

УДК 514.18

DOI: 10.15587/1729-4061.2020.201760

## Розробка методу геометричного моделювання супереліпсів Ламе у косокутних системах координат

В. Д. Борисенко, С. А. Устенко, І. В. Устенко

*Еліптичним кривим притаманний певний недолік, пов'язаний з тим, що в точках перетину з осями координат еліпси мають дотичні перпендикулярні до цих осей. Проте в деяких практичних застосуваннях еліпсів подібна ситуація є небажаною. Запобігти цьому можна моделюванням вказаних кривих у косокутних координатах, які, в свою чергу, віднесені до деякої вихідної ортогональної координатної системи. Під супереліпсами Ламе розуміються криві, в рівняннях яких застосовуються показники степенів, відмінні від двох, що є притаманним для звичайних еліпсів. Варіюванням цими показниками степенів можна отримати широке коло різноманітних кривих. У цій роботі запропоновано метод геометричного моделювання супереліпсів у косокутних координатних системах. Вихідними даними для моделювання є координати двох точок з відомими в них кутами нахилу дотичних. За вісі косокутної системи координат приймаються прямі, проведені наступним чином. Через першу точку будується пряма паралельно дотичній в другій точці, а в другій точці – пряма паралельно дотичній в першій точці. Показано, що завдяки цим заходам можна забезпечити потрібні значення кутів нахилу дотичних в точках перетину супереліпса з осьовими лініями. Доведено, що дугу супереліпса можна проводити через третю задану точку з потрібним в ній кутом нахилу дотичної, але це потребує визначення числовим методом показників степенів у рівнянні супереліпса. Подібна ситуація має місце, наприклад, при розробці проектів профілів лопаток осьових турбін. На підставі запропонованого методу моделювання дуг супереліпсів розроблено комп'ютерний код, який можна застосовувати при описі контурів виробів технологічно складних галузей промисловості*

*Ключові слова: супереліпс Ламе, геометричне моделювання, косокутна система координат, кут нахилу дотичної, розподіл кривини*

### 1. Вступ

Еліптичні криві є загально відомими кривими другого порядку, яким притаманна осьова симетрія відносно осей  $Ox$  і  $Oy$ , а також центральна симетрія відносно початку координат [1, 2]. Способи побудови цих кривих графічними методами розглядаються в нарисній геометрії [3], інженерній [4] та комп'ютерній графіці [5]. Приклади практичного застосування еліптичних кривих в суднобудуванні наведені в довіднику [6], в теорії механізмів і машин в роботі [7], побудові профілів лопаток осьових турбін [8]. Завдяки своїй відбівній здатності еліпси широко застосовуються в архітектурі та будівництві, зокрема при спорудженні куполів палаців і соборів, а також амфітеатрів (наприклад, "Зал секретів" Альгамбри в Гранаді і собор Святого Петра у Лондоні). З

астрономії відомо, що планети Сонячної системи обертаються навколо Сонця по орбітам у вигляді еліпсів. У наш час навколо Землі по еліптичним орбітам рухаються тисячі штучних супутників.

Під еліптичними кривими розуміються замкнуті плоскі лінії, які можна отримати як переріз циліндра або конуса обертання площиною, нахиленою до їх осі під деяким кутом. Це також може бути проекція кола на площину не паралельну площині розташування кола. Коло є окремим випадком еліпса. Афінним перетворенням кола можна отримати еліптичну криву або просто еліпс.

Еліптичним кривим притаманні деякі певні переваги, обумовлені, наприклад, монотонністю зміни кривини, кута нахилу дотичної, похідних тощо. Проте у еліпсів існує певний недолік, пов'язаний з кутами нахилу дотичних в точках перетину кривої з осями координат. Ці кути мають або нульове значення, або дорівнюють  $90^\circ$ . Проте, для еліпсів, які будуються в ортогональних координатах, немає жодної можливості забезпечити довільні значення кутів нахилу дотичних у точках перетину з осями координат.

Одним з можливих способів забезпечення довільних значень кутів нахилу дотичних в точках перетину кривої з осями координат є їх моделювання в косокутних координатних системах, а також утворення нових еліптичних кривих шляхом того чи іншого перетворення вже відомої кривої.

Ці питання мають теоретичне та практичне значення. Вони є актуальними для тих галузей промисловості, де виготовляються вироби складної геометричної форми (наприклад, суднобудуванні при описі ватерліній, шпангоутів, батоксів; газотурбобудуванні при моделюванні повітрозабірних пристроїв, профілів лопаток турбін). Так, в газотурбобудуванні важливо забезпечити розрахункові кути входу потоку в лопатковий апарат і виходу з нього. При цьому необхідно задовольнити умови плавного перебігу кутів нахилу дотичних від початкової до кінцевої точки модельованої кривої.

Треба зазначити, що останніми роками в проектуванні складних наукомістких виробів різних галузей промисловості відбулися суттєві якісні зміни. Спостерігається повсюдний перехід від традиційних засобів обробки графічної інформації до безпаперових технологій, які базуються на цифровому описі об'єктів, що проектуються і надалі виготовляються. Комп'ютерні технології дозволяють створювати числові моделі різних об'єктів. Проектант може переглядати на комп'ютері фізично не існуючий об'єкт, отримувати бажані його геометричні характеристики, вносити певні зміни, готувати виробництво і, нарешті, виготовляти той чи інший виріб на сучасних обробних центрах.

Геометрична інформація щодо виробів має визначати їх у повному обсязі, відповідати вимогам, які впливають з функціональних, конструктивних, міцнісних, ергономічних, естетичних, експлуатаційних, технологічних та інших умов. Найважливішою складовою інформації, що застосовується при виготовленні виробів технологічно складних, наукомістких галузей промисловості, є геометрична модель об'єкта, яка містить опис його форми, а також опис зв'язків елементів моделі.

## 2. Аналіз літературних джерел та постановка проблеми

В ортогональній системі координат еліпс описується наступним рівнянням [9, 10]:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \quad (1)$$

де  $a$  і  $b$  – півосі еліпса, при рівності яких еліпс перетворюється в коло.

Поняття супереліпса вперше ввів французький математик Габріель Ламе у 1818 році, який узагальнив рівняння еліпса і замість показника степеня, рівного двом у виразі (1) застосував довільний показник  $n$ , записавши це рівняння у вигляді

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1, \quad (2)$$

де показник степеня  $n$  може бути будь-яким раціональним числом,  $a$  і  $b$  – додатні числа, які називають півосями або півдіаметрами кривої.

Рівняння (2) визначає замкнуту криву, обмежену прямокутником зі сторонами –  $a \leq x \leq a$  та  $-b \leq y \leq b$ . Воно є узагальненим рівнянням еліпса, яке в залежності від значення показника степеня та величин півосей дозволяє отримувати коло, еліпс, квадрат і прямокутник. При  $n=1$  крива вироджується в пряму лінію, при  $n=2$  отримуємо звичайний еліпс, при  $n=2/3$  – астроїду (за умови, що  $a=b$ ).

З деякими особливостями супереліпса Ламе можна ознайомитися в роботі [10], зокрема знайти вирази для обчислення довжини дуги та площі кривої. В цій роботі супереліпси розглядаються в ортогональних координатах не у вигляді дуг, розташованих в області додатних значень координат, а в так званому повному обсязі.

Зараз важко визначитися, хто вперше запропонував застосовувати рівняння (2) з різними значеннями показників степенів, тобто записувати його у більш загальному вигляді:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1. \quad (3)$$

Застосування різних значень показників степенів надає ще більші можливості щодо побудови множини різноманітних кривих.

Підсумовуючи, можна зазначити, що всі записані вище рівняння мають практично однаковий математичний запис і різняться тільки значеннями показників степенів.

В якості найяскравіших прикладів практичного застосування супереліпсів Ламе можна вважати стадіон Ацтека, побудований до Олімпійських ігор у Мехіко, та площу в Стокгольмі.

У роботі [11] наведені приклади побудови супереліпсів з рівними значеннями показників степенів. Ці приклади демонструють зміну геометрії кривих при поступовому зменшенні показників степенів. Вказується, що одна з площ Стокгольма має форму супереліпса.

Приклади застосування супереліпсів в комп'ютерній графіці показані в роботі [12]. Вказані криві розглядаються з рівними значеннями показників степенів в ортогональних координатах.

У роботі [13] показано, що в природі існує багато прикладів рослин, у яких поперечний переріз збігається по формі з супереліпсами Ламе, які названо овалами Ламе. І в цій роботі супереліпси розглядаються з рівними значеннями показників степенів. Подальші результати попередніх досліджень наведені в роботі [14], в якій рівняння супереліпса розглядаються в полярній системі координат і різними значеннями показників степенів. Це поширило коло найрізноманітніших кривих, приклади яких знайдено в рослинному світі.

У роботі [15] продовжені пошуки, пов'язані з описом особливостей рослинного світу. У ній також застосовується супереліпс Ламе з рівними значеннями показників степенів і формується цей еліпс в ортогональних координатах.

У роботі [16] супереліпсами Ламе описуються симетричні форми бамбукових листів, що має вирішальне значення для опису морфогенезу і розвитку рослин. У роботі [17] розглядається питання моделювання кільцевих зрізів дерев, що може дозволити краще оцінювати продуктивність лісів і накопичення вуглецю в наземних лісових екосистемах.

Асимптотична поведінка максимальної кривини кривих Ламе досліджена в роботі [18]. Це єдине відоме джерело, в якому мова йдеться про кривину супереліпсів Ламе, хоча в ньому також застосовуються криві з рівними значеннями показників степенів. При цьому знаходиться оптимальне значення показника степеню, яке забезпечує "найбільш вишукану" форму. Основним результатом цієї роботи є вираз для знаходження асимптоти точки з максимальною кривиною.

Для відновлення та класифікації шахтоподібних форм в сонарбічних зображеннях в роботі [19] запропоновано застосовувати супереліпси Ламе з рівними значеннями показників степенів. Супереліпсами згладжувалися нерівності, які мають місце в реальних шахтоподібних формах.

У роботі [20] пропонується описувати супереліпсами Ламе антени для прийому електромагнітних коливань. Приблизно цій же тематиці присвячена робота [21], в якій розроблено проект всеспрямованої ультра широкосмугової антени супереліпсоїдної форми.

У багатьох контактних механізмах котіння або ковзання, таких як роликові підшипники, підшипники коробки передач, шестірні існує контакт між двома напівнескінченими тілами, концентроване напруження виникає на краях контакту. У роботі [22] представлений новий тип профілю на основі рівняння супереліпса (еліпс узагальнений до порядку  $n$ ). За допомогою цього профілю досить просто встановлюються параметри відповідно до передбачуваної сфери застосування. Супереліпс легко адаптується до всіх видів контакту зміною порядку супереліптичного профілю. Переваги супереліптичного профілю –

рівномірний розподіл тиску та відсутність крайового ефекту, при цьому він залишається простим у виробництві.

З виконаного аналізу випливає, що переважно розглядаються питання, пов'язані з побудовою супереліпсів Ламе як замкнутих кривих, в ортогональних системах координат. Криві будуються за умови, що показники ступенів рівнянь супереліпсів є величинами, які задаються з вихідними даними. Це надає можливість отримувати різноманітні лінії, від прямої до прямокутника з чітко визначеними прямими кутами. Питання побудови супереліпсів з заданими кутами нахилу дотичних в точках перетину з осями координат не розглядаються. При конструюванні виробів складної геометричної форми (кулачкових механізмів, лопаток турбін тощо), проєктанти зіткаються з необхідністю проведення кривих через дві або три задані точки з відомими кутами нахилу дотичних. Зважаючи на привабливі якості еліптичних кривих, необхідно розробити заходи, які б задовольнили практиків при розробці ними геометричних моделей проєктованих виробів.

### 3. Мета та задачі дослідження

Метою роботи є розробка методу моделювання супереліпсів Ламе, який забезпечував їх проходження через дві або три точки з заданими в них кутами нахилу дотичних стосовно виробів складної геометричної форми.

Для досягнення поставленої мети необхідно розробити методи побудови:

- дуги еліпса в косокутній системі координат;
- дуги супереліпса Ламе в косокутній системі координат;
- дуги супереліпса Ламе через три задані точки з відомими в них кутами нахилу дотичних.

### 4. Метод побудови дуги еліпса в косокутній системі координат

Розглянемо дугу еліпса, що описується рівнянням (1), розташовану в області додатних значень координат. Побудуємо цю дугу у косокутній системі координат з кутами нахилу осьових ліній цієї системи  $\alpha$  і  $\beta$  до осі абсцис деякої прямокутної системи координат.

Візьмемо в ортогональній системі координат дві довільні точки  $T_1$  і  $T_2$ , проведемо через ці точки прямі, нахилені до осі абсцис під кутами  $\alpha$  і  $\beta$ . Вважатимемо, що ці прямі є координатними осями косокутної системи координат.

Позначимо вісі косокутної системи координат та її центр як  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  і  $\bar{O}$ . На рис. 1 у координатній системі  $xOy$  задані дві точки  $T_1$  і  $T_2$ , в яких також відомі кути нахилу дотичних  $\alpha$  і  $\beta$ . Необхідно провести дугу кривої таким чином, щоб вона проходила через означені точки та мала в кінцевих точках задані кути нахилу дотичних.

За відомими вихідними даними будемо паралелограм. Сторону  $\bar{O}T_1$  цього паралелограма візьмемо за вісь  $\bar{x}$ , а сторону  $\bar{O}T_2$  – за вісь  $\bar{y}$ . Таким чином, утворюється косокутна система координат  $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$ . У цій координатній системі змодельуємо дугу еліпса таку, що проходить через точки  $T_1$  і  $T_2$  і буде дотичною до сторін  $TT_1$  і  $TT_2$  побудованого паралелограма.

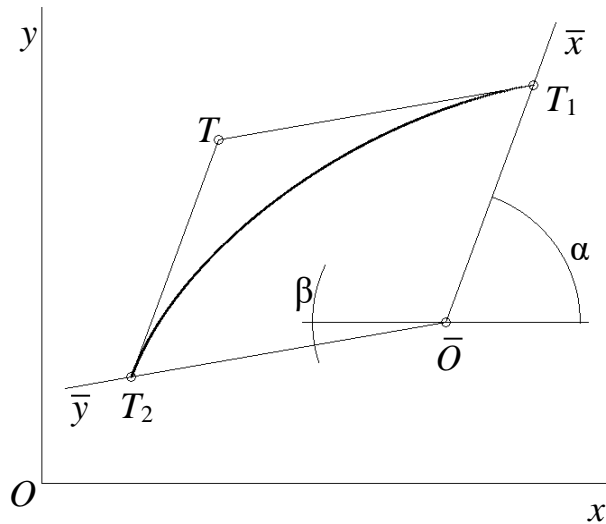


Рис. 1. Дуга еліпса у косокутних координатах

Оскільки дугу еліпса будемо будувати в косокутній системі координат, то рівняння (1) перепишемо у вигляді, яке відображає факт його застосування в цій системі координат:

$$\left(\frac{\bar{x}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\bar{y}}{b}\right)^2 = 1. \quad (4)$$

За відомими координатами кінцевих точок модельованої кривої та кутами нахилу в них дотичних складаємо рівняння осевих ліній:

$$y - y_{T_1} = (x - x_{T_1}) k_2; \quad y - y_{T_2} = (x - x_{T_2}) k_1, \quad (5)$$

де

$$k_1 = \operatorname{tg} \alpha; \quad k_2 = -\operatorname{tg} \beta.$$

Розв'язавши отриману систему рівнянь, знаходимо координати точки  $\bar{O}$ , яка є початком косокутної системи координат:

$$x_{\bar{O}} = \frac{y_{T_2} - y_{T_1} + k_2 x_{T_1} - k_1 x_{T_2}}{k_2 - k_1}; \quad (6)$$

$$y_{\bar{O}} = y_{T_1} + k_2 (x_{\bar{O}} - x_{T_1}). \quad (7)$$

У косокутній системі координат  $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$  відрізки  $\bar{O}T_1$  і  $\bar{O}T_2$  визначають величини великої  $a$  і малої  $b$  півосей еліпса:

$$a = \sqrt{(x_{T_1} - x_{\bar{O}})^2 + (y_{T_1} - y_{\bar{O}})^2};$$

$$b = \sqrt{(x_{T_2} - x_{\bar{O}})^2 + (y_{T_2} - y_{\bar{O}})^2}.$$

Можна показати, що зв'язок ортогональних координат  $x, y$  деякої точки еліпса з координатами  $\bar{x}, \bar{y}$  косокутної системи координат має вигляд:

$$x = x_{\bar{O}} + \bar{x} \cos \alpha - \bar{y} \cos \beta; \quad (8)$$

$$y = y_{\bar{O}} + \bar{x} \sin \alpha - \bar{y} \sin \beta. \quad (9)$$

Оскільки з рівняння (4)

$$\bar{y} = b \sqrt{1 - \left(\frac{\bar{x}}{a}\right)^2},$$

то підставивши  $\bar{y}$  до виразів (8) і (9), матимемо

$$x = x_{\bar{O}} + \bar{x} \cos \alpha - b \sqrt{1 - \left(\frac{\bar{x}}{a}\right)^2} \cos \beta; \quad (10)$$

$$y = y_{\bar{O}} + \bar{x} \sin \alpha - b \sqrt{1 - \left(\frac{\bar{x}}{a}\right)^2} \sin \beta. \quad (11)$$

Вирази (10) і (11) дозволяють визначити координати  $x$  і  $y$  будь-якої точки кривої і тим самим описують ділянку еліпса в прямокутній системі координат  $xOy$ .

### 5. Метод побудови дуги супереліпса Ламе в косокутній системі координат

За рівняннями (2) і (3) супереліпси будуються в прямокутних системах координат. При цьому дотичні, проведені в точках перетину кривих з координатними осями, утворюють з цими осями прямі кути. Проте в деяких практичних застосуваннях необхідно мати вказані кути відмінні від прямих кутів. Досягти цього результату можливо тільки при побудові супереліпсів Ламе в косокутних системах координат, осі яких орієнтовані одна до одної під кутом, необхідним для побудови бажаної кривої.

За вихідними даними, застосованими вище, можна побудувати паралелограм. Сторону  $\bar{O}T_1$  цього паралелограма візьмемо за вісь  $\bar{x}$ , сторону  $\bar{O}T_2$  – за вісь  $\bar{y}$ . Таким чином, буде утворена косокутна система координат  $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$ . Координати точки  $\bar{O}$  – початку криволінійної системи координат визначаються за виразами (6),

(7). У цій координатній системі змодельюємо дугу супереліпса Ламе таку, що проходить через точки  $T_1$  і  $T_2$  і буде дотичною до сторін  $TT_1$  і  $TT_2$  паралелограма.

Рівняння супереліпса візьмемо у вигляді

$$\left(\frac{\bar{x}}{a}\right)^m + \left(\frac{\bar{y}}{b}\right)^n = 1. \quad (12)$$

Оскільки розрахунок координат модельованої кривої відбувається в косокутних координатах, то зв'язок між косокутними та ортогональними координатами точок кривої встановлюють за виразами (10)–(11).

Побудова дуги супереліпса Ламе здійснюється послідовною зміною координати  $\bar{x}$  від нуля до величини, яка дорівнює довжини півосі  $a$ . Для поточного значення координати  $\bar{x}$  розраховується косокутна координата  $\bar{y}$ , яка визначається за наступним виразом:

$$\bar{y} = b^n \sqrt[1 - \left(\frac{\bar{x}}{a}\right)^m]. \quad (13)$$

Підставивши  $\bar{y}$  до виразів (10) і (11), остаточно матимемо:

$$x = x_{\bar{o}} + \bar{x} \cos \alpha - b^n \sqrt[1 - \left(\frac{\bar{x}}{a}\right)^m] \cos \beta; \quad (14)$$

$$y = y_{\bar{o}} + \bar{x} \sin \alpha - b^n \sqrt[1 - \left(\frac{\bar{x}}{a}\right)^m] \sin \beta. \quad (15)$$

Вирази (14) і (15) визначають координати  $x$  і  $y$  будь-якої точки кривої і тим самим описують дугу супереліпса Ламе в прямокутній системі координат  $xOy$ .

На рис. 2 наведено приклад трьох дуг супереліпсів Ламе, побудованих зі значеннями показників степенів  $m=2$  і  $n=2$  (крива 1),  $m=\pi$  і  $n=e$  (крива 2, де  $e$  – основа натурального логарифму), і  $m=5$  і  $n=4$  (крива 3). Крива 1 є дугою звичайного еліпса, побудованого в косокутних координатах, фактично вона є повторенням кривої, показаної на рис. 1.

З розгляду рис. 2 випливає, що всі три криві в кінцевих їх точках є дотичними до відповідних сторін паралелограма  $\bar{O}T_1TT_2$ . Також можна відзначити, що величини показників степенів  $m$  і  $n$  суттєво впливають на форму кривих. Зі збільшенням цих показників криві все більше наближаються до сторін  $TT_1$  і  $TT_2$  паралелограма  $\bar{O}T_1TT_2$ . Отже, змінюючи значення показників степенів  $m$  і  $n$  можна отримати широке коло різноманітних кривих.

Графічна інформація, що наведена на рис. 3 демонструє вплив кутів  $\alpha$  і  $\beta$  на дуги супереліпсів Ламе. При моделюванні кривих кут  $\alpha$  поступово зменшу-



вався на  $10^\circ$ , а кут  $\beta$  на  $5^\circ$ . За цих обставин центри косокутних координат зміщувалися вгору-вліво, а точка  $T$  рухалася вниз-вправо. Точки  $T_1$  і  $T_2$  свого положення не змінювали. Точки  $\bar{O}$  і  $T$  вказані біля вершин вихідного паралелограма. Дуги супереліпсів Ламе будувалися зі значеннями показників степенів  $m = \pi$  і  $n = e$ .

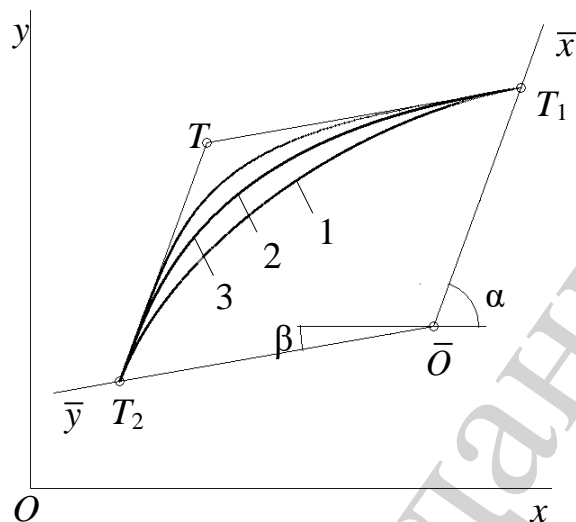


Рис. 2. Дуги супереліпсів у косокутних координатах

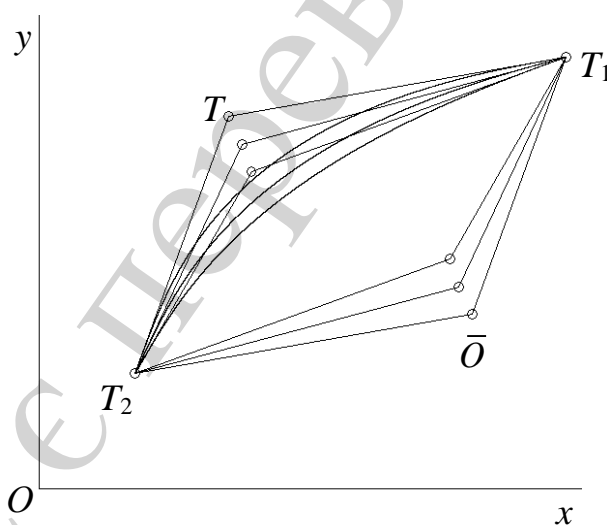


Рис. 3. Вплив кутів  $\alpha$  і  $\beta$  на дуги супереліпсів Ламе

На рис. 4 наведена графічна інформація, яка демонструє вплив координат вихідних точок  $T_1$  і  $T_2$  на дуги супереліпсів Ламе. Точка  $T_1$  поступово переміщувалася вправо-вниз, а точка  $T_2$  – вліво-вниз. Кути  $\alpha$  і  $\beta$  залишалися незмінними, рівними вихідним їх значенням. Вершини паралелограма позначені на його зображенні, яке відповідає вихідним даним.

Сумісний вплив кутів  $\alpha$  і  $\beta$  та координат вихідних точок  $T_1$  і  $T_2$  на дуги супереліпсів Ламе продемонстровано на рис. 5. За вихідні дані бралися кути  $\alpha$  і  $\beta$ ,

які були застосовані при побудові кривих, показаних на рис. 3, та координати точок  $T_1$  і  $T_2$ , за якими будувалися криві, показані на рис. 4.

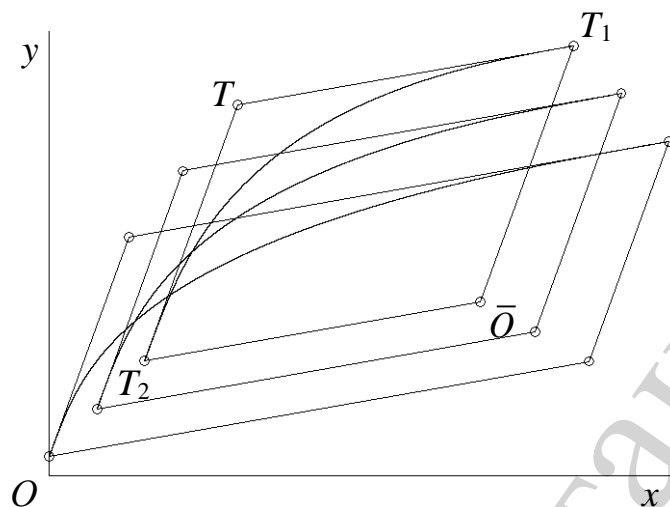


Рис. 4. Вплив положень точок  $T_1$  і  $T_2$  на дуги супереліпсів Ламе

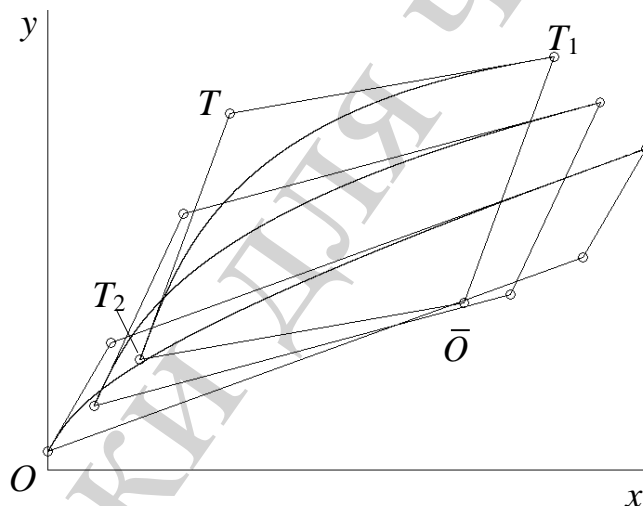


Рис. 5. Вплив кутів  $\alpha$  і  $\beta$  та положень точок  $T_1$  і  $T_2$  на дуги супереліпсів Ламе

Таким чином, графічна інформація, наведена на рис. 3–5 наочно підтверджує можливість моделювання дуг супереліпсів Ламе в широкому діапазоні варіювання вихідних даних.

#### **6. Метод побудови дуги супереліпса Ламе через три задані точки з відомими в них кутами нахилу дотичних**

У вище розглянутих прикладах дуги супереліпсів Ламе будувалися за умови, що показники степенів  $m$  і  $n$  у рівнянні супереліпса Ламе були величинами відомими. При цьому не ставилося завдання проведення кривої через задану точку із заданим в ній кутом нахилу дотичної. Подібне завдання дуже часто зу-

стрічається в різноманітних практичних застосуваннях дуг супереліпсів Ламе. Поставлене завдання можна розв'язати, якщо буде розроблено певний алгоритм знаходження показників степенів  $m$  і  $n$  таких, які забезпечать проходження кривої через задані точку та кут нахилу дотичної.

Перш за все визначимо залежності, які встановлюють зв'язок косокутних координат  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  довільної точки з її ортогональними координатами. Ці залежності можна отримати, розв'язавши систему рівнянь (8), (9) відносно  $\bar{x}$  і  $\bar{y}$ . Після перетворень будемо мати:

$$\bar{x} = \frac{(x - x_{\bar{o}})\sin\beta + (y - y_{\bar{o}})\cos\beta}{\sin(\alpha + \beta)};$$

$$\bar{y} = \frac{(y - y_{\bar{o}})\cos\alpha + (x - x_{\bar{o}})\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Координати  $\bar{x}$  і  $\bar{y}$  можна подати наступним чином:

$$\bar{x} = a_1x + a_2y + a_3; \tag{16}$$

$$\bar{y} = a_4x + a_5y + a_6, \tag{17}$$

де

$$a_1 = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}; a_2 = \frac{\cos\beta}{\sin(\alpha + \beta)}; a_3 = -\frac{x_{\bar{o}}\sin\beta + y_{\bar{o}}\cos\beta}{\sin(\alpha + \beta)};$$

$$a_4 = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}; a_5 = \frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}; a_6 = \frac{x_{\bar{o}}\sin\alpha - y_{\bar{o}}\cos\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Підстановка виразів (16), (17) до рівняння еліпса (14) дозволяє встановити взаємний зв'язок ортогональних координат  $x$  і  $y$ :

$$\left(\frac{a_1x + a_2y + a_3}{a}\right)^m + \left(\frac{a_4x + a_5y + a_6}{b}\right)^n = 1$$

або

$$b^n (a_1x + a_2y + a_3)^m + a^m (a_4x + a_5y + a_6)^n - a^m b^n = 0. \tag{18}$$

Показники степенів  $m$  і  $n$  рівнянь (12) чи (18) будемо визначати за умови забезпечення проходження кривої через задану точку  $A$  з кутом  $\delta$  нахилу в ній дотичної.

Оскільки між координатами  $x$  і  $y$  існує неявна залежність вигляду

$$f(x, y) = 0,$$

то її похідна визначається наступним чином:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y}, \quad (19)$$

де

$$\frac{\partial f}{\partial x} = b^n m (a_1 x + a_2 y + a_3)^{m-1} a_1 + a^m n (a_4 x + a_5 y + a_6)^{n-1} a_4;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = b^n m (a_1 x + a_2 y + a_3)^{m-1} a_2 + a^m n (a_4 x + a_5 y + a_6)^{n-1} a_5.$$

Прирівнявши похідну в точці  $A$  тангенсу кута  $\delta$ , після перетворень отримаємо наступне рівняння:

$$b^n m (a_1 x_A + a_2 y_A + a_3)^{m-1} (a_1 + \operatorname{tg} \delta a_2) + a^m n (a_4 x_A + a_5 y_A + a_6)^{m-1} (a_4 + \operatorname{tg} \delta a_5) = 0.$$

Вирази, записані в дужках, є величинами сталими. Застосуємо позначення:

$$A = a_1 x_A + a_2 y_A + a_3; \quad B = a_1 + \operatorname{tg} \delta a_2;$$

$$C = a_4 x_A + a_5 y_A + a_6; \quad D = a_4 + \operatorname{tg} \delta a_5.$$

Отримаємо

$$b^n m A^{m-1} B + a^m n C^{n-1} D = 0. \quad (20)$$

У цьому виразі невідомими величинами є показники степенів  $m$  і  $n$ . Але один з цих показників можна виразити через інший, скориставшись рівнянням (13), записаним для точки  $A$ :

$$n = \frac{\ln \left[ 1 - \left( \frac{\bar{x}_A}{a} \right)^m \right]}{\ln \left( \frac{\bar{y}_A}{b} \right)}. \quad (21)$$

Для сумісного розв'язання рівнянь (20), (21) застосовано високоефективний алгоритм, запропонований в роботі [23]. Цей алгоритм сполучає безвідмовність бісекції з асимптотичною швидкістю методу січних.

Наведені на рис. 6 графічні дані свідчать про те, що побудовані дуги супереліпсів Ламе чітко проходять через задані точки. Вони також мають в них задані кути нахилу дотичних. Одночасно треба зазначити, що оскільки супереліпс Ламе має так званий "жорсткий" характер, то до вибору точки, через яку має пройти крива, треба підходити зважено. По-перше, точка має знаходитися у середині паралелограма, утвореного осями та паралельними до них прямими. По-друге, кут нахилу дотичної в заданій точці має приблизно відповідати характеру проходження кривої. Зрозуміло, що певний люфт при завданні кута має місце, але задавати аби який кут небажано. Виконання програми при невдалому завданні кута буде зупинено.

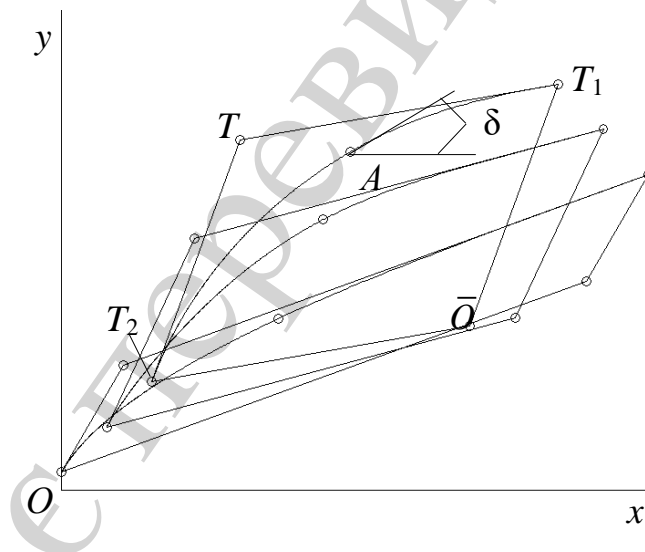


Рис. 6. Побудова дуг супереліпсів, що проходять через вихідні точки з заданими в них кутами нахилу дотичних

Слід зазначити, що в практичних застосуваннях користувач матиме можливість прогнозувати як положення проміжної точки, так і ймовірне значення кута нахилу дотичної.

Однією з найважливіших характеристик плоскої кривої є кривина та пов'язаний з нею радіус кривини.

Розробимо заходимо щодо визначення кривини дуги супереліпса Ламе. Загально відомо, що кривина  $k$  будь-якої кривої визначається наступною формулою:

$$k = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}. \quad (22)$$

Перша похідна  $\frac{dy}{dx}$  знаходиться за виразом (19). Друга похідна неявної функції визначається наступним чином:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3},$$

де

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = b^n m(m-1)(a_1 x + a_2 y + a_3)^{m-2} a_1^2 + a^m n(n-1)(a_4 x + a_5 y + a_6)^{n-2} a_4^2;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = b^n m(m-1)(a_1 x + a_2 y + a_3)^{m-2} a_1 a_2 + a^m n(n-1)(a_4 x + a_5 y + a_6)^{n-2} a_4 a_5;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = b^n m(m-1)(a_1 x + a_2 y + a_3)^{m-2} a_2^2 + a^m n(n-1)(a_4 x + a_5 y + a_6)^{n-2} a_5^2.$$

На рис. 7 для прикладу в косокутних координатах побудовані три криві, дві з яких є дугами супереліпсів Ламе (криві 1 і 2), а одна – дугою звичайного еліпса (крива 3). Дуги супереліпсів Ламе будувалися з наступними значеннями показників степенів: крива 1 –  $m=5$  і  $n=4$ , крива 2 –  $m=\pi$  і  $n=e$ .

Для цих кривих за виразом (22) були визначенні кривини, вигляд яких показано на рис. 8. Нумерація кривих на рис. 7 і 8 ідентична. Криві побудовані в залежності від відносної довжини дуги модельованої кривої.

Розглядаючи графіки розподілу кривини, можна зробити такі висновки:

1) всі криві мають плавний характер з одним екстремумом, розташованим на початкових ділянках кривих;

2) після екстремуму криві приймають монотонний, спадаючий характер зі значенням кривини трохи більшим за нуль (криві 2 і 3) і дещо більшим за нуль (крива 1).

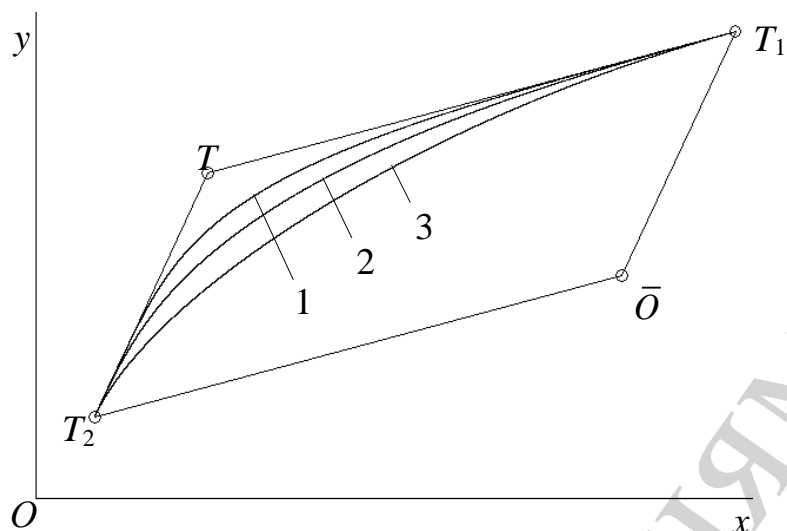


Рис. 7. Дуги еліптичних кривих з різними значеннями показників степенів

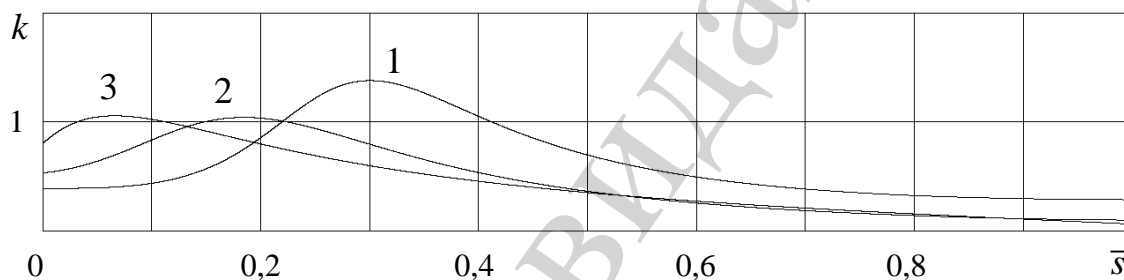


Рис. 8. Графіки розподілу кривини

## 7. Результати моделювання супереліпсів Ламе у косокутних системах координат

На підставі запропонованих заходів стосовно геометричного моделювання супереліпсів Ламе розроблено комп'ютерний код в середовищі Fortran PowerStation. При зверненні до цього коду виконуються розрахунки, пов'язані з визначенням координат точок модельованої лінії. В ньому застосовуються підпрограми визначення першої та другої похідних, кривини кривої, перетворення косокутних координат в ортогональні, а також запозичена з роботи [23] підпрограма розв'язання трансцендентних рівнянь. Розроблений код, окрім числових результатів, якими є координати точок модельованих ліній, дозволяє візуалізувати лінії на екрані монітора комп'ютера. Графічні дані є візуальним підтвердженням працездатності запропонованого методу геометричного моделювання супереліпсів Ламе в косокутних координатах при двох та трьох заданих координат точок та кутів нахилу дотичних. Розглядаючи побудовані дуги еліпсів в ортогональних координатах можна чітко бачити, що ці дуги проходять через вихідні точки і мають в них задані кути нахилу дотичних. Похибка розбіжності координат вихідних точок та розрахованих не перевищує  $10^{-6}$ , що є достатнім для практичного застосування.

На рис. 9 для прикладу наведено профіль соплової лопатки осьової турбіни з кутами входу і виходу потоку, які дорівнювали  $90^\circ$  і  $15^\circ$ , відповідно. Спинка і коритця профілю моделювалися із застосуванням дуг супереліпсів Ламе. Обидві дуги будувалися по трьом точкам і заданим в них кутах нахилу дотичних. По дві точки кожної дуги знаходилися в місцях стикування з вхідною та вихідною кромками профілю. На спинці профілю третя точка знаходилася в горлі міжлопаткового каналу, на коритці – в точці, яка обумовлює задану максимальну товщину профілю. Нахил дотичної в горлі каналу визначався кутом відгину профілю. Кут нахилу дотичної в третій точці на коритці дорівнював куту, який мала дотична на спинці в місці її торкання з колом максимальної товщини профілю.

Запропонований метод моделювання дуг супереліпсів у косокутних координатах може бути застосований при аналітичному поданні корабельних кривих, у першу чергу це стосується ватерліній.

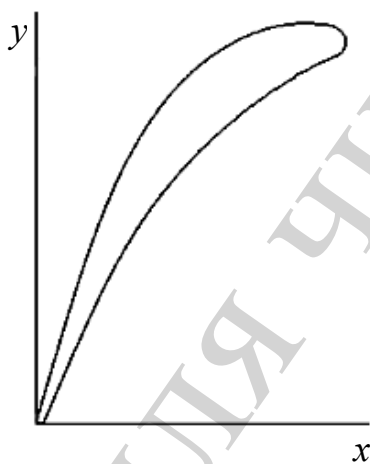


Рис. 9. Профіль лопатки турбіни

## 8. Обговорення методу моделювання супереліпсів Ламе у косокутних системах координат

У роботі показано, що для забезпечення бажаних кутів нахилу дотичних в точках перетину еліпсів і тим паче супереліпсів з осями координат, треба будувати ці криві в косокутних координатах. Вісі косокутних координат вибираються таким чином, що одна з осей проходила через першу точку і була паралельна дотичній у другій точці. Відповідно друга вісь має проходити через другу точку і бути паралельною дотичній у другій точці. Зрозуміло, що дотичні не мають бути паралельними між собою. Це впливає з розгляду формул (6) і (7), оскільки в цьому випадку буде невизначений результат, пов'язаний з діленням на нуль.

Отримані позитивні результати з геометричного моделювання супереліпсів Ламе у косокутних координатах обумовлюються коректністю математичних викладок, які базуються на положеннях аналітичної і диференціальної геометрії та числових методів. Алгоритмізація методів, які відповідають поставленим задачам дослідження, дозволили розробити працездатний комп'ютерний код. Усі задачі дослідження практично реалізовані, що підтверджується наведеними графічними результатами. Так, рис. 1 демонструє можливість побудови звичайного еліпса в



косокутних координатах і забезпеченням заданих, відмінних від  $90^\circ$ , кутів нахилу дотичних в кінцевих точках. Рис. 2–5 підтверджують можливість моделювання супереліпсів Ламе в косокутних координатах при зміні положення вихідних точок і кутів нахилу в них дотичних. В цій задачі показники степенів супереліпсів є величинами, які задаються з вихідними даними. Це є наслідком того, що немає додаткових умов для знаходження показників степенів.

Умовою для розрахунку показників степенів числовим розв'язання рівнянь (20) і (21) є наявність третьої заданої точки з відомим в ній кутом нахилу дотичної. Результати розв'язання графічно подані на рис. 6, на якому продемонстровано вплив як координат вихідних точок, так і кутів нахилу в них дотичних. Саме розв'язання цієї задачі є важливим для практичного застосування дуг супереліпсів Ламе.

При побудові супереліпсів Ламе при двох заданих точках і різних значеннях кутів нахилу в них дотичних проблем не існує, хоча при цьому треба вказувати величини показників степенів. Проведення дуги супереліпса через три задані точки з відомими в них кутами нахилу дотичних вимагає визначення числовим методом показників степенів і потребує зваженого підходу до вибору положення "середньої" точки та кута нахилу в ній дотичної, що обумовлюється "жорстким" характером супереліпса Ламе. Проте це не є критичним для фахівців в предметній галузі застосування еліптичних кривих.

Дослідження з геометричного моделювання супереліпсів Ламе доцільно розвивати в напрямку розширення кола практичних задач, в яких необхідно будувати обводи деталей складної геометричної форми. Цікаві результати можливо отримати при побудові супереліпсів Ламе в полярних координатах.

## 9. Висновки

1. Побудова дуги звичайного еліпсу, якому притаманні однакові значення показників степенів рівні двом, у косокутних координатах дозволяє отримувати ці дуги з заданими кутами нахилу дотичних в кінцевих точках. Вісі косокутних координат визначаються положенням двох точок з відомими в них кутами нахилу дотичних або безпосереднім завданням кутів нахилу осей по відношенню до деякої вихідної ортогональної системи координат.

2. Практичними розрахунками показано, що розроблений метод моделювання дуг супереліпсів в косокутних координатах дозволяє будувати дуги цих кривих в широкому діапазоні варіювання вихідних даних кутів. Метод передбачає наявності координат двох точок, кутів нахилу в них дотичних та показників степенів. На підставі цих даних визначаються положення осей косокутної системи координат, в яких будується потрібна крива. Змінюючи показники степенів рівнянь супереліпсів можна отримати різноманітне коло кривих, що підтверджується наведеними графічними результатами.

3. Розроблений метод побудови дуги супереліпса за умови, що задані три точки та кути нахилу в них дотичних, реалізований у вигляді комп'ютерного коду. Він обумовлює знаходження числовим методом значень показників степенів рівняння модельованого супереліпса Ламе. Визначено, що похибка проходження кривої через проміжну точку не перевищує  $10^{-6}$ . На прикладі профі-

лю соплової лопатки осьової турбіни показано, що метод моделювання супереліпсів Ламе може мати практичне застосування.

### Література

1. Бронштейн, И. С., Семендяев, К. А. (1962). Справочник по математике. Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 608.
2. Умнов, А. Е. (2011). Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Москва: МФТИ, 544.
3. Борисенко, В. Д., Бідніченко, О. Г. (2014). Основи нарисної геометрії. Миколаїв: НУК, 328.
4. Михайленко, В. Є., Ванін, В. В., Ковальов, С. М. (2002). Інженерна графіка. К.: Каравела, 336.
5. Никулин, Е. А. (2003). Компьютерная геометрия и алгоритмы машинной графики. СПб.: БХВ-Петербург, 560.
6. Матвеев, В. Г., Борисенко, В. Д., Барашкова, Г. А., Горев, Л. А. (1983). Справочник по судостроительному черчению. Ленинград: Судостроение, 248.
7. Кореняко, А. С. (1954). Теория механизмов и машин. Москва: Машгиз, 140.
8. Pritchard, L. J. (1985). An Eleven Parameter Axial Turbine Airfoil Geometry Model. Volume 1: Aircraft Engine; Marine; Turbomachinery; Microturbines and Small Turbomachinery. doi: <https://doi.org/10.1115/85-gt-219>
9. Lockwood, E. H. (1961). A book of curves. Cambridge University Press. doi: <https://doi.org/10.1017/cbo9780511569340>
10. Савелов, А. А. (1960). Плоские кривые. Систематика, свойства, применения (справочное руководство). Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 294.
11. Gardner, M. (1989). Mathematical Carnival. Penguin Books, 274.
12. Salomon, D. (2011). The Computer Graphics Manual. Springer. doi: <https://doi.org/10.1007/978-0-85729-886-7>
13. Gielis, J. (2003). Inventing the Circle. The geometry of nature. Antwerpen: Genial Press, 188.
14. Gielis, J. (2003). A generic geometric transformation that unifies a wide range of natural and abstract shapes. American Journal of Botany, 90 (3), 333–338. doi: <https://doi.org/10.3732/ajb.90.3.333>
15. Gielis, J. (2017). The Geometrical Beauty of Plants. Atlantis Press. doi: <https://doi.org/10.2991/978-94-6239-151-2>
16. Lin, S., Zhang, L., Reddy, G. V. P., Hui, C., Gielis, J., Ding, Y., Shi, P. (2016). A geometrical model for testing bilateral symmetry of bamboo leaf with a simplified Gielis equation. Ecology and Evolution, 6 (19), 6798–6806. doi: <https://doi.org/10.1002/ece3.2407>
17. Shi, P.-J., Huang, J.-G., Hui, C., Grissino-Mayer, H. D., Tardif, J. C., Zhai, L.-H. et. al. (2015). Capturing spiral radial growth of conifers using the superel-

lipse to model tree-ring geometric shape. *Frontiers in Plant Science*, 6. doi: <https://doi.org/10.3389/fpls.2015.00856>

18. Matsuura, M. (2014). Asymptotic Behaviour of the Maximum Curvature of Lamé Curves. *Journal for Geometry and Graphics*, 18 (1), 45–59.

19. Dura, E., Bell, J., Lane, D. (2008). Superellipse Fitting for the Recovery and Classification of Mine-Like Shapes in Sidescan Sonar Images. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 33 (4), 434–444. doi: <https://doi.org/10.1109/joe.2008.2002962>

20. Khoomwong, E., Phongcharoenpanich, C. (2016). Design of a Dual-Band Bidirectional Antenna Using Superellipse-Monopole-Fed Rectangular Ring for IEEE 802.11 a/b/g/n Applications. *International Journal of Antennas and Propagation*, 2016, 1–11. doi: <https://doi.org/10.1155/2016/9368904>

21. Dos Santos, R. A., Penchel, R. A., Rehder, G. P., Spadoti, D. H. (2019). Omnidirectional Ultra-wideband Superellipse Patch Antenna for mm-Waves Applications. 2019 Photonics & Electromagnetics Research Symposium - Spring (PIERS-Spring). doi: <https://doi.org/10.1109/piers-spring46901.2019.9017517>

22. Duchemin, M., Tugui, C., Collee, V. (2017). Optimization of Contact Profiles using Super-Ellipse. *SAE International Journal of Materials and Manufacturing*, 10 (2), 234–244. doi: <https://doi.org/10.4271/2017-01-1349>

23. Форсайт, Дж., Малькольм, М., Муллер, К. (1980). Машинные методы математических вычислений. Москва: Мир, 279.

Не е перевки