REFERENCIA: Buforn, A. & Fernández, C. (2015). Cómo reconocen los estudiantes para maestro evidencias del razonamiento up and down en los estudiantes. *ENSAYOS, Revista de la Facultad de Educación de Albacete, 30*(1). Enlace web: http://www.revista.uclm.es/index.php/ensayos - Consultada en fecha (dd-mm-aaaa)

CÓMO RECONOCEN LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO EVIDENCIAS DEL RAZONAMIENTO UP AND DOWN EN LOS ESTUDIANTES

HOW PROSPECTIVE TEACHERS RECOGNIZE EVIDENCE ABOUT STUDENTS' REASONING UP AND DOWN

Ángela Buforn
Ceneida Fernández
Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante

Recibido: 13/04/2015
Aceptado: 23/06/2015

Resumen:

Este estudio examina cómo los estudiantes para maestro identifican evidencias del razonamiento *up and down* en los estudiantes de primaria. Este razonamiento implica dos procesos: la reconstrucción de la unidad y la representación de fracciones. 92 estudiantes para maestro respondieron una tarea que consistía en analizar tres respuestas de estudiantes de educación primaria a un problema de proporcionalidad que mostraban diferentes características de esta manera de razonar. En este estudio presentamos algunos aspectos del análisis que estamos realizando para categorizar la manera en la que los estudiantes para maestro reconocen evidencias de este razonamiento, y cómo este reconocimiento se relaciona con la manera en la que reconocen los elementos matemáticos relevantes para resolver el problema.
Palabras clave: mirada profesional, razonamiento *up and down*, razonamiento proporcional, conocimiento del profesor.

Abstract:

This study examines how pre-service teachers identify evidence of the up and down reasoning in primary school students. This reasoning involves two processes: the reconstruction of the unit and the representation of fractions. 92 pre-service teachers answered a task consisted of the analysis of three primary school students answers to a proportional problem showing different characteristics of the up and down reasoning. In this paper we present some aspects of the analysis we are carrying out to categorize the way in which pre-service teachers recognize evidence of this reasoning, and how this recognition is linked with the way they recognize relevant mathematical elements of the problem.
Keywords: professional noticing, reasoning up and down, proportional reasoning, teachers' knowledge.

Introducción

Estudios recientes muestran que interpretar respuestas de estudiantes reconociendo evidencias de su comprensión matemática en los diferentes contenidos matemáticos es una competencia relevante para los maestros (Fernández, Llinares y Valls, 2012; Yesildere-Imre y Akkoç, 2012; Bartell, Webel, Bowen y Dyson, 2013; Magiera, van den Kiebom y Moyer, 2013; Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares, 2014).

Nuestro estudio se enmarca dentro de esta línea de investigación en el dominio específico del razonamiento proporcional ya que es un contenido relevante en el currículo de primaria y secundaria y algunos de los conceptos implicados presentan dificultades para los estudiantes para maestro como han mostrado investigaciones recientes (Valverde y Castro, 2009; Livy y Vale, 2011; Rivas, Godino y Castro, 2012; Gómez y García, 2014).

1.1 Mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes de primaria

Las investigaciones están indicando que una de las habilidades profesionales que los futuros maestros deben desarrollar es *mirar profesionalmente* el pensamiento matemático de los estudiantes (*professional noticing*) (Mason, 2002; Sherin, Jacobs y Philipp, 2010) para tomar decisiones pertinentes como maestros (Morris, Hiebert y Spitzer, 2009; Fernández et al. 2012; Fortuny y Rodríguez, 2012; Callejo, Fernández, Sánchez-Matamoros y Valls, 2014). Jacobs, Lamb y Philipp (2010) conceptualizan esta competencia como un conjunto de tres destrezas interrelacionadas:

- Reconocer evidencias de la manera en la que los estudiantes resuelven los problemas que puedan aportar información sobre cómo están comprendiendo.
- Interpretar dichas evidencias relacionándolas con ideas teóricas sobre cómo aprenden los alumnos.
- Tener argumentos para justificar la toma de decisiones sobre qué problemas es posible proporcionar para consolidar o desarrollar la comprensión de los estudiantes.

Estudios previos han mostrado que el hecho de identificar los elementos matemáticos relevantes de cada problema (conocimiento matemático), permite a los estudiantes para maestro estar en mejores condiciones para reconocer evidencias de la comprensión de un contenido matemático. Estos estudios subrayan la importancia de la relación que hay entre el conocimiento de matemáticas y el conocimiento sobre el pensamiento matemático de los estudiantes. Magiera et al. (2013) aportaron información en el dominio del álgebra, Sánchez-Matamoros et al. (2014) en el dominio de la derivada, y Fernández et al. (2012) en el dominio de la proporcionalidad para discriminar entre situaciones proporcionales y no proporcionales. En nuestro estudio, nos centraremos en una componente del razonamiento proporcional, el razonamiento *up and down*.

1.2 El razonamiento up and down

Lamon (2007) señala que el razonamiento proporcional, entendido como la "habilidad de establecer relaciones multiplicativas entre dos cantidades y de extender dicha relación a otro par de cantidades" (p. 638), es multifacético e integra diferentes componentes: los significados de los objetos matemáticos (interpretaciones del número racional considerando cinco subconstructos: razón, operador, parte-todo, medida y cociente) y las formas de razonar con estos significados (pensamiento relacional, covarianza, razonamiento *up and down* y proceso *unitizing*). A partir de esta caracterización, Pitta-Pantazi y Christou (2011) han añadido: la capacidad de resolver problemas proporcionales de valor perdido y la capacidad de discriminar situaciones proporcionales de situaciones no proporcionales.

En este estudio nos vamos a centrar en la componente razonamiento *up and down*, entendida como la capacidad de reconstruir la unidad y representar posteriormente una parte (fracción) de esta unidad (Steffe y Olive, 2012). Es decir, implica una manera de razonar para resolver problemas cuando la unidad está implícita (Lamon, 2005, 2007). De esta manera, se puede caracterizar el razonamiento *up and down* como la coordinación de dos procesos relativos al razonamiento proporcional: la reconstrucción de la unidad y la representación de las fracciones.

Un ejemplo del primer proceso, la idea de reconstruir la unidad a partir de una fracción dada, es el siguiente: *El siguiente conjunto de estrellas son 4/5. ¿Cuántas estrellas representan la unidad?* (Figura 1).

Figura 1. Imagen proporcionada en el ejemplo de reconstrucción de la unidad

El problema nos pide que identifiquemos la unidad sabiendo que 12 estrellas son 4/5, como 1/5 serán 3 estrellas, la unidad serían 15 estrellas.

Respecto al segundo proceso, la representación de una parte de la unidad, un ejemplo sería: *La parte sombreada de esta figura representa la unidad. ¿Qué parte de la figura representa 2/3?* (Figura 2).

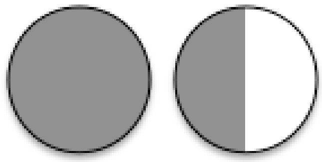


Figura 2. Imagen proporcionada en el ejemplo de representar una parte de la unidad

El problema requiere dividir la parte sombreada en 3 partes congruentes (medio círculo cada parte), es decir, buscar la fracción unitaria y coger 2 de estas partes. En este caso, 2/3 de la parte sombreada sería un círculo entero.

Considerando el razonamiento *up and down* como la coordinación de estos dos procesos (reconstrucción de la unidad y representación de una parte de esta unidad), un ejemplo de esta actividad es la siguiente: *La parte sombreada de esta figura representa 3+2/3. ¿Qué parte de la figura representa 4 rectángulos pequeños?* (Lamon, 2005, p.73) (Figura 3).

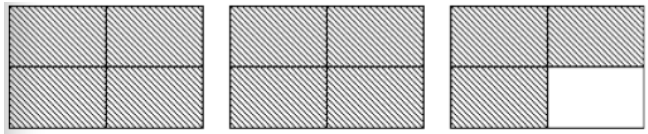


Figura 3. Imagen proporcionada en el ejemplo de razonamiento *up and down*

En este caso, la unidad implícita sería 3 rectángulos pequeños ya que la parte sombreada la podemos ver como 3 veces 3 rectángulos pequeños (3 unidades) y 2/3 que serían los dos restantes (reconstrucción de la unidad). Una vez obtenida la unidad podemos ver que 4 rectángulos pequeños equivale a 1 unidad y 1/3 (representación de la fracción pedida). Por lo tanto, en este tipo de problemas es necesaria la reconstrucción de la unidad, y usar esta unidad para poder representar la fracción que nos piden.

En nuestro estudio examinaremos qué evidencias del razonamiento *up and down* reconocen los estudiantes para maestro (EPM) en respuestas de estudiantes de educación primaria y qué tipo de decisiones de acción toman para apoyar el desarrollo de este razonamiento. Considerando estos aspectos, nos planteamos las siguientes preguntas de investigación:

- ¿qué elementos matemáticos implicados en tareas que requieren el razonamiento *up and down* identifican los EPM?
- ¿qué evidencias del razonamiento *up and down* reconocen los EPM en las respuestas de los estudiantes de primaria?
- ¿qué decisiones de acción proponen los EPM para apoyar el desarrollo del razonamiento *up and down en los estudiantes*?

Método

2.1 Participantes y contexto

Los participantes fueron 92 estudiantes para maestro matriculados en una asignatura del Grado de Maestro en Educación Primaria de la Universidad de Alicante. Previamente a la recogida de datos, estos estudiantes habían cursado una materia centrada en el desarrollo del Sentido Numérico y otra centrada en el Sentido Geométrico. En el momento de la recogida de datos, los estudiantes para maestro estaban cursando una asignatura del tercer curso sobre la Enseñanza y Aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria. Los contenidos de esta asignatura son las características del aprendizaje de los estudiantes de educación primaria y de la enseñanza en diferentes dominios matemáticos: números y operaciones, geometría, medida y tratamiento de la información. Los datos fueron recogidos después de haber estudiado el bloque de números y operaciones donde está incluido el contenido del razonamiento proporcional.

2.2 Instrumento

Los estudiantes para maestro resolvieron una tarea formada por: (i) el enunciado de un problema que implicaba el razonamiento *up and down,* (ii) tres respuestas de estudiantes de primaria al problema que mostraban diferentes características de este razonamiento y (iii) cuatro cuestiones centradas en la enseñanza y aprendizaje:

a. ¿Qué conceptos matemáticos debe conocer un alumno de primaria para resolver esta actividad? Justifica tu respuesta.

b. ¿Cómo se manifiesta la comprensión de los conceptos matemáticos implicados en cada una de las respuestas? Justifica tu respuesta.

c. Si un alumno no comprende los conceptos matemáticos implicados, ¿cómo modificarías la actividad para ayudarle a que comprendiese estos conceptos? Justifica tu respuesta.

d. *Si un alumno comprende los conceptos matemáticos implicados, ¿cómo modificarías la actividad para que aumente su comprensión de los conceptos matemáticos implicados? Justifica tu respuesta.*

La primera cuestión está relacionada con el objetivo de aprendizaje del problema, es decir, con los elementos matemáticos del problema. La segunda cuestión está relacionada con el reconocimiento de evidencias del razonamiento *up and down* en las respuestas de los estudiantes. Y, finalmente, las otras dos cuestiones están relacionadas con las decisiones de acción tomadas según la comprensión de los estudiantes, una sobre cómo modificar el problema para ayudar a la comprensión conceptual del estudiante y otra sobre cómo modificar el problema para ampliar la comprensión conceptual del estudiante. La Figura 4 muestra el problema y las respuestas de los estudiantes de primaria.

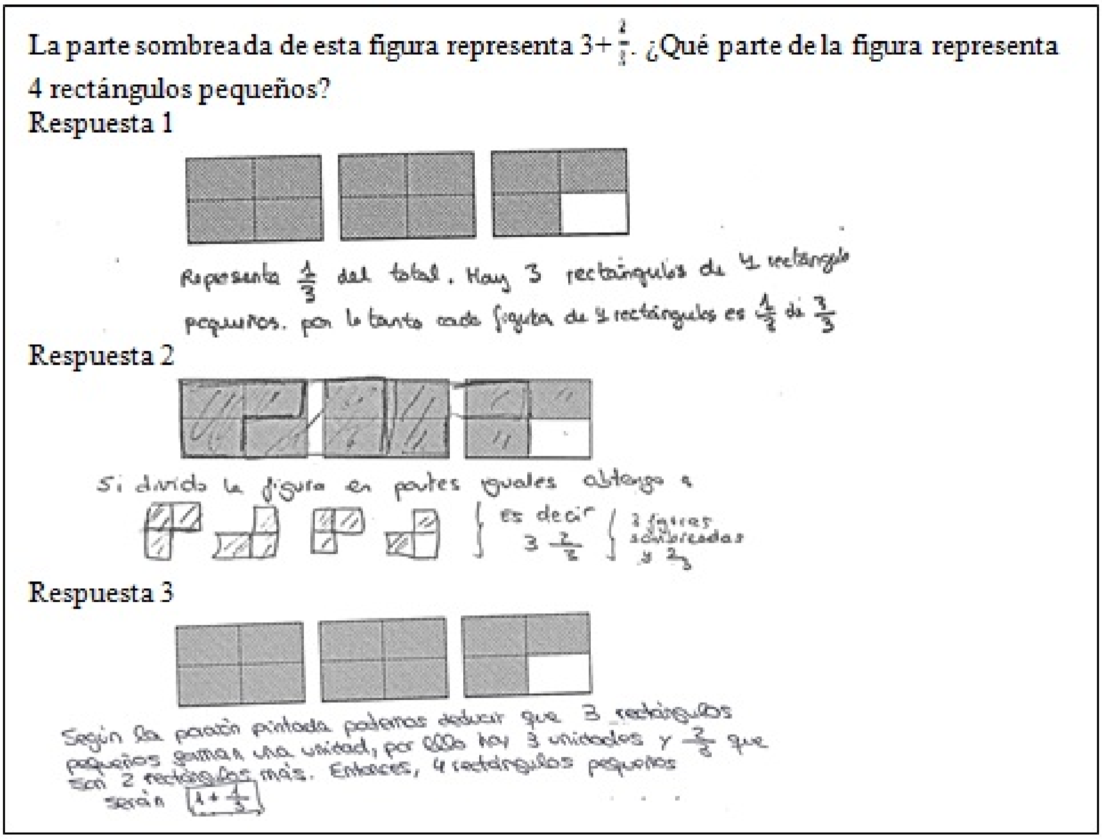


Figura 4. Problema relacionado con la componente razonamiento *up and down* y las tres respuestas de estudiantes de primaria que formaban la tarea

En la respuesta 1 el estudiante de primaria tiene dificultades en reconstruir la unidad a partir de la fracción representada, es decir, no llega a identificar la unidad como 3 rectángulos pequeños ya que confunde la unidad con toda la figura (los tres rectángulos grandes) sin tener en cuenta el dato proporcionado en el enunciado. En la respuesta 2, el alumno identifica la unidad y reconstruye el todo, pero tiende dificultades en representar la fracción pedida, es decir, justifica que 3+2/3 corresponde con la parte pintada de la figura pero no representa la fracción pedida. En la respuesta 3, el estudiante identifica que 3 rectángulos pequeños son la unidad, y después representa la fracción pedida a partir de esta unidad y obtiene que 4 rectángulos pequeños representan 1+1/3. En este caso sí que realiza los dos procesos: reconstrucción de la unidad y representación de una fracción de la unidad y los coordina.

Para evitar el hecho de que la respuesta incorrecta del estudiante de primaria estuviera siempre la primera (o la respuesta correcta la última), se les proporcionó a los EPM la tarea con diferente orden en las respuestas.

2.3 Análisis de los datos

Los datos de esta investigación son las respuestas dadas por los estudiantes para maestro a las cuestiones planteadas en la tarea. En este artículo se presentan los resultados obtenidos en las dos primeras cuestiones (cuestión a y b).

El análisis se realizó de manera inductiva por tres investigadores. Estos investigadores analizaron las repuestas dadas por los EPM a las cuestiones a y b individualmente, identificando, en primer lugar, los elementos matemáticos que los estudiantes para maestro consideraban implicados en el problema propuesto. Los acuerdos y desacuerdos fueron discutidos hasta que finalmente se llegó a un acuerdo. Finalmente se identificaron dos categorías en relación a los elementos matemáticos identificados: EPM que identificaban los elementos matemáticos implicados en el razonamiento *up and down* al identificar los dos procesos: reconstrucción de la unidad a partir de una fracción y representar una fracción dada de la unidad reconstruida, y EPM que no identificaban los dos procesos implicados en la resolución del problema e identificaban otras ideas como la notación mixta o las fracciones.

En segundo lugar, se analizaron qué evidencias del razonamiento *up and down* reconocían los estudiantes para maestro en las respuestas de estudiantes (cuestión b). Tras la discusión de los acuerdos y desacuerdos entre los tres investigadores, se obtuvieron tres grandes grupos de respuestas de los EPM:

- EPM que reconocieron evidencias de los procesos de reconstrucción de la unidad y de representación de una fracción en las respuestas de los estudiantes (procesos del razonamiento *up and down*).
- EPM que describieron las respuestas de los estudiantes, es decir, reproducen lo que observan en las respuestas propuestas en la tarea.
- EPM que proporcionaron comentarios generales, por ejemplo, basados en la corrección de las respuestas.

Una vez obtenidas las categorías de la cuestión a y de la cuestión b, se exploró si los EPM que habían identificado los elementos matemáticos implicados (categoría identificada para la cuestión a), habían reconocido evidencias, habían descrito o habían proporcionado comentarios generales (grupos identificados para la cuestión b). Y lo mismo para aquellos EPM que no habían identificado los elementos matemáticos implicados en el razonamiento *up and down.* Este análisis exploratorio nos permitió identificar 5 perfiles de estudiantes para maestro, que son los que se muestran en el apartado de resultados.

Resultados

Teniendo en cuenta las cuestiones a y b de manera conjunta se identificaron cinco perfiles en los que los estudiantes para maestro fueron categorizados considerando las relaciones entre el conocimiento de los procesos implicados en el razonamiento *up and down* y la capacidad de reconocer esos procesos en las respuestas de los estudiantes.

El primer perfil abarca a los estudiantes para maestro que identificaron los procesos de reconstrucción de la unidad y la representación de las fracciones como elementos matemáticos del problema y reconocieron estos procesos en las respuestas de los estudiantes. Por ejemplo, el estudiante para maestro EPM1 (Figura 5) en su contestación a la tarea indica que la respuesta 1 es incorrecta porque no identifica bien la unidad *"no es coger 4 rectángulos pequeños como unidad sino coger solo 3 rectángulos pequeños"*, en la respuesta 2 reconoce que el estudiante sí que realiza la primera parte del proceso (reconstrucción de la unidad) diciendo *"sabe extraer la unidad de la figura representada por lo tanto dice que el todo son ¾ del rectángulo"* y en la última respuesta reconoce que el estudiante sí que realiza correctamente el problema, coordinando de este modo los dos procesos, la reconstrucción de la unidad y la representación de una fracción de esa unidad *"sabe representar lo que es la unidad (3 rectángulos pequeños) y por lo tanto sabe que un rectángulo grande son una unidad y 1/3 de la unidad"*.

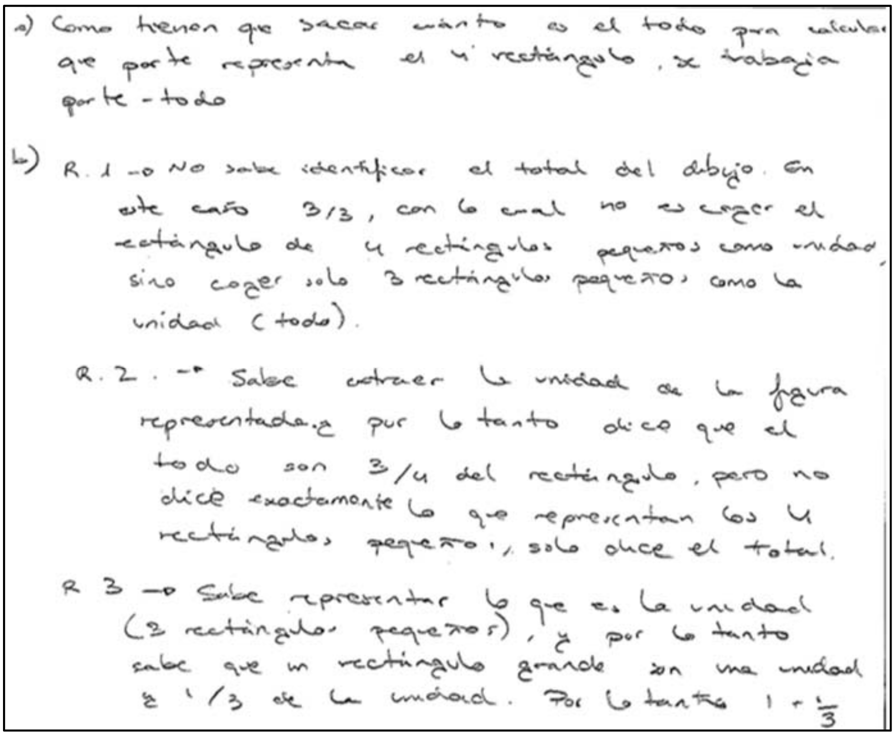


Figura 5. Respuesta del EPM1 perteneciente al primer perfil

El segundo perfil engloba a los estudiantes para maestro que identificaron que la tarea implicaba los procesos relacionados con el razonamiento *up and down* pero proporcionaron argumentos generales basados en la corrección o comentarios que no aportaban evidencias de las características del razonamiento *up and down* en las respuestas de los estudiantes. Por ejemplo el estudiante para maestro EPM2 (Figura 6) identifica los procesos implicados al comentar "*la idea de unidad para poder reconocerla en las figuras representadas*", sin embargo, no aporta evidencias sobre el reconocimiento de los procesos en las respuestas de los estudiantes pues argumenta diciendo *"cuando identifica la idea de unidad dentro de la parte sombreada"*.

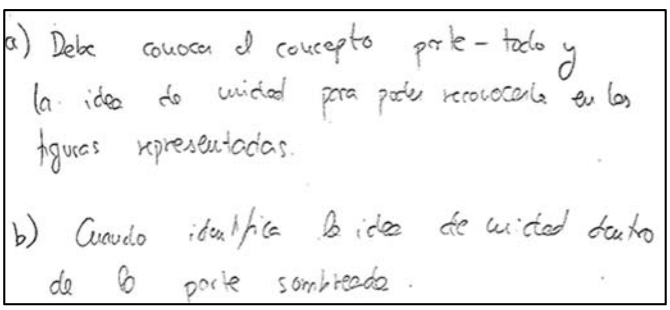
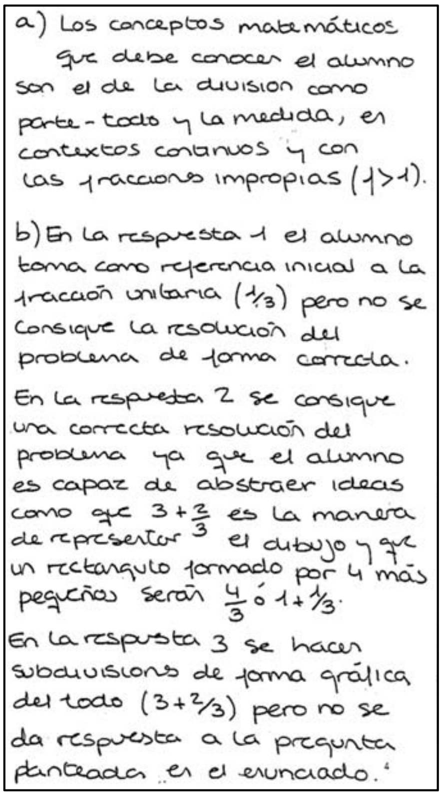


Figura 6. Respuesta del EPM2 perteneciente al segundo perfil

Un tercer perfil lo constituyen los estudiantes para maestro que no identificaron los procesos que implica el razonamiento *up and down* (reconstruir la unidad y representar fracciones) como elementos matemáticos del problema y describieron las respuestas de los estudiantes sin aportar evidencias de los procesos del razonamiento *up and down.* Por ejemplo, una evidencia de este tipo la encontramos en la respuesta del estudiante para maestro EPM3 (Figura 7) que no identificó los procesos implicados ya que solamente comenta la idea de parte-todo, describiendo las respuestas según lo que observa en ellas, así por ejemplo, en la respuesta 3 dice *"se hacen subdivisiones de forma gráfica del todo pero no se da respuesta a la pregunta planteada"*.


a) Los conceptos matemáticos que debe conocer el alumno son el de la division como parte-todo y la medida, en contextos continuos y con las fracciones impropias ($f>1$).

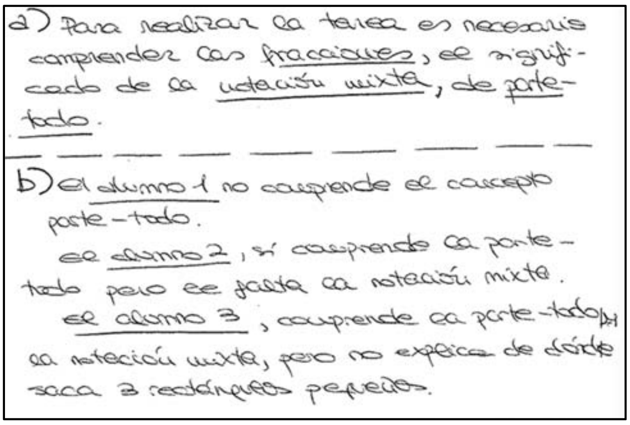
b) En la respuesta 1 el alumno toma como referencia inicial a la fracción unitaria ($1/3$) pero no se consigue la resolución del problema de forma correcta.

En la respuesta 2 se consigue una correcta resolución del problema ya que el alumno es capaz de abstraer ideas como que $3+\frac{2}{3}$ es la manera de representar el dibujo y que un rectangulo formado por 4 más pequeños serán $\frac{4}{3}$ ó $1+1/3$.

En la respuesta 3 se hacen subdivisiones de forma gráfica del todo ($3+2/3$) pero no se da respuesta a la pregunta planteada en el enunciado.

Figura 7. Respuesta del EPM3 perteneciente al tercer perfil

El cuarto perfil de estudiantes para maestro es el que incluye a los estudiantes para maestro que no identificaron los procesos implicados en el razonamiento *up and down* como elementos del problema y, además, proporcionaron comentarios generales basados en la corrección. En este caso, el estudiante para maestro EPM4 (Figura 8) comenta solamente el concepto de fracción como parte todo y no muestra evidencias de los procesos que requiere el razonamiento *up and down* ya que solamente comenta si comprenden o no comprenden el concepto.

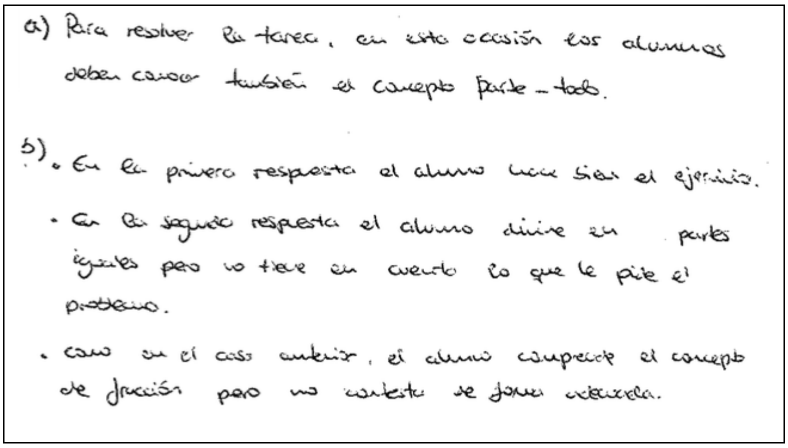


a) Para realizar la tarea es necesario comprender las fracciones, el significado de la notación mixta, de parte-todo.

b) El alumno 1 no comprende el concepto parte-todo.
El alumno 2, sí comprende la parte-todo pero le falta la notación mixta.
El alumno 3, comprende la parte-todo y la notación mixta, pero no explica de dónde saca 3 rectángulos pequeños.

Figura 8. Respuesta del EPM4 perteneciente al cuarto perfil

Finalmente, hubo estudiantes para maestro que no mostraron comprensión de la tarea al argumentar que la respuesta del estudiante correcta era la respuesta 1 en la que se considera toda la figura como la unidad (quinto perfil). En la Figura 9, se puede observar la respuesta del estudiante para maestro EPM5 que no solo no es capaz de reconocer la comprensión de los estudiantes, sino que tampoco muestra evidencias sobre el conocimiento matemático ya que confunde la tarea y considera que la respuesta incorrecta es la correcta.



a) Para resolver la tarea, en esta ocasión los alumnos deben conocer también el concepto parte-todo.

b). • En la primera respuesta el alumno hace bien el ejercicio.
• En la segunda respuesta el alumno divide en partes iguales pero no tiene en cuenta lo que le pide el problema.
• Como en el caso anterior, el alumno comprende el concepto de fracción pero no contesta de forma adecuada.

Figura 9. Respuesta del EPM5 que no mostró comprensión de la tarea

Conclusiones

El objetivo de esta investigación es aportar información sobre el papel que desempeña el conocimiento de matemáticas de los estudiantes para maestro cuando piensan en el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes de primaria.

Los resultados muestran que cuando los estudiantes para maestro eran capaces de identificar los procesos implicados en el razonamiento *up and down* como conceptos matemáticos que demanda el problema (conocimiento de matemáticas), algunos de ellos también eran capaces de interpretar las respuestas de los estudiantes aportando evidencias de cómo los estudiantes de primaria coordinaban o no los procesos implicados en el razonamiento *up and down*. Sin embargo, cuando no eran capaces de identificar estos procesos, sus interpretaciones sobre las repuestas de los estudiantes se basaban en aspectos generales de la respuesta como la corrección o no de estas o en una descripción de las mismas. Estos resultados están en la línea de otras investigaciones que han mostrado que el hecho de identificar los elementos matemáticos relevantes del problema (conocimiento matemático), permite a los estudiantes para maestro estar en mejores condiciones para reconocer evidencias de la comprensión de un contenido matemático (Fernández et al., 2012; Magiera et al., 2013, Sánchez-Matamoros et al., 2014) pero en nuestro caso, en el razonamiento *up and down*.

Sin embargo, cabe destacar el grupo de estudiantes que identificó los procesos del razonamiento *up and down* como elementos matemáticos del problema pero proporcionaron comentarios generales sin aportar evidencias ya que este resultado muestra que la tarea de interpretar respuestas de los estudiantes no es una tarea fácil aun teniendo el conocimiento matemático necesario. Este resultado también se podría interpretar desde las creencias, ya que estas pueden influir en las respuestas de los estudiantes para maestro. Este perfil de EPM podría tener la creencia de que las respuestas de los estudiantes "son correctas o incorrectas" (es decir, o se comprende o no se comprende) (Copes, 1982) aun teniendo el conocimiento necesario para reconocer evidencias de la comprensión del contenido matemático implicado.

Estos resultados aportan información relevante para los programas de formación inicial en el sentido de que nuestro instrumento puede ofrecer oportunidades para incidir en los elementos clave que les permitirá desarrollar la competencia profesional de interpretar respuestas de estudiantes.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido financiada en parte por el proyecto de I+D para grupos de investigación emergentes GV/2014/075 de la Conselleria de Educación, Cultura y Deporte de la Generalitat Valenciana y en parte por el Ministerio de Economía y Competitividad. Secretaria de Estado de Investigación, Desarrollo e Innovación, con el proyecto EDU2014-54526-R.

Referencias bibliográficas

Bartell, T.G., Webel, C., Bowen, B. y Dyson, N. (2013). Prospective teacher learning: recognizing evidence of conceptual understanding. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*, 57-79.

Callejo, M.L., Fernández, C., Sánchez-Matamoros y Valls, J. (2014). Aprendiendo a reconocer evidencias del proceso de generalización de los estudiantes a través de un debate virtual. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 187-196). Salamanca: SEIEM.

Copes, L. (1982). The Perry development scheme: A methaphor for learning and teaching mathematics. *For the Learning of Mathematics, 3*(1), 38-44.

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM Mathematics Education*, *44*, 747-759.

Fortuny, J. M. y Rodríguez, R. (2012). Aprender a mirar con sentido: facilitar la interpretación de las interacciones en el aula. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, *1*, 23-37.

Gómez, B. y García, A. (2014). Componentes críticas en tareas de comparación de razones desiguales. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 375-384). Salamanca: SEIEM.

Jacobs, V.R., Lamb, L.C. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Lamon, S. J. (2005). *Teaching fractions and ratios for understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (2nd ed.). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S.J. (2007). Rational Numbers and Proportional Reasoning: Toward a Theoretical Framework. En F.K. Lester Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 629-668). NCTM-Information Age Publishing, Charlotte, NC.

Livy, S. y Vale, C. (2011). First year pre-service teachers' mathematical content knowledge: Methods of solution for a ratio question. *Mathematics Teacher Education and Development, 1*(2), 22-43.

Magiera, M., van den Kieboom, L., y Moyer, J. (2013). An exploratory study of preservice middle school teachers' knowledge of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics, 84*, 93-113.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge Falmer.

Morris, A.K., Hiebert, J. y Spitzer, S.M. (2009). Mathematical knowledge for teaching in planning and evaluating instruction: What can preservice teachers learn?. *Journal for Research in Mathematics Education, 40(*5), 491-529.

Pitta-Pantazi,D. y Christou, C. (2011). The structure of prospective kindergarten teachers' proportional reasoning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*(2), 149–169.

Rivas, M.A., Godino, J.D. y Castro, W.F. (2012) Desarrollo del conocimiento para la Enseñanza de la Proporcionalidad en Futuros profesores de Primaria. *Bolema, 26*(42B), 559-588.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Llinares, S. (2014). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept. *International Journal of Science and mathematics Education,* DOI: 10.1007/s10763-014-9544-y

Sherin, M. G., Jacobs, V. R. y Philipp, R. A. (eds) (2010), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes.* New York: Routledge.

Steffe, L. y Olive, J. (2012). *Childrens' Fractional Knowledge*. London: Springer.

Valverde, A. y Castro, E. (2009). Actuaciones de maestros en formación en la resolución de problemas de proporcionalidad directa. En M.J. González, M.T. González, J. Murillo (Eds.), *Actas del XIII Simposio de la SEIEM. Investigación en Educación Matemática* (pp. 523-532). Santander: SEIEM y Universidad de Cantabria.

Yesildere-Imre, S., y Akkoç, H. (2012). Investigating the development of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge of generalizing number patterns through school practicum. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15*, 207-226.