



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

XIII JORNADES DE XARXES D'INVESTIGACIÓ EN DOCÈNCIA UNIVERSITÀRIA

Noves estratègies organitzatives i metodològiques en la formació
universitària per a respondre a la necessitat d'adaptació i canvi



JORNADAS DE REDES DE INVESTIGACIÓN EN DOCENCIA UNIVERSITARIA **XIII**

Nuevas estrategias organizativas y metodológicas en la formación
universitaria para responder a la necesidad de adaptación y cambio

ISBN: 978-84-606-8636-1

Coordinadores

María Teresa Tortosa Ybáñez

José Daniel Álvarez Teruel

Neus Pellín Buades

© **Del texto: los autores**

© **De esta edición:**

Universidad de Alicante

Vicerrectorado de Estudios, Formación y Calidad

Instituto de Ciencias de la Educación (ICE)

ISBN: 978-84-606-8636-1

Revisión y maquetación: Neus Pellín Buades

Publicación: Julio 2015

Módulo de enseñanza para desarrollar una mirada profesional sobre la comprensión matemática de los estudiantes

M. Moreno Moreno¹; M.L. Callejo de la Vega¹; G. Sánchez-Matamoros García²

¹Departamento de Innovación y Formación Didáctica

²Departamento de Didáctica de las Matemáticas

Universidad de Sevilla

RESUMEN

Una de las competencias docentes que debe desarrollar el futuro profesor de matemáticas es mirar de manera profesional el pensamiento matemático de los estudiantes. Por tanto uno de los objetivos de los programas de formación de profesores en el área de matemáticas es desarrollar esta competencia. En el Máster Universitario en profesorado de Educación Secundaria de la Universidad de Alicante se ha desarrollado un módulo con el objetivo de desarrollar esta competencia en el dominio del límite de una función en un punto. Este módulo tenía como objetivo crear oportunidades a los futuros profesores para que anticiparan, compartieran y consensuaran una hipotética trayectoria de aprendizaje del límite de una función en un punto en estudiantes de bachillerato. Los resultados muestran que el módulo permitió a los futuros profesores centrar su mirada en cómo los estudiantes de bachillerato aprenden el concepto de límite destacando el potencial de las tareas diseñadas para el desarrollo de la competencia.

Palabras clave: mirada profesional; competencia docente; comprensión matemática; límite de una función; aprendizaje futuros profesores de secundaria

1. INTRODUCCIÓN

Los resultados de las investigaciones sobre la competencia docente “mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes” están ayudando a comprender cómo los estudiantes para profesor aprenden a usar el conocimiento de matemáticas para interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes (Franke & Kazemi, 2001; Sherin, Jacobs & Philipp, 2010).

Una consecuencia de estas investigaciones es la necesidad de crear módulos de enseñanza en los programas de formación de profesores en el área de matemáticas que permitan el desarrollo de esta competencia diseñando oportunidades que favorezcan el aprendizaje de los estudiantes para profesor sobre cómo los estudiantes comprenden los conceptos matemáticos y cómo progresan en su comprensión (Jacobs, Lamb, & Philipp, 2010; Sánchez-Matamoros, Fernández, & Llinares, 2014; Wilson, Mojica, & Confrey, 2013).

Un constructo que está ayudando a pensar en la manera en la que los estudiantes para profesor aprenden sobre el aprendizaje de los estudiantes es las trayectorias de aprendizaje (Wilson, Sztajn, Edgington, Confrey, 2014; Sztajn, Confrey, Wilson, & Edgington, 2012) las cuales aportan información sobre cómo los aprendices progresan desde formas de pensar menos sofisticadas a más sofisticadas. Aunque se han hecho progresos para caracterizar trayectorias de aprendizaje en diferentes dominios matemáticos (Clements & Sarama, 2009) y para conectar los estándares con el currículo (Confrey, Maloney & Corley, 2014), existen menos investigaciones sobre cómo los estudiantes para profesor pueden reconocer la progresión en la comprensión de los estudiantes de secundaria y cómo este reconocimiento puede ayudarles a tomar decisiones instruccionales.

El objetivo de esta investigación se centra en diseñar un módulo de enseñanza donde los estudiantes para profesor, participando en una secuencia de actividades diseñadas ad-hoc, lleguen a reconocer cómo los estudiantes de bachillerato progresan en su comprensión del concepto de límite de una función en un punto.

2. METODOLOGÍA

2.1. Participantes y contexto

Los participantes del estudio fueron 22 estudiantes para profesor de educación secundaria (EPS) matriculados en la asignatura “Aprendizaje de las matemáticas en educación Secundaria” del Master Universitario en Profesorado de Educación

Secundaria, especialidad Matemática. La asignatura se impartió durante 4 horas por semana durante 13 semanas. Uno de los objetivos era aprender a identificar evidencias de la comprensión de los estudiantes (mirar profesionalmente) a partir de respuestas a tareas y proponer nuevas tareas para promover la comprensión conceptual de la concepción dinámica de límite de una función en un punto (Blázquez y Ortega, 2001; Cottrill et al., 1996).

2.2. Diseño del Experimento de Enseñanza

Para desarrollar la competencia docente “mirar profesionalmente” el pensamiento matemático de los alumnos de bachillerato se diseñó un experimento de enseñanza de cuatro sesiones con una duración de horas cada una de ellas (Tabla 1).

En las cuatro sesiones los EPS realizaron diferentes actividades apoyándose en la información teórica ofrecida en cada una de estas sesiones. Estas se organizaron alrededor de 3 problemas sobre el límite de una función en un punto para 1er curso de Bachillerato.

Tabla 1. *Secuencia de las actividades del experimento de enseñanza (módulo de aprendizaje diseñado en el programa de formación)*

Sesiones	Actividades	Documento Teóricos. Objetivo
1	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Resolución en grupo de la tarea 1 (Características problemas sobre límite función en un punto) ▪ Discusión sobre la resolución de la tarea 1 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Documento teórico sobre la concepción dinámica de límite ▪ Crear un contexto, presentando a los EPS artefactos de la práctica (3 problemas de los libros de textos), para activar el conocimiento sobre los elementos matemáticos y modos de representación que están vinculados al límite de una función en un punto
2	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Resolución en grupo de la tarea 2 (Anticipar respuestas sobre 3 problemas de límite de una función) ▪ Discusión sobre la resolución de la tarea 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Crear oportunidades para que los EPS anticipen, compartan y consensuen una hipotética trayectoria de aprendizaje del límite de una función en un punto en estudiantes de bachillerato
3 y 4	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Resolución en grupo de la tarea 3 (Reconocer comprensión de los estudiantes) ▪ Discusión sobre la resolución de la tarea 3 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Documento de teoría sobre una trayectoria de aprendizaje del límite de una función en un punto ▪ Identificar distintas características de la comprensión matemática en una hipotética trayectoria de aprendizaje de los estudiantes de primero de bachillerato sobre el límite de una función en un punto

En la primera sesión se les pidió a los EPS, distribuidos en grupos, que resolvieran los tres problemas sobre límite de una función en un punto, representados en distintos modos algebraico, numérico y gráfico (Tabla 2), indicando en cada momento qué elementos matemáticos y modos de representación se ponían de manifiesto. Para la resolución de la tarea se les proporcionó un documento teórico con los elementos matemáticos que conforman el concepto de límite de una función en un punto (Pons, Valls y Llinares, 2012):

- a. Idea de función
- b. Idea de aproximación lateral por la derecha y por la izquierda:
 - en el dominio
 - en el rango (coincidentes o no coincidentes)
- c. Coordinación de los dos procesos de aproximación en el dominio y en el rango (coincidente y no coincidente).

Tabla 2. *Esquema de la tarea propuesta en la sesión 1*

Problema 1 en modo algebraico	Problema 2 en modo numérico	Problema 3 en modo gráfico
Pregunta		
Resuelve los tres problemas indicando en cada momento qué elementos matemáticos y modos de representación se ponían de manifiesto.		

En la sesión 2, se les formuló una tarea formada por los tres problemas planteados en la sesión 1 y tres cuestiones de tipo profesional (Tabla 3).

Tabla 3. *Esquema de la tarea planteada en la sesión 2*

Problema 1 en modo algebraico	Problema 2 en modo numérico	Problema 3 en modo gráfico
Cuestiones Profesionales		
A) Indica que tendría que hacer y decir exactamente María, una alumna de 1º de bachillerato, en cada problema, para indicarte que ha comprendido el objetivo de aprendizaje. Justifica tu respuesta a partir de los elementos matemáticos y modos de representación.		
B) Indica lo que tendría que hacer y decir exactamente Pedro, otro alumno de 1º de		

bachillerato, en cada problema, para que muestre que tiene ciertas características de la comprensión del concepto de límite pero que no ha sido capaz de alcanzar el objetivo de aprendizaje. Justifica tu respuesta a partir de los elementos matemáticos y modos de representación.

C) Como profesor de estos alumnos **propón tareas concretas,**

- para **confirmar** que María ha alcanzado el objetivo de aprendizaje pretendido. Justifica tu respuesta a partir de los elementos matemáticos y modos de representación.
- para que Pedro **alcance el objetivo de aprendizaje pretendido.** Justifica tu respuesta a partir de los elementos matemáticos y modos de representación.

El objetivo de estas cuestiones era analizar el potencial de los problemas escolares (consideradas como registros de la práctica) para explorar posibles trayectorias de aprendizaje (explicitando rasgos de lo que se puede considerar diferentes niveles de comprensión en el estudiante de secundaria en la resolución de los problemas).

Las dos primeras preguntas tienen como objetivo generar respuestas hipotéticas que reflejen diferentes niveles de desarrollo conceptual del concepto de límite de una función en un punto en los estudiantes de primero de Bachillerato. Responder a estas cuestiones exige a los estudiantes para profesor poner en relación sus interpretaciones de lo que el estudiante está pensando y haciendo al resolver los problemas, lo que les obliga a situarse en una “hipotética trayectoria de aprendizaje” del concepto de límite de una función en un punto.

La tercera cuestión tiene como objetivo que los EPS propongan nuevos problemas para ayudar a los estudiantes de secundaria a avanzar en la comprensión del concepto, es decir, se centra en las decisiones de enseñanza que deben tomar para promover la transición de los estudiantes de secundaria a lo largo de la “hipotética trayectoria de aprendizaje” que han considerado.

En la tercera y cuarta sesión, se les pidió a los EPS que resolvieran una tarea formada por los tres problemas planteados con la respuesta de cuatro estudiantes de primero de bachiller a esos tres problemas y tres preguntas profesionales (Tabla 4).

El estudiante 1 y el estudiante 3 resuelven bien los tres problemas usando todos los elementos de la concepción dinámica de límite de una función en un punto en los

tres modos de representación, algebraico, numérico y gráfico. El estudiante 2, sin embargo, solo es capaz de realizar aproximaciones laterales y coordinaciones coincidentes en modo gráfico (problema 3) y tiene dificultades en usar las aproximaciones laterales no coincidentes y coordinarlas en modo algebraico y numérico (problema 1 y 2). Por su parte, el estudiante 4, realiza aproximaciones laterales coincidentes y no coincidentes y las coordina en modo numérico y gráfico y tiene dificultades en realizar las aproximaciones laterales no coincidentes en modo algebraico.

Los cuatro estudiantes se encuentran en distintos momentos de la trayectoria de aprendizaje definida y caracterizada por las investigaciones (Pons, 2014) a partir de la idea de coordinación dinámica, de las aproximaciones en el dominio y en el rango cuando las aproximaciones laterales coinciden o no, teniendo en cuenta los modos de representación (gráfico, numérico y algebraico).

Las dos primeras cuestiones, piden a los EPS que identifiquen e interpreten características de la comprensión de los estudiantes sobre el concepto de límite de una función en un punto reflejadas en sus respuestas y que los agrupen según estas características. El objetivo de estas cuestiones era determinar en qué medida los EPS tenían una visión global de las respuestas dadas por un mismo estudiante a los tres problemas y ver si eran capaces de identificar características de su comprensión. La tercera cuestión tenía como objetivo analizar cómo los EPS tomaban decisiones de enseñanza para favorecer el avance en la comprensión del concepto.

Tabla 4. *Esquema de la tarea planteada en la sesión 3 y 4*

Problema 1 en modo algebraico	Problema 2 en modo numérico	Problema 3 en modo gráfico
Respuestas a los problemas		
Estudiante 1	Estudiante 1	Estudiante 1
Estudiante 2	Estudiante 2	Estudiante 2
Estudiante 3	Estudiante 3	Estudiante 3
Estudiante 4	Estudiante 4	Estudiante 4
Cuestiones profesionales		
1. Describe en cada uno de los problemas qué elementos matemáticos de la		

concepción dinámica de límite ha usado el ESTUDIANTE X para resolverlos e indica si ha tenido dificultades y por qué

2. A partir de las descripciones de cómo el ESTUDIANTE X ha realizado los tres problemas, ¿es posible identificar alguna característica de cómo el estudiante X comprende el concepto de límite de una función en un punto? Justifica tu respuesta a partir de los elementos y los modos de representación.
3. Considerando la comprensión de límite de una función en un punto del ESTUDIANTE X mostrada en la resolución de los problemas, diseña una tarea para mejorar esta comprensión. Justifica tu respuesta.

2.3. Análisis

Los datos que fueron analizados en esta investigación son las respuestas generadas por los distintos grupos a las actividades planteadas en las distintas sesiones del módulo de enseñanza.

El análisis se realizó en dos fases. En la primera fase se observó la manera en la que los grupos de estudiantes para profesor concebían lo que podían ser evidencias de comprensión del concepto de límite en estudiantes de Bachillerato (sesiones 1 y 2) y en la segunda fase, una vez proporcionada la información teórica, se analizó los cambios experimentados por los distintos grupos de estudiantes de profesor en relación a cómo consideraban que los estudiantes de primero de Bachillerato comprendían el concepto de límite (sesión 3 y 4).

3. RESULTADOS

La sección de resultados está organizada en dos apartados que muestran cómo el módulo y en particular las tareas diseñadas permitió a los futuros profesores cambiar su mirada en cómo los estudiantes de bachillerato aprenden el concepto de límite. Estos cambios vienen determinados en relación a considerar la comprensión como una dicotomía- todo/nada- o como progresión.

3.1. Sesiones 1 y 2: La comprensión como dicotomía todo/nada

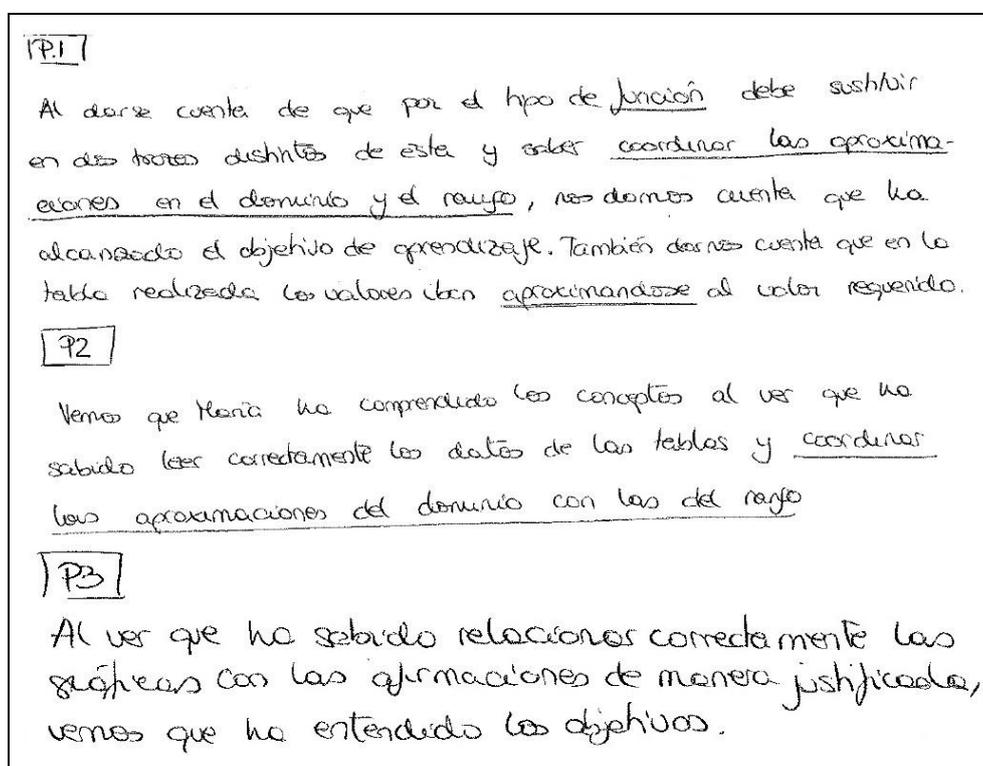
En las sesiones 1 y 2 los estudiantes para profesor de secundaria entendían que la comprensión del concepto de límite por parte de los estudiantes de Bachillerato se

evidenciaba cuando eran capaces de coordinar, en los diferentes modos de representación, las aproximaciones coincidentes y no coincidentes en el dominio y en el rango, es decir, resolvían correctamente todos los problemas propuestos. Sin embargo, la no comprensión la limitaban a ser capaces de considerar aproximaciones laterales en el caso de que la función estuviera definida en el punto, sin utilizar la idea de coordinación, por lo que no eran capaces de resolver ninguno de los problemas propuestos. Por ejemplo, los EPS del grupo 5 (G5) consideraron como evidencia de la comprensión del límite de una función en un punto que los estudiantes de Bachillerato fueran capaces de coordinar los valores de la x en los distintos intervalos de definición y los valores de la $f(x)$:

- en el modo numérico interpretando la tabla de valores
- en el modo algebraico trasladándose al numérico a través del reconocimiento de las ramas (definición) de la función en los distintos intervalos y eligiendo las sucesiones de valores correspondientes.
- en el modo gráfico viendo el valor de la función en un punto en las funciones continuas y acercándose por ambos lados en la función discontinua

Estas resoluciones las justificaron tal como se muestra en la Figura 1.

Figura 1. Justificaciones dadas por el grupo G5 a la resolución anticipada de María



Por su parte, los EPS de este grupo vincularon la no comprensión del concepto de límite de una función en un punto a que los estudiantes:

- no fueran capaces de establecer aproximaciones laterales por la derecha en los modos algebraico y numérico y en el gráfico confundieran las aproximaciones del dominio con las del rango.

Esta forma de anticipar respuestas para los alumnos que no habían alcanzado el objetivo de aprendizaje la justificaron como se muestra en la Figura 2.

Por lo tanto los EPS, antes de la información teórica, asociaban la idea de comprender el concepto de límite a realizar correctamente las actividades previstas y, la no comprensión, a no usar los elementos matemáticos relevantes de aproximaciones laterales y coordinación en los distintos modos de representación.

Figura 2. Justificaciones dadas por el G5 a la resolución anticipada de Pedro

The image shows three handwritten justifications, labeled P1, P2, and P3, enclosed in a rectangular border. P1 discusses the need for two-sided approximation. P2 notes a confusion between domain and range approximations. P3 describes a process of combining approximations from different representations.

P1
Vemos que tiene algunos conocimientos porque realizó correctamente la aproximación por la izquierda, pero no se da cuenta de que necesita aproximarse por ambos lados para calcular el límite
en el dominio

P2
Vemos que es capaz de coordinar la aproximación del dominio con la aproximación en el rango por la izquierda, pero no por la derecha.
Suponemos que considera una aproximación como acercarse desde abajo, es decir, de menor a mayor.

P3
Vemos que tiene algunos conocimientos porque usó la aproximación por la derecha en la primera gráfica, creemos que combinando la aproximación de la derivada con la aproximación en el rango en la segunda y no podemos decir más porque la última la hace por descarte

3.2. Sesiones 3 y 4: La comprensión como progresión

Tras la aportación teórica del módulo de enseñanza los estudiantes para profesor de secundaria pasaron de considerar la comprensión como una dicotomía a considerarla una progresión al ser capaces de situar a los diferentes estudiantes de bachiller en

distintos momentos de la trayectoria de aprendizaje propuesta en la información teórica proporcionada (Pons, 2014). Por ejemplo, el grupo 5 en la resolución de la tarea 3 interpreta de forma correcta los diferentes niveles de comprensión de los estudiantes de bachillerato del concepto de límite al considerar que dos de ellos habían llegado a comprender adecuadamente el concepto en todos sus modos de representación, y que los otros dos se encontraban en dos momentos diferentes de la trayectoria (Figura 3).

Figura 3. Interpretación del G5 de la comprensión de 4 estudiantes de bachillerato

A partir de las descripciones de cómo el estudiante X ha realizado los tres problemas, ¿es posible identificar alguna característica de cómo el estudiante X comprende el concepto de límite de una función en un punto? Justifica tu respuesta a partir de los elementos y los modos de representación	
Pablo	NIVEL 3 Pablo realiza aproximaciones laterales y coordinaciones de aproximaciones laterales, tanto coincidentes como no coincidentes, en todos los modos de representación.
Luigi	NIVEL 3 Igual que Pablo
Rebecca	NIVEL 1 Es capaz de realizar aproximaciones laterales y coordinaciones laterales coincidentes y no coincidentes solo en el modo gráfico.
Jorge	NIVEL 2 Es capaz de realizar aproximaciones laterales y las coordinaciones laterales, tanto coincidentes como no coincidentes en dos modos: - Gráfico - Numérico.

Por lo tanto, los EPS después de la información teórica proporcionada en el módulo de enseñanza asociaban la idea de comprender el concepto de límite como una progresión al ser capaces de interpretar a través de las respuestas de los estudiante de bachillerato los diferentes momentos de la trayectoria de aprendizaje en los que se encuentran estos.

4. CONCLUSIONES

En relación a los resultados obtenidos cabe señalar la potencialidad del módulo de enseñanza diseñado para que los estudiantes para profesor de secundaria fueran capaces de considerar la comprensión como una progresión y no tanto como una dicotomía en la que alumno comprende o no comprende.

El cambio producido por los estudiantes para profesor de secundaria en la forma de considerar la comprensión del concepto de límite de los estudiantes de bachillerato muestra cómo es posible incidir en el desarrollo de la competencia docente “mirar de manera profesional el pensamiento matemático de los estudiantes”. El grupo 5 al inicio del módulo de formación en la tarea que se le pedía que anticiparan, compartieran y consensuaran una hipotética trayectoria de aprendizaje del límite de una función en un punto en estudiantes de Bachillerato solo fue capaz de anticipar respuestas que mostraban una comprensión del concepto de forma dicotómica. Tras las sesiones en las que se les facilitó información teórica el módulo de enseñanza los estudiantes para profesores de secundaria fueron capaces de identificar distintas características de la comprensión del límite de una función en un punto en una hipotética trayectoria de aprendizaje de los estudiantes de primero de bachillerato mostrando entonces un cambio en su concepción inicial de la comprensión del límite asumiendo que dicha comprensión es progresiva.

Una conclusión de esta investigación es que hacer partícipes a los estudiantes para profesor de un entorno estructurado donde han tenido la oportunidad de anticipar e interpretar respuestas de estudiantes de bachillerato, colectivamente, les ha proporcionado una herramienta útil para reflexionar sobre el pensamiento matemático de los estudiantes y progresar en su proceso formativo.

Reconocimientos. Esta investigación ha recibido el apoyo del Proyecto I+D+i EDU2011-27288, EDU2011-29328 y EDU2014-54526-R del Ministerio de Ciencia e Innovación, España y del proyecto para grupos de investigación emergentes GV/2014/075 de la Conselleria de Educación, Cultura y Deporte de la Generalitat Valenciana.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Blázquez, S. & Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO*, 30, 67–83.
- Clements, D.H. & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. Routledge: New York.
- Confrey, J., Maloney, A. & Corley, A. (2014). Learning trajectories: a framework for connecting standards with curriculum. *ZDM. Mathematics Education*, 46, 719–733.
- Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 167 – 192.
- Franke, M.L. & Kazemi, E. (2001). Learning to Teach mathematics: Focus on Student Thinking. *Theory in practice*, 40(2), 102-109.
- Jacobs, V.R., Lamb, L.C., & Philipp, R.A. (2010). Professional Noticing of Children’s Mathematical Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 169-202.
- Pons, J. (2014). *Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto de límite de una función en un punto*. Tesis Doctoral. Universidad de Alicante. Alicante. España
- Pons, J., Valls, J. & Llinares, S. (2012). La comprensión de la aproximación a un número en el acceso al significado de límite de una función en un punto. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F.J. García y L. Ordóñez (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 435–445). Jaén: SEIEM.
- Sánchez-Matamoros, G.; Fernández, C. & Llinares, S. (2014). Developing pre-service teachers’ noticing of students’ understanding of the derivative concept. *International Journal of Science and mathematics Education*, DOI: 10.1007/s10763-014-9544-y
- Sherin, M. G., Jacobs, V. R. & Philipp, R. A. (eds) (2010), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes*. New York: Routledge.

- Sztajn, P., Confrey, J., Wilson, P.H. & Edgington, C. (2012). Learning trajectory based instruction: Toward a theory of teaching. *Educational Researcher*, 41(5), 147–156.
- Wilson, P.H., Sztajn, P., Edgington, C. & Confrey, J. (2014). Teachers' use of their mathematical knowledge for teaching in learning a mathematics learning trajectory. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 17, 149-175.
- Wilson, P.H., Mojica, G.F. & Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: Supporting teachers' understandings of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematical Behavior*, 32, 103-121.