EL DESARROLLO DE LA COMPETENCIA COMUNICATIVA EN MATEMÁTICAS A TRAVÉS DE PRÁCTICAS DE AULA

SANDRA PATRICIA VIDAL ASTUDILLO

MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

UNIVERSIDAD DE LA SABANA

CHÍA, 2016

EL DESARROLLO DE LA COMPETENCIA COMUNICATIVA EN MATEMÁTICAS A TRAVÉS DE PRÁCTICAS DE AULA

SANDRA PATRICIA VIDAL ASTUDILLO

Trabajo de grado para obtener el título de Magister en Pedagogía

Asesor: JOHN ALEXANDER ALBA VÁSQUEZ

COORDINADOR ACADÉMICO DE LA MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA

UNIVERSIDAD DE LA SABANA

MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

UNIVERSIDAD DE LA SABANA

CHÍA, 2016

Agradecimientos a:

Mis padres, Hernán y Elsy, por hacer de mí lo que soy; ellos con su ejemplo y su profundo amor me enseñaron a valorar las cosas más importantes de la vida.

Mis hermanos, Javier Mauricio y Viviana, mis compañeros de viaje, siempre dispuestos a colaborarme, apoyarme y alentarme.

Mi esposo Julio César por su amor, paciencia e incondicional apoyo.

Mi hijo Alejandro por ser mi inspiración.

Oscar, Rodrigo y Leydi por sus oportunos aportes.

Mery y Amanda por sus palabras reconfortantes.

Mi asesor John Alba, quien con su experiencia y conocimiento supo orientar cada paso e hizo de mí una mejor docente.

La Comunidad Villaamalista por su confianza y respaldo.

Mis estudiantes: los mejores maestros.

Tabla de Contenido

Índice de Tablas

Índice de Figuras

Resumen

Palabras clave: comunicación matemática, competencia comunicativa, lenguaje en el aula

La presente investigación tuvo como objetivo identificar los tipos de lenguaje median los procesos comunicativos en el aula de matemáticas y los cambios en estos durante la implementación de una estrategia dirigida al desarrollo de competencias comunicativas. Es una investigación cualitativa con alcance interpretativo- interventivo, la cual invita a reflexionar sobre el papel del docente de matemáticas en el desarrollo de la competencia comunicativa de sus estudiantes y de qué manera la transformación de sus prácticas pedagógicas permite que ellos interpreten, analicen, generalicen, argumenten, evalúen y propongan alternativas de solución a situaciones matemáticas contextualizadas.

Metodológicamente, se plantearon dos categorías; los procesos comunicativos de la docente y los procesos comunicativos del estudiante, entre pares y con la docente. Cada una de esas categorías se analizó considerando cinco subcategorías relacionadas con los tipos de lenguaje que se evidencian en el aula de matemáticas: natural, simbólico, gráfico, icónico y gestual. La propuesta de intervención se presenta describiendo lo ocurrido durante la implementación de las actividades y a partir de un proceso de reflexión, se mencionan los aciertos y dificultades encontrados en cada actividad realizada, así como las sugerencias que la docente investigadora hace con el propósito de mejorarlas.

En la investigación se observa la importancia de prestar atención a los procesos comunicativos en el aula, ya que estos median el aprendizaje. El docente debe ser consciente de las diferentes manifestaciones del lenguaje que se ponen en escena cada día como parte de su quehacer pedagógico y de las implicaciones que las elecciones a este respecto tienen en el aprendizaje de sus estudiantes.

Abstract

Key words: math communication, communicative competency, language

The objective of this research was to identify the types of language that influences communicative processes in the classroom of mathematics and the changes in them during the implementation of a strategy directed towards the development of communicative skills. It is a qualitative investigation with interpretation – intervention, which invites the teacher to reflect on their role in the development of the communicative competency of their students and how to change their pedagogical practices to permit the students to interpret, analyze, generalize, debate, evaluate and propose alternative solutions to contextualized mathematical situations.

Methodologically, two categories were tested; the communicative process of the teacher and the communicative processes of the student, between peers and with the teacher. Each one of these categories is analyzed considering five subcategories related to the type of language that is evidenced in the mathematics classroom: natural, symbolic, graphic, iconic, and gestural. The proposed intervention is presented mentioning the strengths and weaknesses of each completed activity as well as the recommendations of the teacher investigator.

In the investigation, the importance of paying attention to the communicative processes in the classroom is noted, as this influences the learning. The teacher must be conscious of the different manifestations of language that are put into play each day as part of their pedagogical tasks and of the implications that the selections they make to that respect have on the learning of the students.

El desarrollo de la competencia comunicativa en matemáticas a través de prácticas de aula

Una de las mayores preocupaciones de los docentes es la dificultad que tienen los estudiantes para comunicarse eficiente y asertivamente, lo que se evidencia en los bajos resultados académicos en las distintas áreas del conocimiento. Con base en lo anterior, a través de la investigación pedagógica, los maestros somos los llamados a cambiar el sistema educativo y mejorar la calidad de la educación desde nuestra labor en el aula.

Existen numerosos documentos e investigaciones que argumentan la importancia de la comunicación en el aula de matemáticas. Por ejemplo, Sfard, 2008; Lee, 2009; Fandiño, 2010 y Jiménez, 2014, quienes sugieren que las prácticas pedagógicas en esta área deben contribuir a que los estudiantes sean competentes para proponer alternativas de solución a situaciones contextualizadas, de manera argumentada y propositiva.

En línea con los anteriores planteamientos, el interés principal de la investigación que se expone a continuación se orienta hacia el diseño e implementación de prácticas de aula que sean eficientes tanto en el desarrollo de los conceptos matemáticos como en el fortalecimiento de la habilidad comunicativa de los estudiantes.

Planteamiento del Problema

Antecedentes

Pruebas externas.

Al analizar los resultados obtenidos por los estudiantes de grado quinto en las pruebas Saber 5° en los últimos cuatro años se observa que más del 60% de los estudiantes se encuentran en el nivel mínimo e insuficiente en el área de matemáticas, sin que haya habido cambios significativos en ese periodo de tiempo (Figura 1)

Tabla 1. Comparativo Anual Pruebas Saber 5 Matemáticas entre 2012 y 2015

Año	Número de Estudiantes Evaluados	Puntaje Promedio	Margen de Estimación	Intervalo de Confianza
2012	74	309	±14	(295 – 323)
2013	76	276	±14,3	(261,7-290,3)
2014	63	305	±14,3	(290,7-319,3)
2015	61	305	±11,8	(293,2-316,8)

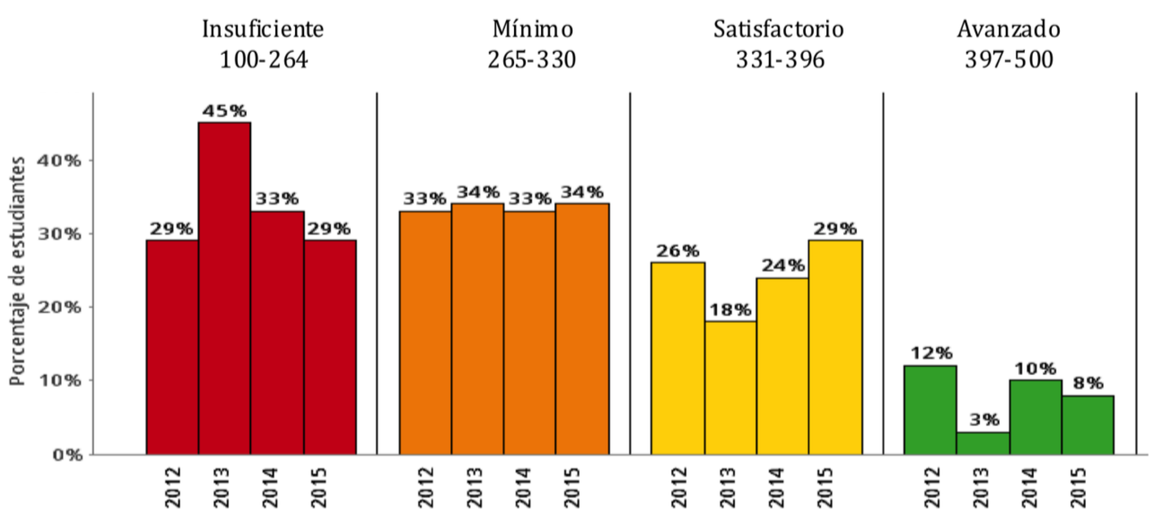


Figura 1. Comparación Niveles de Desempeño en Matemáticas Grado 5, del 2012 al 2015

Las competencias evaluadas son agrupadas por el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES) en tres partes: La primera es **el razonamiento**; relacionada con la capacidad de justificar estrategias, procedimientos y conclusiones, además de formular hipótesis, conjeturar, identificar y expresar patrones, reconocer tipos de razonamiento y evaluar cadenas de argumentos, la segunda es **la comunicación, representación y modelación;** que da cuenta de la capacidad para interpretar, expresar, relacionar y describir situaciones por medio de diferentes formas de lenguaje (pictórico, escrito, concreto, gráfico y algebraico) y la tercera, es **el planteamiento y resolución de problemas;** relacionada con la capacidad para resolver situaciones presentadas en diversos contextos, desarrollar, aplicar, justificar y generalizar estrategias, verificar respuestas y hacer aproximaciones.

Esta prueba además evalúa tres componentes en los cuales se reorganizan los cinco tipos de pensamientos matemáticos: **numérico-variacional**; hace referencia a todos los aspectos relacionados con el número; su significado, representación, sistemas de numeración, operaciones y propiedades, patrones, cambio, proporcionalidad, variación lineal e inversa y el concepto de función, **geométrico-métrico**; correspondiente a la construcción y manipulación de objetos en el espacio, sus relaciones y transformaciones, solución de problemas relacionados con la medición y las unidades de medida, así como el uso de los conceptos de perímetro, área y volumen, y **aleatorio**; el cual se relaciona con la lectura, interpretación, representación, descripción y análisis de información y eventos aleatorios, formulación de inferencias y el uso argumentado de las medidas de tendencia central y dispersión.

De otra parte, al revisar los resultados obtenidos por los estudiantes en estas pruebas en comparación con el promedio nacional y de la ciudad se encuentra que el colegio se ubica por debajo del promedio de Bogotá y se ha ido acercando al promedio nacional (Figura 2).

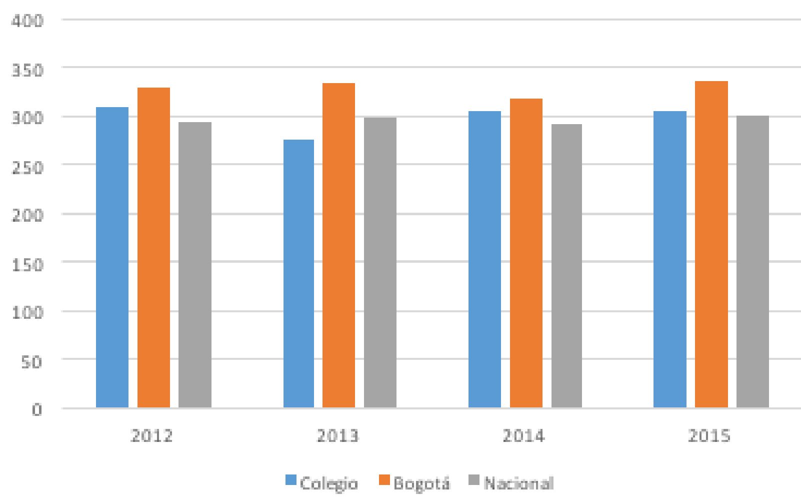


Figura 2. Comparación promedios en matemáticas del colegio, la ciudad, y la nación, del 2012 al 2015

Al hacer un análisis detallado de los resultados por competencia y por componente en el mismo periodo, se observa que en comparación de estos resultados con el conjunto de otras instituciones educativas del país que obtuvieron un promedio similar, en el mismo año, grado y área, no hay una competencia o componente que mantenga una tendencia a ser considerada como una fortaleza, por el contrario se mantienen en un nivel de desempeño similar o por debajo de los alcanzados por instituciones con rendimientos semejantes. La comparación de estos resultados con el conjunto de otras instituciones educativas del país que obtuvieron un promedio similar, en el mismo año, grado y área, se presentan en la tabla 2:

Tabla 2. Comparativo Anual de Fortalezas y Debilidades en Competencias y Componentes en Matemáticas Grado 5, del 2012 al 2015

	Competencia			**Componente**		
	Razonamiento	Comunicación	Resolución	Numérico variacional	Geométrico métrico	Aleatorio
2015	Fortaleza	Similar	Debilidad	Fortaleza	Similar	Debilidad
2014	Similar	Fortaleza	Fortaleza	Fortaleza	Debilidad	Fortaleza
2013	Similar	Similar	Similar	Similar	Similar	Similar
2012	Fortaleza	Debilidad	Fortaleza	Debilidad	Fortaleza	Similar

De igual forma al analizar los resultados obtenidos por los estudiantes del grado 5° en las pruebas de lenguaje en el mismo periodo, se encuentra que un porcentaje menor de estudiantes se ubican con desempeños en el mínimo e insuficiente, alrededor del 45% en los años 2012 a 2014, incrementándose al 60% el porcentaje de estudiantes en estos niveles en el 2015. También se observa una disminución del porcentaje de estudiantes en el nivel avanzado pasando de un 21% de estudiantes en el 2012 a un 9% de estudiantes en el nivel avanzado en el 2015 (Figura 3).

Tabla 3. Comparativo Anual Pruebas Saber 5 Lenguaje entre 2012 y 2015

Año	Número de Estudiantes Evaluados	Puntaje Promedio	Margen de Estimación	Intervalo de Confianza
2012	73	331	±14,1	(316,9 – 345,1)
2013	77	322	±12,5	(309,5-334,5)
2014	64	328	±17,2	(310,8-345,2)
2015	60	305	±12,7	(292,3-317,7)

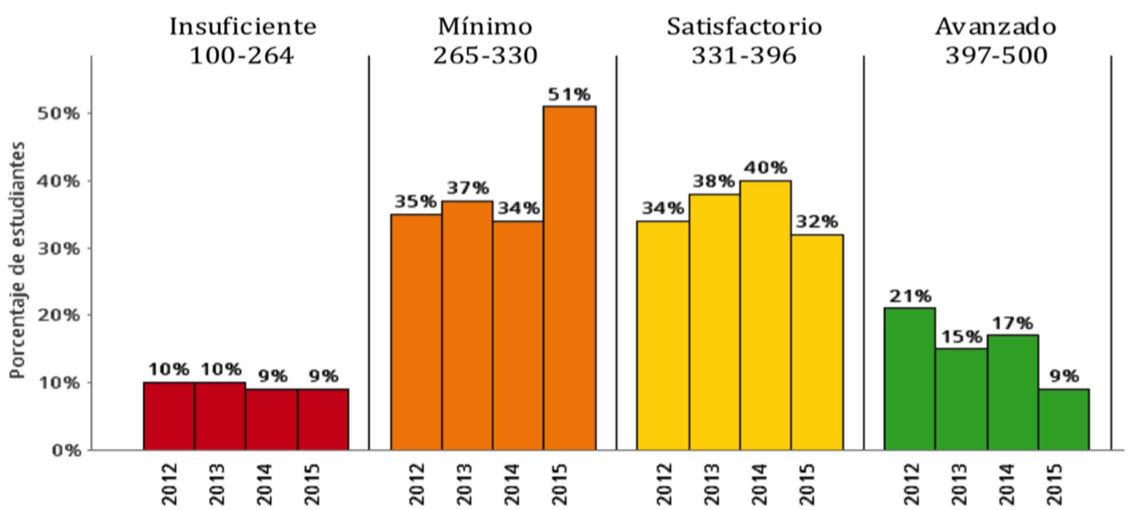


Figura 3. Comparación Niveles de Desempeño en Lenguaje Grado 5, del 2012 al 2015

La prueba Saber de lenguaje se basa en el reconocimiento de que existen diversas manifestaciones del lenguaje, pero que en cualquiera de ellas los principales procesos son la comprensión y la producción.

La prueba evalúa dos competencias: **Comunicativa-lectora**; que se fundamenta en la capacidad para interpretar diferentes tipos de texto dependiendo de su estructura, y la **comunicativa-escritora**; que evalúa el proceso de escritura del texto y la capacidad de asumir una postura frente a este, haciendo uso de variadas estrategias de pensamiento. Son tres los componentes que se evalúan en esta prueba; **semántico;** que se refiere al significado y al "qué se dice", el **sintáctico**; relacionado con la coherencia y al "cómo se dice" y el **pragmático**; referido al "para qué se dice".

En los resultados obtenidos por los estudiantes en estas pruebas en comparación con el promedio nacional y de la ciudad se encuentra que el colegio se ubica por debajo del promedio de Bogotá y por encima del promedio nacional (Figura 4).

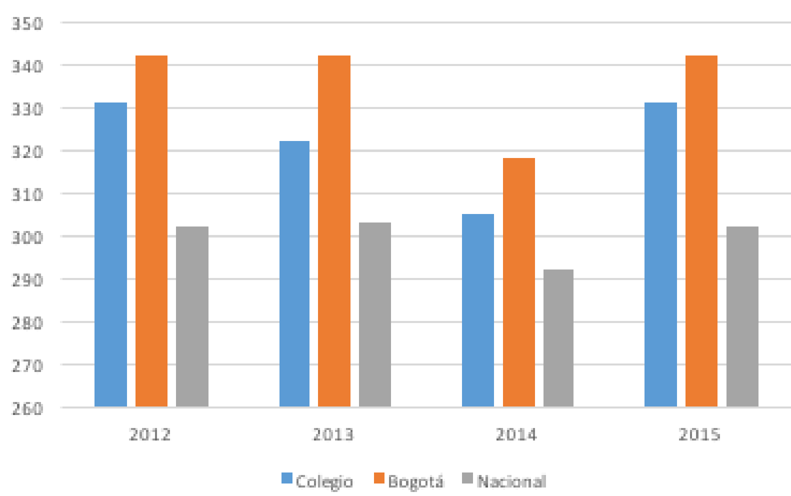


Figura 4. Comparación promedios en lenguaje del colegio, la ciudad, y la nación, del 2012 al 2015

La comparación de estos resultados con el conjunto de otras instituciones educativas del país que obtuvieron un promedio similar, en el mismo año, grado y área, se muestran en la tabla 4:

Tabla 4. Comparativo Anual de Competencias y Componentes en Lenguaje Grado 5, del 2012 al 2015.

	Competencia		**Componente**		
	Comunicativa lectora	Comunicativa escritora	Semántico	Sintáctico	Pragmático
2015	Fortaleza	Similar	Similar	Fortaleza	Debilidad
2014	Similar	Similar	Fortaleza	Debilidad	Debilidad
2013	Fortaleza	Debilidad	Fortaleza	Debilidad	Fortaleza
2012	Similar	Debilidad	Debilidad	Fortaleza	Debilidad

Del anterior análisis se concluye que los desempeños de los estudiantes de grado quinto de la institución en las pruebas de matemáticas y lenguaje son bajos y que un porcentaje considerable de los estudiantes no alcanza las competencias mínimas esperadas para su nivel. Aspecto que se ve reflejado en las dificultades académicas en los cursos subsiguientes de educación secundaria e invita a cuestionarse sobre la relación que existe entre las competencias evaluadas en ambas áreas.

Actividades institucionales de refuerzo y mejoramiento.

Conscientes de que existe una oportunidad de mejora en aspectos relacionados con el desarrollo de las competencias matemáticas y comunicativas de los estudiantes, se han venido adelantando algunas estrategias institucionales, que han permitido visibilizar fortalezas y debilidades en estos aspectos, aunque no se han aplicado con el rigor necesario para obtener resultados favorables. A continuación, se describen algunas de ellas:

A partir del año 2013 se implementó el Calendario Matemático en bachillerato, es una publicación que bajo el lema "Un problema para cada día y un día para cada problema", plantea ejercicios y situaciones problema para cada día entre semana, y para el fin de semana propone uno para resolver en familia; con estas actividades busca desarrollar las habilidades de los estudiantes frente a la resolución de problemas y generar disciplina de estudio. El Calendario Matemático tiene siete niveles de dificultad; en el caso de Villa Amalia se trabaja el segundo nivel en el ciclo 3. Sin embargo, su aplicación no es rigurosa; teniendo en cuenta que esta herramienta es nueva para los estudiantes de grado sexto, la asimilación de la metodología y la disciplina necesaria para desarrollarla toma tiempo y requiere del acompañamiento constante del docente. Adicionalmente la institución sólo aprueba determinada cantidad de recursos para el área. En el año 2015 no se aplicó durante el primer semestre por cambios administrativos y en el año 2016 se aprobaron cuatro calendarios por estudiante; uno para cada periodo escolar.

Como estrategia de mejoramiento académico en el año 2014 se aplicaron cinco cuestionarios de Martes de Prueba para los estudiantes de grado 5 y 6 evaluando las áreas de matemáticas, lenguaje, sociales, ciencias e inglés. Martes de Prueba es un sistema de evaluación permanente, que busca fortalecer el nivel académico de los estudiantes a partir de la retroalimentación de los resultados de cada prueba. Las preguntas están diseñadas acorde a los estándares básicos, los componentes y competencias de cada área. Al finalizar ese año se promediaron los resultados de las cinco pruebas aplicadas, arrojando como resultado que los estudiantes del grado 5, estuvieron ubicados en niveles así: 33% Bajo, 28% Básico, 18% Alto y 21% Superior, y los estudiantes de grado sexto estuvieron ubicados así: el 59% Bajo, 25% Básico, 13% Alto y sólo el 3% Superior. A pesar de los aportes de este proyecto, por cuestiones administrativas no se le dio continuidad.

Durante ese mismo año, el área de humanidades inició un proyecto de lectura, el cual consistía en que una vez a la semana, el docente aplicaba una lectura que incluyera conceptos y términos específicos de su asignatura, con el fin de mejorar la comprensión lectora en cada área. Los docentes de humanidades, desde su experiencia, afirman que los estudiantes tienen dificultad para interpretar enunciados en las diferentes áreas del conocimiento, lo que generalmente se traduce en bajos desempeños en las evaluaciones escritas. Infortunadamente el proyecto fue perdiendo los espacios académicos para su realización debido a dinámicas institucionales y terminó extinguiéndose antes de poder visualizar los resultados en las diferentes áreas.

A través del programa "Currículo para la excelencia académica y la formación integral", implementado por la Secretaría de Educación Distrital (SED), el área de matemáticas realizó ajustes al plan de estudios en el año 2015, con el fin de apoyar ese programa, el cual busca que los estudiantes desarrollen las habilidades del pensamiento a partir del modelo de Anderson y Krathwohl (2000), jerarquizadas como se muestran en la tabla 5.

Tabla 5. Habilidades del Pensamiento

Habilidades Del Pensamiento	
Comunica	Informa, manifiesta, advierte, revela, declara, oficia, expone, proclama
Crea	Genera, produce, diseña, construye, idea, elabora
Evalúa	Comprueba, revisa, formula, juzga, detecta, monitorea
Analiza	Diferencia, organiza, atribuye, compara, construye, estructura, integra
Aplica	Ejecuta, implementa, desempeña, usa, experimenta, prueba
Comprende	Interpreta, ejemplifica, clasifica, resume, infiere
Reconoce	Recuerda, lista, describe, recupera, denomina, localiza

Tomado del modelo de Anderson y Krathwolh (2000)

Estas habilidades están ligadas a los núcleos temáticos, etapas de desarrollo de los estudiantes, contexto institucional, proyectos transversales y evaluación. Específicamente, para el ciclo 3, los estándares básicos de competencias en matemáticas indican que, al terminar el grado séptimo, el estudiante debe estar en capacidad de resolver y formular problemas de acuerdo a las temáticas respectivas, para lograr este objetivo sugiere partir de situaciones de aprendizaje significativo y comprensivo de las matemáticas.

Justificación

El análisis de los antecedentes presentados anteriormente, invita a realizar una reflexión en relación con el rol que el docente de matemáticas tiene en el desarrollo de la competencia comunicativa de sus estudiantes y en qué forma la transformación de sus prácticas pedagógicas contribuyen a que los estudiantes interpreten, analicen, generalicen, argumenten, evalúen y propongan alternativas de solución a situaciones matemáticas contextualizadas.

En este sentido, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) en los lineamientos curriculares, refiere que todas las profesiones científicas y técnicas requieren personas que estén en capacidad de expresar ideas de diferentes maneras, comprender, interpretar, evaluar, demostrar, describir ideas y relacionarlas, también de hacer conjeturas, formular preguntas, reunir y evaluar información, así como de argumentar persuasiva y convincentemente. Además, reconoce que diversos estudios "han identificado la comunicación como uno de los procesos más importantes para aprender matemáticas y para resolver problemas." (p. 74).

Así mismo, Sfard (2009) afirma que “La necesidad de comunicación, entendida como cualquier intento de suscitar determinadas acciones por parte de otros, es la primera fuerza conductora que hay tras todos los procesos cognitivos humanos” (p.71), dejando claro que el aprendizaje depende de la comunicación. Ella, además indica que “La comunicación se debe ver no como una mera ayuda al pensamiento, sino como equivalente al pensamiento mismo” (p. 39).

De igual modo, Fandiño (2010) señala que: “Toda comunicación es eficaz si alcanza su objetivo en cualquier campo, incluso en matemática” (p.159). E indica que el aprendizaje matemático es evidente mediante la argumentación, validación, justificación o demostración de ideas, por medio de figuras, dibujos, esquemas, gestos u otras formas de comunicación.

Por otra parte, como lo mencionan Ortega y Ortega (2002), en secundaria los estudiantes tienen un gran desconocimiento sobre el manejo y el uso adecuado del lenguaje matemático, lo que dificulta sus procesos académicos al iniciar una carrera universitaria.

A propósito de la habilidad comunicativa, Lee (2009) sugiere que “la razón principal por la que el incremento del discurso es importante porque aumenta el potencial de los alumnos para aprender matemáticas y el de los profesores para ayudarles a aprender”, ella define *el discurso* como “toda la gama del lenguaje que se pueda introducir en una clase” (p. 17)

En consecuencia, se hace evidente la importancia de buscar transformaciones en la práctica docente tendientes a fortalecer los procesos comunicativos que se llevan a cabo en el aula de matemáticas, a buscar estrategias que fomenten el uso apropiado del lenguaje matemático por parte de sus estudiantes, a comprender y analizar el tipo de lenguaje que el docente utiliza en el desarrollo de sus clases, a analizar el uso y apropiación del lenguaje matemático por parte de sus estudiantes y la forma en que lo utilizan para comunicar ideas en el contexto del aula de clase y en otros contextos.

Por lo anterior, se plantean los siguientes interrogantes y objetivos que orientan este trabajo de investigación.

Preguntas de Investigación

Pregunta general.

¿Qué tipos de lenguaje median los procesos comunicativos en el aula de matemáticas y cómo estos se transforman durante la implementación de una estrategia dirigida al desarrollo de competencias comunicativas?

Preguntas específicas.

- ¿Qué tipo de lenguaje utiliza la docente- investigadora para comunicar los conceptos matemáticos en el aula y qué cambios se pueden identificar en esté luego de un proceso de reflexión sobre su práctica?
- ¿Qué tipo de lenguaje utilizan los estudiantes para comunicarse al interior de la clase de matemáticas y qué cambios se evidencian en la implementación de una estrategia dirigida a la apropiación de diferentes tipos de lenguaje matemático?

Objetivos

Objetivo general.

Identificar los tipos de lenguaje median los procesos comunicativos en el aula de matemáticas y los cambios en estos durante la implementación de una estrategia dirigida al desarrollo de competencias comunicativas.

Objetivos específicos.

- Identificar las formas de lenguaje utilizadas por la docente- investigadora para comunicar conceptos matemáticos en el aula y los cambios que generan en estas luego de un proceso de reflexión sobre su práctica.
- Identificar los tipos de lenguaje que utilizan los estudiantes para comunicarse al interior de la clase de matemáticas y los cambios en estos durante la implementación de una estrategia dirigida a la apropiación de diferentes tipos de lenguaje.
- Identificar los aciertos y dificultades didácticas y pedagógicas que emergen durante la implementación de la estrategia.

Marco Teórico

Antecedentes De Investigación

Investigaciones asociadas a la competencia comunicativa.

El desarrollo de la competencia comunicativa en matemáticas, está asociada a las estrategias que utilice el docente para tal fin.

Jiménez Márquez, G., Jiménez Márquez, J. y Jiménez Márquez, E. (2014) sugieren en las conclusiones de su investigación que al aplicar una estrategia basada en la apropiación del lenguaje simbólico y los códigos de representación matemática favorece el desarrollo de la competencia comunicativa y la representación, en el área de matemáticas. Esta competencia también se desarrolla al relacionarse con experiencias, conocimientos y contextos de los estudiantes.

En el mismo sentido Lee (2010) afirma que en la medida en que se utilicen varios tipos de lenguaje en una clase, los estudiantes tendrán mayor oportunidad para aprender matemáticas, así como también aumenta la posibilidad de los maestros para ayudarles a comprender.

Por su parte Bezmalinovic y Piquet (2015) concluyen que plantear estrategias comunicativas donde los estudiantes deban describir, explicar, reconocer y socializar procedimientos, correctos o no, sustentar ideas y trabajar entre pares, es fundamental para promover la argumentación en la clase de matemáticas.

Asimismo, Cabrera (2003) asegura que la actitud de los estudiantes, sus intereses y motivaciones están directamente ligados a la comunicación que utilice el docente. También, asevera que, aunque en general los docentes saben que la comunicación que favorece mayor participación de sus estudiantes es aquella en la que el docente interactúa con ellos realizando retroalimentación constante, prefieren la comunicación jerárquica que además de permitir el aprendizaje propicia otras conductas comportamentales.

Investigaciones relacionadas con la enseñanza de los números enteros.

Bell (1986) muestra cómo la enseñanza por diagnóstico permite evidenciar errores conceptuales de los estudiantes y ayudarles a superarlos a través de la discusión-conflicto. Durante la investigación sobresale la dificultad para operar cantidades dependiendo de cuál sea el término desconocido, refiriéndose específicamente a la adición de números enteros. El investigador hace una clasificación de los obstáculos conceptuales indicando que se presentan dificultades para comprender el orden de los números enteros, otras asociadas con el cero, algunas más con resolver problemas donde el uso de palabras como "más" y "sube" pueden resultar engañosas y finalmente, aquellas donde debe combinar movimientos como en transacciones bancarias o similares, especialmente cuando el valor desconocido es el de partida.

Bruno (1997) aplicó una metodología de investigación de aula en la que se contrastan dos métodos de enseñanza de problemas aditivos con números negativos: el "método redactar" en el que los estudiantes aprenden a diferenciar la estructura de variados tipos de problemas, luego redactan sus propios problemas y los intercambian con sus compañeros para resolverlos, y el "método resolver"; en el que los estudiantes practican la resolución de los problemas en forma progresiva aumentando gradualmente la dificultad de estos. La eficacia de estas dos metodologías se contrastó con los resultados obtenidos por un grupo de estudiantes que resolvieron problemas de un libro de texto. Se concluyó que tanto el método redactar como el método resolver, tuvieron mayor efectividad que el método tradicional de resolver cierta cantidad de ejercicios rutinaria al finalizar la presentación de un concepto en particular. No obstante, la investigación no es concluyente en cuanto a la efectividad del método redactar frente a otras metodologías; sin embargo, sugiere que esta puede mostrar mejores resultados si se plantea a largo plazo, por lo menos durante un año escolar y no sólo durante un periodo, como se hizo para la investigación.

Castillo (2014) realizó una investigación en la que enseñaba la estructura aditiva de los números enteros utilizando objetos físicos como mediadores en el proceso de aprendizaje, y concluye que esta estrategia les permitió a los estudiantes asimilar con mayor rapidez y eficacia las temáticas tratadas.

Investigaciones asociadas a los obstáculos de aprendizaje de los números enteros.

Desde diversas investigaciones se han identificados obstáculos asociados con la comprensión de los objetos y nociones matemáticas. De acuerdo con D´Amore (2005) dichos obstáculos pueden ser de naturaleza epistemológica, relacionadas con la naturaleza propia del objeto, didáctica relacionados con las acciones y decisiones tomadas por el profesor en el aula o de naturaleza ontogenética, relacionados con las etapas de desarrollo cognitivo del sujeto que aprende.

La investigación titulada "La enseñanza de los números negativos: aportaciones de una investigación", realizada por Alicia Bruno (1997), con estudiantes de entre 12 y 13 años, tenía como eje central la enseñanza de los números negativos a partir de una perspectiva unitaria, es decir, considerando que existe un hilo conductor que unifica y homogeniza los conjuntos numéricos. Esta investigación se centró en tres dimensiones: abstracta, de recta y contextual. La primera hace referencia a la estructura matemática y la escritura de los números, la segunda a la representación numérica en la recta real y la tercera a las utilidades y uso de los números. En las conclusiones de la investigación se indica que algunas de las dificultades que existen en la enseñanza de los números negativos son consecuencia del conocimiento previo de los números positivos, también se evidencia la dificultad para resolver problemas de cambio especialmente cuando la cantidad inicial es la desconocida y finalmente, como recomendación, sugiere apoyarse en la recta real para relacionar contextos como “carretera, nivel del mar o ascensor”.

En este mismo sentido, Morales (2014) evidencia en su investigación que algunos errores que cometen los estudiantes al resolver problemas se relacionan con la dificultad para expresar en lenguaje matemático una situación presentada en lenguaje natural.

Cid (2003), realiza una compilación de investigaciones y teorías sobre la enseñanza, dificultades de aprendizaje y errores de los alumnos e implicaciones didácticas de la epistemología del número negativo. En su escrito destaca que algunos autores agrupan a los estudiantes en niveles de acuerdo a la interpretación que ellos hagan del número entero como cantidad y su representación en la recta numérica, indicando de esta manera que existen grados de asimilación del mismo concepto. Dentro de los obstáculos asociados a la noción de número entero, la autora incluye la dificultad para operar cantidades negativas o darle sentido a una cantidad negativa; ella explica que, aunque un estudiante pueda operar cantidades negativas es posible que no logre comprender su significado. Otra dificultad se encuentra en la unificación de la recta real para incluir los números negativos; para muchos estudiantes es difícil comprender que existe algo menor que la nada. Otro inconveniente se encuentra al momento de hacer la distinción entre número, magnitud y cantidad.

Investigaciones asociadas a las dificultades de aprendizaje del perímetro y área de los polígonos.

Götte, Mántica y Maso (2006) afirman que en su investigación se evidencia que los estudiantes tienden a considerar que los polígonos tienen áreas enteras, al igual que sus dimensiones. Además, declaran que aunque ellos pueden cubrir una superficie con diferentes unidades de medida, se les dificulta seleccionar la más adecuada. Por otra parte, evidencian que es común que los estudiantes hagan relaciones entre el perímetro y el área de un polígono, haciendo afirmaciones como que si dos figuras tienen el mismo perímetro, entonces deben tener la misma área, o que a mayor área, mayor perímetro. Los investigadores también concluyen que los estudiantes tienen dificultad para hacer figuras de determinada área si no cuentan con papel cuadriculado para tal fin.

Por su parte, Domènech (2014) halló que es muy frecuente la confusión entre perímetro y superficie, perímetro y área, el uso de las fórmulas para hallar perímetros y áreas, además de ser frecuente establecer relaciones de proporcionalidad directa entre el área y el perímetro de figuras geométricas distintas.

D'Amore y Fandiño Pinilla (2007). Sugieren que, para evitar los obstáculos asociados a las relaciones entre área y perímetro de polígonos, el docente debe utilizar figuras cóncavas y convexas, exponer explícitamente las relaciones que se puedan hallar entre perímetro y área de la misma figura y evitar el uso exclusivo de figuras estandarizadas.

Referentes Teóricos

Las matemáticas y su enseñanza en el aula.

Definir lo que es la matemática o lo que son las matemáticas, es algo que resulta muy complejo, incluso para quienes la han estudiado profundamente. Sin embargo, la concepción que tenga el docente de las matemáticas es esencial en el proceso de enseñanza – aprendizaje. La Real Academia de la Lengua (RAE) define la matemática como la ciencia deductiva que estudia los objetos abstractos y sus relaciones, partiendo de axiomas y razonamientos lógicos. Además, Quesada (1991) argumenta que las matemáticas no son un lenguaje, pero sí cuentan con su propio lenguaje, es decir, tiene sus propios símbolos; *vocabulario,* una determinada manera de combinarlos; *sintaxis* y secuencias de estos símbolos; *alcance semántico.* Este lenguaje no dista de la forma natural en que nos expresamos. A partir de la transposición del conocimiento matemático que hacemos, de nuestro lenguaje al lenguaje matemático, y viceversa, es que podemos resolver situaciones problema en diversos contextos.

En los procesos matemáticos el pensamiento, como actividad de la mente, está relacionado con la capacidad de razonar, sistematizar, contextualizar y comunicar. Para Sfard (2009) el pensamiento y comunicación están íntimamente relacionados, tanto así que para la autora "pensar es un caso especial de la actividad comunicativa. La actividad de una persona cuando piensa se puede ver como una actividad de comunicación con ella misma" (p. 67). De igual forma, para Perkins (2003) el pensamiento es básicamente invisible, pero es la acción de comunicación la que permite visibilizar lo que una persona está pensando. En el caso de la matemática esta comunicación esta permeada por el uso de diferentes recursos (lenguajes) que permiten entablar un diálogo con otros para expresar la ideas.

De igual forma, la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) (2004), establece que:

> *La competencia matemática se refiere a la capacidad del alumno para razonar, analizar y comunicar operaciones matemáticas. Es, por lo tanto, un concepto que excede al mero*

conocimiento de la terminología y las operaciones matemáticas, e implica la capacidad de utilizar el razonamiento matemático en la solución de problemas de la vida cotidiana (p.12).

Al respecto, Rico (2006) aclara en el análisis que hace sobre las pruebas del Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes (PISA), que “saber hacer uso de las matemáticas no se refiere exclusivamente a resolver problemas matemáticos, sino también a comunicar, relacionarse con, valorar e incluso, apreciar y disfrutar con las matemáticas” (p.48). Además, afirma que cuando el estudiante muestra ser competente matemáticamente, ha puesto en práctica una serie de procesos que le han permitido resolver un problema, entre ellos el comunicativo.

PISA considera que la educación debe centrarse en desarrollar algunas *competencias generales* específicas, las cuales determinan la manera en que responderán los estudiantes al hacer matemáticas de acuerdo a la orientación de la formación. A continuación, en la tabla 6, se presentan las competencias elegidas por este programa para ser evaluadas y lo que se evalúa en cada una de ellas.

Tabla 6. Competencias Evaluadas por PISA

Competencia	Lo que se evalúa
Pensar y razonar	▪ Responder y plantear cuestiones propias de las matemáticas. ▪ Distinguir entre diferentes tipos de enunciado ▪ Utilizar los conceptos matemáticos.
Argumentar	▪ Razonar matemáticamente, encadenar, crear y expresar argumentos matemáticos.
Comunicar	▪ Expresar contenido matemático y entender enunciados de esta área, de forma oral y escrita.
Modelar	▪ Estructurar, dirigir y controlar el proceso de modelización de una situación. ▪ Interpretar modelos matemáticos a partir de la reflexión, el análisis y la crítica. ▪ Comunicar acerca de un modelo, sus resultados y limitaciones.

Competencia	Lo que se evalúa
Plantear y resolver problemas	▪ Plantear, formular y resolver problemas matemáticos aplicando diversas estrategias.
Representar	▪ Decodificar, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representación de objetos matemáticos y situaciones, seleccionado y relacionando la más adecuada dependiendo del propósito de la situación.
Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones	▪ Realizar traducciones entre el lenguaje natural y el simbólico-formal, decodificándolo e interpretándolo. ▪ Comprender enunciados y resolver expresiones que contengan símbolos, fórmulas, variables, ecuaciones y cálculos.
Uso de herramientas y recursos	▪ Utilizar recursos y herramientas familiares en contextos, modos y situaciones distintas al uso con el que fueron presentados.

Por otra parte, el MEN (1998) organiza el aprendizaje matemático en cinco *procesos generales*, no excluyentes, propios de la actividad matemática así: razonamiento, resolución y planteamiento de problemas, comunicación, modelación y elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. En la tabla 7 se ilustran cada uno de ellos.

Tabla 7. Procesos Generales de la Actividad Matemática según el MEN

Proceso	Se refiere a
Razonamiento	▪ Argumentar y justificar los procesos que se siguen y las estrategias que se utilizan para llegar a un resultado. ▪ Hipotetizar, conjeturar, predecir, contradecir y relacionar. ▪ Expresar patrones matemáticamente
Resolución y Planteamiento de Problemas	▪ Formulación de problemas en diversos contextos. ▪ Desarrollo, uso y generalización de diversas estrategias para resolver problemas. ▪ Verificación, interpretación y generalización de soluciones.

Proceso	Se refiere a
Comunicación	▪ Observar, conjeturar, preguntar. ▪ Argumentar persuasiva y convincentemente. ▪ Interpretar, construir, relacionar y evaluar diversas representaciones de un objeto o idea. ▪ Expresar ideas oralmente, por escrito o por medio de representaciones gráficas.
Modelación	▪ Decidir y actuar, realizando predicciones frente a un modelo. ▪ Construir modelos, realizando el proceso desde la situación problema hasta la definición de dicho modelo.
Elaboración, Comparación y Ejercitación de Procedimientos	▪ Hacer cálculos mentales y con calculadora. ▪ Seguir instrucciones. ▪ Medir longitudes, áreas, volúmenes y otras magnitudes.

Otra perspectiva sobre lo que debe desarrollar un estudiante para ser competente matemáticamente, la ofrece Fandiño (2010). De acuerdo a ella, en matemáticas no es suficiente con construir el concepto, es necesario saber usarlo; sólo de esta manera el estudiante podrá dar cuenta de un aprendizaje matemático exitoso. Esta afirmación se relaciona con el hecho de que en ocasiones un estudiante puede realizar un algoritmo correctamente, aunque carezca de sentido para él o, por el contrario, que comprenda un concepto, pero no pueda usarlo.

Fandiño establece cinco tipos de aprendizaje diferentes en matemáticas, que pueden superponerse: aprendizaje conceptual, algorítmico, de estrategias, comunicativo y de gestión de las representaciones semióticas. En la tabla 8 se resumen cada uno de ellos.

Tabla 8. Tipologías del aprendizaje de la matemática, según Fandiño (2010)

Aprendizaje	Se refiere a
Conceptual	▪ Conceptos propios de la matemática ▪ Registros semióticos
Algorítmico	▪ Comprensión, uso y deducción de algoritmos

Estratégico	▪ Resolver problemas ▪ Elegir las acciones frente a una situación problema
Comunicativo	▪ Capacidad de expresar ideas matemáticas ▪ Uso de diversos tipos de lenguaje (natural, simbólico, gráfico, icónico, gestual, etc.…) ▪ Elección adecuada del tipo de lenguaje ▪ Organización de los argumentos ▪ Consideración de los argumentos de los demás
(Y gestión) de las representaciones semióticas	▪ Uso de diversas representaciones semióticas

De lo anterior se infiere que sin importar las diferentes concepciones sobre la naturaleza de las matemáticas o sobre la enseñanza o aprendizaje de estas, un aspecto fundamental qué emerge en cada uno es la comunicación de las ideas matemáticas.

Competencia comunicativa en matemáticas.

El lenguaje es la forma en que nos comunicamos y una herramienta que usamos para pensar. La comunicación es un proceso mediante el cual hay un intercambio de información en el cual intervienen dos o más personas, se encuentra presente en todas nuestras rutinas cotidianas y es parte esencial de cualquier proceso de enseñanza aprendizaje. Especialmente en este, debe procurarse que la comunicación sea efectiva, es decir que, el emisor exprese con claridad y coherencia su pensamiento de tal manera que el receptor comprenda el mensaje: “La medida en que cada hablante tienen éxito en su comunicación, lo que se mide a través de la eficacia del mensaje, se denomina competencia comunicativa” (Dore, 1986, citado por Owens, 2003).

El MEN (2003), en los estándares básicos de competencias en matemáticas refiere que “La adquisición y dominio de los lenguajes propios de las matemáticas ha de ser un proceso… que posibilite y fomente la discusión frecuente y explícita sobre situaciones, sentidos, conceptos y simbolizaciones, para tomar conciencia de las conexiones entre ellos …” (p.54).

Además, considera la comunicación como proceso general en el aprendizaje de las matemáticas, permite establecer relaciones entre las diversas representaciones de un objeto matemático, facilitando su asimilación y aplicación. El MEN, en los Lineamientos Curriculares, además de exponer lo que se debe desarrollar en este proceso da algunas directrices sobre la manera en que este se puede abordar en las clases. Indica que la labor de los estudiantes es complementada por el maestro, por lo cual él debe realizar una adecuada orientación a partir de la escucha con el fin de clarificar las ideas que los estudiantes exponen. De esta manera sugiere que las propuestas curriculares expliciten en las estrategias de enseñanza y evaluación la oportunidad de que los estudiantes comuniquen sus ideas matemáticas y se comuniquen matemáticamente. Esto es posible en la medida en que el ambiente de la clase favorezca la discusión de ideas, motive la pregunta y propicie la lectura, interpretación, argumentación de situaciones en contextos matemáticos, además de tener presente que la comunicación matemática puede ocurrir de manera individual, en pequeños grupos o en la totalidad de la clase y se puede evidenciar a través de gráficos, palabras, representaciones físicas o tablas.

Es por estas razones que el MEN afirma que en las prácticas educativas el proceso comunicativo es fundamental para motivar a los estudiantes, presentar o reforzar la información, evaluar los aprendizajes y, más allá de esos aspectos, lograr la asimilación de los conceptos matemáticos de lo cual el estudiante da cuenta a través de la clara argumentación de sus apreciaciones, de igual manera, el docente debe estar en capacidad de advertir en qué medida fue comprendido su mensaje.

Por otra parte, las competencias evaluadas en las pruebas PISA se clasifican en seis niveles dependiendo del dominio en la ejecución de tareas por parte de los estudiantes, siendo el primer nivel el más básico donde ellos realizan las acciones obvias esperadas hasta el sexto nivel en el cual ellos comunican con claridad sus acciones y reflexiones con relación a sus procedimientos, argumentos y adaptaciones.

La comunicación en el aula de matemáticas se da desde diferentes tipos de lenguaje, los cuales se relacionan entre sí profundamente y no son excluyentes. Fandiño (2010) señala algunos tipos de lenguaje que se han agrupado de la siguiente manera, para efectos de la investigación:

Lenguaje natural: Hace referencia al lenguaje que se utiliza cotidianamente para comunicarse con el entorno. Tiene un gran significado ya que no sólo transmite información, sino que además comunica emociones y estados de ánimo. Las metáforas, ironías y demás figuras literarias enriquecen las posibilidades de comunicación, así como los modismos pueden ser utilizados en algunos momentos para motivar o contextualizar una idea, pero no en la formalización de un concepto.

Lenguaje simbólico- matemático: Es el conjunto de signos y símbolos que, combinados de manera lógica y acorde a las reglas de esta ciencia, permiten traducir expresiones del lenguaje natural para darles solución en el campo de las matemáticas, pero con aplicación en un contexto real.

Lenguaje gráfico: son las representaciones por medio de tablas, gráficas estadísticas o de funciones, de situaciones matemáticas o cotidianas, que además brindan suficiente información sobre ellas. En este lenguaje se encuentran las representaciones que requieren el uso de la recta numérica, el plano cartesiano, las tortas estadísticas, los diagramas de barra, entre otras.

Lenguaje icónico: Sirve para representar contenidos semánticos o conceptuales utilizando símbolos básicos y también para representar una situación a través de imágenes. Resulta ser muy valioso cuando los estudiantes deben resolver un cuestionamiento y hacen uso de sus conocimientos y creatividad a través de la composición de un dibujo donde plasman su percepción sobre la situación planteada. En este lenguaje también se incluyen los esquemas que para efectos de la investigación se definen como las representaciones por medio de dibujos o símbolos de situaciones matemáticas.

Lenguaje gestual: No toda la información que se transmite se hace de manera consciente y voluntaria. La postura del cuerpo, la mirada, el movimiento de las manos, las muecas y la presentación personal, entre otras, son indicadores de la motivación, la actitud e incluso de la comprensión de la explicación de la clase, aunque también es frecuentemente usado por el docente para llamar la atención de los estudiantes, corregir o validar una respuesta e ilustrar ideas. En ocasiones las personas utilizan movimientos con sus manos para indicar una idea que se les dificulta transmitir y los gestos que utilizan permiten una recepción adecuada del mensaje.

Además de los tipos de lenguaje considerados, también se debe tener en cuenta que la comunicación puede darse a través de la lectura, la escritura y la oralidad, entonces evaluar si esta es eficiente requiere de comprender que, también existen varios componentes en la comunicación matemática: el manejo del lenguaje propio de las matemáticas, la claridad, pertinencia, presentación, organización y argumentación de las ideas, la capacidad de escucha de los argumentos del otro, la elección del tipo de lenguaje y otros factores asociados dependiendo de las características propias del aula y del concepto a desarrollar.

Para Sfard (2009) "…muchas materias escolares, las matemáticas entre ellas, se aprenden mejor de manera interactiva, mediante la conversación con otros" (p. 111). Esta conversación requiere para su desarrollo del uso adecuado de lenguajes propios de la actividad matemática de situaciones que propicien su uso en el contexto escolar. Sobre la importancia de la comunicación en el aula, ella además refiere que "… al ubicar la comunicación en el corazón de la educación matemática es probable que cambie no sólo la manera como enseñamos sino también la manera en que pensamos sobre el aprendizaje y sobre lo que se ha aprendido" (p.39) y luego enfatiza en que "…el lente comunicacional influye tanto nuestra comprensión de lo que ocurre cuando los niños aprenden, como nuestras ideas sobre qué se puede hacer para ayudar a los estudiantes en ese esfuerzo"(p. 70). Es por esto que el docente debe prestar especial anterior al desarrollo comunicativo en su aula, revisar su discurso y la forma en que se comunica con sus alumnos a la vez que observa la interacción comunicativa de sus estudiantes.

Objetos matemáticos trabajados en la investigación.

Durante la fase de intervención descrita en el trabajo se abordaron como temáticas centrales los conceptos de número entero, sus operaciones y propiedades y de cuadrilátero, sus tipologías y características de perímetro y área, por lo anterior se hace necesario presentar un marco conceptual que permitan enmarcar desde que concepciones se abordó la enseñanza de dichos objetos y nociones.

Se debe aclarar que la docente hace una reconstrucción de estos objetos a partir de la consulta en los textos. *Geometría*, de Clemens, O'Daffer y Cooney (1989) e *Introducción al algebra*, de Clemens, O'Daffer y Charles (1998).

Los números enteros, sus operaciones y propiedades.

Históricamente los números enteros surgen de la necesidad de resolver situaciones que no tienen solución dentro del conjunto de los números naturales, específicamente en la sustracción cuando el minuendo es menor que el sustraendo, por ejemplo 5 – 8. Pero el uso de los negativos está asociado a los balances contables para representar las deudas; inicialmente se usó la tinta roja para indicar estas cantidades y posteriormente se acordó el uso del signo –.

Matemáticamente los números enteros lo denotamos $\boldsymbol{Z}$, este conjunto numérico junto con la adición y la multiplicación forman una estructura algebraica llamada anillo, se expresa así ($\boldsymbol{Z, +, x}$), eso significa que cumple algunas propiedades que se explican detalladamente más adelante.

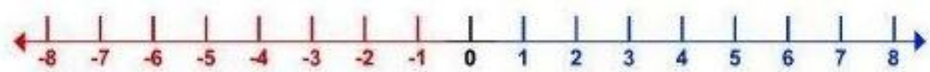
Un número real es un entero si $x = 0, x \in N$ v $-x \in N$. Es decir, que el conjunto de los números enteros está conformado por el cero, los números naturales y sus opuestos, por lo tanto, no tiene cota inferior ni superior, en otras palabras, no tienen principio ni fin.

$$Z = \{\ldots -8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots\}$$

Formalmente la construcción de los números negativos se hace a partir de la sustracción; un entero negativo es la diferencia de dos números naturales, donde el minuendo es menor que el sustraendo. Por ejemplo: $-3 = 5 - 8$; se asocia el -3 con el par ordenado $(5, 8)$, sin embargo, existen infinitos pares ordenados que pueden ser asociados al ***-3; (4,7), (3, 6), (7, 10)*** … de este hecho surge la relación de equivalencia representada con el símbolo **~**.

Como: ***a – b = c – d*** es equivale a ***a + d = b + c,*** donde ***a***, ***b***, ***c***, ***d*** $\in$ ***N*** se establece la relación de equivalencia definida: ***(a,b)* ~ *(c,d)*** si y sólo si ***a + d = b + c***. El conjunto de todos los pares relacionados con (***a***,***b***) se llaman clase de equivalencia y se designa [***a***,***b***]. En general la construcción de los números enteros negativos se establece como [***1, n+1***] = ***-n***, donde **n∈N**.

La organización de los números enteros se relaciona con la ubicación de estos en la recta real; se ubican en esta de menor a mayor, de izquierda a derecha.



Un número es positivo si es mayor que cero y negativo si es menor que cero: ***x* > *0*** significa que ***x*** es positivo, y ***x < 0*** significa que ***x*** es negativo, y un número es mayor que otro si la diferencia del primero con el segundo es mayor que cero, así:

Sean, ***a* ^ *b*** $\in$ ***Z***, entonces ***a* > *b*** si ***a - b* > *0***.

Dados dos números enteros ***a*** y ***b*** se cumple una de las tres afirmaciones (Tricotomía)

a* > *b; (***a*** es mayor que ***b***), ***a < b*** (***a*** es menor que ***b***) v ***a = b*** (***a*** es igual a ***b***).

Además, los números enteros cumplen tres propiedades del orden:

Un número entero es igual a sí mismo (Propiedad reflexiva)

Sea ***a*** $\in$ ***Z***, entonces ***a*** = ***a***

Si un número entero es menor o igual a otro y, a su vez, el segundo es menor o igual que el primero, entonces ambos números son el mismo. (Propiedad anti simétrica)

Sean ***a* ^ *b*** $\in$ ***Z***, entonces ***a* ≤ *b* ^ *b* ≤ *a***, entonces ***a = b***.

Si un número entero es menor que otro, y este a su vez es menor que un tercero, el primero es menor que el tercero (Propiedad transitiva)

Sean $a, b \wedge c \in Z$, entonces $a < b \wedge b < c$, entonces $a < c$.

Valor absoluto.

El valor absoluto de un número entero se define como la distancia que hay de ese número a cero, en la recta real.

$|a| = a$ si $a > 0$, $-a$ si $a < 0$ v 0 *si* $a = 0$.

El valor absoluto de un número entero es igual al valor absoluto de su opuesto

$|a| = |-a|$

El valor absoluto de la suma de dos números es menor o igual que la suma de los valores absolutos

$|a + b| \leq |a| + |b|$

Adición en los enteros.

La suma de dos números enteros del mismo signo se calcula sumando sus valores absolutos con el mismo signo. La suma de dos números enteros de signos opuestos se calcula restando sus valores absolutos con el signo del sumando de mayor valor absoluto.

La adición de números enteros cumple las siguientes propiedades:

Clausurativa: La suma de dos números enteros es un número entero. (El conjunto Z es cerrado para la adición)

Sean $a \wedge b \in Z$, entonces $a + b = c$, $c \in Z$.

Conmutativa: La suma de dos enteros es igual sin importar el orden de los sumandos.

Sean $a \wedge b \in Z$, entonces $a + b = b + a$

Asociativa: Al tener más de dos sumandos, es posible agruparlos de diferente manera, sin que se altere la suma.

Sean $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{Z}$, entonces $\boldsymbol{(a + b) + c = a + (b + c)}$

Modulativa: En los enteros existe el $\boldsymbol{0}$, denominado el módulo de la adición, tal que cualquier número sumado con cero es el mismo.

Sea $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{Z}$, entonces $\boldsymbol{a + 0 = 0 + a = a}$

Anulativa: En los números enteros existe el opuesto de un número, tal que cualquier número sumado con su opuesto es igual a cero

Sea $\boldsymbol{a} \in \mathbf{Z}$, entonces existe $\boldsymbol{-a}$, tal que $\boldsymbol{a + (-a) = (-a) + a = 0.}$

La sustracción de dos números enteros se define como la suma del minuendo con el opuesto del sustraendo. Así:

$\boldsymbol{a - b = a + (-b)}$

Multiplicación en los enteros.

El producto de dos números enteros se calcula multiplicando sus valores absolutos y el signo resultante es positivo si ambos factores tienen el mismo signo, o negativo si tienen signos contrarios.

La multiplicación de números enteros cumple las siguientes propiedades:

Clausurativa: El producto de dos números enteros es un número entero. (El conjunto Z es cerrado para la multiplicación)

Sean $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{Z}$, entonces $\boldsymbol{ab = c, c \in Z.}$

Conmutativa: El producto de dos enteros es igual sin importar el orden de los factores.

Sean $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{Z}$, entonces $\boldsymbol{ab = ba}$

Asociativa: Al tener más de dos factores, es posible agruparlos de diferente manera, sin que se altere el producto.

Sean $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{Z}$, entonces $\boldsymbol{(ab)c = a\,(bc)}$

Modulativa: En los enteros existe el ***1***, denominado el módulo de la multiplicación, tal que cualquier número multiplicado con uno es el mismo.

Sea $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{Z}$, entonces $\boldsymbol{a \cdot 1 = 1 \cdot a = a}$

Anulativa: En los números enteros existe el ***0***, tal que cualquier número multiplicado con ***0*** es igual a ***0***.

Sea $\boldsymbol{0} \in \boldsymbol{Z}$, entonces existe $\boldsymbol{a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0}$.

Distributiva: Al multiplicar un número con una suma se obtiene el mismo resultado que al sumar los productos de dicho número con cada uno de los sumandos.

Sean $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{Z}$, entonces $\boldsymbol{a\,(b + c) = a\,b + a\,c}$

Polígonos y sus características.

Un polígono es una figura geométrica formada por segmentos que cumplen dos condiciones; la primera, que cada segmento toca exactamente a otros dos y, la segunda, que como máximo, dos segmentos se encuentran en un solo punto.

Los polígonos son regulares cuando todos sus lados son congruentes entre sí y en consecuencia todos sus ángulos también son congruentes entre sí, o viceversa, y reciben un nombre de acuerdo a la cantidad de lados que tengan, siendo el triángulo el que tiene menos lados. Los nombres de algunos polígonos se muestran en la figura 5.

Número de lados	Nombre	Representación gráfica

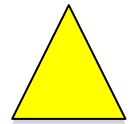
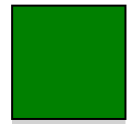
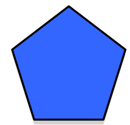
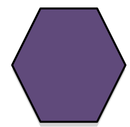
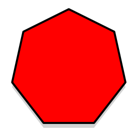
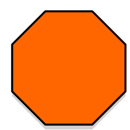
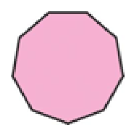
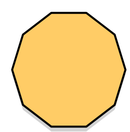
3	Triángulo	
4	Cuadrilátero	
5	Pentágono	
6	Hexágono	
7	Heptágono	
8	Octágono	
9	Eneágono	
10	Decágono	

Figura 5. Polígonos según sus lados

Cuadriláteros.

Dentro de los cuadriláteros existen tres categorías dependiendo de la cantidad de parejas de lados paralelos que tengan, y a su vez cada categoría cuenta con una nueva clasificación que depende de las características específicas de cada uno. Esta clasificación puede observarse en las figuras 6, 7 y 8.

Trapezoides: son cuadriláteros que no tienen pares de lados opuestos paralelos.

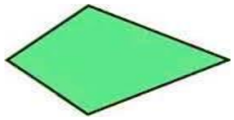
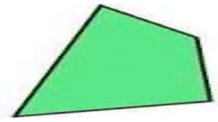
Trapezoide simétrico:	Trapezoide asimétrico
	

Figura 6. Trapezoides

Trapecios: son cuadriláteros con exactamente dos lados paralelos.		
Escaleno: sus cuatro lados son de diferente medida.	Isósceles: sus lados no paralelos son congruentes.	Rectángulo: tiene dos ángulos internos rectos.
		

Figura 7. Trapecios

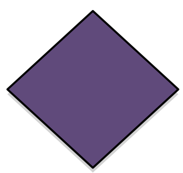
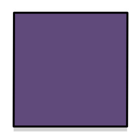
Paralelogramos: son cuadriláteros con ambos pares de lados opuestos paralelos.			
Romboide: sus ángulos opuestos y sus lados opuestos son congruentes.	Rombo: todos sus lados son congruentes.	Rectángulo: tiene todos sus ángulos internos rectos.	Cuadrado: todos sus ángulos y sus lados son congruentes.
			

Figura 8. Paralelogramos.

Nótese que los cuadrados son rombos y rectángulos

Perímetro de un polígono.

El perímetro de un polígono corresponde a la suma de la medida de cada uno de sus lados.

Área de un polígono.

El área de un polígono es la medida de la superficie que ocupa el polígono, esta se da en unidades cuadradas. El área de algunos de los polígonos que conocemos se ilustra en la figura 9.

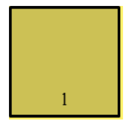
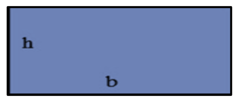
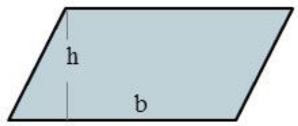
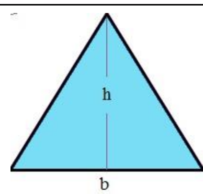
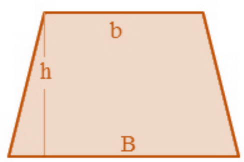
Polígono	**Gráfico**	**Área**	
Cuadrado		lado por lado	l^2
Rectángulo		base por altura	bxh
Paralelogramo		base por altura	bxh
Triángulo		La mitad de la base por la altura	$\frac{bxh}{2}$
Trapecio		La semisuma de las bases por la altura	$\frac{(B+b)}{2} \text{ x } h$

Figura 9. Áreas de algunos polígonos

Enseñanza para la Comprensión

Las prácticas de aula fueron planeadas en el marco de la Enseñanza para la Comprensión (EpC). Stone (1999) sugiere que "enseñar para la comprensión involucra a los alumnos en desempeños de comprensión" (p.95), para que esto sea posible se requiere un marco conceptual que responda a los interrogantes sobre: los temas que deben ser comprendidos y sus particularidades, de qué manera promover la comprensión y, por supuesto, cómo evidenciar la comprensión de los estudiantes. Desde esta perspectiva la comprensión es "la capacidad e inclinación a usar lo que uno sabe cuándo actúa en el mundo" (Stone, 1999, p.8)

Los elementos de la EpC que permiten responder a los interrogantes planteados son cuatro, los cuales están relacionados de tal manera que facilita el proceso de enseñanza- aprendizaje: tópicos generativos, metas de comprensión, desempeños de comprensión y evaluación diagnóstica continua.

<u>Tópicos Generativos:</u> son los temas que serán abordados, los cuales deben ser centrales, accesibles para el estudiante, interesantes para el docente y poderse vincular con experiencias previas de los estudiantes.

<u>Metas de Comprensión:</u> Son las metas que indican lo que se espera que los estudiantes logren comprender. Deben ser claras para los estudiantes, están relacionadas entre sí y son observables, medibles y evaluables, además tienen en cuenta las dimensiones de la comprensión que se clasifican así:

- Conocimiento: Hace referencia los hechos, ideas, conceptos y relaciones. Evalúa la estructura y organización de estos en el individuo.
- Método: Describe cómo se construye y se valida el conocimiento, los procesos y estrategias utilizadas.
- Forma de comunicación: Se refiere a la habilidad para expresar el conocimiento utilizando variedad de formas de comunicación teniendo en cuenta el contexto.

- Propósito: Evidencia la necesidad de realizar conexiones argumentadas entre temáticas.

Desempeños de comprensión: son las actividades que permiten desarrollar y demostrar la comprensión de las metas establecidas. Para que los desempeños sean efectivos deben estar vinculados con las metas de comprensión, desarrollar y aplicar la comprensión a través de la práctica y utilizar variados estilos de aprendizaje y formas de expresión, además de permitir la demostración de la comprensión. Existen tres tipos de desempeños que se encadenan entre sí, de manera progresiva:

- Etapa de exploración: no son exclusivos de la primera parte de la unidad, pero generalmente se dan en esta fase. Estos permiten motivar o cuestiona al estudiante sobre lo que conoce e indagar sobre sus nociones e ideas previas.
- Investigación guiada: estos desempeños buscan que los estudiantes utilicen sus conocimientos previos y sus habilidades para acercarse a las metas de comprensión. Las acciones deben ser variadas.
- Proyecto final de síntesis: en este proyecto se pretende que el estudiante dé cuenta con claridad del dominio que tiene de las metas de comprensión.

Evaluación diagnóstica continua: Debe contar con criterios claros, establecidos previamente los cuales deben conocer los estudiantes. Es muy importante hacer una evaluación continua que permita evidenciar los avances conjuntamente con los desempeños e incluir la auto y la co-evaluación de los estudiantes lo que favorece que los estudiantes asuman con mayor responsabilidad su proceso de aprendizaje. La evaluación no debe ser únicamente para calificar. En el modelo de EpC, la retroalimentación es muy importante en el proceso de asimilación de los conceptos y no es una tarea exclusiva del docente, por el contrario, debe provenir de diversas fuentes.

Se considera que este marco es apropiado para mejorar la práctica de aula ya que permite a la docente reflexionar sobre la pertinencia e importancia de los tópicos generativos, pero sobre todo invita a plantear desempeños de comprensión en los cuales cada estudiante sea participe de la construcción de su propio conocimiento haciéndolo visible. Por otra parte, la evaluación en el marco de la EpC implica un proceso continuo de permanente verificación, lo que permite realizar ajustes y replantear los desempeños cuando es necesario, para la consecución de las metas de comprensión.

Otro aspecto que justifica el uso del marco en este proyecto, está asociado con las dimensiones de la comprensión. El marco aborda cuatro aspectos centrales que guían el diseño de las metas y los desempeños de la comprensión el contenido, el propósito, el método y la comunicación. Es en esta última dimensión que el marco de la EpC permite una reflexión sobre los desempeños que permiten potenciar la acción comunicativa en el aula de matemáticas.

Metodología

La Investigación Cualitativa

La investigación en el aula permite conocer y transformar las dinámicas de la clase. Existen muchos factores que inciden en la intención de indagar sobre alguna situación particular del aula, solamente el hecho de que el trabajo a realizar sea con personas, ya implica que no será posible minimizar los ruidos que en otras circunstancias podrían aislarse o controlarse, y que existen factores no medibles como son: la motivación, los valores, prejuicios, concepciones, gustos y pensamientos de los estudiantes, que afectarán los resultados de la misma, por esta razón se hace necesario utilizar la metodología de la investigación cualitativa.

Según Mejía Navarrete (2013), “la investigación cualitativa es el procedimiento metodológico que utiliza palabras, textos, discursos y dibujos para comprender la vida social por medio de significados y desde una perspectiva, pues se trata de entender el conjunto de cualidades interrelacionadas que caracterizan a un determinado fenómeno” (p.28). El mismo autor sugiere tres tipos de investigación cualitativa: interpretativa; analiza fenómenos de tipo social, etnográfica; que describe escenarios o comunidades con características muy particulares, y mediante historias de vida; para analizar personas concretas. Se deduce, entonces, que la investigación cualitativa más adecuada para el estudio a realizar es la interpretativa.

Alcance Interpretativo Interventivo

El objeto de la investigación, en primera instancia es interpretar comprensivamente los tipos de lenguaje que se utilizan en el aula de matemáticas, y desde esta acción, intervenir el proceso de enseñanza-aprendizaje, utilizando una estrategia en busca de fortalecer la competencia comunicativa de los estudiantes.

Sin lugar a dudas uno de los resultados de la investigación será el cambio de comportamiento de la docente investigadora, ya que como lo muestran diversos estudios (D´Amore, Fandiño

Pinilla, 2004; Campolucci, Fandiño Pinilla, Maori, Sbaragli, 2006) citados por Fandiño (2010), el docente investigador se vuelve más crítico, atento y menos confiado en las teorías propuestas por quienes él considera expertos. Además, asume una postura más creativa y propositiva frente a las propuestas pedagógicas que planea, ya que, al evidenciar ciertos resultados, no le será posible obviarlos.

Diseño Investigación Acción

El proceso de investigación- acción consta de tres momentos estrechamente relacionados. Lewin (1948), citado por Parra (2002) dice: "el proceso de investigación – acción está constituido por tres etapas o momentos: la planificación, la ejecución y la observación o evaluación" (p. 116). En la planificación se hace una reflexión sobre la situación o la pregunta de investigación teniendo en cuenta todos los registros utilizados y se elabora un plan de acción. En la ejecución se pone en marcha el plan de acción que pretende mejorar la situación inicial. La observación y la evaluación permiten identificar los aciertos y dificultades tanto del plan de acción como de la planificación, para realizar los correctivos pertinentes. La relación entre estas tres etapas las explica Parra (2002):

> *La planificación se va modificando durante la acción, y la acción, a su vez, es guiada por la planificación de un modo flexible que se acomoda tanto a los objetivos generales como a las contingencias e imprevistos propios de todo proceso social. El elemento que hace posible esta interrelación es la evaluación permanente*. (p. 117).

Teniendo en cuenta que el proceso de la investigación propuesta obedece a una serie de pasos continuos en espiral donde se parte de un diagnóstico, luego se realiza una propuesta de cambio que se implementa y evalúa para realizar un nuevo diagnóstico, dando origen a otro ciclo. En concordancia con lo explicado por Parra esta investigación se enmarca en el diseño de investigación acción.

Población

La población objeto de esta investigación son los estudiantes de grado sexto (2015) – séptimo (2016), del colegio Villa Amalia I.E.D. Los estudiantes que ingresan al bachillerato, en su mayoría son estudiantes de la institución que se encontraban en la jornada de la mañana, con el acompañamiento de alrededor de cuatro maestros en las diferentes áreas del conocimiento y deben enfrentarse al cambio de jornada, al trabajo con más de ocho maestros en las diferentes asignaturas y a dejar de ser los mayores de su jornada, para ser los más jóvenes. Tienen edades que oscilan entre los 10 y 14 años. Los más jóvenes tienden a ser muy activos, les gustan los retos, la competencia y son curiosos. Los mayores, por el contrario, son tímidos, con poca responsabilidad y desmotivados.

En las pruebas escritas se evidencia que a los estudiantes se les dificulta leer comprensivamente las instrucciones y los enunciados de las preguntas, lo cual es una queja constante de los maestros del ciclo. También están acostumbrados a que se les debe repetir una instrucción varias veces antes de acatarla.

Aunque la formalización de los conceptos matemáticos, las generalizaciones y la abstracción son más fáciles de asimilar cuando los estudiantes llegan al grado octavo, por su edad mental y los conceptos previos que deben manejar en ese nivel, es muy importante aprovechar las características de motivación, participación y creatividad de los niños de grado sexto, para ir desarrollando los pensamientos matemáticos en ellos. En esta medida, los primeros beneficiarios son los estudiantes que hacen parte de la propuesta a desarrollar, y a mediano plazo debe evidenciarse un cambio positivo en la competencia comunicativa, de los estudiantes de bachillerato.

De acuerdo al ICFES, (2014) los estudiantes que se encuentran en el nivel mínimo (rango (265 – 330)), frente a la competencia de comunicación, representación y modelación tienen la capacidad de:

- Establecer relaciones de orden e identificar algunas propiedades de los números naturales.
- Expresar simbólicamente algunas operaciones a partir de un enunciado gráfico o verbal.

- Reconocer y utilizar el plano cartesiano.
- Asociar referencias de objetos reales a medidas convencionales.
- Identificar atributos medibles de figuras u objetos.
- Organizar y clasificar información estadística.

Instrumentos

Los instrumentos para la recolección de datos, que se utilizaron son:

Diario de campo. Es una herramienta que permite describir lo que ocurre en el aula, desde el punto de vista de la docente investigadora. Su riqueza radica en la interpretación objetiva que se haga al analizar la información recolectada por ese medio. Según Porlán (1987), citado por Prieto (2003) el diario es "una herramienta para la reflexión significativa y vivencial de los enseñantes″, además él indica que el diario debe favorecer la descripción de sucesos, detectar posibles falencias y acumular información histórica. En el caso de la investigadora manejo un cuaderno con tres regiones. Para orientarse cada una de ellas tenía un propósito; en la primera escribía "lo que quiero, lo que espero", refiriéndose al objetivo, en la segunda "lo que pasó, lo que vi, lo que percibí" donde registraba sus observaciones, interrogantes o reflexiones. La tercera "lo sustenta" para buscar un referente teórico que aterrizara o avalara sus observaciones. Sus reflexiones no ocurrieron sólo en espacios de clase, también se generaron en diálogos con otros docentes, en las reuniones de área, en las asesorías o en otros espacios, no siempre académicos.

Registro de observación. Soportado en material fotográfico, video-gráfico y/o auditivo. La organización de este registro se hizo clasificando las fotos, videos y grabaciones de audio en tres grupos; acorde a las etapas de intervención. Posteriormente se etiquetó cada registro con un nombre que permitiera identificar si era una imagen, un video o un audio y la etapa correspondiente. Luego se diseñó una matriz que incluía tanto las categorías como las subcategorías y se fue añadiendo cada registro en la columna o columnas correspondientes con una breve descripción realizada por la docente investigadora. El análisis detallado de esta matriz permitió evidenciar los avances durante toda la investigación, así como hacer una reflexión más detallada de los hallazgos de cada etapa. Es necesario aclarar que durante el proceso de implementación se analizaron algunos de estos registros para hacer la evaluación de lo que estaba ocurriendo en el aula, es decir, la revisión de este material, se fue haciendo durante todo el proceso de la investigación.

Trabajos de los estudiantes. Todos aquellos que hicieron parte de las actividades que se desarrollaron dentro de la estrategia planteada, incluyendo evaluaciones, talleres, guías, juegos y apuntes.

Categorías de Análisis

Se establecieron dos categorías de análisis; la primera relacionada con los procesos comunicativos de la docente para identificar los tipos de lenguaje que utilizaba en el aula y la finalidad con que lo hacía. La segunda categoría relacionada con los procesos comunicativos de los estudiantes para comunicarse entre ellos y con la docente. Ambas categorías se analizaron a partir de cinco subcategorías que se refieren a los cinco tipos de lenguaje que se utilizan en el aula, tanto por los estudiantes como por la docente para comunicarse. Esta información se ilustra en la tabla 9.

Tabla 9. Categorías y Subcategorías de Análisis

Categorías	**Subcategorías**				
	Lenguaje Natural	Lenguaje Simbólico	Lenguaje Gráfico	Lenguaje Icónico	Lenguaje Gestual
Procesos comunicativos de la docente dentro del aula de matemáticas					
Procesos comunicativos del estudiante, entre pares y con la docente, en el aula de matemáticas					

Plan de Acción

Atendiendo a la metodología de la Investigación Acción, se realizaron varios ciclos de planeación, intervención, evaluación y reflexión sobre la práctica de la docente investigadora. Para efectos de la estructuración del trabajo de grado se inicia una fase formal de documentación teórica y práctica en noviembre de 2015 con un ejercicio de intervención intencionada y reflexiva durante el primer semestre de 2016. En la tabla 10, se presenta el cronograma desarrollado.

Tabla 10. Plan de Acción de la Investigación

	2015		2016												2017
	Noviembre	Diciembre	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre	Enero
Revisión Bibliográfica	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
Diagnóstico	■	■	■	■											
Diseño de la estrategia de intervención				■	■	■	■	■							
Implementación de la estrategia					■	■	■	■	■						
Evaluación de la estrategia					■	■	■	■	■	■	■	■	■		
Entrega de resultados escritos														■	
Socialización															■

Resultados Escritos

Al final de este trabajo se encuentra una exposición escrita de las interpretaciones realizadas, reflexionando sobre los hallazgos y dificultades, planteando nuevos interrogantes y sugiriendo mejoras a la estrategia propuesta.

Propuesta de Intervención

Las actividades propuestas tuvieron como objetivo común el de desarrollar la competencia comunicativa en el área de matemáticas, usando como pretexto el tema de la clase. La comunicación en el aula involucró diferentes tipos de lenguaje y aunque en algunas ocasiones se favoreció más alguno de ellos, en el transcurso de las clases se desarrollaron la totalidad de estos.

Se tuvo en cuenta que cada estudiante tiene sus propias habilidades y se le facilita más expresarse de una u otra manera, por esta razón las actividades se centraron en diferentes formas de comunicación, pero todas contaron con momentos donde los estudiantes interactuaron entre ellos y con la docente.

Por otra parte, teniendo en cuenta el diseño de la investigación y la posibilidad de aplicar las actividades en cuatro cursos distintos, en cada ocasión la docente iba haciendo ajustes para subsanar errores o disminuir las dificultades que fuesen evidentes en las aplicaciones previas, como es de esperarse algunos de esos cambios fueron favorables y otros no.

A continuación, se presentan las actividades que se realizaron mencionando aciertos y dificultades, además de sugerencias planteadas que surgen después de haber hecho la reflexión sobre lo que ocurrió en cada una de ellas. Las actividades se agruparon secuencialmente en las realizadas en aritmética, las de geometría y las del calendario matemático para darle continuidad a los temas, sin embargo, cabe anotar que entre el desarrollo de esas actividades hubo otros momentos en la clase que no se explicitan.

Sistemas de numeración (*Actividad Previa*).

Aunque el tema central a desarrollar en la presente investigación gira entorno a los números enteros, previamente una temática que se desarrolla son los sistemas de numeración porque permite a los estudiantes entender que las matemáticas son el resultado de construcciones humanas, además se espera que ellos comprendan la estructura del sistema de numeración decimal y valoren su eficiencia.

Con el fin de introducir y reforzar el capítulo de sistemas de numeración, en el primer semestre del 2015 se realizó la lectura del libro “Viaje al País de los Números” del autor francés Benoit Rittaud, en las horas de clase. De manera paralela se trabajó en torno al documental “La historia del 1” de History Channel, discutiendo sobre las características de diversos sistemas de numeración de acuerdo a las culturas que los desarrollaron. Al realizar estas actividades los estudiantes se mostraron interesados por encontrarse inmersos en un contexto donde se les narran historias y se les brinda información que resulta novedosa. De esta manera, se busca una aproximación a la lectura de textos relacionados con matemáticas y a otras formas de lenguaje que generalmente no son propias del aula. Sin embargo, la planeación de las preguntas y las actividades a desarrollar a partir de la lectura y del video no están direccionadas a propiciar un diálogo y contrastación de ideas al interior del aula.

En otra oportunidad, la docente investigadora desarrolló una actividad posterior a la enseñanza de diversos sistemas de numeración en la que se les invitó a los estudiantes a crear su propio sistema de numeración en una cultura imaginaria. Sin embargo, los estudiantes recrearon las culturas que ya conocían haciendo sutiles cambios a la representación de los símbolos, es decir, se limitaron a copiar las características de éstas en lugar de crear unas nuevas. La reflexión sobre la implementación de la actividad lleva a la docente investigadora a proponer que esta sea introductoria. Se les propondrá a los estudiantes organizarse en grupos y crear culturas imaginarias definiendo con rasgos muy generales el lugar geográfico donde se ubican, su economía, sus creencias, organización social y sistema de numeración. Debe aclararse que ninguna cultura tiene comunicación con otra y que el sistema de numeración no debe usar los símbolos que ellos conocen tanto del sistema decimal como del sistema de numeración romano. Posteriormente cada grupo expondrá su cultura con sus características y se buscarán puntos de encuentro entre las propuestas, para luego relacionarlos con las culturas que existieron realmente y los sistemas de numeración que ellas desarrollaron.

Los números en contexto. (*Lenguaje natural*)

La comprensión del concepto de número relativo es fundamental para acercarse al conjunto de los números enteros. Es importante que los estudiantes comprendan que el mismo número tiene un significado diferente, dependiendo del contexto en el que se ubique, para esto se realizan preguntas como ¿Es el 8 un número grande? ¿Para qué utilizas los números? ¿5 minutos es poco tiempo? Los estudiantes responden argumentando sus ideas hasta que concluyen que las respuestas dependen del contexto en que se ubiquen los números. Luego de la evaluación del resultado de la actividad, surge la necesidad de hacer explícita la importancia del contexto en la interpretación de los símbolos numéricos lo cual debe constituirse en una meta de comprensión que guie el desarrollo de la unidad de clase.

Posteriormente se les pregunta cómo pueden diferenciar una cantidad que “tienen” de una que “deben”. Ellos sugieren ubicarlos en casillas similares a las utilizadas en contabilidad con una columna para el “debe” y otra para el “haber”, eso ocurre porque ellos ven Contabilidad en las asignaturas de su grado. También sugieren restar los dos valores para saber cuánto les queda, o utilizar dos colores diferentes; con un poco de ayuda se acordará utilizar los signos “+” y “-”. En este momento se sugiere contar la historia de la tinta roja, el uso de los dos colores para identificar las cargas positivas de las negativas, y el origen de la expresión “saldo en rojo”.

Luego se les pide que expresen situaciones en que los números representen cantidades positivas o negativas. Aunque hay casos de estudiantes que asocian el signo – con una situación que para ellos resulta negativa, por ejemplo un estudiante del curso 602 escribió: “Mi amigo quería venir a mi casa y no pudo porque no tenía para el pasaje” (Figura 10), esta situación se resuelve rápidamente porque la mayoría de los estudiantes argumentan con claridad y brindan ejemplos del uso de los números en diversos contextos, además de asociar las cantidades positivas y negativas a situaciones en las que se involucran temperaturas, pérdidas y ganancias, pisos en un edificio con sótanos, desplazamientos horizontales y verticales en un plano, ubicaciones en, sobre y bajo el nivel del mar.

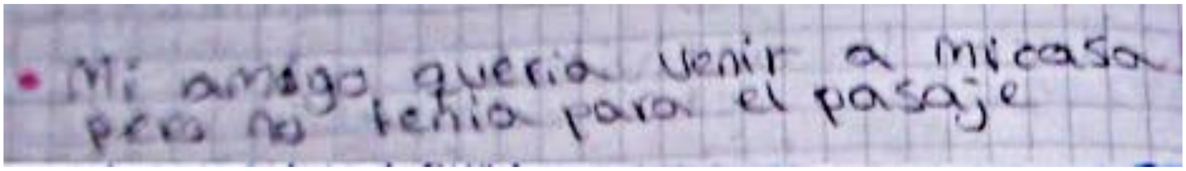


Figura 10. Registro de actividad de los números en contexto.

Ordenando los enteros. (*Lenguaje gráfico*)

Inicialmente, por grupos de estudiantes se les asigna la tarea de consultar cuántos metros pueden sumergirse algunos animales acuáticos, como la tortuga, el tiburón blanco, un calamar, la ballena azul, también puede incluirse un buzo y un submarino militar. Después se recogerá la información en el tablero y se pedirá a los estudiantes que representen la información recolectada.

En esta actividad se evidenció que siendo la instrucción "Hagan un dibujo donde representen la información del tablero" algunos estudiantes se esmeraron en realizar dibujos con mucho detalle, pero dejaron de lado la información matemática. Por esta razón se sugiere que el maestro sea cuidadoso al expresar sus expectativas frente a lo que desea que hagan sus estudiantes. En esta etapa también se evidencia que los estudiantes que consideran la información matemática organizan intuitivamente los números verticalmente, aunque sin considerar algún tipo de escala. En la figura 11 se ilustran estas situaciones.

Figura 11. Algunos estudiantes realizan el dibujo sin tener en cuenta la información matemática mientras que otros estudiantes la tienen en cuenta.

Esta actividad se ligó con el siguiente ejercicio: “Un pez volador puede saltar hasta 2 m fuera de la superficie para cazar a su presa. Uno de estos peces está 30 cm bajo la superficie y atrapa un saltamontes que se encuentra a 70 cm del suelo. Representa la situación. ¿Cuánto saltó el pez?” Al revisar las respuestas de los estudiantes se evidencian varios aspectos que el docente debe considerar al proponer este tipo de actividades.

Frente a la pregunta y considerando el tema que se desarrolló es evidente que se esperaba que los estudiantes hallaran la distancia vertical, desde donde se encuentra el pez hasta el punto en que se encuentra el saltamontes. Sin embargo, los estudiantes consideraron otra información y dieron respuestas como estas:

- Salta 102 cm. En este caso sumó todos los números que encontró en el enunciado del problema.
- Salta 120 cm. Es similar a la respuesta anterior, pero convierte 2 m en 20 cm.
- Salta 70 cm porque los 30 cm que está bajo el agua son de impulso.
- Salta 2 m; 1 m subiendo y 1 m bajando.

Con respecto a la representación de la situación, se observa que la mayoría de los estudiantes comprenden que la trayectoria del pez debe ser un movimiento parabólico y no rectilíneo. Algunos asocian los 70 cm a la longitud de la rama, más no a la distancia de esta con respecto al suelo. También se percibe que algunos estudiantes ofrecen la respuesta esperada porque saben lo que la docente desea como respuesta, sus respuestas responden más a la organización de la información numérica suministrada en el enunciado con el objetivo de generar un nuevo dato que a la comprensión real de la situación planteada (Figura 12).

Figura 12. Respuestas de los estudiantes considerando información no explícita

Teniendo en cuenta las situaciones presentadas y la riqueza de la información que ofrece el dibujo, se sugiere que, en una aplicación futura de esta actividad, se inicie con la consulta sobre los peces voladores y otros animales que tengan ese comportamiento. Luego se pide que hagan un dibujo donde ilustran la situación en que el pez salta para cazar su alimento, pero sin darles valores numéricos, entonces se seleccionan algunos para que los estudiantes expliquen lo que representaron y porqué lo hicieron, incluyendo líneas punteadas, flechas, sombras y figuras o símbolos adicionales. Es a partir de la información que ellos brindan que se orientan las preguntas y luego sí se incluye valores numéricos.

El ajuste propuesto a la actividad, busca una aproximación al uso del lenguaje icónico cómo posibilidad de abstracción e interpretación de situaciones reales buscando un tránsito a la generación de esquemas con información relevante que permitan la matematización de la situación.

Juegos de Cartas. (*Lenguaje natural*)

Los docentes de matemáticas suelen utilizar ejemplos de juegos donde un personaje o un equipo pierden y ganan puntos en un torneo, para acercar a los estudiantes a la adición de números enteros. Sin embargo, resulta mucho más valioso si los estudiantes son quienes juegan y llevan sus propios registros dentro del juego, las cartas de póker son de gran ayuda. Con los estudiantes se realizaron tres juegos que se explican a continuación:

Rojas y negras.

Participantes: 4 o 5 estudiantes

Reglas del juego:

Las cartas negras suman puntos, las cartas rojas restan.

Cada carta tiene un valor de acuerdo a su número o figura así:

El As vale por 1

Del 2 al 10, valen por su número

J: Vale 11

Q: Vale 12

K: Vale 13

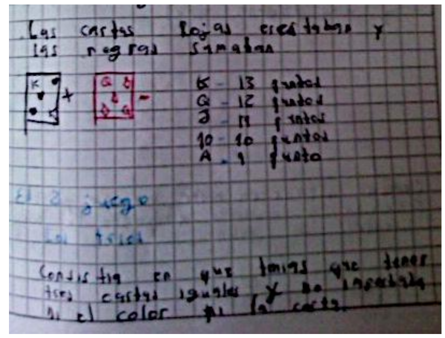


Figura 13. Un estudiante explica el juego de "Rojas y Negras"

Cada jugador hace una tabla para llevar el registro del juego, donde estén los nombres de los jugadores y el valor que obtienen por turnos.

Para iniciar cada jugador toma una carta; empezará el que obtenga la de mayor valor, y la ronda seguirá por su derecha.

Juego: Se barajan las cartas y se colocan boca abajo. El jugador que inicia toma la primera carta y cada uno registra los puntos que obtiene, luego hace lo mismo el segundo jugador y así sucesivamente. Al cabo de diez rondas se hará la contabilidad de los puntos. Posteriormente se define el orden en que los jugadores, ocupando el primer lugar quien más puntos obtenga. Después de esta actividad se solicita a los estudiantes que expliquen cómo ocurrió el juego, la intención es que brinden detalles del proceso que hicieron para registrar, hallar el total de puntos y encontrar al ganador. Sobre el registro de los puntos, algunos utilizan un solo color y diferencian los valores usando los signos + y -. Otros usan ambos colores, pero también incluyen los signos, como se observa en la Figura 14.

Figura 14. Registro de puntos en el juego de "Rojas y Negras"

Para hallar el total de puntos una estudiante explica “Con mi grupo decidimos sumar lo que era de sumar y restar los números negativos” Algunos estudiantes al hacer la sumatoria si obtienen un resultado negativo lo omiten y colocan cero, al respecto otros llaman la atención argumentando que al final del juego alguien puede “quedar debiendo”; esta situación se presentó en los cuatro cursos. Ellos explican que, si en un momento obtienen una carta roja, en la siguiente ronda pueden sacar una negra y “pagar” lo que “deben”, pero si sacan otra roja “deben más”.

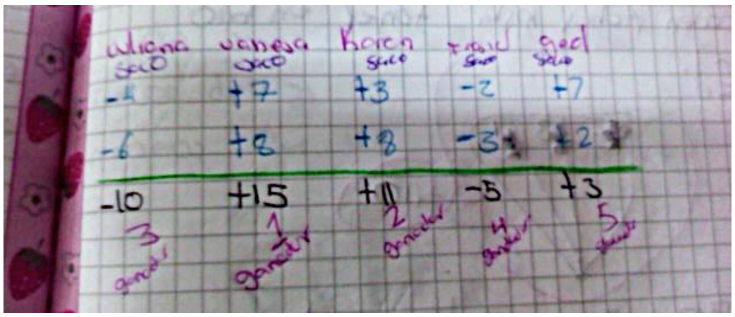


Figura 15. Ordenan los números por su valor absoluto

Ordenar a los jugadores no les resulta tan sencillo. Hay una idea generalizada de organizar los puntajes sin importar si los puntos son positivos o negativos, de menor a mayor. Pero un grupo de estudiantes sugiere que es “mejor no deber” o “deber pocos puntos”. Con un poco de orientación se acuerda que, si al final hay estudiantes con puntos negativos, al ordenarlos tiene un mejor resultado quien “deba” menos puntos.

Lo valioso de esta actividad se encuentra precisamente en el momento en que los estudiantes narran el proceso que realizaron desde el registro hasta la organización de los puntajes finales porque permite acercarlos rápidamente a la adición de los números enteros y disminuir algunos obstáculos epistemológicos asociados a su enseñanza. En esta etapa de la reflexión, la docente investigadora muestra en el ejercicio de su práctica una intención de propiciar el uso de diferentes registros para que sus estudiantes expresen las ideas matemáticas asociadas al juego.

Juego de los Tríos.

El objetivo del juego es hacer tríos de número o figuras antes que los demás jugadores y llegar primero a 300 puntos.

Participantes: 4 o 5 estudiantes

Reglas del juego:

Las cartas de número valen por su número.

Las cartas de figura valen 10.

Cada jugador hace una tabla para llevar el registro del juego, donde estén los nombres de los jugadores y el puntaje que obtienen por partida.

Para iniciar cada jugador toma una carta; empezará el que obtenga la de mayor valor, y la ronda seguirá por su derecha.

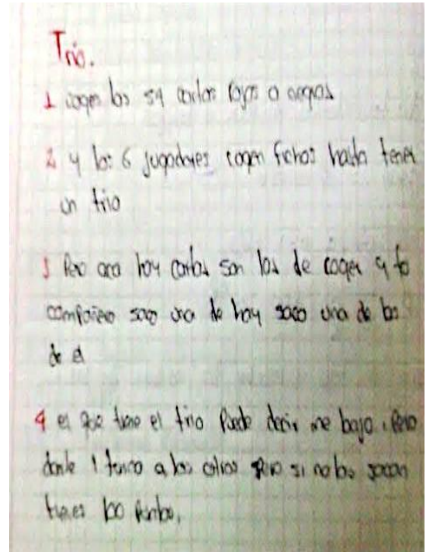


Figura 16. Un estudiante explica el "Juego de los Tríos"

Juego: El jugador que inicia baraja el mazo y le entrega a cada uno 3 cartas cerradas (boca abajo). Él toma una carta adicional y arroja abierta (boca arriba) una carta de su juego. El jugador a su derecha puede tomar la carta abierta o la que está encima de la baraja cerrada y luego debe arrojar una carta de su juego abierta. El siguiente jugador hará lo mismo, y así sucesivamente. Sólo se puede tomar la carta que está encima, tanto de la baraja abierta como de la baraja cerrada, antes de que un jugador tome una carta quien tiene el turno debe quedar con tres. Si el jugador lo considera necesario puede desechar la carta que ha tomado, es decir, no siempre debe reemplazar el juego que tiene. El jugador que obtenga un trío deberá anunciar "me bajo" y mostrar sus cartas a los demás compañeros para que verifiquen su juego. El jugador que se baje obtiene 100 puntos y los demás perderán tantos puntos como sumen sus cartas. Los valores se registran en la tabla y se reinicia el juego.

En esta actividad los estudiantes van realizando la suma cada vez que termina la ronda y comienzan a pensar estrategias para ganarle a sus compañeros, además comienzan a predecir resultados.

El juego del 31

El objetivo del juego es conseguir 31 puntos con tres cartas antes que los demás jugadores y llegar primero a 300 puntos.

Participantes: 4 o 5 estudiantes

Reglas del juego:

Las cartas de número valen por su número.

Las cartas J, Q y K valen 10.

El As vale por 1 o por 11

Cada jugador hace una tabla para llevar el registro del juego, donde estén los nombres de los jugadores y el puntaje que obtienen por partida.

Para iniciar cada jugador toma una carta; empezará el que obtenga la de mayor valor, y la ronda seguirá por su derecha.

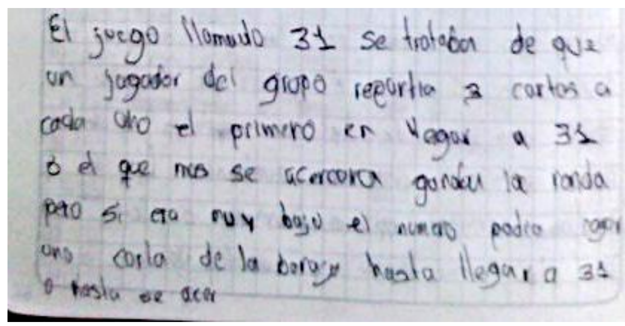


Figura 17. Explicación de "El juego del 31" por un estudiante.

Juego: El jugador que inicia baraja el mazo y le entrega a cada uno 3 cartas cerradas (boca abajo). Él toma una carta adicional y arroja abierta (boca arriba) una carta de su juego. El jugador a su derecha puede tomar la carta abierta o la que está encima de la baraja cerrada y luego debe arrojar una carta de su juego abierta. El siguiente jugador hará lo mismo, y así sucesivamente. Sólo se puede tomar la carta que está encima, tanto de la baraja abierta como de la baraja cerrada, antes de que un jugador tome una carta quien tiene el turno debe quedar con tres. Si el jugador lo considera necesario puede desechar la carta que ha tomado, es decir, no siempre debe reemplazar el juego que tiene.

El jugador que tenga 31 puntos o un puntaje cercano anunciará "me bajo", los demás jugadores tienen una ronda adicional antes de que todos muestren sus cartas. Ganará quien tenga el mayor puntaje cercano a 31, sin pasarse, ese jugador obtiene 100 puntos y los demás perderán tantos puntos como sumen sus cartas. En caso de que dos o más jugadores empaten con el mayor puntaje los 100 puntos se repartirán equitativamente entre los ganadores. Los valores se registran en la tabla y se reinicia el juego. Este juego presenta una mayor dificultad para los estudiantes quienes deben desarrollar estrategias más elaboradas para ganarle a sus compañeros, que en el juego de tríos.

Después de haber realizado los tres juegos se les pide a los estudiantes que le escriban una carta a un compañero que no asistió a clases, contándole lo que ocurrió en esas sesiones, incluyendo la explicación de los juegos. (Figuras 13, 16, 17 y 18). Luego se les pide a algunos estudiantes que lean sus cartas.

Los demás estudiantes complementan la información de las cartas leídas; mencionan detalles que quedaron pendientes, hacen correcciones, hablan sobre las estrategias particulares que trabajaron en sus grupos, analizan la dificultad y el azar presente en cada juego. En general esta actividad resulta muy motivante para los estudiantes y les permite comunicar su experiencia. Ya que su lenguaje natural escrito es muy precario sus explicaciones son demasiado generales, en ocasiones recurren a ejemplos para hacerse entender, pero a medida que se amplía la discusión general los estudiantes van usando un lenguaje más claro y son más concretos.

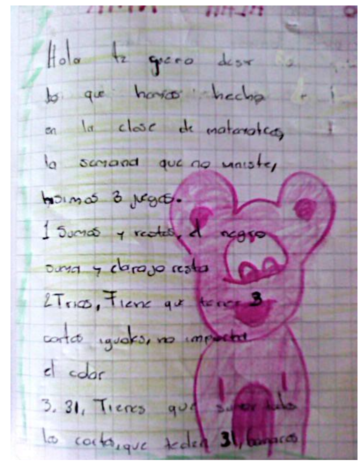

Hola te quero desir
lo que hemos hecho
en la clase de matematicas,
la semana que no viniste,
hisimos 3 juegos.
1 Sumas y restas, el negro
suma y el rojo resta
2 Trios, Tiene que tener 3
cartas iguales, no importa
el color
3. 31, Tienes que sumar todas
las cartas, que teden 31, ganaras

Figura 18. Carta de un estudiante explicando los juegos

Además de los juegos, luego se pueden hacer actividades como organizar de menor a mayor un grupo de cartas, teniendo en cuenta el valor numérico y el color. Hacer preguntas como ¿En el juego de rojas y negras, si Pedro lleva +10 puntos, que carta debe sacar para quedar en cero? ¿En el juego de tríos, con cuáles cartas puedo tener -18 puntos? ¿Es posible que un jugador inicie con negativos en los juegos? Como sugerencia, el docente podría elegir un juego entre Tríos y 31, aunque este último es más complejo, y en su lugar pedirles a los estudiantes que creen su propio juego para obligarlos a crear las normas y explicarlas claramente. Además, sería interesante analizar qué ideas surgen y cómo las comunican.

Al finalizar este tema es necesario que el docente aclare que, aunque existen muchas formas de organizar los elementos de un conjunto hay un acuerdo sobre la forma en que se ordenan los números enteros. Es este momento también es oportuno hablar sobre el “siguiente” y el “anterior” de un número entero. Lo anterior, invita a la docente a reflexionar acerca de la forma en que realizará la “Institucionalización del conocimiento matemático” que emerge durante la actividad y los acuerdos de notación que guiaran el desarrollo de las clases en un futuro.

Uno de los aciertos en esta actividad es el incluir la producción escrita en la actividad de los juegos, al darle la oportunidad a los estudiantes de escribir sus procedimientos y estrategias, emerge la necesidad de utilizar un lenguaje claro y preciso. De otra parte la escritura de la carta a un compañero facilito a la docente investigadora reconocer aspectos que conceptualmente aún no eran claros para el grupo.

Carrera Matemática. (*Lenguaje simbólico-mtemático*)

Esta actividad es por parejas e inicia en un tablero llamado “Carrera Matemática” (Figura 19); es una ruta que va de -29 a +29, los estudiantes se desplazan desde el cero con el lanzamiento de dos dados; uno de ellos de color azul con el cual se mueven hacia +29 y el otro de color rojo que indica el movimiento hacia -29. En cada lanzamiento debe lanzar ambos dados y gana quien llegue primero a uno de los dos extremos.

Al terminar el juego cada estudiante responde las siguientes preguntas, discutiéndolas con su compañero de juego. Se aclara que (R) se refiere al dado rojo y (A) al azul:

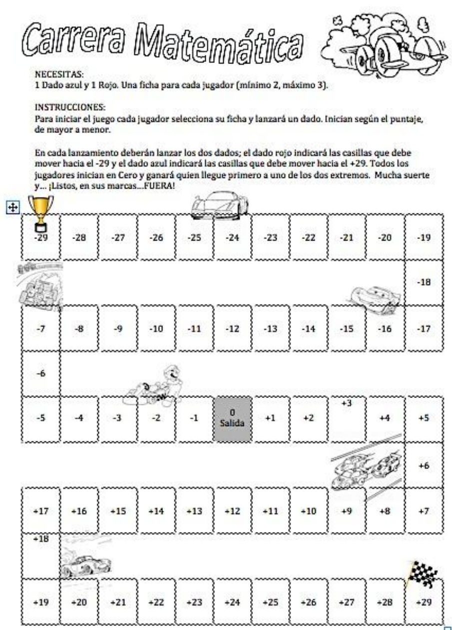


Figura 19. Tablero de “Carrera Matemática”

1. ¿Cuánto recorres en cada uno de los siguientes lanzamientos, y hacia donde te mueves hacia el +29 o hacia el -29?
   a. 5(R) y 3(A)
   b. 6(R) y 2(A)
   c. 4(R) y 1(A)
   d. 2(R) y 3(A)

2. ¿Qué ocurre si obtienes el mismo puntaje en ambos dados? ¿Por qué?
3. ¿Qué puntajes debes obtener para desplazarte 3 casillas hacia el +29?
4. ¿Qué puntajes debes obtener para desplazarte 4 casillas hacia el -29?

María sugiere realizar el juego nuevamente, pero utilizando 2 dados rojos y uno azul. Ella está convencida de que así sólo se moverá hacia el -29 y nunca hacia +29. Jorge piensa que María está equivocada, porque incluso es posible que en algún lanzamiento no pueda mover su ficha. Veamos quién tiene razón, ayudémosles respondiendo las siguientes preguntas:

1. ¿Cuánto recorres en cada uno de los siguientes lanzamientos, y hacia dónde? (+29 o -29)?

a. 5(R), 2(R) y 3(A)
b. 3(R), 4(R) y 6(A)
c. 1(R), 1(R) y 4(A)
d. 2(R), 2(R) y 5(A)

2. ¿Qué ocurre si obtienes el mismo puntaje en todos los dados? ¿Por qué?
3. ¿Qué puntajes debes obtener para desplazarte 3 casillas hacia el +29?
4. ¿Qué puntajes debes obtener para desplazarte 4 casillas hacia el -29?
5. ¿Qué puntajes debes obtener para no moverte?
6. ¿Quién tiene razón? ¿Por qué?

Al socializar las respuestas con todos los estudiantes rápidamente transforman 5(R) a -5. En la pregunta 5a, por ejemplo, hacen el siguiente procedimiento -5-2+3 = -4. Esta actividad resultó ser muy oportuna para formalizar el lenguaje matemático ya que la docente escribía en el tablero 5 + (-2) +3 = -4 y los estudiantes asimilaron rápidamente lo que significa. Finalmente, esto permite formalizar el proceso de adición.

A esta altura se evidencia como la docente investigadora pone especial atención a las preguntas que desarrollará durante la actividad, buscando una participación mayor del grupo e invitando a los estudiantes a utilizar un lenguaje más formal en sus intervenciones.

Mensajes Ocultos. (*Lenguajes simbólico-matemático y natural*)

En esta actividad la docente inicia haciendo un listado de adiciones de números enteros, luego les indica a los estudiantes que cada suma le corresponde una letra; así que ellos deben reemplazar las sumas por letras y hallar el mensaje oculto. Este es el ejercicio y la figura 20 muestra su solución (Figura 20):

A	I	D	U	S	C	T	L
-8	-7	-6	-3	0	4	5	7

(-3) + 7 = 4; C

15 + (-18) = -3; U

(-5) + (-2) = -7; I

1 + (-7) = -6; D

(-3) + (-5) = -8; A

21 + (-16) = 5; T

7 + (-10) = -3; U

20 + (-20) = 0; S

(-10) +2 = -8; A

(-14) + 1 = -13; L

6 + (-9) = -3; U

4 + (-10) = -6; D

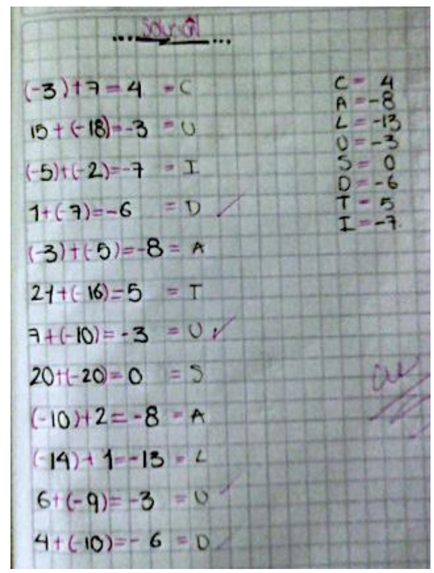


Figura 20. Registro de la Actividad "El mensaje oculto"

Luego se les pide a los estudiantes que por parejas escriban un mensaje oculto, construyan las adiciones, verifiquen que esté correcto y después lo intercambien con otra pareja. Antes de intercambiarlo la docente verificaba el mensaje, si había un error los estudiantes caían en cuenta de lo que había ocurrido, sin embargo, al permitir que se intercambiaran los mensajes sin haber sido corregidos por la docente fue más valioso porque establecían discusiones entre los emisores y los receptores para hallar el error.

En el transcurso de la actividad se hace necesario unificar el código de las letras con números, entonces se establece el siguiente:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
-13	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4
K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S
-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
T	U	V	W	X	Y	Z			
7	8	9	10	11	12	13			

También se evidencia que los estudiantes tienden a asociar una operación con una letra, entonces la usan cada vez que la requieren, así que hay que dejar claro explícitamente que deben utilizarse diferentes operaciones aun cuando el resultado sea el mismo. Asimismo, construyen mensajes procurando que no haya letras repetidas para no tener que pensar dos operaciones distintas que tengan el mismo resultado.

Por otra parte, el ejemplo que la docente utilizó los invitó a escribir mensajes muy similares “Cuida el agua”, “Cuida el medio ambiente” “Aliméntate bien”. Por lo que se sugiere que al realizar las actividades se acuerden otros puntos, como la longitud del mensaje y el tema, puede ser más productivo si la idea es enviarle un mensaje oculto a un amigo de la clase.

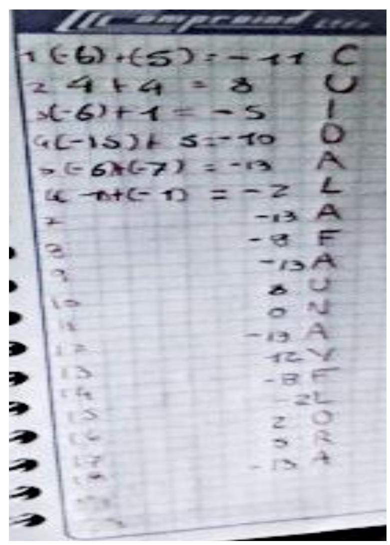


Figura 21. Un estudiante construye su Mensaje Oculto

Inicialmente la actividad de escribir el mensaje oculto de manera individual se dejó como tarea, pero no fue exitoso porque los estudiantes no hicieron la tarea ya sea por falta de responsabilidad o porque no estaban seguros de lo que debían hacer, por esto se sugiere que se elabore en clase y preferiblemente en parejas, ya que al trabajar con otra persona aclaran inquietudes y son más creativos. Cabe anotar que la reflexión en relación con las tareas propuestas para la casa es importante, pues no se debe excluir de la discusión al estudiante que por algún motivo no realizó la actividad no presencial, el profesor debe anticipar este hecho y buscar estrategias que le permitan vincular a los estudiantes que están en dicha situación.

Paseando por la recta real. (*Lenguajes gráfico y simbólico-matemático*)

Los estudiantes se organizan en tríos y deben construir una recta numérica en el patio de descanso, con ayuda de tizas de colores. Ellos realizaran los desplazamientos indicados en cada operación para averiguar en qué punto quedan.

Antes de iniciar el desplazamiento se acuerda que siempre se ubican en el cero mirando hacia la parte positiva. El signo – que se refiere el número negativo indica que el movimiento es de espalda (retrocede; como la reversa de los carros). El signo – de la operación indica que debe hacer un giro de 180º

La docente da un par de ejemplos; lo hace desplazándose físicamente, sus movimientos se ilustran en la tabla 11:

Tabla 11. Ejemplo de movimiento en la actividad "Paseando por la Recta Real"

Paso a paso	Movimiento
(-3) – 5 =	Se ubica en una recta, inicia en cero, mirando hacia la parte positiva.
(-3) – 5 =	Retrocede tres (aún mira hacia la parte positiva)
(-3) – 5 =	Gira 180º (queda mirando hacia la parte negativa)
(-3) – 5 =	Avanza 5 (mirando hacia la parte negativa)
(-3) – 5 =	¿Dónde queda?
(-3) – 5 = -8	Resultado
(-2) – (-7) =	Se ubica en una recta, inicia en cero, mirando hacia la parte positiva.
(-2) – (-7) =	Retrocede dos (aún mira hacia la parte positiva)
(-2) – (-7) =	Gira 180º (queda mirando hacia la parte negativa)
(-2) – (-7) =	Retrocede 7 (aún mira hacia la parte negativa)
(-2) – (-7) =	¿Dónde queda?
(-2) – (-7) = +5	Resultado

Después les asigna una lista de sustracciones que deben representar por turnos en las rectas que ellos han dibujado, buscando incluir todas las posibles variaciones de la sustracción:8 -3, 7-4, 9-0, 0-5, (-3) - (-7), (-8) - (-1), -6 - (-6). A la vez van llenando una tabla que fue modificada para que asimilaran lo que iba ocurriendo. En el ejemplo de la docente se llenaría como se muestra en la tabla 12.

Tabla 12. Registro de los movimientos en "Paseando por la Recta Real"

Operación	Movimiento Inicial	Giro	Movimiento Final	Queda en
(-3) – 5 =	-3	-	5	-8
(-2) – (-7) =	-2	-	-7	+5

La actividad fue ajustándose varias veces; inicialmente la docente había sugerido utilizar tres colores para distinguir la parte positiva, negativa y neutra de la recta, pero queda claro que no es algo necesario cuando los estudiantes representan la recta con un solo color diferenciando correctamente cada parte. También ayudados por algunos espacios del colegio no dibujan una recta real, sino que utilizan baldosas para ubicar los números, entonces lo importante es que conserven el orden de los números y hayan entendido las indicaciones. Es primordial que comprendan que el "retroceder" es equivalente al movimiento de reversa de un carro, ya que a veces para evitar caminar hacia atrás giran y se confunden.

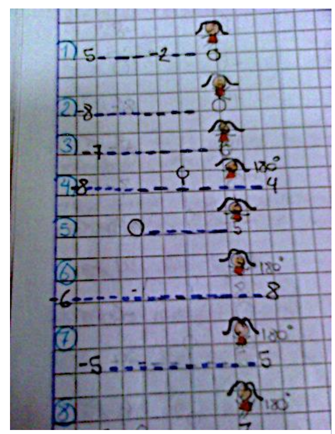


Figura 22. La parte de representación en la recta se omitió

Al comienzo, en la tabla se sugirió que hicieran un gráfico representando el desplazamiento realizado, pero resultó ser complejo y no aportó positivamente a la intención de la actividad, por lo cual se omitió. En la figura 22 se muestra el intento de una estudiante de hacer esta representación.

Después de realizar la actividad se hizo la corrección en el salón. Esta vez se hizo la recta en el tablero y el desplazamiento se hacía con ayuda de un muñeco. De esta manera los estudiantes que aún tenían dificultan para entender lo que ocurría pudieron asimilarlo. Esta actividad podría haberse realizado desde el principio con ayuda de un carro de juguete; los estudiantes comprenden mejor cuando observan el movimiento que cuando hacen parte directa de él.

La lectura del ejercicio a realizar la hacía de un estudiante a otro, lo que buscaba la comprensión del lenguaje matemático a través de la lectura en voz alta.

Hay estudiantes que vienen de otras instituciones y han aprendido a realiza operaciones entre enteros utilizando la conocida “Ley de signos”, uno de ellos está realizando la operación -4-(-10) y sin reflexionar concluye que es 14. Al preguntarle el porqué, su afirmación es que “si los dos signos son iguales, da el otro signo”. Al pedirle que haga el desplazamiento con ayuda del muñeco se da cuenta de que algo está mal, pero no comprende por qué no funcionó. Esto es positivo porque permite cuestionar su conocimiento previo y ayudarle a comprender los procesos matemáticos más allá de la mera aplicación de fórmulas mágicas.

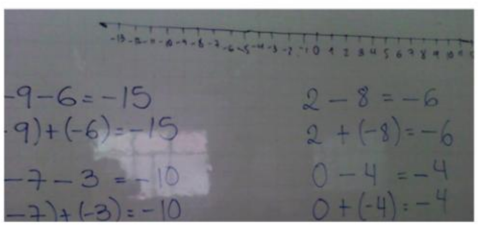


Figura 24. Ejercicios propuestos en la adición para generalizar.

El proceso a seguir es que se les pide a los estudiantes que realicen un listado de operaciones intercalando adiciones y sustracciones equivalentes, como 5+(-7) y 5–7 o (-8)-(-10) y (-8)+10 y se socializan las respuestas en el tablero como se ilustra en la figura 23, con esto se busca que los estudiantes concluyan que “restar un número es equivalente a sumar su opuesto” e intentar que ellos formalicen la conclusión utilizando lenguaje simbólico apropiado, la docente lo escribe en el tablero como se muestra en la figura 24. Al finalizar la acción no es posible que todos los estudiantes alcancen el nivel de uso de lenguaje esperado. Sin embargo, quienes no lo lograron evidencian una mejor aproximación al concepto.

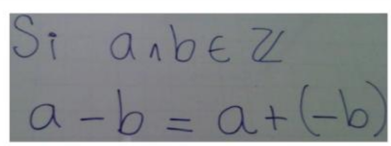


Figura 23. Uso de lenguaje simbólico matemático.

Multiplicación: “La adición repetitiva.” (*Lenguaje simbólico-matemático*)

La multiplicación ***a* x *b***, siendo ***a*** y ***b*** números enteros, se define como la suma de ***b***, ***a*** veces. Partiendo de este hecho, la profesora da un ejemplo:

4 x 5 es sumar 5, 4 veces, entonces, 4 x 5 = 5 + 5 + 5 + 5 = 20.

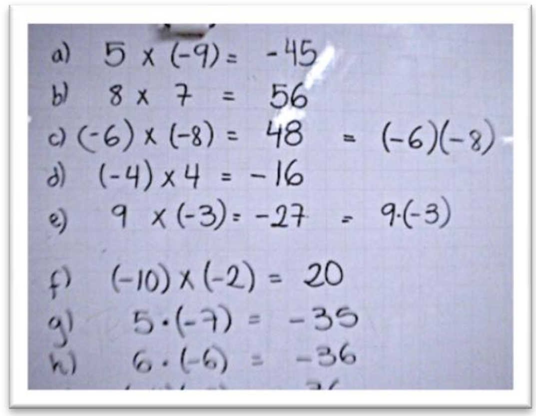


Figura 25. La docente muestra diferentes formas de expresar la multiplicación.

Luego los estudiantes hacen varios ejemplos similares. En este punto no hay inconveniente, ya que ellos manejan la multiplicación en los números naturales. Luego se les pide que hagan ejercicios donde el segundo factor es negativo. Como el siguiente:

4 x (-5) es sumar -5, 4 veces, entonces,

4 x (-5) = (-5) + (-5) + (-5) + (-5) = -20.

Algunos estudiantes hacen el ejercicio de la siguiente manera:

2 x (-4) es sumar 2 veces (-4), entonces, 2 x (-4) = -4-4 = -8. Entonces otros discuten que no es la forma correcta; lo correcto es decir (-4) + (-4), aunque el resultado sea igual. Esta situación permite retomar el concepto de la adición en los Z.

Posteriormente se les pide hallar productos donde el primer factor es negativo y explicar el proceso. Los estudiantes dudan porque no tiene sentido hablar de un número negativo de veces, pero un estudiante explica que si 2 x 8 = 8 x 2, entonces “(-2) x 8 = 8 x (-2) y ya saben que 8 x (-2) = (-2) +(-2) +(-2) +(-2) +(-2) +(-2) +(-2) +(-2) = -16”. Al preguntarle si está seguro de que en los números enteros también funciona la propiedad conmutativa para la multiplicación de números enteros, él duda. Pero otros compañeros dicen que “debe funcionar porque los números negativos son opuestos de los naturales”. Este hecho se aprovecha para definir (-2) x 8, como “el opuesto de sumar 8 dos veces”. Utilizando esta idea también se define el producto de dos números negativos.

La División y las rutinas de pensamiento. (*Lenguajes natural y simbólico-matemático*)

La enseñanza de este tema parte de aplicar una rutina de pensamiento basada en la rutina Pensar – Separar - Compartir. Antes de iniciar se les pide a los estudiantes que reflexionen sobre la importancia de escuchar y de respetar la palabra del compañero. Luego se les pide observar en silencio una imagen en la que hay dos divisiones, una realizada de la manera en que es por ellos conocida, y otra con el procedimiento norteamericano. Una de las diapositivas usadas se presenta en la figura 26.

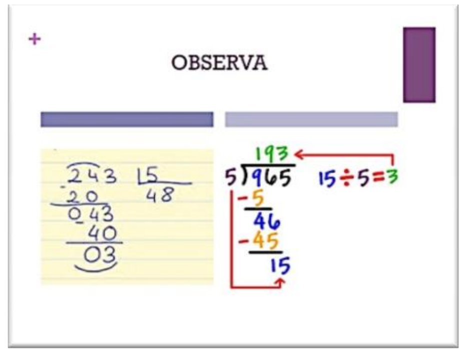


Figura 26. Diapositiva "División y las rutinas de pensamiento"

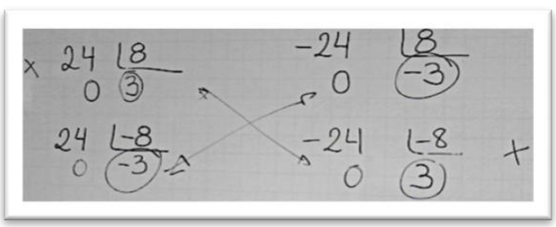


Figura 27. Análisis de la relación de los signos en la división.

Después ellos se hacen por parejas y comienzan a contarse lo que vieron; desde lo que resulta evidente hasta lo que requiere un poco más de reflexión. Entonces se socializan todas las respuestas pidiendo que no repitan lo que han mencionado, para obligarlos a estar atentos. En esta fase ellos comienzan a hacer preguntas ¿Eso también es una división? (Refiriéndose a la que no es conocida por ellos) ¿Por qué está en desorden? ¿Por qué hay restas? Este momento se aprovecha para recordar los términos de la división y el proceso para dividir, también se indaga sobre lo que ocurre cuando el divisor y el dividendo tienen signos iguales y cuando tienen signos contrarios, esto se presenta en la figura 27.

Los estudiantes mencionan las divisiones exactas, en este contexto la docente hace preguntas como ¿Cuándo el cociente es cero?, los estudiantes dan una respuesta y, sin afirmar que es correcto o no, la docente aplica la rutina "¿Qué te hace decir eso? Por ejemplo, a la pregunta ¿Cuándo el cociente será uno? Ellos dicen rápidamente que cuando el dividendo y el divisor sean iguales, y esto lo argumentan con ejemplos. Entonces la docente pregunta ¿Cuándo el cociente será -1? Y ellos responden con rapidez que cuando el dividendo y el divisor sean negativos, pero luego de unos ejemplos se dan cuenta de que deben ser números opuestos.

Esta actividad ayudó a utilizar lenguaje matemático, la docente representó cada término con una letra así: *a* es el dividendo, b el divisor, c el cociente y del residuo. La pregunta ¿Cuándo el cociente será -1? La escribió ¿Cuándo c=-1^ d =0? Y luego la respuesta c=-1 ^ d =0, si *a*=-b. El registro de esta situación se muestra en la figura 28.

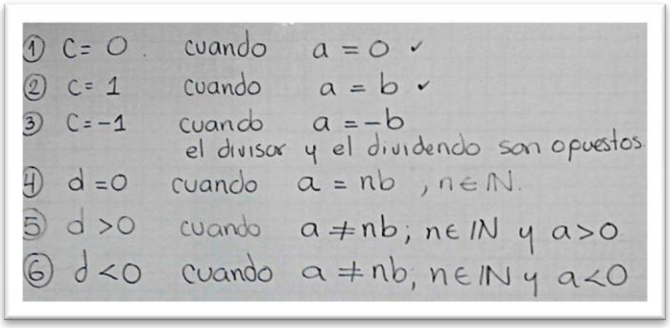


Figura 28. La docente involucra lenguaje simbólico matemático en la actividad

Luego los motiva a hacer preguntas que organiza para que los estudiantes respondan argumentando o contradiciendo utilizando ejemplos. Una pregunta se liga con la anterior, en las divisiones inexactas ¿Cuándo c=-1?, algunos estudiantes notan que el dividendo y el divisor “son consecutivos” “Están cerquita” “Pero no se pueden pasar, no puede caber más veces”, esta situación lleva a otra pregunta ¿Cómo son el dividendo y el divisor cuándo el residuo es cero?, a lo que responden “El residuo es cero cuando el dividendo está “en la tabla” del divisor” que luego se transforma en “cuando el dividendo es múltiplo del divisor”, entonces surge otra pregunta ¿Cuándo el residuo es negativo?. La discusión de esas preguntas es tan valiosa como las respuestas porque cada vez se va fortaleciendo el concepto de la división y el lenguaje matemático.

En este episodio la docente investigadora incluye un nuevo elemento a su práctica y es uso de la rutina de pensamiento, encontrando que el tiempo individual de observación es necesario para que los estudiantes hagan una reflexión sobre lo que conocen. Las preguntas que surgen desde sus observaciones favorecen el desarrollo del tema y la discusión entre ellos. Es importante brindar suficiente tiempo para cada paso de la rutina de tal manera que todos los estudiantes tengan la oportunidad de ir avanzando en el objetivo propuesto para la actividad.

La Calculadora en Potencia. (*Lenguajes natural y simbólico-matemático*)

Al enseñar la potenciación, generalmente los docentes de matemáticas explican la definición y luego hacen un listado de las propiedades, ilustrando con ejemplos su veracidad, o realizando varios ejercicios similares hasta llegar a una generalización.

Figura 29. Los estudiantes proponen una hipótesis

Para que los estudiantes descubran que las potencias impares de números negativos son negativas se realizan varios ejercicios prácticos, y se repite este proceso con exponentes pares para que ellos se den cuenta de que en este caso la potencia es positiva.

Sin embargo, al hacer este tipo de actividades el tiempo se dilata mientras los estudiantes realizan multiplicaciones cada vez más largas, perdiendo de vista el objetivo principal de la clase que es comprobar o descubrir propiedades de la potenciación y no realizar multiplicaciones. Para simplificar este proceso la calculadora puede ser una herramienta adecuada, especialmente el modelo Casio Class Wiz cuyas características técnicas permiten no sólo agilizar los cálculos sino reforzar el uso adecuado del lenguaje matemático y evidenciar distintas formas de representación de un número.

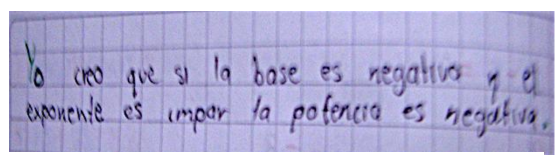


Figura 30. Hipótesis de una pareja de estudiantes

La clase inicia recordando el concepto de potenciación y sus términos y luego explicando cuáles son las teclas de la calculadora que se utilizarían en la actividad; este proceso fue muy sencillo porque el teclado de la calculadora permite transcribir en la calculadora casi textualmente la simbología utilizada en el tablero. Así, los estudiantes notan la importancia de utilizar los paréntesis para representar la potencia de un número negativo, rápidamente.

Figura 31. Uso de la calculadora para verificar o contradecir hipótesis.

Se aclara que la base *a* y el exponente n son números enteros y el objetivo es que cada estudiante proponga una propiedad hipotéticamente, la cual se verificará, refutará o ajustará asignándole distintos valores (positivos, negativos, cero, impares, pares) a la base y al exponente. Para ejemplificar lo que se espera, la docente escribe en el tablero “Yo creo que $\boldsymbol{a^1 = a}$”. Los estudiantes dan varios valores a ***a*** y confirman la veracidad de esa hipótesis. Luego ellos escriben sus hipótesis en parejas y las van ajustando de acuerdo a los resultados que observan cuando le asignan valores a la base y al exponente, este proceso se registró en las figuras 29, 30 y 31.

Se socializan las hipótesis acordadas por las parejas y el reto del grupo es encontrar valores para refutarla. De esta manera se ajustan y se aceptan los hallazgos de los estudiantes como se muestra en la figura 32, algunas de las propiedades encontradas por los estudiantes son:

$a^2 = (-a)^2$

$a^n \geq 0$ para $a \geq 0$

$1^n = 1$

$a^n > 0$ si $a < 0$ y n es par

$a^n < 0$ si $a < 0$ y n es impar

$a^0 = 1$, para $a \neq 0$

$a^{-1} = 1/a$, para $a \neq 0$

$0^n=0$, para n>0

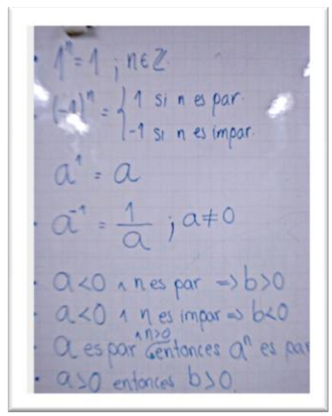


Figura 32. Se utiliza lenguaje matemático para generalizar los hallazgos

Aprovechando que un estudiante expresa que $2^{-3} = 1/8$, la docente propone hallar otros valores con exponentes negativos y los escribe en el tablero como se ve en la figura 33. Luego les pide que hallen los valores dejando la misma base y cambiando el exponente por su opuesto, entonces les pregunta qué observan y de esta manera, ellos concluyen que: $a^n = 1/ a^{-n}$.

Cuando los estudiantes utilizan valores negativos para el exponente pueden ver el resultado en la calculadora como un número decimal y también como una fracción. Esta equivalencia permitió mostrar la relación que existe en ambas representaciones del número. Además, se aprovecha la circunstancia para que ellos noten que cuando el exponente es

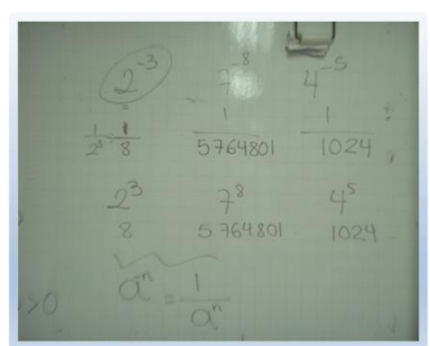


Figura 33. Actividad con exponentes negativos

positivo la potencia se hace inmensamente grande y cuando el exponente es negativo, esta se aproxima a cero.

Sin embargo, las preguntas asociadas con exponentes negativos pueden ser anticipadas para proponer actividades apoyadas con la calculadora como el cambio de registro de decimal a fracción buscando que sea el estudiante quien realmente infiera la propiedad. También sería interesante complementar el “Yo creo que” con un “Yo creo que … porque…”, de esta manera se pueden identificar cambios conceptuales de los estudiantes en el transcurso de los ejercicios.

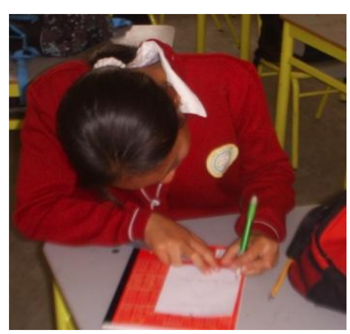
La experiencia fue gratificante tanto para los estudiantes como para la docente, ya que los estudiantes formulan hipótesis, verifican, contradicen, generalizan, argumentan, proponen, utilizan lenguaje matemático y aprenden mientras se divierten. Pero además se da un aprendizaje significativo, lo cual fue evidente en la siguiente clase; cuando la docente explica otras propiedades que no surgieron en la actividad anterior, estas son rápidamente asimiladas por los estudiantes porque los ejercicios previos permiten hacer la validación de las afirmaciones de manera ágil.

Finalmente, la intención es aprovechar al máximo las posibilidades que ofrecen este tipo de herramientas; lo importante no es la calculadora sino lo que se haga con ella.

¿Cuál es la figura? (*Lenguajes icónico y natural*)

Los estudiantes conocen las clasificaciones de los triángulos según sus lados y según sus ángulos, así como la clasificación de los cuadriláteros porque se han enseñado en sesiones previas. Sobre estos polígonos la docente hace 15 fichas en las que solamente hay representaciones icónicas de ellos. En cada ficha hay un único polígono, así:

1. Cuadrado
2. Paralelogramo
3. Rectángulo
4. Rombo



5. Trapecio escaleno
6. Trapecio isósceles
7. Trapecio rectángulo
8. Trapezoide asimétrico
9. Trapezoide simétrico
10. Triángulo acutángulo isósceles
11. Triángulo equilátero
12. Triángulo obtusángulo escaleno
13. Triángulo obtusángulo isósceles
14. Triángulo rectángulo escaleno
15. Triángulo rectángulo isósceles

Figura 34. El rol del dibujante

Figura 35. Actividad ¿Cuál es la figura?

En esta oportunidad los estudiantes se organizan en tríos; cada participante tendrá un rol, que irán rotando por turnos. Un estudiante será el *dibujante*, su función es realizar la gráfica del polígono en una hoja en blanco, siguiendo las indicaciones del *lector* (figura 34). Otro rol es precisamente el del *lector*; quien recibe la figura y la describe sin decir qué es, para que el dibujante la represente. Él debe ubicarse de espaldas al dibujante para que no pueda interferir en la representación y el dibujante no puede hacer preguntas. El tercer rol es el del *observador*, quién estará atento de lo que ocurre tomando nota de las frases que dice el lector, para luego comparar con el dibujo. Él no puede interferir de alguna manera; sólo puede observar. La ubicación delos estudiantes se muestra en la figura 35.

Al terminar una figura la comparan con lo que dibujaron y dijeron. Luego se les asigna una nueva figura, pero deben cambiar los roles.

Esta fue una de las primeras actividades que realizó la docente investigadora y se evidenció que, aunque los estudiantes conocían las figuras y sus nombres se les dificultaba describirlos, entonces hacían trampa mostrando las figuras o diciendo su nombre. Además, utilizan términos que no corresponden a la definición que quieren dar. Para definir un rectángulo un estudiante dice: "Tiene 4 lados; 3 cm a los lados y 4,5. Tiene ángulos de 90º". Otro dice "Dos paralelas y dos horizontales". Para definir un triángulo isósceles acutángulo un estudiante dice: "Tiene una rayita abajo. Tiene dos rectas. Tiene dos rayitas en las dos rectas. Es un triángulo. Es un triángulo isósceles tiene dos lados iguales y uno desigual". Otro para describir un trapecio rectángulo afirmó: "Tiene 4 lados de 90º y otro de más o menos 75º y el otro también de 90º"

A partir de esta información la docente se hace consiente de la necesidad de retomar los conceptos como: recta, paralela, grados, centímetros, lado, segmento, para aclarar dudas y corregir errores conceptuales.

Esta actividad permite hacer un diagnóstico de la comprensión de conceptos geométricos y del lenguaje matemático que se utiliza en el aula. En otra oportunidad puede volver a utilizarse para analizar el avance que han tenido los estudiantes en ese sentido. Además, es posible que los estudiantes hicieran trampa por estar acostumbrados a ser evaluados por los resultados, pero si se evalúa analizando el procedimiento quizás sean más cuidadosos en la forma en que se expresan; en lo que dicen y hacen antes de llegar al resultado.

Cabe anotar también que se hace necesario proponer la reflexión sobre el uso de un lenguaje matemático específico para el desarrollo de esta actividad. Se propone para futuras intervenciones, analizar con los estudiantes de manera explícita que inconvenientes se presentaron al momento de intentar comunicar las ideas geométricas que implicaba la actividad.

Perímetro y área: construyendo conceptos. (*Lenguajes natural e icónico*)

La docente parte del hecho de que los estudiantes tienen un conocimiento previo sobre el perímetro y el área de una figura, porque son temáticas que se abordan en cursos previos. Inicia la actividad preguntándoles qué es perímetro. Un estudiante afirma: "Es la suma de los lados" Entonces la profesora dibuja dos triángulos; uno grande y otro pequeño. Pregunta ¿Tienen el mismo perímetro? En coro "no". Ella insiste: "Pero si el perímetro es la suma de los lados, contemos -señalando los lados- un lado más otro lado, son dos lados y un lado más, son tres lados, según eso todos los triángulos tienen de perímetro tres lados". Otro estudiante: "Se suma lo que midan los lados".

La profesora les pregunta si sólo tienen perímetro los polígonos. “Sí” responden. ¿Entonces un círculo no tiene perímetro? – “Sí, si tiene”, un estudiante dice que es “El borde” y otro corrige pronto “Es lo que mide el borde”. La profesora dibuja una figura cerrada. “Supongamos que esto es un lago, y nos piden cercarlo, ¿podemos hacerlo?, ¿Cómo sabemos cuánto alambre necesitaremos? Los estudiantes sugieren contar el número de pasos o llevar una cuerda e irlo bordeando. Concluyen entonces que el perímetro es la medida del borde de una figura plana.

“¿Y si tuviéramos que medir su superficie, que podemos hacer?”, “Multiplicamos la base por la altura”, responde una estudiante. – “¿Puedes mostrarme la base y la atura en el tablero?” – otro estudiante: “Lo cubrimos con plástico”.

Esta parte de la actividad podría tener mejores resultados si se les pide que inicialmente cada uno escriba en su cuaderno lo que entiende por perímetro y área y luego lo discutieran en pequeños grupos para posteriormente socializarlo, de esta manera se propicia mayor participación de los estudiantes. Otra sugerencia es la de iniciar colocando imágenes que ilustren áreas y perímetros y posteriormente hacer la pregunta sobre lo que entienden acerca del perímetro y el área.

Después de socializar sus ideas al respecto, la profesora les solicita calcar su mano en el cuaderno y les dice que deben averiguar el perímetro y el área de la mano calcada (figura 36). Unos usan cordones para bordear el perímetro, otros usan la regla y van bordeando la figura, otros cuentan los cuadrados del borde (su cuaderno es cuadriculado), a estos últimos se les muestra que los segmentos no tienen la misma medida, utilizando una regla. Para hallar el área cuentan los números de cuadrados de la cuadrícula, en esta oportunidad procuran completarlos para contarlos, también usan monedas, tajalápices, borradores. Comparando los cuadernos donde ven las diferentes unidades que utilizaron para medir el área, pueden notar que deben ser cuidadosos con la unidad de medida que elijan y que en la mayoría de los casos sólo hallan aproximaciones porque no pueden cubrir perfectamente la superficie de su mano calcada.

Figura 36. Actividad área y perímetro de la mano.

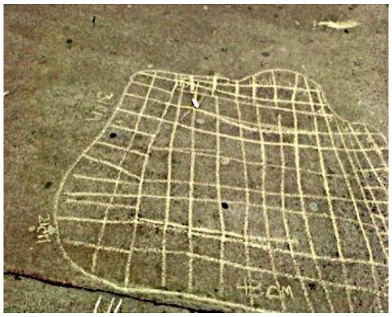


Figura 38. Cuadricula realizada para hallar el área

Luego replican la actividad en el patio, pero en esta ocasión cuentan con reglas, escuadras y metros. Se les pide hallar los perímetros y las áreas de figuras cerradas que la profesora dibuja en el patio. Ahí se evidencia que algunos no son cuidadosos con conservar la unidad de medida como se ilustra en la figura 37, no las utilizan correctamente o confunden el perímetro y el área ya que frecuentemente se acercan a la docente para pedirle que les aclare cuál es el perímetro y cuál es el área. (Figura 38).

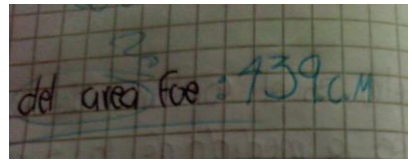


Figura 37. Uno de los errores frecuentes entre perímetro y área.

Esto se retoma en clase para acarar las dificultades que se presentaron y luego se les pide que hallen perímetros y áreas de polígonos irregulares. Posteriormente se les solicita que individualmente reflexionen sobre la veracidad de las siguientes afirmaciones:

"A mayor perímetro, mayor área"

"A mayor área, mayor perímetro"

"Si dos figuras tienen el mismo perímetro, entonces tienen la misma área"

"Si dos figuras tienen la misma área, entonces tienen el mismo perímetro"

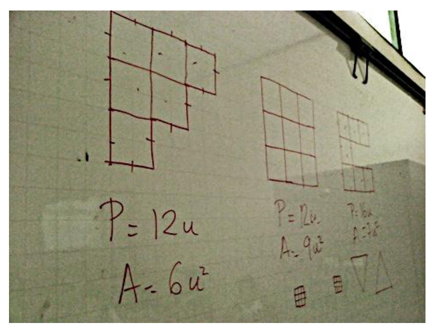


Figura 39. Utilizar dibujos ayuda a los estudiantes a resolver problemas

Antes de realizar la socialización general se les permite discutir sus puntos de vista en grupos pequeños y ellos acuden a los dibujos para expresar o demostrar lo que piensan. En este episodio emerge el uso del lenguaje icónico como una posibilidad de comunicación, los estudiantes lo utilizan con la intensión clara de comunicar a otros sus ideas y argumentos.

De otra parte, estas preguntas son muy importantes porque los estudiantes tienden a establecer relaciones entre el perímetro y el área que no existen. En la figura 39 se muestran la socialización de algunas respuestas dadas por los estudiantes frente a las afirmaciones propuestas.

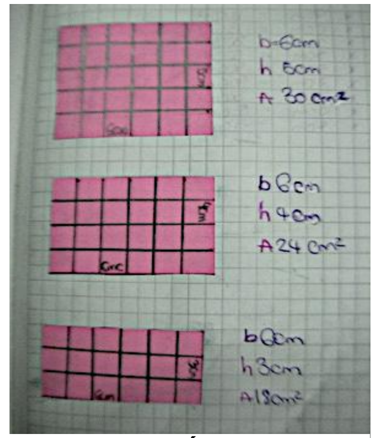


Figura 40. Área del rectángulo

Frecuentemente los estudiantes relacionan el área con el producto de la base con la altura, como se evidencia en el dialogo inicial de esta actividad, por esto la docente investigadora propone deducir las fórmulas generales del área con ellos, para lo cual desarrolló la siguiente actividad.

¿De dónde salen las fórmulas de las áreas? (*Lenguajes icónico, simbólico-matemático y gráfico*)

Área del rectángulo.

Los estudiantes construyen en cartulina libremente rectángulos cuyos lados sean centímetros enteros. Luego dibujan la cuadrícula en cm^2 y hallan el área de cada uno, esta actividad se ilustra en la figura 40. Posteriormente, la docente hace una tabla en el tablero donde coloca “Base”, “Altura” y “Área” y la llena con los datos que los estudiantes proporcionan de acuerdo a los rectángulos que construyeron, entonces les pregunta qué relación hay entre la base y la altura con respecto al área, de esta manera ellos concluyen que el área es el producto de la base por la altura, la socialización se muestra en la figura 41.

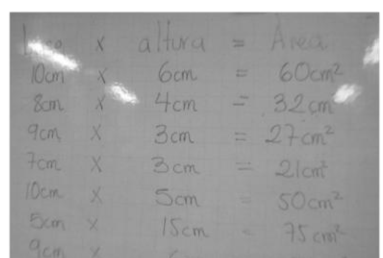


Figura 41 Generalización del área del rectángulo

Área del cuadrado.

Se recuerda a los estudiantes que el cuadrado es un rectángulo. Ellos evidencian que en el caso del cuadrado la base y la altura miden lo mismo, utilizando la fórmula encontrada para hallar el área del rectángulo comprenden la razón por la que el área del cuadrado es la medida de su lado al cuadrado.

Área del paralelogramo.

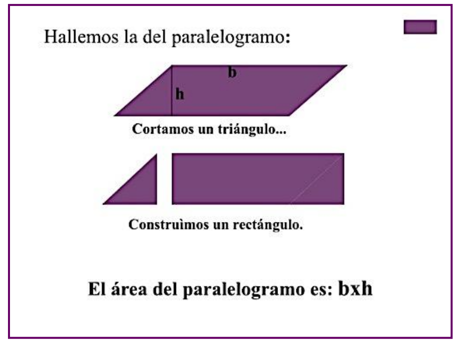


Figura 42. Diapositiva para recordar cómo se halla la fórmula del área del paralelogramo

Los estudiantes construyen en cartulina tres paralelogramos diferentes, con la condición de que no sean rectángulos. Toman uno y trazan una de sus alturas, luego recortan por esa línea. Con los dos trozos pueden construir un rectángulo. Notan que esto sucede sin importar como hayan hecho los paralelogramos. Hacen lo mismo con los otros dos. La profesora muestra varios paralelogramos construidos por ellos al grupo en general y se concluye que el área de un paralelogramo es igual al área de un rectángulo que tiene la misma base y altura que el paralelogramo; por lo tanto, el área del paralelogramo es el producto de su base por su altura. El procedimiento se presenta en la figura 42.

Área del triángulo.

Los estudiantes construyen tres parejas de triángulos congruentes, en cartulina. Las parejas deben ser distintas entre sí. Luego se les pide que con cada pareja de triángulos congruentes construyan un paralelogramo. Observan que esto sucede sin importar como hayan hecho los triángulos. La profesora les muestra que una de las alturas de los triángulos también es la altura del paralelogramo y les pide que la tracen en sus propios triángulos ayudándose con la escuadra. Luego les pregunta qué relación hay entre el área del triángulo y la del paralelogramo, pero debe acudir a ejemplos concretos; pregunta: “Si el área de este paralelogramo es 10cm^2, ¿Cuánto mide el área del triángulo?” (Muestra un paralelogramo construido con dos triángulos congruentes) y repite la pregunta con varios ejemplos, hasta que ellos comprenden que el área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo.

En este episodio se observa cómo la docente busca valerse de ejemplos para lograr lo que ella considera importante en la comprensión, en esta altura de la investigación es consciente que la idea no es indicar al estudiante cual es “la fórmula” sino buscar que el estudiante verbalice sus propias conclusiones.

Área de los polígonos regulares.

En esta parte se realizó una presentación en Power Point repasando los procedimientos vistos y explicando cómo hallar el área de un polígono regular. Se hizo de esta manera ya que la elaboración tomaba mucho tiempo y además se podía hacer uso de esta aplicación aprovechando los recursos de animación para hacerlo más atractivo. En la figura 43 se muestran las diapositivas en el orden presentado. Previamente la profesora les mostró varios polígonos con sus respectivos nombres y definió polígono regular, durante la presentación fue explicando detalladamente el proceso, aclarando inquietudes de los estudiantes.

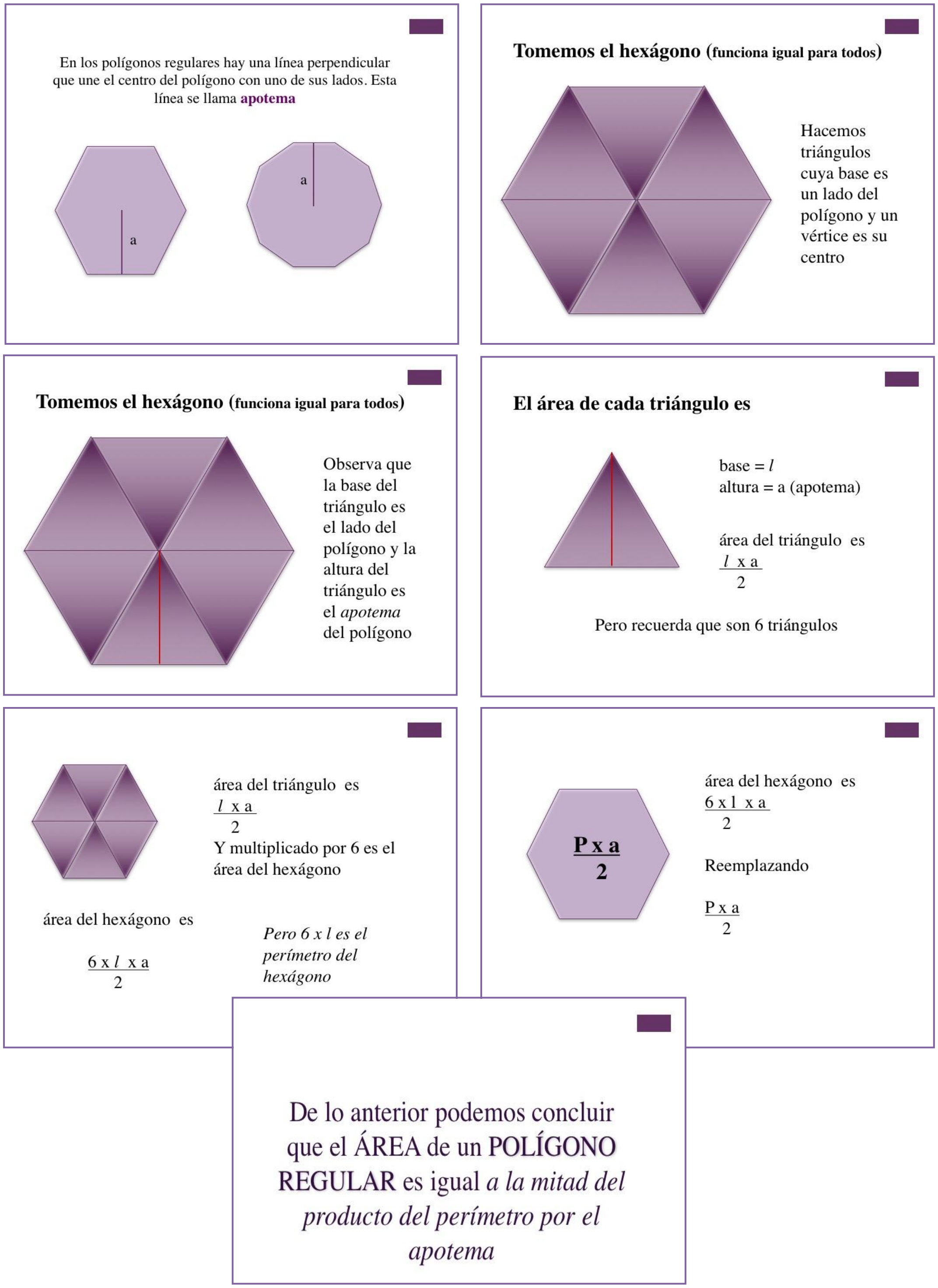


Figura 43. Fórmula del área de polígonos regulares

Una vez realizada la reflexión sobre la acción, se evidencia como la docente recurre a un medio tecnológico con el propósito de apoyar su discurso con imágenes y textos mejor elaborados, no obstante, la participación de los estudiantes es limitada y pasiva. En futuros ejercicios se propone el uso de rutinas de pensamiento tales como ¿qué veo?,¿qué me pregunto? Con el fin de involucrar en la discusión al estudiante.

Área del Círculo.

Para hallar el área del círculo es necesario conocer la longitud de la circunferencia, así que la docente definió las líneas notables de la circunferencia: cuerda, diámetro, radio y tangente. Luego pidió a los estudiantes que en parejas midieran el perímetro y el diámetro de objetos circulares con la mayor exactitud posible y hallaran la razón del perímetro entre el diámetro. Al socializar los hallazgos la profesora explica el origen del número π y deduce la fórmula para hallar la longitud de la circunferencia. Posteriormente, considerando el círculo como un polígono con n lados donde n tiende a infinito, dedujo la fórmula del área del círculo.

Esta actividad permite a los estudiantes comprender el origen y significado de las fórmulas del área, además del seguimiento de instrucciones. Aunque realizar el paso a paso toma mucho tiempo, esta actividad también contribuye a enseñarles el manejo de la escuadra, reforzar conceptos como área, apotema y altura. Si se hiciera la construcción de los polígonos podrían fortalecer el manejo del compás y del transportador.

Áreas Sombreadas. (*lenguajes icónico y simbólico-matemático*)

Generalmente cuando se trabajan áreas sombreadas se les brinda información suficiente a los estudiantes para que ellos encuentren el valor de esta área. Sin embargo, puede resultar mucho más productivo si se les da la imagen y se les pregunta ¿Qué información requieren para hallar el área sombreada?

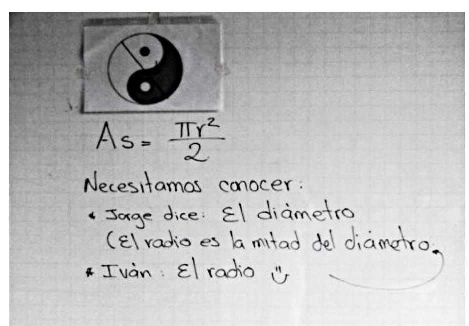


Figura 44. Socialización de la actividad de "Áreas Sombreadas"

La actividad inició con que la docente ubicó diez áreas sombreadas en diferentes partes del salón y luego les pidió a los estudiantes que las observaran y pensaran cómo hallarían el área sombreada y cuál sería la menor cantidad de datos que necesitarían conocer para poder hallarla. Ellos podían discutir con algún compañero su punto de vista.

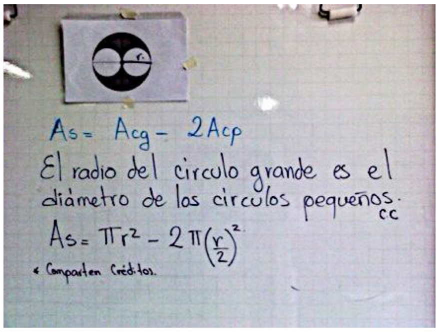


Figura 45. Los estudiantes indican el procedimiento para hallar áreas sombreadas

En esta fase ellos usan reglas porque sienten la necesidad de saber cuánto miden los segmentos, intentan hacer alguna cuenta y se frustran al no ver números en las imágenes. Sin embargo, cuando la profesora les indica que deben decir el proceso general no hallar un resultado, se tranquilizan y se concentran más en el proceso que deben hacer.

Luego se coloca una de las imágenes en el tablero y se socializan las respuestas que dieron, algunas de ellas se presentan en las figuras 44 y 45. El proceso para hallar el área sombreada de algunas figuras tienen única respuesta, pero otras tienen varias posibilidades. También se dan cuenta de que la construcción de las figuras puede ser compleja, pero no lo es hallar su área.

En particular la docente consideró que esta actividad fue exitosa, porque favoreció la observación, discusión, argumentación y el análisis, aunque podría tener mejores resultados si en lugar de dejar las diez figuras abiertamente se toma una a una, dando espacio para la reflexión individual y socializando las respuestas, ya que algunos estudiantes logran mayor comprensión al escuchar las propuestas de los compañeros, de esta manera tienen la oportunidad de hacer la construcción de su propio conocimiento al interiorizar el mecanismo para hallar las áreas propuestas.

Calendario Matemático. (*Lenguajes natural, icónico, gráfico y simbólico-matemático*)

Esta herramienta se ha implementado al trabajo del aula y con el objetivo de aprovecharla al máximo, durante el tiempo de la investigación se han hecho numerosos ajustes.

Inicialmente se aplicaba como sugiere la empresa que los produce; un ejercicio para cada día. Sin embargo, los estudiantes no contaban con la disciplina para realizar las actividades diariamente; generalmente comenzaban a realizar los ejercicios que les llamaban la atención o los que consideraban más sencillos. Otra conducta frecuente era la de copiar las respuestas de otros compañeros para presentar el trabajo realizado sin alguna comprensión de la actividad. Al solicitarle a un estudiante que diera cuenta de un problema con frecuencia respondían "no sé".

La dinámica cambió cuando se les dio la oportunidad de trabajar en grupos los ejercicios propuestos en la clase, ya que discutían con sus compañeros sobre las alternativas de solución, compartían hipótesis y se ayudaban a recordar conceptos previos. Aunque seguía presentándose la conducta de copiar las respuestas de otro estudiante que ellos consideraban tener más conocimiento sin cuestionar ni la respuesta, ni el procedimiento. Además, seguían participando los estudiantes que tienen mayor fluidez verbal.

Figura 46. La discusión con otros estudiantes les permite intercambiar ideas

Posteriormente y aprovechando el espacio en que la docente llama asistencia se les pide que hagan uno o dos ejercicios, dependiendo de la dificultad. La dinámica consiste en que ellos deben *observar* individualmente el problema sugerido, luego deben tener claridad sobre la situación que deben resolver (¿Cuál es la pregunta?) y finalmente *expresar* lo que ellos saben; tanto de la información que es explícita como la que ellos pueden inferir, por ejemplo, si el ejercicio dice que ABCD es un rectángulo ellos infieren que sus ángulos son rectos.

Después del trabajo individual, la docente elegía un estudiante para que socializara su proceso. Se sugiere que la elección involucre a los estudiantes que frecuentemente evitan participar, porque si el estudiante tiene dificultad para expresar lo que observa el docente puede ayudarle con preguntas orientadoras como ¿Qué ves? ¿Qué crees que hay que hacer? ¿Qué sabes sobre…? Y según la experiencia de la docente investigadora, hacer esto ayuda a que los estudiantes superen su temor a participar. Además, es muy importante que aun cuando la respuesta no sea correcta se le permita al estudiante argumentarla, de esta manera él mismo cae en cuenta de su error o se le puede guiar para que lo haga. Es posible que en ese momento otros estudiantes intervengan para dar sus puntos de vista y eso debe permitirse porque enriquece la actividad. Por otra parte, al permitirles a los estudiantes explicar sus procedimientos se evidencia la relación que utilizan entre los diferentes tipos de lenguaje, además de errores conceptuales que puedan tener, uno de esos errores se muestra en la figura 47.

Es posible que una actividad tenga más de una respuesta o varias alternativas para solucionarla, las más frecuentes son aquellas en que deben ubicar algunos dígitos para completar una operación y se dan cuenta de que pueden cambiar el orden de los números para tener otra solución o aquellas en que deben dividir un área en otras de igual forma y tamaño. Permitir a los estudiantes tener varias miradas de la misma situación favorece su habilidad para seleccionar estrategias. Se sugiere que el docente pregunte siempre si la respuesta encontrada es única o si hay otra forma de hallarla y, cuando el ejercicio lo permita, buscar otras soluciones.

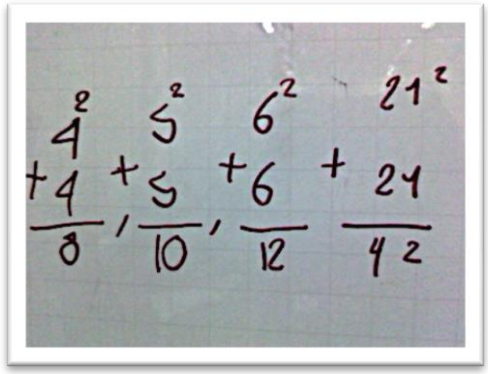


Figura 47. Una respuesta errada es tan útil como una acertada.

El calendario brinda ejercicios que no tienen información verbalizada. Al inicio para los estudiantes era muy difícil interpretar la situación y manifestaban “Profe, ahí no hay nada que leer”, entonces la profesora preguntaba “¿Qué ves?”, al comienzo se reían porque les parecía obvia la respuesta, pero al ir profundizando en la información del ejercicio empezaron a entender que se puede empezar por lo más evidente para llegar a lo más complejo. En una ocasión, en la etapa final de la investigación, el ejercicio a resolver tenía una figura compuesta por trapecios rectángulos y una pregunta ¿Cuántos paralelogramos hay en la figura?, la estudiante que debía resolver el ejercicio dijo: “Profe veo una figura compuesta por otras figuras, me preguntan cuántos paralelogramos hay y para poder contarlos debo saber qué es un paralelogramo”. Esto muestra que ella comprendía la pregunta y también era consciente del conocimiento que requería para dar respuesta. Si esta situación se hubiese presentado al inicio de la investigación, muy posiblemente la estudiante se hubiese negado a responder aun cuándo supiera lo mismo que en la etapa final.

Análisis de Resultados

El aprendizaje en matemáticas requiere de la asimilación y uso en contexto de un concepto, como lo menciona Fandiño (2010):

> *En matemática, de hecho, no basta con haber construido un concepto, sino que es necesario saberlo usar para efectuar cálculos o dar respuesta a ejercicios; combinarlo con otros o con estrategias oportunas para resolver problemas; es necesario saber explicar a sí mismo y a los otros el concepto construido o la estrategia seguida; se requiere un uso sapiente de las transformaciones semióticas que permiten pasar de una representación a otra.* (p.15)

Para que un estudiante explique el concepto que ha construido y utilice adecuadamente las transformaciones semióticas requiere de la comunicación. Aunque el concepto de comunicación no exige una detallada explicación, varios autores se refieren a esta en diferentes términos, así el MEN la considera un proceso general, la OCDE una competencia, Fandiño un aprendizaje y Sfard (2009) "El pensamiento mismo" (p.40). Sin embargo, todos coinciden en que el aprendizaje de las matemáticas está ligado a la comunicación. Esta no se da exclusivamente de manera oral, existen otras formas de comunicar que se encuentran presentes en el aula, el análisis de esas formas de comunicación entre los actores involucrados permite visibilizar aciertos y desaciertos que finalmente deben repercutir en la toma de acciones para mejorar las prácticas de aula.

Según Fandiño (2010) "En primera instancia, se trata de saber elegir el tipo del lenguaje con el cual se va a comunicar la matemática, es decir cuál es el más oportuno, caso por caso" (p. 134). Frente a esta afirmación, si bien se considera el lenguaje a utilizarse de acuerdo a la actividad planteada, apoyarse en los demás ayuda a reforzar el concepto y además permite hacer el aula incluyente, ya que entre más variedad haya para presentar un concepto se reduce la posibilidad de que algún estudiante no logre asimilarlo.

El análisis de las categorías propuestas se realiza de manera longitudinal en tres periodos que se denominaron momentos. El momento inicial se realizó de septiembre a noviembre de 2015, el intermedio entre febrero y mediados de abril del 2016 y el final entre mediados de abril y julio de 2016. Durante estos periodos, se analizaron diferentes episodios de clase documentados por la docente investigadora con la intención de identificar los procesos comunicativos propios y de sus estudiantes.

Teniendo en cuenta la metodología planteada a continuación se describirán los hallazgos en cuanto al uso de lenguaje utilizado por la docente y los estudiantes en el desarrollo de la práctica a la luz de cada una de las categorías y subcategorías planteadas, intentando realizar una detallada descripción en cada una de ellas.

Categoría: procesos comunicativos de la docente dentro del aula de matemáticas.

Lenguaje natural.

Inicialmente la docente investigadora daba indicaciones a los estudiantes asumiendo que eran suficientemente claras. La comunicación en el aula era unidireccional; de la docente hacia los estudiantes, una conducta frecuente. Fandiño (2010) indica "El docente actúa como si la comunicación se hubiera dado totalmente, así como la recepción" (p.134).

Utilizaba expresiones aprobatorias como ¡Ajá!, ¡Listo! ¡Bien! ¡Correcto! ¡Súper! o desaprobatorias como ¡Ehe! ¡Aha! ¡Nop!, para validar o no una respuesta independientemente del proceso. Su lenguaje era informal. Preguntaba y se respondía inmediatamente "¿Está claro?, ¡Listo!", sin permitir que los estudiantes asimilaran la pregunta.

En la etapa intermedia la docente investigadora pudo notar que sus instrucciones no eran claras o tenían vacíos que les permitían a los estudiantes hacer varias interpretaciones con la misma información. Esto la llevó a ser más cuidadosa en el planteamiento de instrucciones, preguntas y problemas, expresar con mayor claridad sus expectativas y a verificar que las instrucciones fueran claras para todos.

Utilizaba lenguaje formal para recordar definiciones. Aún continuaba utilizando las mismas expresiones aprobatorias y desaprobatorias, pero para validar el proceso más que la respuesta. Por otra parte, en ocasiones anticipando lo que algún estudiante quería decir lo interrumpía para concluir lo que ella creía que él iba a decir. En otras oportunidades desaprobaba una respuesta elaborando una pregunta con la respuesta dada, por ejemplo, ella pregunta "¿Cuántos divisores tiene el cero?", un estudiante dice "Cero" y ella repite "¿Cero?". Aunque es menos frecuente todavía hacia preguntas que ella misma se respondía.

En la etapa final procuró explicar las instrucciones de una actividad y verificar que los estudiantes comprendieran lo que ella esperaba que hicieran. Utilizaba lenguaje formal con más frecuencia y era cuidadosa al dar definiciones. Evitaba interrumpir a los estudiantes o terminar sus ideas, aunque hacia preguntas frente a la afirmación de un estudiante para ayudarle a expresar su punto de vista o para que su idea fuera comprensible para los demás estudiantes. Aún utilizaba expresiones aprobatorias y desaprobatorias, pero aprovechaba el error para examinar los procesos que llevaron a esa respuesta. Hacía preguntas evitando responderlas. Buscaba que los estudiantes validaran la respuesta de otro compañero en lugar de hacerlo ella haciendo preguntas como ¿Su compañero dice qué… están de acuerdo? ¿Por qué?

Durante todas las etapas la docente manejó un tono de voz fuerte y hacía cambios en él para enfatizar lo que ella consideraba pertinente frente a una instrucción o para reforzar un concepto.

Lenguaje matemático simbólico.

Al iniciar la investigación la docente omitía hacer uso del lenguaje simbólico matemático tanto como le fuese posible por considerar que podía ser muy complejo para los estudiantes y prefería utilizar un lenguaje menos formal y más cotidiano. El parecer inicial de la docente está justificado en que el uso de este lenguaje requiere del conocimiento de los símbolos y convenciones específicas, y en el constante discurso que se maneja en la comunidad educativa que invita a los docentes a ser más flexibles, menos rigurosos y a contextualizar todo lo que sea posible. Al respecto Lee (2006) explica que "Utilizar el lenguaje matemático puede ser una barrera para el aprendizaje de los alumnos debido a los

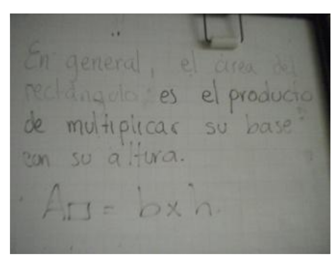


Figura 48. Uso inicial del lenguaje matemático

requerimientos y convenciones específicas necesarias para expresar los conceptos matemáticos". (p.19).

En el transcurso de la investigación, la docente se hace consciente del valor de utilizar el formalismo que requiere este lenguaje y comienza a utilizarlo en su práctica, procurando que los estudiantes comprendan tanto el significado como la importancia de su uso, lo que va evolucionando al transcurrir de la investigación. En las figuras 48 y 49 se ilustran algunos de los momentos en que la docente usa este tipo de lenguaje.

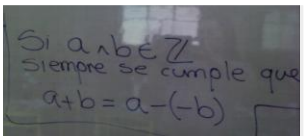


Figura 49. Se utiliza el lenguaje simbólico matemático para generalizar

Fandiño (2010) explica que: "La matemática necesita de rigor sintáctico y semántico, de univocidad, no por una manía del docente, sino objetivamente, para evitar ambigüedades y casos paradójicos o errados" (p.159), por su parte Lee (2006) afirma que "Los alumnos deben adquirir un vocabulario concreto, así como los medios de expresión y frases que son específicamente matemáticas y que hacen posible explicar los conceptos matemáticos" (p.19).

Es importante que el docente maneje suficiente vocabulario matemático y seleccione los términos que utilizará; los estudiantes deben comprender la importancia de emplearlos para que logren su asimilación, o de lo contrario no tendrá mayor significado para ellos. Al respecto Fandiño (2010) afirma que: "…insistir sólo en la elección de los términos de usar, o sobre la exactitud sintáctica o semántica; para muchos estudiantes esto aparece sólo como una manía (inútil) del docente" (p.134)

Por otra parte, en el momento final la docente investigadora se había convencido de que los estudiantes tienen la capacidad para comprender y utilizar este lenguaje, dependiendo del nivel en que se encuentren. También expresó que posiblemente el hecho de no contar con libros de texto en que los estudiantes puedan tener acceso constante a este tipo de lenguaje va limitando su uso en el aula y las consultas virtuales pueden ser contraproducentes porque muchas de las páginas de internet no utilizan adecuadamente este tipo de lenguaje.

Finalmente, en la medida en que se van desarrollando los procesos comunicativos en el aula, también se hace necesario que se motive a los estudiantes a escribir sus ideas matemáticas utilizando el lenguaje matemático y a que lea las ideas de sus compañeros.

Lenguaje gráfico.

En la investigación el lenguaje gráfico que se utiliza es en mayor medida el que se relaciona con la recta numérica, la cual permite establecer el orden en los números enteros y facilita la enseñanza de la adición en este conjunto numérico. Durante las tres etapas la docente es cuidadosa con la representación gráfica en la recta e insiste a los estudiantes para que manejen adecuadamente las escalas. También exige diferenciar entre rectas y segmentos e insta a los estudiantes para que utilicen la cuadrícula del cuaderno convenientemente para representar situaciones gráficas.

La docente también se apoyó con frecuencia en tablas para organizar la información, generalmente el objetivo al hacerlo de esta manera es permitir que los estudiantes observen patrones y lleguen a generalizaciones. Esta conducta está presente en las tres fases. El lenguaje gráfico puede desarrollarse con más profundidad cuando se trabajen gráficas de funciones o estadísticas, ya que el análisis de estas representaciones ofrece gran riqueza frente a la competencia comunicativa en el aula de matemáticas.

No obstante lo anterior, la docente es consciente que su uso de la recta numérica es mecánico y no realiza reflexiones con sus estudiantes sobre la lectura del registro, de otra parte no utiliza otros registros de representación para buscar que sus estudiantes identifiquen unidades de significado con otros registros utilizados para representar los números enteros.

Lenguaje icónico.

Al comienzo la docente investigadora utiliza dibujos para representar diferentes situaciones matemáticas; como en el caso de los números relativos cuando solicita dibujar en el mismo plano un avión en vuelo, una isla y un submarino sumergido. Sin embargo, no aprovecha la riqueza de estas representaciones y evalúa de acuerdo a lo que para ella es correcto sin mayor análisis. Ella utiliza símbolos matemáticos para indicar un concepto matemático, aunque el dibujo no esté bien elaborado, por ejemplo, hace un cuadrado pequeño dentro de un triángulo para indicar que este es un triángulo rectángulo aun cuando la figura no lo parezca. Lo mismo sucede cuando traza dos líneas pequeñas en los lados de un triángulo para indicar que es isósceles.

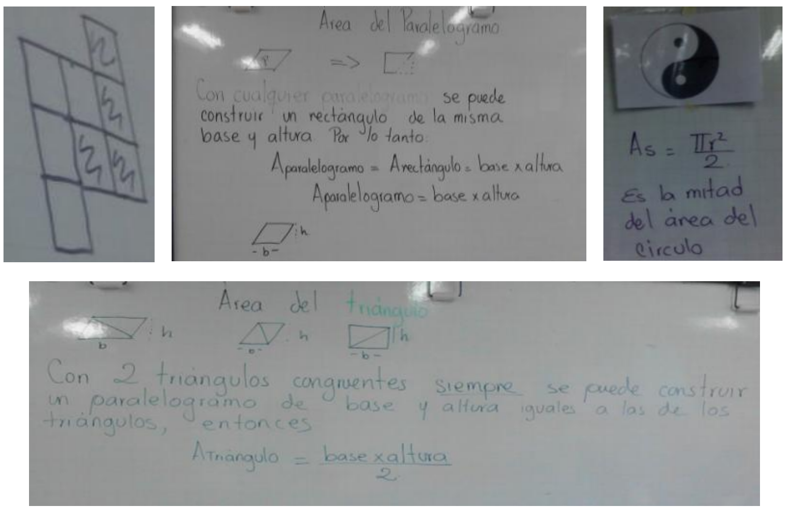


Figura 50. El lenguaje icónico ayuda a representar conceptos o situaciones matemáticas.

En la etapa intermedia, de una manera más consciente utiliza representaciones gráficas para explicar conceptos; como el de área y perímetro, o para ilustrar y/o resolver problemas e intenta que visualmente correspondan a la simbología utilizada.

En la etapa final la docente usaba el lenguaje icónico para representar situaciones e invitaba a los estudiantes a ser cuidadosos con las suyas. Además, se apoyó en impresiones o presentaciones digitales para que las figuras fueran más atractivas para los estudiantes y correspondieran a lo que ella deseaba que observaran. A este respecto, Fandiño (2010) menciona que “Si no se hacen consideraciones específicas y oportunas, puede ser didácticamente peligroso insistir sólo en la elección de los términos de usar” (p.134), por lo tanto, debe haber coherencia entre la representación y la definición de un objeto matemático. Algunos de estos registros se muestran en la figura 50.

Lenguaje gestual.

Una de las características de la docente investigadora es que se apoyaba en el lenguaje gestual para reforzar lo que decía, así que la expresión de su rostro acompañaba sus palabras cuando aprobaba o desaprobaba algo, además utilizaba sus manos para indicar tamaños o formas.

En la etapa intermedia, cuando la docente estaba en el proceso de evitar la validación o desaprobación de una respuesta sus gestos delataban su intención frente a los estudiantes. En este cambio de rutina en la clase un aspecto que resultó ser desafiante para la maestra fue el de evitar delatar sus pensamientos a través del lenguaje gestual, ya que en ocasiones al preguntar "¿Por qué afirmas eso?" con su cabeza hacía un gesto de desaprobación. Esto sucedía porque había una conducta arraigada y el cambio resultó ser tan difícil para los estudiantes como para ella.

En la etapa final es evidente que había mayor cercanía de la docente hacia los estudiantes, ya que su postura era menos rígida y permitía que la ubicación de los estudiantes favoreciera la interacción con ella y entre ellos, rompiendo las líneas de las filas y formando grupos de estudiantes.

Categoría: Procesos comunicativos del estudiante, entre pares y con la docente, en el aula de matemáticas.

Lenguaje natural.

Inicialmente se evidenció que los estudiantes tenían dificultad para expresarse verbalmente y por escrito. Era difícil lograr que se expresaran abiertamente y con frecuencia sugerían respuestas sin argumentarlas, ya sea porque las daban sin reflexión previa o porque se sentían intimidados para hacerlo. Tenían tendencia a ser muy literales y por consiguiente en ocasiones no lograban asimilar una idea porque no encajaba en la definición que conocían.

En ocasiones utilizaban términos matemáticos para expresar situaciones que en realidad no corresponden a la definición, por ejemplo, para referirse a un trapecio un estudiante dijo "Es un triángulo, está espichado". Otro tratando de definir un triángulo equilátero dijo "Es un triángulo. No tiene partes rectas". O al responder a la pregunta "¿Qué es un rectángulo?" la respuesta de un estudiante es "Son los que tienen cuadritos en las esquinas". También utilizan comparaciones o ejemplos para expresarse; a la pregunta "¿Qué son rectas paralelas?" la respuesta de un estudiante es "Son las que viajan una al lado de la otra"


Figura 51. La distribución en el aula incide en los procesos comunicativos.

También fue notorio que, aunque muchos estudiantes sabían las respuestas se abstenían de participar. La docente indagó sobre las causas y los estudiantes manifestaron por escrito y de manera individual, estar temerosos de la burla de los compañeros, más que de equivocarse. Al hacer la reflexión con el grupo en general los estudiantes afirmaron que su mayor temor era a la recriminación de la docente. Ellos estaban acostumbrados al reconocimiento o al regaño, a la postura rígida de la docente en clase, a las filas derechas y a pedir la palabra levantando la mano. Al respecto Lee (2006) afirma que “Con frecuencia los alumnos están demasiado preocupados por no cometer errores y a veces prefieren no intervenir en absoluto por miedo a expresar una idea errónea” (p.25). Esa situación obligó a realizar cambios en la mentalidad y la actuación de la docente, en la distribución del aula y por supuesto, en la forma en que los estudiantes se desenvuelven en el aula de matemáticas. En la figura 51 se observa la disposición inicial de un grupo de estudiantes.

En la etapa intermedia la docente propició espacios donde pudieran socializar en grupos pequeños, cuando trabajaban en grupo eran más asequibles, pero si debían socializar frente al curso aún se sentían inseguros, especialmente porque notaron que la profesora dejó de preocuparse por la respuesta y comenzó a enfatizar en el procedimiento.

Para favorecer la comunicación en el aula fue necesario revisar la distribución de los estudiantes en el salón, así como la ubicación de la docente. Aunque existe una idea generalizada de considerar que los estudiantes deben estar siempre en silencio y pedir la palabra para hablar, hay momentos en que el bullicio se ocasionaba por la discusión de un evento propio de la clase y no por agentes externos, estos momentos que podían ser molestos para la docente permitieron que aclararan inquietudes o se expresaran libremente. Lee (2006) explica una de las razones más importantes para considerar la ubicación de los estudiantes en el aula: “Si los alumnos se pueden oír unos a otros, los profesores no tienen que repetir o reiterar lo que estos dicen” (p.50).

También se fomentaron espacios de reflexión individual y de comunicación entre ellos sin la intervención de la docente. De acuerdo a Lee (2006) "Los alumnos necesitan más tiempo para acostumbrarse a la demanda de respuestas que requieren algo más que una simple contestación, así como para pensar y explorar conceptos" (p.98) Además en muchas ocasiones logran mejor comprensión cuando se comunican entre pares. En la figura 52 se muestra una pareja de estudiantes intercambiando sus ideas, en la figura 53 se presenta un cambio en la disposición de la clase.

Figura 52. Los estudiantes intercambian ideas.

El apoyo de la docente fue importante para que los estudiantes adquirieran la seguridad necesaria para argumentar una respuesta, de esta manera si ella se ofrecía a escribir en el tablero lo que ellos le presentaban y sugería ayudarlos a explicar el procedimiento, entonces se motivaban a hablarle al grupo. En esta etapa era frecuente que los estudiantes expresaran que algo no se podía resolver si no era comprensible a primera vista. Sin embargo, una cualidad de los estudiantes de este nivel es que logran adaptarse rápidamente a nuevas situaciones, por lo cual finalizando esta etapa comenzaron a cuestionar a los compañeros y a discutir con argumentos.

Figura 53. La socialización entre estudiantes para desarrollar su competencia comunicativa

En la etapa final los estudiantes comenzaron a utilizar lenguaje formal adecuadamente, participaba en clase y establecían discusiones entre ellos sin intervención de la docente. Corregían a sus compañeros y buscaban hacerse entender utilizando ejemplos o re contextualizando una situación.

Lenguaje matemático simbólico.

Inicialmente los estudiantes dan muestra de comprender los procesos matemáticos aun cuando no utilizan correctamente el

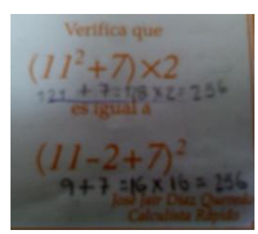


Figura 54. Manejo del signo igual

lenguaje simbólico matemático. También es frecuente que utilicen el signo igual sin mucha atención, como se evidencia en la figura 54. En la clase es común que al leer un ejercicio ellos se limiten a la respuesta; es decir, si el ejercicio 4 corresponde a realizar la operación “5 + 12”su lectura era “El ejercicio 4 da 17”

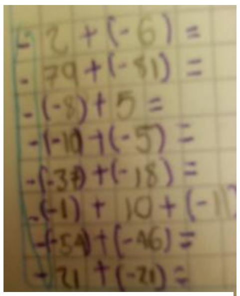


Figura 55. El uso del guion puede confundirlos

En la etapa intermedia los estudiantes comienzan a utilizar cuidadosamente el lenguaje matemático para representar adiciones en los números enteros. En esta parte es frecuente el uso del signo menos como un guion para listar los ejercicios, como se ve en la figura 55. La docente tuvo que insistirles a los estudiantes que no usara este registro con el fin de evitar confusiones con el doble uso del signo “-”. Ellos comienzan a hacer lectura oral del lenguaje matemático por solicitud de la docente, entonces leen la operación completa para luego indicar el resultado: “Cinco más doce es igual a diecisiete”. En la figura 56 se muestra como una estudiante escribe su traducción de lo que representan algunos símbolos matemáticos por iniciativa propia, para “no olvidarme de lo que significan”.

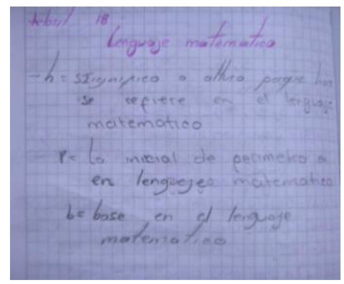


Figura 56. “Traducción” de símbolos matemáticos

En la etapa final continuaba la lectura oral del lenguaje matemático y los estudiantes se corregían entre ellos, además lograban interpretar expresiones matemáticas, aunque eran temerosos para escribir el lenguaje matemático. La docente pedía a los estudiantes escribir en el tablero un ejercicio dictado por otro y resolverlo. De esta manera, los demás corregían tanto al que hacía la lectura como a quien tomaba nota. En una ocasión un estudiante escribió “7-(-0) =”, algunos estudiantes cuestionaron la escritura del “-0”, la profesora le pregunta a quien lo escribió “¿Qué significa -0?”, el estudiante no responde, pero otro dice “el opuesto de cero”, la profesora replica “¿Y cuál es el opuesto de cero?”, “cero” responde un tercero, pero otro dice “El cero no tiene signo, eso no se escribe así, ¿Cierto profe?”. En esa misma clase un estudiante dicta “menos ocho más tres es igual a”, el que escribe registra “-8+3=”. Esto genera una discusión sobre si el -8 debía o no ir entre paréntesis. Estas situaciones evidencian que los estudiantes hacen análisis de lo que significan las expresiones matemáticas frente a los conocimientos que tienen.

Por otra parte, en ocasiones mostraron curiosidad sobre cómo se expresa alguna situación a través del lenguaje matemático, pero aún les parecía complejo este tipo de lenguaje.

Lenguaje gráfico.

Como se mencionó anteriormente en esta investigación el lenguaje gráfico se desarrolla en gran medida con respecto a la recta numérica y al uso de tablas de datos, por las temáticas abordadas.

Al inicio, en general, los estudiantes utilizan sus ideas previas para organizar datos sin considerar algún tipo de escala. Después van ubicando la información en la recta numérica, aunque cuando se inicia con este proceso cometen errores esperados por la docente; no ser cuidadosos con la escala, ubicar el 0 y el “-0”, asignar intervalos y no puntos a los números, ubicar los números negativos de menor a mayor, de derecha a izquierda o de arriba hacia abajo, o representar la recta como un segmento. En la figura 57 se muestra uno de estos errores.

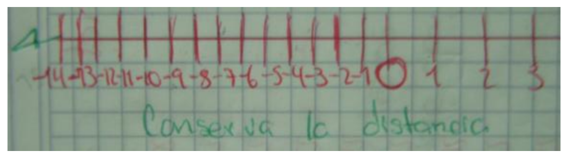


Figura 57. No manejar una escala es un error frecuente.

El manejo de este tipo de lenguaje no tuvo una variación evidente ya que desde la etapa inicial la docente procuró un manejo cuidadoso del mismo haciendo uso de escalas, presentando las características propias de la recta numérica y del plano cartesiano y revisando constantemente las representaciones individuales de los estudiantes para detectar las dificultades de cada uno y hacerle notar el error cometido. Esta tarea que puede resultar dispendiosa inicialmente tiene resultados positivos a largo plazo, ya que al hacerles caer en cuenta de sus errores son más cuidadosos en las siguientes oportunidades.

En ocasiones por sugerencia de la docente utilizaban la recta numérica para resolver problemas.

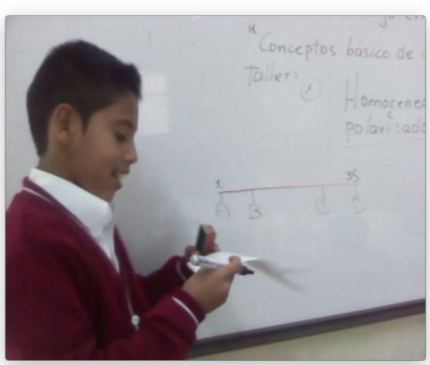


Figura 58. Dos estudiantes explican un ejercicio usando segmentos

Aunque en la etapa intermedia de manera independiente, algunos estudiantes asociaron los segmentos a partes de la recta numérica para resolver un problema de operaciones entre segmentos. En la figura 58 se muestran dos estudiantes explicando el mismo ejercicio con dos puntos de vista similares, pero con importantes diferencias; el primero utiliza operaciones entre segmentos y el segundo ubica puntos en un segmento.

El estudiante1inicia con la representación de la figura 59. Luego ubica las longitudes de los segmentos. La profesora le pregunta ¿Qué mide 35? Y él contesta “Todo esto” Señalando la distancia desde A hasta D, y continúa “Como desde A hasta C hay 23 y de B a C hay 29”, verifica visualmente lo que escribió ... luego escribe un 6 entre A y B y explica “Como de A a D hay 35 y de B a D hay 29; de A a B hay 6” y sigue “Como de A a C hay 23 y de A a B hay 6; entonces a 23 le resto 6 (escribe la resta) y queda 17” La profesora pregunta “¿17 es la distancia que hay entre…? Y él responde “entre B y C”.

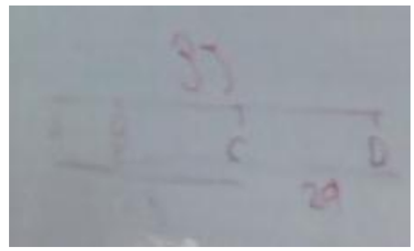


Figura 59. Introducción estudiante 1.

El estudiante 2, por su parte, ubica las longitudes de los segmentos haciendo coincidir los números y empieza en el número 1, como se muestra en la figura 60. Luego dice “Un número que me da restando 35 menos 29 es 6”, coloca el 6 sobre la letra B, y lee: “¿Cuál es la distancia entre B y C?” y continúa “Busco un número que me dé, de 6 a 23 y es 17”, escribe la respuesta a parte y repite “La distancia de B a C es 17”

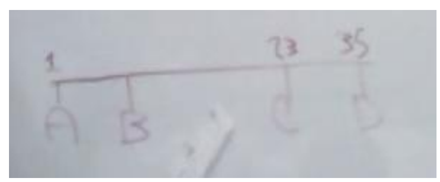


Figura 60. Introducción estudiante 2.

El primer estudiante utiliza las operaciones entre segmentos para hallar la respuesta, mientras que el segundo opera números ubicados en un segmento. Al hacer la explicación ambos se muestran confiados y seguros de la argumentación de su solución. Después del análisis la profesora le hace ver al primer estudiante que es importante que quede claro a qué se refieren los números que él va ubicando sobre los segmentos y al segundo le hace ver que el número que le corresponde a A, en ese caso es 0 y no 1.

Por otra parte, frente a las tablas, no todos fueron cuidadosos al diligenciarlas, pero esto no impide que pudieran observar generalidades y expresar conclusiones, especialmente cuando se socializan los resultados en el tablero.

Lenguaje icónico.

Figura 62. Representación icónica en la etapa inicial

Al inicio los estudiantes realizan representaciones casi literales de lo que se les pide; generalmente centran en mayor medida su actividad en la realización de dibujos que en la interpretación de los conceptos matemáticos. En la figura 61 se muestra un dibujo realizado donde la profesora pedía dibujar un avión a cierta altura, una isla al nivel del mar y un submarino sumergido cierta distancia. El estudiante realizó los dibujos con detalles, pero ignoró totalmente la información matemática. En la figura 62 se visualiza la representación de un fractal, donde claramente se ve que los trazos no son rigurosos.

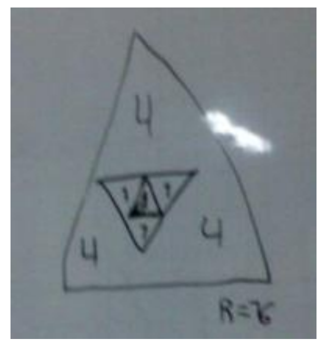


Figura 61. Las representaciones geométricas son descuidadas.

En la etapa intermedia utilizan representaciones gráficas para ayudarse a comprender un problema, una pregunta frecuente en el aula era: "Profe ¿Puedo hacer un dibujo?", refiriéndose a la posibilidad de expresar la situación de una manera más visual. En la figura 63 se evidencia una situación en la que el dibujo ayuda a comprender el enunciado del problema que dice: "Dos atletas parten del mismo punto hacia el occidente. La velocidad del primero es de 20 metros por 15 segundos y la del

Figura 63. Representación icónica de un estudiante.

segundo de 30 metros por 15 segundos, ¿Qué distancia los separa al cabo de 15 segundos, un minuto …? el estudiante marca cada metro en una recta, donde el punto de partida es cero y ubica los atletas a los 15 segundos. Esto le ayuda a visualizar la situación de la primera parte del problema.

En la etapa final se evidenció que los estudiantes utilizaban símbolos matemáticos para indicar características en sus representaciones, aun cuando visiblemente no correspondieran, por ejemplo:

Figura 64. La mitad de una región.

utilizaban el cuadrado en las esquinas de un polígono para representar ángulos rectos en ángulos que visiblemente no lo son. Pero también son más creativos para hallar soluciones a través de dibujos, como se muestra en la figura 64, donde debían representar la mitad de una región de diferentes maneras.

Lenguaje gestual.

Inicialmente los estudiantes mostraban su inseguridad evitando la comunicación con la docente. En ocasiones hacían gestos con sus manos para tratar de explicar ideas como el paralelismo o la forma de una figura, quizás por la limitación en su lenguaje natural.


Figura 65. Los estudiantes se sienten más cómodos para expresarse.

Posteriormente desde el intermedio hasta el final, su postura corporal cambia, se van mostrando más seguros y participativos, como se ilustra en la figura 65. Aunque suelen distraerse con facilidad, durante la investigación se evidencia que están más atentos a lo que ocurre en la clase y son menos temerosos tanto para expresarse desde su puesto como para pasar al tablero, como se muestra en la figura 66.

Figura 66. Un estudiante explica al grupo su solución a un problema.

Los estudiantes leen la postura de la docente e interpretan sus gestos para actuar de acuerdo a lo que ella espera y esto se mantiene durante toda la investigación. Los estudiantes aprendieron a conocer las expectativas de la docente y a responder de acuerdo a lo que ella esperaba, aun cuando tenían la posibilidad de expresar algo diferente. Al cambiar la dinámica de la clase, dejando de calificar los resultados de los estudiantes y solicitando los argumentos de las respuestas, los estudiantes se muestran inseguros porque no saben cuál es la respuesta esperada. En este sentido se hizo muy valioso mostrarles que para la docente era importante saber que estaban pensando y cuáles fueron los procesos que realizaron para llegar a determinada respuesta. En el transcurso de la investigación una estudiante afirma que “Es importante escucharnos para aprender de los compañeros y que tú (refiriéndose a la profesora) nos escuches para que puedas saber lo que pensamos”, lo cual deja ver que los estudiantes logran comprender la intención de la docente al pedirles que expresen sus ideas.

También se evidenció que al comienzo algunos no participaban aun cuando sentían el respaldo de sus compañeros, pero en la etapa final muchos participaban sin el miedo a ser juzgados, aunque obviamente se sentían más seguros cuando contaban con la motivación de sus pares.

Conclusiones

Los procesos comunicativos median el aprendizaje, es por esto que es importante prestar atención al desarrollo de estos en el aula. La investigación muestra que cuando el docente es consciente de las diferentes manifestaciones del lenguaje que pone en escena cada día, como parte de su quehacer pedagógico, comprende las implicaciones, que las elecciones a este respecto, tienen en el aprendizaje de sus estudiantes.

En la investigación se observa que los estudiantes utilizan los términos y las expresiones de la docente porque asumen que es de esa manera en la que deben hacerlo. Es evidente que cuando la docente implementa un lenguaje formal cuidadoso los estudiantes comienzan a hacer lo mismo; incluso se corrigen entre ellos y se obligan a expresarse correctamente, es normal que esta situación se presente si consideramos que el lenguaje se aprende por imitación, por lo cual es importante que el docente sea consciente de la necesidad de desarrollar cada uno de los tipos del lenguaje en el aula y de la manera en que los utiliza porque será lo que le transmita a sus estudiantes.

El análisis de diversos episodios de clase durante la investigación, permitió observar que cuando un estudiante manifiesta no comprender algún concepto o idea, generalmente los docentes suelen repetir la misma explicación, con las mismas palabras y apoyándose en los mismos registros. Lo anterior no contribuye a resolver la duda del estudiante. Se trata de identificar por qué no la comprendió y asegurarse de que lo haga, para esto el docente puede recurrir al uso de otros tipos de lenguaje o registros buscando que el estudiante encuentre diferentes unidades de significación que le ayuden a generar una mejor comprensión. En el futuro debe procurar darse la indicación buscando estrategias que permitan verificar la comprensión del grupo, si no fue clara, porque el docente no supo expresar sus expectativas, deberá pensar con más atención lo que les dirá a sus estudiantes para mejorar la comprensión.

De igual forma, en el aula de matemáticas cobra especial importancia el análisis los registros gráficos, icónicos, simbólicos y de lenguaje natural que el docente utiliza al momento de desarrollar la clase. En general los estudiantes acceden al lenguaje propio de la matemática a través de las interacciones que el docente propone en el aula. Teniendo en cuenta que el uso de este lenguaje contribuye a la conceptualización y apropiación de nociones matemáticas, es muy importante que los docentes lo utilicen de manera adecuada y reflexionen continuamente con sus estudiantes acerca de la intención comunicativa de cada uno de los registros utilizados.

La investigación permitió identificar que con frecuencia los estudiantes motivados por los docentes o por iniciativa propia realizan dibujos de una situación, porque de esta manera pueden tener una mejor comprensión de lo que se les plantea, esto ocurre porque el lenguaje icónico ofrece la posibilidad de comunicar ideas matemáticas que de otra manera puede resultar complejo. Visualizar la situación problema ayuda a encontrar la solución, así como la representación de un concepto matemático ayuda a que los estudiantes lo asimilen más rápido.

Además, la representación icónica habitualmente surge de un contexto verbalizado en primera instancia, pero en la investigación también se evidenció que el proceso contrario puede ser igual de enriquecedor para la clase; partir de un dibujo o una imagen y pedirles a los estudiantes que expresen lo que ven les ayuda a observar, analizar, establecer conexiones, pensar y proponer. Aunque en general un lenguaje icónico puede considerarse más avanzado cuando se acerca más a la representación esquemática que a un dibujo, utilizar dibujos que no tengan algún tipo de información puede ser motivante para realizar ejercicios donde los estudiantes acudan a la creatividad o se concentren en la esencia del problema en lugar de realizar procedimientos para llegar a la respuesta.

Se desataca también, la importancia de un uso adecuado del lenguaje simbólico por parte del profesor y de la invitación permanente a que el estudiante utilice de manera formal este lenguaje para comunicar ideas acerca de los objetos, procedimientos o relaciones entre objetos matemáticos trabajados en clase. De igual forma, invitarle a utilizarlo para argumentar y demostrar conjeturas y decisiones tomadas al momento de resolver problemas.

La acción comunicativa requiere de una interacción continua y activa entre los sujetos que participan en ella, es en esta interacción que el pensamiento se hace visible y se posibilita su desarrollo. Al ser consciente de lo anterior, los docentes trataran de buscar estrategias que involucren a sus estudiantes en la discusión que se desarrolla alrededor de algún concepto, noción u objeto que se construye y reconstruye en el aula.

Referencias

Acosta, G. (2013). Evolución del perfil cognitivo, meta cognitivo, actitudinal y de rendimiento en

Bell, A. (1986). Enseñanza por diagnóstico: algunos problemas sobre los números enteros. *Enseñanza de las Ciencias*, *4*(3), 199-208.

Bezmalinovic, H. S., & Piquet, J. D. (2015, March). Estrategias comunicativas para promover el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas. In *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*.

Bruno, A. (1997). La enseñanza de los números negativos: aportaciones de una investigación. *Números*, *29,* 5-18.

Cabrera Cuevas, J. D. (2003). Discurso docente en el aula. *Estudios pedagógicos (Valdivia),* (29), 7-26.

Calendario Matemático (s.f.) Recuperado el 07 de junio de 2015 de http://www.colombiaaprendiendo.edu.co/material-del-proyecto/calendario-matematico/

Calvo, G., Abello, M. C., & Báez, C. P. (2012). ¿ Investigación educativa o investigación pedagógica? El caso de la investigación en el Distrito Capital. *Magis. Revista Internacional de Investigación en Educación*, *1*(1).

Castañeda, A. B. (2009). Metodología de una investigación sobre métodos de enseñanza de problemas aditivos con números negativos. PNA, 3(2), 87-103.

Castillo, A. (2014). *Aprendizaje de adición y sustracción de números enteros a través de objetos físicos.* (tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Palmira, Colombia.

Castro, E. Castro, E. y Rico, L. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cisterna, F. (2005) Categorización y triangulación como procesos de validación del conocimiento en investigación cualitativa. *Theoria 14(1).* 61-71

Clemens, S. R., O'Daffer, P. G., & Cooney, T. J. (1989). *Geometría*. Addison-Wesley Iberoamericana, S.A.

Clemens, S. R., O'Daffer, P. G., & Charles, R. I. (1998). *Introducción al algebra.* Addison-Wesley Longman de México, S.A de C.V.

Colegio Villa Amalia IED, (2009). Plan de Área de Matemáticas, Bogotá.

Colegio Villa Amalia IED, (2013). PEI: Formando educandos para la gestión y organización empresarial, Bogotá.

Colombia, ICFES. (2014) .*Lineamientos para las aplicaciones muestral y censal*.

Colombia, Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares.*

Colombia, Ministerio de Educación Nacional. (2002). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*

Colombia, Ministerio de Educación Nacional.(2003). *La revolución Educativa: Estándares básicos de matemáticas y lenguaje. Educación básica y media.*

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2007). Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes1. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *10*(1), 39-68.

D'Amore, B., Fandiño, M.I, Iori, M. (2013). *La semiótica en la didáctica de la matemática*. Bogotá: Cooperativa editorial magisterio.

D'Amore, B. (2005). Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática. Reverté.

Domènech Casal, J. (2014). ¿Cómo lo medimos? Siete contextos de indagación para detectar y corregir concepciones erróneas sobre magnitudes y unidades.

De la Orden Hoz, A. (2007). El nuevo horizonte de la investigación pedagógica. Revista Electrónica de Investigación Educativa, 9(1).

Cid, E. garcia de galdeano

Espinosa, A. J., Ávila, N. Y. S., & Mendoza, S. M. G. (2010). La comunicación: eje en la clase de matemáticas. Práxis & Saber, 1(2), 173-202. estudiantes con dificultades de aprendizaje en matemáticas: un estudio longitudinal.

Fandiño, M.I. (2010). *Multiples aspectos del aprendizaje de la matemática*. Bogotá: Cooperativa editorial magisterio.

Fernández, M. I., Pastor, G., Tárraga, R., Feo, M., & Herdoiza, P. (2012). Comparación entre alumnos con y sin dificultades específicas de aprendizaje en resolución de problemas matemáticos de segundo y tercer ciclo de primaria. *Navarro, J., Fernández, MT, Soto, FJ, Tortosa, F.,(Coords.) Respuestas flexibles en contextos educativos diversos. Murcia: Consejería de Educación, Formación y Empleo*.

Fernández, M. L. (Noviembre, 2013). *Importancia de la comprensión lectora en el abordaje de la primera etapa de resolución de problemas matemáticos con un enfoque crítico*. I CEMACYC, Santo Domingo, República Dominicana.

Götte, M., Mántica, A. M., & Maso, M. S. (2006). Una propuesta para el tratamiento del concepto de área en EGB.

Gutiérrez, G. B. D., & Muñoz, O. E. B. (2013). Resolución de Problemas Matemáticos: Un Problema de comprensión en el Quinto Grado de Básica Primaria de la Institución Educativa Thelma Rosa Arévalo del Municipio Zona Bananera del Magdalena, Colombia. *Escenarios*, *11*(1), 38-43

Instituto de estudios urbanos (18 de Marzo de 2015) Localidad de Engativá. Recuperado de http://www.observatoriolocaldeengativa.info

Jiménez Márquez, G. D., Jiménez Márquez, J. A., & Jiménez Márquez, E. A. (2014). Estrategia didáctica para desarrollar la competencia "Comunicación y Representación" en Matemática.

Lee, C. (2009). *El lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas*. Ediciones Morata.

Localidad de Engativá (s.f) Recuperado el 26 de noviembre de 2014 de http://www.bogotacomovamos.org/localidades/engativa/detalle

López, C. R. (2009). El lenguaje matemático en los textos escolares. *Enseñanza & Teaching: Revista interuniversitaria de didáctica*, *2*.

Martes de prueba (s.f.) Recuperado el 12 de junio de 2014 de http://www.miltonochoa.com.co/home/index.php/2014-07-12-17-06-58/list-all-web-link-categories

Martínez-Salonava, E. Portal de la Educomunicación. *La motivación en el aprendizaje*. jhttp://www.uhu.es/cine.educacion/didactica/0083motivacion.htm

Messina, G. (enero-junio del 2011).¿Qué es esto del maestro investigador en américa Latina?. *Actualidades Pedagógicas*, (57), 15-32

Morales, R. (2014). *Dificultades y errores en la solución de problemas con números racionales* (tesis de maestría). Universidad Autónoma de Manizalez, Manizalez, Colombia.

Muñoz, J. I. M. (2014). La resolución de problemas matemáticos y su impacto en pensamiento crítico del ciudadano. *Revista de cooperación.com (3)*

Navarrete, J. M. (2000). El muestreo en la investigación cualitativa. *Investigaciones sociales*, *4*(5), 165-180.

Navarrete, J. M. (2013). PROBLEMAS DEL CONOCIMIENTO EN CIENCIAS HUMANAS. *Investigación Educativa*, *17*(2), 27-48.

Nuñez, J. C.(2009). *Motivación, aprendizaje y rendimiento académico*. Braga, Universidad do Minho.Ortega, J.F y Ortega, J.A. (2002). Experiencia sobre el conocimiento del Lenguaje Matemático. *Rect@ 10* (1). Recuperado desde: http://www.uv.es/asepuma/X/I17C.pdf

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (s.f.) *El programa PISA de la OCDE. Qué es y para qué sirve.* Recuperado de https://www.oecd.org/pisa/39730818.pdf

Orozco, L. S.A. (2007). Saber Matemáticas 8. Editorial Escuelas del Futuro

Ortega, J. F., & Ortega, J. A. (2002). Experiencia sobre el conocimiento del lenguaje matemático. *Acta de las X Jornadas de ASEPUMA.*

Owens, R.(2003).*Desarrollo del lenguaje.* Madrid: Pearson Educación.

Parra, C (2002). Investigación-acción y desarrollo profesional. *Educación y Educadores,* (5)113-125

Perdomo, I. C. (2013). LA COMPETENCIA MATEMÁTICA COMUNICAR. *Amazonia Investiga*, *2*(3).

Pérez, Y., & Ramírez, R. (2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos: Fundamentos teóricos y metodológicos. *Revista de investigación*, *35*(73), 8-26.

Prieto, R. G. (2003). El diario como instrumento para la formación permanente del profesor de educación física. *Lecturas: Educación física y deportes*, (60), 3.

Quesada, D. (1991) ¿Es la matemática un lenguaje? *Revista de Filosofía (5)* 31-43

Restrepo Gómez, B. (2011). Investigación de aula: formas y actores. *Revista Educación y Pedagogía*, *(53)*, 103-112

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *pna*, *1*(2), 47-66.

Rodríguez, J. M. (2011). Métodos de investigación cualitativa. *Revista de Investigación Silogismo*, 1(08).

Ruiz Socarras, J. M. (2006). La matemática como ciencia. *Camagüey, Cuba: Universidad de Camagüey. Facultad de Informática. Recuperado el*, *30*.

Serrano, E. (2000). Etimología de algunos términos matemáticos. *Suma (35)*.87-96

Sfard, A. (2008). *Aprendizaje de las matemáticas escolares desde un enfoque comunicacional*. Programa Editorial Universidad del Valle.

Stone, M (Comp). (1999) La Enseñanza para la Comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica. Buenos Aires: Paidós

Vosniadou, S.(2006) Cómo aprenden los niños. *Serie Prácticas Educativas (7)*.

Wagensberg, J. (1985). *Ideas sobre la complejidad del mundo.* Barcelona: Tusquets editores.

Wood, D.(2000) *Cómo piensan y aprenden los niños.* México D.F.: Siglo XXI Editores, S.A.