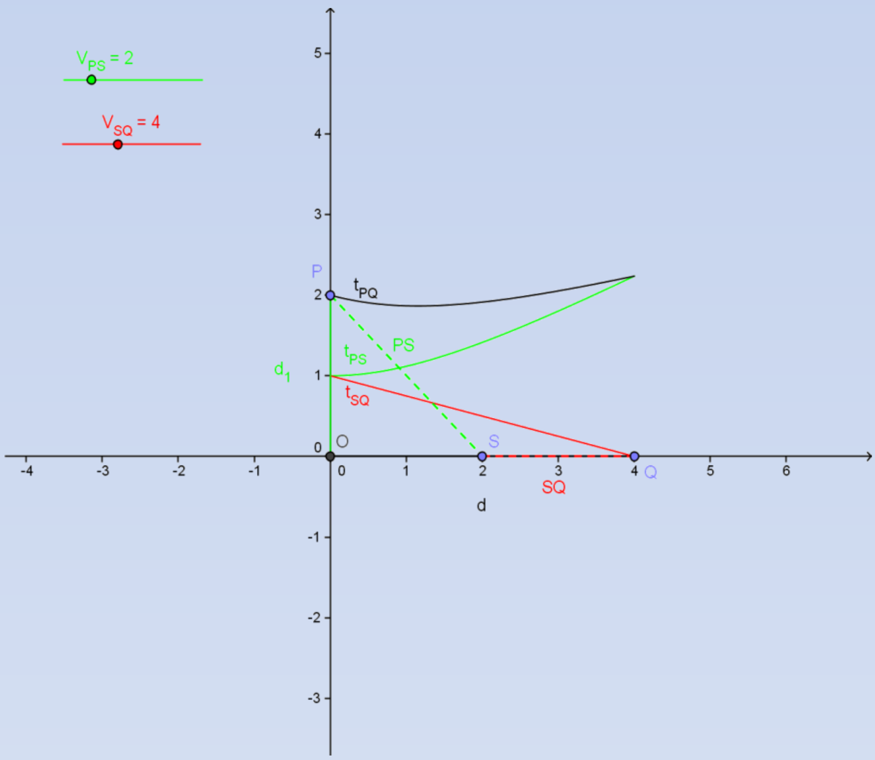
Análisis y métodos numéricos con Geogebra



Rafael Álvarez Sánchez
Francisco Ferrández Agulló
Francisco Martínez Pérez
Antonio Zamora Gómez

Análisis y métodos numéricos con Geogebra

Cuaderno de prácticas de
Matemáticas II
Grado en Ingeniería
Informática
Universidad de Alicante

Rafael Álvarez Sánchez
Francisco Ferrández Agulló
Francisco Martínez Pérez
Antonio Zamora Gómez

Disponible en:
http://hdl.handle.net/10045/46891

Análisis y métodos numéricos con Geogebra
Prácticas de Matemáticas II

Cuaderno para el laboratorio, elaborado para la versión 4.2 de Geogebra

Rafael Álvarez Sánchez   Francisco Ferrández Agulló
Francisco Martínez Pérez   Antonio Zamora Gómez

Índice general

1. Introducción a Geogebra. **1**
1.1. Características generales de GeoGebra 1
1.2. Primeras construcciones con GeoGebra 2
1.3. Entrada algebraica en GeoGebra 4
1.3.1. Generalidades 4
1.3.2. Uso de GeoGebra. Entrada Directa 6
Números y ángulos 6
Puntos y vectores 6
Rectas y ejes 6
Función de x 6
Funciones predefinidas y operaciones 6
Lista de objetos y de operaciones 7
1.3.3. Uso de GeoGebra. Comandos 7
Comando Booleano 7
Números 7
Polígonos 8
Segmentos 8
Rectas 8
Funciones 8
Texto 8
Listas y Secuencias 8
Hoja de Cálculo 8
1.3.4. Construcciones algebraicas 9

2. Concepto de derivada. Los teoremas de Rolle y valor medio. **13**
2.1. Concepto de derivada 13
2.1.1. Comentarios y reflexiones 21
2.1.2. Investigaciones 22
2.2. Los teoremas de Rolle y valor medio 24
2.2.1. El teorema de Rolle 24
2.2.2. El teorema del valor medio 39

3. Análisis de gráficas y optimización **47**
3.1. Análisis de gráficas 47
3.2. Optimización de magnitudes 51
3.2.1. Optimización de la longitud de cable uniendo la parte superior de dos postes al suelo 51

3.2.2. Optimización de la superficie de una lata de refresco con un volumen concreto 54

4. Sumas de Riemann. Áreas. 57
4.1. Sumas de Riemann 57
4.2. Área bajo una curva 63
4.3. Área entre dos curvas que se cortan 66
4.4. Primitivas de funciones racionales 69

5. Resolución de ecuaciones de una variable 73
5.1. Método de la Bisección 74
5.2. Método de la Secante 82
5.3. Método de Newton 92
5.4. Cuestionario sobre los resultados 99

6. Interpolación 101
6.1. Interpolación con GeoGebra 102
6.1.1. Introducción de puntos de muestreo 102
6.1.2. Obtención del polinomio de interpolación y cálculo de puntos interpolados 102
6.2. Aproximando una función 105
6.2.1. Enfoque estático 105
6.2.2. Enfoque interactivo o dinámico 106
6.3. Animación mediante interpolación 107
6.4. Interpolación por Lagrange 109
6.4.1. Ejemplo de interpolación con 3 muestras 109
6.4.2. Ejercicio de interpolación con 5 muestras 111
6.5. Interpolación por diferencias divididas 112
6.5.1. Ejemplo de interpolación con 3 muestras 112
6.5.2. Ejercicio de interpolación con 5 muestras 114
6.6. Interpolación por Hermite 115
6.6.1. Interpolación con 3 muestras 115

Índice de figuras

1.1. Solución a un sistema de dos ecuaciones lineales. 4

2.1. Representación gráfica de $f(x) = e^x$. 14
2.2. Diálogo para definir el deslizador ξ. 15
2.3. Vista gráfica de los ejes y el deslizador ξ. 16
2.4. Diálogo para definir el deslizador x_P. 16
2.5. Diálogo de propiedades de la recta R. 17
2.6. Cálculo de la pendiente m extraído de $secantePP'$. 18
2.7. Gráfica de la recta tangente a f en P. 19
2.8. Gráfica del triángulo rectángulo PP', Δx, Δy. 20
2.9. Convergencia de $msecantePP'$ a y'_P para cualquier x_P si $\Delta x \to 0$. 22
2.10. Cambio de la función $f(x)$ a través de sus propiedades. 23
2.11. Comprobación con cualquier intervalo de función derivable y continua. 23
2.12. Representación gráfica de $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 1$. 25
2.13. Localización gráfica de los puntos de intersección A y B. 26
2.14. Definición del deslizador ξ. 27
2.15. Ponemos el nombre a r_p a través del diálogo de propiedades. . . 28
2.16. Desplazamiento de la paralela r_p conjuntamente con C. 28
2.17. Ajuste de propiedades para la función derivada $f'(x)$. 29
2.18. Propiedades de la recta tangente t. 30
2.19. Desplazamiento conjunto de C, r_p y t. 31
2.20. Determinación del valor $c \in]a, b[$ tal que $m = f'(c) = 0$. 32
2.21. Utilización de CAS para determinar el valor $c \in]a, b[$ tal que $m = f'(c) = 0$. 33
2.22. Cambio a la función $x^3 + 2x^2 - x + 1$. 34
2.23. Cambio del punto B a través de sus propiedades. 34
2.24. Primer punto C con tangente horizontal. 35
2.25. Segundo punto C con tangente horizontal. 36
2.26. Utilización de CAS para determinar los valores $c \in]a, b[$ tales que $m = f'(c) = 0$. 37
2.27. Cambio de propiedades en k. 38
2.28. Variación del intervalo $[a, b]$ desplazando la recta r. 38
2.29. Nuevo deslizador α. 39
2.30. Modificación a la recta r. 40
2.31. Inclinación de las rectas r y r_p mediante el deslizador α. 40
2.32. Primer punto C con r tangencial a $f(x)$. 42
2.33. Segundo punto C con r tangencial a $f(x)$. 43

2.34. Utilización de CAS para determinar los valores $c \in]a, b[$ tales que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = y'$. 44
2.35. Teorema del valor medio para la función $f(x) = x^4 - 2x^2$ con $\alpha = 0$ (Rolle). 45
2.36. Utilización de CAS para determinar los valores $c \in]a, b[$ tales que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = y'$. 46

3.1. Gráfico de los postes. 51
3.2. Gráfico de los postes. Caso general. 53
3.3. Tamaños de latas de refresco. 54
3.4. Área y volumen de un cilindro. 54
3.5. Función área de un cilindro. 56

4.1. Integral. 59
4.2. Rectángulo Izquierda. 60
4.3. Suma izquierda de Riemann. 61
4.4. Rectángulo Derecha. 62
4.5. Suma derecha de Riemann. 63
4.6. Gráfica de $f(x) = xe^{-x}$ 64
4.7. Gráfica de $f(x) = xe^{-x}$ y área entre x_A y x_B 65
4.8. Gráficas de $f(x) = xe^{-x}$ y $g(x) = |xe^{-x}|$ y áreas entre x_A y x_B . . 66
4.9. Gráficas de $f(x) = -x^2+1$, $g(x) = x^2-1$, $h(x) = \left|-x^2+1-(x^2-1)\right|$ y áreas entre x_A y x_B 67
4.10. Error al redefinir $f(x) = -x^2 + k$ y forma de evitarlo. 68
4.11. Gráficas de $f(x) = -x^2 + k$ $(k = 4)$, $g(x) = x^2 - 1$, $h(x) = \left|-x^2+1-(x^2-1)\right|$ y áreas entre x_A y x_B 69
4.12. Integral indefinida de $f(x) = \frac{x^3}{x^4-16}$ 71
4.13. Integral indefinida, simplificada, de $f(x) = \frac{x^3}{x^4-16}$ 71

5.1. Valores iniciales en el método de la bisección. 74
5.2. Segundo intervalo en el método de la bisección. 75
5.3. Punto de corte de f con el eje de abscisas. 77
5.4. Intervalo inicial $[a, b]$. 77
5.5. Extremos del intervalo inicial $[a_1, b_1] = [a, b]$ y valor intermedio p_1. 78
5.6. Extremos del intervalo $[a_2, b_2]$ y valor intermedio p_2. 78
5.7. Representación gráfica del intervalo $[a_1, b_1]$ y el valor intermedio p_1. 79
5.8. Representación gráfica del intervalo $[a_2, b_2]$ y el valor intermedio p_2. 80
5.9. Representación gráfica del intervalo $[a_3, b_3]$ y el valor intermedio p_3. 80
5.10. Decrecimiento exponencial de la longitud de los intervalos. 82
5.11. Aproximación de una función $f = f(x)$ mediante la recta secante. 83
5.12. 84
5.13. Valor p_1 fuera del intervalo $[a_1, b_1]$. 85
5.14. Sucesión de valores p_i, $i = 1, 2, 3, \cdots$ 86
5.15. Representación gráfica del método de la secante, $n = 1$. 87
5.16. Representación gráfica del método de la secante $n = 2$. 88
5.17. Representación gráfica del método de la secante $n = 3$. 88

5.18. Representación gráfica del método de la secante $n = 4$. 89
5.19. Representación gráfica del método de la secante, $n = 3$, $k = 3$, $r = 3$. 90
5.20. Representación gráfica del método de la secante, $n = 5$, $k = 3$, $r = 2$. 91
5.21. Representación gráfica del método de la secante, $n = 5$, $k = 4$, $r = 5$. 91
5.22. Primera aproximación a la raíz p. 92
5.23. Segunda aproximación a la raíz p. 93
5.24. Representación gráfica del método de Newton, $n = 1$. 96
5.25. Representación gráfica del método de Newton, $n = 2$. 97
5.26. Representación gráfica del método de Newton, $n = 3$. 98

6.1. Creación una lista de puntos de muestreo 102
6.2. Creación del polinomio que pasa por dichos puntos 103
6.3. Introducción de puntos a interpolar 103
6.4. Cálculo de las imágenes interpoladas 104
6.5. Interactividad 104
6.6. Aproximación a una función con un enfoque estático 105
6.7. Aproximación a una función con un enfoque interactivo 107
6.8. Animación 108
6.9. Animación extendida 109
6.10. Interpolación por Lagrange con 3 muestras 111
6.11. Interpolación por Lagrange con 5 muestras 112
6.12. Interpolación por diferencias divididas con 3 muestras 114
6.13. Interpolación por diferencias divididas con 5 muestras 115
6.14. Interpolación por Hermite con 3 muestras 117

Práctica 1

Introducción a Geogebra.

Temporización

Esta práctica debe realizarse en dos sesiones de 2 horas presenciales y requiere el complemento de unas 2 horas no presenciales.

- La primera sesión presencial debe dedicarse a las secciones 1.1 y 1.2.
- Antes de la segunda sesión presencial hay que dedicar unas 2 horas no presenciales a las subsecciones 1.3.1, 1.3.2 y 1.3.3.
- La segunda sesión presencial debe dedicarse a la subsección 1.3.4.

1.1. Características generales de GeoGebra

Rafael Losada Liste, en su artículo "GEOGEBRA: la eficiencia de la intuición" indica lo siguiente:

Existe una categoría de programas conocida como Sistemas de Álgebra Computacional (CAS, en inglés), que permiten cálculos simbólicos y numéricos así como representaciones simbólicas. Otra categoría, conocida como Sistemas de Geometría Dinámica (DGS), permiten la introducción directa en la ventana gráfica de objetos geométricos y la representación dinámica de los mismos; tal es el caso de programas como *Cabri*, *Cinderella* y otros. En esta categoría de programas, los comandos se introducen, fundamentalmente, con el ratón.

Geogebra tiene algo de las dos categorías, pero no de forma separada, y esto es lo más interesante. Combina las representaciones gráficas y simbólicas ofreciendo ambas al mismo tiempo, lo que genera un gran valor añadido.

Se trata de un programa matemático, con herramientas para la geometría, el álgebra y el cálculo. Por un lado, Geogebra, es un sistema de geometría dinámica. Se pueden realizar construcciones usando puntos, vectores, segmentos, secciones cónica y, después se pueden cambiar dinámicamente. Por otro lado, las ecuaciones y las coordenadas pueden ser introducidas directamente en la, denominada, barra de entrada. Así, GeoGebra tiene la capacidad de hallar derivadas e integrales de funciones y ofrece un repertorio de comandos propios de análisis matemático. Estas dos opciones de visualización caracterizan GeoGebra: una expresión en la ventana algebraica corresponde a un objeto a la zona gráfica y viceversa.

Nada menos que siete facetas muy interesantes saltan a la vista al aproximamos a Geogebra, sin adentrarnos todavía en su funcionalidad:

- Es gratuito y de código abierto (GNU GPL).
- Está disponible en español, incluido el manual de ayuda.
- Presenta foros en varios idiomas, el castellano entre ellos http://www.geogebra.org/cms/.
- Ofrece una wiki en donde compartir las propias realizaciones con los demás.
- Usa la multiplataforma de Java, lo que garantiza su portabilidad a sistemas de Windows, Linux, Solaris o MacOS X.
- Las realizaciones son fácilmente exportables a páginas web, por lo que podemos crear páginas dinámicas en pocos segundos.
- Ha recibido una serie de prestigiosos premios.

Descarga del campus virtual el archivo `Guía de introducción a Geogebra 4.2.pdf` (también disponible en http://www.geogebra.org/help/geogebraquickstart_es.pdf) y lee desde el comienzo hasta el primer ejemplo en la página 2.

1.2. Primeras construcciones con GeoGebra

En esta sección proponemos la creación de construcciones simples que, en muchos casos, pueden ser parte de construcciones más complejas. Cada construcción deberás grabarla en un archivo con el nombre que se indique. Para empezar debes crear una carpeta cuyo nombre debe ser PRACTICA1 en la que almacenarás todas las construcciones de esta práctica.

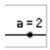
- Realiza el primer ejemplo de la guía de introducción a Geogebra 4.2 (Circunferencias en un Triángulo) y almacena la construcción guiada por el ratón en el archivo PR01-01aCircTriang.ggb (Archivo/Guardar Como) y la construcción utilizando la barra de entrada en el archivo PR01-01bCircTriang.ggb.[1]
- A continuación realiza el ejemplo 2: Derivada y Tangente de una Función, de la guía. Almacena la construcción de la primera versión en el archivo PR01-02aTgFunc.ggb y la segunda versión en PR01-02bTgFunc.ggb y la construcción sin recurrir al comando en PR01-02cTgFunc.ggb. [2]

[1]Si haces uso de la utilidad copiar y pegar ahorrarás mucho tiempo.
[2]Atención: la ecuación de la recta t:X=A+rv, en la página 6 de la guía, no es correcta. Corrígela.

- Realiza, ahora, el ejemplo 3: Resolución de un Sistema de Ecuaciones, de la guía y almacena la construcción en el archivo PR01-03aSistema.ggb.

En la siguiente construcción vamos a resolver **geométricamente** un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas cualquiera. Almacena la construcción en el archivo PR01-03bSistema.ggb

Las dos ecuaciones representarán dos rectas en el plano $y = m_1 x + b_1$ e $y = m_2 x + b_2$. La solución al sistema se obtendrá en el punto de corte de ambas rectas.

- Define dos deslizadores 

, m_1 y b_1 (el subíndice se obtiene tecleando `m_1` y `b_1`), para la primera ecuación; utilizando los valores por defecto.

- Crea la primera recta tecleando en la barra de entrada $l_1 : y = m_1 x + b_1$. Concretamente, debes teclear `l_1: y = m_1 x + b_1`.

- Define ahora dos deslizadores para la segunda ecuación, m_2 y b_2, con los valores por defecto.

- Crea la segunda recta tecleando $l_2 : y = m_2 x + b_2$.

- Crea los siguientes textos: `"Recta l_1: "  + l_1`
`"Recta l_2: "  + l_2`.

- Para obtener el punto de intersección, A, de las dos rectas utiliza la herramienta *Intersección* .

- Crea el texto dinámico `"Solución:  x =  "+ x(A)+ ", y = " +y(A)`. Con $x(A)$ se obtiene la abscisa del punto de intersección A y con $x(B)$ la ordenada.

En la figura 1.1 se muestra una imagen de la construcción.

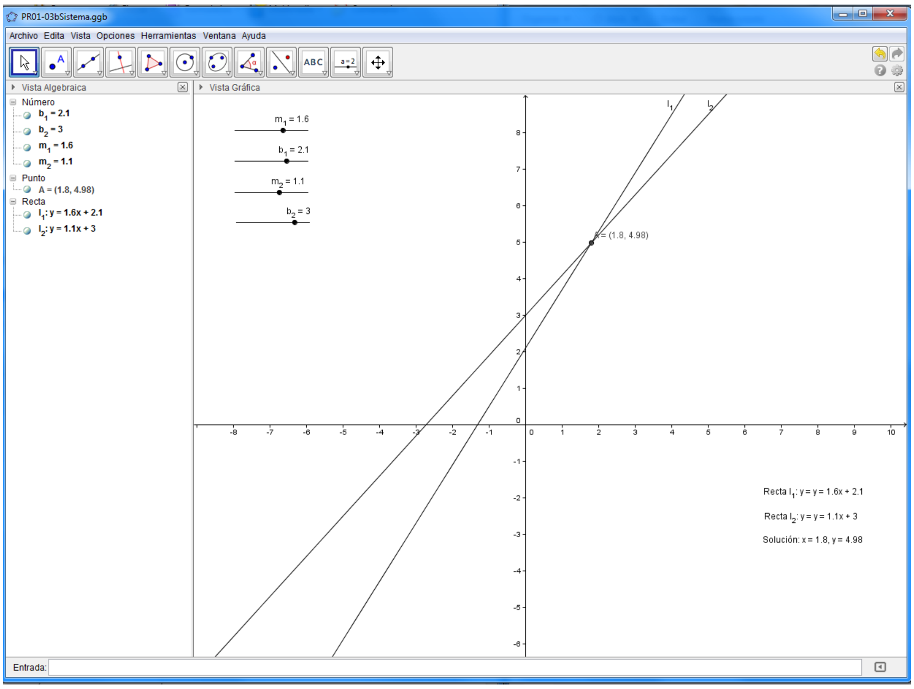


Figura 1.1: Solución a un sistema de dos ecuaciones lineales.

Ahora, realiza la construcción del ejemplo 4: Intersección de Funciones Polinómicas, de la guía y almacena la construcción en el archivo PR01-04FunPol.ggb.

1.3. Entrada algebraica en GeoGebra

1.3.1. Generalidades

Las representaciones algebraicas de los objetos matemáticos (como valores, coordenadas y ecuaciones) se exponen en la Vista Gráfica. Se pueden crear y modificar objetos usando la Barra de Entrada al pie de la pantalla de GeoGebra.

Siempre se debe pulsar la tecla Enter tras ingresar la definición de un objeto en la Barra de Entrada.

En esta sección se pedirá en muchas ocasiones que consultes la sintaxis de determinados comandos con la intención de que conozcas su manejo. Debes leer atentamente las instrucciones y los ejemplos que en ellas figuran, introduciendo en la Barra de Entrada los comandos que aparezcan en los ejemplos. Crearás tantos archivos nuevos como consideres conveniente y almacenarlos con los nombres PR01-05«texto identificativo».ggb

Nombrando Objetos

Se le puede asignar un nombre a un objeto cuando ha sido creado usando la Barra de Entrada:

- Puntos: En GeoGebra los nombres de los puntos, se distinguen por ser siempre letras mayúsculas. Basta, entonces, con anotar el nombre (por ejemplo: C, P) y un signo igual antes de las coordenadas.

Ejemplos: C = (2, 4), P = (1; 180º), Complejo = 2 + i

- Vectores: Para distinguirlos de los puntos, GeoGebra reserva la letra minúscula para los vectores. Nuevamente, se debe anotar el nombre (sea., v, u) y un signo igual frente a las coordenadas del vector.

  Ejemplos: v = (1, 3), u = (3; 90º), complejo = 1 -2i.

- Rectas, circunferencias, secciones cónicas: Estos objetos pueden definirse por su nombre seguido de dos puntos antecediendo a su ecuación o comando.

  Ejemplos: g: y = x + 3, c: (x-1) ˆ 2 + (y - 2) ˆ 2 = 4, hyp: x ˆ 2 - y ˆ 2 = 2.

- Funciones: Se pueden ingresar con un nombre que las caracterice como tales, por ejemplo, "f(x) ="ó "g(x)="previo a la ecuación de tal función o de los comandos correspondientes en juego.

  Ejemplos: h(x) = 2 x + 4, q (x) = x ˆ 2, trig(x) = sin(x)

Si no se le asigna un nombre a un objeto manualmente, GeoGebra lo hace automáticamente, por orden alfabético. Los nombres de los objetos pueden estar indexados. Para establecer un índice en el nombre de un objeto, basta con emplear el subguión o guión bajo. Por ejemplo A_1 se anota como `A_1` y S_{AB} como `S_{AB}`. El guión bajo precede al o a los subíndices.

Rótulos reservados: Hay algunos rótulos que no pueden asignarse a los objetos: x, y, z, Ejex, Ejey, Ejez. En la lista de símbolos desplegable desde cualquier instancia de entrada (como la Barra de Entrada, básicamente), se incluyen los siguientes caracteres especiales que identifican a las siguientes constantes:

- π - la constante entre la circunferencia y su diámetro, pi.
- e - el número de Euler, usual en la correspondiente función exponencial e^x.
- i - la unidad imaginaria, que identifica el componente imaginario en los números complejos como en $z = 3 + i$.
- inf - símbolo del infinito
- false - valor lógico falso
- true - valor lógico verdadero

En tanto los nombres de variables como e o i no se hayan asignado aún, se los mantiene asociados a las constantes específicas que representan y automática, y convenientemente, se interpretan en tal sentido.

1.3.2. Uso de GeoGebra. Entrada Directa

GeoGebra puede operar con números, ángulos, puntos, vectores, segmentos, rectas, secciones cónicas, funciones y curvas paramétricas. Es posible ingresar estos objetos en la Barra de Entrada anotando sus coordenadas o ecuaciones y pulsando la tecla Enter.

Te recuerdo que puedes consultar la ayuda de GeoGebra pulsando la tecla F1, lo que hará que se abra el navegador en la URL
http://wiki.GeoGebra.org/es/Página_Principal
y se muestre la página principal del manual de usuario. También, que puedes descargar en la dirección http://www.GeoGebra.org/help/docues.pdf el documento de ayuda de la versión 3.2 en formato pdf.

Números y ángulos

Consulta en la página principal del manual de usuario el enlace
Objetos generales → Números y Ángulos
También puedes consultar la página 41 del documento de ayuda de la versión 3.2.

Puntos y vectores

Consulta en la página principal del manual de usuario el enlace
Objetos Geométricos → Puntos y Vectores
También puedes consultar la página 42 del documento de ayuda de la versión 3.2.

Rectas y ejes

Consulta en la página principal del manual de usuario el enlace
Objetos Geométricos → Líneas y Ejes
También puedes consultar la página 42 del documento de ayuda de la versión 3.2.

Función de x

Consulta en la página principal del manual de usuario el enlace
Acerca de los Objetos → Funciones
También puedes consultar las páginas 43 y 44 del documento de ayuda de la versión 3.2.

Funciones predefinidas y operaciones

Consulta en la página principal del manual de usuario el enlace
Operadores y Funciones Predefinidas
También puedes consultar las páginas 44, 45 y 46 del documento de ayuda de la versión 3.2.

Lista de objetos y de operaciones

Consulta en la página principal del manual de usuario el enlace
Objetos generales → Listas
También puedes consultar la página 47 del documento de ayuda de la versión 3.2.

1.3.3. Uso de GeoGebra. Comandos

Con la ayuda de los comandos podemos crear nuevos objetos o modificar los existentes. El resultado de un comando puede nominarse ingresando un rótulo sucedido por el signo "=".

En el ejemplo que sigue, un nuevo punto se llamará S: la intersección de dos rectas g: y = x+1 y h: y = -x-1 produce un nuevo punto, que puede ingresarse como S = Interseca[g,h]. Te recuerdo que también se pueden usar subíndices con los nombres de los objetos: A_1 o S_{AB}, se anotan como `A_1` y `s_{AB}`, respectivamente.

Al ir anotando el nombre de un comando en la Barra de Entrada, GeoGebra intenta completarlo automáticamente para facilitarnos la tarea. Esto implica que después de ingresadas las dos primeras letras en la Barra de Entrada, GeoGebra las completará con el nombre del primer comando del listado alfabético que las tenga como primeras dos iniciales. Colocando el cursor entre los corchetes y pulsando allí la tecla Enter, queda aceptado el comando sugerido.

Los comandos pueden clasificarse según su función o funciones dado que pueden emplearse con diversos propósitos y su modalidad puede incluso cambiar según el contexto en que operen. Por ejemplo, la Longitud de un segmento y la de una lista por mencionar el caso más ilustrativo.

También podemos hacer uso del icono de la parte inferior derecha para mostrar todos los comandos, clasificados. Pulsando el botón "Pega"lo tendremos escrito en la Barra de Entrada.

A continuación se enumeran una serie de comandos de los que debes consultar su sintaxis. No olvides leer atentamente las instrucciones y los ejemplos que en ellas figuran, introduciendo en la Barra de Entrada los comandos que aparezcan en los ejemplos; así como crear tantos archivos nuevos como consideres conveniente y almacenarlos con los nombres PR01-05«texto identificativo».ggb.

Una forma rápida de encontrar la ayuda en línea consiste en desplegar la ventana Ayuda de Entrada pulsando el icono situado en la parte inferior derecha, desplegar la opción Todos los Comandos, situar el cursor sobre el comando sobre el que se desea ayuda y pulsar el botón Expone Ayuda en Línea.

Comando Booleano

- Si

Números

- Integral
- Iteración
- Longitud
- Pendiente

Polígonos

- Polígono

Segmentos

- Segmento

Rectas

- Recta
- Tangente

Funciones

- Derivada
- Función
- Integral
- Polinomio
- Simplifica

Texto

- FórmulaTexto (Latex en la versión 3.2)

Listas y Secuencias

- Anexa
- Elemento
- Primero
- ListaIteración
- Encadena
- Ultimo
- Secuencia
- Suma
- Extrae

Hoja de Cálculo

- RangoCelda

1.3.4. Construcciones algebraicas

Construcción 1.1. *Guarda la construcción en el archivo PR01-06-1.1Lista.ggb*

- *A partir de los los vectores* $u_1 = (1, 1)$ *y* $u_2 = (2, 2)$ *crea las listas* L_1 *y* L_2 *conteniendo a los vectores* u_1, u_2 *y* u_2, u_1*, respectivamente.*
- *Utiliza los comandos* `Suma[L_1]`, `Suma[L_2]` *y observa el resultado.*
- *Crea ahora una lista* L_3 *como suma de las listas* L_1 *y* L_2 *y otra lista* L_4 *como suma de* L_2, L_1.
- *Compara las listas* L_1 *y* L_2 *por un lado y las listas* L_3 *y* L_4.
- *Crea una lista* L_5 *multiplicando la lista* L_2 *por* 8 *y otra lista* L_6 *dividiendo la lista* L_5 *por* 4.
- *Compara las listas* L_6 *y* $L_2 * 2$.

Construcción 1.2. *Guarda la construcción en el archivo PR01-06-1.2Trian.ggb*

- *Construye un triángulo, con la herramienta polígono, en el cuadrante de abscisas y ordenadas positivas.*
- *Crea un triángulo de vértices* $(0, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ *haciendo uso del comando Polígono.*
- *Crea una lista* L_1 *con los dos triángulos.*

Construcción 1.3. *Guarda la construcción en el archivo PR01-06-1.3Elem.ggb*

- *Define dos funciones,* $f(x) = x^2 - 1$ *y* $g(x) = -x^2 + 1$.
- *Crea una lista* L_1 *con las dos funciones.*
- *Crea una lista* L_2 *con los números* 1, 2.
- *Crea una lista* L_3 *con las listas* L_1 *y* L_2.
- *Haciendo uso del comando Elemento extrae*
  - *el elemento* 1 *de la lista* L_3,
  - *el elemento* 2 *de la lista* L_3,
  - *el elemento* $1, 1$ *de la lista* L_3,
  - *el elemento* $1, 2$ *de la lista* L_3,
  - *el elemento* $2, 1$ *de la lista* L_3,
  - *el elemento* $2, 2$ *de la lista* L_3.

Construcción 1.4. *Guarda la construcción en el archivo PR01-06-1.4Poli.ggb*

- *Define la función* $f(x) = \sqrt{-x^2 + 25}$.
- *Asigna a la variable* n *el valor* 0*, edita las propiedades del objeto y activa las opciones: muestra objeto, muestra rótulo, deslizador con valores de* 0 *a* 5 *e incremento 1.*

- *Mediante el comando Secuencia, genera una lista* L_1 *con los puntos* $(i, f(i)), i = 0, \cdots n$.
- *Desplaza el deslizador para que recorra los valores de* n*, desde* 0 *hasta* 5 *y observa la evolución de la lista* L_1 *y los puntos sobre la gráfica de* f.
- *Utiliza el comando TablaTexto para generar una tabla dinámica de texto conteniendo los puntos generados.*
- *Sitúa el cursor sobre Objetos Libres de la ventana algebraica, pulsa el botón derecho del ratón y activa la opción Objetos Auxiliares.*
- *Utiliza el comando Polígono para generar un polígono cuyos vértices son los puntos de la lista* L_1.
- *Cambia el incremento del deslizador* n *a* 0.5*, así como el incremento en la Secuencia utilizada tanto para generar la lista como la tabla de texto.*

Construcción 1.5. *Guarda la construcción en el archivo PR01-06-1.5HojaC.ggb*

- *Activa la vista de la Hoja de Cálculo.*
- *Asigna a la variable* l *el valor* 1*, edita las propiedades del objeto y activa las opciones: muestra objeto, muestra rótulo, deslizador con valores de* 1 *a* 3 *e incremento 1.*
- *Asigna a la variable* v *el valor* 0*, edita las propiedades del objeto y activa las opciones: muestra objeto, muestra rótulo, deslizador con valores de* -5 *a* 5 *e incremento 1.*
- *Asigna a la casilla* $A1$ *el valor* (v, v) *(teclea "*`=(v,v)`*"), a* $A2$ *el valor* $(v, v + l)$*, a* $A3$ *el valor* $(v + l, v + l)$ *y a* $A4$ *el valor* $(v + l, v)$.
- *Asigna a la casilla* $B1$ *el valor de la casilla* $A1 + 2l$*. Sitúa el cursor sobre la casilla* $B1$*, pulsa el botón derecho del ratón y copia. Selecciona ahora las casillas* $B2$ *a* $B4$ *(ratón sobre* $B2$*, pulsa botón izquierdo del ratón y arrastra hasta la casilla* $B4$*) y pega. De esta manera en cada casilla de la columna* B *tenemos los puntos de la columna* A *desplazados* $2l$.
- *Utilizando el comando RangoCeldas y Polígono (hay que anidar) crea el* $Cuadrado_1$ *cuyos vértices son los puntos en la columna* A *y el* $Cuadrado_2$ *cuyos vértices son los puntos en la columna* B.
- *Observa qué se consigue si desplazamos los valores de los deslizadores* l *y* v.

Construcción 1.6. *Guarda la construcción en el archivo PR01-06-1.6Arco.ggb*

- *Asigna a la variable* n *el valor* 1*, edita las propiedades del objeto y activa las opciones: muestra objeto, muestra rótulo, deslizador con valores de* 1 *a* 15 *e incremento 1.*
- *Define la función* $f(x) = -x^2 + 1$ *en el intervalo* $[-1, 1]$*. Sólo se debe mostrar la gráfica de* f *en ese intervalo.*

- *Divide el intervalo [-1,1] en n subintervalos de igual longitud,* $[x_i, x_{i+1}]$ *con* $x_1 = -1$*,* $x_{n+1} = 1$ *y, utilizando el comando Secuencia, genera una lista,* x_i*, con los valores* $x_i, i = 1, \cdots, n+1$.
- *Combinando los comandos Secuencia y Elemento, genera una lista,* P_i*, con los puntos de la curva cuyas abscisas son los valores de la lista* x_i.
- *Combinando los comandos Secuencia, Segmento y Elemento, genera una lista,* l_i*, con los segmentos que unen los puntos de la lista* P_i.
- *Utilizando el comando Suma, crea una variable Suma que devuelva la suma de las longitudes de los segmentos de la lista* l_i.
- *Se sabe que la longitud del arco de curva que has representado es, aproximadamente,* 2.96 *(consulta la ayuda del comando Longitud o bien el apartado dedicado a la Longitud de una gráfica en el tema 2 de teoría). Observa qué sucede con la suma de las longitudes de los segmentos a medida que aumenta el valor de* n.

Práctica 2

Concepto de derivada. Los teoremas de Rolle y valor medio.

Temporización

Esta práctica debe realizarse en dos sesiones de 2 horas presenciales.

- La primera sesión presencial debe dedicarse a la sección 2.1.
- La segunda sesión presencial debe dedicarse a la sección 2.2.

Si acabaras la tarea programada antes del tiempo estimado, debes pasar a la siguiente actividad programada. Por el contrario, si no acabaras en en tiempo programado deberás dedicar el tiempo que necesites para acabar la tarea en horas no presenciales.

Cada construcción deberás grabarla en un archivo con el nombre que se indique. Para empezar debes crear una carpeta cuyo nombre debe ser PRACTICA2 en la que almacenarás todas las construcciones de esta práctica.

2.1. Concepto de derivada

En esta sección vamos a visualizar la relación existente entre la derivada de una función f en un punto $P = (x, f(x))$ y la tangente a la gráfica de f en ese mismo punto. Comprobaremos que la pendiente de la recta secante que pasa por $P = (x, f(x))$ y $P' = (x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ tiende al valor de la derivada en el punto P a medida que Δx tiende a 0, esto es, tiende a la pendiente de la recta tangente a f en P.

Dividimos la actividad en varios pasos, comenzando por la representación gráfica de la función que vamos a derivar.

Esta primera construcción debes almacenarla en un archivo al que llamarás PR02-01aConDeriv.ggb.

PASO 1: Representación gráfica de una función.

Vamos a trabajar inicialmente con la función $f(x) = e^x$. Para introducir esta expresión, seleccionaremos en el menú Apariencias la opción Álgebra y gráficos. En la barra de entrada de comandos usaremos el desplegable de símbolos proporcionado por el botón α (que aparece al entrar en edición en la barra de entrada) para escribir el número e y utilizaremos el operador ˆ para elevar a x

$$f(x) = e\hat{}x.$$

Una vez introducida la función ya obtenemos su gráfica (figura 2.1):

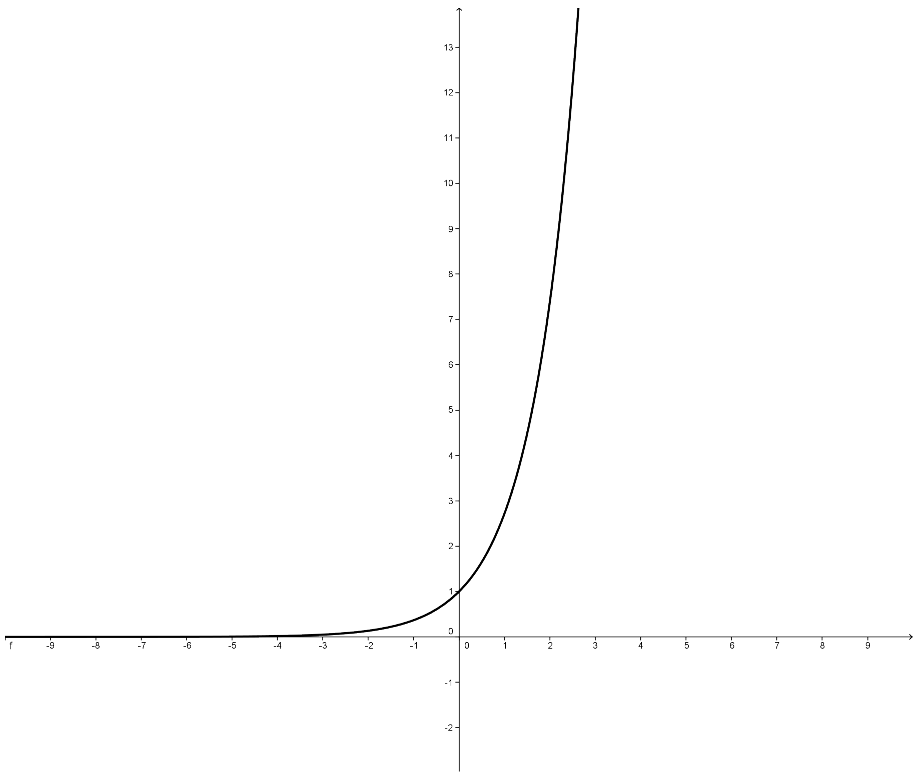
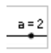


Figura 2.1: Representación gráfica de $f(x) = e^x$.

Utiliza el desplazamiento  para que te queden los ejes como en la figura 2.1, esto es: el eje de abscisas entre -10 y 10 y el de ordenadas entre -3 y 14 (más o menos); te puedes ayudar de la rueda del ratón para ampliar o reducir, según convenga. Puedes, también, situar el ratón sobre la ventana gráfica, pulsar el botón derecho y elegir la opción vista gráfica. Como habrás comprobado, la vista depende, en definitiva, del tamaño del panel, el tamaño de la ventana de GeoGebra y la resolución de pantalla fijada en el ordenador en el que se esté trabajando.

PASO 2: Control de la disminución del incremento.

Para controlar la disminución de Δx usaremos un deslizador 

.

Fijaremos su intervalo de -1 a 17, incremento 0.01, ancho 300 (pestaña Deslizador), y le pondremos por nombre ξ (letra griega Xi, pronunciada [ksi]) letra que debe seleccionarse del desplegable de símbolos que proporciona el botón α que aparece al entrar en la edición del campo para nombre (figura 2.2)

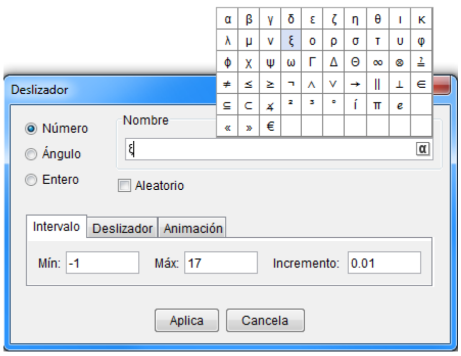


Figura 2.2: Diálogo para definir el deslizador ξ.

Utiliza el botón derecho del ratón para situar el deslizador en la esquina superior izquierda, como se muestra en la figura 2.3.

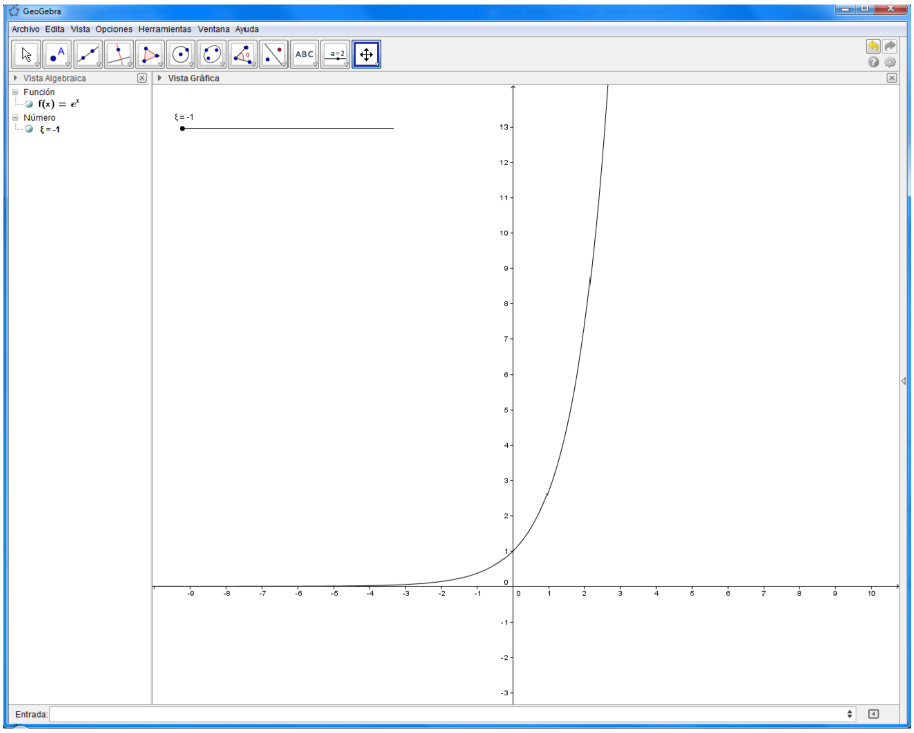


Figura 2.3: Vista gráfica de los ejes y el deslizador ξ.

Crearemos Δx en función de este control introduciendo en la barra de entrada, y ayudados por el desplegable de símbolos que proporciona el botón α que aparece al entrar en edición en la barra de entrada, la siguiente expresión

$$\Delta x = 1/2\hat{}\xi$$

Por último, crearemos otro deslizador (intervalo de -1 a 0.3, incremento 0.01, ancho 300) para x_P . Observa en la figura 2.4 cómo se escribe el subíndice P en el nombre de la variable.

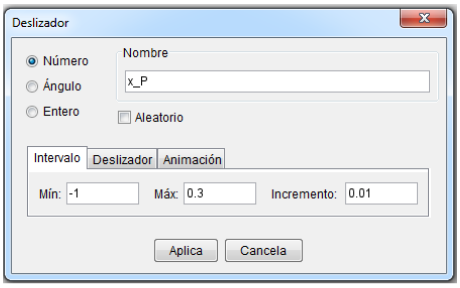


Figura 2.4: Diálogo para definir el deslizador x_P.

Utiliza el botón derecho del ratón para situar el deslizador bajo el otro.

PASO 3: Creación de un punto P y otro próximo P'.

Para definir el punto P usaremos x_P y $f(x_P)$, introduciendo en la barra de entrada $P = (x_P, f(x_P))$, esto es, `P=(x_P,f(x_P))`.

El punto próximo, P', lo definiremos introduciendo en la entrada la expresión $P' = (x_P + \Delta x, f(x_P + \Delta x))$

Recuerda que GeoGebra distingue las letras mayúsculas de las minúsculas en los nombres de las variables así como que puedes utilizar la flecha de cursor del teclado para recuperar en la barra de entrada las instrucciones introducidas con anterioridad.

PASO 4: Obtención de la recta y su pendiente.

Para crear la recta que pasa por P y P', introduciremos en la barra de entrada el comando

`secantePP'=Recta[P,P'].`

Cambiaremos a continuación sus propiedades (utilizando el menú de edición o el contextual del botón derecho del ratón) fijando el estilo del trazo a discontinuo (en la pestaña *Estilo*), grosor de trazo 5, color rojo (255,0,0), y la forma de expresar su ecuación (en la pestaña *Álgebra*) a $y = ax + b$; como se ve en la figura 2.5.

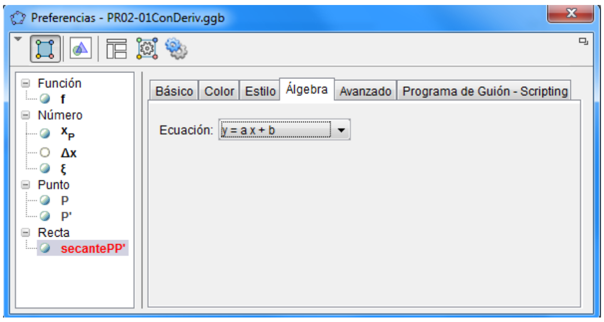


Figura 2.5: Diálogo de propiedades de la recta R.

Aunque la pendiente se obtiene de forma inmediata en la forma en que ahora expresamos la ecuación de la recta ($y = ax + b \Rightarrow$ pendiente a), vamos a definir una variable m que la obtiene en general, para lo que introduciremos en la barra de entrada el comando

`m=Pendiente[secantePP'],`

como se muestra en la figura 2.6.

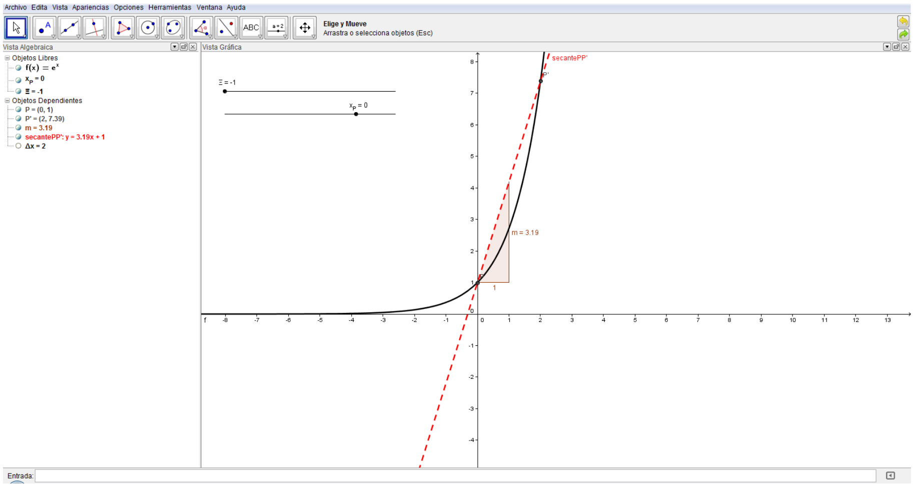


Figura 2.6: Cálculo de la pendiente m extraído de $secantePP'$.

PASO 5: Cálculo de la derivada

Obtendremos la derivada de $f(x)$ introduciendo $f'(x)$ (o bien `f'(x)=Derivada[f(x)]`) en la barra de entrada y su valor en x_P con la expresión $y'_P = f'(x_P)$. Puedes desactivar la representación gráfica de $f'(x)$ ya que coincide con la función $f(x)$. Se puede desactivar desde sus propiedades o directamente pinchando en la bolita que usa como viñeta en la ventana algebraica (panel de la izquierda).

Nota: La regla para la derivada de una función exponencial $f(x) = c^x$ es $f'(x) = c^x \ln c$, así que para el caso particular de $f(x) = e^x$, la función y su derivada coinciden: $f(x) = f'(x) = e^x \ln e$.

PASO 6: Recta tangente a la gráfica de la función f en el punto P e incrementos Δx, Δy.

Asigna a las variable y_P el valor $f(x_P)$. Para generar la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $P = (x_P, y_P)$, utilizaremos la forma de la recta punto pendiente $y - y_P = m(x - x_P)$; siendo en este caso el punto P y la pendiente $m = y'_P = f'(x_P)$ por lo que introduciremos en la barra de entrada el comando

```
tangenteP:  y - y_P = y'_P (x - x_P)
```

Cambiaremos, a continuación, sus propiedades fijando el grosor de trazo en 5, el color azul (51,51,255) y álgebra en el formato $y = ax + b$ (figura 2.7). Ya hemos comentado con anterioridad, que en la forma simplificada de la ecuación de la recta $y = ax + b$, el valor a de la pendiente se obtiene de forma inmediata.

Observa que el triángulo rectángulo, en color rosa, que nos muestra la pendiente m de la recta $secantePP'$ tiene base 1 y altura m (así es como lo muestra GeoGebra). Vamos a dibujar el triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el segmento PP' y, por tanto, cuya base es $\Delta x = (x_P + \Delta x) - x_P$ y cuya altura es $\Delta y = f(x_P + \Delta x) - f(x_P)$; de esta manera la pendiente de la recta $secantePP'$ se puede expresar como el cociente

$$msecantePP' = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_P + \Delta x) - f(x_P)}{\Delta x}$$

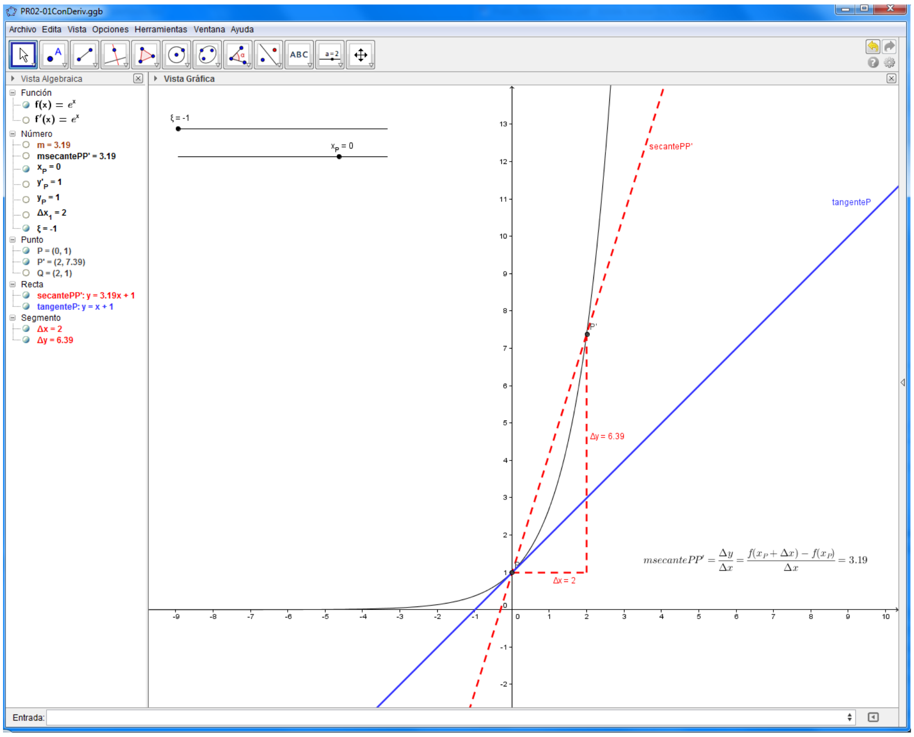


Figura 2.7: Gráfica de la recta tangente a f en P.

Necesitamos determinar, en primer lugar, las coordenadas del vértice (que denotamos por Q) correspondiente al ángulo recto. La abscisa de Q viene dada por $x_P + \Delta x$ y la ordenada por $f(x_P)$; así pues escribiremos en la barra de entrada

```
Q=(x_P +Δx,f(x_P))
```

A continuación trazamos el segmento que une el punto P con Q  y obtenemos el cateto base del triángulo. Dibujando el segmento que une el punto P' con Q obtenemos el cateto altura.

Vamos a cambiar las propiedades de los dos segmentos dibujados, fijando el color en rojo, estilo de trazo discontinuo, mostrar rótulo nombre y valor; asignamos al segmento PQ el nombre Δx y al segmento $P'Q$ el nombre Δy.

Observa que GeoGebra renombra automáticamente la variable que habíamos definido con anterioridad con el mismo nombre Δx y le asigna el nombre Δx_1.

Introduce en la barra de entrada el comando

$$msecantePP' = \Delta y/\Delta x$$

y observa que coincide con el valor de m, como era de esperar.

Para que el dibujo quede más nítido, oculta objeto y rótulo de Q y oculta objeto y rótulo de m.

Consulta en la página principal del manual de usuario el enlace Características Avanzadas → LaTeX . También puedes consultar las páginas 35 y 36 del documento de ayuda de la versión 3.2.

Finalmente, utiliza la herramienta Inserta Texto ABC para escribir el texto

$$msecantePP' = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \text{objeto msecantePP'}$$

y cambia el tamaño del texto insertado a pequeño; obtendrás un resultado semejante al de la figura 2.8.

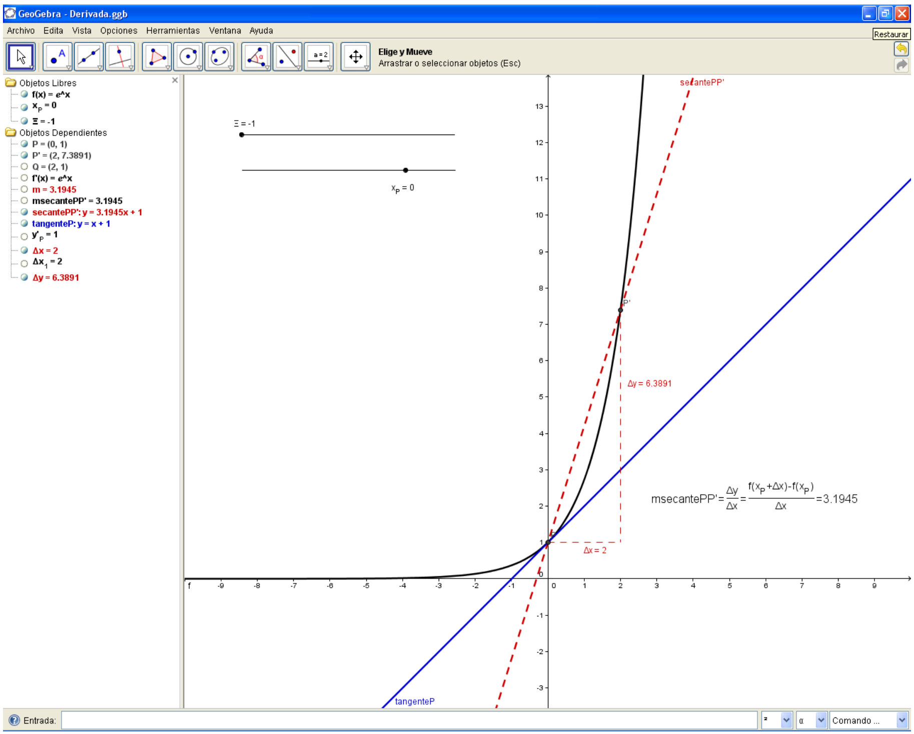


Figura 2.8: Gráfica del triángulo rectángulo PP', Δx, Δy.

PASO 7: Comprobación de que la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos P y P' tiende a la pendiente de la recta tangente a f en el punto P.

Cambia la configuración en *Opciones* → *Redondeo* a 4 *Lugares Decimales* para poder ver los valores con mayor precisión.

Sitúa el deslizador de ξ en el valor más pequeño y el de x_P en 0. Si desplazas hacia la derecha el deslizador ξ el incremento Δx se reduce cada vez más y tiende a 0, esto supone que el punto P' tienda al punto P y la recta $secantePP'$ tienda a la recta $tangenteP$.

Puedes comprobar, además, que el valor de la pendiente de la $secantePP'$, $msecantePP'$, se aproxima a $y'_P = f'(x_P)$ a medida que disminuye Δx, convergiendo en el límite. Este hecho se puede expresar de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} msecantePP' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_P + \Delta x) - f(x_P)}{\Delta x} \\
&= y'_P \\
&= f'(x_P)
\end{aligned}$$

que expresa la definición de la derivada de una función en un punto.

2.1.1. Comentarios y reflexiones

Puedes variar también el valor de x_P con el otro deslizador para comprobar el hecho de que $msecantePP'$ tiende a $y'_P = f'(x_P)$ cuando Δx tiende a 0 se cumple para cualquier punto de la gráfica de f (observa la figura 2.9).

Almacena esta nueva construcción en el archivo PR02-01bConDeriv.ggb (Guardar como).

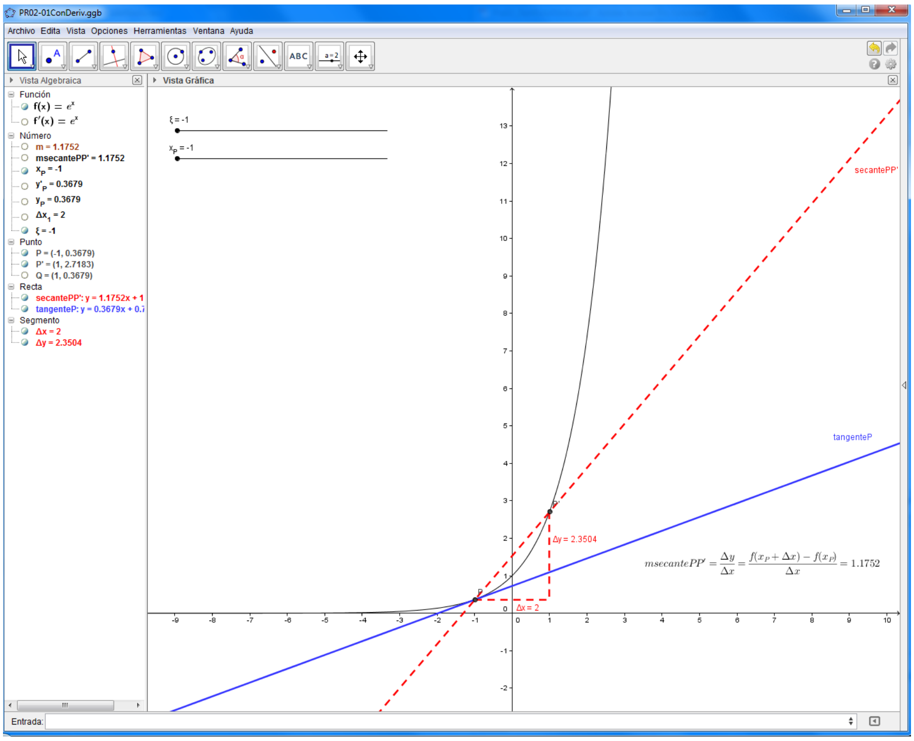


Figura 2.9: Convergencia de $msecantePP'$ a y'_P para cualquier x_P si $\Delta x \to 0$.

2.1.2. Investigaciones

Prueba ahora con otras funciones $f(x)$. Sólo tienes que cambiar el valor de la función en sus propiedades (en el menú de edición o el menú contextual del botón derecho del ratón). Puedes usar los desplegables que aparecen a la derecha para elevar al cubo o al cuadrado, o usar el operador ˆ en otras ocasiones (observa la figura 2.10). También puedes introducir directamente la nueva función $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$.

Almacena esta nueva construcción en el archivo PR02-01cConDeriv.ggb.

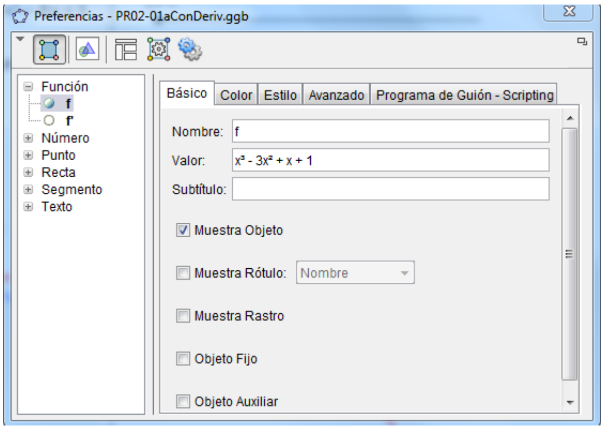


Figura 2.10: Cambio de la función $f(x)$ a través de sus propiedades.

Directamente nos encontraremos con el mismo mecanismo con el que poder deslizar la tangente a lo largo de la nueva curva (figura 2.11):

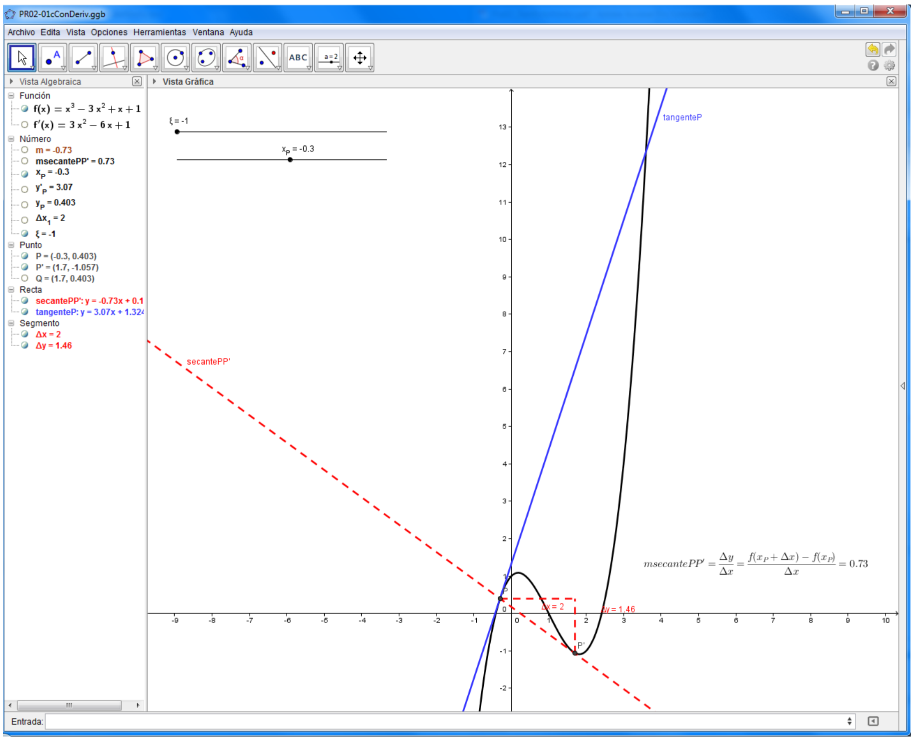


Figura 2.11: Comprobación con cualquier intervalo de función derivable y continua.

Nota: Puede ser necesario que cambies los extremos del intervalo para el deslizador x_P si deseas que el punto P tome determinados valores.

2.2. Los teoremas de Rolle y valor medio

Con la actividad propuesta en esta sección se pretende que puedas visualizar la interpretación gráfica de los teoremas de Rolle y del valor medio.

2.2.1. El teorema de Rolle

Recordemos, en primer lugar, el enunciado del teorema de Rolle.

Teorema 2.1 (Teorema de Rolle)**.** *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función continua y derivable en el intervalo* $]a, b[$*. Si* $f(a) = f(b)$*, entonces existe* $c \in]a, b[$ *tal que* $f'(c) = 0$*.*

PASO 1: Representación gráfica de una función.

Trabajaremos inicialmente con la función polinómica $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 1$ que que es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. Este hecho nos facilitará la elección de un intervalo $[a, b]$ apropiado en el que verificar el teorema de Rolle. Para ello debes seleccionar en el menú Apariencias la opción Álgebra y gráficos e introducir en la barra de entrada el comando necesario para obtener su gráfica (figura 2.12) (tienes la solución en la nota a pie de página al final de esta práctica[*]). Guarda la construcción correspondiente a esta función en el archivo PR02-02aRolle.ggb

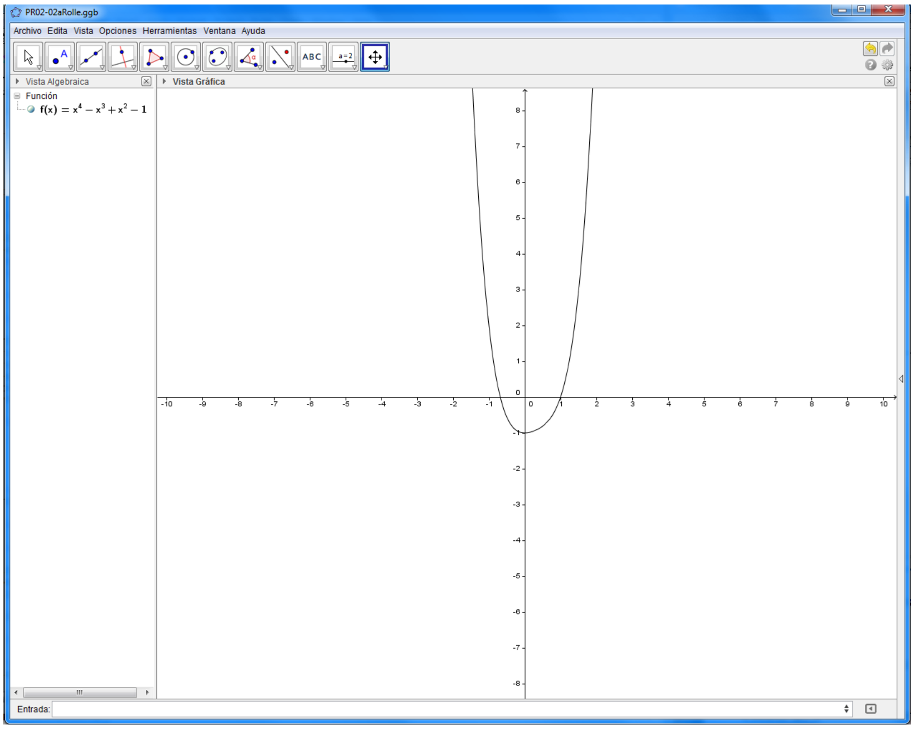


Figura 2.12: Representación gráfica de $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 1$.

Utiliza *Desplazar Vista Gráfica* par centrar los ejes en la ventana gráfica.

PASO 2: Establecimiento de un intervalo $[a, b]$ en el que $f(a) = f(b)$.

Si $f(a) = f(b) = k$, la recta que pasa por los puntos $A = (a, f(a))$ y $B = (b, f(b))$ es horizontal (paralela al eje de abscisas) y, por tanto, su pendiente $m = 0$. Su ecuación viene dada por la expresión $y = 0x + k = k$ y corta a la gráfica de la función f precisamente en los puntos A y B.

Inicialmente vamos a dar a k el valor 3, introduciendo en la barra de entrada

$$k = 3$$

a continuación dibujamos la recta horizontal $y = k$ tecleando

$$r : y = k$$

Ahora vamos obtener los puntos de corte, A y B, entre la recta r y la función f, para ello debes consultar la sintaxis del comando Interseca (particularmente Interseca[<Objeto>, <Objeto>, <Número (o valor numérico) del Punto de Intersección>] y teclear en la barra de entrada los comandos necesarios para asignar al punto A la primera intersección y al punto B la segunda intersección como se muestra en la figura 2.13 (muestra nombre y valor para los dos puntos). Tienes la solución en la nota a pie de página al final de esta práctica**.

También se puede hacer uso del icono *Intersección de Dos Objetos* , pero en esta práctica vamos a utilizar la primera opción.

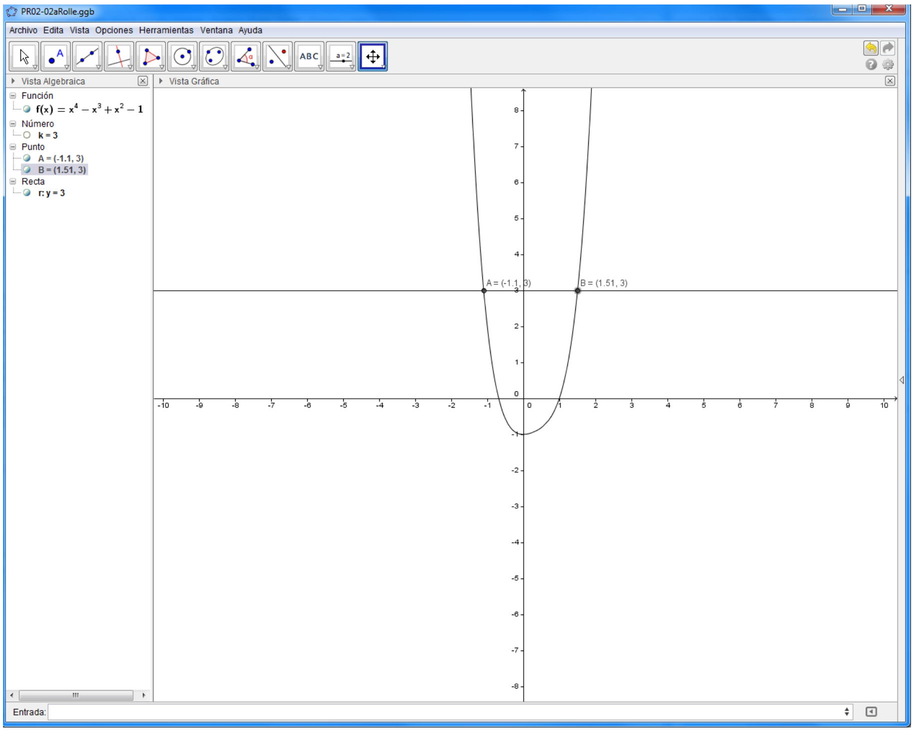


Figura 2.13: Localización gráfica de los puntos de intersección A y B.

Extraemos a y b de los puntos A y B mediante la función x en la barra de entrada

$$a = x(A)$$
$$b = x(B)$$

PASO 3: Asignación de valores a $c \in [a, b]$ mediante un deslizador.

Para poder extender el valor c que se menciona en el teorema de Rolle atendiendo a futuros valores que puedan tomar a y b, usaremos una variable independiente como deslizador, con nombre ξ, rango de 0 a 1, incremento $0,001$ y ancho 300 (figura 2.14)

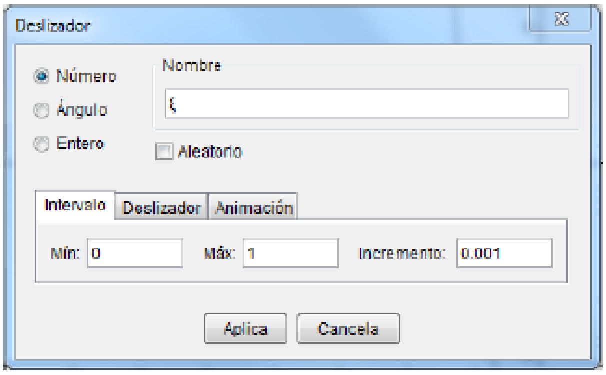


Figura 2.14: Definición del deslizador ξ.

Como utilizamos un incremento de $0,001$ interesa cambiar la configuración del *Redondeo* en *Opciones* a 3 *Lugares Decimales*.

Ahora vamos a definir c en función de a, b y ξ, introduciendo en la barra de entrada

$$c = a + \xi * (b - a)$$

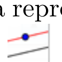
Observemos que $\xi \in [0, 1]$ y que para $\xi = 0$, $c = a$; a medida que desplazamos el deslizador hacia la derecha ξ aumenta hasta llegar al valor 1 y en este caso $c = a + 1 \cdot (b - a) = b$; por tanto c recorre todos los valores del intervalo $[a, b]$.

Para que se visualice en la gráfica de $f(x)$ la posición con la que se corresponde el valor c, definiremos el punto correspondiente $C = (c, f(c))$.

Podemos desplazar el punto C por la curva $f(x)$ entre los puntos A y B moviendo el deslizador ξ desde 0 hasta 1. Compruébalo.

Podemos recorrer el deslizador con las teclas de cursor (seleccionándolo previamente y pulsando dichas teclas. Este recorrido se puede acelerar o desacelerar combinando las teclas de cursor. Si combinamos las teclas de cursor con la de *Control*, se acelera el recorrido ya que el incremento es diez veces el preestablecido y si las combinamos con la tecla *Alt* el incremento es cien veces el preestablecido. Si la combinación se hace con la tecla *Mayúsculas*, el recorrido se desacelera ya que el incremento disminuye a la décima parte de lo preestablecido. Compruébalo.

PASO 4: Localización de la recta horizontal (paralela a $y = k$) que pasa por $C = (c, f(c))$.

Ahora vamos a representar la recta paralela a r que pasa por C haciendo uso de *Recta Paralela* , seleccionando primero uno de los dos objetos y luego el otro. Cambiaremos el nombre asignado por defecto a la recta paralela por el de r_p y mostraremos el nombre (figura 2.15):

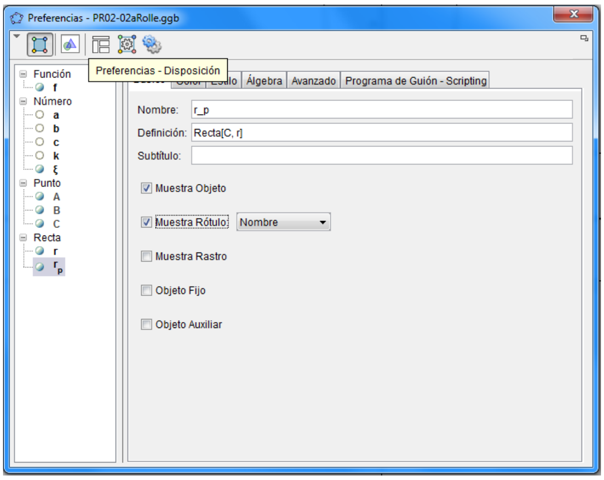


Figura 2.15: Ponemos el nombre a r_p a través del diálogo de propiedades.

Ahora con el deslizador movemos conjuntamente el punto C y la paralela r_p (figura 2.16):

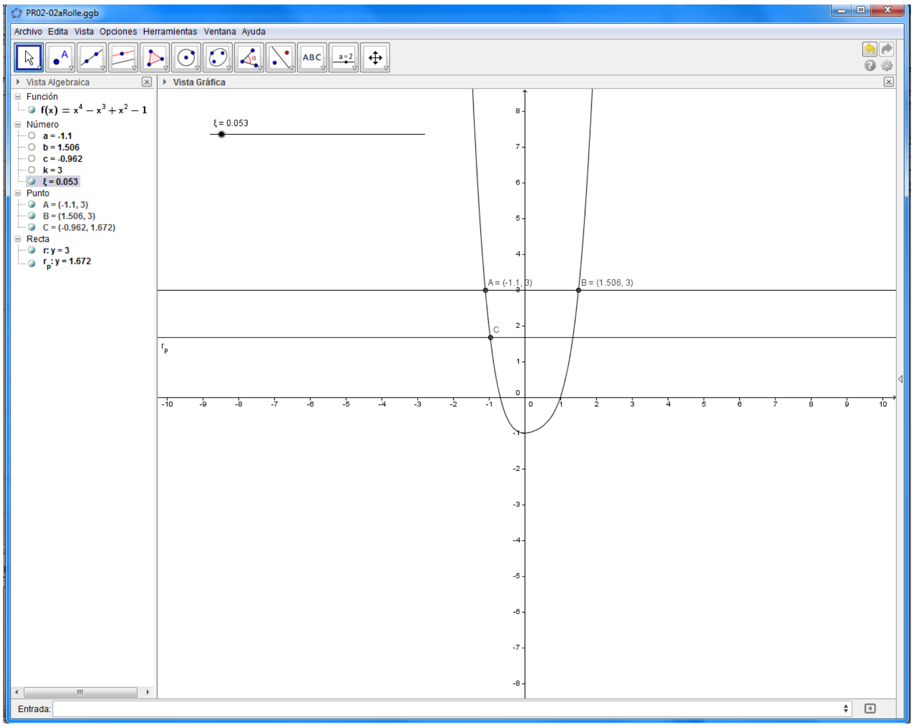


Figura 2.16: Desplazamiento de la paralela r_p conjuntamente con C.

PASO 5: Obtención de la pendiente y tangente en C.

Obtendremos la derivada de $f(x)$ introduciendo el comando $f'(x)$ (o bien $f'(x) = Derivada[f(x)]$).

Consideraremos la derivada de la función f como un objeto auxiliar que no vamos a representar gráficamente, ya que sólo la usaremos para calcular $f'(c)$; para ello ajustamos las propiedades de f' como se muestra en la figura 2.17.

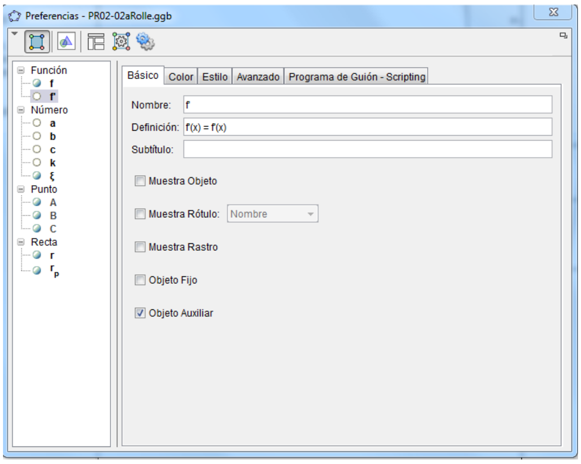


Figura 2.17: Ajuste de propiedades para la función derivada $f'(x)$.

Es conocido que el valor de la derivada de la función f en c, $f'(c)$, coincide con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $C = (c, f(c))$; dicha pendiente la almacenamos en una variable m introduciendo la siguiente instrucción en la barra de entrada

$$m = f'(c)$$

Ahora dibujaremos la recta tangente, t, a la gráfica de $f(x)$ en el punto $C = (c, f(c))$ haciendo uso de la ecuación punto pendiente de la recta. Tienes la solución en la nota pie de página al final de la práctica***.

Tanto a m como a t les asignaremos el color rojo *(255,0,0)*. A la tangente t le pondremos el estilo de rayas y la convertiremos en un objeto auxiliar (observa la figura 2.18)

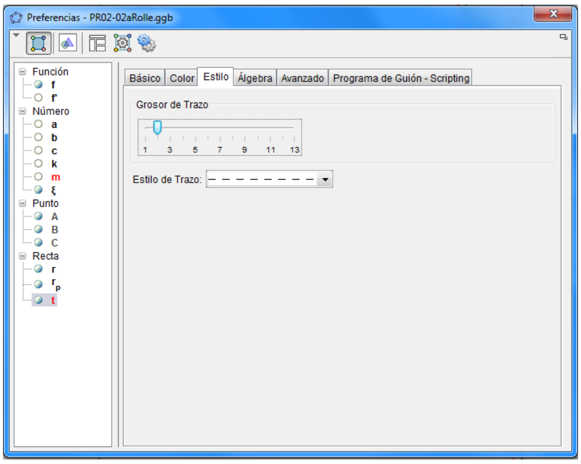


Figura 2.18: Propiedades de la recta tangente t.

Es recomendable que las tres rectas que hemos generado r, r_P y t se muestren en el formato $y = ax + b$, por lo que deberás modificar sus propiedades adecuadamente.

Ahora, al desplazar el deslizador, movemos el punto C, su horizontal r_P y la tangente t a f en el punto C. El valor de la pendiente de t lo hemos almacenado en m y ese valor es $f'(c)$. Observa la figura 2.19.

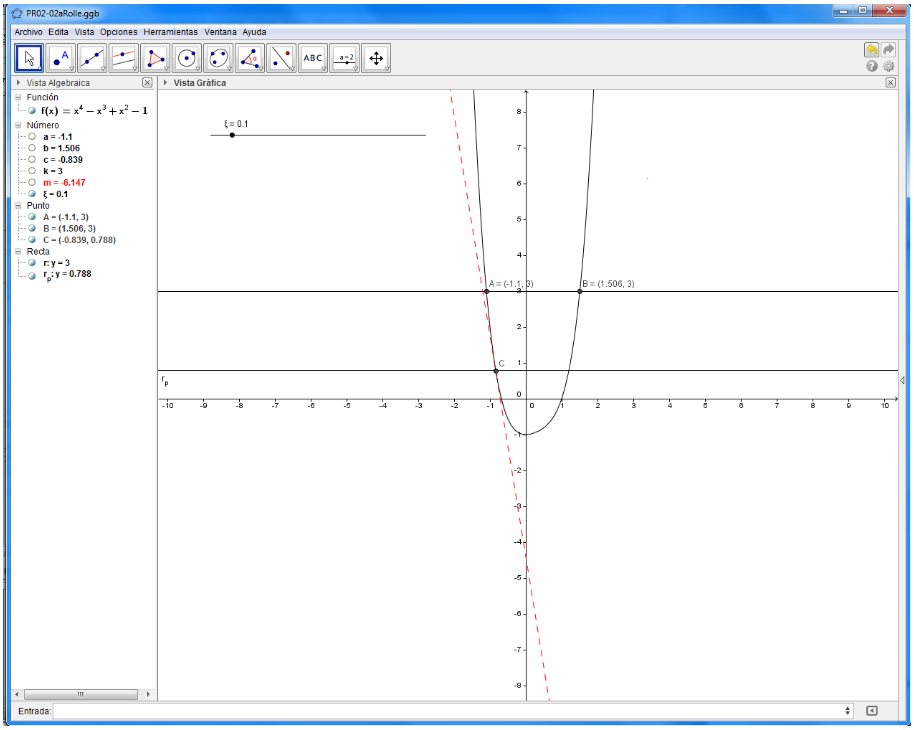


Figura 2.19: Desplazamiento conjunto de C, r_p y t.

PASO 6: Interpretación gráfica del Teorema de Rolle.

El teorema de Rolle afirma que existe un valor $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$. Para localizar ese valor, vamos a desplazar el deslizador ξ hasta conseguir que $m = f'(c) = 0$, o lo que es lo mismo, que las rectas t y r_P coincidan. Para ello, recuerda que seleccionando el deslizador y combinando las teclas de cursor con las teclas *Control*, *Alt* o *mayúsculas* se puede ajustar el valor de c con suficiente precisión. Es posible que necesites incrementar el redondeo a 4 lugares decimales para poder tener la suficiente precisión (combinación con la tecla *mayúsculas* supone avance $0'0001$. Observa la figura 2.20.

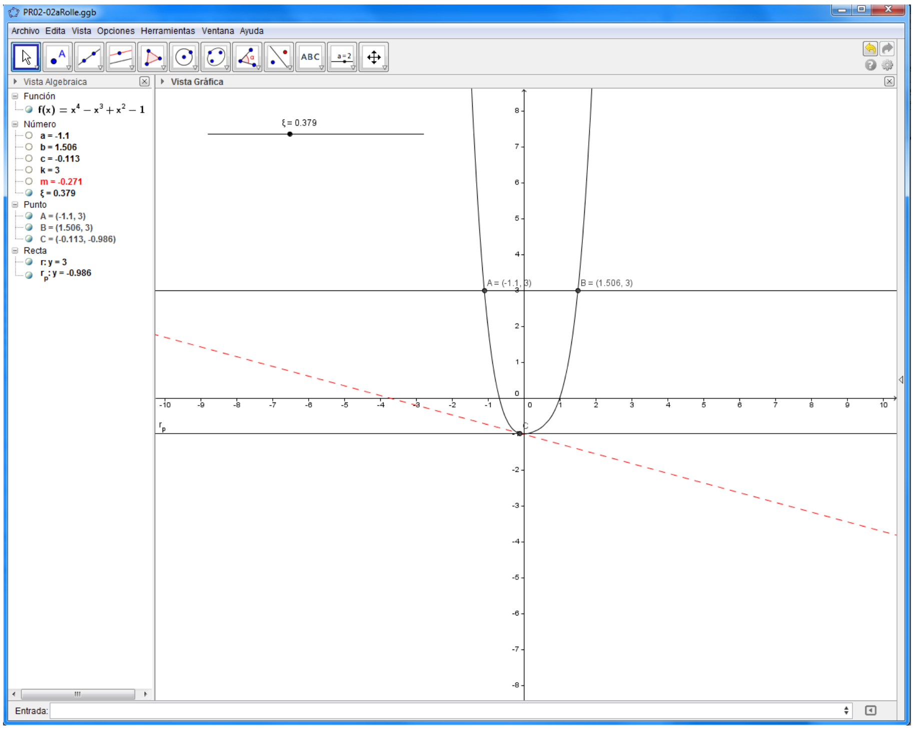
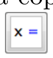


Figura 2.20: Determinación del valor $c \in]a, b[$ tal que $m = f'(c) = 0$.

Para esta función es fácil encontrar gráficamente el valor c en el que $f'(c) = 0$; en casos más complicados, podrías ayudarte de las utilidades que te proporciona CAS (cálculo simbólico y algebraico).

Elige en el menú Apariencias la opción CAS y Gráficos, teclea f'(x)=0 en la primera línea, haz un cick sobre la salida $4x^3 - 3x^2 + 2x = 0$ para copiarla en la segunda fila y, a continuación, haz clic sobre el icono resuelve  para obtener la solución a dicha ecuación; observarás que se obtiene el valor $x = 0$ que coincide con el que has obtenido gráficamente (figura 2.21)

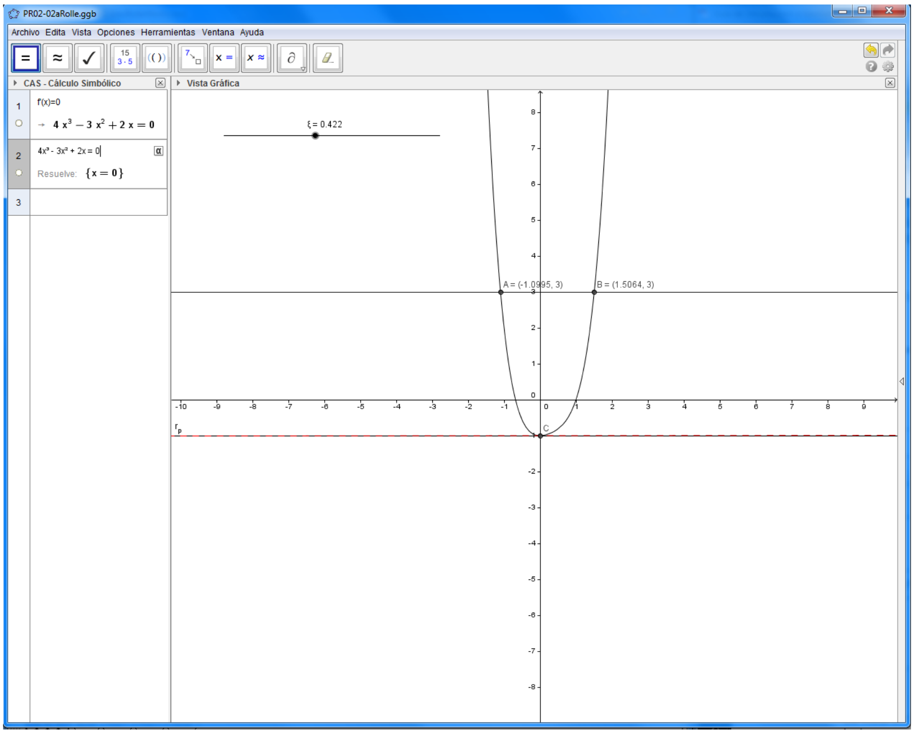


Figura 2.21: Utilización de CAS para determinar el valor $c \in]a, b[$ tal que $m = f'(c) = 0$.

PASO 7: Cambio de función y nueva búsqueda.

Prueba ahora con otras funciones como, por ejemplo, $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$. Sólo tienes que cambiar el valor de la función en sus propiedades (figura 2.22). Puedes dejar la ventana algebraica con menos datos si en el menú *Vista* desactivas los *Objetos Auxiliares*. Guarda la construcción correspondiente a esta función en el archivo PR02-02bRolle.ggb.

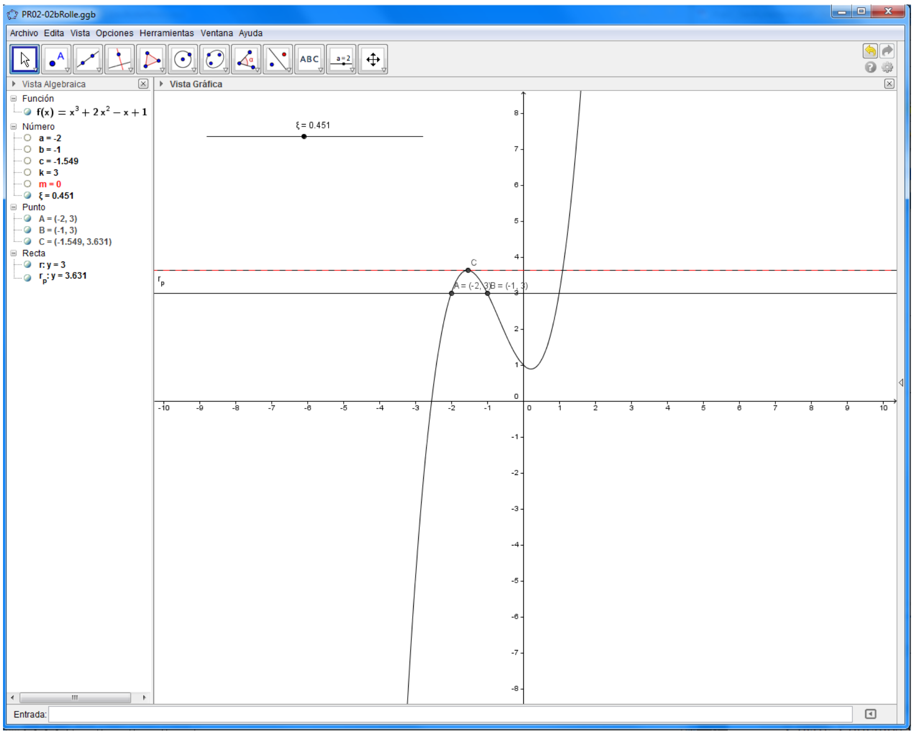


Figura 2.22: Cambio a la función $x^3 + 2x^2 - x + 1$.

La recta horizontal $y = 3$ corta a esta nueva función en tres puntos A, B y otro. Podemos cambiar B para que sea el tercer punto de corte en lugar del segundo, haciendo las correspondientes modificaciones en las propiedades de B; tal como se muestra en la figura 2.23.

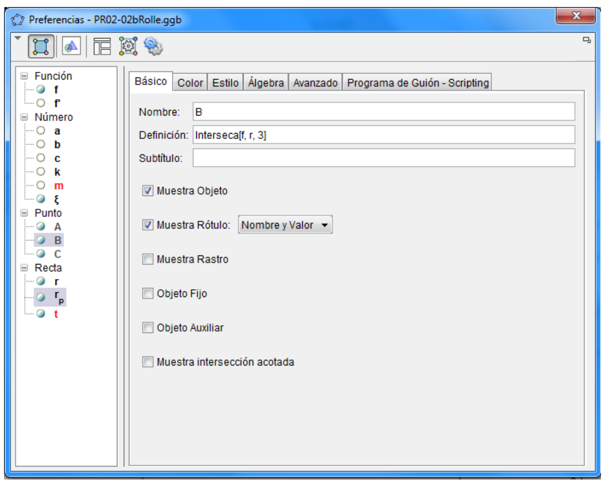


Figura 2.23: Cambio del punto B a través de sus propiedades.

Ahora son dos los valores $c \in]a, b[$ tales que $m = f'(c) = 0$. El teorema de Rolle garantiza al menos un valor pero puede haber más, como se muestra en las figuras 2.24 y 2.25.

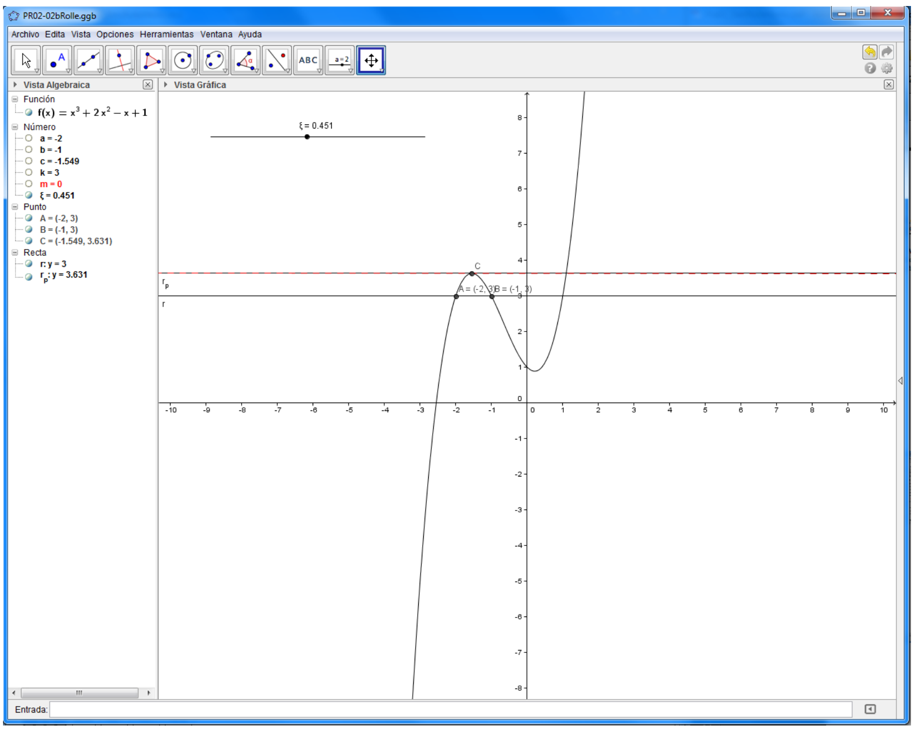


Figura 2.24: Primer punto C con tangente horizontal.

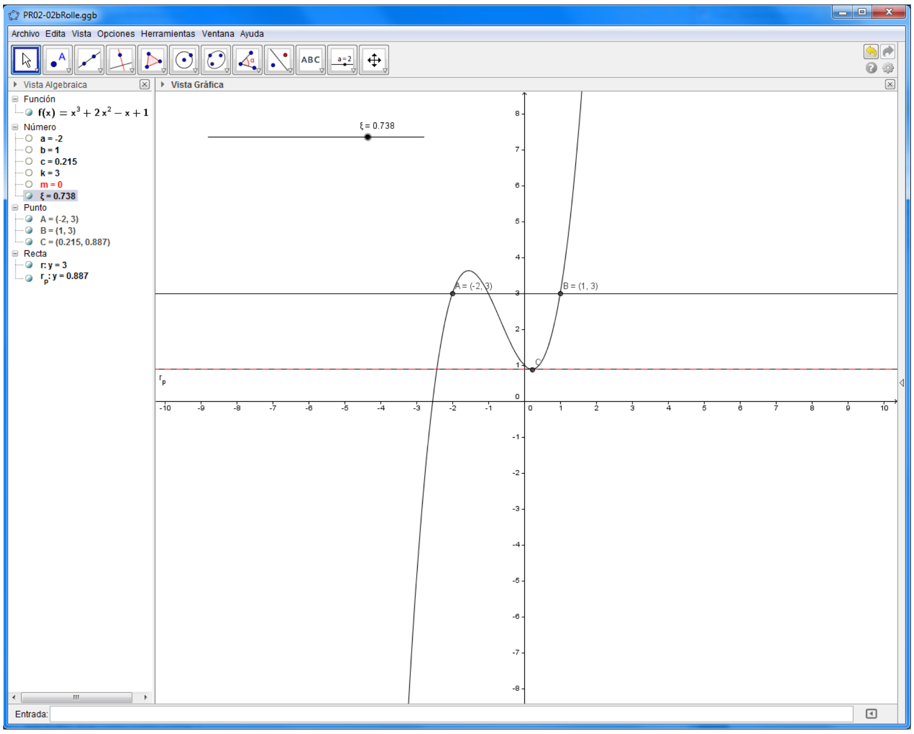


Figura 2.25: Segundo punto C con tangente horizontal.

Puedes obtener los valores exactos en los que $f'(c) = 0$ haciendo uso de CAS, como se ha indicado anteriormente. Observa la figura 2.26.

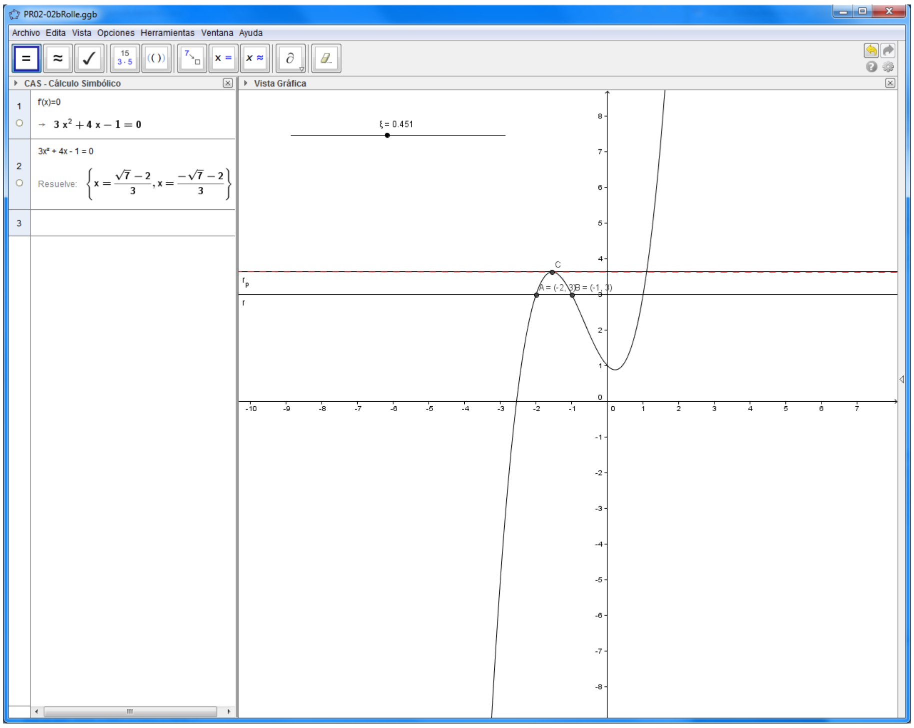


Figura 2.26: Utilización de CAS para determinar los valores $c \in]a, b[$ tales que $m = f'(c) = 0$.

Que exista más de un punto de tangencia horizontal (derivada nula) depende tanto de la función como del intervalo escogido. Para poder hacer el intervalo variable convertiremos k en un deslizador, que además tendremos que hacer visible (figura 2.27).

Guarda la nueva construcción en el archivo PR02-02cRolle.ggb

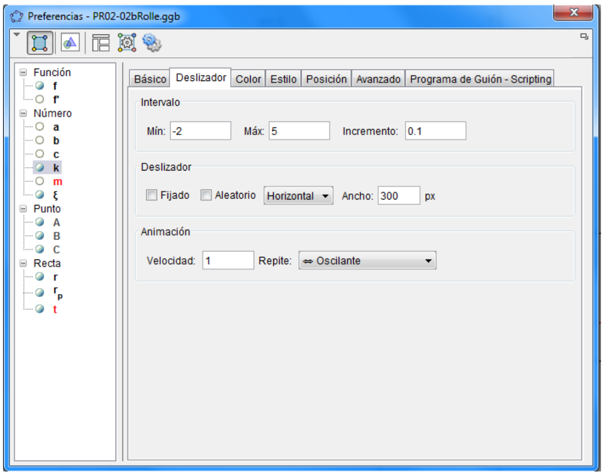


Figura 2.27: Cambio de propiedades en k.

Podremos ahora decidir por dónde queremos que la recta horizontal r corte a la función f, como se muestra en la figura 2.28.

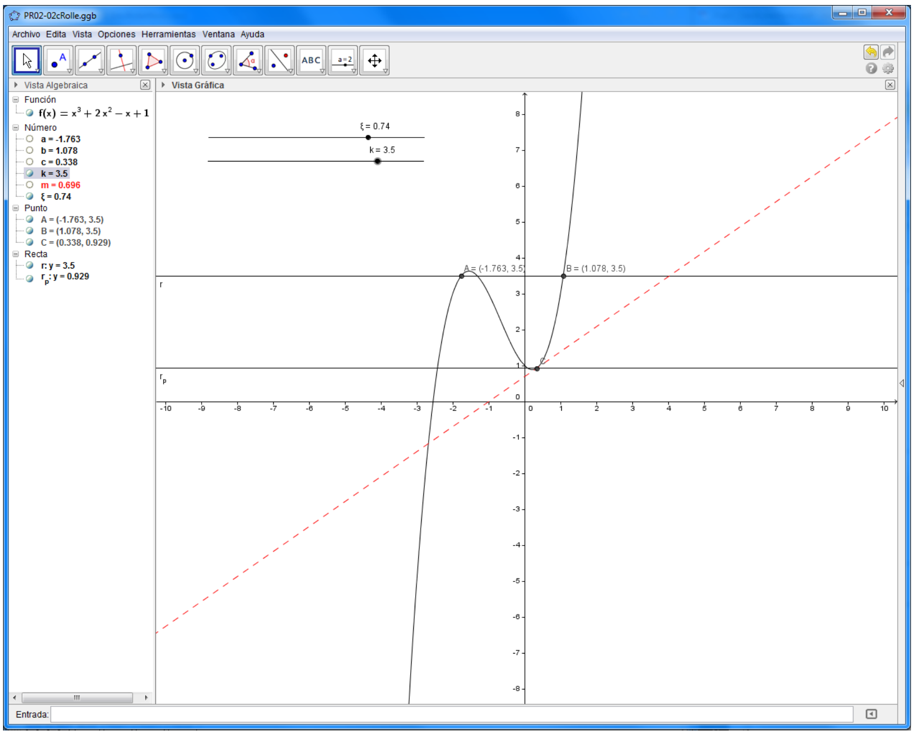


Figura 2.28: Variación del intervalo $[a, b]$ desplazando la recta r.

2.2.2. El teorema del valor medio

Recordemos el enunciado del teorema del valor medio.

Teorema 2.2 (Teorema del valor medio)**.** *Si* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es continua en* $[a, b]$ *y derivable en* $]a, b[$*, entonces existe* $c \in]a, b[$ *tal que* $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Observemos que el teorema de Rolle es un caso particular del teorema del valor medio en el que, al tener el mismo valor $f(a)$ que $f(b)$,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

PASO 1: Representación gráfica de una recta con pendiente $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \neq 0$**.**

Ahora vamos a considerar el caso general en el que la recta que pasa por los puntos $A = (a, f(a))$ y $B = (b, f(b))$ no es necesariamente horizontal y, en consecuencia, su pendiente no es necesariamente 0.

Recordemos que la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A = (a, f(a))$ y $B = (b, f(b))$ viene dada por la expresión

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Para considerar este caso general, en nuestra construcción GeoGebra (almacenada en el archivo PR02-02cRolle.ggb), vamos a añadir otro deslizador: el ángulo α, al que asignaremos un rango desde 0° hasta 360°, con incremento 1° y ancho 300 (figura 2.29).

Guarda la nueva construcción en el archivo PR02-03aTVM.ggb.

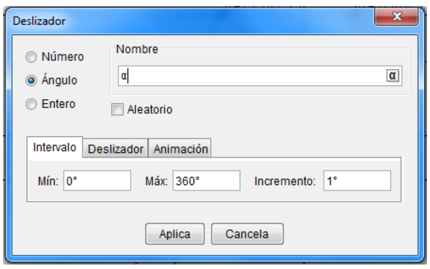


Figura 2.29: Nuevo deslizador α.

Utilizaremos este deslizador para darle pendiente a la recta r haciendo uso de la tangente del ángulo α. Redefinimos la recta r con la siguiente expresión

$$y = tan(\alpha)x + k$$

modificando sus propiedades como se muestra en la figura 2.30.

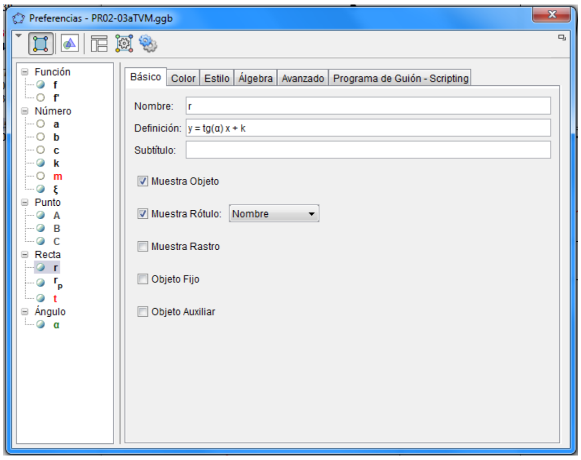


Figura 2.30: Modificación a la recta r.

La nueva recta r determina nuevos puntos de corte $A = (a, f(a))$ y $B = (b, f(b))$ sobre $f(x)$ de manera que puede darse el caso en el que $f(a) \neq f(b)$, como sucede para los valores $\alpha = 165°$, $k = 2.4$ (figura 2.31) y muchos otros.

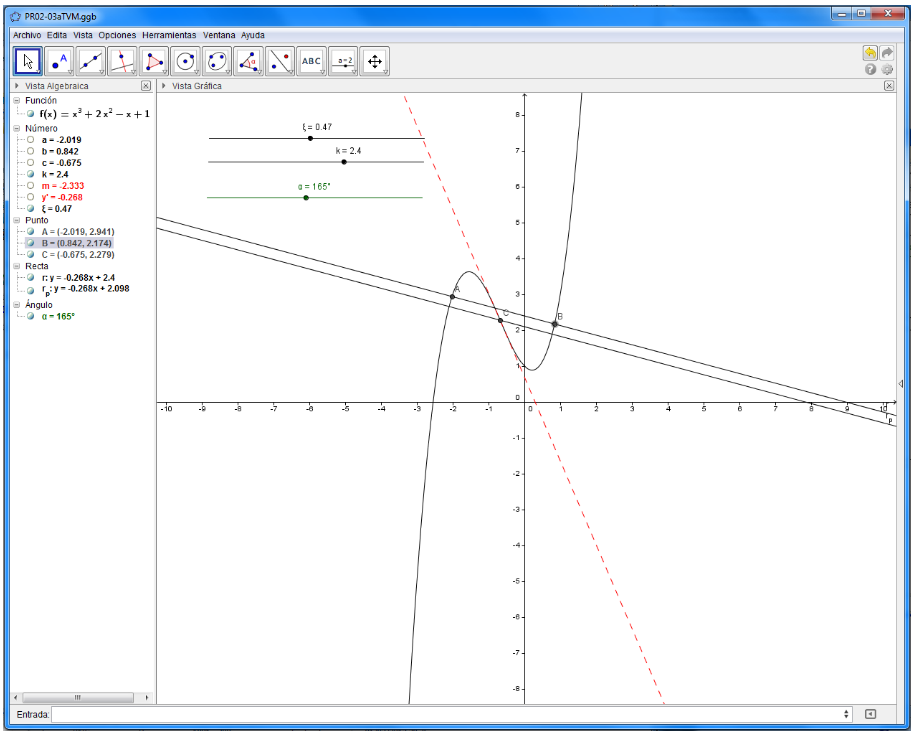


Figura 2.31: Inclinación de las rectas r y r_p mediante el deslizador α.

Comprueba (con el menú contextual) que las ecuaciones de las rectas r y

r_p están expresadas en su forma explícita, $y = ax + b$, ya que en esta forma la pendiente se identifica inmediatamente.

PASO 2: Búsqueda del Valor Medio.

Geométricamente, el teorema del valor medio asegura que existe, al menos, un número $c \in]a, b[$ tal que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $C = (c, f(c))$ (como sabemos, esta pendiente vale $f'(c)$) coincide con la pendiente de la recta secante a la gráfica de f en los puntos $A = (a, f(a))$ y $B = (b, f(b))$ (que como sabemos, vale $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$). En nuestra construcción GeoGebra, eso significa que existe (al menos) un número $c \in]a, b[$ tal que la recta t es paralela a la recta r.

Llamaremos y' a la expresión de la pendiente de r introduciendo en la barra de entrada el comando

$$y' = (f(b) - f(a))/(b - a)$$

Para destacarla la mostraremos en rojo *(255,0,0)*.

Buscamos con el deslizador ξ un valor c que nos muestre el mismo resultado para $m = f'(c)$ que para $y' = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Recuerda combinar con mayúsculas la teclas de cursor a derecha e izquierda para ajustar con más precisión el valor de c. Ten en cuenta que la recta t se debe superponer a la recta r_P.

Comprueba que en nuestra construcción GeoGebra existen dos valores de $c \in]a, b[$ en los que se verifica $m = y'$ como se muestra en las figuras 2.32 y 2.33.

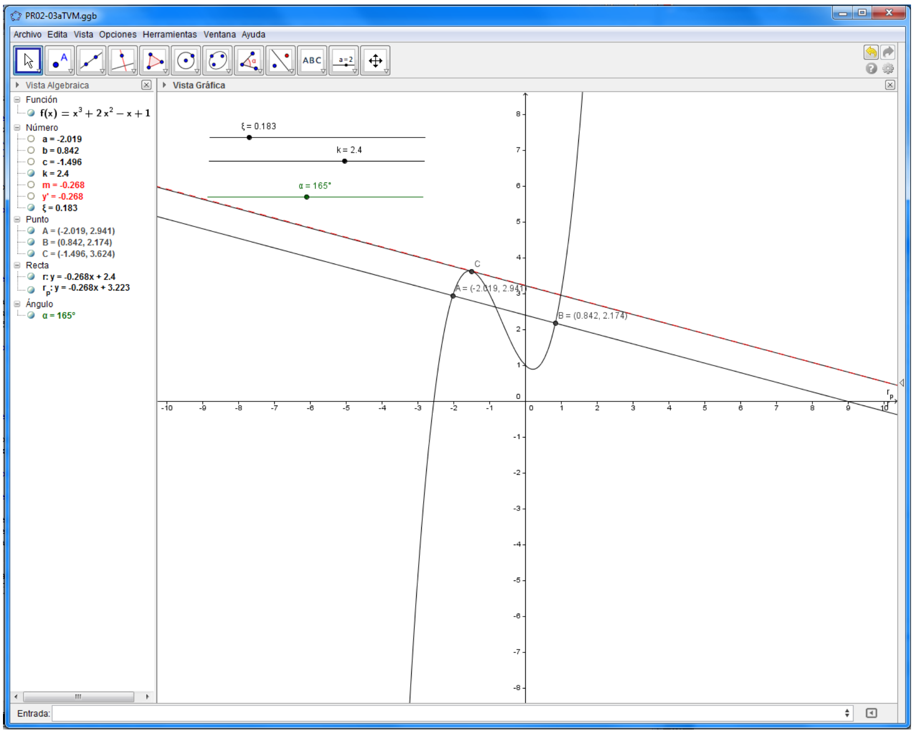


Figura 2.32: Primer punto C con r tangencial a $f(x)$.

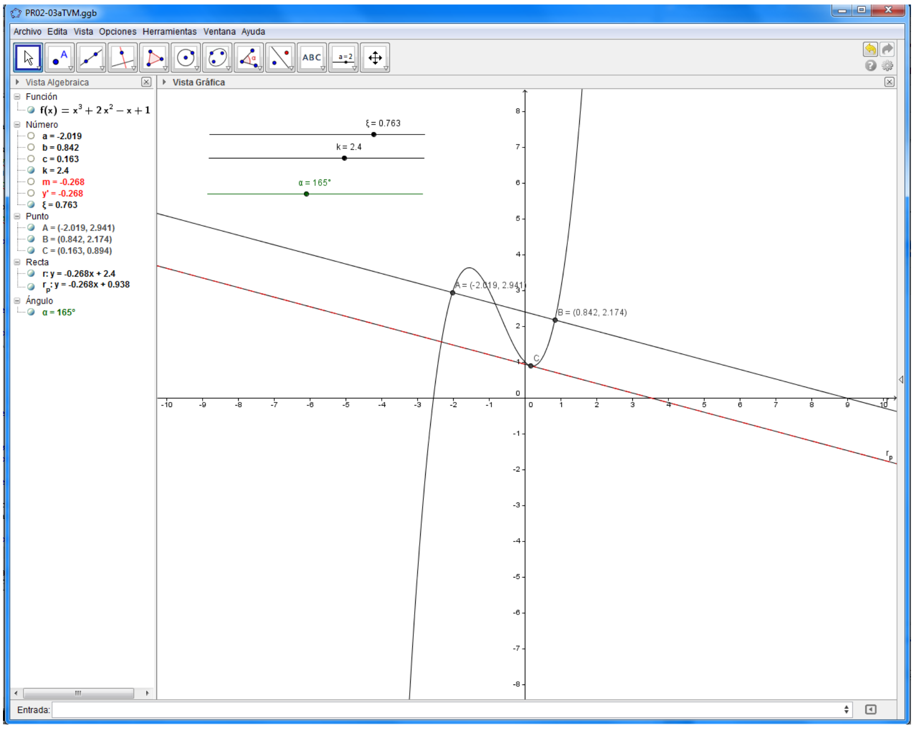


Figura 2.33: Segundo punto C con r tangencial a $f(x)$.

Al igual que en la construcción del teorema de Rolle, podemos utilizar CAS (cálculo simbólico y algebraico) para obtener los valores $c \in]a, b[$ tales que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = y'.$$

Para ello, elige en el menú Apariencias la opción CAS y Gráficos, teclea f'(x)=y' en la primera línea, haz un cick sobre la salida $3x^2+4x+1 = \cdots$ para copiarla en la segunda fila y, a continuación, haz clic sobre el icono resuelve $\boxed{x =}$ para obtener la solución a dicha ecuación; observarás que se obtienen dos valores exactos un tanto largos; en algunos casos los cálculos requeridos requieren mucho tiempo y Geogebra devuelve el mensaje "Cálculos cancelados al requerir demasiado tiempo".

La opción resolución numérica $\boxed{x \approx}$ es más rápida. Comprueba que obtenemos los mismos valores que mediante el método gráfico realizado anteriormente (figura 2.34).

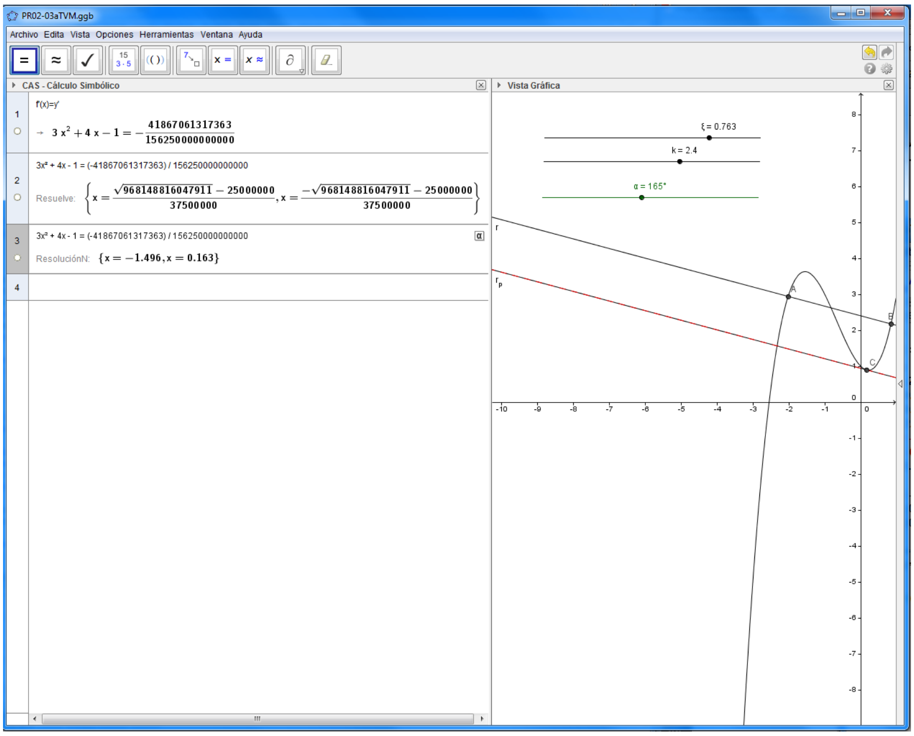


Figura 2.34: Utilización de CAS para determinar los valores $c \in]a,b[$ tales que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = y'$.

PASO 3: Cambio de función y nueva búsqueda.

Prueba tú ahora con otras funciones y recuerda poner α a cero si quieres volver a restringirlo a las paralelas horizontales del teorema de Rolle. Un ejemplo se muestra en la figura 2.35 en la que la función f se ha redefinido a $f(x) = x^4 - 2x^2$ y el punto B se ha redefinido como el cuarto punto de corte: Interseca[f, r, 4].

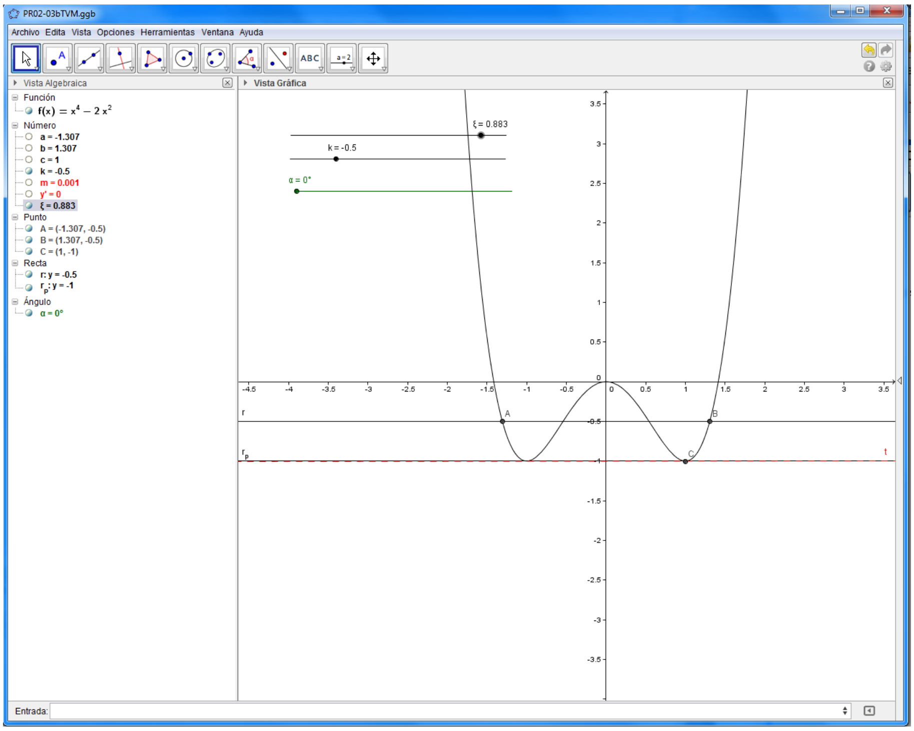
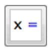


Figura 2.35: Teorema del valor medio para la función $f(x) = x^4 - 2x^2$ con $\alpha = 0$ (Rolle).

Al igual que en la construcción anterior, podemos utilizar CAS (cálculo simbólico y algebraico) para obtener los valores $c \in]a, b[$ tales que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = y'.$$

Para ello, elige en el menú Apariencias la opción CAS y Gráficos, teclea f'(x)=y' en la primera línea, haz un cick sobre la salida $4x^3 - 4x = 0$ para copiarla en la segunda fila y, a continuación, haz clic sobre el icono resuelve  para obtener la solución a dicha ecuación o bien la opción resolución numérica  (figura 2.36).

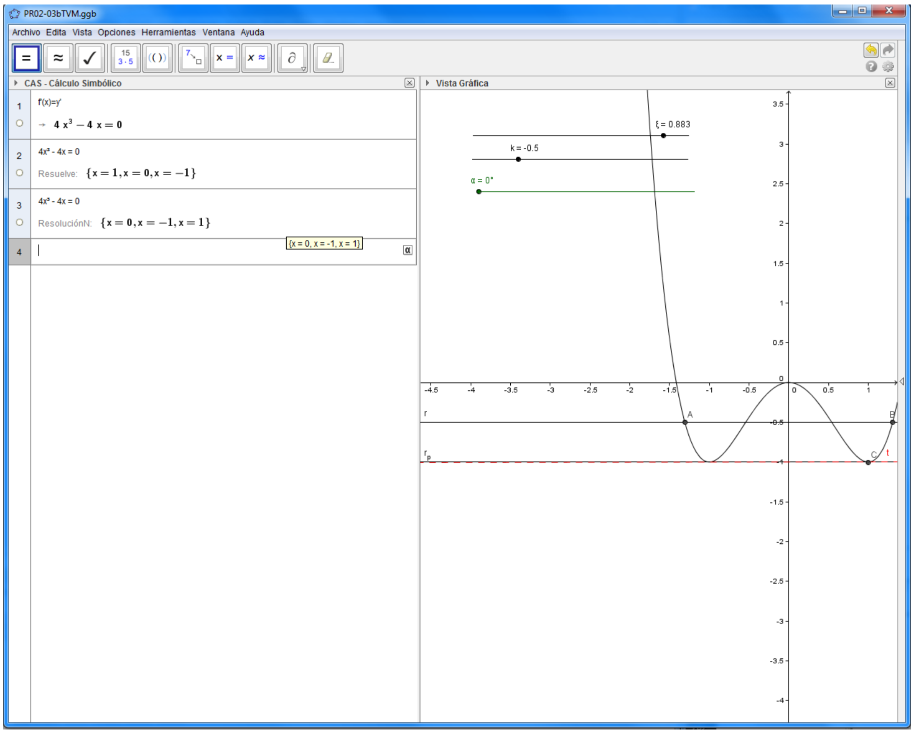


Figura 2.36: Utilización de CAS para determinar los valores $c \in]a, b[$ tales que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = y'$.

Notas

$^{*}f(x) = x\hat{\ }4 - x\hat{\ }3 + x\hat{\ }2 - 1$

$^{**}A = Interseca[f, r, 1]$ (primer punto de la lista de puntos de intersección) y $B = Interseca[f, r, 2]$ (segundo punto de la lista de puntos de intersección)

***Debemos teclear en la barra de entrada $t : y - f(c) = m * (x - c)$

Práctica 3

Análisis de gráficas y optimización

Temporización

Esta práctica debe realizarse en dos sesiones de 2 horas presenciales.

- La primera sesión presencial debe dedicarse a la sección 3.1.
- La segunda sesión presencial debe dedicarse a la sección 3.2.

Si acabaras la tarea programada antes del tiempo estimado, debes pasar a la siguiente actividad programada. Por el contrario, si no acabaras en en tiempo programado deberás dedicar el tiempo que necesites para acabar la tarea en horas no presenciales.

Cada construcción deberás grabarla en un archivo con el nombre que se indique. Para empezar debes crear una carpeta cuyo nombre debe ser PRACTICA3 en la que almacenarás todas las construcciones de esta práctica.

3.1. Análisis de gráficas

En esta sección haremos uso de GeoGebra para analizar gráficas de funciones, determinando extremos relativos, asíntotas y otras carácterísticas.

Construcción 3.1. *Localiza los puntos en que la tangente a la curva polinómica* $f(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 5$ *es paralela al eje de abscisas.*

Guarda la siguiente construcción en el archivo PR03-01-3.1aExtremos.ggb

Sabemos que los puntos $(a, f(a))$ buscados son aquellos en los que $f'(a) = 0$. GeoGebra nos permite obtenerlos directamente haciendo uso del comando Extremo.

- Crea una lista con los extremos de f y llámala ComandoExtremo (no olvides utilizar { }).

Alternativamente, vamos a utilizar un método similar al algebraico, que consistirá en encontrar las raíces de la derivada, f', de f.

- Define la función f' como la derivada de f (puedes escribir directamente $f'(x)$ o usar el comando Derivada)
- Para encontrar los valores en los que se anula la primera derivada haremos uso del comando Raíz. Así pues, crea una lista, PuntosRaícesf', conteniendo las raíces de f'. Observa que el comando Raíz aplicado a una función polinómica f devuelve todas las raíces como puntos de intersección entre la gráfica de f y el eje X (las raíces de f son números reales y no puntos en el plano)
- Mediante el comando n=Longitud[PuntosRaícesf'] asignamos a n el número de elementos que tiene la lista PuntosRaícesf', o lo que es lo mismo, el número de puntos en la gráfica de f cuya tangente es paralela al eje X.
- Crea ahora una lista, llamada Raícesf', con las raíces de f'; esto es, con las abscisas de los puntos de la lista PuntosRaícesf'. Para ello, debes combinar x() con los comandos Secuencia y Elemento.
- Crea una lista de puntos (llamada Extremos) cuya abscisa sea una raíz de f' (elementos de la lista Raícesf') y cuya ordenada sea la imagen mediante f de esa abscisa (f(elementos de la lista Raícesf')). Observa que has obtenido la misma lista de puntos que, directamente, con el comando Extremo.
- Crea un deslizador j variando desde 1 hasta n con incremento 1.
- Combinando los comandos Tangente y Elemento, define la recta r como la tangente a la curva f en el elemento j-ésimo de la lista Extremos. Cuando recorras el deslizador j obtendrás las rectas tangentes a f en los distintos extremos de la misma.

Guarda la siguiente construcción en el archivo PR03-01-3.1bExtremos.ggb

Prueba con otros polinomios, como $x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.
Si no se actualiza correctamente la vista gráfica, puedes utilizar la opción del menú Vista: `Actualiza Vista Gráfica`.

Guarda la siguiente construcción en el archivo PR03-01-3.1cExtremos.ggb

Puedes, también, aprovechar el archivo creado para obtener los extremos relativos de una función cualquiera. Para ello, debes conocer que el comando Raíz sólo funciona para polinomios y que debes reemplazarlo por
`Raíces[<Función>,<Valor de x Inicial>,<Valor de x Final>]`.

- Vamos a definir un deslizador a con valores comprendidos entre 1 y 20 e incremento 1 y cambiaremos el comando Raíz[f'] por Raíces[f',-a,a].
- El comando directo para obtener los extremos, Extremo[f], lo debes sustituir por Extremo[f,-a,a].

- Podemos escribir el texto Intervalo=[-a,a] haciendo uso de la herramienta insertar texto o mediante el comando
`Texto[ "Intervalo=[" + -a + "," + a + "]" ].`
Observa que el texto entrecomillado aparece tal cual y que la variable a aparece con su valor.

Guarda la siguiente construcción en el archivo PR03-01-3.1dExtremos.ggb
Prueba con distintas funciones como, por ejemplo, $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x-1}$.

Construcción 3.2. *Obtén la recta tangente a la curva* $f(x) = x^3 - 3x$ *cuya pendiente es* 9 *y pasa por el punto* $(0, -16)$*; localiza el punto de tangencia.*

Guarda la siguiente construcción en el archivo PR03-01-3.2aTangente.ggb

- En primer lugar define la función $f(x) = x^3 - 3x$.
- Asigna al punto P las coordenadas $(0, -16)$.
- Sabemos que la recta tangente, r, tiene pendiente 9 y, por tanto, ecuación $y = ax + b$ donde $a = 9$ y b es desconocido. Asigna a la variable a el valor 9, crea un deslizador b con valores comprendidos entre -20 y 20 y a continuación la recta r.
- Llama P' al punto de intersección entre r y el EjeY.
- Desplaza el deslizador b hasta que P' coincida con P y observa cual es la ecuación de la recta r.
- Finalmente, mediante el comando $A = Interseca[r, f, 2]$ obtendrás el punto de intersección de la recta tangente r a la gráfica de f.

Guarda la siguiente construcción en el archivo PR03-01-3.2bTangente.ggb
Prueba con otras funciones, otras pendientes y otros puntos P, como por ejemplo $f(x) = x^3$, pendiente 3 y punto $P = (0, -2)$.

Construcción 3.3. *Analiza la gráfica de la función* $f(x) = \dfrac{2x^2 - 18}{x^2 - 4}$*, determinando el dominio, los puntos de corte con los ejes, los extremos relativos, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento así como los de concavidad y convexidad e intenta hacer una representación en papel de la misma (puedes ocultar la gráfica de* f *en el archivo GeoGebra y posteriormente comparar).*

Guarda la siguiente construcción en el archivo PR03-01-3.3aGrafica.ggb

- En primer lugar introducimos f en la barra de entrada y ocultamos la gráfica.

- La función f tiene imágenes para todos los números reales excepto aquellos que anulen el denominador. Nos ayudaremos de la expresión `Factf(x) = Factoriza[f]` para factorizar f y observar que el denominador se anula en los valores $x = -2$ y $x = 2$. Por tanto, el dominio de f es $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$. Oculta la función $Factf$ ya que es f.

- Los puntos de corte con el eje de abscisas, algebráicamente, se obtienen resolviendo la ecuación $f(x) = 0$. En GeoGebra haremos uso de la expresión `CorteEjeX = {Raíces[f, -100, 100]}` para obtener una lista con los puntos de corte con el eje X en el intervalo $[-100, 100]$.

- Los puntos de corte con el eje de ordenadas, algebráicamente, se obtienen haciendo $x = 0$. En GeoGebra haremos uso de la expresión `CorteEjeY = {Interseca[f, EjeY]}` para obtener una lista con los puntos de corte con el eje Y.

- Creamos una lista con las asíntotas mediante la expresión `Asíntotas = Asíntota[f]`. Para obtener algebráicamente las asíntotas verticales hay que calcular los límites de $f(x)$ cuando x tiende a los valores -2 y 2 y para obtener las asíntotas horizontales hay que calcular los límites cuando x tiende a $-\infty$ y $+\infty$.

- Creamos una lista con los extremos relativos en el intervalo $[-100, 100]$ mediante la expresión `Extremos={Extremo[f,-100,100]}`. Para obtener algebráicamente los extremos relativos de f hay que encontrar las raíces de la primera derivada f' y aplicar el criterio de la segunda derivada. Con GeoGebra puedes obtener tanto la primera derivada como la segunda, factorizadas, con las expresiones `f'=Factoriza[f'(x)]`, `f''=Factoriza[f''(x)]`.
  Estas derivadas también te servirán para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento así como los de concavidad y convexidad.

- Te puede ayudar para estudiar la función f, definir funciones cuyas gráficas sean trozos de las de f, f' o f''. Por ejemplo, puedes definir
  `f_1=Si[x<-2,f]`,
  `f_2=Si[-2<x<2,f]`,
  `f_3=Si[x>2,f]`,
  `f'_1=Si[x<-2,f']`, etc.

Prueba ahora con otras funciones como

- $f(x) = 3x^4 - 20x^3 - 6x^2 + 60x - 8$,
  (Guarda la construcción en el archivo PR03-01-3.3bGrafica.ggb),

- $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 + x - 2}$,
  (Guarda la construcción en el archivo PR03-01-3.3cGrafica.ggb),

- $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11$,
  (Guarda la construcción en el archivo PR03-01-3.3dGrafica.ggb),

- $f(x) = e^{-x^2}$.
  (Guarda la construcción en el archivo PR03-01-3.3eGrafica.ggb),

3.2. Optimización de magnitudes

Una de las utilidades más interesantes de la derivada de una función consiste la localización de los valores extremos (máximos y mínimos de la función) que nos permiten optimizar magnitudes como el espacio, el tiempo, o la energía necesaria para realizar alguna tarea. En esta sección vamos a estudiar y visualizar mediante Geogebra la optimización de una función dependiente de una variable.

3.2.1. Optimización de la longitud de cable uniendo la parte superior de dos postes al suelo

Supongamos que dos postes de 12 y 28 decímetros de altura distan 30 decímetros y que deseamos conectarlos mediante un cable que esté atado en algún punto del suelo entre ellos. Hay que determinar el punto C del suelo en el que debe amarrarse el cable para que la longitud del mismo sea mínima (figura 3.1).

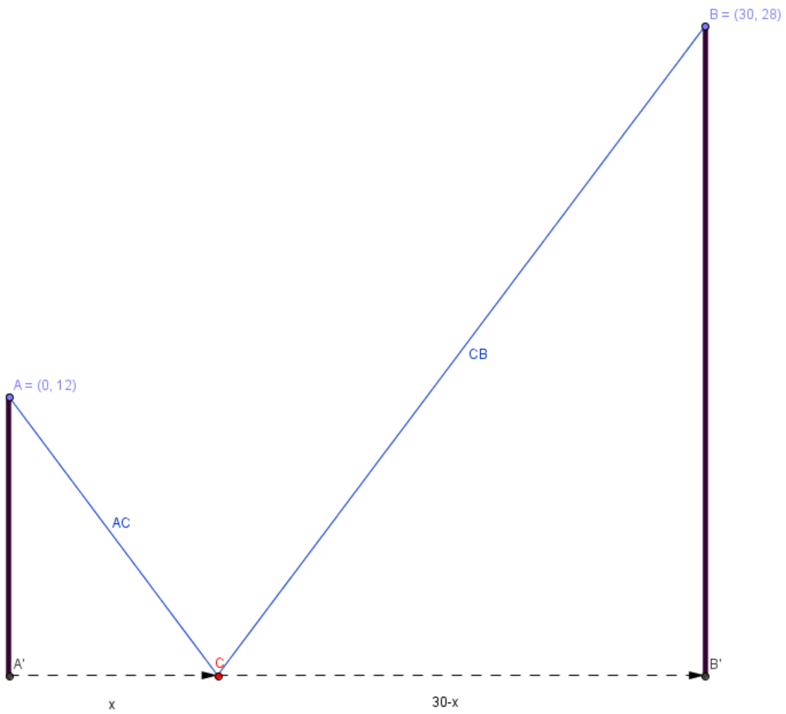


Figura 3.1: Gráfico de los postes.

Vamos a diseñar la construcción de manera que podamos variar las condiciones iniciales, esto es, la altura de los postes y distancia entre ellos.
(Guarda la construcción en el archivo PR03-02-1Postes.ggb),

- En primer lugar definimos $d = 30$ y lo mostramos como un deslizador, valores entre 1y 50 con incremento 1, mostrar rótulo con nombre y valor.

- Definimos `A=Punto[x = 0]` y, de esta manera, podemos deslizar el punto A sobre el eje de ordenadas (recta $x = 0$). Mostramos rotulo con nombre y valor y en Álgebra fijamos el incremento en 1. Selecciona el punto A en la ventana gráfica y muevelo haciendo uso de las flechas de cursor hasta situarlo en la posición $(0, 12)$.

- Definimos `B=Punto[x = d]` y, de esta manera, podemos deslizar el punto B sobre la recta $x = d$. Mostramos rotulo con nombre y valor y en Álgebra fijamos el incremento en 1. Selecciona el punto B en la ventana gráfica y muevelo haciendo uso de las flechas de cursor hasta situarlo en la posición $(30, 28)$.

- Definimos ahora los puntos base de los postes `A’=(x(A),0)` y `B’=(x(B),0)`.

- Creamos el segmento `a=Segmento[A, A’]` que representa al primer poste, le cambiamos el color a marrón y el grosor de trazo a 9. De igual manera definimos el segmento `b=Segmento[B, B’]` y copiamos el Estilo Visual  del segmento anterior.

- Definimos, ahora, el punto C sobre el eje de abscisas mediante `C=Punto[EjeX]` y lo desplazamos hasta un punto cualquiera entre los dos postes. Posteriormente lo redefiniremos para que sea el punto óptimo buscado, en el que debemos atar el cable.

- Definimos, a continuación, los segmentos `AC=Segmento[A,C]` y `CB=Segmento[C,B]` que representan a los cables que unen los postes con el suelo. Llamaremos Longitud a la suma de las longitudes de los segmentos AC y CB, cantidad que debemos minimizar.

- Necesitamos definir una función $l = l(x)$ que exprese la longitud de los segmentos AC y CB en función de x, considerando que las coordenadas del punto C son $(x, 0)$. Hay que aplicar el teorema de Pitágoras a los triángulos $AA'C$ y $BB'C$ y expresar la longitud del poste AA' como $l_{AA'} = y(A)$, la longitud del poste BB' como $l_{BB'} = y(B)$ y la distancia entre ambos postes como d; de este modo la función seguirá siendo válida cuando cambiemos las condiciones iniciales.

  Tras analizar la figura 3.2, obtén la función a minimizar $l(x)$ y restringe su gráfica al intervalo $[0, d]^*$.

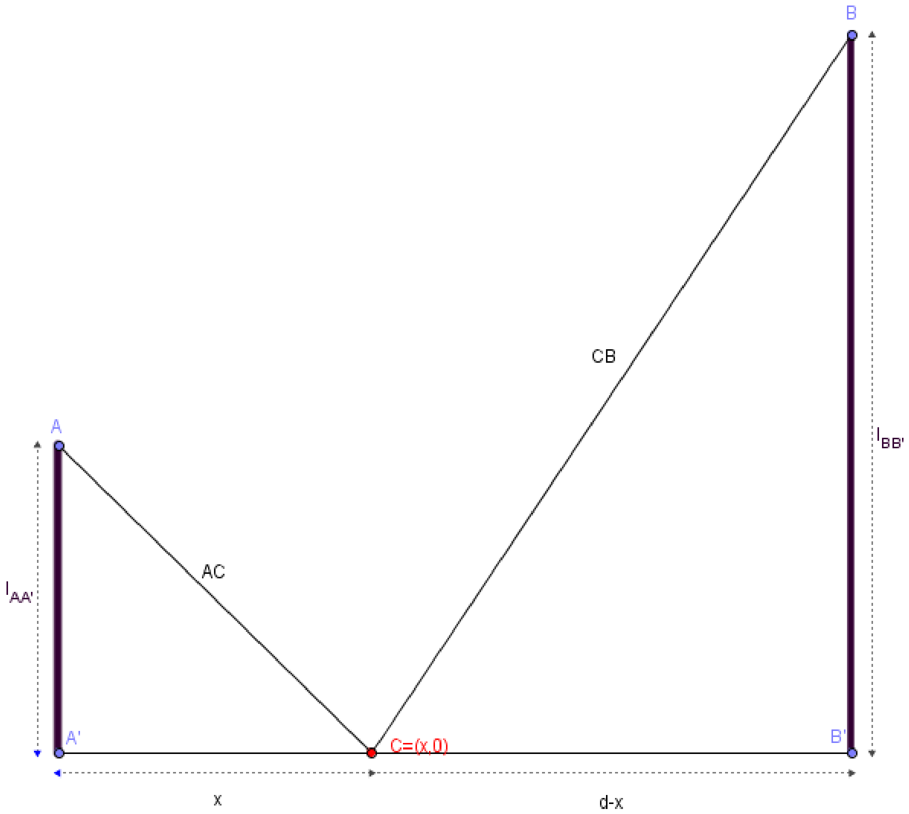


Figura 3.2: Gráfico de los postes. Caso general.

- Podemos saber, mediante el comando `Minl=Extremo[l,0,d]` que en el punto $(9, 50)$ la función l alcanza un mínimo.

- Definimos la derivada de l en el intervalo $[0, d]$ mediante la expresión `l'(x)=Función[Derivada[l],0,d]` y redefinimos el punto C para asignarle el punto de corte de la derivada l' con el eje de abscisas tecleando `C = Interseca[l',EjeX]` o bien `C=Raíces[l'(x), 0, d]`. Recordemos que los extremos se alcanzan en las raíces de la primera derivada.

- Finalmente, si no lo has hecho con anterioridad, crea la variable *Longitud* que contiene la suma de las longitudes de los segmentos AC y CB e inserta el texto Longitud = AC+CB = <objeto Longitud>

De la forma que hemos construido la función, si modificamos d o las longitudes de los postes, seguiremos obteniendo el punto C óptimo y la longitud mínima. Compruebalo y observa dónde se sitúa el punto C cuando los dos postes son de igual longitud.

3.2.2. Optimización de la superficie de una lata de refresco con un volumen concreto

Supongamos que una compañía de refrescos desea sacar al mercado tres nuevos envases con forma cilíndrica (lata) que contengan 25 cl., 33 cl. y 50 cl. Hay que determinar el radio r y la altura h que debe tener cada envase si se pretende que la superficie de la lata sea mínima[1] (figura 3.3).

Figura 3.3: Tamaños de latas de refresco.

Para obtener la función área, $A(r)$, a minimizar debemos recordar que el área de un círculo de radio r viene dada por la expresión πr^2; que la longitud de la circunferencia que envuelve a dicho círculo viene dada por la expresión $2\pi r$ y que el volumen de un cilindro de altura h y radio de una cualquiera de las bases r viene dado por la expresión $\pi r^2 h$ (figura 3.4).

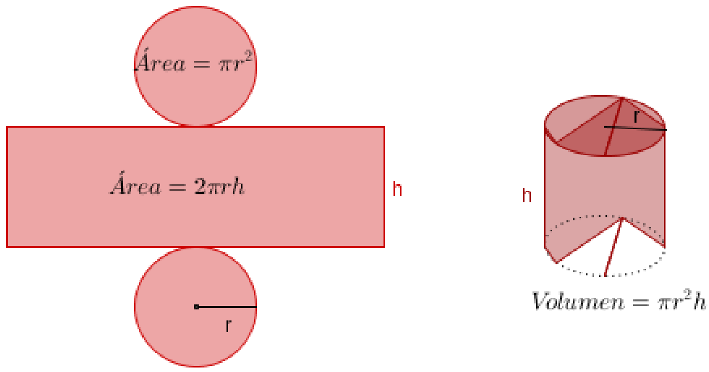


Figura 3.4: Área y volumen de un cilindro.

Antes de iniciar la construcción, debemos tener en cuenta que las medidas

[1] Para simplificar el problema consideraremos que la forma de la lata es un cilindro regular, aún cuando sabemos que los existentes en el mercado presentan algunas deformaciones interesadas.

del radio y de la altura las vamos a dar en $cm.$, por lo que consideraremos el volumen de la lata expresado en cm^3.

Vamos a diseñar la construcción de manera que podamos variar las condiciones iniciales, esto es, el volumen del cilindro.
(Guarda la construcción en el archivo PR03-02-2Latas.ggb),

- Definimos, en primer lugar, $V = 250$ y lo mostramos como un deslizador con valores entre 250 y 500 con incremento 1, mostrar rótulo con nombre y valor. Notemos que $250\ cm^3 = 25\ cl$.

- A continuación debemos determinar la función $A(r)$ que devuelva el área de un cilindro de radio r y volumen V; para ello, debemos tener en cuenta que $V = \pi r^2 h$ y, por tanto, $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$.

- Debemos visualizar la gráfica de $A(r)$ en el intervalo $[0, 100]$ y configurar la vista gráfica[2] de manera que sólo se visualicen los semiejes positivos con una escala `EjeX:EjeY` de $1 : 50$.

- Ahora encontraremos el mínimo relativo de $A(r)$ haciendo uso del comando `Extremo` o bien encontrando las raíces de $A'(r)$.

- Llama M al punto en el que la gráfica de $A(r)$ alcanza el mínimo. Llama r_0 al valor que hace que $A(r)$ sea mínima y h_0 a la altura correspondiente a ese radio r_0 (observa la figura 3.5).

- Define las variables que consideres necesarias para calcular el área del cilindro y escribe un texto en que el aparezcan los datos que se muestran en la figura 3.5; datos que se actualizarán automáticamente cuando desplacemos el deslizador V.

[2]Sitúa el cursor en la ventana gráfica, pulsa el botón derecho del ratón y elige la opción Vista gráfica.

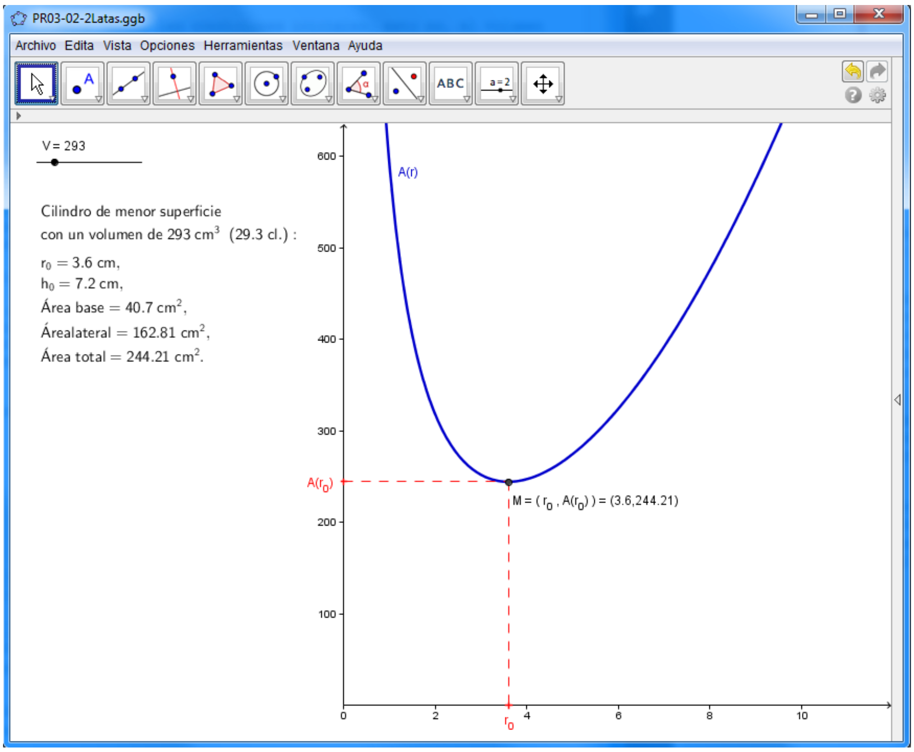


Figura 3.5: Función área de un cilindro.

Observa que en la gráfica 3.5 se ha obtenido el radio r_0 y la altura h_0 que minimizan la superficie de una lata que contenga 29.3 *cl*. Obtén esos valores para los tres tamaños de bote que tiene contemplado fabricar la compañía de refrescos desplazando el deslizador V hasta las posiciones pertinentes.

A la vista de los resultados que has obtenido y conociendo que las medidas de las latas de 33 *cl*. que encontramos en el mercado son $r_0 = 3.25$ *cm*., $h_0 = 11.5$ *cm*. ¿crees que en el diseño de los botes existentes en el mercado se han considerado otros criterios como la ergonomía (que se adapte bien a la mano), el espacio ocupado en el frigorífico, etc. por encima de la minimización de la superficie del bote?

Notas

[*]Intenta obtener la función $l = l(x)$ antes de copiar la siguiente expresión en la barra de entrada `@l(x)=Función[sqrt(l_{AA'}^2+x^2)+sqrt((d-x)^2+l_{BB'}^2),0,d]@`.

Práctica 4

Sumas de Riemann. Áreas.

Temporización

Esta práctica debe realizarse en dos sesiones de 2 horas presenciales.

- La primera sesión presencial debe dedicarse a las secciones 4.1 y 4.2.
- La segunda sesión presencial debe dedicarse a las secciones 4.3 y 4.4.

Si acabaras la tarea programada antes del tiempo estimado, debes pasar a la siguiente actividad programada. Por el contrario, si no acabaras en en tiempo programado deberás dedicar el tiempo que necesites para acabar la tarea en horas no presenciales.

Cada construcción deberás grabarla en un archivo con el nombre que se indique. Para empezar debes crear una carpeta cuyo nombre debe ser PRACTICA4 en la que almacenarás todas las construcciones de esta práctica.

4.1. Sumas de Riemann

Dada una función $f(x)$ positiva $\forall x$ en el intervalo $[a, b]$, vamos a crear una construcción GeoGebra que muestre y calcule el área exacta bajo ese intervalo. Para ello vamos a calcular, con un número variable de n rectángulos, las sumas izquierda y derecha de Riemann, que compararemos con el valor de la integral.

En primer lugar, vamos a escribir las sumas izquierda y derecha de Riemann y la nomenclatura que vamos a utilizar:

- Suma izquierda de Riemann
$$\Delta x \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} I_i.$$
- Suma derecha de Riemann
$$\Delta x \sum_{i=1}^{n} f(x_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x f(x_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n} D_i.$$

Donde I_i y D_i son rectángulos de base Δx y de altura $f(x_i)$ en los I_i y $f(x_{i+1})$ en los D_i.

Advierte que $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ y que $a = x_1$ y $b = x_{n+1}$.

Parte 1. Área bajo la curva: Cálculo de la integral y superficie S.

Guarda la siguiente construcción en el archivo PR04-01-1aRieman.ggb

Vamos a mostrar gráficamente la integral definida entre a y b para $f(x)$.

- Establece dos puntos P_a y P_b sobre el eje X que puedan desplazarle únicamente a lo largo del eje. Como rótulo deben mostrar los subtítulos a y b. Los auténticos números a y b (operables pero no visibles gráficamente) los obtendremos algebraicamente con la función $x()$ aplicada a los puntos: `a=x(P_a)` y `b=x(P_b)`.

- Introducimos la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2x + 5$ que usaremos como ejemplo inicial sobre la que realizar la construcción.

- Debemos buscar un intervalo $[a, b]$ en el que la función sea siempre positiva. Desplaza sobre el eje X los puntos asociados a a y b hasta que coincidan con los valores -1 y 2.

- Utilizamos el comando `Integral[]` para calcular $F(x)$ como la integral indefinida de $f(x)$ (`F(x)=Integral[f(x)]`). No dejes $F(x)$ visible, no nos interesa su gráfica.

- Muestra con dos textos la función $f(x)$ y su integral. Para ello usaremos en los dos casos texto con fórmula LaTeX. Un desplegable al lado de esa opción te permitirá obtener el símbolo de la integral o cualquier otro. Recuerda añadir una constante c a la función F al escribir el texto de la integral: `"\int f(x)dx="+F+"+c"`.

- Calcula la superficie S como la integral definida de $f(x)$ entre a y b: `S=Integral[f(x),a,b]`.

- No dejes que S muestre ningún rótulo, mejor crea un texto que describa S como la integral definida de $f(x)$ y su valor. Ponle el mismo color al texto que a S (usa el botón para copiar formato). Fíjate como queda la construcción en la imagen 4.1.

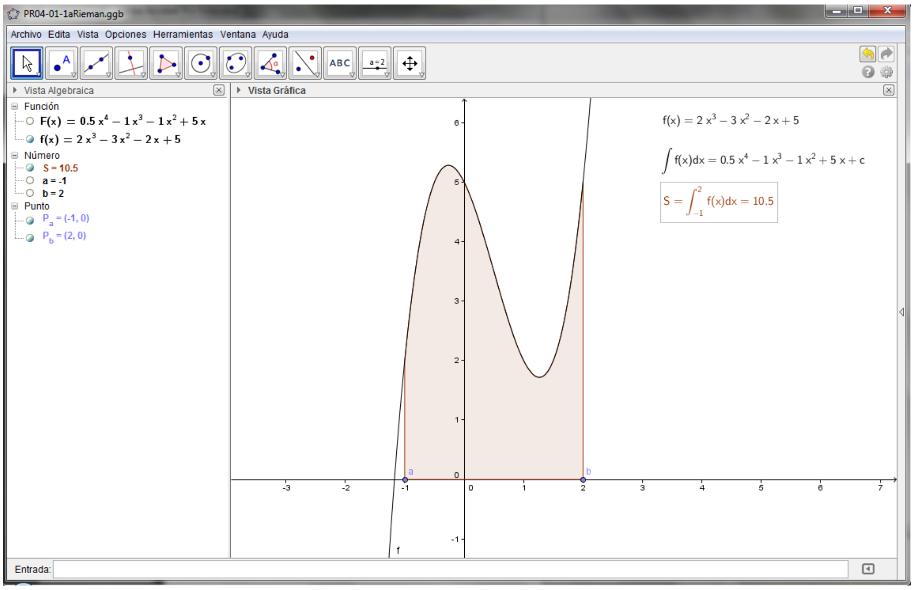


Figura 4.1: Integral.

- Comprueba que si cambias los valores de a y b, también lo hacen en el texto que describe la integral. Observa también cómo evoluciona el valor de S cuando el valor de a es menor que -1.17 [1] y relacionalo con la definición de integral definida: si f es positiva y negativa en el intervalo $[a, b]$ la integral $\int_a^b f$ representa la diferencia entre las áreas de las regiones que quedan por encima y por debajo del eje de abscisas.

Parte 2. Suma izquierda de Riemann. Guarda la siguiente construcción en el archivo PR04-01-1bRieman.ggb ("Guardar como" el archivo anterior y continuar)

Calcularemos la suma izquierda de Riemann y la compararemos con la integral.

- Los rectángulos izquierda están definidos por los puntos $X_i = (x_i, 0)$, $A_i = (x_i, f(x_i))$, $B_i = (x_{i+1}, f(x_i))$ y $X_{i+1} = (x_{i+1}, 0)$ (observa la imagen 4.2). No podremos generar series de puntos X_i, A_i y B_i hasta que no hayamos dividido el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, obteniendo las necesarias series de abscisas x_i y ordenadas $f(x_i)$.

[1] valor aproximado de la primera coordenada del punto de corte de la gráfica de f con el eje de abscisas

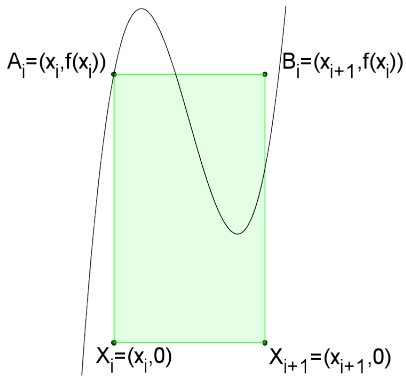


Figura 4.2: Rectángulo Izquierda.

- El valor n lo controlaremos creando un deslizador de 1 a 99 y 1 como incremento. Usaremos inicialmente el valor $n = 3$.
- Definiremos Δx en términos de a, b y n usando la expresión anteriormente indicada.
- Usaremos el comando `x_i=Secuencia[i,i,a,b,Δx]` para generar la secuencia con los valores x_i.
- Ahora tenemos una lista llamada x_i que representa a la serie del mismo nombre. Cambia en el deslizador el valor de n y observa cómo varía la serie x_i que siempre tiene $n + 1$ elementos. Vuelve a ajustar n a 3. Con esta lista x_i podemos operar para obtener valores sueltos, o nuevas listas. Por ejemplo, para obtener la serie de valores $f(x_i)$ crearemos una lista llamada fx_i resultado de operar la lista x_i con la función $f(x)$:

  `fx_i=f(x_i)`.
- Ya disponemos de dos series (x_i y fx_i) con $n+1$ valores, que varían conforme cambiamos el número n de subintervalos. En este momento estamos en disposición de definir las series de puntos X_i, A_i y B_i necesarias para los rectángulos izquierda.
- Definiremos X_i volviendo a invocar `Secuencia[]` combinado con el comando `Elemento[]` (fíjate que son $n + 1$ los puntos X_i):

  `X_i=Secuencia[(Elemento[x_i,i],0),i,1,n+1]`.
- De forma similar crearemos los n vértices superior izquierda A_i de los n rectángulos (observa la imagen 4.2):

  `A_i=Secuencia[(Elemento[x_i,i],Elemento[fx_i,i]),i,1,n]`.
- Haz lo mismo con los vértices superior derecha B_i. Fíjate bien como deben ser en la imagen 4.2. Observa que como en el caso de A_i, el índice va de 1 a n y no a $n+1$. Como ya conoces, si en la barra de entrada pulsas la tecla de cursor arriba puedes editar la última expresión algebraica introducida. Puedes buscar y editar con las teclas arriba y abajo la expresión que te interese y aprovecharla para introducir una nueva línea algebraica.

- Prueba a mostrar y ocultar las series de puntos X_i, A_i y B_i por separado para identificar sus posiciones y comprobar que has construido bien las secuencias. Con valores de n pequeños (de 2 a 4) no es difícil hacer la comprobación.

- Para obtener los rectángulos I_i debemos usar el comando `Polígono[]` con los puntos X_i, A_i, B_i, X_{i+1} y vuelta al punto X_i. Pero el comando `Polígono[]` no nos permite operar directamente con listas y obtener una serie de polígonos I_i tan fácilmente como obtuvimos los valores de $f(x_i)$. Tendremos que volver a usar el comando `Elemento[]`. Así que, antes de crear la serie de rectángulos I_i completa, puede ser interesante que crees sólo un rectángulo individual para probar, por ejemplo, completando la expresión que aquí ves para I_2:

  `Polígono[Elemento[X_i,2],Elemento[A_i,2]...Elemento[X_i,2]].`

- Comprueba que el rectángulo de prueba es correcto y bórralo. Aprovecha su expresión para editar la correspondiente a la secuencia cambiando el valor 2 por la variable i de la secuencia que va de 1 a n:

  `Secuencia[Polígono[Elemento[X_i,i]...Elemento[X_i,i]],i,1,n].`

- Suma en S_I el valor de las áreas de los rectángulos I_i haciendo uso del comando `S_I=Suma[I_i]`.

- Usando LaTeX, crea un texto que muestre el sumatorio y el valor de S_I. Escoge un color (un verde más vivo, por ejemplo) y asígnaselo a I_i, S_I y el texto. Si ocultas los puntos X_i, A_i y B_i el gráfico resulta menos recargado (figura 4.3):

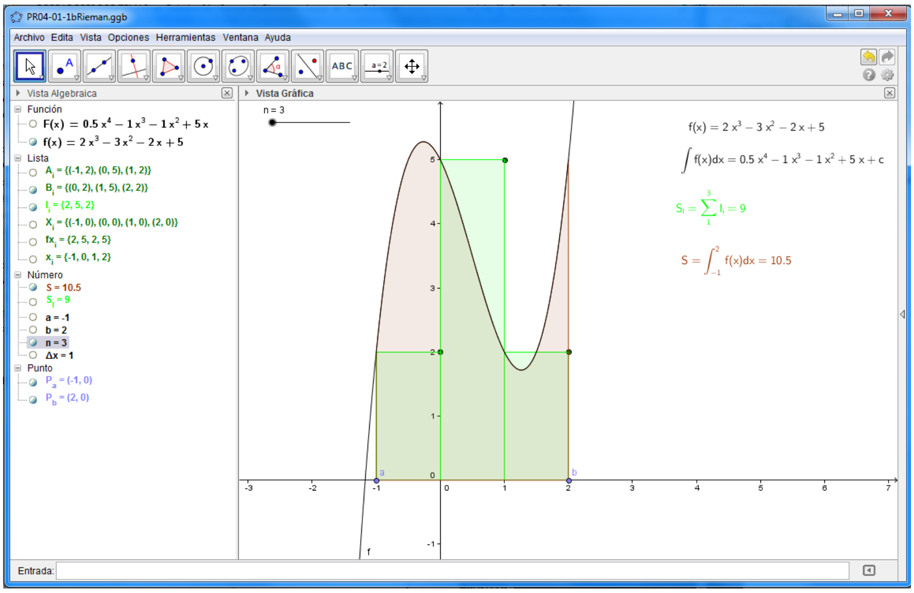


Figura 4.3: Suma izquierda de Riemann.

- Aumenta el valor de n y averigua si el valor del sumatorio consigue igualar en algún momento el de la integral.

- Si has hecho correctamente el texto del sumatorio debe mostrar el valor de n en en su expresión.

Parte 3. Suma derecha de Riemann. Guarda la siguiente construcción en el archivo PR04-01-1cRieman.ggb ("Guardar como" el archivo anterior y continuar)

Añadimos la suma derecha de Riemann y volvemos a comparar.

- Los rectángulos derecha vienen definidos por los puntos $X_i = (x_i, 0)$, $A'_i = (x_i, f(x_{i+1}))$, $B'_i = (x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ y $X_{i+1} = (x_{i+1}, 0)$ como se muestra en la imagen 4.4:

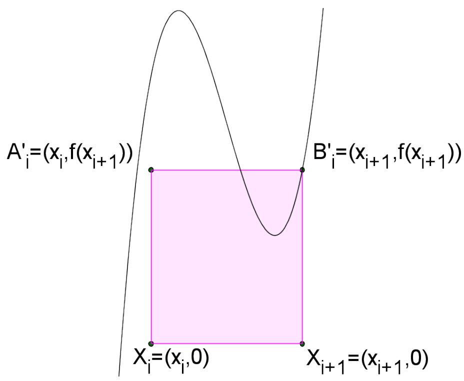


Figura 4.4: Rectángulo Derecha.

- Creamos, de forma similar a como lo hicimos con las sumas izquierda, los n vértices superior izquierda A'_i y los n superior derecha B'_i. Fíjate bien en la imagen 4.4 para crearlos.

- Mostrar y ocultar por separado las series de puntos A'_i y B'_i para comprobar que están bien.

- Define los rectángulos D_i con los puntos X_i, A'_i, B'_i y X_{i+1} de forma similar a como hiciste con I_i.

- Suma en S_D el valor de los D_i rectángulos. Crea un texto describiendo el sumatorio y el valor de S_D y ponlo todo de un mismo color (violeta, por ejemplo). Aumenta el valor de n y realiza las mismas búsquedas y comprobaciones que en la suma izquierda. El resultado debe ser similar al que se muestra en la figura 4.5).

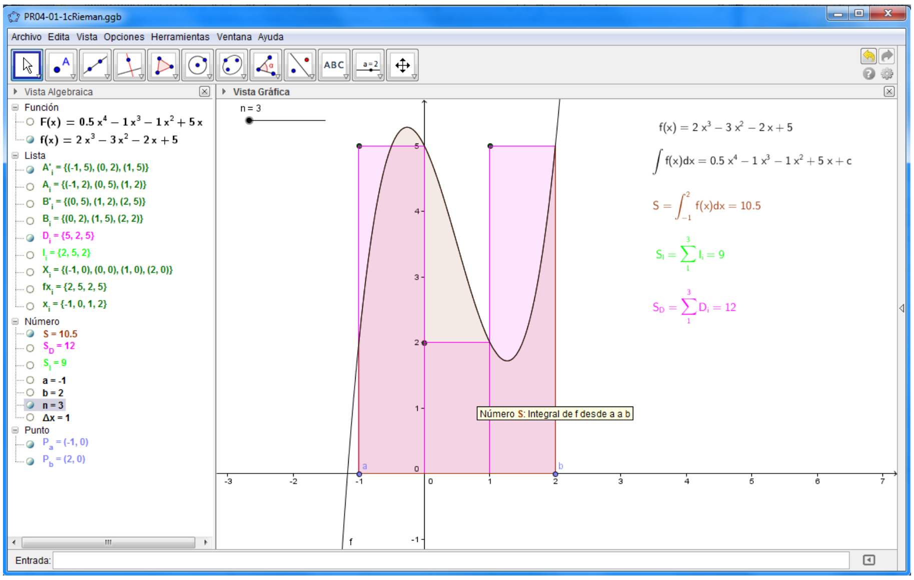


Figura 4.5: Suma derecha de Riemann.

4.2. Área bajo una curva

Guarda la siguiente construcción en el archivo PR04-02-1Areabajocurva.ggb

En esta sección vamos a visualizar el área bajo una curva mediante la integral definida.

- Vamos a definir,en primer lugar, dos variables k_x y k_y que nos van a permitir modificar la función que vamos a estudiar, $f(x) = xe^{-x}$, de manera que se produzca un desplazamiento horizontal (k_x) o vertical (k_y) de la gráfica. Teclea para ello `k_x=0` y `k_y=0` y a continuación muestra objeto y rótulo para ambos deslizadores; los valores de intervalo entre -5 y 5 con incremento 0.1 nos pueden servir.

- Definimos, ahora, la función $f(x) = (x - k_x)e^{-(x-k_x)} + k_y$ introduciendo las variables k_x y k_y que nos van a permitir los desplazamientos de la gráfica
  `f(x) = (x - k_x)e^(-(x -k_x )) + k_y`

- Definimos, a continuación, dos puntos, A y B, sobre el eje X; para A debemos mostrar el subtítulo x_A y para B el subtítulo x_B. Desplaza los puntos hasta situarlos en los valores: $A = (0, 0)$ y $B = (1, 0)$, cambia el color de f a azul, grosor 3 y muestra nombre y valor, tal y como se muestra en la figura 4.6.

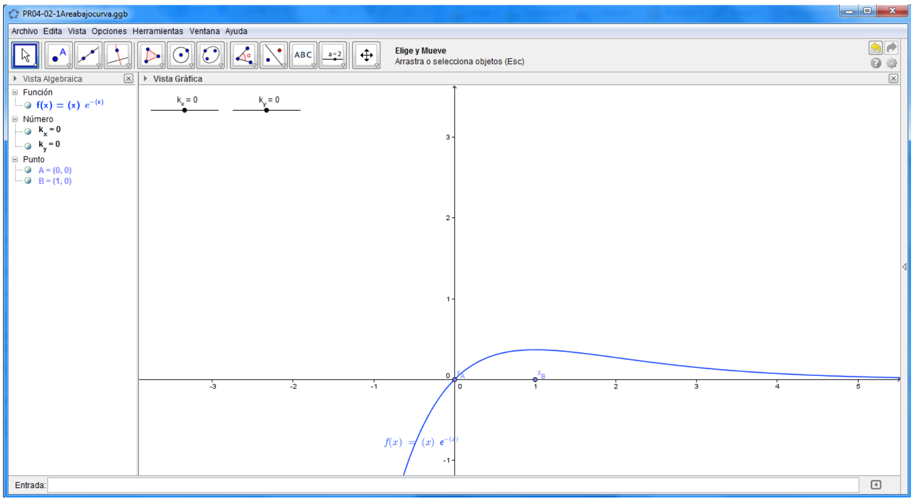


Figura 4.6: Gráfica de $f(x) = xe^{-x}$

- Vamos a asignar a las variables x_A y x_B los valores de las abscisas de A y B, respectivamente, haciendo uso de `x()`.

- Ahora vamos a asignar a la variable $Area_f$ el valor de la integral de f entre x_A y x_B
`Area_f= Integral[f, x_A, x_B]`.

- Crea una casilla de control para mostrar/ocultar objetos y selecciona $Area_f$ para mostrar y ocultar.

- Inserta un texto LaTex en el que se muestre la integral de f con los extremos de integración y el área de la curva; tal y como se muestra en la figura 4.7. Comprueba que al tiempo que desplazamos los puntos A y B sobre el eje X, se actualizan los valores de x_A y x_B en el texto $\int_{x_A}^{x_B}$. No olvides fijar tanto la casilla como el texto, para que no se muevan del sitio.

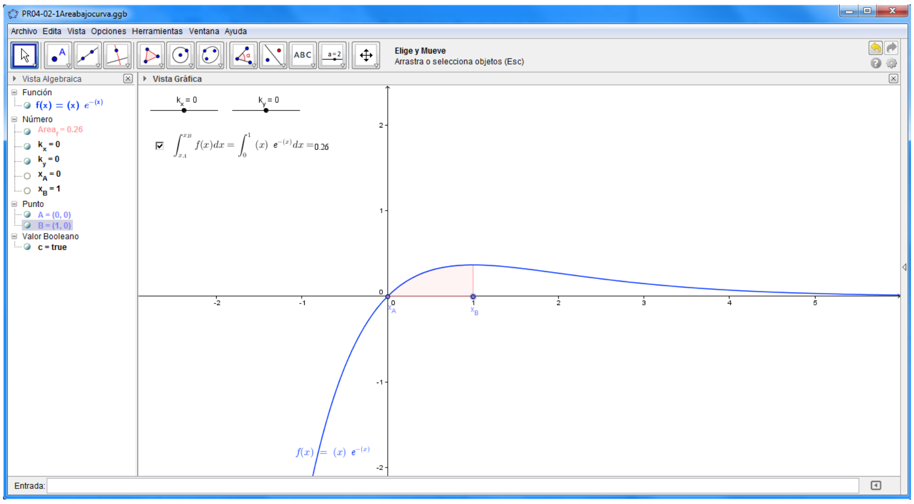


Figura 4.7: Gráfica de $f(x) = xe^{-x}$ y área entre x_A y x_B

- Ahora vamos a mover la gráfica hacia arriba, desplazando el deslizador k_y hasta el valor 1. Observa que el área se ha incrementado en 1[2]. Si desplazas k_y a valores negativos (por ejemplo, hasta -1, observarás que el área se considera negativa.

- Sitúa k_y en el valor 0 y desplaza ahora k_x hacia valores negativos y hacia valores positivos y observa cómo varían tanto la función f como el área comprendida entre las rectas $y = x_A$ e $y = x_B$.

- Habrás observado que hay momentos en el que el área es considerada positiva en un intervalo y en otro negativa, dependiendo de que la gráfica de f esté por encima o por debajo del eje de abscisas. Sitúa k_x y k_y en 0 y desplaza el punto A hasta que $x_A = -0.5$. Desplaza ahora el punto B hasta que el área sea 0 (teniendo en cuenta el redondeo que estemos utilizando)

- Vuelve a situar los puntos A y B en las posiciones iniciales $(0, 0)$ y $(1, 0)$ y observa el valor de la integral $\int_0^1 f(x)dx$. Intercambia la posición de los los puntos A y B, situando A en la posición $(1, 0)$ y B en la posición $(0, 0)$; observa el valor de la integral $\int_1^0 f(x)dx$ y revisa las propiedades de la integral definida en los apuntes de teoría.

- Vuelve a situar los puntos A y B en las posiciones iniciales $(0, 0)$ y $(1, 0)$ y define una nueva función g como `g(x) = abs(f(x))`. Cambia el color de g a verde, grosor 3 y muestra nombre y valor.

- Asigna a la variable $Area_g$ el valor de la integral de g entre x_A y x_B
`Area_g= Integral[g, x_A, x_B]`.

- Crea una casilla de control para mostrar/ocultar objetos y selecciona g y $Area_g$ para mostrar y ocultar.

[2] Área del cuadrado de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1))$, $(0, 1)$.

- Inserta un texto LaTex en el que se muestre la integral de g con los extremos de integración y el área de la curva; tal y como se muestra en la figura 4.8. Comprueba que al tiempo que desplazamos los puntos A y B sobre el eje X, se actualizan los valores de x_A y x_B en el texto $\int_{x_A}^{x_B}$. No olvides fijar tanto la casilla como el texto, para que no se muevan del sitio.

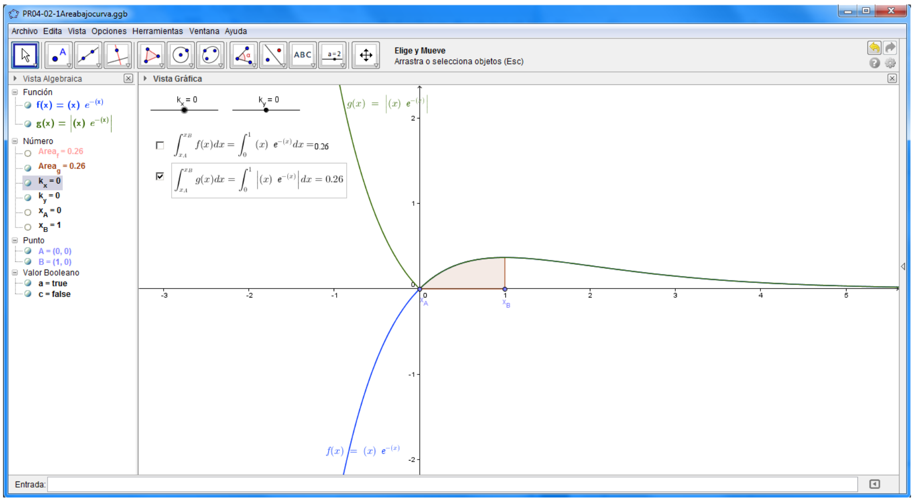


Figura 4.8: Gráficas de $f(x) = xe^{-x}$ y $g(x) = |xe^{-x}|$ y áreas entre x_A y x_B

- Para finalizar, prueba con las distintas posibilidades que te permite el archivo construido y revisa las propiedades de la integral definida en los apuntes de teoría.

4.3. Área entre dos curvas que se cortan

Guarda la siguiente construcción en el archivo PR04-03-1aAreaentrecurvas.ggb

En esta sección vamos a visualizar el área entre dos curvas mediante la integral definida.

Vamos a definir dos funciones, $f(x) = -x^2 + 1$ y $g(x) = x^2 - 1$ y a calcular el área comprendida entre sus gráficas.

- A la vista de las gráficas, podemos afirmar que existen dos puntos de corte entre las dos curvas (A y B) que obtendremos mediante los comandos `A=Interseca[f, g, 1]` y `B=Interseca[f, g, 2]`.

- Asignemos a x_A la abscisa del punto A y a x_B la abscisa del punto B.

- Mediante el comando `Integral[<Función>,<Valor Inicial de x>,<Valor Final de x>]`, asigna a $Area_f$ el valor del área comprendida entre la curva f y las rectas $x = x_A$ $x = x_B$. Haz lo propio con $Area_g$.

- El área de la región comprendida entre f y g se puede obtener con $\displaystyle\int_{x_A}^{x_B} |f(x) - g(x)|dx$. Así pues, define la función `h(x)=abs(f(x)-g(x))` y `Area_{fg}=Integral[h,x_A,x_B]`.

- Crea una casilla de control para mostrar/ocultar objetos y selecciona $Area_f$ para mostrar y ocultar.

- Crea una casilla de control para mostrar/ocultar objetos y selecciona $Area_g$ para mostrar y ocultar.

- Crea una casilla de control para mostrar/ocultar objetos y selecciona h y $Area_{fg}$ para mostrar y ocultar.

- Inserta, para cada casilla, un texto LaTex en el que se muestre la integral de f, g y h con los extremos de integración y el área de la curva; tal y como se muestra en la figura 4.9.

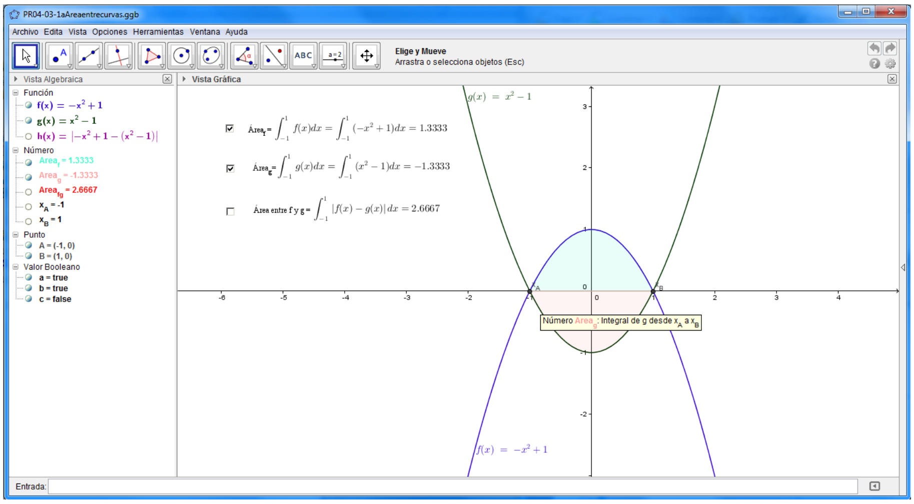


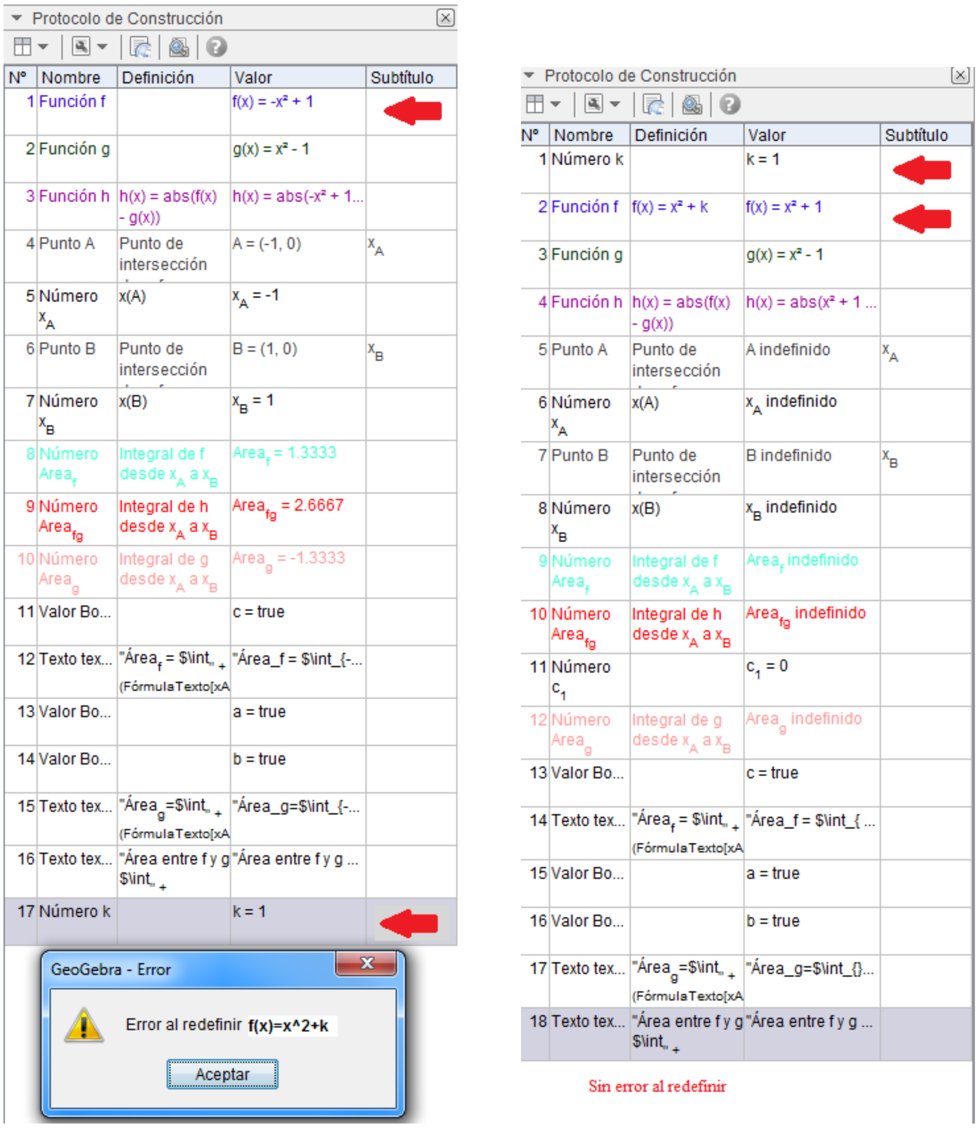
Figura 4.9: Gráficas de $f(x) = -x^2 + 1$, $g(x) = x^2 - 1$, $h(x) = \left|-x^2 + 1 - (x^2 - 1)\right|$ y áreas entre x_A y x_B

- Oculta y muestra las distintas áreas y observa los valores numéricos.

Guarda la siguiente construcción en el archivo PR04-03-1bAreaentrecurvas.ggb

- Puedes modificar el archivo anterior definiendo una variable $k = 1$, a continuación muestra objeto y rótulo para el deslizador que se crea (los valores de intervalo entre -5 y 5 con incremento 0.1 nos pueden servir) y redefiniendo la función f con `f(x) = -x^2 + k`.

  Para evitar el error que se produce (Error al redefinir) debes mostrar el protocolo de construcción y subir el objeto k hasta una posición previa al objeto Funciónf. Observa la figura 4.10.



Protocolo de Construcción

Nº	Nombre	Definición	Valor	Subtítulo
1	Función f		f(x) = -x² + 1	
2	Función g		g(x) = x² - 1	
3	Función h	h(x) = abs(f(x) - g(x))	h(x) = abs(-x² + 1...	
4	Punto A	Punto de intersección	A = (-1, 0)	x_A
5	Número x_A	x(A)	x_A = -1	
6	Punto B	Punto de intersección	B = (1, 0)	x_B
7	Número x_B	x(B)	x_B = 1	
8	Número $Area_f$	Integral de f desde x_A a x_B	$Area_f$ = 1.3333	
9	Número $Area_{fg}$	Integral de h desde x_A a x_B	$Area_{fg}$ = 2.6667	
10	Número $Area_g$	Integral de g desde x_A a x_B	$Area_g$ = -1.3333	
11	Valor Bo...		c = true	
12	Texto tex...	"Área$_f$ = $\int... (FórmulaTexto[xA	"Área_f = $\int_{-...	
13	Valor Bo...		a = true	
14	Valor Bo...		b = true	
15	Texto tex...	"Área$_g$=$\int... (FórmulaTexto[xA	"Área_g=$\int_{-...	
16	Texto tex...	"Área entre f y g $\int...	"Área entre f y g ...	
17	Número k		k = 1	

GeoGebra - Error

Error al redefinir **f(x)=x^2+k**

Aceptar

Protocolo de Construcción

Nº	Nombre	Definición	Valor	Subtítulo
1	Número k		k = 1	
2	Función f	f(x) = x² + k	f(x) = x² + 1	
3	Función g		g(x) = x² - 1	
4	Función h	h(x) = abs(f(x) - g(x))	h(x) = abs(x² + 1 ...	
5	Punto A	Punto de intersección	A indefinido	x_A
6	Número x_A	x(A)	x_A indefinido	
7	Punto B	Punto de intersección	B indefinido	x_B
8	Número x_B	x(B)	x_B indefinido	
9	Número $Area_f$	Integral de f desde x_A a x_B	$Area_f$ indefinido	
10	Número $Area_{fg}$	Integral de h desde x_A a x_B	$Area_{fg}$ indefinido	
11	Número c_1		c_1 = 0	
12	Número $Area_g$	Integral de g desde x_A a x_B	$Area_g$ indefinido	
13	Valor Bo...		c = true	
14	Texto tex...	"Área$_f$ = $\int... (FórmulaTexto[xA	"Área_f = $\int_{ ...	
15	Valor Bo...		a = true	
16	Valor Bo...		b = true	
17	Texto tex...	"Área$_g$=$\int... (FórmulaTexto[xA	"Área_g=$\int_{}...	
18	Texto tex...	"Área entre f y g $\int...	"Área entre f y g ...	

Sin error al redefinir

Figura 4.10: Error al redefinir $f(x) = -x^2 + k$ y forma de evitarlo.

- Desliza k hasta los valores 5 y -5 y observa tanto los valores numéricos de las áreas como las zonas sombreadas al mostrar/ocultar (figura 4.11).

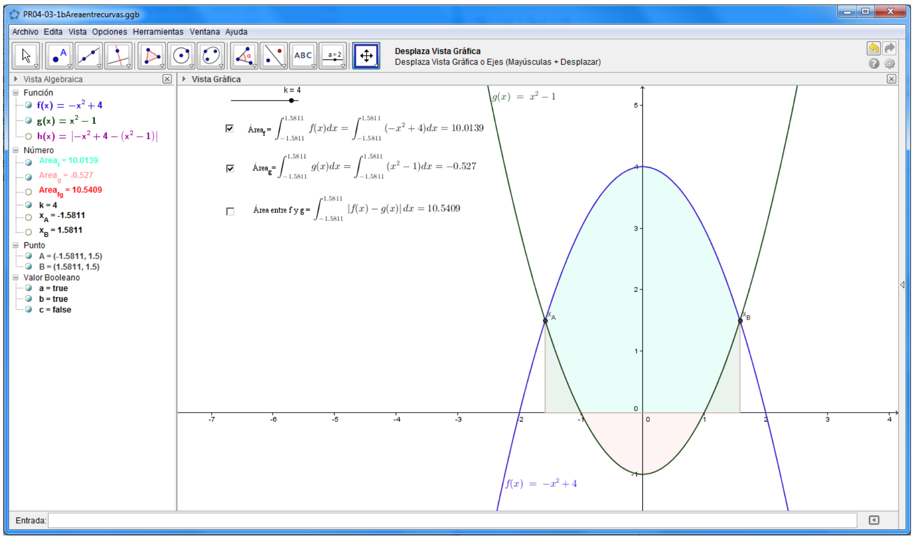


Figura 4.11: Gráficas de $f(x) = -x^2 + k$ $(k = 4)$, $g(x) = x^2 - 1$, $h(x) = \left|-x^2 + 1 - (x^2 - 1)\right|$ y áreas entre x_A y x_B

Puede ocurrir que las dos curvas se corten en más de un punto en cuyo caso sigue siendo válida la expresión $\displaystyle\int_{x_A}^{x_B} |f(x) - g(x)|dx$ para obtener el área de la región comprendida entre f y g.

Guarda la siguiente construcción en el archivo PR04-03-2Areaentrecurvas.ggb

- Define `f(x)=Función[sin(x),0,8]`, `g(x)=Función[cos(x),0,8]` y `h(x)=Función[abs(f(x) - g(x)), 0, 8]`
- Mediante el comando `Interseca[f,g,0,8]`, puedes obtener los tres puntos de intersección (A,B y C) entre f y g en el intervalo $[0, 8]$
- Define `x_A=x(A)` y `x_C=x(C)`.
- Define `Area_f=Integral[f,x_A,x_C]`, `Area_g=Integral[g,x_A,x_C]` y `Area_{fg}=Integral[h,x_A,x_C]`.
- Muestra y oculta las distintas áreas y observa los valores numéricos.

4.4. Primitivas de funciones racionales

En esta sección vamos a utilizar GeoGebra como herramienta para obtener la expresión algebraica y la gráfica de la primitiva de una función racional.

El cálculo de integrales de la forma

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx,$$

con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios con coeficientes reales y sin factores comunes se realiza habitualmente mediante una técnica en la que $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se descompone como suma de fracciones algebraicas simples cuya integración es más sencilla. Revisa la sección de teoría dedicada a este tipo de primitivas antes de empezar a desarrollar la actividad.

El comando `FraccionesParciales[]` devuelve (si es posible) la descomposición del cociente $\frac{P(x)}{Q(x)}$ como suma de fracciones algebraicas simples.

Vamos a obtener la primitiva de $f(x) = \frac{x^3}{x^4-16}$ haciendo uso de GeoGebra. Guarda la siguiente construcción en el archivo PR04-04-1aPrimitiva.ggb

- En primer lugar debes definir la función f (asignale color azul y grosor 3).

- Mediante el comando `Asíntotas=Asíntota[f]` podemos obtener una lista con las asíntotas verticales y horizontales de f. Estas asíntotas nos sirven de ayuda para tener una visión más precisa sobre la gráfica de f.

- Con el comando `Intf=Integral[f]` podemos obtener directamente una primitiva de f (asignale color rojo y grosor 3). Observa que la función que nos devuelve (`Intf`) solo está definida en el intervalo $]2, +\infty[$ ya que GeoGebra considera

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln u(x) + C$$

  en lugar de

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln |u(x)| + C.$$

- Con el comando `fFrac=FraccionesParciales[f]` podemos descomponer f como suma de fracciones algebraicas simples y aplicar a cada una de ellas la integral que corresponda. Comprueba que la gráfica de `fFrac` coincide con la de f y ocultala.

- Para obtener la primitiva de f en todo el dominio de f ($\mathbb{R} - \{-2, 2\}$), debemos fijarnos en la descomposición obtenida en `Intf` y asignar manualmente la función valor absoluto donde corresponda. En nuestro ejemplo teclearemos
  `Intfentera(x)=(ln(x^2+4)+ln(abs(x-2))+ln(abs(x+2)))/4`
  para obtener la primitiva de f en $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

- Crea sendas casillas de control para mostrar y ocultar las funciones f, `Intf` y `Intfentera` añadiendo los textos que se muestran en la figura 4.12. No olvides fijar tanto las casillas como los textos para que no se desplacen o alteren[3].

[3]Casilla de control fija , objeto fijo y posición absoluta en pantalla.

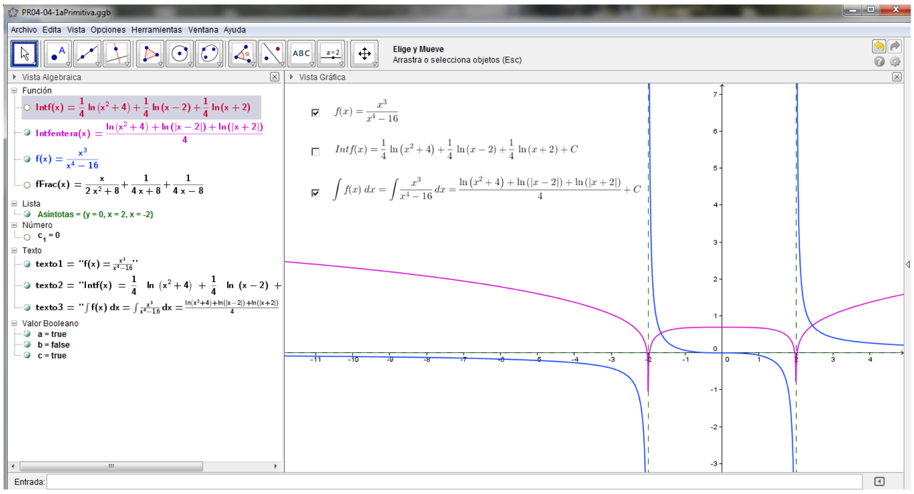


Figura 4.12: Integral indefinida de $f(x) = \frac{x^3}{x^4-16}$

- Finalmente, puedes aplicar las propiedades de los logaritmos para simplificar[4] **Intfentera**. Llama $h(x)$ a la función simplificada y crea una casilla de control y un texto para ella al igual que has hecho con las tres funciones anteriores (comprueba que la gráfica de h coincide con la de **Intfentera** y observa la figura 4.13).
  Guarda la construcción en el archivo PR04-04-1bPrimitiva.ggb

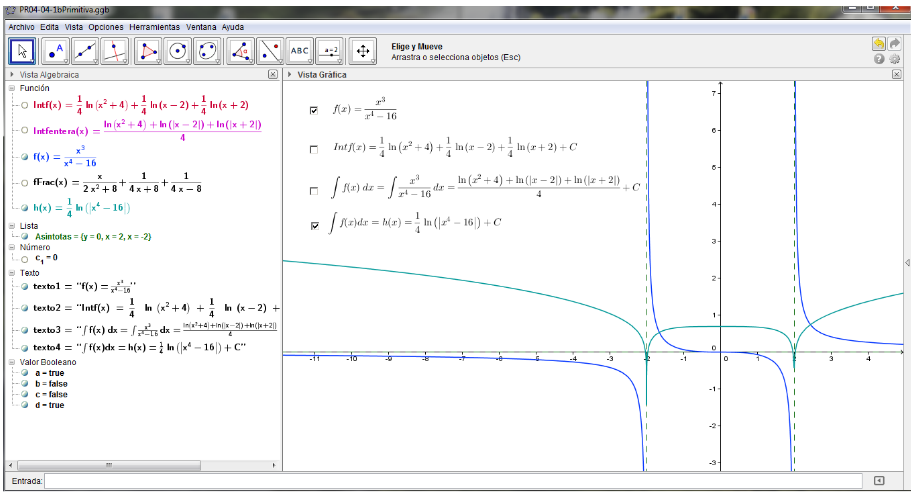


Figura 4.13: Integral indefinida, simplificada, de $f(x) = \frac{x^3}{x^4-16}$

.

[4]GeoGebra proporciona el comando Simplifica[] para este menester con un resultado poco satisfactorio para este ejemplo.

Puedes repetir el ejemplo anterior para otras funciones racionales como:

- $f(x) = \frac{-x-1}{x^3-x^2}$,
  Guarda la construcción en el archivo PR04-04-2Primitiva.ggb
- $f(x) = \frac{5x-2}{2x^2-3x-5}$,
  Guarda la construcción en el archivo PR04-04-3Primitiva.ggb
- $f(x) = \frac{3x^2+3x+1}{x^3+2x^2+2x+1}$,
  Guarda la construcción en el archivo PR04-04-4Primitiva.ggb

Práctica 5

Resolución de ecuaciones de una variable

Temporización

Esta práctica debe realizarse en dos sesiones de 2 horas presenciales.

- La primera sesión presencial debe dedicarse a la sección 5.1 y al inicio de la sección 5.2.
- La segunda sesión presencial debe dedicarse a las secciones 5.2, 5.3 y 5.4.

Si acabaras la tarea programada antes del tiempo estimado, debes pasar a la siguiente actividad programada. Por el contrario, si no acabaras en en tiempo programado deberás dedicar el tiempo que necesites para acabar la tarea en horas no presenciales.

Cada construcción deberás grabarla en un archivo con el nombre que se indique. Para empezar debes crear una carpeta cuyo nombre debe ser PRACTICA5 en la que almacenarás todas las construcciones de esta práctica.

Introducción

Uno de los problemas más básicos de la aproximación numérica es el cálculo de raíces. Recordemos que una **raíz** de una función $f = f(x)$ es una solución de la ecuación $f(x) = 0$ por lo que también se la conoce como **cero** de la función f.

Para encontrar las raíces de una función $f = f(x)$ existen diversos métodos dependiendo del tipo y complejidad de la ecuación $f(x) = 0$ a resolver. Se pueden usar métodos analíticos como el álgebra elemental o la factorización para las más sencillas y otros, analíticos o numéricos, para las más complejas como las no lineales.

En este práctica vamos a estudiar tres métodos numéricos para la resolución de ecuaciones: el método de la bisección, el de la secante y el de Newton.

5.1. Método de la Bisección

El método de la bisección es uno de los métodos numéricos más elementales que se utilizan para encontrar las raíces o ceros de una función. Se basa en el teorema de Bolzano, que asegura lo siguiente:

Teorema 5.1 (Teorema de Bolzano)**.** *Si la función* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es continua en el intervalo* $[a, b]$ *y cumple que* $f(a)f(b) < 0$ *entonces existe al menos un valor* $p \in]a, b[$ *tal que* $f(p) = 0$*.*

Intuitivamente, la continuidad y el cambio de signo obligan a la función a pasar por cero y por lo tanto a la existencia de la raíz p.

Aunque el método funciona en el caso en que haya más de una raíz en el intervalo $[a, b]$ supondremos, por simplicidad, que la raíz en dicho intervalo es única.

Para empezar el método hagamos $a_1 = a$ y $b_1 = b$, como se muestra en la figura 5.1, y sea p_1 el valor intermedio del intervalo $[a_1, b_1]$, esto es

$$p_1 = a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2} \ .$$

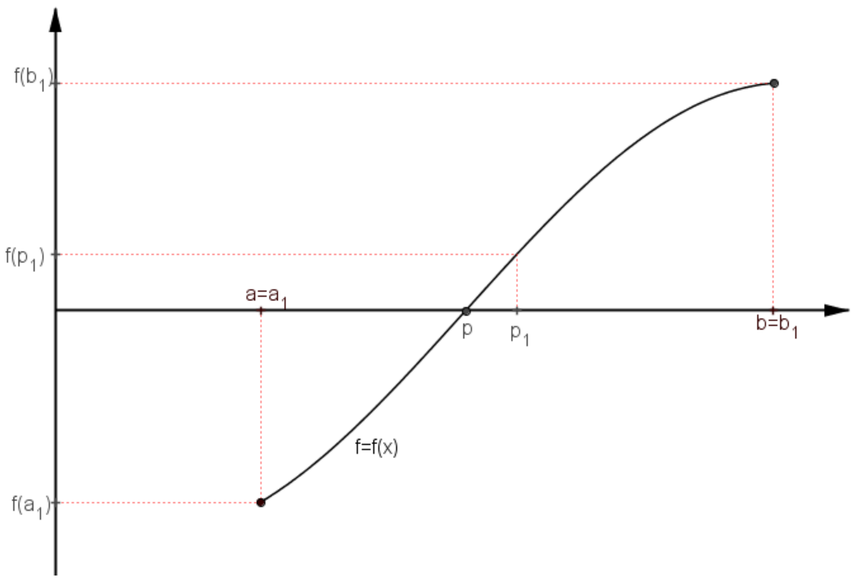


Figura 5.1: Valores iniciales en el método de la bisección.

Si $f(p_1) = 0$, entonces la raíz p de $f(x)$ será p_1; si $f(p_1) \neq 0$ entonces tendrá el mismo signo que $f(a_1)$ o que $f(b_1)$[1].

[1]En el ejemplo de la figura 5.1 $f(p_1)$ tiene el mismo signo que $f(b_1)$ y ambos valores son positivos.

Si $f(p_1)$ y $f(a_1)$ tienen el mismo signo, entonces la raíz p se encuentra en el intervalo $]p_1, b_1[$ y tomamos

$$a_2 = p_1 \qquad \text{y} \qquad b_2 = b_1.$$

Si, por el contrario, $f(p_1)$ y $f(a_1)$ tienen distinto signo[2], entonces la raíz p se encuentra en el intervalo $]a_1, p_1[$ y tomamos

$$a_2 = a_1 \qquad \text{y} \qquad b_2 = p_1.$$

Observa la figura 5.2.

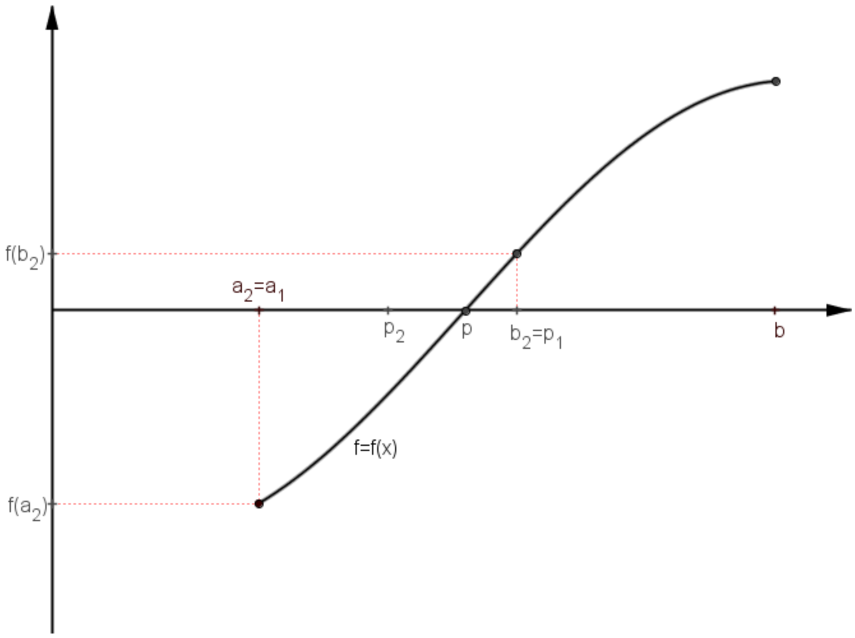


Figura 5.2: Segundo intervalo en el método de la bisección.

Se aplica el mismo proceso en el intervalo $[a_2, b_2]$ y se forma así la sucesión de intervalos $[a_3, b_3]$, $[a_4, b_4]$, $\cdots$ Cada nuevo intervalo sigue conteniendo la raíz p y su longitud es la mitad del intervalo precedente.

El método se generaliza de la siguiente manera:

Método de la Bisección

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$ y $p \in]a, b[$ tal que $f(p) = 0$.

Para determinar la raíz p de f, inicialmente se hacen $a_1 = a$ y $b_1 = b$.

Para $n = 1, 2, 3, \ldots$ a partir del intervalo $[a_n, b_n]$, que contiene la raíz p, se construye un nuevo intervalo $[a_{n+1}, b_{n+1}]$, que también contiene la raíz p, tomando en primer lugar

$$p_n = a_n + \frac{b_n - a_n}{2} \ ,$$

[2]Como sucede en el ejemplo de la figura 5.1.

y a continuación

$$a_{n+1} = a_n \quad \text{y} \quad b_{n+1} = p_n \quad \text{si} \quad f(a_n)f(p_n) < 0,$$

o bien

$$a_{n+1} = p_n \quad \text{y} \quad b_{n+1} = b_n \quad \text{en otro caso.}$$

Hay tres criterios de parada que se suelen incorporar al método de la bisección. El primero es detener el método si alguno de los puntos medios p_n es una raíz ($f(p_n) = 0$). El segundo consiste en detener el método cuando la longitud del intervalo es menor que una tolerancia preestablecida. Finalmente, el método también se detendrá si el número de iteraciones excede un numero fijado previamente; este último es el criterio que utilizaremos en nuestra construcción Geogebra.

Especificación de la práctica

El objetivo perseguido en esta sección es crear una representación gráfica del método de la bisección.

Entrada: Una función $f = f(x)$, un intervalo inicial $[a, b]$ y el número n de iteraciones del método.

Salida: Construcción Geogebra en la que se muestre la función f y, desplazando el deslizador n, se encuentre una raíz de f (visualizaremos el punto de corte de la gráfica de f con el eje de abscisas).

Tanto los extremos a y b del intervalo inicial como el número de iteraciones debes crearlos de manera que se puedan modificar cómodamente (punto sobre EjeX, deslizador, etc.). Asimismo, debes trabajar con una precisión de 2 decimales y utilizar colores y estilos diferentes para los elementos de manera que el diseño sea lo más ilustrativo posible.

Indicaciones

Guarda la siguiente construcción en el archivo PR05-01-1aBisec.ggb

PASO 1: Elementos de entrada.

Para empezar, introduce en la línea de entrada la función que vamos a utilizar

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 1}{10}.$$

Para establecer el intervalo inicial $[a, b]$ debe cumplirse que $f(a)f(b) < 0$, es decir, que sean de distinto signo. Inicialmente podemos tomar el intervalo $[a, b] = [-2, 3]$ ya que $f(-2) = -1.1$ y $f(3) = 1.9$ que son de distinto signo.

Mediante el comando `X_p=Interseca[f, EjeX]` obtenemos el punto de corte de la gráfica de f con el eje de abscisas. Observa que $X_p = (-0.75, 0)$ por lo que $f(-0.75) = 0$ y, en consecuencia, $p = -0.75$ es una raíz de f.

Edita las propiedades de X_p y cambia el estilo como se muestra en la figura 5.3. Crea un texto con la fórmula LaTex `$p=x(Xp)$` tal y como se muestra en la figura 5.3.

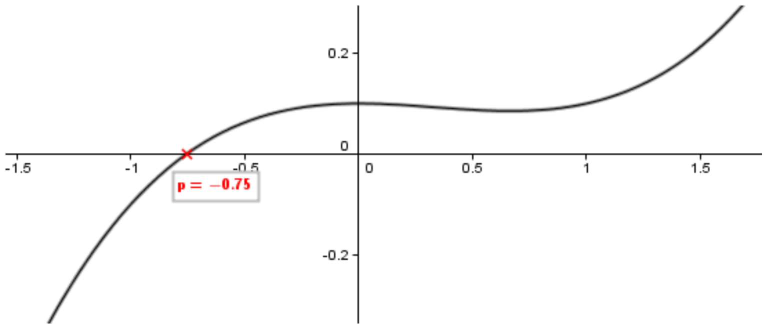


Figura 5.3: Punto de corte de f con el eje de abscisas.

Define, a continuación, las constantes $a = -2$, $b = 3$ y muestra los objetos como deslizadores (a: -2 hasta 1, incremento 0.1; b: 1 hasta 3, incremento 0.1) y un deslizador n con el número de iteraciones a realizar (1 hasta 20, incremento 1). Crea un texto como el que se muestra en la figura 5.4 y comprueba que se actualiza al desplazar los deslizadores a y b.

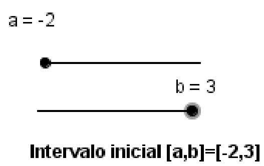


Figura 5.4: Intervalo inicial $[a, b]$.

PASO 2: Sucesión de intervalos y puntos intermedios mediante la hoja de cálculo.

Aún cuando el comando Interseca nos ha permitido obtener la raíz $p = 0.75$, vamos a implementar el método utilizando la hoja de cálculo, así pues muestra la hoja de cálculo y dimensiona la ventana para que se visualicen las columnas A, B, C y D.

En las celdas A1 y B1 de la primera fila almacenaremos los extremos del intervalo inicial $[a_1, b_1] = [a, b]$ y en C1 el valor intermedio de ambos,

$$p_1 = a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2}.$$

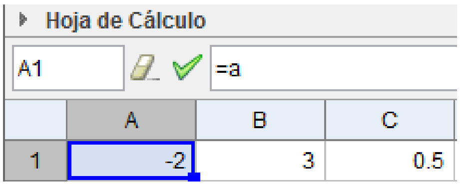


Figura 5.5: Extremos del intervalo inicial $[a_1, b_1] = [a, b]$ y valor intermedio p_1.

En la segunda fila debemos obtener los extremos del intervalo $[a_2, b_2]$ y el valor medio p_2, almacenando dichos valores en las celdas A2, B2 y C2.

Sabemos que los valores del intervalo $[a_2, b_2]$ se obtienen dependiendo del signo que tengan $f(a_1)$, $f(b_1)$ y $f(p_1)$ por lo que debes hacer uso de la instrucción condicional
`Si[<Condición>,<Entonces>,<Si no>]` tanto en la celda A2 como en la B2.

La condición que debemos considerar en A2 es si el producto $f(A1)f(C1) < 0$, mientras que en B2 debemos considerar una condición parecida. El valor intermedio p_2 se puede obtener copiando (Ctrl+C) la celda C1 y pegando (Ctrl+V) en la celda C2; comprueba que se actualiza correctamente y observa cómo quedaría la hoja de cálculo.

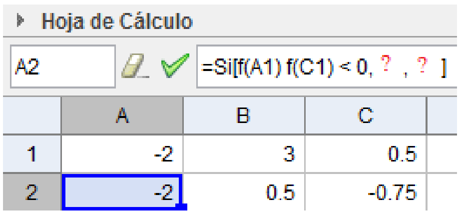


Figura 5.6: Extremos del intervalo $[a_2, b_2]$ y valor intermedio p_2.

Una vez obtenida la fila 2, se puede copiar en las siguientes filas hasta completar el número máximo de iteraciones que hemos fijado al definir el deslizador n; esto es, hasta la fila 20. Para ello, selecciona las celdas A2 B2 C2, copia (Ctrl+C), selecciona las celdas A3 B3 C3 hasta A20 B20 C20 y pega (Ctrl+V).

Observarás que los extremos de los intervalos están cada vez más próximos y que a partir de la fila 11 coinciden, siendo el valor intermedio $p_{11} = -0.75$, por lo que podemos afirmar que ese valor es una raíz de f.

Cambia ahora la precisión a 15 cifras decimales (Opciones, Redondeo) y observa que ni tan siquiera en la fila 20 coinciden los extremos ya que hay una diferencia pequeña (la longitud del intervalo $[a_{20}, b_{20}] = 0.00009536743164$).

Para calcular la longitud de cada intervalo vamos a utilizar la columna D. Asignas a D1 la longitud del intervalo $[a_1, b_1]$, definiendo el valor de la celda D1 como B1-A1 y copia la fórmula de esa celda a las celdas D2 hasta D20. Vuelve a la precisión de 2 cifras decimales y observa que a partir de la fila 11 la longitud del intervalo es 0.

Con la hoja de cálculo construida ya estamos en condiciones de calcular la raíz de f con la precisión que deseemos (podríamos incrementar el número de iteraciones si necesitásemos mayor precisión); ahora vamos a visualizar el método.

PASO 3: Representación gráfica del método.

En las columnas A y B tenemos los extremos de los intervalos que hemos generado en cada iteración y en la columna C los valores intermedios de cada uno de ellos.

Debemos mostrar, para cada valor del iterador n, los valores a_n, b_n y p_n así como sus imágenes mediante f, tal y como se muestra en las figuras 5.7, 5.8 y 5.9.

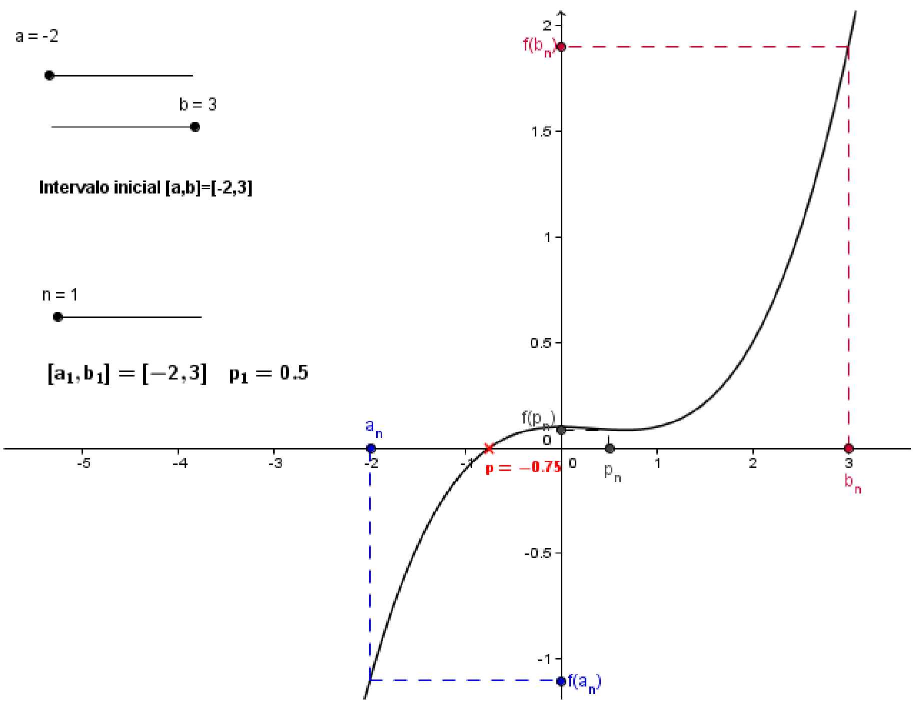


Figura 5.7: Representación gráfica del intervalo $[a_1, b_1]$ y el valor intermedio p_1.

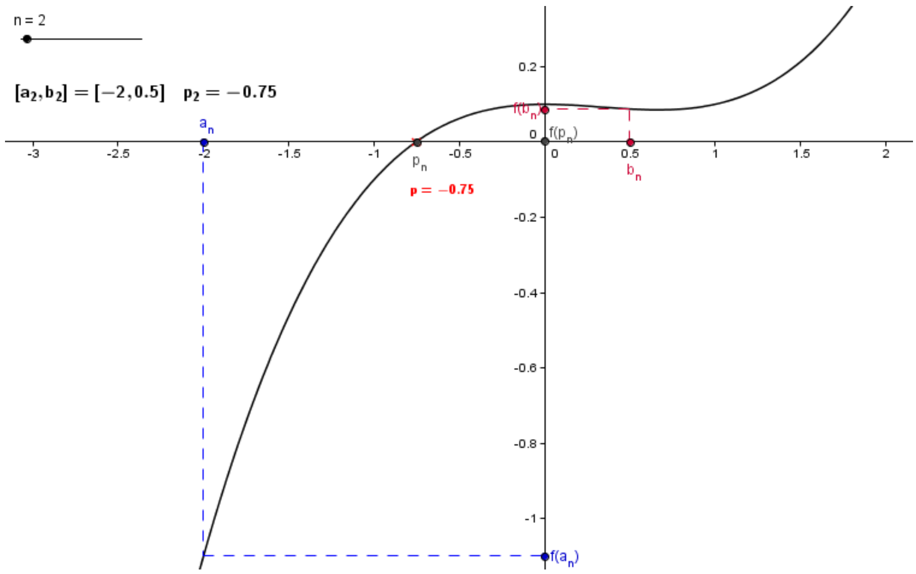


Figura 5.8: Representación gráfica del intervalo $[a_2, b_2]$ y el valor intermedio p_2.

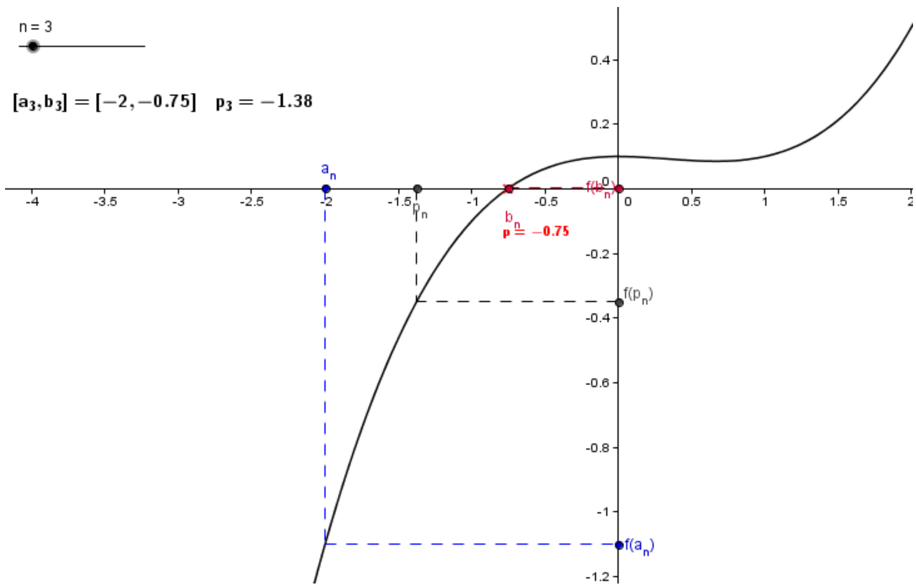


Figura 5.9: Representación gráfica del intervalo $[a_3, b_3]$ y el valor intermedio p_3.

Debes tener en cuenta que para hacer referencia a un conjunto de celdas de una columna de la hoja de cálculo como si fuera una lista, tan solo es necesario invocarla como `Anúm1:Anúm2`, siendo A la columna, `núm1` la primera fila y `núm2` la última.

Teclea `lista_{an}=A1:A20` para crear una lista con los valores de la columna

A (que contienen desde a_1 hasta a_{20}) y de igual manera crea la $lista_{bn}$ con los valores de la columna B y $lista_{pn}$ con los valores de la columna C.

Define la variable a_n como el elemento n-ésimo de la lista $lista_{an}$ y, análogamente, define las variables b_n y p_n. Para representar estos valores en el eje de abscisas, lógicamente, tendrás que definir los respectivos puntos cuya abscisa sea a_n, b_n y p_n y su ordenada 0. Llámalos, por ejemplo, Xa_n, Xb_n y Xp_n, respectivamente. Comprueba al desplazar el deslizador n que los puntos representados están el las posiciones que corresponden (revisa la hoja de cálculo) y cambia el estilo de los puntos para que se muestren como en las figuras 5.7, 5.8 y 5.9.

A continuación debes definir los puntos sobre la curva $fa_n = (a_n, f(a_n))$, $fb_n = (b_n, f(b_n))$ y $fp_n = (p_n, f(p_n))$ y los correspondientes puntos sobre el eje de ordenadas que representan los valores $f(a_n)$, $f(b_n)$ y $f(p_n)$.

Observa las figuras 5.7, 5.8 y 5.9 para crear los segmentos con trazo discontinuo así como para cambiar las propiedades de los objetos que se necesiten (color, estilo, mostrar objeto, etc.) y crear el texto en que se muestra el intervalo y su valor intermedio.

Para finalizar, desplaza el deslizador n (incrementando la iteración) y observa cómo los valores p_n se van acercando a la raíz p tanto como se quiera.

PASO 4: Decrecimiento exponencial de la longitud de los intervalos $[a_n, b_n]$.

Si denotamos por $I_i = [a_i, b_i]$ y por $|I_i|$ a la longitud del intervalo, se tiene que $|I_i| = \frac{|I_1|}{2^{i-1}}$, con $i = 1, 2, 3, \cdots$

Comprobaremos gráficamente que $\lim_{i\to\infty} |I_i| = 0$ y que la velocidad de convergencia es exponencial.

Recordemos que en las celdas de la columna D de la hoja de cálculo hemos calculado la longitud del intervalo correspondiente.

Define la función exponencial inversa $g = e^{-x}$ y cambia las propiedades para que se muestre en la Vista Gráfica 2.

Para representar la longitud de los intervalos, debes crear una lista de puntos en los que la primera coordenada sea el valor del iterador n y la segunda la longitud del intervalo $[a_n, b_n]$. Muestra los puntos de la lista en la Vista Gráfica 2.

Observa en la figura 5.10 como el decrecimiento de la longitud de los intervalos $[a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \cdots, n$, se ajusta a la gráfica de la función exponencial $g = e^{-x}$.

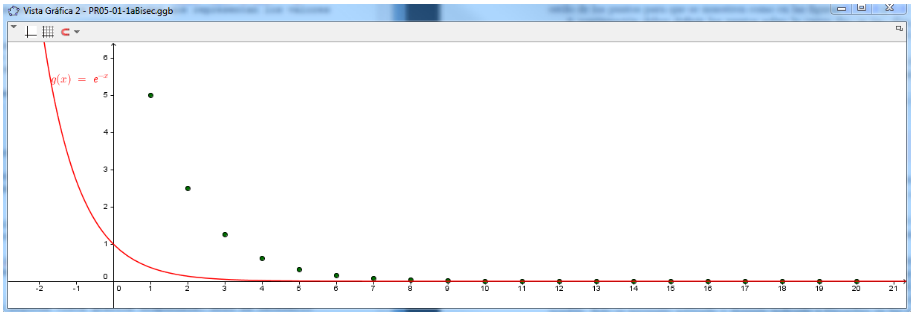


Figura 5.10: Decrecimiento exponencial de la longitud de los intervalos.

PASO 5: Función con más de una raíz.

Partiendo del archivo PR05-01-1aBisec.ggb, guarda la siguiente construcción en el archivo PR05-01-1bBisec.ggb

Ahora vamos a considerar la función

$$f(x) = \frac{1}{3}x(\operatorname{sen} x + 2) - 5$$

que, como podrás observar, tiene varias raíces y el comando Interseca no nos sirve.

Modifica los límites de los deslizadores a y b de manera que puedas partir de diferentes intervalos iniciales y obtener todas las raíces de f.

5.2. Método de la Secante

Aunque el método de la bisección siempre converge a la raíz contenida en el intervalo inicial, su velocidad de convergencia es, habitualmente, demasiado baja como para que sea útil de forma general. Esta técnica puede ser mejorada, partiendo de la idea central de que una función continua (no necesariamente derivable) puede aproximarse localmente por una recta y, en consecuencia, el punto de corte de la gráfica de la función con el eje de abscisas se puede aproximar por el punto de corte de la recta con el eje de abscisas.

El método de la secante explota esta aproximación tomando como recta la secante a la gráfica de la función que pasa por dos puntos de dicha gráfica. Para definir la primera recta necesitamos partir de un intervalo inicial $[a_1, b_1]$ cumpliendo $f(a_1)f(b_1) < 0$[3], considerar los dos puntos de partida $(a_1, f(a_1))$, $(b_1, f(b_1))$ sobre la gráfica de la función y obtener la recta que los une (secante a la gráfica de la función).

El punto de corte de la recta con el eje de abscisas, $(p_1, 0)$, es una aproximación del punto de corte de la función con el eje de abscisas, $(p, 0)$; por tanto, el valor p_1 es una aproximación de la raíz p de la función (observa la figura 5.11).

[3]Con esta condición, el teorema de Bolzano garantiza la existencia de una raíz en $]a_1, b_1[$

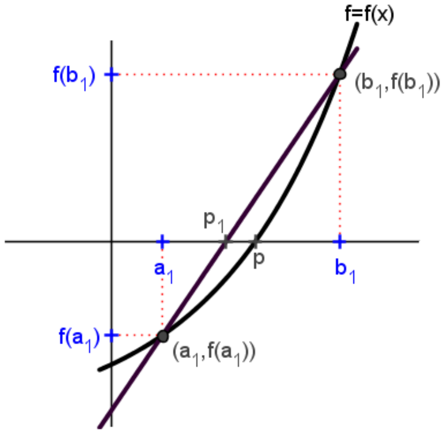


Figura 5.11: Aproximación de una función $f = f(x)$ mediante la recta secante.

Si expresamos la recta en la forma punto-pendiente[4] se tiene

$$y - f(a_1) = \frac{f(b_1) - f(a_1)}{b_1 - a_1}(x - a_1);$$

esto es,

$$y = f(a_1) + \frac{f(b_1) - f(a_1)}{b_1 - a_1}(x - a_1). \tag{5.1}$$

El punto de corte de la recta con el eje de abscisas, $(p_1, 0)$, se obtiene haciendo $y = 0$ en la expresión (5.1), verificándose entonces

$$0 = f(a_1) + \frac{f(b_1) - f(a_1)}{b_1 - a_1}(p_1 - a_1),$$

por lo que

$$p_1 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f(b_1) - f(a_1)}(b_1 - a_1). \tag{5.2}$$

Si repetimos el proceso considerando los puntos de partida $(p_1, f(p_1))$ y $(b_1, f(b_1))$ y obteniendo la recta que los une, el punto de corte de esta recta con el eje de abscisas, $(p_2, 0)$, es una aproximación del punto de corte de la función con el eje de abscisas, $(p, 0)$, y el valor p_2 es una aproximación de la raíz p de la función (observa la figura 5.12).

[4]La ecuación de la recta que pasa por el punto (x_0, y_0) con pendiente m es:
$y - y_0 = m(x - x_0)$

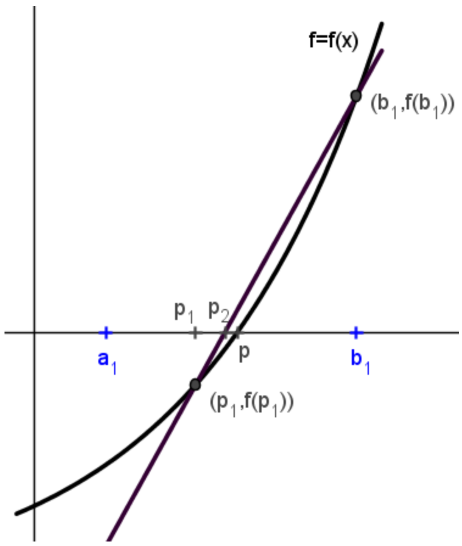


Figura 5.12:

Si expresamos la recta en la forma punto-pendiente se tiene

$$y - f(p_1) = \frac{f(p_1) - f(b_1)}{p_1 - b_1}(x - p_1);$$

esto es,

$$y = f(p_1) + \frac{f(p_1) - f(b_1)}{p_1 - b_1}(x - p_1). \tag{5.3}$$

El punto de corte de la recta con el eje de abscisas, $(p_2, 0)$, se obtiene haciendo $y = 0$ en la expresión (5.3), verificándose entonces

$$0 = f(p_1) + \frac{f(p_1) - f(b_1)}{p_1 - b_1}(p_2 - p_1),$$

por lo que

$$p_2 = p_1 - \frac{f(p_1)}{f(p_1) - f(b_1)}(p_1 - b_1). \tag{5.4}$$

Continuando el proceso obtendremos una sucesión de números $p_1, p_2, p_3, \cdots$ que, en el caso de la figura 5.12, se aproximan a la raíz, p, de la función tanto como se quiera.

La regla de recurrencia que nos permitirá obtener los valores $p_1, p_2, p_3, \cdots$, se obtiene utilizando la notación $p_{-1} = a_1$ y $p_0 = b_1$. De esa manera, la expresión (5.2) quedará de la forma

$$p_1 = p_{-1} - \frac{f(p_{-1})}{f(p_0) - f(p_{-1})}(p_0 - p_{-1})$$

y la expresión (5.4) quedará como

$$p_2 = p_1 - \frac{f(p_1)}{f(p_1) - f(p_0)}(p_1 - p_0).$$

La expresión de recurrencia es

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}(p_{n-1} - p_{n-2}); \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{5.5}$$

En el ejemplo mostrado en la figura 5.11 el valor p_1 pertenece al intervalo inicial $[a_1, b_1]$, hecho que no se puede asegurar siempre, tal y como se muestra en la figura 5.13.

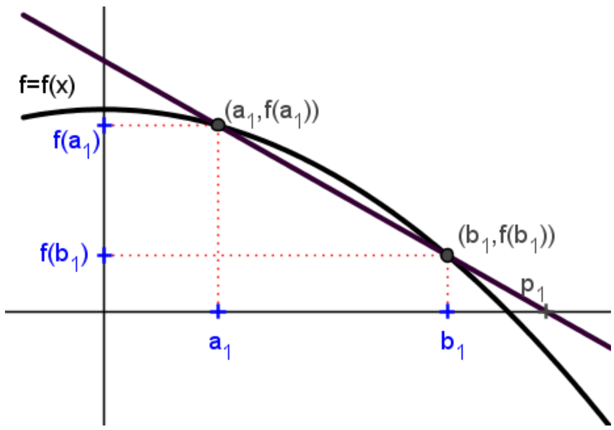


Figura 5.13: Valor p_1 fuera del intervalo $[a_1, b_1]$.

Como consecuencia, el método de la secante no tiene la propiedad del método de la bisección de ir encajonando la raíz y no garantiza la convergencia de la sucesión de valores $p_i, \ i = 1, 2, 3, \cdots$

Especificación de la práctica

El objetivo para esta sección es crear una construcción Geogebra que visualice el método de la secante.

Entrada: Una función $f = f(x)$, un intervalo inicial $[a_1, b_1]$ y el número n de iteraciones del método.

Salida: Construcción Geogebra en la que se muestre la función f y, desplazando el deslizador n, se encuentre una raíz de f (visualizaremos el punto de corte de la gráfica de f con el eje de abscisas).

Tanto los extremos a_1 y b_1 del intervalo inicial como el número de iteraciones debes crearlos de manera que se puedan modificar cómodamente (punto sobre EjeX, deslizador, etc.). Asimismo, debes trabajar con una precisión de 2 decimales y utilizar colores y estilos diferentes para los elementos de manera que el diseño sea lo más ilustrativo posible.

Nota: Los gráficos mostrados son indicativos: no necesariamente representan los resultados que se van a obtener para los datos de entrada propuestos.

Indicaciones

Guarda la siguiente construcción en el archivo PR05-02-1aSecante.ggb

PASO 1: Elementos de entrada.

La función que vamos a utilizar es $f(x) = \frac{1}{5}x(\cos x - 2) + \frac{12}{5}$ y el intervalo inicial $[a_1, b_1] = [5, 10]$.

Para que más adelante se pueda modificar fácilmente el intervalo inicial, define un punto Xa_1 sobre el eje de abscisas (`Xa_1=Punto[EjeX]`) y desplázalo hasta la posición $(5, 0)$ y, del mismo modo define otro punto Xb_1 sobre el eje de abscisas y desplázalo hasta la posición $(10, 0)$. Asigna, a continuación, a la variable a_1 la abscisa del punto Xa_1 y a b_1 la del punto Xb_1,

Define un deslizador, n, que controle la iteración (1 a 30, incremento 1).

PASO 2: Obtención de la sucesión de valores $p_i,\ i = 1, 2, 3, \cdots$ en la hoja de cálculo.

Vamos a utilizar la columna A de la hoja de cálculo para obtener la sucesión de números reales $p_i,\ i = 1, 2, 3, \cdots$ Para ello, almacena en la celda A1 el extremo inferior del intervalo, a_1, y en A2 el superior, b_1.

En la celda A3 debes obtener el valor p_1, haciendo uso de la recurrencia (5.5). Si la fórmula es correcta, cuando copies la celda A3 en la celda A4, se actualizarán los índices y obtendrás el valor p_2. Una vez comprobado lo anterior, copia la celda A4 y pégala en el rango de celdas A5:A32[5] (observa la figura 5.14).

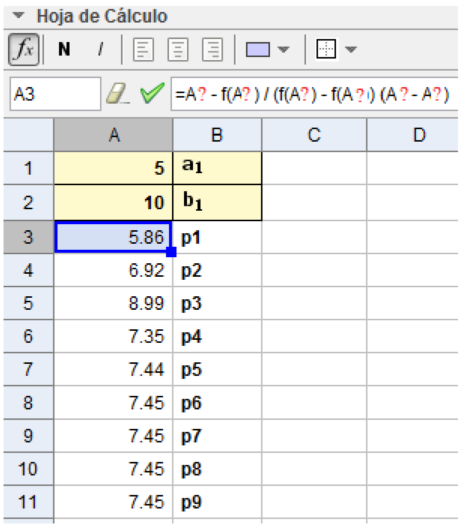


Figura 5.14: Sucesión de valores $p_i,\ i = 1, 2, 3, \cdots$

Observarás que la sucesión de números $p_i,\ i = 1, 2, 3, \cdots$ converge a 7.45; también, que a partir de la fila 13 Geogebra muestra el signo ? indicando que,

[5] Si necesitáramos más iteraciones copiaríamos en un rango de celdas mas amplio.

con la precisión utilizada, aparece un 0 en el denominador de la fórmula (por tanto no puede realizar esa operación).

Con la hoja de cálculo construida hemos podido calcular la raíz de f con la precisión elegida, ahora visualizaremos el método.

PASO 3: Representación gráfica del método.

En las celdas A1, B1 tenemos los extremos del intervalo inicial $[a_1, b_1]$ y en el rango de celdas A3:A32 tenemos los valores $p_i,\ i = 1, 2, \cdots, 30$.

Debemos mostrar los valores a_1, b_1 y, para cada valor del iterador n, p_n así como sus imágenes mediante f. Asimismo se debe mostrar la recta secante que pasa por los puntos ya descritos con anterioridad, tal y como se muestra en las figuras 5.15, 5.16, 5.17 y 5.18, que se corresponden con las iteraciones $n = 1, 2, 3, 4$. Observarás, también, que en el eje de abscisas se han dejado las marcas de los distintos valores $p_i,\ i = 1, 2, 3, \cdots$

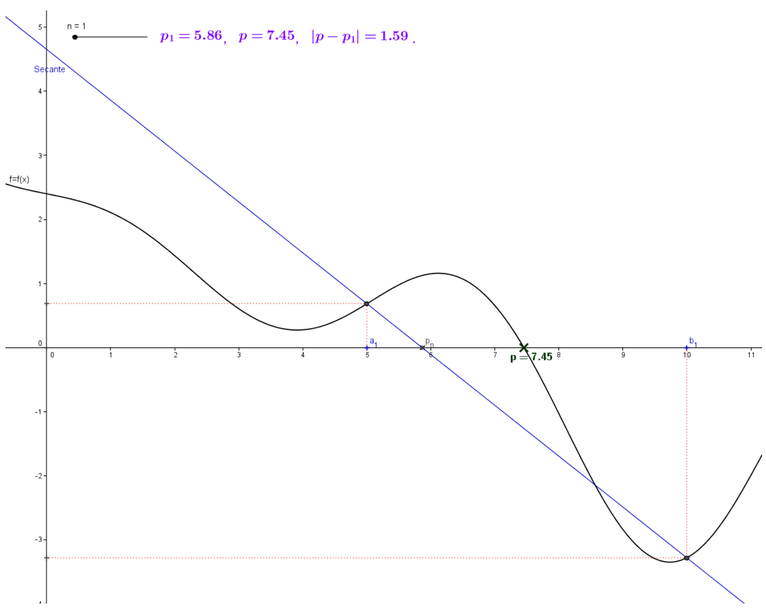


Figura 5.15: Representación gráfica del método de la secante, $n = 1$.

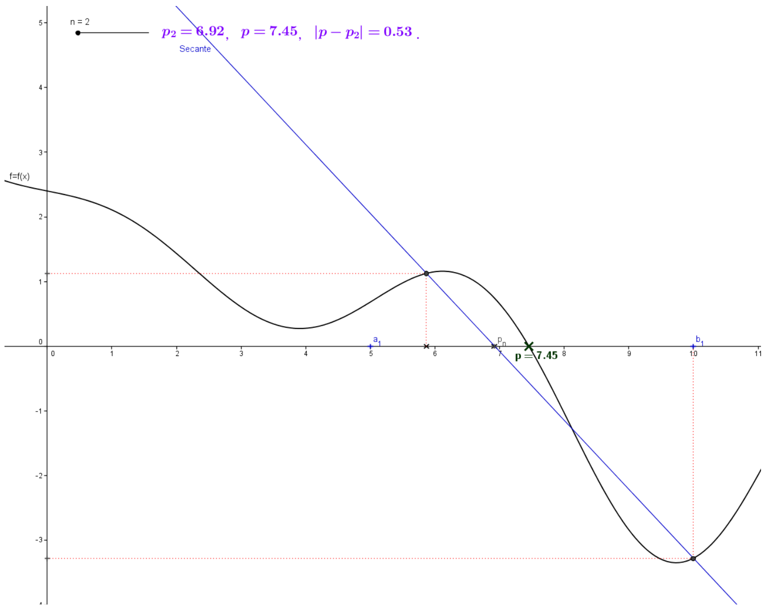


Figura 5.16: Representación gráfica del método de la secante $n = 2$.

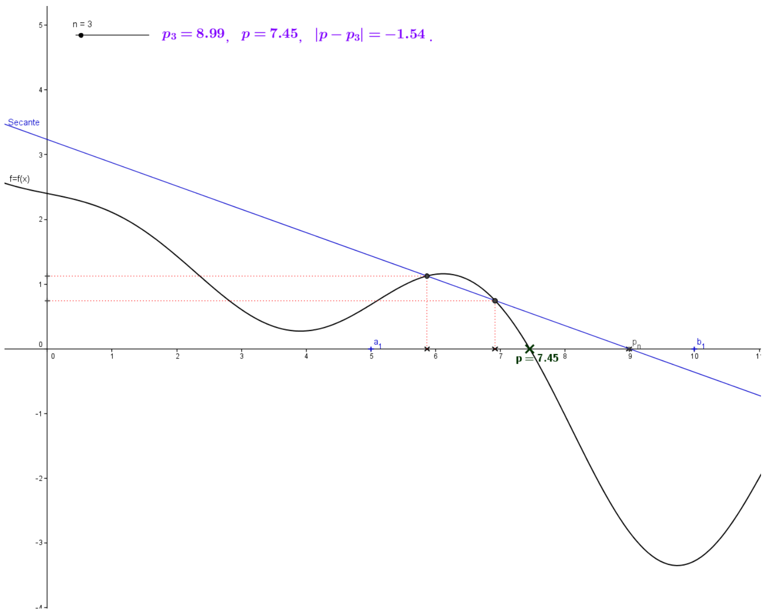


Figura 5.17: Representación gráfica del método de la secante $n = 3$.

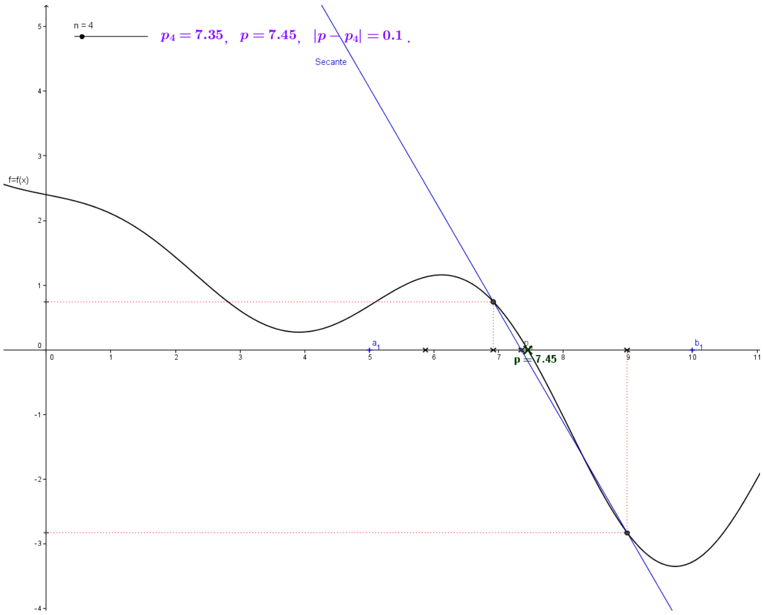


Figura 5.18: Representación gráfica del método de la secante $n = 4$.

PASO 4: Convergencia.

Partiendo del archivo PR05-02-1aSecante.ggb, guarda la siguiente construcción en el archivo PR05-02-1bSecante.ggb

Copia la fórmula de la celda A32 en el rango de celdas A33:A100 y aumenta el valor máximo del iterador n hasta 98. También deberás redefinir todas aquellas expresiones en las que hayas utilizado el rango de celdas A2:A32 y extenderlas al rango de celdas A2:A100

Ahora intenta encontrar un intervalo inicial de manera que después de 98 iteraciones el método todavía no haya conseguido encontrar la raíz de la función.

PASO 5: Funciones con más de una raíz.

Partiendo del archivo PR05-02-1bSecante.ggb, guarda la siguiente construcción en el archivo PR05-02-1cSecante.ggb

Podemos realizar una traslación de la función f definiendo un deslizador k que tome valores comprendidos entre -10 y 10 (incremento 0.1) y cambiando el valor $\frac{12}{5}$ por k. Si hacemos el deslizador $k = 3$, la función f tiene la siguiente expresión

$$f(x) = \frac{1}{5}x(\cos x - 2) + 3.$$

Esta función corta al eje de abscisas en tres puntos, para obtenerlos y agruparlos en una lista utiliza el comando `Pcorteabscisas={Raíces[f, -100, 100]}`. Sabemos que las raíces de f son las abscisas de esos puntos, para crear una lista con todas las raíces teclea el comando `Raícesf=x(Pcorteabscisas)`.

La cantidad de raíces existente es igual a la longitud de una cualquiera estas listas. Almacena en una variable dicho valor tecleando el comando `num_{raíces}=Longitud[Raícesf]`, finalmente crea un deslizador, r, que tome valores desde 1 hasta $num_{raíces}$ con incremento 1.

Como habrás podido observar, Geogebra nos permite obtener las raíces de f[6]. Ahora debemos obtenerlas nosotros con el método de la secante que hemos implementado.

Prueba, por ejemplo, a modificar el intervalo inicial y observa los valores que aparecen en la hoja de cálculo. Intenta encontrar intervalos de inicio que contengan las tres raíces y que permitan obtener una cualquiera de ellas.

Modificando el deslizador k puedes obtener funciones con $1, 3, 5, 7, ...$ raíces, prueba a hacerlo y a encontrar los intervalos iniciales que hagan que la sucesión p_i converja a dichas raíces.

Observa las figuras 5.19, 5.20 y 5.21 para que te sirvan como modelo en tu construcción. Si tu construcción no genera exactamente los mismos valores, no le des importancia y busca el intervalo inicial que haga que la sucesión de valores $p_i, i = 1, 2, 3, \cdots$ converja a una de las raíces de f.

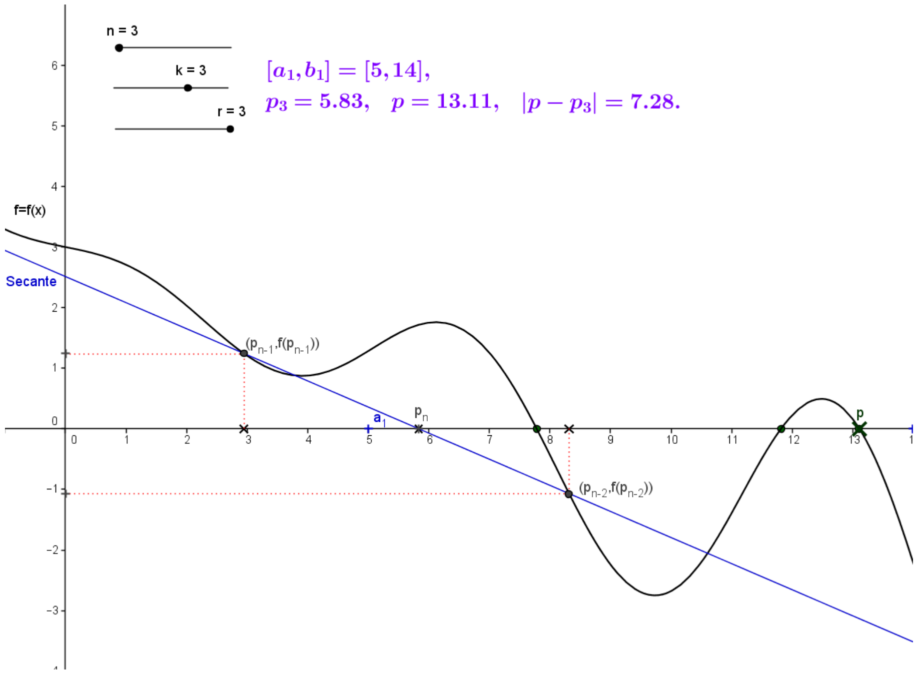


Figura 5.19: Representación gráfica del método de la secante, $n = 3$, $k = 3$, $r = 3$.

[6]Utiliza, a nivel interno, métodos numéricos como los que estamos estudiando.

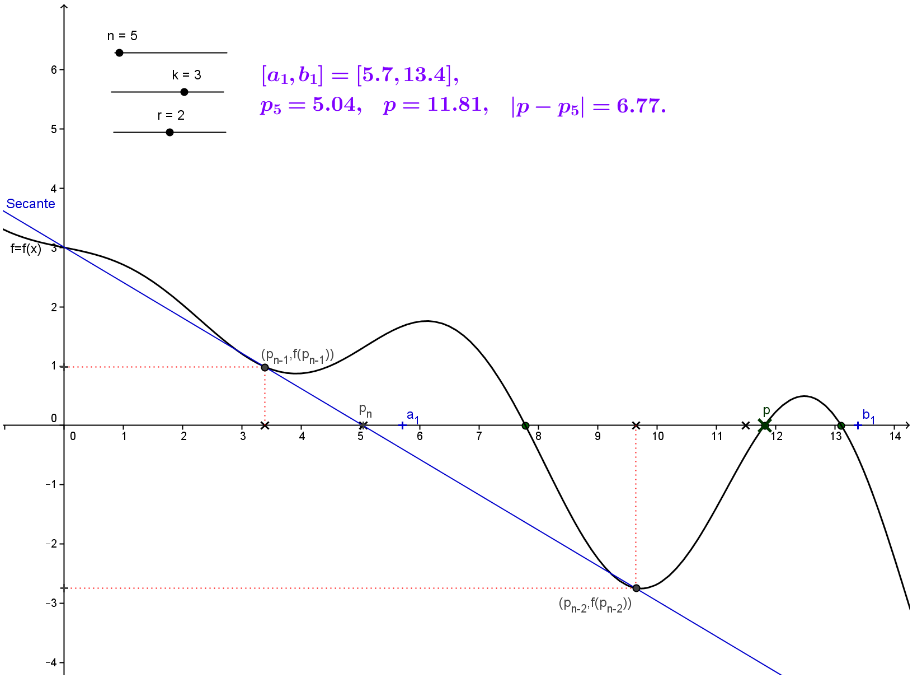


Figura 5.20: Representación gráfica del método de la secante, $n = 5$, $k = 3$, $r = 2$.

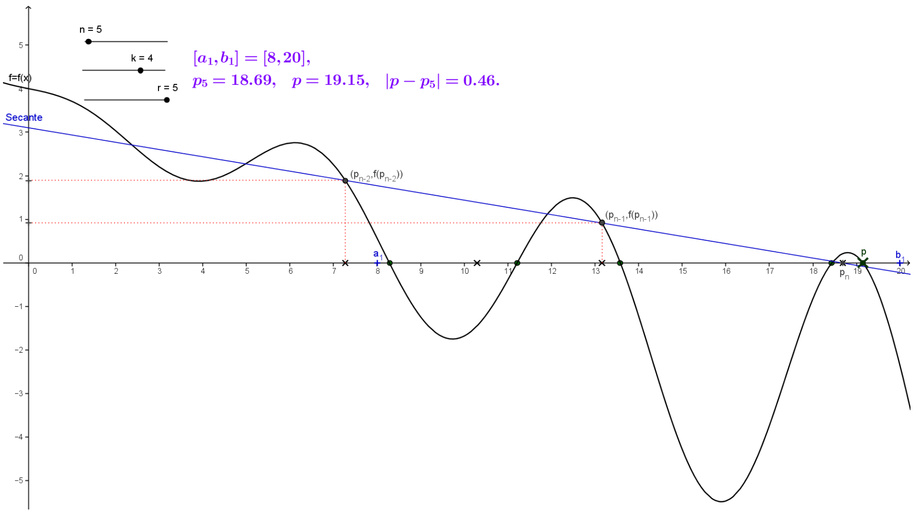


Figura 5.21: Representación gráfica del método de la secante, $n = 5$, $k = 4$, $r = 5$.

5.3. Método de Newton

Tanto el método de bisección como el de la secante pueden interpretarse geométricamente diciendo que aproximan la solución de $f(x) = 0$ mediante la raíz de una recta próxima a la gráfica de la función f. La línea recta que mejor aproxima a la gráfica de la función en las proximidades de un punto es la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto. Cuando se utiliza esta recta, en lugar de la recta secante, se obtiene un método iterativo, conocido como el método de Newton o de Newton-Raphson, que en el caso de converger lo hace más rápidamente que los anteriores.

Un inconveniente de este método frente al de la secante es que hay que evaluar en cada iteración el valor de la derivada; aún cuando con los modernos paquetes de cálculo simbólico esto no supone un problema serio, para algunas funciones dadas en forma no elemental el cálculo de la derivada puede llegar a suponer un esfuerzo considerable.

La convergencia del método de Newton no está garantizada, por lo que es importante partir de un valor inicial cercano a la raíz buscada, hecho que se puede lograr acotando la zona en la que está la raíz utilizando previamente otro método de convergencia más segura como el de la bisección.

Si p es una raíz de $f(x)$, la curva $f = f(x)$ corta al eje de abscisas en el punto $(p, 0)$. Si tomamos una aproximación inicial p_1 de la raíz p, el punto $(p_1, f(p_1))$ está situado en la curva cerca de $(p, 0)$, como se puede observar en la figura 5.22.

Definimos p_2 como la abscisa del punto de intersección del eje de abscisas con la recta tangente a la curva en el punto $(p_1, f(p_1))$. Como se puede observar en la figura 5.22, p_2 está más cerca de la raíz p que p_1.

Podemos relacionar p_2 y p_1 expresando la pendiente, m_1, de la recta tangente a la curva en el punto $(p_1, f(p_1))$ de dos formas.

Por un lado $m_1 = f'(p_1)$ y por otro $m_1 = \dfrac{f(p_1)}{p_1 - p_2}$.

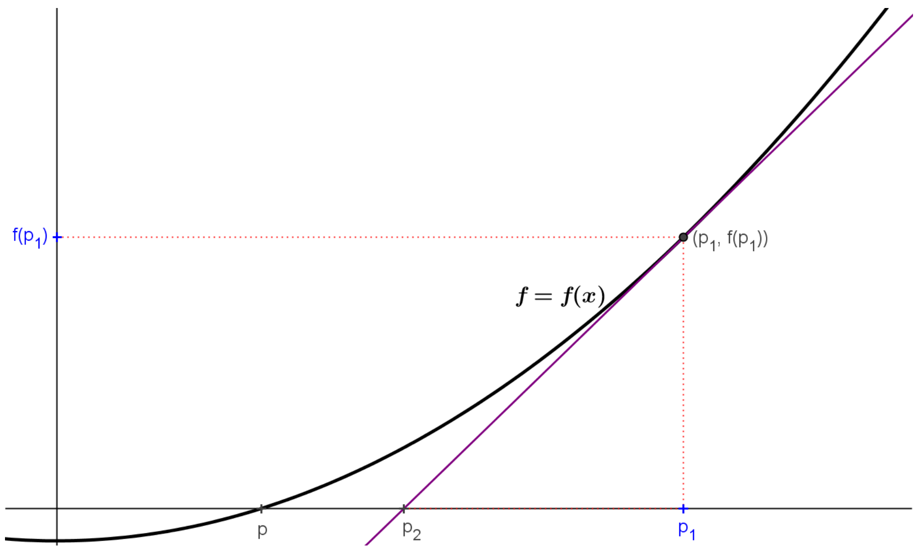


Figura 5.22: Primera aproximación a la raíz p.

Igualando, tendremos

$$\begin{aligned}
f'(p_1) &= \frac{f(p_1)}{p_1 - p_2}, \\
f'(p_1)(p_1 - p_2) &= f(p_1), \\
p_1 - p_2 &= \frac{f(p_1)}{f'(p_1)}, \\
-p_2 &= -p_1 + \frac{f(p_1)}{f'(p_1)},
\end{aligned}$$

y, en consecuencia,

$$p_2 = p_1 - \frac{f(p_1)}{f'(p_1)}.$$

Si consideramos ahora como valor de partida p_2, el punto $(p_2, f(p_2))$ está situado en la curva cerca de $(p, 0)$, como se puede observar en la figura 5.23.

Definimos p_3 como la abscisa del punto de intersección del eje de abscisas con la recta tangente a la curva en el punto $(p_2, f(p_2))$. Como se puede observar en la figura 5.23, p_3 está más cerca de la raíz p que p_1 y p_2.

Podemos realcionar p_3 y p_2 expresando la pendiente, m_2, de la recta tangente a la curva en el punto $(p_2, f(p_2))$ de dos formas.

Por un lado $m_2 = f'(p_2)$ y por otro $m_2 = \dfrac{f(p_2)}{p_2 - p_3}$.

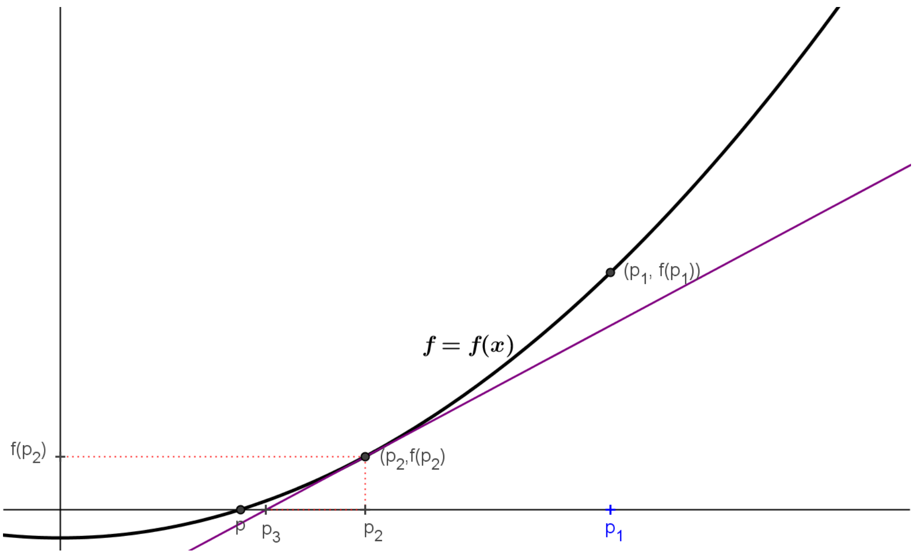


Figura 5.23: Segunda aproximación a la raíz p.

Igualando, tendremos

$$\begin{aligned} f'(p_2) &= \frac{f(p_2)}{p_2 - p_3}, \\ f'(p_2)(p_2 - p_3) &= f(p_2), \\ p_2 - p_3 &= \frac{f(p_2)}{f'(p_2)}, \\ -p_3 &= -p_2 + \frac{f(p_2)}{f'(p_2)}, \end{aligned}$$

y, en consecuencia,

$$p_3 = p_2 - \frac{f(p_2)}{f'(p_2)}.$$

Si repetimos el proceso, para n obtendremos la relación de recurrencia

$$p_{i+1} = p_i - \frac{f(p_i)}{f'(p_i)}, \quad i = 1, 2, 3, \cdots \tag{5.6}$$

De esta manera obtenemos una sucesión de aproximaciones p_i, $i = 1, 2, 3, \cdots$ que converge a la raíz p bajo ciertas condiciones.

Especificación de la práctica

En esta sección se debe crear una construcción que visualice el método de Newton.

Entrada: Una función $f = f(x)$, un valor inicial p_1 y el número n de iteraciones del método.

Salida: Construcción en Geogebra en la que se muestre la función f y, desplazando el iterador n, se encuentre una raíz de f (visualizaremos el punto de corte de la gráfica de f con el eje de abscisas).

Tanto el valor inicial, p_1, como el número de iteraciones debes crearlos de manera que se puedan modificar cómodamente. Asimismo, debes trabajar con una precisión de 2 decimales y utilizar colores y estilos diferentes para los elementos de manera que el diseño sea lo más ilustrativo posible.

Nota: Los gráficos mostrados son indicativos: no necesariamente representan los resultados que se van a obtener para los datos de entrada propuestos.

Indicaciones

Guarda la siguiente construcción en el archivo PR05-03-1aNewton.ggb

PASO 1: Elementos de entrada.

La función que vamos a utilizar es $f(x) = \dfrac{x^3 - 4}{20}$. Para que más adelante se pueda modificar fácilmente el valor inicial, p_1, define un punto Xp_1 sobre el eje de abscisas (`Xp_1=Punto[EjeX]`) y desplázalo hasta la posición $(5, 0)$; asigna, a continuación, a la variable p_1 la abscisa del punto Xp_1.

Define un deslizador, n, que controle la iteración (1 a 30, incremento 1).

PASO 2: Obtención de la sucesión de valores $p_i,\ i = 1, 2, 3, \cdots$ en la hoja de cálculo.

Vamos a utilizar la columna A de la hoja de cálculo para obtener la sucesión de números reales $p_i,\ i = 1, 2, 3, \cdots$ Para ello, almacena en la celda A1 el valor inicial p_1 (ten en cuenta que p_1 puede variar) y asigna a la casilla A_{n+1} el valor p_{n+1}, para $n = 1, 2, \cdots, 29$ haciendo uso de la expresión (5.6); al final del proceso deben estar llenas las casillas A1 hasta A30. Observarás en las casillas de la columna A que la sucesión de valores $p_i,\ i = 1, 2, \cdots 30$ converge a la raíz de f (p=1.59).

Podemos realizar las iteraciones de este método sin necesidad de utilizar la hoja de cálculo, haciendo uso del comando `Iteración` que permite realizar un bucle recursivo indicando la función, el valor inicial y el número de iteraciones. Con este comando, la función parte del valor inicial y devuelve un valor de salida que se vuelve a tomar como entrada, repitiendo el proceso las veces que se indique. Como hemos indicado, la ventaja de este comando es que no precisamos de la hoja de cálculo, pero conlleva el inconveniente de que no podremos representar todos los pasos a la vez, sino uno tras otro.

PASO 3: Representación gráfica del método.

Crea, en primer lugar, una lista llamada Abscisas con los valores $p_i,\ i = 1, 2, \cdots, 30$ (recuerda que están almacenados en las casillas A1 hasta A30).

Utilizando el comando Elemento[] sobre la lista Abscisas, define el punto sobre el eje de abscisas $P_n = (p_n, 0)$. Editando las propiedades de P_n haz que se muestre el subtítulo p_n con estilo de punto $\times$. Utilizando el comando Elemento[] sobre la lista Abscisas, define el punto sobre el eje de abscisas $P_{n+1} = (p_{n+1}, 0)$. Editando las propiedades de P_{n+1} haz que se muestre el subtítulo p_{n+1} con estilo de punto $\times$.

Continúa definiendo los objetos necesarios para visualizar el método, tal y como se muestra en las figuras 5.24, 5.25 y 5.26, que se corresponden con las iteraciones $n = 1, 2, 3$.

Observarás, que en el eje de abscisas se han dejado las marcas de los valores p_1, p_n, y p_{n+1}.

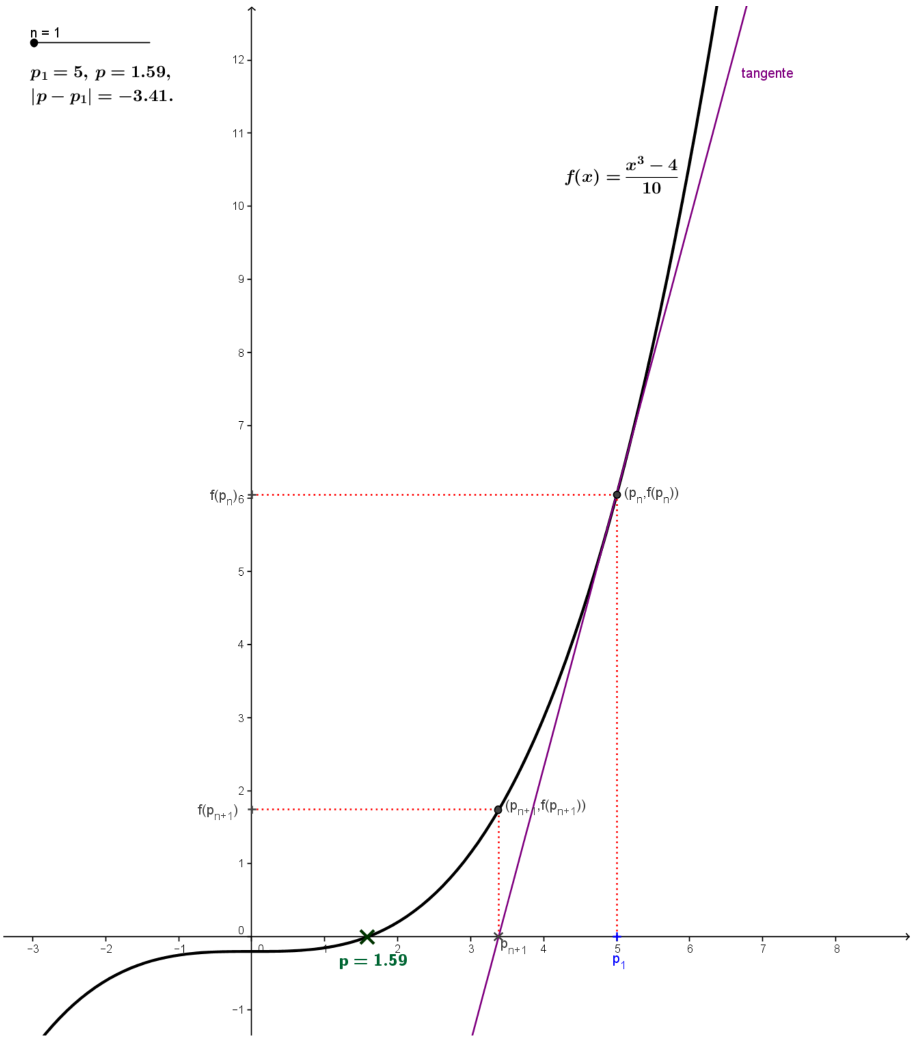


Figura 5.24: Representación gráfica del método de Newton, $n = 1$.

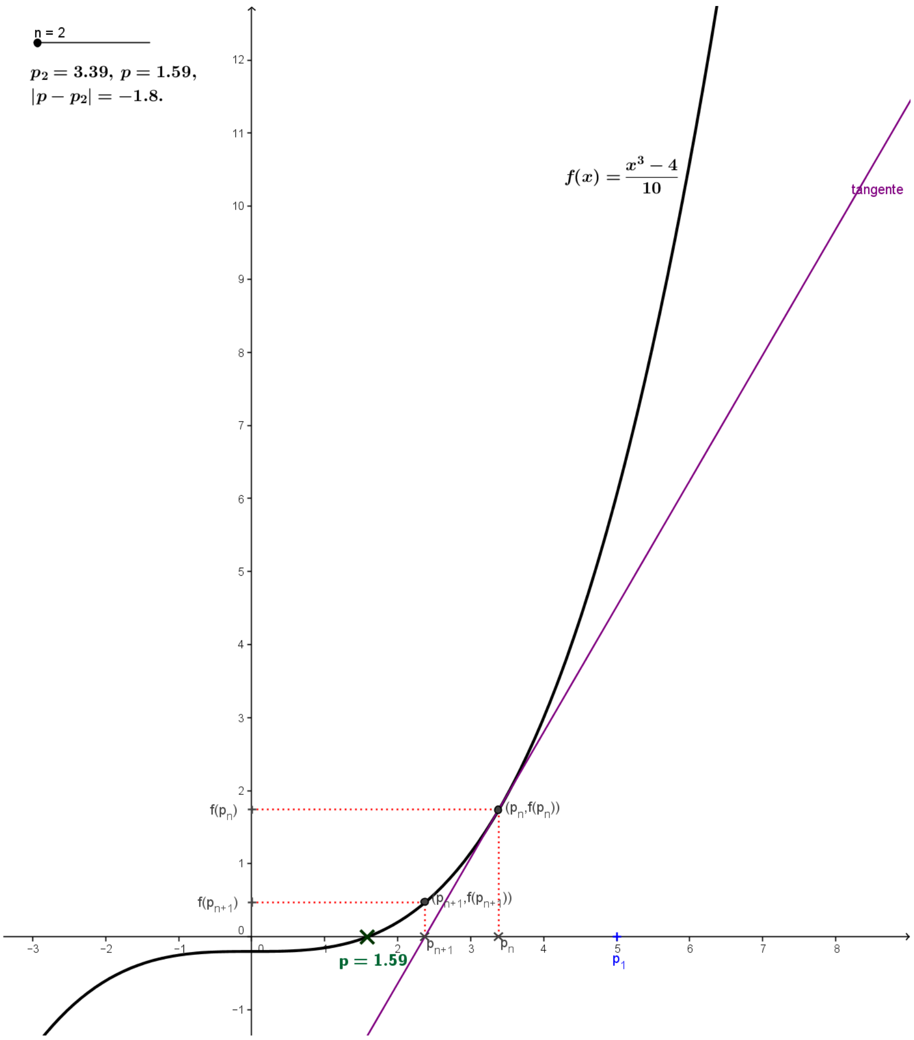


Figura 5.25: Representación gráfica del método de Newton, $n = 2$.

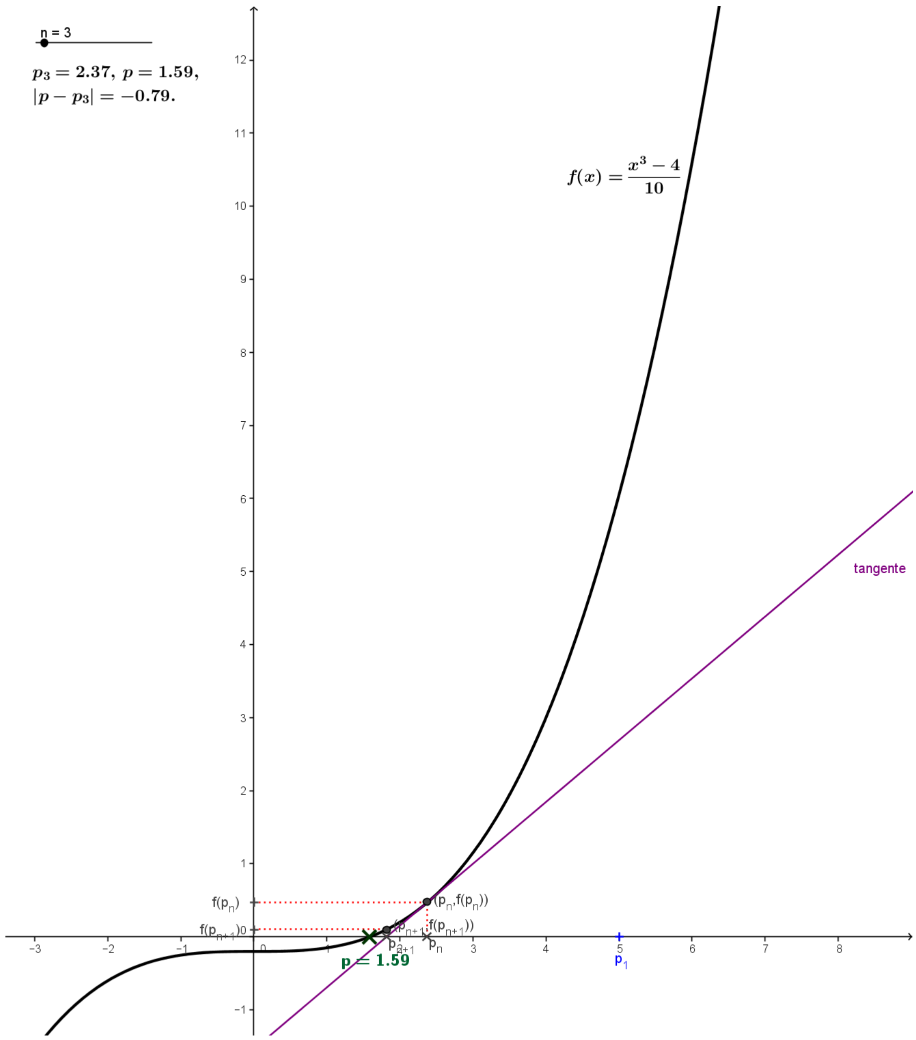


Figura 5.26: Representación gráfica del método de Newton, $n = 3$.

PASO 4: Convergencia.

Partiendo del archivo PR05-03-1aNewton.ggb, guarda la siguiente construcción en el archivo PR05-03-1bNewton.ggb

Copia la casilla A30 en el rango de celdas A31:A100 y actualiza todas las listas en las que hubieras utilizado el rango de celdas A1:A30 por el rango de celdas A1:A100; asimismo actualiza el deslizador n para que pueda tomar valores entre 1 y 100. Comprueba que para la función utilizada, $f(x) = \dfrac{x^3 - 4}{20}$, cualquier valor inicial p_1 nos llevará a la raíz de f; con excepción del valor $p_1 = 0$.

En general no se puede asegurar que el método converja hasta encontrar una raíz, pero podemos precisar cuándo es convergente utilizando el siguiente teorema.

Teorema 5.2 (Teorema de Convergencia)**.** *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$ de tal forma que $f(a)f(b) < 0$ y $f'(x)$ y $f''(x)$ son no-nulas y conservan el signo en $[a, b]$ entonces para cualquier aproximación inicial p_1 que satisfaga $f(p_1)f''(p_1) > 0$, el método de Newton puede calcular una raíz $f(x) = 0$ con cualquier grado de exactitud.*

PASO 5: Funciones con más de una raíz.

Partiendo del archivo PR05-03-1bNewton.ggb, guarda la siguiente construcción en el archivo PR05-03-1cNewton.ggb

Vamos ahora a probar el método con una función que contiene varias raíces. Cambia la función $f(x)$ por la siguiente

$$f(x) = x(\operatorname{sen} x + 2) - 5$$

e intenta encontrar las 3 raíces cambiando el valor inicial. Obviamente es sencillo si tomamos un valor de inicio cercano a la raíz buscada, pero prueba a encontrar las 3 raíces para valores de p_1 mayores que 6. Cuando los encuentres, anota los valores de inicio y la raíz hallada con ellos.

5.4. Cuestionario sobre los resultados

Vamos, por último, a comparar los tres métodos con la misma función

$$f(x) = e^x - x^2 + 7.$$

Introdúcela en los tres métodos implementados tomando como intervalo inicial $[-10, 10]$ para el de la bisección y la secante y el valor inicial -10 para el de Newton. Anota la raíz obtenida y las iteraciones necesarias para alcanzarla en cada uno de los métodos. Prueba también tomando el valor inicial 10 en el método de Newton y anótalo.

Responde ahora a las siguientes preguntas sobre los resultados de todos los ejercicios que además te servirán para comprobar que has entendido el trabajo realizado.

1. Si tenemos un intervalo $[a, b]$ y una función $f(x)$ continua en ese intervalo de tal forma que $f(a)f(b) < 0$, entonces

   ¿podemos asegurar que el método de la bisección converge a alguna raíz?

   ¿y el método de la secante?

   ¿y el de Newton?

2. Si una función, contínua y derivable en un intervalo $[a, b]$, tiene varias raíces en ese intervalo, ¿podemos encontrarlas todas con algún método sin modificar los valores de partida?

3. Según el número de iteraciones necesario para alcanzar una raíz, ¿qué método consideras que es más rápido? ¿y en segundo lugar?

4. Si existe un punto de inflexión en la función cercano a la raíz que se busca, ¿a qué método crees que afectará más? ¿hay algún método al que no afectaría?

5. Si tuvieras que hacer un programa, en cualquier lenguaje, que simulara el cálculo de una raíz de una función, ¿qué método crees que sería más costoso de programar? ¿por qué?

Práctica 6

Interpolación

Temporización

Esta práctica debe realizarse en dos sesiones de 2 horas presenciales.

- La primera sesión presencial debe dedicarse a las secciones 6.1, 6.2 y 6.3.
- La segunda sesión presencial debe dedicarse a las secciones 6.4, 6.5 y 6.6.

Si acabaras la tarea programada antes del tiempo estimado, debes pasar a la siguiente actividad programada. Por el contrario, si no acabaras en el tiempo programado deberás dedicar el tiempo que necesites para acabar la tarea en horas no presenciales.

Cada construcción deberás grabarla en un archivo con el nombre que se indique. Para empezar debes crear una carpeta cuyo nombre debe ser PRACTICA6 en la que almacenarás todas las construcciones de esta práctica.

Introducción

La interpolación consiste en la obtención de nuevos puntos intermedios a partir de un conjunto discreto de puntos conocidos. En ingeniería o ciencia es frecuente disponer de un conjunto de puntos obtenidos por muestreo o experimentación y el objetivo de la interpolación consiste en construir una función que pase por dichos puntos.

Más allá del concepto puramente analítico, las aplicaciones de la interpolación en informática son inmensas utilizándose, por ejemplo, para la compresión de vídeo, el cambio de frecuencia de muestreo en sonido, el cambio de tamaño en imágenes, la animación en videojuegos y realidad virtual, etc.

En esta práctica vamos a estudiar la interpolación con GeoGebra. Para ello, tras conocer los rudimentos básicos, muestrearemos una serie de puntos que luego interpolaremos y compararemos con la función real. Posteriormente, aplicaremos los conceptos adquiridos para desarrollar un sistema de animación sencillo.

6.1. Interpolación con GeoGebra

Guarda la siguiente construcción en el archivo PR06-01-IntGeo.ggb

6.1.1. Introducción de puntos de muestreo

- Resulta útil activar la vista de hoja de cálculo, para trabajar directamente con los valores. Para ello, tras elegir el modo «Álgebra y Gráficos», en el menú «Vista» activamos la opción «Hoja de Cálculo».

- Para introducir una serie de puntos, podemos utilizar las columnas A y B para las coordenadas x e y respectivamente. Los cuatro puntos son: $(1, -1), (2, 1), (3, -2), (4, 2)$.

- El siguiente paso es crear una lista de puntos seleccionando de $A1$ a $B4$, haciendo click con el botón derecho y eligiendo «crea $\rightarrow$ lista de puntos» (figura 6.1).

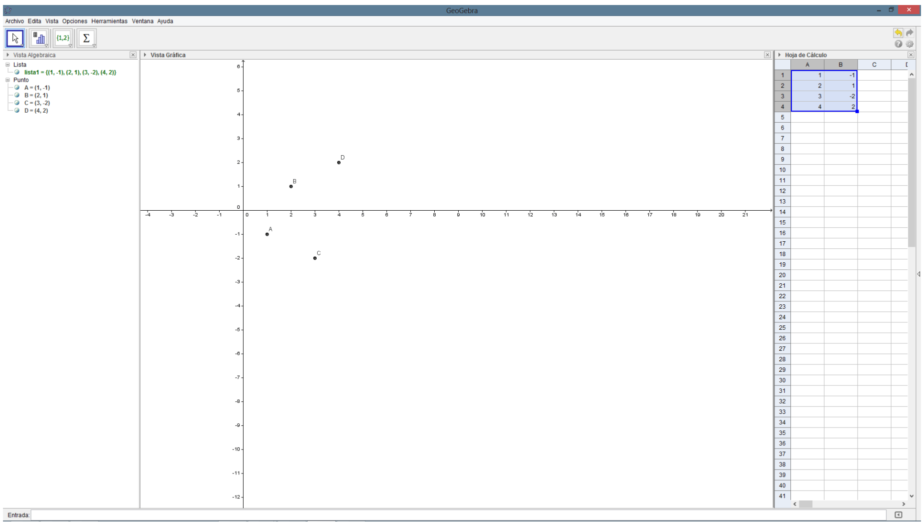


Figura 6.1: Creación una lista de puntos de muestreo

6.1.2. Obtención del polinomio de interpolación y cálculo de puntos interpolados

- Una vez tenemos los puntos de muestreo, creamos un polinomio que pase por dichos puntos con la orden `polinomio[lista1]`, donde `lista1` es el nombre de la lista de puntos que tenemos creada (figura 6.2).

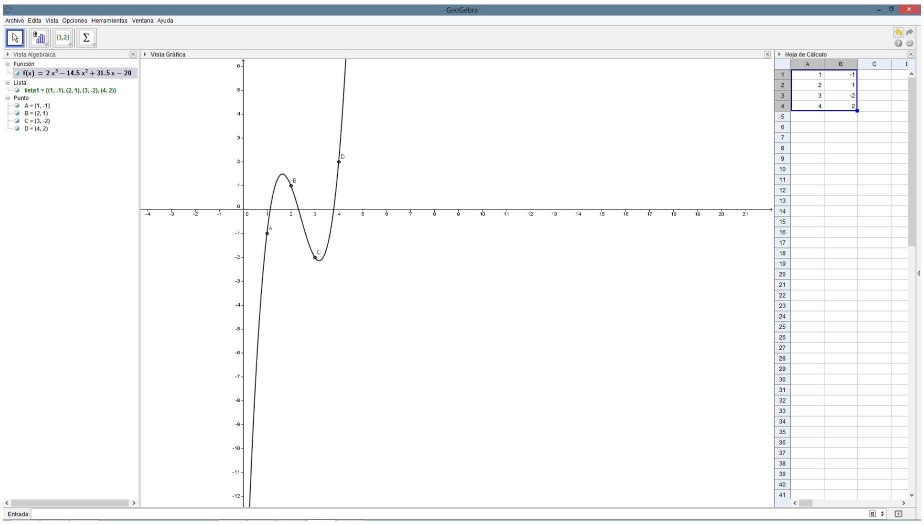


Figura 6.2: Creación del polinomio que pasa por dichos puntos

- Podemos usar este polinomio para aproximar la función original en puntos que no hemos muestreado, para ello introducimos las coordenadas $x = 1.5$, 2.5, 3.5 de los puntos que vamos a calcular en la columna C (figura 6.3).

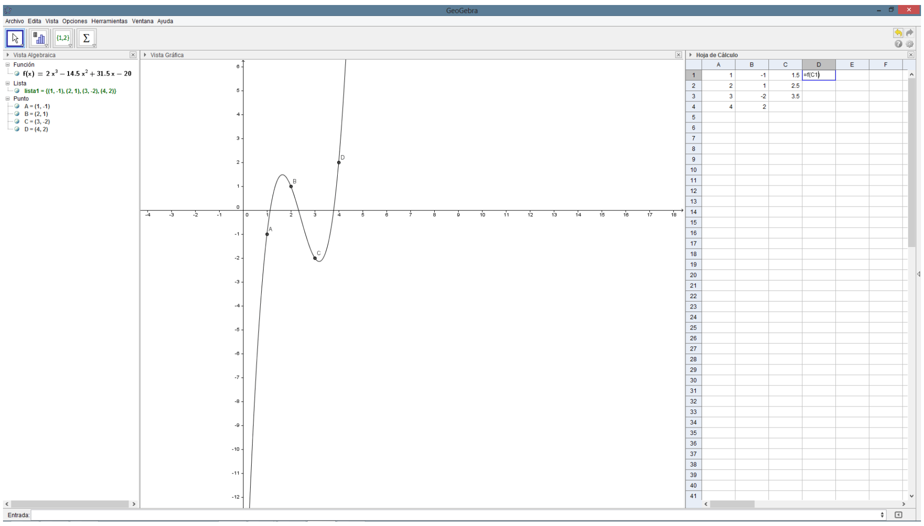


Figura 6.3: Introducción de puntos a interpolar

- Obtenemos la imagen correspondiente a $C1$ introduciendo `=f(C1)` en $D1$. Podemos copiar $D1$ y pegar a $D2$ y $D3$ para calcular las imágenes de los otros puntos (figura 6.4).

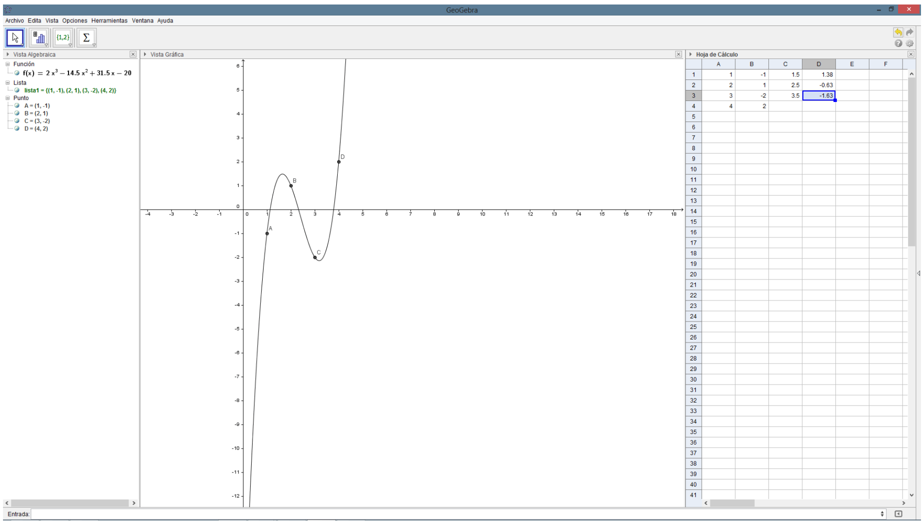


Figura 6.4: Cálculo de las imágenes interpoladas

- Podemos mover uno de los puntos originales de muestreo y ver cómo se recalcula tanto el polinomio como los valores interpolados (figura 6.5).

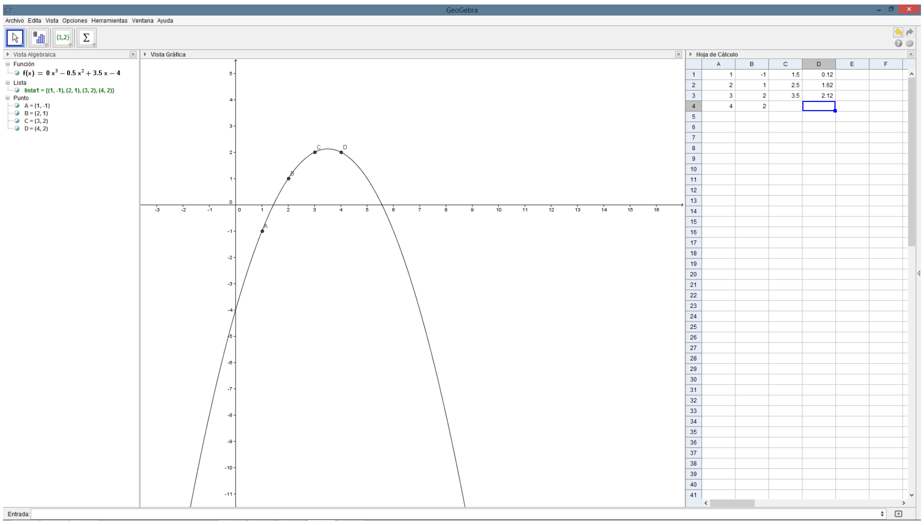


Figura 6.5: Interactividad

6.2. Aproximando una función

En esta sección el objetivo es aproximar una función continua mediante la interpolación de una serie de puntos muestreados.

6.2.1. Enfoque estático

Guarda la siguiente construcción en el archivo PR06-02-1Aprox.ggb

- Define la función $f(x) = x \cos x$.
- Muestrea dicha función para $x = 2, 4, 6, 8$ obteniendo 4 puntos.
- Obtén un polinomio de interpolación que pase por esos puntos. Llámalo $p(x)$ y ponle color rojo.
- Calcula las imágenes interpoladas para $x = 0, 3, 5, 7, 10$.
- Obtén el error cometido en la aproximación de dichos puntos. Para ello, puedes obtener las imágenes reales ($f(x)$) de dichos puntos y obtener la diferencia (el valor absoluto de la diferencia, usa `abs()`) entre las imágenes reales y las aproximadas.
- De esta forma:
  - la columna A contiene las coordenadas x de los puntos de muestreo,
  - la columna B contiene las coordenadas y de los puntos de muestreo,
  - la columna C contiene las coordenadas x de los puntos a interpolar,
  - la columna D contiene las coordenadas y de los puntos interpolados `D1 = p(C1)`,
  - la columna E contiene el error cometido al interpolar `E1 = abs(f(C1)-D1)`.

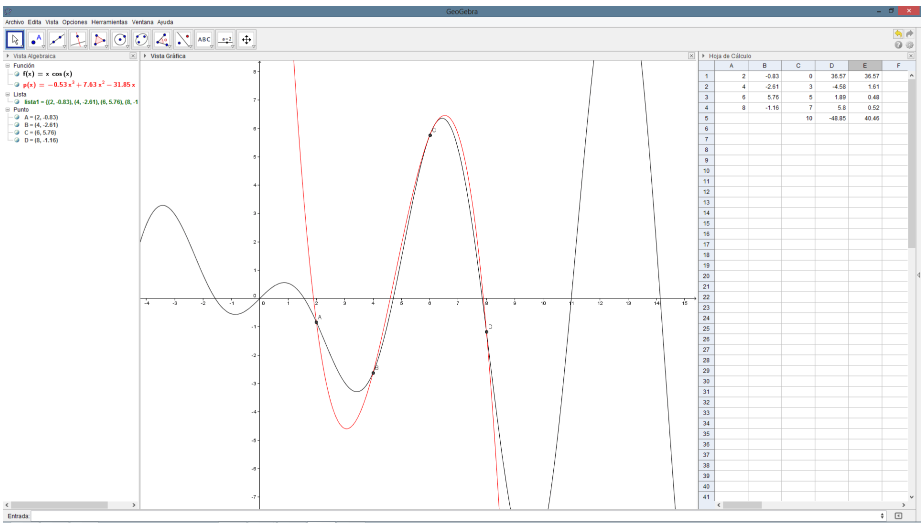


Figura 6.6: Aproximación a una función con un enfoque estático

6.2.2. Enfoque interactivo o dinámico

Guarda la siguiente construcción en el archivo PR06-02-2Aprox.ggb

Podemos convertir el modelo de interpolación anterior en algo más interactivo. Para ello, iniciamos un archivo de Geogebra nuevo y realizamos los pasos siguientes:

- Crea dos variables que nos determinen el intervalo de muestreo; en este caso serán $a = 1$ y $b = 10$.

- Crea un deslizador n, con mínimo 1, máximo 25 e incremento 1. Representará el número de puntos muestreo.

- Ajusta el redondeo a 4 posiciones decimales (menú «opciones → redondeo»).

- Crea dos rectas verticales que pasen por a y por b con el objetivo de delimitar gráficamente el intervalo considerado. Utiliza un color rojo y estilo punteado, desactivando la presentación de rótulo. Puedes utilizar el comando `recta[(a,0),EjeY]` para a y de forma similar para b.

- Define $f(x) = xcos(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

- Con el comando `secuencia`, crea una lista P de puntos de muestreo $(i, f(i))$; para ello utiliza la forma del comando con incremento, definiendo n puntos desde a hasta b con un incremento (separación) de $\frac{b-a}{n-1}$.

- Define ahora un polinomio de interpolación, $p(x)$, en el intervalo $[a, b]$ y que pase por la lista de puntos P; asígnale un color azul.

- Define una función de error $e(x)$, en el intervalo $[a, b]$ que será la diferencia entre $f(x)$ y $p(x)$, con el comando `e(x) = Función[abs(f(x)-p(x)),a,b]`. Asígnale un color rojo.

- Como medida del error, vamos a utilizar el área que encierra la función $e(x)$ entre a y b. Para ello, podemos usar la integral definida:

  `E_{total} = Integral[e(x),a,b];`

  pero podrás comprobar que GeoGebra es extremadamente lento en este caso (es posible que tarde 1 o 2 minutos en recalcular) por lo que borra dicha construcción y aproxímalo mediante una suma trapezoidal (similar a las sumas de Riemann que hemos visto) con el comando:

  `E_{total} = SumaTrapezoidal[e,a,b,100]`.

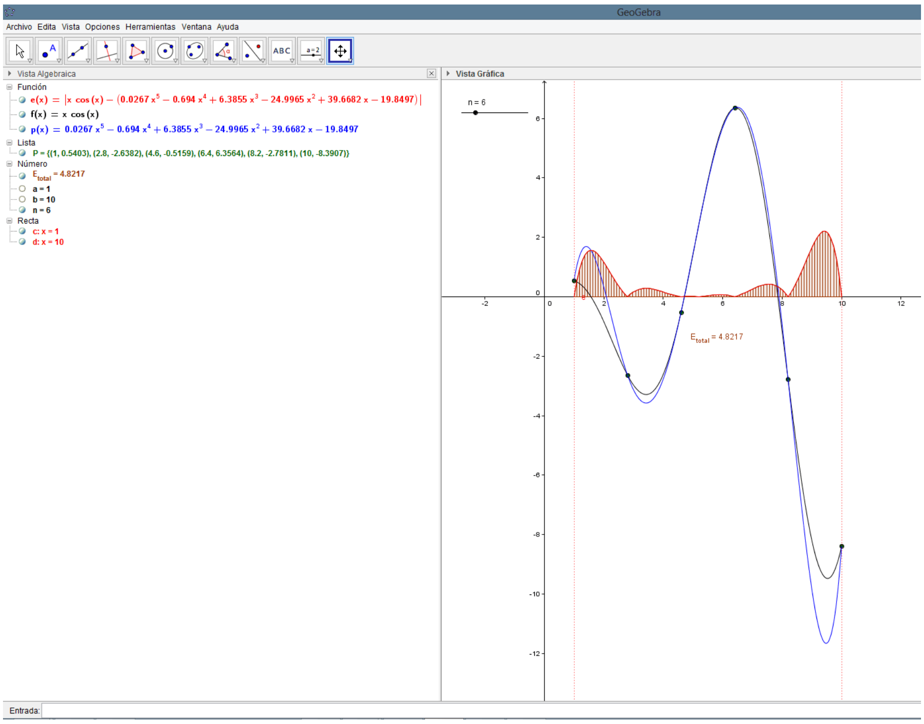


Figura 6.7: Aproximación a una función con un enfoque interactivo

Comentarios y reflexiones

- ¿A partir de qué número de puntos se consigue una aproximación perfecta en el intervalo?
- Modifica el intervalo para que sea de -10 a 10 (variables a y b). ¿Empeora o mejora la aproximación?
- La aproximación tiende a ser mejor cuanto mayor es la densidad de puntos de muestreo. No obstante, el polinomio de interpolación tiende a oscilar cuando el número de puntos es elevado. Para evitarlo, se utiliza la interpolación por partes que puedes consultar en el capítulo correspondiente del manual de teoría.

6.3. Animación mediante interpolación

La interpolación se utiliza frecuentemente para animar elementos en la producción de gráficos por ordenador; se define un parámetro mediante una serie de puntos clave (*key frames*) que luego se interpolan con una función continua que depende del tiempo.

En este ejercicio vamos a realizar la animación de un elemento sencillo: la posición y tamaño de un círculo.

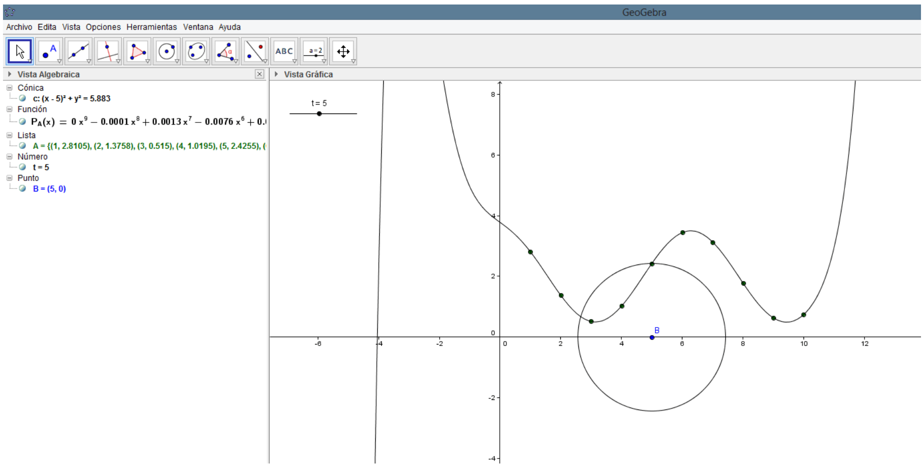


Figura 6.8: Animación

Guarda la siguiente construcción en el archivo PR06-03-1Anim.ggb

- Empieza con un proyecto de GeoGebra nuevo.
- Crea un deslizador que llamaremos t, con mínimo 1, máximo 10 e incremento 0.01. Este parámetro será el tiempo en nuestra animación.
- Define una lista, que llamaremos A, de puntos clave que sigan la función $\frac{3}{2}\cos(x) + 2$, para ello podemos usar el comando secuencia:
  `A=Secuencia[(i, cos(i) 1.5 + 2), i, 1, 10]`
- Define un función de interpolación que pase por los puntos de la lista A. Llámala $P_A(x)$.
- Crea un círculo en base a su centro y radio. El centro será el punto $B = (0, 0)$ y definimos el radio en función de P_A con la expresión:
  $P_A(t)$
- Comprueba que ahora moviendo el deslizador se anima el radio del círculo siguiendo los puntos de control. El centro, sin embargo, continúa estático; por ello, cambiamos la definición de B para que en lugar del punto $(0, 0)$ sea el punto $(t, 0)$. De esta forma el círculo avanzará a lo largo del eje de abscisas según vaya progresando el tiempo.
- Prueba a modificar los puntos de control que definen P_A para elegir tu propia animación personalizada. Una vez hayas acabado, redefine P_A a su forma original.

Investigaciones Podemos extender este modelo de animación añadiendo más parámetros animados u objetos distintos:

- ¿Se te ocurre como animar el color del círculo para que pase de negro ($P_A(t) = 0$) a rojo ($P_A(t) = 3.5$) en función de P_A? Para ello, debes investigar en las propiedades del círculo y modificar el color rojo en el apartado de «colores dinámicos» en la sección «avanzado». Teniendo en cuenta que el color va de 0 a 1, una expresión adecuada podría ser $P_A(t)/3.5$.

- Sería interesante que el círculo siguiera el camino trazado por la función $P_A(x)$. ¿Cómo modificarías el centro del círculo para que siguiera dicho camino? Una vez hecho esto, modifica el radio del círculo para que sea constantemente 1 en lugar de depender de $P_A(t)$.

- Introduce un nuevo objeto en la animación, un cuadrado de 0.5 de lado por ejemplo, y hazlo rotar mientras se desplaza a lo largo del eje de abscisas en función de t. Para ello puedes utilizar t como su desplazamiento y $72t$ como su rotación. Oculta la geometría que moleste en la animación.

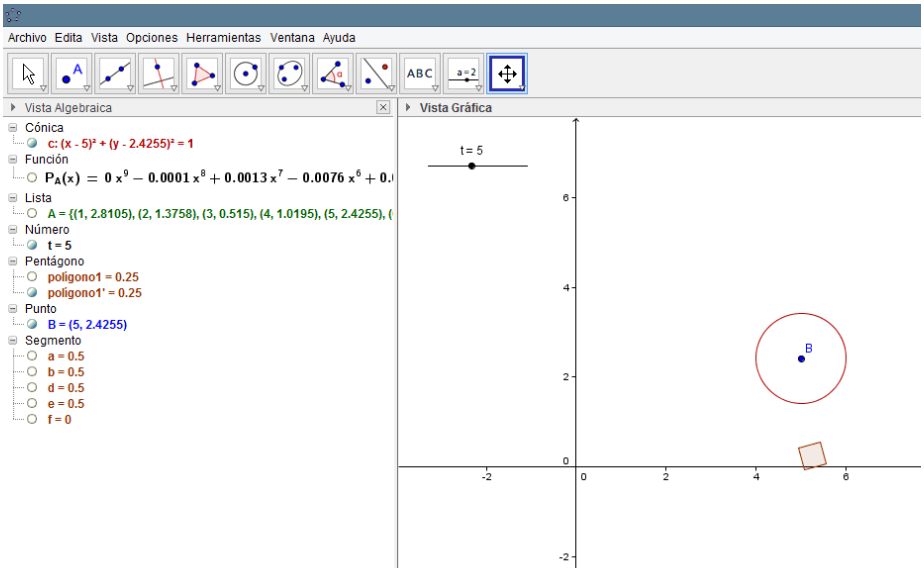


Figura 6.9: Animación extendida

6.4. Interpolación por Lagrange

Este método obtiene un polinomio de interpolación como combinación lineal de los distintos polinomios de Lagrange ($L_{n.k}(x)$) que tienen la propiedad de valer 1 en el punto en cuestión y 0 en los demás puntos.

Es muy conveniente que revises la sección correspondiente en los materiales de teoría.

6.4.1. Ejemplo de interpolación con 3 muestras

Guarda la siguiente construcción en el archivo PR06-04-1Lagrange.ggb

- Empieza con un proyecto de GeoGebra nuevo.

- Define la función $f(x) = cos(x)\, sen(2x) + 2$.

- Vamos a extraer 3 muestras de esta función en $x = 1, 3, 5$ con

```
x_0 = 1
x_1 = 3
x_2 = 5
y_0 = f(x_0)
y_1 = f(x_1)
y_2 = f(x_2)
```

- Podemos visualizar estas muestras creando los puntos correspondientes con

```
M_0 = (x_0,y_0)
M_1 = (x_1,y_1)
M_2 = (x_2,y_2)
```

- Para definir los polinomios de Lagrange correspondientes, hemos de considerar que el numerador de $L_{n,k}$ contiene los factores

$$(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

excepto el factor correspondiente a $(x - x_k)$. De igual forma, el denominador tiene todos los factores

$$(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_n)$$

excepto el factor correspondiente a $(x_k - x_k)$ que provocaría un 0 en el denominador. De esta forma obtenemos:

```
L_{2,0}(x) = (x-x_1)(x-x_2)/((x_0 - x_1)(x_0 - x_2))
L_{2,1}(x) = (x-x_0)(x-x_2)/((x_1 - x_0)(x_1 - x_2))
L_{2,2}(x) = (x-x_0)(x-x_1)/((x_2 - x_0)(x_2 - x_1))
```

Cambia el color de dichos polinomios a azul y el estilo a punteado.

- El polinomio de interpolación se obtiene multiplicando cada ordenada por el polinomio correspondiente de la siguiente forma:

```
P_2(x) = y_0 L_{2,0}(x) + y_1 L_{2,1}(x) + y_2 L_{2,2}(x)
```

Cambia el color del polinomio de interpolación a rojo, para que se pueda visualizar fácilmente. Comprueba como el polinomio de interpolación pasa por los puntos de muestra aunque no se parece mucho a la función original. Para ello necesitaríamos más muestras, aumentando la información disponible acerca de $f(x)$.

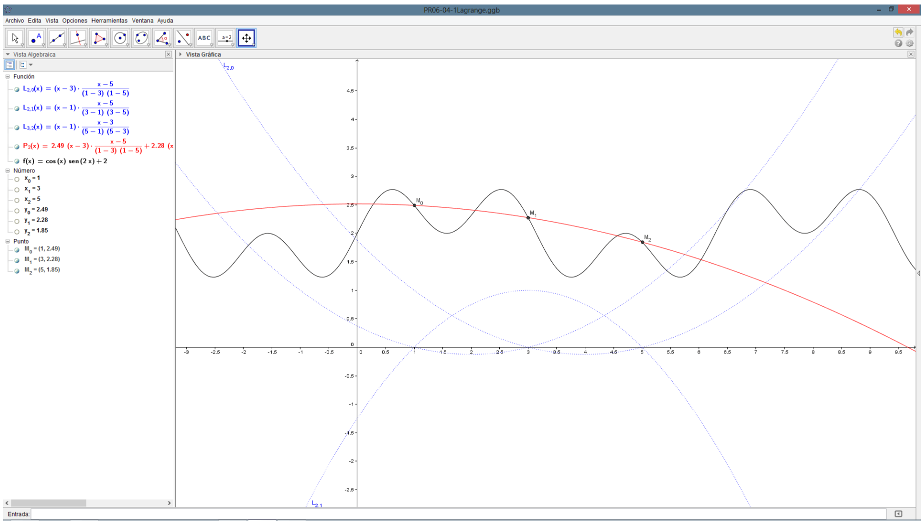


Figura 6.10: Interpolación por Lagrange con 3 muestras

6.4.2. Ejercicio de interpolación con 5 muestras

Guarda la siguiente construcción en el archivo PR06-04-2Lagrange.ggb

Realiza el ejemplo anterior con la misma función pero con las muestras

```
x_0 = 1
x_1 = 2
x_2 = 3
x_3 = 4
x_4 = 5
```

Para ello deberás construir los polinomios $L_{4,0}(x), \ldots, L_{4,4}(x)$ y el polinomio de interpolación $P_4(x)$ obteniendo un resultado similar a la figura 6.11.

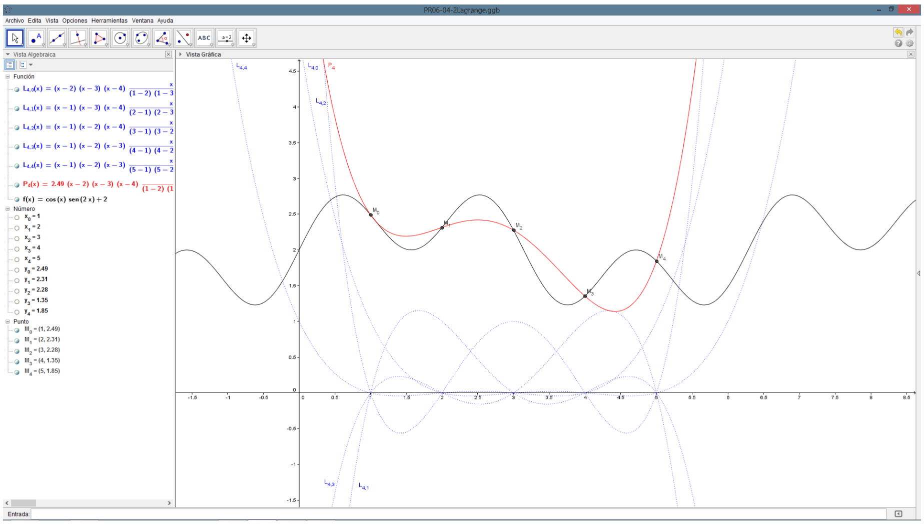


Figura 6.11: Interpolación por Lagrange con 5 muestras

6.5. Interpolación por diferencias divididas

Este método obtiene un polinomio de interpolación equivalente al obtenido por el método de Lagrange, si bien el cálculo es más sencillo de realizar a mano o de implementar por computador.

Es muy conveniente que revises la sección correspondiente en los materiales de teoría.

6.5.1. Ejemplo de interpolación con 3 muestras

Guarda la siguiente construcción en el archivo PR06-05-1DifDiv.ggb

- Empieza con un proyecto de GeoGebra nuevo.
- Define la función $f(x) = cos(x)\,sen(2x) + 2$ y extrae las 3 muestras en $x = 1, 3, 5$ como hemos hecho anteriormente en el apartado 6.4
- Para el método de las diferencias divididas vamos a hacer uso de la hoja de cálculo (actívala en el menú `vista`).
- Vamos a poner los índices de las muestras (0, 1 y 2) en las celdas A2, A4 y A6 respectivamente.
- Pondremos el texto `x_i` en B1 y `f(x_i)` en C1 a modo de cabecera. En B2, B4 y B6 pondremos las abscisas de las muestras tomadas (x_0, x_1, x_2) y en C2, C4 y C6 sus imágenes (y_0, y_1, y_2) respectivamente. Dejamos una fila entre cada muestra para poder poner los valores que faltan.
- Para obtener el valor de la celda D3 tenemos que obtener una fracción en la que el numerador será la resta de los dos valores diagonales en la columna anterior (en este caso $C4 - C2$), siempre restando la diagonal superior de

la inferior; y el denominador será la resta de los dos valores diagonales de en la columna de las abscisas (en este caso $B4 - B2$), también restando la diagonal superior de la inferior. De esta forma tenemos

$$D3 = (C4 - C2)/(B4 - B2) = -0.11$$

- De forma similar obtenemos que D5 es la resta de sus diagonales en la columna anterior ($C6 - C4$) partido por la resta de sus diagonales en la columna de abscisas ($B6 - B4$):

$$D5 = (C6 - C4)/(B6 - B4) = -0.22$$

- Para finalizar, realizamos el mismo proceso con E4 obteniendo

$$E4 = (D5 - D3)/(B6 - B2) = -0.03$$

- Una vez construida la tabla, obtenemos el polinomio de interpolación utilizando los valores de la diagonal superior como coeficientes y acumulando factores $(x - x_i)$ en función del paso en el que estemos:

```
P(x) = C2 + D3 (x - B2) + E4 (x - B2)(x - B4)
```

Cambia el color de $P(x)$ a rojo y comprueba que pasa por los puntos de muestra. Como puedes ver, obtenemos el mismo polinomio que en el caso de la interpolación de Lagrange (sección 6.4) ya que sólo hay un polinomio del mismo grado que pasa por esos puntos; son dos formas diferentes de obtener el mismo polinomio de interpolación.

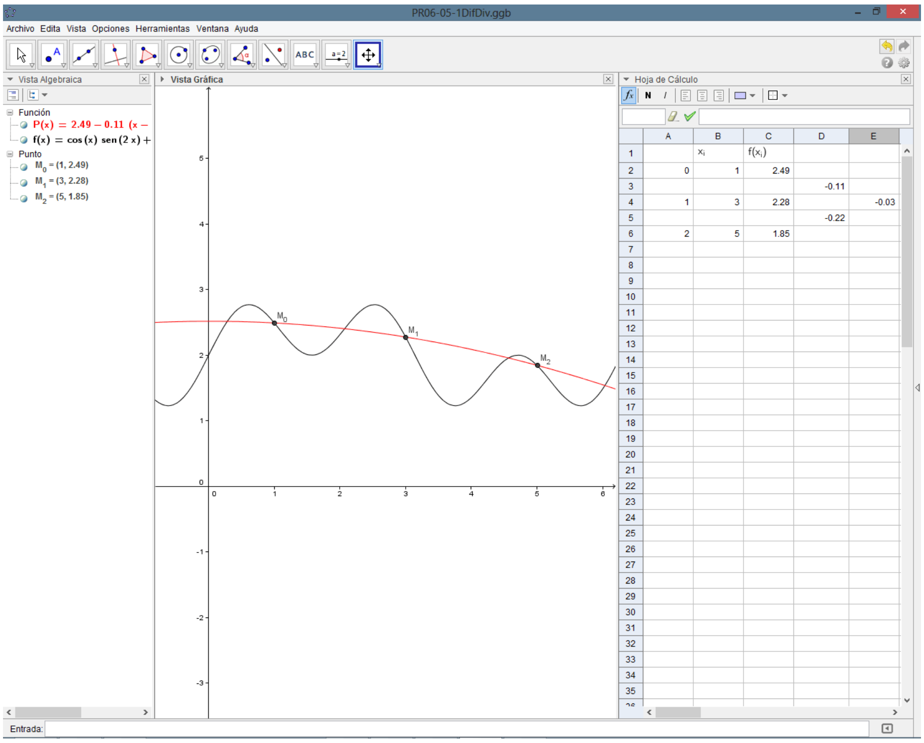


Figura 6.12: Interpolación por diferencias divididas con 3 muestras

6.5.2. Ejercicio de interpolación con 5 muestras

Guarda la siguiente construcción en el archivo PR06-05-2DifDiv.ggb

Realiza el ejemplo anterior con la misma función pero con las muestras

```
x_0 = 1
x_1 = 2
x_2 = 3
x_3 = 4
x_4 = 5
```

Para ello deberás construir la tabla de diferencias divididas y el polinomio de interpolación correspondiente obteniendo un resultado similar a la figura 6.13. Recuerda que debes construir los valores de la tabla en función de las otras celdas y no poner los valores literales directamente.

Observa de nuevo como el polinomio es el mismo al obtenido por el método de Lagrange.

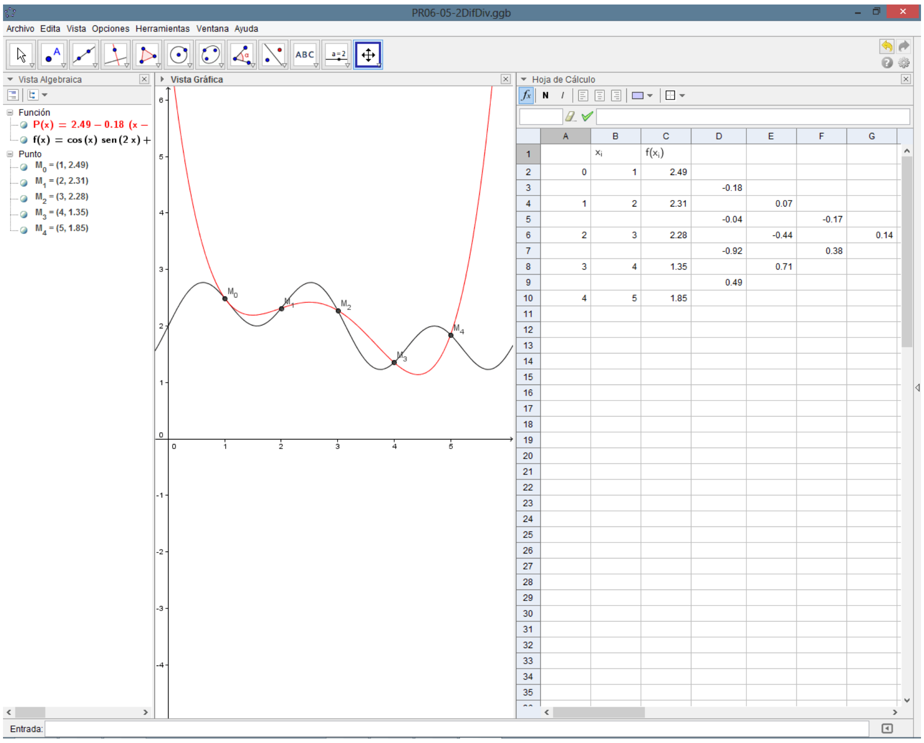


Figura 6.13: Interpolación por diferencias divididas con 5 muestras

6.6. Interpolación por Hermite

El método de interpolación de Hermite es similar al de las diferencias divididas si bien el polinomio obtenido no solo coincide con la función original en los puntos de muestreo, también lo hace en la primera derivada (pendiente) en dichos puntos. De esta forma, es una interpolación más precisa pero requiere más cálculo, conocer la derivada y el polinomio obtenido es de mayor grado para reflejar la información adicional sobre la función original.

Es muy conveniente que revises la sección correspondiente en los materiales de teoría.

6.6.1. Interpolación con 3 muestras

Guarda la siguiente construcción en el archivo PR06-06-1Hermite.ggb

- Empieza con un proyecto de GeoGebra nuevo y define la función $f(x) = cos(x)\, sen(2x) + 2$.
- Vamos a hacer uso de la hoja de cálculo (actívala en el menú `vista`). Empezamos introduciendo la cabecera de las columnas poniendo `z` en A1, `f(z)` en B1, y `2pt` a `6pt` de C1 a G1 respectivamente.
- Ahora introducimos las muestras en la tabla, poniendo las abscisas en la columna A y sus imágenes en la columna B. Hay que tener en cuenta que

los puntos se ponen por duplicado y que hay que dejar una fila entre los valores para poder construir la tabla:

```
A2 = 1    B2 = f(A2)
A4 = 1    B4 = f(A4)
A6 = 3    B6 = f(A6)
A8 = 3    B8 = f(A8)
A10 = 5   B10 = f(A10)
A12 = 5   B12 = f(A12)
```

- Visualiza los puntos de muestreo mediante los comandos:

```
M_0 = (A2,B2)
M_1 = (A6,B6)
M_2 = (A10,B10)
```

- La tabla se construye de la misma forma que con las diferencias divididas (sección 6.5) con la salvedad de que, al estar los puntos duplicados, en algunos casos (en C3, C7 y C11) realizaremos la resta entre los mismos valores obteniendo un 0. Esto se soluciona sustituyendo esos valores por la derivada correspondiente a ese punto ($f'(A2)$ en C3 y así sucesivamente). Construye el resto de la tabla hasta llegar al valor final en G7.

- Una vez tenemos la tabla completa, podemos construir el polinomio de interpolación de Hermite de forma análoga al de diferencias divididas

```
P(x) = B2 + C3(x-A2) + D4(x-A2)(x-A4) + ... +
     + G7 (x - A2) (x - A4) (x - A6) (x - A8) (x - A10)
```

Completa dicho polinomio, observando como pasa por los puntos de muestreo y es mucho más preciso al coincidir también con la pendiente en dichos puntos.

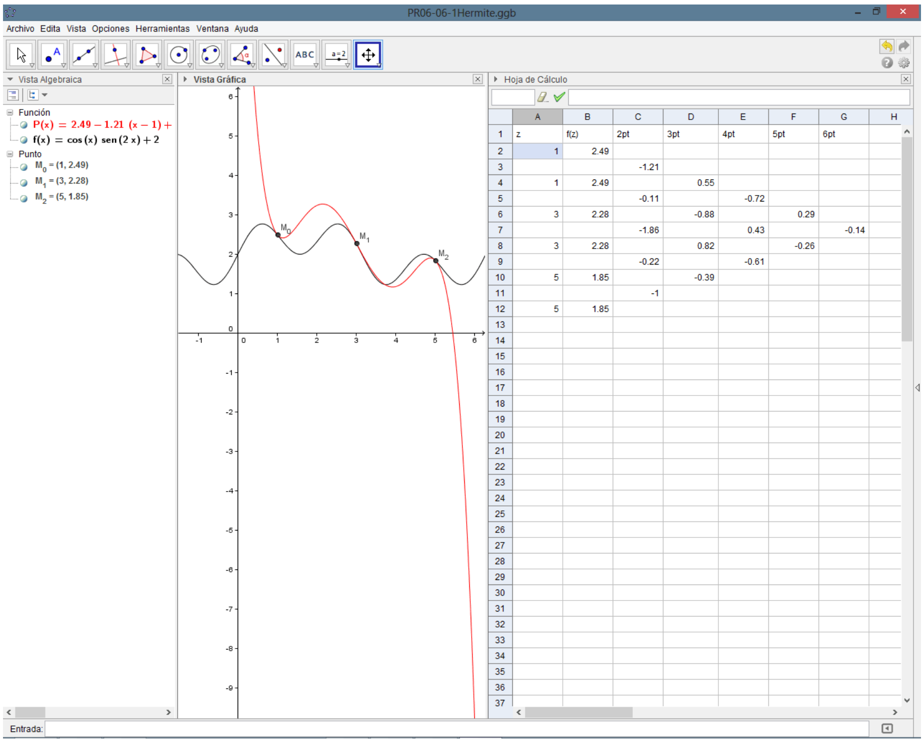


Figura 6.14: Interpolación por Hermite con 3 muestras