**Boletín de Estadística e Investigación Operativa**
Vol. 30, No. 3, Noviembre 2014, pp. 261-274

## Investigación Operativa

# On Evenly Convex Sets and Functions

**Margarita Rodríguez Álvarez**
Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Alicante
✉ marga.rodriguez@ua.es

**José Vicente Pérez**
Departamento de Economía
Universidad Carlos III de Madrid
jose.vicente@ua.es

**Abstract**

A subset of $\mathbb{R}^n$ is said to be evenly convex (e-convex, in breaf) if it is the intersection of some family (possibly empty) of open halfspaces. In this paper, we collect some published results which show that this large class of convex sets enjoys a lot of the well-known properties of the subclass of closed convex sets. We also consider functions whose epigraphs are e-convex sets, the so-called e-convex functions, and we show the main properties of this class of convex functions that contains the important class of lower semicontinuous convex functions.

**Keywords:** Closed convex sets, Evenly convex sets, Lower semicontinuous convex functions, Evenly convex functions.
**AMS Subject Classifications**: 90C25, 90C34, 52A41

## 1. Introducción

En este artículo se trata el concepto de e-convexidad (even convexity, en inglés) aplicado tanto a conjuntos como a funciones. En el primer caso, la familia de los conjuntos e-convexos resulta ser una extensión de la clase de los conjuntos convexos cerrados, mientras que la e-convexidad aplicada a las funciones extiende el concepto de semicontinuidad inferior convexa.

Nuestro interés por los conjuntos e-convexos surge del estudio de los sistemas semi-infinitos lineales más generales. El conjunto de soluciones de cualquier sistema de desigualdades lineales de la forma $\{\langle a_t, x\rangle \geq b_t,\ t \in T\}$, siendo $T$ un conjunto arbitrario de índices (posiblemente infinito), $a_t \in \mathbb{R}^n$ y $b_t \in \mathbb{R}$ para todo $t \in T$, y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$, es un conjunto convexo cerrado (ya que es intersección de semiespacios cerrados). Recíprocamente, cualquier conjunto convexo cerrado se puede representar por medio de una infinidad de sistemas semi-infinitos lineales (SSIL) de este tipo.

Sin embargo, los sistemas anteriormente mencionados no son los sistemas lineales más generales que podemos considerar. Un sistema en $\mathbb{R}^n$ de la forma

$$\{\langle a_t, x\rangle \geq b_t,\ t \in D;\ \langle a_t, x\rangle > b_t,\ t \in E\}, \tag{1.1}$$

donde los conjuntos de índices, $D$ y $E$, son disjuntos y no simultáneamente vacíos, $a_t \in \mathbb{R}^n$ y $b_t \in \mathbb{R}$ para todo $t \in T := D \cup E$, contiene un número arbitrario (posiblemente infinito) de restricciones de desigualdad débil (dos de las cuales reemplazan a una ecuación) y/o estricta. Se trata, pues, de un sistema semi-infinito lineal general (SSILG) y su conjunto de soluciones es un conjunto convexo, por tratarse de una intersección de semiespacios abiertos o cerrados. Al preguntarnos si todo conjunto convexo se puede representar por medio de un SSILG y ser negativa la respuesta, encontramos que son los conjuntos e-convexos la clase de conjuntos convexos que sí cumplen esta propiedad.

Se dice que un *conjunto* $C \subset \mathbb{R}^n$ es *e-convexo* si es intersección de una familia arbitraria de semiespacios abiertos. Puesto que dicha familia puede ser vacía, tanto $\mathbb{R}^n$ como $\emptyset$ son conjuntos e-convexos. Por otro lado, dado que todo semiespacio cerrado se puede expresar como intersección de una familia infinita de semiespacios abiertos, un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es e-convexo si, y sólo si, $C$ es el conjunto solución de cierto sistema semi-infinito lineal general de la forma (1.1). Dado que los sistemas SSIL (cuyos conjuntos solución son los conjuntos convexos cerrados) son una subclase de los sistemas SSILG (cuando $E = \emptyset$ y $D$ es arbitrario), se tiene que todo conjunto convexo cerrado es e-convexo.

Los conjuntos e-convexos fueron introducidos en [3] para extender la teoría de la polaridad a conjuntos convexos no cerrados. Dado $C \subset \mathbb{R}^n$, Fenchel definió su nuevo *polar (negativo)* como

$$C^e := \{u \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, x\rangle < 1,\ \forall x \in C\},$$

probando que $C = C^{ee}$ si, y sólo si, $C$ es e-convexo y contiene al origen.

Más tarde, en [7] se demostraron algunos teoremas de separación para conjuntos e-convexos y, ya en los años ochenta, en [9], por un lado, y en [13], por otro, se comenzaron a usar los conjuntos e-convexos en análisis cuasiconvexo, definiendo las funciones e-cuasiconvexas como aquéllas cuyos conjuntos de subnivel son todos e-convexos. Esta clase de funciones tiene importantes aplicaciones en programación cuasiconvexa (véanse [10, 14]) y en economía matemática (véase [11]).

Ya en el presente siglo, la aparición de la e-convexidad en la literatura se hace más frecuente. En [1] se establecen una caracterización geométrica de los conjuntos e-convexos en espacios de Banach separables y nuevas caracterizaciones para las funciones e-cuasiconvexas. En [5] se demuestran nuevas caracterizaciones de los conjuntos e-convexos y se estudian la teoría y métodos para los problemas lineales de optimización con restricciones estrictas. En [6] se caracteriza la consistencia de los sistemas semi-infinitos lineales generales en términos de la e-convexidad. En [4] se establecen caracterizaciones duales de la inclusión de conjuntos con desigualdades convexas estrictas usando los conjuntos e-convexos. En [8] se realiza un estudio sistemático de las propiedades básicas de los conjuntos e-convexos, estableciendo además algunas caracterizaciones de los conjuntos que admiten sólo secciones o proyecciones e-convexas.

Con respecto a las *funciones e-convexas*, en [16], se definen como aquéllas cuyo epigrafo es un conjunto e-convexo y se estudian sus propiedades. En [12, 17], se definen esquemas de conjugación apropiados para este tipo de funciones. En [2], se extienden, al marco más general de las funciones e-convexas, algunos resultados bien conocidos para la subclase de las funciones convexas semicontinuas inferiormente y, además, usando el esquema de conjugación introducido en [12], se construye una nueva clase de problema dual tipo Fenchel para problemas de optimización, donde tanto el conjunto factible como la función objetivo son e-convexos.

En la Sección 2, se recogen una serie de resultados ya conocidos, en los que se caracteriza la clase de los conjuntos e-convexos, se muestran algunas de las propiedades de los conjuntos convexos cerrados y de los conjuntos convexos relativamente abiertos que se extienden a la clase más amplia de los conjuntos e-convexos y se define la envoltura e-convexa de un conjunto. Todos estos resultados pueden verse más ampliamente en [5, 6].

La Sección 3 también es un resumen de los resultados presentados en [16] acerca de las funciones e-convexas. En concreto, se muestra la relación existente entre esta clase de funciones y otras clases de funciones convexas bien conocidas (convexas semicontinuas inferiormente, e-cuasiconvexas, etc.) y se prueba que la clase de las funciones e-convexas es cerrada bajo las principales operaciones funcionales.

En este artículo, todos los vectores de $\mathbb{R}^n$ serán interpretados como vectores columna. Denotaremos por $\|\cdot\|$, $0_n$ y $B(x;r)$, la norma Euclídea, el vector nulo y la bola abierta centrada en $x$ y de radio $r>0$ en $\mathbb{R}^n$, respectivamente. Dado un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, $\operatorname{conv} X$, $\operatorname{cl} X$, $\operatorname{rint} X$ y $\operatorname{rbd} X$ denotarán la envoltura convexa, la clausura, el interior relativo (interior en la topología relativa a la menor variedad afín que contiene a $X$) y la frontera relativa de $X$, respectivamente. Dados $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$, el producto cartesiano de $X$ e $Y$ se denotará por $X \times Y \subset \mathbb{R}^{n+m}$.

Para un conjunto convexo no vacío $C$, se llama cono de recesión al conjunto de direcciones que, sobre cualquier punto de $C$, generan semirrectas contenidas en $C$. Diremos que un subconjunto de $C$ es una cara expuesta, si se puede obtener como conjunto de mínimos de una función afín sobre $C$.

Dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, su *dominio efectivo*, su *epigrafo* y sus *conjuntos de subnivel* para $r \in \mathbb{R}$, son

$$\operatorname{dom} f := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < +\infty\},$$

$$\operatorname{epi} f := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in \operatorname{dom} f,\ f(x) \leq r \right\}$$

y

$$L(f, r) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq r\},$$

respectivamente. La función $f$ se dice que es *propia* si $\operatorname{dom} f \neq \emptyset$.

Se dice que $f$ es *semicontinua inferiormente* (*sci,* para abreviar) en $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ si para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda < f(\overline{x})$, existe un entorno de $\overline{x}$, $V_{\overline{x}}$, tal que $\lambda < f(x)$ para todo $x \in V_{\overline{x}}$. Cualquier función convexa $f$ es sci en todos los puntos de $\mathbb{R}^n$ salvo, tal vez, en los de $\operatorname{rbd}(\operatorname{dom} f)$ (véase [15, Teorema 7.4]). Se dice que una función $f$ es *sci*, si $f$ es sci en todo $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$. Además, es bien sabido que las funciones sci se caracterizan por tener epigrafos cerrados y también por tener conjuntos de subnivel cerrados (véase [15, Teorema 7.1]).

## 2. Conjuntos e-convexos

### 2.1. Caracterización

En [5] pueden encontrarse varias condiciones que caracterizan la clase de los conjuntos e-convexos. En la Proposición 2.1, presentamos las dos caracterizaciones que consideramos de mayor utilidad a la hora de determinar si un conjunto es e-convexo o no.

**Proposición 2.1** ([5, Proposición 3.1])**.** *Dado un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\emptyset \neq C \neq \mathbb{R}^n$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

*(i)* *$C$ es e-convexo,*

*(ii)* *$C$ es un conjunto convexo y para cada $x \in \mathbb{R}^n \backslash C$ existe un hiperplano $H$ tal que $x \in H$ y $H \cap C = \emptyset$, y*

*(iii)* *$C$ es el resultado de eliminar de un cierto conjunto convexo cerrado la unión de una familia (posiblemente vacía) de sus caras expuestas.*

Como consecuencia de la proposición anterior y de [15, Proposición 11.2], cualquier conjunto convexo relativamente abierto es e-convexo. Obsérvese, pues, que cualquier conjunto convexo $X \neq \emptyset$ está encajado entre dos conjuntos e-convexos, $\operatorname{rint} X$ y $\operatorname{cl} X$, a distancia Hausdorff nula de $X$.

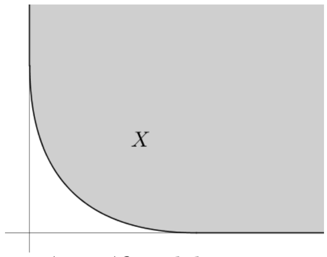


Figura 1: Representación gráfica del conjunto convexo cerrado $X$.

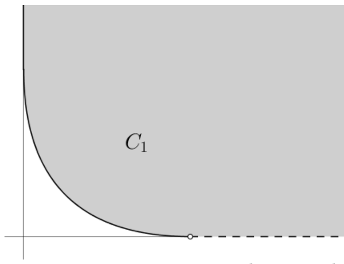


Figura 2: Conjunto e-convexo, no cerrado ni relativamente abierto.

En el siguiente ejemplo, $C_1$ es un conjunto e-convexo, que no es ni convexo cerrado ni convexo relativamente abierto, y $C_2$ es un conjunto convexo que no es e-convexo.

**Ejemplo 2.1** ([5, Ejemplo 3.1]). *Consideremos el conjunto convexo cerrado*

$$X = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid tx_1 + (1-t)x_2 \geq t - t^2,\ t \in [0,1]\right\} \tag{2.1}$$

*representado en la Figura 1.*

*Las caras expuestas no triviales de $X$ son*

$$X_u = \left\{\left(u, 1 + u - 2\sqrt{u}\right)\right\},\ 0 < u < 1,$$

$X_0 = \{0\} \times [1, +\infty[$ *y* $X_1 = [1, +\infty[ \times \{0\}$.

*Aplicando, respectivamente, los apartados (iii) y (ii) de la Proposición 2.1, obtenemos que $C_1 = X \backslash X_1$ es un conjunto e-convexo y, sin embargo,*

$$C_2 = X \backslash \left(]2, +\infty[ \times \{0\}\right)$$

*es un conjunto convexo que no es e-convexo (véanse las Figuras 2 y 3, respectivamente).*

## 2.2. Propiedades de los conjuntos e-convexos

La clase de los conjuntos e-convexos captura muchas de las propiedades destacadas de los conjuntos convexos cerrados y también de los conjuntos convexos

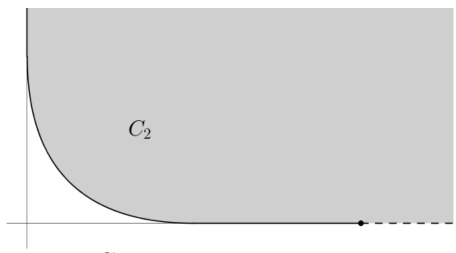


Figura 3: Conjunto convexo, no e-convexo.

relativamente abiertos. Un estudio bastante exhaustivo de las propiedades de estas dos subclases de conjuntos e-convexos puede verse en [15].

Una de las claves para la extensión de propiedades de la clase de los conjuntos convexos cerrados a la de los e-convexos, es la relación existente entre un sistema $\sigma$, dado como en (1.1), y su sistema relajado

$$\overline{\sigma} := \{\langle a_t, x\rangle \geq b_t,\ t \in T\},$$

obtenido al sustituir $\langle a_t, x\rangle > b_t$ por $\langle a_t, x\rangle \geq b_t$ para todo $t \in E$.

**Proposición 2.2** ([5, Proposición 1.1])**.** *Sea $C$ el conjunto solución del sistema $\sigma$ y sea $\overline{C}$ el conjunto solución del correspondiente sistema relajado $\overline{\sigma}$. Si $C \neq \emptyset$, entonces $\overline{C} = \operatorname{cl} C$.*

El siguiente resultado se puede interpretar como un tipo de *Lema de accesibilidad* para los conjuntos e-convexos, similar a [15, Teorema 6.1] para los conjuntos convexos relativamente abiertos.

**Proposición 2.3** ([3, Proposición 3.5])**.** *Si $C \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto e-convexo, $x^1 \in C$ y $x^2 \in \operatorname{cl} C$, entonces $\left[x^1, x^2\right[ \subset C$.*

**Observación 2.1.** *Nótese que esta propiedad no se cumple para conjuntos convexos en general, ya que si tomamos el conjunto convexo, no e-convexo, $C_2$ del Ejemplo 2.1 y los puntos $x^1 = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \in C_2$ y $x^2 = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} \in \operatorname{cl} C_2$, se cumple*

$$\left]x^1, x^2\right[ \cap C_2 = \emptyset.$$

A continuación probamos que la e-convexidad es invariante bajo la multiplicación por escalares. De forma análoga se puede probar que también es invariante por traslaciones y rotaciones.

**Proposición 2.4.** *Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto e-convexo. Entonces $\alpha C$ también es un conjunto e-convexo, para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$.*

**Demostración.** Si $\alpha = 0$, entonces $\alpha C = \{0_n\}$ que es claramente un conjunto e-convexo. Supongamos pues $\alpha \neq 0$. En este caso, como $x \in C$ si, y sólo si,

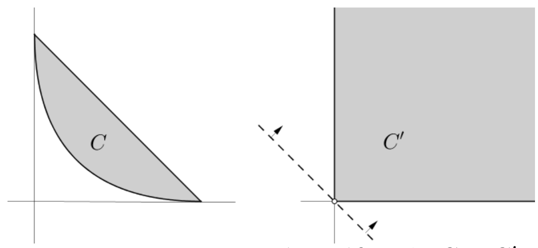


Figura 4: Representación gráfica de $C$ y $C'$.

$\alpha x \in \alpha C$, entonces, dado $\bar{x} \notin \alpha C$, se tiene que $\frac{1}{\alpha}\bar{x} \notin C$ y, por ser $C$ e-convexo, existe $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ de modo que $\frac{1}{\alpha}\langle a, \bar{x}\rangle = \gamma$ y $\langle a, x\rangle > \gamma$ para todo $x \in C$. Por lo tanto, para todo $y \in \alpha C$, se tiene $\frac{1}{\alpha} y \in C$ y $\left\langle a, \frac{1}{\alpha} y\right\rangle > \gamma$ y, denotando $b := \frac{1}{\alpha} a$, se obtiene $\langle b, \bar{x}\rangle = \gamma$ y $\langle b, y\rangle > \gamma$ para todo $y \in \alpha C$. Así pues, por la Proposición 2.1, $\alpha C$ es un conjunto e-convexo.

**Proposición 2.5** ([5, Proposición 3.6])**.** *El producto cartesiano de dos conjuntos e-convexos es también e-convexo.*

Con relación a la suma de dos conjuntos convexos cerrados, sabemos que no es necesariamente cerrada a menos que se cumpla que la intersección del cono de recesión de uno de los conjuntos con el opuesto del cono de recesión del otro es el vector nulo (véase [15, Corolario 9.1.2]). Seguidamente veremos que la suma de conjuntos e-convexos no es necesariamente e-convexa, ni siquiera cuando se cumple la mencionada condición de recesión.

**Ejemplo 2.2** ([5, pag. 165])**.** *Consideremos el conjunto e-convexo $X$ de* (2.1)*. El conjunto compacto $C := \{x \in X \mid x_1 + x_2 \leq 1\}$ y el conjunto*

$$C' := \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_1 + x_2 > 0\right\}$$

*(véase Figura 4) son obviamente e-convexos y satisfacen la mencionada condición de recesión (ya que la única dirección de recesión de $C$ es el vector nulo). Sin embargo, en la Figura 5 se puede ver que el conjunto $C+C'$ no es e-convexo, ya que, por ejemplo, en el punto $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus (C + C')$ no se cumple la condición* $(ii)$ *de la Proposición 2.1.*

Obsérvese también que $C \times C'$ es un conjunto e-convexo cuya imagen por la transformación lineal $A : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $A(x, z) = x + z$ es $C + C'$, que no es e-convexo. Esto demuestra que la imagen por una transformación lineal de un conjunto e-convexo puede no ser e-convexo (al igual que ocurre con los conjuntos convexos cerrados). En cambio, las transformaciones lineales convierten los conjuntos relativamente abiertos en otros de la misma clase (véase [15, Teorema 6.6]).

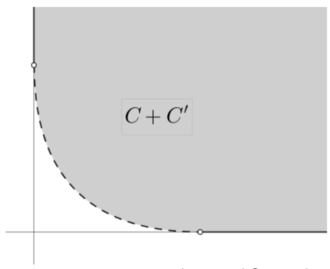


Figura 5: Representación gráfica de $C+C'$.

### 2.3. Envoltura e-convexa

Sabemos que la intersección de una familia arbitraria de conjuntos convexos cerrados es un conjunto convexo cerrado y, aunque la intersección no es una operación cerrada en la clase de los conjuntos relativamente abiertos, sí lo es cuando consideramos la clase más general de los conjuntos e-convexos. En efecto, una intersección arbitraria de conjuntos e-convexos sigue siendo una intersección de semiespacios abiertos y, por lo tanto, un conjunto e-convexo.

Esta propiedad justifica la definición, dada en [3], de la *envoltura e-convexa* de un conjunto no vacío $X$, que denotaremos por $\operatorname{eco} X$, como la intersección de todos los conjuntos e-convexos que contienen a $X$ (el menor conjunto e-convexo que contiene a $X$). Obviamente, $\operatorname{eco} X$ coincide con la intersección de todos los semiespacios abiertos que contienen a $X$, siempre que $\operatorname{conv} X \subsetneq \mathbb{R}^n$. Si $\operatorname{conv} X = \mathbb{R}^n$ (es decir, si no existe ningún semiespacio que contenga a $X$), entonces $\operatorname{eco} X = \mathbb{R}^n$.

Por definición, $X \subset \operatorname{eco} X$ y $X$ es e-convexo si, y sólo si, $\operatorname{eco} X = X$. Además, puesto que todo conjunto e-convexo es convexo y todo conjunto convexo cerrado es e-convexo, entonces, para cualquier conjunto $X$, se cumple

$$\operatorname{conv} X \subset \operatorname{eco} X \subset \operatorname{cl} \operatorname{conv} X.$$

**Proposición 2.6.** *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$. Dado $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $\overline{x} \notin \operatorname{eco} X$ si, y sólo si, existe $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ tal que $\langle z, x - \overline{x} \rangle > 0$, para todo $x \in X$.*

**Demostración.** Supongamos, en primer lugar, que $\overline{x} \notin \operatorname{eco} X$. Como $\operatorname{eco} X$ es e-convexo, por la Proposición 2.1, existe un $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ tal que $\langle z, x - \overline{x} \rangle > 0$ para todo $x \in \operatorname{eco} X$. En particular, puesto que $X \subset \operatorname{eco} X$, se cumple $\langle z, x - \overline{x} \rangle > 0$ para todo $x \in X$.

Recíprocamente, sea $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ tal que $\langle z, x - \overline{x} \rangle > 0$ para todo $x \in X$. Entonces, $X$ está contenido en el semiespacio abierto $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle z, x \rangle > \langle z, \overline{x} \rangle\}$ y, dado que $\operatorname{eco} X$ es la intersección de todos los semiespacios abiertos que contienen a $X$, se tiene que, en particular, $\operatorname{eco} X \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle z, x \rangle > \langle z, \overline{x} \rangle\}$. Por lo tanto, $\langle z, x \rangle > \langle z, \overline{x} \rangle$ para todo $x \in \operatorname{eco} X$ y $\overline{x} \notin \operatorname{eco} X$.

El siguiente corolario, que se deduce fácilmente de esta proposición, se puede interpretar como un tipo de *Lema de Farkas* para caracterizar la consistencia de los sistemas homogéneos de desigualdades lineales estrictas.

**Corolario 2.1.** *Sea* $X \subset \mathbb{R}^n$*. Entonces,* $0_n \notin \operatorname{eco} X$ *si, y sólo si, el sistema homogéneo* $\{\langle x, z\rangle > 0,\ x \in X\}$ *es consistente.*

**Proposición 2.7** ([6, Proposición 2.1])**.** *Para cualquier conjunto* $X \subset \mathbb{R}^n$*,* $\operatorname{eco} X$ *es el resultado de eliminar de* $\operatorname{cl}\operatorname{conv} X$ *la unión de todas sus caras expuestas que no cortan a* $X$*.*

**Proposición 2.8** ([6, Proposición 2.3])**.** *Dados* $X \subset \mathbb{R}^n$ *e* $Y \subset \mathbb{R}^m$*, se cumple que* $\operatorname{eco}(X \times Y) = (\operatorname{eco} X) \times (\operatorname{eco} Y)$.

**Corolario 2.2.** *El producto cartesiano de dos conjuntos es e-convexo si, y sólo si, cada uno de ellos es e-convexo.*

**Demostración.** En la Proposición 2.5 se ha establecido que dados dos conjuntos e-convexos, su producto cartesiano es un conjunto e-convexo. Recíprocamente, si tenemos que $C \times D$ es un conjunto e-convexo, en virtud de la proposición anterior,

$$C \times D = \operatorname{eco}(C \times D) = (\operatorname{eco} C) \times (\operatorname{eco} D)$$

de donde se deduce que necesariamente $C$ y $D$ son conjuntos e-convexos.

## 3. Funciones e-convexas

### 3.1. Introducción

Frecuentemente, el estudio de las diferentes clases de funciones consideradas en análisis convexo y cuasiconvexo, se puede reducir al estudio de los conjuntos básicos considerados en estas áreas. Así, por ejemplo, las propiedades de los conjuntos convexos se utilizan a menudo en el estudio de las funciones convexas y cuasiconvexas, ya que estas clases de funciones se caracterizan por la convexidad de sus epigrafos y de sus conjuntos de subnivel, respectivamente. Asimismo, comenzaron a usarse los conjuntos e-convexos en programación cuasiconvexa, definiendo las *funciones e-cuasiconvexas* como aquéllas que tienen conjuntos de subnivel e-convexos. Por otro lado, en optimización convexa juegan un papel fundamental las funciones convexas sci, que se caracterizan por tener epigrafos convexos cerrados. Además, se sabe que los conjuntos de subnivel de las funciones convexas son convexos, es decir, toda función convexa es cuasiconvexa, y las funciones sci se caracterizan porque todos los conjuntos de subnivel son cerrados.

Dado que todo conjunto convexo cerrado es e-convexo y todo conjunto e-convexo es convexo, dada una función $f$, se tienen las siguientes relaciones entre los distintos tipos de funciones mencionados:

| | | |
|---|---|---|
| $f$ **convexa** <br> $\Updownarrow$ <br> $\operatorname{epi} f$ convexo | $\Longrightarrow$ | $f$ **cuasiconvexa** <br> $\Updownarrow$ <br> $L(f,r)$ convexo, $\forall r \in \mathbb{R}$ |
| $\Uparrow$ | | $\Uparrow$ |
| ?? | $\Longrightarrow$ | $f$ **e-cuasiconvexa** <br> $\Updownarrow$ <br> $L(f,r)$ e-convexo, $\forall r \in \mathbb{R}$ |
| $\Uparrow$ | | $\Uparrow$ |
| $f$ **convexa sci** <br> $\Updownarrow$ <br> $\operatorname{epi} f$ convexo cerrado | $\Longrightarrow$ | $f$ **cuasiconvexa sci** <br> $\Updownarrow$ <br> $L(f,r)$ convexo cerrado, $\forall r \in \mathbb{R}$ |

Tabla 1: Relaciones entre algunas familias de funciones

Como puede verse en la Tabla 1, la clase de las funciones e-cuasiconvexas está comprendida entre la clase de las funciones cuasiconvexas sci y la clase de las funciones cuasiconvexas. De modo similar, y para completar el hueco existente entre las funciones convexas sci y las funciones convexas, introducimos las funciones e-convexas, que ya hemos dicho que se definen como aquéllas que tienen epigrafo e-convexo, y estudiamos las relaciones existentes entre esta nueva clase de funciones y las mencionadas en la tabla.

Como consecuencia directa del hecho de que todo conjunto e-convexo es convexo y todo conjunto convexo cerrado es e-convexo, se obtiene el siguiente resultado.

**Proposición 3.1.** *Si $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es convexa sci, entonces $f$ es e-convexa. Además, toda función e-convexa es convexa.*

Los siguientes ejemplos separan la clase de las funciones convexas sci de la clase de las funciones e-convexas y ésta de la clase de las funciones convexas.

**Ejemplo 3.1** ([16, Ejemplo 2.2])**.** *Considérese la función $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por la siguiente expresión:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > -1, \\ +\infty & x \leq -1. \end{cases}$$

*Se comprueba fácilmente que el epigrafo de esta función es un conjunto e-convexo pero no es cerrado, luego $f$ es una función e-convexa (y por tanto convexa), pero no es sci.*

**Ejemplo 3.2** ([16, Ejemplo 2.1])**.** *Sea la función $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por la siguiente expresión:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & -1 \leq x < 1, \\ 3 & x = 1, \\ +\infty & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

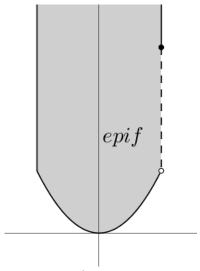


Figura 6: Epigrafo de una función convexa, no e-convexa.

*Esta función es convexa, pues* $\operatorname{epi} f$ *es convexo, pero no es e-convexa. En efecto, si consideramos el punto* $\overline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \operatorname{epi} f$, *se observa claramente que, para todo hiperplano* $H$ *tal que* $\overline{x} \in H$, *se tiene que* $H \cap (\operatorname{epi} f) \neq \emptyset$, *por lo que* $\operatorname{epi} f$ *no es un conjunto e-convexo (véase la Figura 6).*

**Proposición 3.2** ([16, Proposición 2.3])**.** *Sea* $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *una función e-convexa. Entonces los conjuntos de subnivel* $L(f, r)$ *son e-convexos, para todo* $r \in \mathbb{R}$.

De esta proposición se deduce trivialmente que toda función e-convexa es e-cuasiconvexa. El recíproco no es cierto en general, ni siquiera con la hipótesis de que $f$ sea convexa.

**Ejemplo 3.3.** *Consideremos de nuevo la función* $f$ *dada en el Ejemplo 3.2. Claramente todos sus conjuntos de subnivel son e-convexos, ya que o son vacíos o son intervalos acotados en* $\mathbb{R}$. *Luego* $f$ *es e-cuasiconvexa pero, en cambio,* $f$ *no es e-convexa.*

### 3.2. Caracterización de las funciones e-convexas

Hasta ahora, sabemos que la clase de las funciones e-convexas está comprendida entre la clase de las funciones convexas, que son sci en el interior relativo de su dominio y en el complementario de la clausura de su dominio, y la clase de las funciones convexas semicontinuas inferiormente en todo $\mathbb{R}^n$. Intuitivamente, nos preguntamos si existe algún modo de caracterizar las funciones e-convexas a través de la semicontinuidad inferior. En el Teorema 3.1 se obtiene dicha caracterización para las funciones e-convexas propias.

**Teorema 3.1** ([16, Teorema 2.9])**.** *Sea* $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *una función propia. Entonces,* $f$ *es e-convexa si, y solo si,* $f$ *es convexa y* $f$ *es sci en* $\operatorname{eco}(\operatorname{dom} f)$.

Se ha establecido que toda función convexa sci es e-convexa y que el recíproco, en general, no es cierto. Por el Teorema 3.1, podemos asegurar la semicontinuidad inferior de las funciones e-convexas propias en la envoltura e-convexa de su dominio. Por lo tanto, si tenemos una función e-convexa propia tal que la envoltura e-convexa de su dominio coincide con la clausura de su dominio, podemos afirmar además que esa función es convexa sci.

**Proposición 3.3** ([16, Corolario 2.10]). *Sea* $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *una función propia e-convexa con* $\operatorname{dom} f$ *un conjunto convexo cerrado. Entonces* $f$ *es convexa sci.*

### 3.3. Operaciones con funciones e-convexas

Se sabe que tanto la convexidad como la semicontinuidad inferior se conservan a través de las operaciones funcionales más importantes. En esta sección veremos que se obtiene el mismo resultado para la e-convexidad.

**Proposición 3.4** ([16, Proposición 3.1]). *Sea* $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *una función e-convexa y sea* $\alpha > 0$. *Entonces* $\alpha f$ *es una función e-convexa.*

**Proposición 3.5** ([16, Proposición 3.2]). *Sea* $\left\{f_i : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}},\ i \in I\right\}$ *una familia de funciones e-convexas y sea* $f := \sup_{i\in I} f_i$. *Entonces* $f$ *es una función e-convexa.*

Consideraremos ahora la suma de dos funciones e-convexas. Es bien sabido que, dadas dos funciones $f$ y $g$, $\operatorname{dom}(f+g) = \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$, siendo $(f+g)(x) = +\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ cuando la intersección es vacía. Dado que, en ese caso, $f+g$ es trivialmente e-convexa, en la siguiente proposición consideraremos solamente el caso en que $\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g \neq \emptyset$.

**Proposición 3.6** ([16, Proposición 3.3]). *Sean* $f, g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *dos funciones e-convexas tales que* $\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g \neq \emptyset$. *Entonces,* $f+g$ *es también una función e-convexa.*

### Agradecimientos

Los autores agradecen al Editor Asociado, Francisco Javier Toledo Melero, su invitación a contribuir en el presente número de la revista BEIO. Esta publicación se ha realizado con el apoyo financiero del Ministerio de Economía y Competitividad, a través del proyecto MTM2011-29064-C03-02.

## Referencias

[1] Daniilidis, A. y Martínez-Legaz, J.E. (2002). Characterizations of evenly convex sets and evenly quasiconvex functions. *J. Math. Anal. Appl.,* **273**, 58-66.

[2] Fajardo, M.D., Vicente-Pérez, J. y Rodríguez, M.M.L. (2012). Infimal convolution, c-subdifferentiability and Fenchel duality in evenly convex optimization. *TOP*, **20**, 375-396.

[3] Fenchel, W. (1952). A remark on convex sets and polarity. *Communications du Séminaire Mathématique de l'Université de Lund*, **Supplement**, 82-89.

[4] Goberna, M.A., Jeyakumar, V. y Dihn, N. (2006). Dual characterizations of set containments with strict convex inequalities. *J. Global Optim.,* **34**, 33-54.

[5] Goberna, M.A., Jornet, V. y Rodríguez, M.M.L. (2003). On linear systems containing strict inequalities. *Linear Alg. Appl.,* **360**, 151-171.

[6] Goberna, M.A. y Rodríguez, M.M.L. (2006). Analyzing linear systems containing strict inequalities via evenly convex hulls. *European J. Oper. Res.,* **169**, 1079-1095.

[7] Klee, V. (1968). Maximal separation theorems for convex sets. *Trans. Amer. Math. Soc.,* **134**, 133-147.

[8] Klee, V., Maluta, E. y Zanco, C. (2007). Basic properties of evenly convex sets. *J. Convex Anal.,* **14**, 137-148.

[9] Martínez-Legaz, J.E. (1981). *Un concepto de conjugación, aplicación a las funciones cuasiconvexas,* Tesis doctoral, Universidad de Barcelona.

[10] Martínez-Legaz, J.E. (1988). Quasiconvex duality theory by generalized conjugation methods. *Optimization*, **19**, 603-652.

[11] Martínez-Legaz, J.E. (1991). Duality between direct and indirect utility functions under minimal hypotheses. *J. Math. Econom.*, **20**, 199-209.

[12] Martínez-Legaz, J.E. y Vicente-Pérez, J. (2011). The e-support function of an e-convex set and conjugacy for e-convex functions. *J. Math. Anal. Appl.,* **376**, 602-612.

[13] Passy, U. y Prisman, E.Z. (1984). Conjugacy in quasiconvex programming. *Math. Program.,* **30**, 121-146.

[14] Penot, J.P. y Volle, M. (1990). On quasiconvex duality. *Math. Oper. Res.*, **15**, 597-625.

[15] Rockafellar, R.T. (1970). *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, EEUU.

[16] Rodríguez, M.M.L. y Vicente-Pérez, J. (2011). On evenly convex functions. *J. Convex Anal.*, **18**, 721-736.

[17] Volle, M., Martínez-Legaz, J.E. y Vicente-Pérez, J. (2013). Duality for closed convex functions and evenly convex functions. J. Optim. Theory Appl., DOI 10.1007/s10957-013-0395-4.

**Acerca de los autores**

**Margarita Rodríguez Álvarez** es licenciada en Matemáticas por la Universidad de Santiago y profesora titular de universidad en el Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Alicante. Es miembro del grupo de investigación LOPT de la Universidad de Alicante y su investigación se centra en el análisis convexo y la optimización semi-infinita e infinita, lineal y convexa.

**José Vicente Pérez** es doctor en Matemáticas por la Universidad de Murcia tras obtener una Ayuda FPI del Ministerio de Ciencia e Innovación asociada a un proyecto de investigación del grupo de investigación LOPT de la Universidad de Alicante. Tras realizar estancias post-doctorales en Navarra y en Australia, actualmente es profesor visitante en la Universidad Carlos III de Madrid y colabora con el grupo de investigación LOPT de la Universidad de Alicante. Sus líneas de investigación son el análisis convexo y la optimización robusta y semi-infinita.