda a derecha	Ubica los dígitos de derecha a izquierda	Otros	
Procedimiento	No hace procedimiento.	Empieza la operación de izquierda a derecha	Empieza la operación de derecha a izquierda	Fallas en procedimiento.	

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Formato de Registro sobre Experiencias previas con Manipulativo virtual

Presentar al estudiante la lámina de interfaz de software de Manipulativos (*Bloques para representar y Bloques de Adición*)

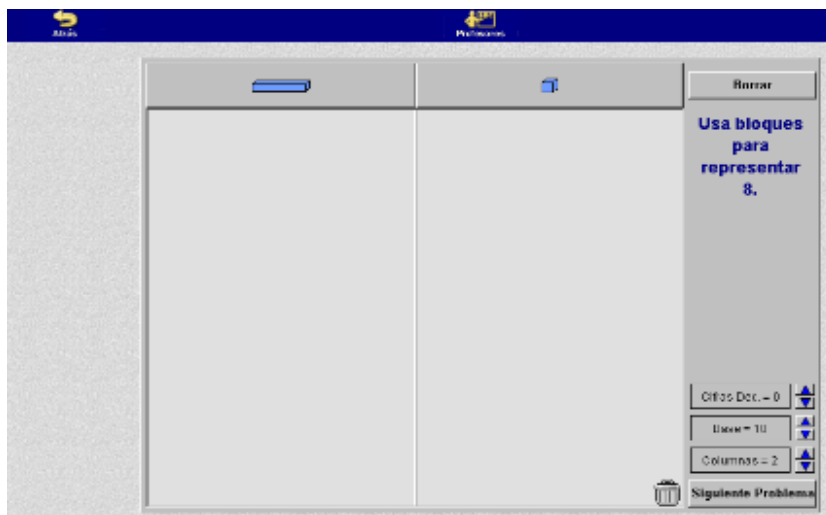
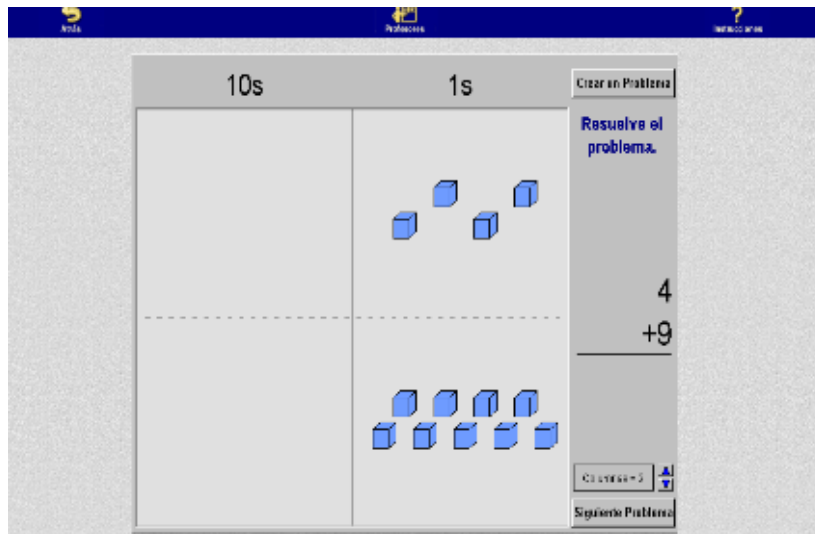
No. De Sesión: 0	Fecha:	Hora:
Lugar:	Estudiante:	Edad:
Observador:		

Manipulativo	No tiene experiencia previa, no reconoce.	Tiene experiencia previa, reconoce.
 <p>“Usar Bloques para representar”</p>		
 <p>“Bloques de Base Adición”</p>		
 <p>Recta numérica Barras</p>		

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Lámina de Interfaz Manipulativo 1 y 2

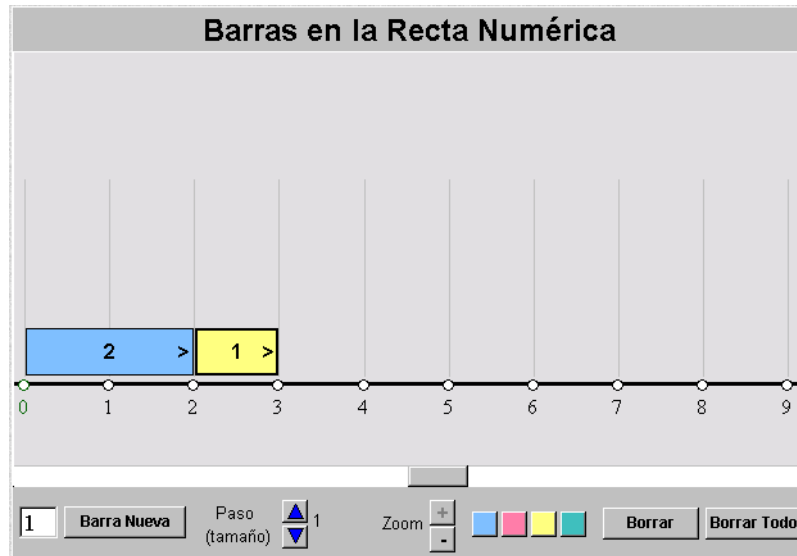
Presente esta lámina al estudiante y registre en *Formato de Registro de Experiencias Previas*.



VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Lámina de Interfaz Manipulativo 3

Presente esta lámina al estudiante y registre en *Formato de Registro de Experiencias Previas*.



VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Guía Docente Sesión 1

Ejercicios Explicativos

Software Manipulativo Virtual (*Bloques de Base*)

OBJETIVO: Representar cifras según el valor de posición en números de mínimo 2 dígitos, aplicando la regla de reagrupación cuando corresponda.

Actividad:

Mediante el uso del manipulativo virtual *Bloques de Base* plantear la representación de los siguientes valores:

a. 10

Instrucciones:

Indicar al estudiante que verifique que el número de la derecha corresponda con la inserción de las unidades hecha por el docente hasta llegar a 9 (Ir de uno en uno hasta 9).

Al llegar a la unidad número 10, si los estudiantes no lo han notado, hacer visible que no hay representación numérica del número 10 a la derecha de la cuadrícula.

Agrupar en una barra las 10 unidades y arrastrarla a la columna de decenas.

Aclarar la regla con el estudiante:

Al llegar a números superiores a 9, se debe reagrupar las unidades en barras de 10 y ubicarlas en la columna de decenas.

b. 25

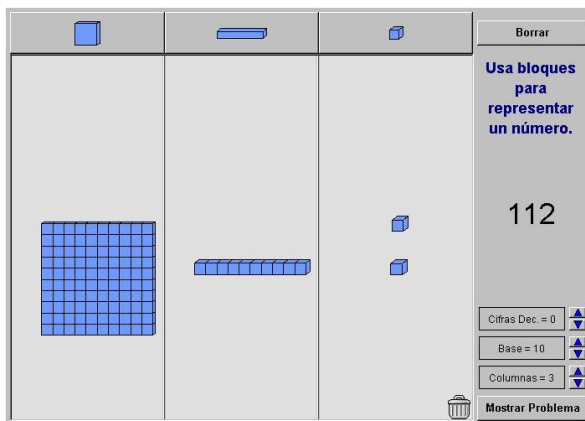
Realizar la actividad con ayuda del estudiante verificando que el estudiante tiene la clara la regla de agrupación.

c. 100.

Realizar la actividad con ayuda del estudiante verificando que el estudiante tiene clara la regla de agrupación por centenas (10 barras en la columna de decenas que se reagrupan en un plano o cuadrado de 100 unidades, que debe ser ubicado en la casilla de centenas).

Aclarar la regla con el estudiante:

Al llegar a números superiores a 99, se debe reagrupar las decenas o barras de 10 en bloques de 100 y ubicarlos en la columna de centenas.



Ejercicios extra con MV: 19, 26, 154

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Software Manipulativo Virtual (*Bloques de Base*)

No. De Sesión: 1. Valor Posicional	Fecha:	Hora:
Lugar:	Estudiante:	Edad:

Represento el número 175

The screenshot shows a virtual base blocks interface. At the top, there are three columns representing units, tens, and hundreds, each with a small blue block icon. To the right of these columns is a control panel with the following elements:

- A button labeled "Borrar" (Erase).
- Text: "Usa bloques para representar un número." (Use blocks to represent a number.)
- The number "175" is displayed in the center of the control panel.
- Three dropdown menus: "Cifras Dec. = 0", "Base = 10", and "Columnas = 3", each with up and down arrow buttons.
- A trash can icon and a button labeled "Mostrar Problema" (Show Problem).

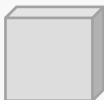


Explicación:


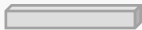

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

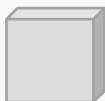


Hoja de Trabajo 1 En Casa

Sesión 1

Dibujo o represento según el número del recuadro derecho.

			9

			30

			125

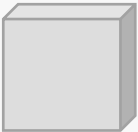


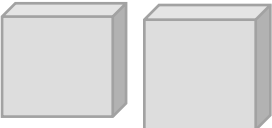
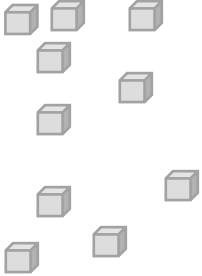
VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Hoja de Trabajo 2 en Casa

Sesión 1

Cuento y escribo el número que corresponde a cada cuadro según la gráfica:

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Formato de Registro de Observaciones Sesión 2
Verificación Valor posicional sin MV

No. De Sesión: 2	Fecha:	Hora: -
Lugar:	Estudiante:	Edad:
Observador:		

Represento la cifra del recuadro derecho:

37

241

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Rubrica de Evaluación Sesión No. 1

Nombre del Estudiante _____ fecha _____

OBJETIVO: Representar cifras según el valor de posición en números de mínimo 2 dígitos, aplicando la regla de reagrupación cuando corresponda.

Concepto	Satisfactorio	Aceptable (Requiere refuerzo)	Insuficiente (Requiere refuerzo)
Representa cifras según valor de posición en números de mínimo 2 dígitos.	Representa correctamente el número (gráfica y numéricamente) demostrando que tiene clara la regla de agrupación y reagrupación.	El estudiante representa algunas cifras correctamente, requiriendo eventualmente de ayuda para su representación.	El estudiante no logra representar correctamente el número o la cifra dada. Demuestra que no tiene clara la regla de agrupación aún con ayuda para su representación.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Guía de Trabajo Docente

Ejercicios Explicativos

Software Manipulativo Virtual (*Bloques de Base Adición*) Resuelve el problema

No. De Sesión: 2. Notación Sumas	Fecha:	Hora:
Lugar:	Estudiante:	Edad:
Observador:		

OBJETIVO: Reconocer los símbolos y notación propios de la suma.

Actividad:

Mediante el uso del manipulativo virtual Bloques de Base plantear la representación de las sumas determinadas por el aplicativo aleatoriamente:

Instrucciones:

Orientar al estudiante en la reagrupación de las unidades para formar decenas y centenas cuando aplique, para hallar la respuesta.

La respuesta no aparece hasta que no se haga la reagrupación y ubicación de las unidades en su respectiva columna.

En números de más de 2 cifras hacer evidente el número que indica la reagrupación.

IMPORTANTE 

Registrar en bitácora de observación los ejercicios planteados y observaciones (5 sumas con MV).

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO


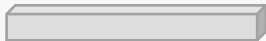

Hoja de Registro de Trabajo Estudiante sin MV
Ejercicios Sesión 2

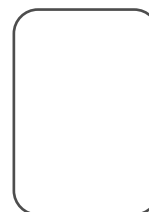
Software Manipulativo Virtual (*Bloques de Base Adición*) (*Copie este formato cuantas veces sea necesario, según número de ejercicios*)

No. De Sesión: 2. Notación	Fecha:	Hora:
Lugar:	Estudiante:	Edad:
Observador:		

Represento y resuelvo la siguiente suma:

$$\underline{\quad\quad\quad} + \underline{\quad\quad\quad} = \underline{\quad\quad\quad}$$

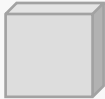
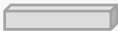



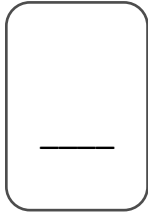
Explicación:

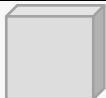


VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

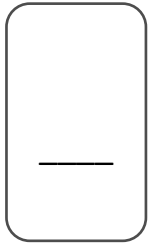
Hoja de Trabajo 1
En Casa Sesión 2

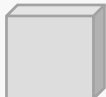
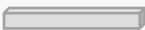

Dibujo o represento según el recuadro derecho.

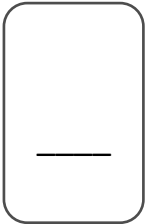
		







VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Formato de Verificación Notación sin MV

No. De Sesión: 3	Fecha:	Hora: -
Lugar:	Estudiante:	Edad:
Observador:		

Resuelvo la suma del recuadro derecho:



Explicación de la tarea:

--

Adaptado de Moyer, Niezgoda y Stanley (2005).

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Rubrica de Evaluación Sesión No. 2

Nombre del Estudiante _____ fecha _____

OBJETIVO: Reconocer los símbolos y notación propios de la suma.

Concepto	Satisfactorio	Aceptable (Requiere refuerzo)	Insuficiente (Requiere refuerzo)
Reconoce los símbolos y notación propios de la suma	El estudiante representa correctamente los datos de manera numérica usando los símbolos propios de la suma, resuelve adecuadamente la situación dada realizando la respectiva unión entre conjuntos y reagrupando cuando corresponde.	El estudiante representa algunos datos de manera numérica usando símbolos propios de la suma, resuelve situaciones problema requiriendo eventualmente de ayuda para su solución.	El estudiante no logra representar correctamente los datos de manera numérica, no usa los símbolos propios de la suma. Demuestra que no tiene clara la unión entre conjuntos y la regla de agrupación. No resuelve la situación dada aún con ayuda para su solución.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Guía de Trabajo Docente

Ejercicios Explicativos

Software Manipulativo Virtual (*Bloques de Base Adición*) Crea un problema

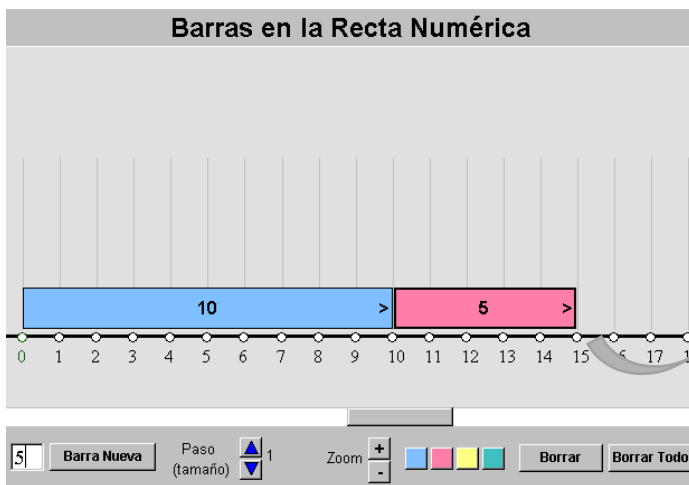
No. De Sesión: 3. Sumas Cambio T1	Fecha:	Hora:
Lugar:	Estudiante:	Edad:
Observador:		

OBJETIVO: Plantear, representar y resolver problemas sencillos que involucren la suma o adición (Verbal Cambio, Pregunta tipo 1).

Actividad:

Mediante el uso del manipulativo virtual Recta Numérica Barras, plantear la representación de los problemas con suma Cambio tipo 1:

Instrucciones:



Orientar al estudiante en la representación de los sumandos, teniendo en cuenta el problema presentado y el patrón que lo orienta.

Orientar al estudiante en la estrategia para encontrar la respuesta a la pregunta (la recta le indica el valor a hallar cuando se representan los valores como un todo)

Problema 1. Juan Pablo tiene 10 canicas. Carlos le regala otras 5 ¿Cuántas canicas tiene ahora Juan Pablo?

Problema 2. Lina tiene 7 manzanas, si su abuelita le regala 8 más ¿cuántas completa?

Problemas planteados al estudiante para desarrollo con MV:

1. Matías tiene una colección de 12 sombreros. Si su amigo le regala 5 más ¿Cuántos sombreros completa?
2. Carolina tiene 7 lápices de colores. Si su tía le regala una caja con 13 lápices de colores ¿Cuántos lápices de colores completa?
3. David tiene 11 chocolatinas y Susanita le obsequia una caja con 15 más ¿Cuántas chocolatinas completa David?

IMPORTANTE



Registrar en bitácora de observación los ejercicios planteados y observaciones (sumas tipo 1 con MV).

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

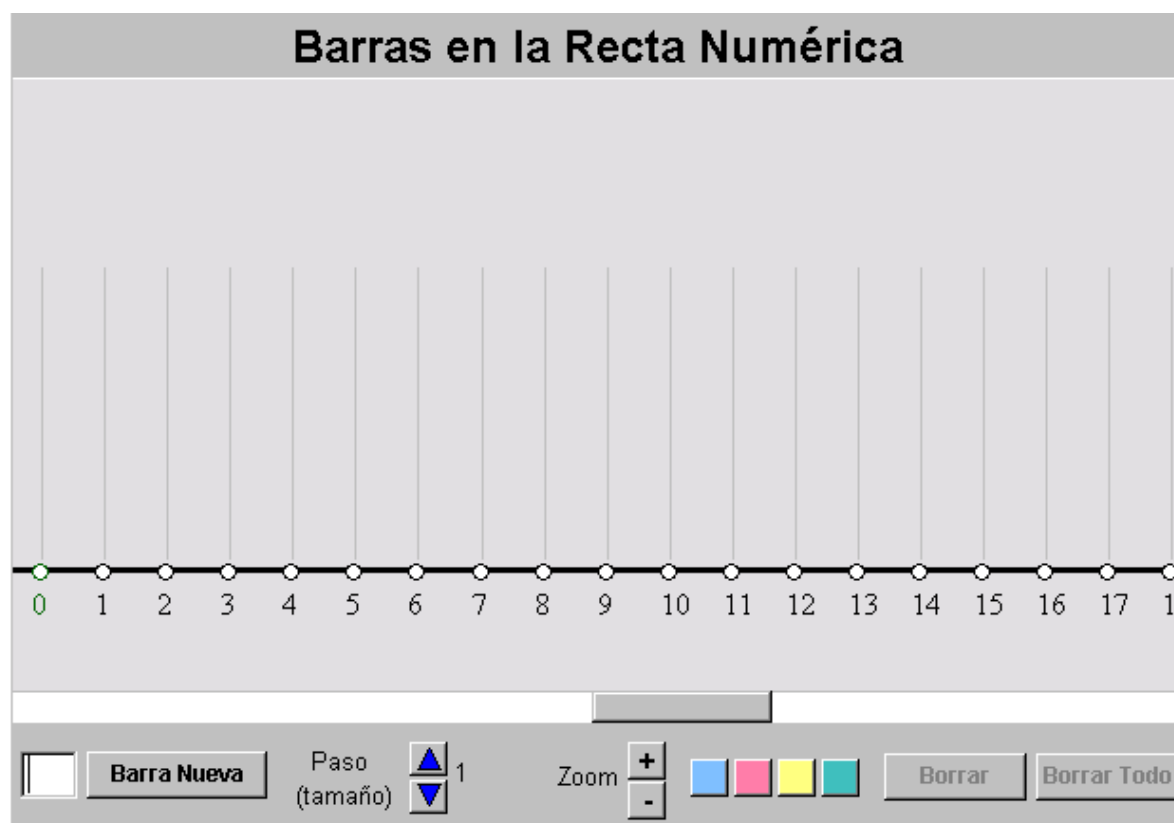
Hoja de Trabajo Estudiante sin MV
Ejercicios Sesión 3

(Copie este formato cuantas veces sea necesario, según número de ejercicios)

No. De Sesión: 3. Cambio T1	Fecha:	Hora:
Lugar:	Estudiante:	Edad:
Observador:		

Represento y resuelvo el siguiente problema:

En la finca de Pedro hay 13 vacas. Si Pedro compra 9 más ¿Cuántas vacas completa?



Notación Vertical:

+

Notación Horizontal:

_____ + _____ = _____

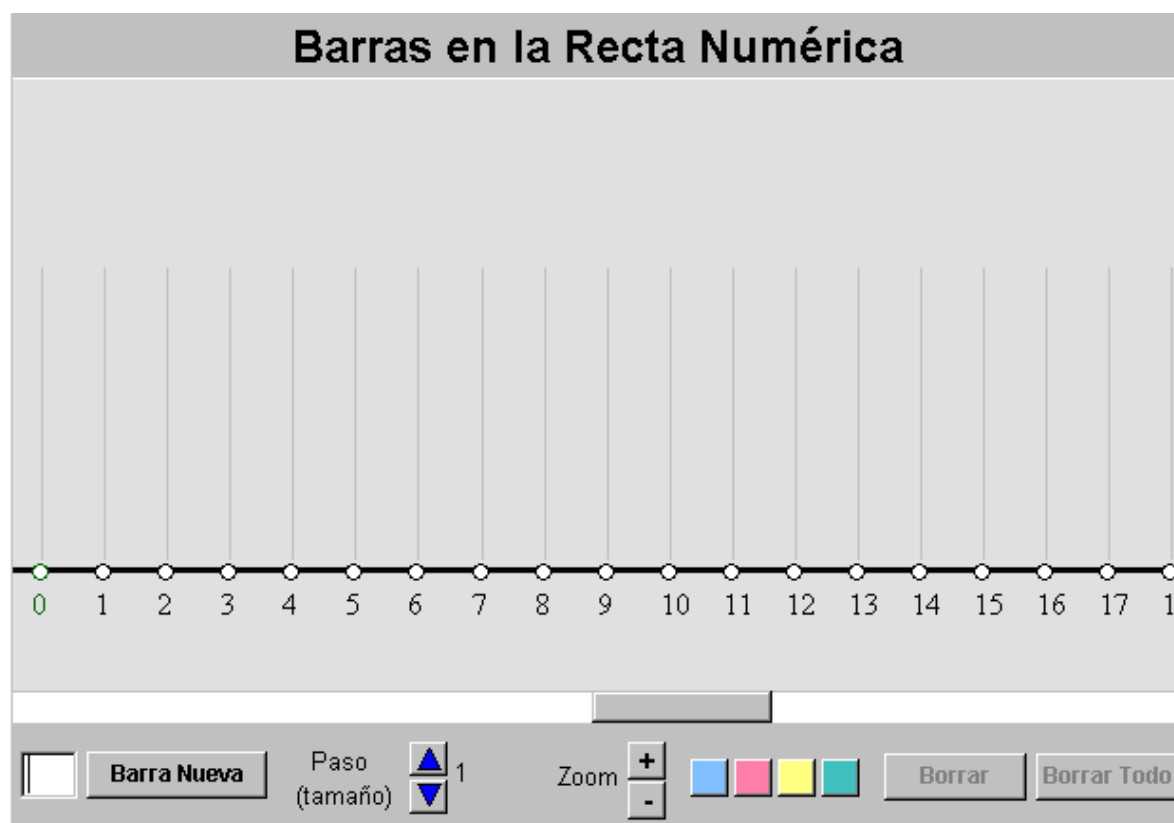
VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Hoja de Trabajo Estudiante sin MV
Ejercicios Sesión 3 (Creo un problema)

(Copie este formato cuantas veces sea necesario, según número de ejercicios)

No. De Sesión: 3. Cambio T1	Fecha:	Hora:
Lugar:	Estudiante:	Edad:
Observador:		

Represento y resuelvo un problema (Escribo aquí mi problema):



Suma Vertical:

Suma Horizontal: _____ + _____ = _____

+ _____

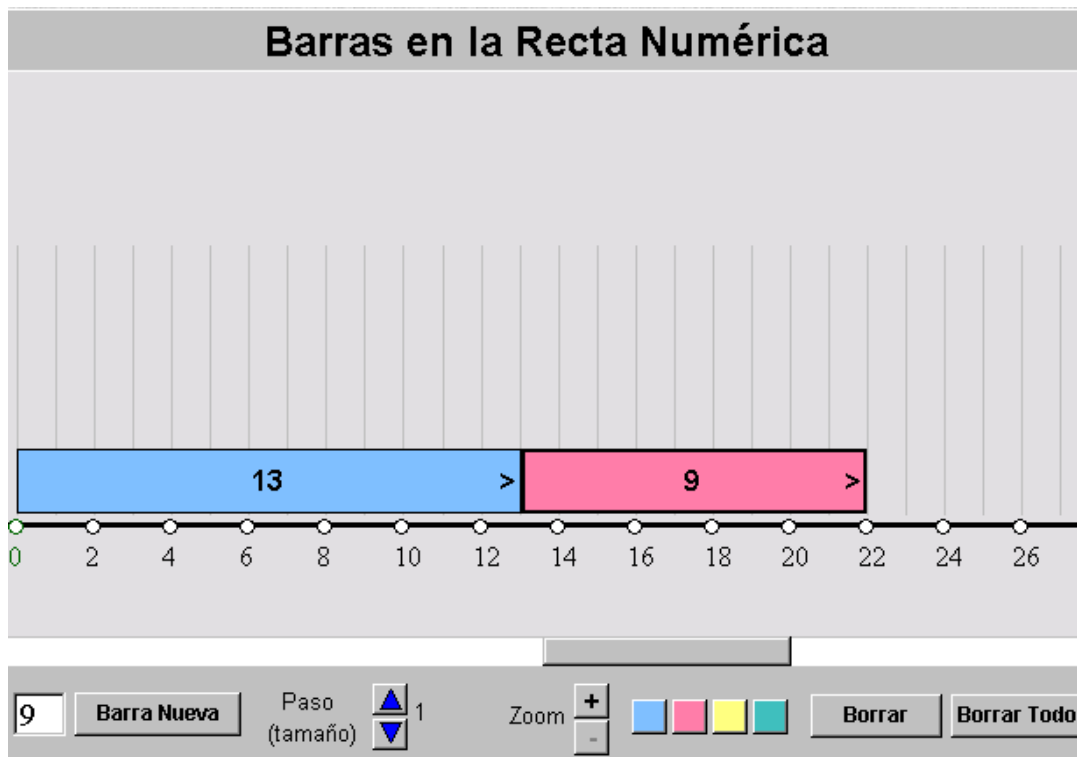
Explicación:

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

En Casa Sesión 3

Leo y represento numéricamente el siguiente problema:

En la finca de Pedro hay 13 vacas. Si Pedro compra 9 más ¿Cuántas vacas completa?



Suma Vertical:

Suma Horizontal: _____ + _____ = _____

+ _____

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Planteo, represento y soluciono un problema con suma como el del ejemplo anterior.



Suma Vertical:

Suma Horizontal: _____ + _____ = _____

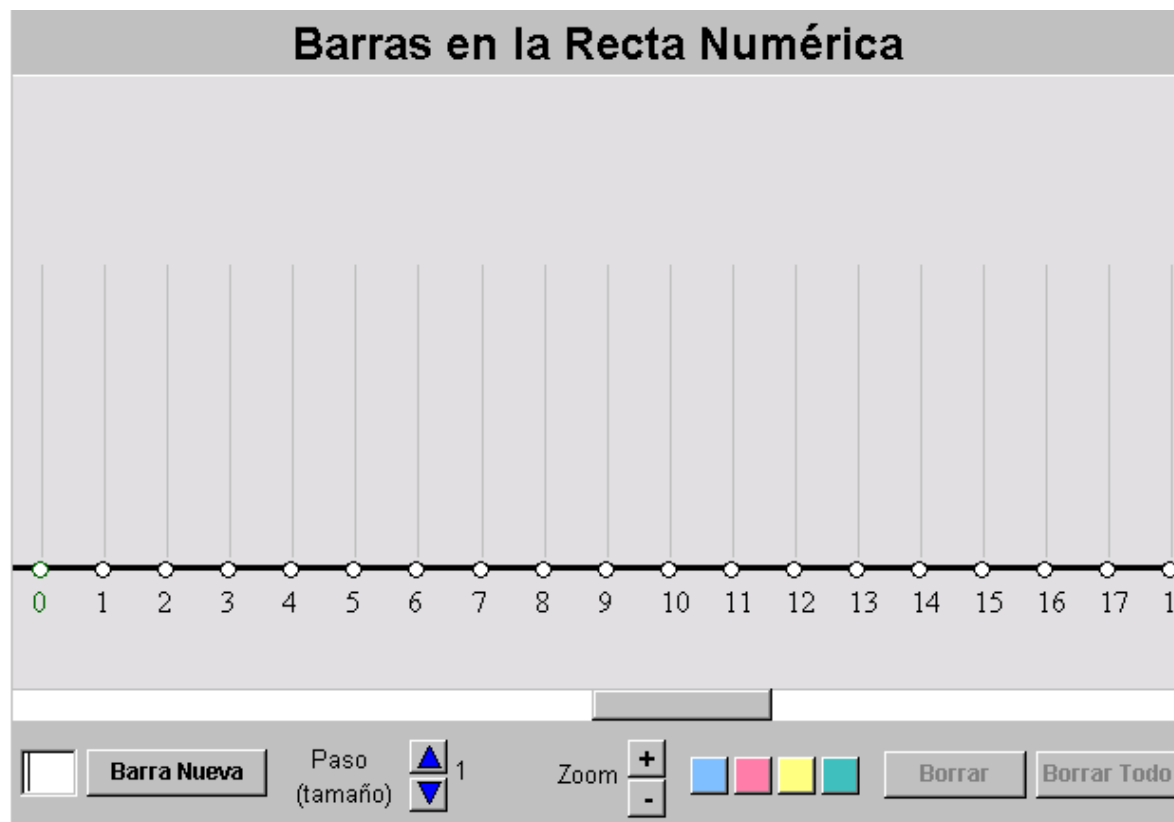
+ _____

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Formato de Verificación Cambio T1

No. De Sesión: 4	Fecha:	Hora: -
Lugar:	Estudiante:	Edad:
Observador:		

Planteo, represento y soluciono un problema con suma como el visto en la sesión anterior (Tipo 1)



Suma Vertical:

Suma Horizontal: _____ + _____ = _____

+ _____

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Rubrica de Evaluación Sesión No. 3

Nombre del Estudiante _____ fecha _____

OBJETIVO: Plantear, representar y resolver problemas sencillos que involucren la suma o adición (Verbal Cambio, Pregunta tipo 1).

Concepto	Satisfactorio	Aceptable (Requiere refuerzo)	Insuficiente (Requiere refuerzo)
Plantea, representar y resolver problemas sencillos que involucren la suma o adición (Verbal Cambio, Pregunta tipo 1).	El estudiante logra plantear, representar y resolver adecuadamente problemas sencillos (Verbal Cambio, pregunta tipo 1).	El estudiante plantea, representa y resuelve con algo de dificultad problemas sencillos (Verbal Cambio, pregunta tipo 1). Resuelve situaciones problema requiriendo eventualmente de ayuda para su solución.	El estudiante no logra plantear, representar ni resolver problemas sencillos (Verbal Cambio, pregunta tipo 1).

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Guía de Trabajo Docente
Ejercicios Explicativos Cambio T2

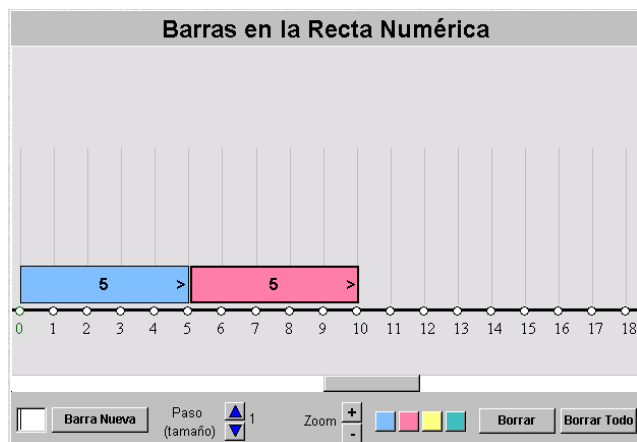
Software Manipulativo Virtual (Recta Numérica Barras)

No. De Sesión: 4. Sumas Cambio T2	Fecha:	Hora:
Lugar:	Estudiante:	Edad:
Observador:		

OBJETIVO: Plantear, representar y resolver problemas sencillos que involucren la suma o adición (Verbal Cambio, Pregunta tipo 2).

Actividad:

Mediante el uso del manipulativo virtual Bloques de Base Adición, opción *Crear un problema*, plantear la representación de los problemas con suma Cambio tipo 2:



Instrucciones:

Para la resolución de este problema se orientará al estudiante sobre el lugar de la incógnita (para este tipo de problema, es el sumando 2).

Problema 1. Valeria tiene 5 pulseras ¿Cuántas le falta para completar 10 pulseras?

Problema 2. Alejandro tiene 10 camisetas ¿Cuántas le faltan para completar 20?

Problemas planteados al estudiante para desarrollo con MV:

1. Nicolás organiza una fiesta de cumpleaños. Al llegar la tarde han llegado 12 amigos. Si invitó 20 ¿Cuántos amigos falta por llegar?
2. José tiene 18 tazos ¿Cuántos tazos le hace falta para completar 25?
3. Martha tiene 15 flores y necesita completar 27 flores para hacer un bello florero ¿Cuántas flores le falta a Martha?

IMPORTANTE 

Registrar en bitácora de observación los ejercicios planteados y observaciones (sumas tipo 2 con MV).

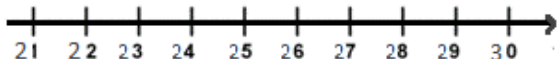
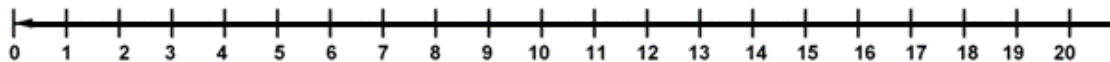
VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Hoja de Trabajo Estudiante sin MV
Ejercicios Cambio Tipo 2

No. De Sesión: 4. Cambio T2	Fecha:	Hora:
Lugar:	Estudiante:	Edad:
Observador:		

Represento y resuelvo el siguiente problema:

El papá de Pedro compra 20 manzanas, pero de vuelta a la casa recuerda que debía comprar 30.
 ¿Cuántas manzanas le falta al papá de Pedro?



Suma Vertical:

Suma Horizontal: _____ + _____ = _____

+ _____

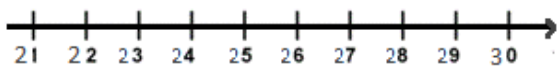
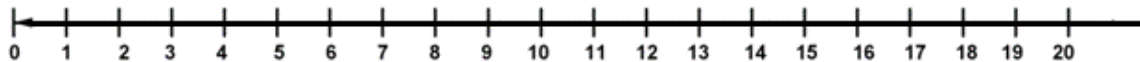
Explicación:

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Hoja de Trabajo Estudiante sin MV
Ejercicios Cambio T2 (Creo un problema)

No. De Sesión: 4. Cambio T2	Fecha:	Hora:
Lugar:	Estudiante:	Edad:
Observador:		

Planteo, represento y resuelvo un problema:



Suma Vertical:

Suma Horizontal: _____ + _____ = _____

+ _____

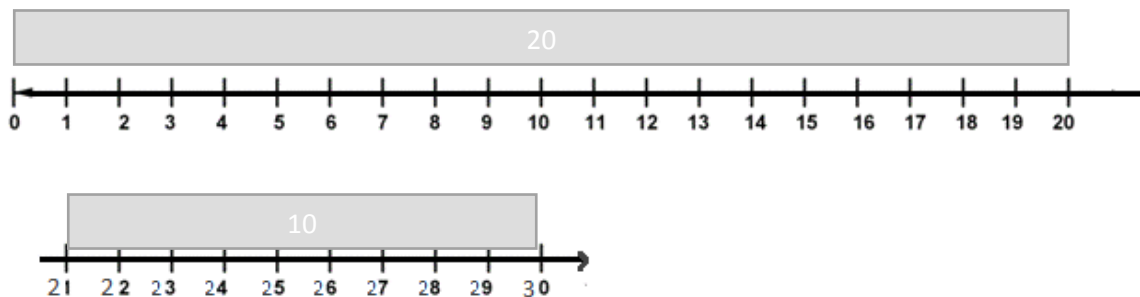
VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Hoja de Trabajo en Casa

Cambio T2

Leo el siguiente problema y su representación en la recta. Después represento numéricamente según los datos.

El papá de Pedro compra 20 manzanas, pero de vuelta a la casa recuerda que debía comprar 30. ¿Cuántas manzanas le falta al papá de Pedro?



Suma Vertical:

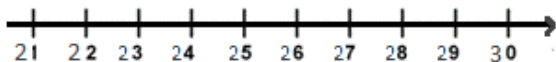
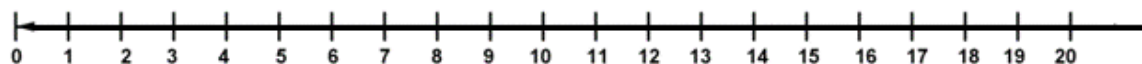
Suma Horizontal: _____ + _____ = _____

+ _____

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Hoja de Trabajo en Casa 2
Cambio T2 (Creo un problema)

Creo un problema que contenga suma como el del ejemplo anterior. Lo represento en la recta numérica y vertical y horizontalmente.



Suma Vertical:

Suma Horizontal: _____ + _____ = _____

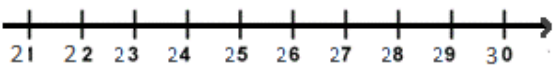
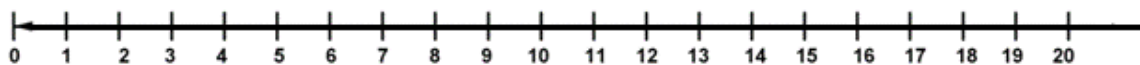
+ _____

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Formato de Verificación Cambio T2 sin MV

No. De Sesión: 5	Fecha:	Hora: -
Lugar:	Estudiante:	Edad:
Observador:		

Creo un problema que contenga suma como el del ejemplo anterior. Lo represento en la recta numérica y vertical y horizontalmente.



Suma Vertical:

Suma Horizontal: _____ + _____ = _____

+ _____

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Rubrica de Evaluación Sesión No. 4

Nombre del Estudiante _____ fecha _____

OBJETIVO: Plantear, representar y resolver problemas sencillos que involucren la suma o adición (Verbal Cambio, Pregunta tipo 2).

Concepto	Satisfactorio	Aceptable (Requiere refuerzo)	Insuficiente (Requiere refuerzo)
Plantea, representar y resolver problemas sencillos que involucren la suma o adición (Verbal Cambio, Pregunta tipo 2).	El estudiante logra plantear, representar y resolver adecuadamente problemas sencillos (Verbal Cambio, pregunta tipo 2).	El estudiante plantea, representa y resuelve con algo de dificultad problemas sencillos (Verbal Cambio, pregunta tipo 2). Resuelve situaciones problema requiriendo eventualmente de ayuda para su solución.	El estudiante no logra plantear, representar ni resolver problemas sencillos (Verbal Cambio, pregunta tipo 2).

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Guía de Trabajo Docente
Ejercicios Explicativos Cambio T3

Software Manipulativo Virtual (Recta Numérica Barras)

No. De Sesión: 5. Sumas Cambio T3	Fecha:	Hora:
Lugar:	Estudiante:	Edad:
Observador:		

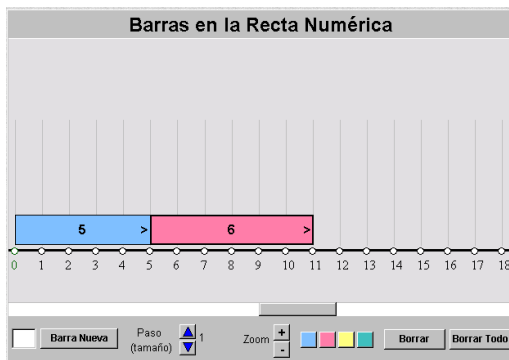
OBJETIVO: Plantear, representar y resolver problemas sencillos que involucren la suma o adición (Verbal Cambio, Pregunta tipo 3).

Actividad:

Mediante el uso del manipulativo virtual Recta Numérica Barras, plantear la representación de problemas con suma Cambio tipo 3:

Instrucciones:

Para la resolución de este problema se orientará en el lugar de la incógnita, para este tipo de problema, es el sumando 1.



Problema 1. A los ositos que tenía Juliana le añade 5 más que le regalan sus amigos el día de su cumpleaños y completa 11. ¿Cuántos ositos tenía Juliana al comienzo?

Problema 2. Don Luis recoge en la segunda parada 5 niños. Si con estos completó 12 ¿cuántos niños había recogido en la primera parada?

Problemas planteados al estudiante para desarrollo con MV:

1. Un jardinero sembró 10 plantas en la tarde. Si con las que sembró en la mañana completó 18 plantas ¿Cuántas sembró en la mañana?
2. En la heladería vendieron 11 conos el sábado. Si entre el viernes y el sábado vendieron 20 conos ¿Cuántos vendieron el viernes?
3. En una granja se recolectan en el día 5 cantinas de leche. Si en la tarde se recolectaron 2 cantinas de leche ¿Cuántas se recolectaron en la mañana?



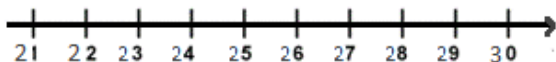
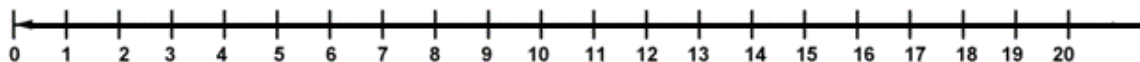
Registrar en bitácora de observación los ejercicios planteados y observaciones (sumas tipo 3 con MV).

Hoja de Trabajo Estudiante sin MV
Ejercicios Cambio T3

No. De Sesión: 5. Cambio T3	Fecha:	Hora:
Lugar:	Estudiante:	Edad:
Observador:		

Represento y resuelvo el siguiente problema:

Un pastelero hornea 15 pasteles al día. Si en la tarde horneó 8 pasteles, ¿Cuántos horneó en la mañana?



Suma Vertical:

Suma Horizontal: _____ + _____ = _____

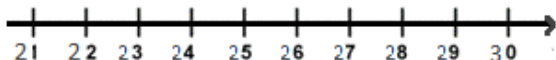
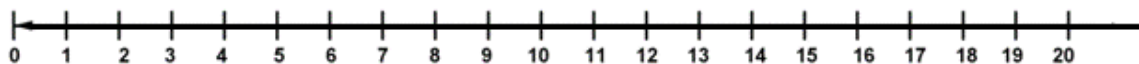
+ _____

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Hoja de Trabajo Estudiante sin MV
Ejercicios Cambio T3 (Creo un problema)

No. De Sesión: 5. Cambio T3	Fecha:	Hora:
Lugar:	Estudiante:	Edad:
Observador:		

Creo un problema que contenga suma como el del ejemplo anterior. Lo represento en la recta numérica y vertical y horizontalmente.



Suma Vertical:

Suma Horizontal: _____ + _____ = _____

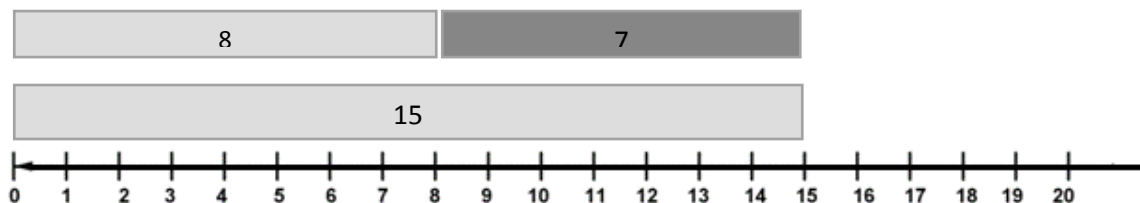
+ _____

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Hoja de Trabajo
En Casa Cambio T3

Leo el siguiente problema y su representación en la recta. Después represento numéricamente según los datos.

Un pastelero hornea 15 pasteles al día. Si en la tarde horneó 8 pasteles, ¿Cuántos horneó en la mañana?



Suma Vertical:

Suma Horizontal: _____ + _____ = _____

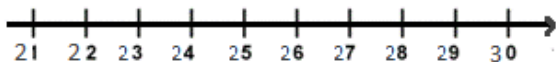
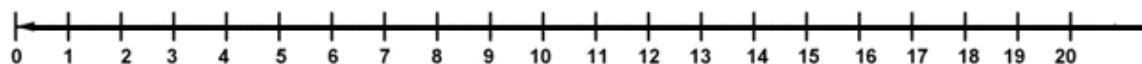
+ _____

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Hoja de Trabajo en Casa Cambio T3

Creo un problema

Creo un problema que contenga suma como el del ejemplo anterior. Lo represento en la recta numérica y vertical y horizontalmente.



Suma Vertical:

Suma Horizontal: _____ + _____ = _____

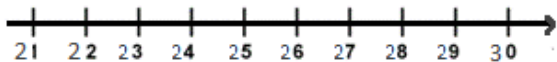
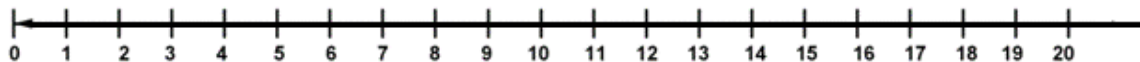
+ _____

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Formato de Verificación Cambio T3 sin MV

No. De Sesión: 6. Cambio T3	Fecha:	Hora:
Lugar:	Estudiante:	Edad:
Observador:		

Creo un problema que contenga suma como el del ejemplo anterior. Lo represento en la recta numérica y vertical y horizontalmente.



Suma Vertical:

Suma Horizontal: _____ + _____ = _____

+ _____

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Rubrica de Evaluación Sesión No. 5

Nombre del Estudiante _____ fecha _____

OBJETIVO: Plantear, representar y resolver problemas sencillos que involucren la suma o adición (Verbal Cambio, Pregunta tipo 3).

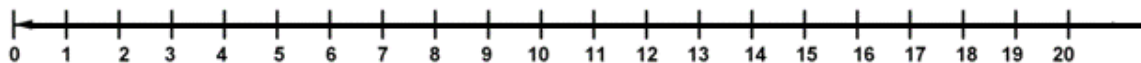
Concepto	Satisfactorio	Aceptable (Requiere refuerzo)	Insuficiente (Requiere refuerzo)
Plantea, representar y resolver problemas sencillos que involucren la suma o adición (Verbal Cambio, Pregunta tipo 3).	El estudiante logra plantear, representar y resolver adecuadamente problemas sencillos (Verbal Cambio, pregunta tipo 3).	El estudiante plantea, representa y resuelve con algo de dificultad problemas sencillos (Verbal Cambio, pregunta tipo 3). Resuelve situaciones problema requiriendo eventualmente de ayuda para su solución.	El estudiante no logra plantear, representar ni resolver problemas sencillos (Verbal Cambio, pregunta tipo 3).

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Formato de Verificación Cambio T1, T2 y T3 sin MV

No. De Sesión: 6 Cambio T1	Fecha:	Hora: -
Lugar:	Estudiante:	Edad:
Observador:		

Felipe tiene 16 carritos y su papá le regala en su cumpleaños un juego de 4 carritos más ¿Cuántos carritos completa Felipe?



Suma Vertical:

Suma Horizontal: _____ + _____ = _____

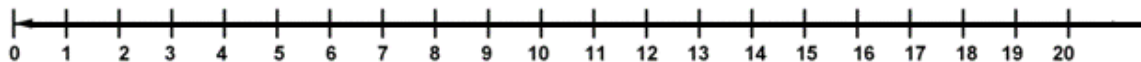
+ _____

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Formato de Verificación Cambio T1, T2 y T3 sin MV

No. De Sesión: 6 Cambio T2	Fecha:	Hora: -
Lugar:	Estudiante:	Edad:
Observador:		

En un supermercado hay 13 empleados. Los fines de semana cuando hay mayor venta se requiere de un total de 19 empleados ¿Cuántos empleados tienen que contratar para los fines de semana?



Suma Vertical:

Suma Horizontal: _____ + _____ = _____

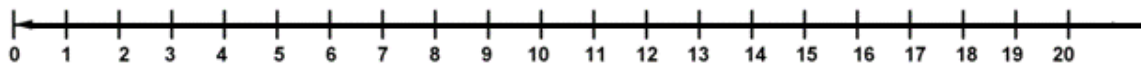
+ _____

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Formato de Verificación Cambio T1, T2 y T3 sin MV

No. De Sesión: 6 Cambio T3	Fecha:	Hora: -
Lugar:	Estudiante:	Edad:
Observador:		

A las muñecas que tenía Isabel, Sara le compartió 8 más. Si ahora Isabel tiene 13 muñecas ¿Cuántas tenía al principio?



Suma Vertical:

Suma Horizontal: _____ + _____ = _____

+ _____

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Rubrica de Evaluación Nuevos Conocimientos

Concepto	Satisfactorio	Aceptable	Insuficiente
Representación de Unión de conjuntos (notación de números de 1 dígito)	Evidencia representación de los datos de manera numérica usando los símbolos propios de la suma, respetando valor posicional y lugar de los diferentes símbolos según lo convencional. Resuelve correctamente la situación planteada.	Representa los datos con simbología propia de la suma, aunque tiene algunas fallas en la notación y/o valor posicional. Resuelve correctamente la situación planteada.	Representa con dificultad todos o algunos de los datos planteados; presenta algunas fallas en la notación y/o valor posicional. Evidencia dificultad para resolver la situación planteada.
Representación de Unión de conjuntos (regla de reagrupación)	Evidencia representación de los datos de manera numérica usando el criterio de reagrupación cuando es necesario. Resuelve correctamente la situación planteada.	Evidencia familiaridad con la regla de reagrupación aunque con algunas fallas.	Evidencia desconocimiento en la aplicación de la regla de reagrupación.
Resolución de un problema sencillo de suma bajo el criterio de cambio (Tipo 1)	Resuelve un problema sencillo Tipo 1.	Resuelve con algo de dificultad un problema sencillo de Suma Tipo 1.	No resuelve un problema sencillo de Suma Tipo 1.
Creación de un problema sencillo de suma bajo el criterio de cambio (Tipo 1)	Crea un problema sencillo Tipo 1.	Crea con algo de dificultad un problema sencillo de Suma Tipo 1.	No crea un problema sencillo de Suma Tipo 1.
Resolución de un problema sencillo de suma bajo el criterio de cambio (Tipo 2)	Resuelve un problema sencillo Tipo 2.	Resuelve con algo de dificultad un problema sencillo de Suma Tipo 2.	No resuelve un problema sencillo de Suma Tipo 2.
Creación de un problema sencillo de suma bajo el criterio de cambio (Tipo 2)	Crea un problema sencillo Tipo 2.	Crea con algo de dificultad un problema sencillo de Suma Tipo 2.	No crea un problema sencillo de Suma Tipo 2.
Resolución de un problema sencillo de suma bajo el criterio de cambio (Tipo 3)	Resuelve un problema sencillo Tipo 3.	Resuelve con algo de dificultad un problema sencillo de Suma Tipo 3.	No resuelve un problema sencillo de Suma Tipo 3.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Creación de un problema sencillo de suma bajo el criterio de cambio (Tipo 3)	Crea un problema sencillo Tipo 3.	Crea con algo de dificultad un problema sencillo de Suma Tipo 3.	No crea un problema sencillo de Suma Tipo 3.
---	-----------------------------------	--	--

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Anexo C

Cronograma

SEMESTRE	SEMESTRE 1						SEMESTRE 2						SEMESTRE 3						SEMESTRE 4						
ACTIVIDADES	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	
Definición del tema de investigación		X	X					X	X	X	X														
Búsqueda y lectura de referencias de apoyo		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Elaboración del marco teórico				X	X	X	X	X	X	X	X	X													
Estado del arte					X	X		X	X	X				X	X	X									
Elaboración del documento		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
Diseño del ambiente					X	X		X	X	X	X	X													
Pilotaje de ambiente														X	X										
Diseños de los instrumentos de evaluación								X	X	X	X														
Pilotaje de los instrumentos de evaluación														X	X										
Diseño AA final													X	X	X	X									
Implementación del aprendizaje final																	X	X	X	X					
Aplicación de los instrumentos de medición																	X	X	X	X					

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Recolección de datos															X	X	X	X	X	X	X				
Análisis de los datos recolectados																	X	X	X	X	X	X	X		
Informe final y otros documentos																				X	X	X	X		

Anexo D**Modelo de cuestionario Semiestructurado para indagación sobre tareas por sesión**

Durante el desarrollo de las tareas con el manipulativo y sin él, se buscará abordar las diferentes acciones frente al tema matemático abordado en el Ambiente de Aprendizaje.

PROCEDIMIENTO:

¿Cómo crees que se resuelve esta tarea?

¿Cómo lo hiciste?

¿Por qué? ¿Para qué?

EXPERIENCIA SOBRE LA ACTIVIDAD

¿Cómo te pareció la tarea?

¿Qué te gustó/ no te gustó? Razones.

VISIBILIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Anexo E

Permiso Institucional IED Villemar El Carmen

	<p>COLEGIO VILLEMAR EL CARMEN INSTITUCIÓN EDUCATIVA DISTRITAL LOCALIDAD 9ª, FONTIBON DAÑE 111279000125 Resolución 1961 de Junio 04 DE 2002 y Resolución No. 378 de febrero 01 de 2007</p>	 <p>ALCALDÍA MAYOR BOGOTÁ D.C. Secretaría EDUCACIÓN</p>						
<p>Bogotá D.C., junio 05 de 2015</p>								
<p>Licenciada Nancy Moreno N. Docente Área de Apoyo Sede A Jornada Mañana Ciudad</p>	<table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td colspan="2" style="padding: 2px;">RADICACIÓN CORRESPONDENCIA DE SALIDA</td> </tr> <tr> <td colspan="2" style="padding: 2px;">No. Radicación: 065</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">FECHA:</td> <td style="padding: 2px; text-align: center;">2015 / 06 / 05</td> </tr> </table>		RADICACIÓN CORRESPONDENCIA DE SALIDA		No. Radicación: 065		FECHA:	2015 / 06 / 05
RADICACIÓN CORRESPONDENCIA DE SALIDA								
No. Radicación: 065								
FECHA:	2015 / 06 / 05							
<p>ASUNTO: Respuesta Radicado No. 216 del 12 de mayo de 2015</p>								
<p>Respetada Licenciada:</p>								
<p>Una vez revisada su solicitud me permito informarle que fue aprobada la implementación del proyecto de "Visibilización de esquemas del pensamiento matemático", adscrito a la línea de investigación del pensamiento científico de la Maestría de la en Informática Educativa de la Universidad de la Sabana, que aplicara a los estudiantes del Ciclo 1 de aulas diferenciales.</p>								
<p>Atentamente,</p>								
								
<p>Pablo Alejandro Salazar Restrepo Rector</p>								
<p><small>Daboré Maryury/Secretaría Administrativa</small></p>								
<p><small>SEDE A: Calle 20 D No. 86 G-51 Teléfono 4216751 - 4216752 SEDE B: Calle 25 B No. 83-14 Teléfono 4167725 SEDE C: Csw 47 No. 22 G - 15 Teléfono 2880266 - 2677380 E-mail: edvcarmen9@cedp.edu.co</small></p>								

Anexo F***Permiso Institucional IED Carlos Pizarro Leongómez***

ALCALDÍA MAYOR DE BOGOTÁ D.C.
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN
COLEGIO CARLOS PIZARRO LEONGÓMEZ IED
Licencia de Funcionamiento Resolución No.2517 de Junio 20 de 2007
NIT: 900167733-2
DANE: 111001104329




Bogotá D.C., 18 de junio de 2014.

Señores
UNIVERSIDAD DE LA SABANA
Bogotá

Cordial Saludo.

De manera atenta informo que la docente YINNY ESPERANZA RUIZ PEREZ identificada con cedula de ciudadanía No.52296111 de Bogotá, está autorizada por la rectoría para realizar la práctica de su maestría en informática educativa en esta institución educativa.

Atentamente.


NUBIA STELLA LANCHEROS ROLDAN
Rectora

Elaboro: Diana Paola Carizales

Calle 72 Sur N°. 100 A - 71 Teléfono 7234592/93/94
iedcarlospizarroleon@redp.edu.co

BOGOTÁ
HUMANANA

Anexo G

UNIVERSIDAD DE LA SABANA
Centro de Tecnologías para la Academia
Maestría en Informática Educativa



Universidad de
La Sabana

CONSENTIMIENTO INFORMADO

Yo, _____, identificado con la cédula de ciudadanía No. _____ de _____, en mi calidad de familiar o representante legal del estudiante menor de edad _____, identificado con el NUIP No. _____, autorizo que mi hijo(a) o representado(a) participe en las actividades desarrolladas dentro del marco del estudio "Visibilización del Pensamiento Matemático a través de un ambiente de aprendizaje presencial apoyado en objetos manipulativos virtuales con niños de ciclo 1 de los colegios Villemar El Carmen IED y IED Carlos Pizarro Leongómez" que se desarrolla por las investigadoras NANCY MORENO Psicóloga Profesional de apoyo del colegio Villemar El Carmen IED, identificada con la C.C. No. 52.348.561 de Bogotá y YINNY ESPERANZA RUIZ PEREZ docente del Colegio Carlos Pizarro Leongómez, identificada con C.C. No. 52.296.111 de Bogotá, para optar al título de MAGISTER EN INFORMÁTICA EDUCATIVA de la UNIVERSIDAD DE LA SABANA.

Así mismo, autorizo el uso de los datos derivados de la participación en el estudio para fines de investigación cuidando la identidad del (la) menor.

He sido informado por los investigadores de los objetivos del estudio a saber:

- Describir el proceso de estructuración del pensamiento matemático en estudiantes de primaria de aula diferencial del Colegio Villemar El Carmen I.E.D. y de aula regular del I.E.D Carlos Pizarro Leongómez, a través de un ambiente de aprendizaje mediado por objetos manipulativos virtuales.
• Diseñar un Ambiente de Aprendizaje Presencial apoyado en objetos manipulativos virtuales, orientado al aprendizaje de un concepto matemático y su aplicación a situaciones cotidianas.
• Implementar un ambiente de aprendizaje presencial mediado por Manipulativos Virtuales orientado al aprendizaje de un concepto matemático para ambas poblaciones.
• Comparar los esquemas de pensamiento matemático para ambas poblaciones objetivo.

Manifiesto que he sido informado sobre la confidencialidad de la información personal (fotos, videos o cualquier otra información personal) recolectada para este proyecto y de la participación anónima de mi hijo(a) o representado(a).

Estoy de acuerdo que mi hijo(a) o representado(a) participe en una o más entrevistas y actividades de aula que serán registradas electrónicamente durante la realización del proyecto. Entiendo que dichas entrevistas y material relacionado se mantendrá en completo anonimato, y que los resultados de este estudio pueden ser publicados en una revista académica o libro.

Investigadores
Nancy Moreno N. móvil []
Yinny Esperanza Ruiz móvil []

Cordialmente,
Firma: _____
Nombre: _____
C.C. No.: _____

Para cualquier inquietud adicional Contactarse con la Universidad de la Sabana al Centro de Tecnologías para la Academia campus del Puente del Común, Km. 7, Autopista Norte de Bogotá. Chía, Cundinamarca, Colombia. Contact Center: 861 5555 / 861 6666. Apartado: 53753, Bogotá.