ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS
Núm. 32.3 (2014): 407-424
http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1235
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Conocimiento de los estudiantes para maestro cuando interpretan respuestas de estudiantes de primaria a problemas de división-medida

Pre-service teachers' knowledge when they interpret primary school students' answers to quotitive division problems

Ceneida Fernández Verdú, María Luz Callejo de la Vega
Dpto. de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante
ceneida.fernandez@ua.es, luz.callejo@ua.es

Maximina Márquez Torres
Escuela Técnica Industrial «Capitán Anselmo Belloso», Maracaibo, Venezuela
maximina.marquez@gmail.com

RESUMEN • El objetivo de esta investigación es indagar en el conocimiento especializado de contenido matemático de estudiantes para maestro (EPM) sobre problemas de división-medida. Los EPM respondieron a dos cuestionarios en los que resolvieron dos problemas de división-medida e interpretaron respuestas dadas por alumnos de primaria. Un alto porcentaje de EPM resolvieron con éxito los dos problemas, pero pocos fueron capaces de interpretar de forma adecuada las respuestas de los alumnos de primaria cuando empleaban un procedimiento correcto alternativo a la división. Los resultados obtenidos ofrecen a los formadores referencias iniciales acerca de los conocimientos de los EPM sobre problemas de división-medida y sobre el uso que hacen de estos conocimientos en una de sus tareas profesionales: interpretar las respuestas de los alumnos.

PALABRAS CLAVE: conocimiento especializado de contenido matemático; estudiantes para maestro; problemas de división-medida.

ABSTRACT • The aim of this study is to investigate pre-service teachers (PST) specialized content knowledge related to quotitive division problems. PST answered two questionnaires where they had to solve two quotitive division problems and interpret primary school students' answers to these problems. A high percentage of pre-service teachers solved the two problems successfully, but few of them were able to interpret pupils' answers where they used a correct alternative method to the division procedure. Results give information to teacher trainers about initial references of pre-service teachers' knowledge related to quotitive division problems and about the use of this knowledge in one of the professional tasks: interpreting pupils' answers.

KEYWORDS: specialized content knowledge; pre-service teachers; quotitive division problems.

Fecha de recepción: junio 2013 • Aceptado: noviembre 2013

Fernández Verdú, C., Callejo de la Vega, M.L., Márquez Torres, M (2014) Conocimiento de los estudiantes para maestro cuando interpretan respuestas de estudiantes de primaria a problemas de división-medida. *Enseñanza de las Ciencias*, 32.3, pp. 407-424

INTRODUCCIÓN

En los últimos años las investigaciones han mostrado la importancia de desarrollar la competencia «mirar de una manera profesional el pensamiento matemático de los estudiantes». Esta competencia integra tres destrezas: identificar las estrategias y procedimientos utilizados por los estudiantes, interpretar la comprensión de los estudiantes teniendo en cuenta las estrategias utilizadas y tomar decisiones de acción (Jacobs, Lamb y Philipp, 2010; Sherin, Jacobs y Philipp, 2010). Un aspecto importante de esta competencia es el uso que el maestro hace de sus conocimientos a la hora de mirar de una manera profesional el pensamiento matemático de los estudiantes. La indagación sobre el conocimiento vinculado al desarrollo de esta competencia docente está configurando una agenda internacional de investigación apoyada en la noción de «conocimiento matemático para enseñar» (*Mathematical Knowledge for Teaching*, MKT) (Ball, Thames y Phelps, 2008; Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2012; Varas, Lacourly, López y Giaconi, 2013).

Estudios previos han mostrado que el desarrollo de esta competencia no es fácil, pero que se puede comenzar en los programas de formación inicial. Evidencias de este desarrollo se pueden encontrar en las investigaciones de Fernández, Llinares y Valls (2013), en el contexto de la proporcionalidad, y de Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares (2014) en el contexto de la derivada. Sin embargo, las dificultades encontradas en el desarrollo de esta competencia hacen necesarias más investigaciones acerca de cuál es el conocimiento matemático para enseñar qué deben tener los estudiantes para profesor en diferentes dominios matemáticos, generando así información para los programas de formación inicial.

Uno de los dominios matemáticos en los que se ha mostrado que tanto alumnos de primaria como los propios estudiantes para maestro tienen dificultades es el de las estructuras multiplicativas. En este estudio se indaga sobre el uso del conocimiento matemático para enseñar de estudiantes para maestro cuando interpretan respuestas de estudiantes de educación primaria en el contexto de las estructuras multiplicativas. Ello permitirá obtener información para potenciar, en los programas de formación inicial de maestros, el desarrollo de la competencia «mirar de una manera profesional el pensamiento matemático de los estudiantes» en el dominio de las estructuras multiplicativas.

A continuación se presenta una revisión de las investigaciones centradas en la resolución de problemas de estructura multiplicativa que ponen de manifiesto las dificultades que tienen los estudiantes y los profesores o estudiantes para profesor para resolver problemas de división-medida. Esta revisión muestra que las investigaciones que se centran en el conocimiento del profesor han indagado en cómo resuelven este tipo de problemas y las dificultades que se les presentan, pero no en cómo interpretan respuestas de los estudiantes. Este trabajo aporta información sobre cómo estudiantes para maestro interpretan las respuestas de alumnos de primaria a problemas de división-medida donde emplean distintos procedimientos y cometen algunos errores.

Los problemas de estructura multiplicativa

En el contexto de las estructuras multiplicativas, nos centraremos en los problemas de división-medida, correspondientes a la estructura de «isomorfismo de medidas» (Vergnaud, 1994). En este contexto las investigaciones han mostrado que los estudiantes tienen más dificultades en comprender el significado de la división como medida –determinar cuántos grupos de un tamaño dado se pueden formar con un número dado de objetos– que la división como reparto, así como en interpretar el significado del resto de esta división (Carpenter, Lindquist, Matthews y Silver, 1983; Contreras y Gómez, 2006; Greer, 1992; Greer, Verschaffel y De Corte, 2002; Lago, Rodríguez, Enesco, Jiménez y Dopico, 2008).

En los problemas en los que la división tiene el significado de división-medida las investigaciones han identificado los procedimientos y los errores más comunes de los estudiantes. En cuanto a los procedimientos, se han identificado los siguientes: modelización o conteo, sumas o restas repetidas, doble y mitad, multiplicación, estrategias constructivas y división (Downton, 2009). Estos procedimientos son conceptualmente diferentes desde el punto de vista de las representaciones (por ejemplo, objetos o dibujos en la modelización y números en las operaciones) y del tipo de razonamiento que se utiliza (aditivo en el caso de sumas o restas repetidas y multiplicativo si se aplica la multiplicación, división, doble y mitad o procedimientos constructivos). Un resultado interesante es que los estudiantes que utilizan procedimientos alternativos a la división como sumas o restas repetidas, que transparentan mejor el significado del número de grupos que se forman y de lo que sobra, tienen mayor éxito que los que realizan la operación de dividir (Li y Silver, 2000; Silver, Shapiro y Deutsch, 1993). El error más común que cometen los estudiantes en este tipo de problema es que no interpretan correctamente el significado del resto cuando se realiza una división en situaciones en que es necesario añadir una unidad al cociente para determinar el número de grupos que se deben formar (Callejo y Vila, 2009; Carpenter *et al.*, 1983; Greer, Verschaffel y De Corte, 2002; Lago *et al.*, 2008).

Otras investigaciones han tenido como objeto el conocimiento de los futuros profesores necesario para resolver estos problemas. Este punto se desarrollará en el siguiente apartado.

Conocimiento del profesor sobre las estructuras multiplicativas

Una gran parte de las investigaciones sobre el conocimiento del profesor acerca de los problemas de estructura multiplicativa se ha centrado en los significados que dan a la división, la interpretación del resto, el uso de las propiedades de la división y la formulación de problemas.

Graeber, Tirosh y Glover (1986) han señalado que algunos EPM tienden a interpretar la división solo como reparto de un conjunto de objetos de forma equitativa entre un número de grupos (división-partitiva) y que esto les genera dificultades en las situaciones en las que la división tiene el significado de medida. Este resultado también ha sido constatado por Ball (1990), que propuso a futuros profesores de primaria y secundaria tareas de división con fracciones, división por cero y división con ecuaciones algebraicas. Su estudio mostró que algunos de ellos fueron incapaces de dar respuestas correctas y que muy pocos supieron proporcionar explicaciones sobre el significado de estas operaciones en los diferentes dominios. Por ejemplo, en la tarea de división con fracciones muchos futuros profesores solo fueron capaces de interpretar la división en términos de reparto, la cual no es siempre válida en situaciones de división de un entero entre una fracción (por ejemplo 4 : 2/5), o de una fracción entre otra fracción que tienen el significado de división medida (por ejemplo 4/5 : 3/4).

Por otra parte, Campbell (1996) indicó que los EPM tenían dificultades para resolver tareas que exigían una adecuada comprensión de los conceptos básicos relacionados con el «teorema de la división» (la igualdad «dividendo = divisor × cociente + resto»). En su investigación daba a los EPM la descomposición de un número en factores o una expresión del tipo 6 × 147 + 1 y les pedía calcular el cociente o/y el resto cuando se divide por uno de los factores de la multiplicación o por uno de sus divisores. Algunos EPM dieron una fracción como resto de la división, otros respondieron con un resto mayor que el divisor o necesitaron hacer los cálculos de las expresiones dadas y aplicar luego el algoritmo de la división, mostrando dificultades en el manejo de las propiedades de la división. En esta misma línea Kaasila, Pehkonen y Hellinen (2010) propusieron a EPM la siguiente tarea: «Sabemos que 498 : 6 = 83, ¿cómo podríamos deducir de esta relación (sin usar el algoritmo de la división) el resultado de 491 : 6?»; en este estudio los resultados mostraron que los EPM tenían dificultades para relacionar el efecto sobre el cociente y el resto de la división, de disminuir en varias unidades el dividendo.

En el contexto de problemas realistas, Verschaffel, De Corte y Borghart (1997) indicaron que algunos EPM tenían dificultades en dar una solución correcta en un problema de división-medida en el que había que añadir una unidad al cociente para dar la solución.

En relación con la formulación de problemas, Castro y Castro (1996) propusieron a EPM que redactaran el enunciado de un problema que se resolviese con una división de números naturales primos entre sí. La mayoría de ellos redactó correctamente un problema de división, pero hubo un sesgo pronunciado hacia los problemas de división-partitiva, hecho que fue interpretado en el sentido de que el significado de la división como medida estaba muy poco arraigado en los EPM.

Estas investigaciones informan sobre el conocimiento de los EPM cuando resuelven problemas de estructura multiplicativa en el ámbito de la división, y algunos de ellos, en particular, sobre los problemas de división-medida. Solo el estudio de Verschaffel *et al.* (1997) de la revisión realizada se centra en la relación entre cómo los EPM resuelven el problema y cómo valoran algunas respuestas de los alumnos. Sin embargo este estudio tenía como objeto los problemas realistas y las categorías de las respuestas seleccionadas atendían al carácter realista o no de estas. Este estudio mostró que los EPM tenían una fuerte tendencia a no utilizar el conocimiento del mundo real y a no realizar consideraciones realistas, ni al resolver los problemas, ni al valorar las respuestas de los estudiantes. Por lo tanto, los estudios previos dan poca información sobre cómo los EPM interpretan las respuestas a problemas de división-medida cuando los estudiantes de educación primaria resuelven estos problemas empleando procedimientos alternativos a la división, o cómo interpretan los errores al ignorar el significado del resto de la división. Indagar sobre estas cuestiones nos dará información sobre el conocimiento que deben tener los EPM para hacer este tipo de tareas y así tener información para los programas de formación sobre cómo desarrollar la competencia «mirar de una manera profesional el pensamiento matemático de los estudiantes».

MARCO TEÓRICO

Nuestro estudio se centra en la línea de investigación del conocimiento matemático para la enseñanza (*Mathematical Knowledge for Teaching*, MKT) (Ball *et al*., 2008), que juega un papel importante en el desarrollo de la competencia «mirar de una manera profesional el pensamiento matemático de los estudiantes», pues el uso de este conocimiento permitirá al futuro maestro interpretar las respuestas de los estudiantes, yendo más allá del hecho de determinar si la respuesta es correcta o incorrecta.

Shulman (1986) categorizó el conocimiento que los profesores necesitan para enseñar distinguiendo entre: conocimiento del contenido (*content knowledge*), conocimiento del contenido pedagógico (*pedagogical content knowledge*) y conocimiento del currículo (*curricula knowledge*). Posteriormente, Ball *et al*. (2008) propusieron tres subcategorías del conocimiento del contenido: conocimiento común del contenido (*common content knowledge*), que es el conocimiento que cualquier persona puede usar para resolver un problema matemático; conocimiento especializado del contenido (*specialised content knowledge*), que es el conocimiento matemático específico para enseñar, y conocimiento del horizonte matemático (*horizon content knowledge*), que es el conocimiento que integra la capacidad de relacionar los conceptos matemáticos entre sí y con el currículo.

En este estudio, nos centramos en el «conocimiento especializado de contenido matemático», que entendemos como el conocimiento de matemáticas que permite a los profesores desarrollar tareas profesionales, como representar los conceptos matemáticos, proporcionar explicaciones sobre reglas y procedimientos matemáticos, interpretar las respuestas de los estudiantes, evaluar si muestran una comprensión de los conceptos matemáticos y examinar y comprender procedimientos de resolución de problemas no usuales. Por tanto, este conocimiento permitirá al futuro maestro interpretar las respuestas de los estudiantes. En el caso específico de los problemas de división-medida, el conocimiento especializado de contenido matemático implica conocer los significados de la división y los procedimientos de resolución de los problemas de división-medida (modelización o conteo, sumas y restas repetidas, constructivos, multiplicación, división, etc.), así como la forma en que va evolucionando el uso de estos procedimientos a lo largo de la escolaridad y las dificultades más comunes que encuentran los alumnos en relación con la resolución de estos problemas.

En este estudio se indagará sobre el conocimiento especializado de contenido matemático de un grupo de estudiantes para maestro cuando interpretan respuestas dadas por alumnos de sexto curso de primaria (11-12 años) a problemas de división-medida con resto en el dominio de los números naturales.

Las preguntas de investigación son las siguientes:

- ¿Cómo resuelven los EPM problemas de división-medida?
- ¿Cómo interpretan los EPM las respuestas dadas por alumnos de sexto curso de primaria (11-12 años) a problemas de división-medida con resto que previamente han resuelto?
- ¿Qué relación hay entre la corrección en la resolución de los problemas de los EPM y su interpretación de las respuestas de los estudiantes?

MÉTODO

Participantes y contexto

Los participantes del estudio fueron los 84 estudiantes para maestro inscritos en el primer curso de un programa de formación inicial para «Maestro de primaria».

Los datos se recogieron en el primer semestre del curso académico y los EPM no habían recibido todavía ninguna información específica relacionada con los problemas de estructura multiplicativa. El hecho de recoger los datos antes de que los EPM hubiesen recibido formación específica viene justificado porque la forma en que los EPM responden a las tareas proporciona información al formador sobre las referencias iniciales de los EPM y le ayudará a adecuar el conocimiento de didáctica de la matemática en el programa de formación.

Instrumentos y procedimiento

Los EPM respondieron a dos cuestionarios en los que se les pedía: *a*) resolver dos problemas de división-medida (cuestionario 1), y *b*) interpretar cuatro respuestas dadas por alumnos de primaria a estos mismos problemas (cuestionario 2).

Los enunciados de estos problemas son los siguientes:

> *Farolas*. Para celebrar el quinto centenario de su pueblo, el alcalde decidió pintar de diferentes colores las farolas de la calle principal. Las tres primeras las pintó de rojo, las tres siguientes de verde, las tres siguientes de azul, y así sucesivamente, sin repetir colores. Si se pintaron 35 farolas, ¿cuántos colores diferentes necesitó?
>
> *Albergue*. 103 estudiantes están en un albergue. Las mesas del comedor tienen 20 asientos y hay 15 mesas. Si van completando las mesas sin dejar asientos libres, ¿cuántas mesas ocuparán?

Estos problemas fueron seleccionados de otras investigaciones (Callejo y Vila, 2009; Greer, Verschaffel y De Corte, 2002) y modificados. Habían mostrado que alumnos de 10-14 años tenían dificultades en su resolución. Pueden ser resueltos mediante una división o por otros procedimientos alternativos. En ambos problemas el resto de la división es distinto de cero y hay que añadir una unidad más al cociente para responder correctamente a la pregunta planteada.

Para la elaboración del cuestionario 2 los problemas «Farolas» y «Albergue» fueron resueltos por un grupo de estudiantes de sexto curso de educación primaria. De sus respuestas se seleccionaron procedimientos de resolución identificados en las investigaciones, como son la división y otros procedimientos alternativos a la división. Se seleccionaron intencionalmente procedimientos alternativos diferentes, desde el punto de vista conceptual, para cada uno de los problemas: modelización o conteo y constructivo para «Farolas» y sumas o restas repetidas para «Albergue»; el procedimiento constructivo se basa en un razonamiento de tipo multiplicativo, y la modelización o conteo y las sumas y restas repetidas en un razonamiento de tipo aditivo:

- Modelización o conteo: formación de grupos iguales de tres farolas numerándolas y contando el total de grupos que se han formado.
- Constructivo: partiendo de un grupo (3 farolas-1color) se aplican las propiedades de las funciones lineales: $f(kx) = kf(x)$ y $f(x+y) = f(x) + f(y)$ hasta alcanzar el número más próximo al dividendo por exceso. Así, el alumno dice que si para 3 farolas necesita 1 color, para 15 farolas necesitará 5 colores ($f(15) = 5 \cdot f(3) = 5 \cdot 1 = 5$), y que para 30 necesitará 10 colores ($f(30) = 10 \cdot f(3) = 10 \cdot 1 = 10$). Entonces, para 33 farolas necesitará 11 colores ($f(33) = f(30) + f(3) = 1 + 10 = 11$ colores), y para 36 farolas necesitará 12 colores ($f(36) = f(33) + f(3) = 11 + 1 = 12$ colores).
- Sumas repetidas: sumar el divisor tantas veces como sea necesario hasta alcanzar el número más próximo al dividendo por exceso.
- Restas repetidas: restar al dividendo el divisor tantas veces como sea necesario hasta obtener un número inferior al divisor.

Algunas de las respuestas mostraban los errores más comunes que cometen los estudiantes, como errores en la ejecución de los cálculos o no interpretar correctamente el significado del resto cuando se realiza una división (Callejo y Vila, 2009; Carpenter *et al.*, 1983; Greer, Verschaffel y De Corte, 2002; Lago *et al.*, 2008). De las cuatro respuestas elegidas de alumnos de sexto curso de primaria de cada uno de los problemas para construir el cuestionario, dos estaban basadas en una división (una de ellas con un error de interpretación del resto) y dos en procedimientos alternativos (una de ellas con un error en la ejecución del procedimiento).

Las figuras 1 y 2 muestran las respuestas seleccionadas. En el problema «Farolas» (figura 1) las respuestas B y C se basan en el procedimiento de la división; en la respuesta B no se interpreta correctamente el resto de la división, y en la C se interpreta el resto de manera adecuada, considerando el contexto. Las respuestas A y D se basan en procedimientos alternativos: la respuesta A muestra un procedimiento de conteo que es coherente con las características de la situación, pero en el que se comete un error de repetición en la enumeración de las farolas, aunque se llega a un resultado correcto, y la respuesta D muestra un procedimiento constructivo sin errores partiendo del divisor hasta superar al dividendo.

En el problema «Albergue» (figura 2), las respuestas A y D usan la división. En la respuesta A hay un error de cálculo y el resultado no es correcto, y en la respuesta D existe una interpretación adecuada del resto con relación al contexto considerado. Las respuestas B y C se basan en procedimientos alternativos a la división, sumas y restas repetidas, que reflejan la comprensión de la estructura de la situación, pero hay un error de cálculo en la respuesta C que llega a un resultado no correcto.

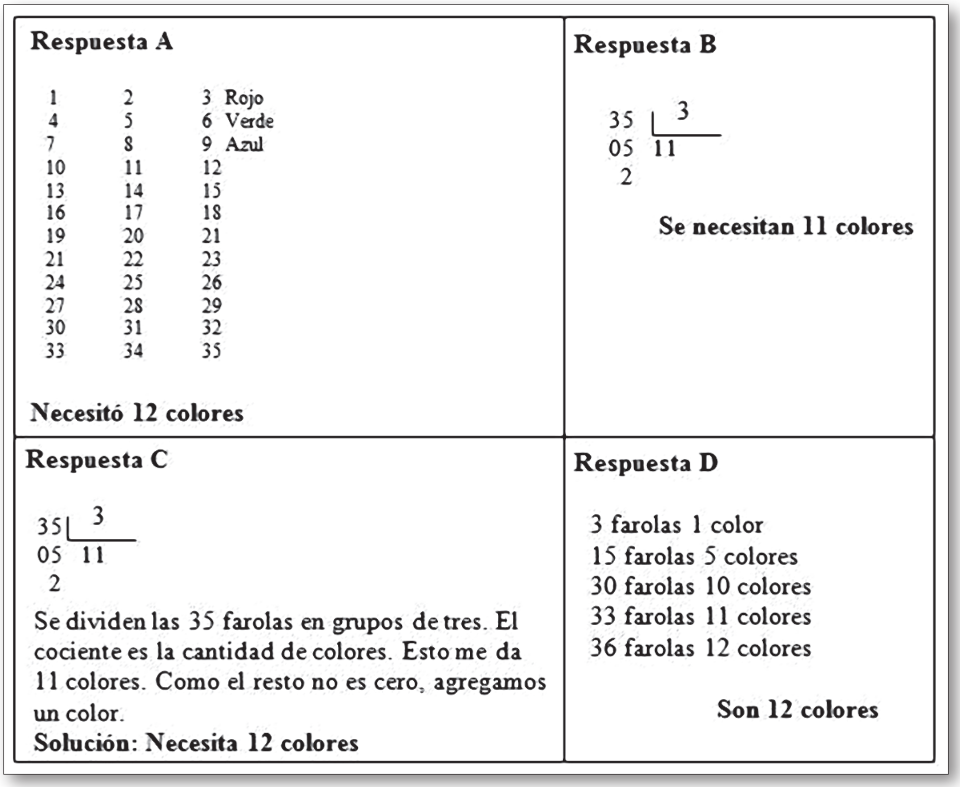

Fig. 1. Respuestas seleccionadas para el problema «Farolas» en el cuestionario 2.

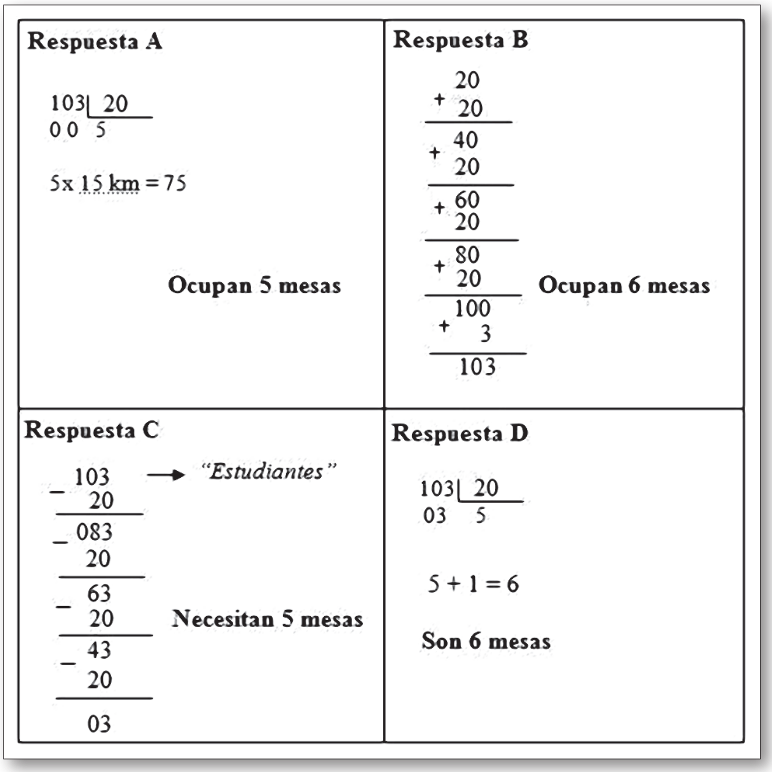

Fig. 2. Respuestas seleccionadas para el problema «Albergue» en el cuestionario 2.

Los EPM resolvieron los cuatro problemas del cuestionario 1, y 15 días más tarde respondieron al cuestionario 2, en el que debían interpretar las respuestas dadas por los alumnos de primaria, otorgándoles una puntuación y justificándola: 1 punto si consideraban que la respuesta era *totalmente correcta*, 0 puntos si pensaban que la respuesta era *absolutamente incorrecta*, y 0,5 puntos si consideraban la respuesta *parcialmente correcta*.

Análisis

Las resoluciones de los problemas (cuestionario 1) por los EPM fueron clasificadas como correctas, regulares o incorrectas. Considerábamos la respuesta correcta cuando realizaban una división o usaban otros procedimientos alternativos interpretando correctamente el resto; considerábamos la respuesta como regular cuando los EPM realizaban una división e indicaban «lo que sobraba» pero sin darle una interpretación adecuada; y fueron codificadas como incorrectas cuando no tenían en cuenta el resto de la división en relación a la situación planteada o la respuesta no tenía sentido. La figura 3 muestra ejemplos de la clasificación de las respuestas en el problema «Albergue» (cuestionario 1).

Respuesta	Ejemplos	
Correcta	103 |20 3 5 → mesas completas. → Sobran 3 alumnos, que deberán sentarse en la 6ª mesa.	El EPM realiza una división y añade una unidad al cociente explicando que al sobrar 3 alumnos se necesita una mesa más
Regular	103 |20 3/ 5 → Ocuparan 5 mesas Dividimos los estudiantes entre el número de sillas por cada mesa (20 sillas), completan 5 mesas, pero 3 estudiantes quedan sin sentarse.	El EPM realiza una división. No añade una unidad al cociente pero indica que 3 estudiantes se quedan sin mesas
Incorrecta	103 estudiantes 15 mesas 20 sillas 103 |15 130 6'9 05 6'9 mesas casi 7	El EPM realiza una división de número de estudiantes entre número de mesas

Fig. 3. Categorización de respuestas de los EPM al problema «Albergue» (cuestionario 1).

Con relación al cuestionario 2, en primer lugar se examinaron las puntuaciones dadas por los EPM a cada una de las respuestas de los alumnos de primaria y se agruparon según la puntuación dada. En segundo lugar, con el propósito de generar categorías para analizar las justificaciones dadas por los EPM, se siguió un proceso inductivo (Strauss y Corbin, 1994) para identificar grupos de justificaciones a cada una de las puntuaciones dadas a la resolución de los problemas. Finalmente consideramos de manera conjunta estos grupos para identificar categorías de justificaciones en los dos problemas. Para ello, un grupo de tres investigadores analizó una muestra de justificaciones dadas por los EPM para generar las categorías. Estas categorías se fueron refinando al analizar nuevas justificaciones. Con este procedimiento pudimos identificar 5 categorías: explicación, claridad del procedimiento, adecuación del procedimiento, corrección del procedimiento y corrección del resultado. La siguiente tabla muestra ejemplos de las categorías de las justificaciones identificadas.

Tabla 1
Ejemplos de las categorías de las justificaciones identificadas

Justificaciones de los EPM	*Categoría*
«... el resultado está bien, no ha explicado por qué le suma un 1 al resultado que le ha dado la división. Para conseguir el punto entero, tiene que explicarlo» (Problema «Albergue». Justificación para la puntuación 0.5 en la respuesta basada en una división correcta).	Explicación
«... el resultado es correcto, pero el procedimiento realizado no suficientemente comprensible para llegar a la solución» (Problema «Farolas». Justificación para la puntuación 0,5 en la respuesta basada en un procedimiento alternativo correcto).	Claridad Procedimiento
«... el resultado está bien pero un alumno de sexto de primaria ya tendría que conocer otro mecanismo para resolver el problema» (Problema «Farolas». Justificación para la puntuación 0,5 en la respuesta basada en un procedimiento alternativo).	Adecuación procedimiento
«... está bien planteado y la división bien hecha, pero se le ha olvidado que el resto son farolas que también hay que pintar de otro color, por lo tanto serían 12 colores» (Problema «Farolas». Justificación para la puntuación 0,5 en la respuesta basada en una división con error).	Corrección procedimiento
«... el resultado es incorrecto» (Problema «Farolas». Justificación para la puntuación 0 en la respuesta basada en una división con error).	Corrección resultado

RESULTADOS

Exponemos los resultados en tres apartados: *a*) resolución de los problemas por parte de los EPM; *b*) relación entre la corrección de las respuestas en el cuestionario 1 y la puntuación dada a las respuestas de los alumnos de primaria del cuestionario 2, y *c*) justificaciones de los EPM en el cuestionario 2 a la puntuación dada de las respuestas de los alumnos de primaria.

Las tablas 2 y 3 muestran el número de EPM que resolvieron de manera correcta, regular o incorrecta los problemas «Farolas» y «Albergue» (cuestionario 1) y las puntuaciones que dieron a las respuestas dadas por los alumnos de primaria (cuestionario 2).

Resolución de los problemas

64 EPM resolvieron el problema «Farolas» correctamente (76,2%), 5 regular y 15 de manera incorrecta (tabla 2). De los EPM que resolvieron el problema correctamente, 59 realizaron una división y 5 utilizaron procedimientos alternativos, como sumas o restas repetidas o un conteo. Los 5 EPM que resolvieron el problema regular utilizaron una división que daba como resultado el cociente, e indicaron que sobraban 2 farolas. De los 15 EPM que resolvieron el problema incorrectamente, 4 realizaron una división, 3 utilizaron procedimientos alternativos y 8 dieron respuestas sin sentido.

Tabla 2
Respuestas de los EPM al problema «Farolas» (cuestionario 1)
y las puntuaciones dadas a las respuestas de los alumnos de primaria (cuestionario 2)

Respuestas EPM Cuestionario 1	*Puntuaciones EPM cuestionario 2*											
	Respuesta A (Alternativo con error)			*Respuesta B* (División con error)			*Respuesta C* (División con interpretación correcta del resto)			*Respuesta D* (Alternativo correcto)		
	1	*0,5*	*0*	*1*	*0,5*	*0*	*1*	*0,5*	*0*	*1*	*0,5*	*0*
Correctas (64)*	21	39	4	0	28	36	59	5	0	30	29	5
Regulares (5)	1	2	2	1	3	1	5	0	0	2	2	1
Incorrectas (15)	7	4	4	1	8	6	12	2	1	5	5	5
Total 84	*29*	*45*	*10*	*2*	*39*	*43*	*76*	*7*	*1*	*37*	*36*	*11*

*El número que aparece entre paréntesis en las respuestas de los EPM al cuestionario 1 es el número de EPM que dio una respuesta correcta, regular o incorrecta.

62 EPM resolvieron el problema «Albergue» correctamente (73,8%), 1 regular y 21 de forma incorrecta (tabla 3). De los primeros, 54 realizaron una división y 8 utilizaron otros procedimientos alternativos: sumas o restas repetidas. Un EPM resolvió el problema regular haciendo una división, dando como resultado el cociente e indicando el resto, pero no supo interpretar su significado en el contexto de la situación, y 21 EPM resolvieron el problema incorrectamente. De estos últimos 13 realizaron una división, 7 utilizaron procedimientos alternativos, y 1 dio una respuesta sin sentido.

Tabla 3
Resoluciones del problema «Albergue» (cuestionario 1)
y las puntuaciones dadas a las respuestas de los alumnos de primaria (cuestionario 2)

Respuestas EPM Cuestionario 1	*Puntuaciones EPM cuestionario 2*											
	Respuesta A (División con error)			*Respuesta B* (Alternativo correcto)			*Respuesta C* (Alternativo con error)			*Respuesta D* (División con interpretación correcta del resto)		
	1	*0,5*	*0*	*1*	*0,5*	*0*	*1*	*0,5*	*0*	*1*	*0,5*	*0*
Correctas (62)*	0	5	57	38	23	1	3	34	25	51	10	1
Regulares (1)	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0
Incorrectas (21)	0	0	21	6	12	3	1	8	12	18	3	0
Total	*0*	*6*	*78*	*44*	*36*	*4*	*5*	*42*	*37*	*69*	*14*	*1*

*El número que aparece entre paréntesis en las respuestas de los EPM al cuestionario 1 es el número de EPM que dio una respuesta correcta, regular o incorrecta.

Estos datos indican que para los EPM los dos problemas resultaron igualmente fáciles y que mayoritariamente usaban de manera correcta la división con interpretación correcta del resto.

Relación entre la resolución de los EPM a los problemas y la puntuación dada a las respuestas de los estudiantes de primaria

De la tabla 2 destacamos lo siguiente:

- De los 64 EPM que resolvieron correctamente el problema «Farolas», 59 puntuaron con un 1 la respuesta C (división con interpretación correcta del resto) (92,1%), pero solo 30 (46,8%) puntuaron el procedimiento alternativo correcto (respuesta D) con 1.
- De los 64 EPM que resolvieron correctamente el problema, 21 de ellos (32,8%) puntuaron con un 1 el procedimiento alternativo con errores (A), mientras que 36 (56,2%) puntuaron con un 0 la respuesta que usaba la división con errores (B).
- De los 15 EPM que resolvieron incorrectamente el problema «Farolas», 12 puntuaron la respuesta correcta de la división con 1 (80,0%) y solo 5 (6,6%) puntuaron con un 1 la respuesta correcta D, basada en un procedimiento alternativo.

De la tabla 3 destacamos lo siguiente:

- De los 62 EPM que habían resuelto el problema «Albergue» correctamente, 51 puntuaron con un 1 la respuesta D, basada en una división con una interpretación correcta del resto (82,2%), pero solo 38 (60,3%) puntuaron con 1 la respuesta que usaba un procedimiento alternativo correcto (B).
- De los 62 EPM que resolvieron correctamente el problema, 57 de ellos (91,9%) puntuaron con 0 la respuesta que usaba la división con errores (A), pero solo 25 (40,3%) puntuaron también con 0 el procedimiento alternativo con error (C).
- De los 21 EPM que resolvieron el problema incorrectamente 18 reconocieron la división como un procedimiento correcto (85,7%), pero solo 6 (28,5%) puntuaron el procedimiento alternativo correcto (B) con un 1.

Por tanto, en los dos problemas, los EPM que los resolvieron correctamente puntuaron más alto los procedimientos correctos con división que los alternativos correctos, y puntuaron más bajo los procedimientos incorrectos con división que los alternativos incorrectos. Por otra parte, hubo EPM que no fueron capaces de resolver el problema correctamente o de dar una explicación explícita del significado del resto, pero sí puntuaron como correcta (con un 1) la respuesta de los estudiantes de primaria en la que utilizaban la división e interpretaban correctamente el resto, pero muy pocos fueron capaces de puntuar como correcta (con un 1) la respuesta basada en un procedimiento alternativo correcto. Se constata, pues, que los EPM de este estudio tuvieron más dificultades en reconocer y valorar los procedimientos alternativos que aquellos que usaban la operación de dividir, lo que indica mayor valorización de los métodos formales frente a los alternativos.

En cuanto a la puntuación de los procedimientos con error se observa un comportamiento diferente según se tratara de la división o de procedimientos alternativos: los EPM fueron más condescendientes con los errores en los procedimientos alternativos que cuando se usaba el método formal de la división.

Justificaciones de los EPM a las puntuaciones dadas a las respuestas de los alumnos de primaria

En el apartado anterior hemos visto que en ambos problemas los EPM puntuaron mejor las respuestas correctas basadas en una división que las basadas en procedimientos alternativos, pero que fueron más condescendientes con los errores en los procedimientos alternativos que los que usaban una división. En este apartado exponemos las justificaciones de los EPM a las puntuaciones dadas a cada uno de los tipos de respuestas de los estudiantes de primaria.

a) Respuestas correctas basadas en una división
7 de los 84 EPM en el problema «Farolas» y 14 en el problema «Albergue» puntuaron la respuesta correcta, basada en una división con 0,5, y lo justificaron diciendo que la explicación que aparecía en la respuesta del estudiante era insuficiente:

> 0,5 porque no queda clara la explicación que nos da al final sobre el resto aunque la solución es correcta (Problema «Farolas»).
>
> El resultado está bien, no ha explicado por qué le suma un 1 al resultado que le ha dado la división. Para conseguir el punto entero, tiene que explicarlo (Problema «Albergue»).

b) Respuestas correctas basadas en procedimientos alternativos
36 de los 84 EPM en «Farolas» y 36 en «Albergue» puntuaron con 0,5 las respuestas correctas basadas en procedimientos alternativos. Justificaron su decisión de dos maneras diferentes. Unos destacaron la falta de claridad en el procedimiento:

> La solución es correcta, pero el procedimiento utilizado no es suficientemente comprensible para llegar a la solución (Problema «Farolas»).
>
> Se ve claramente el proceso que se ha seguido para resolverlo y el resultado es correcto, pero le falta justificar o por lo menos indicar qué es cada cardinal (Problema «Albergue»).

Otros, la falta de adecuación del procedimiento:

> El resultado está bien, pero un alumno de sexto de primaria ya tendría que conocer otro mecanismo para resolver el problema (Problema «Farolas»).
>
> El niño ha ido sumando los asientos que hay en una mesa, más lo de la otra, y así sucesivamente hasta que ha llegado al número de estudiantes; luego ha visto cuántas veces lo ha hecho y esas son las mesas que necesita. Este planteamiento y el resultado son correctos, pero un niño de sexto curso de primaria debería usar otro tipo de procedimiento para resolverlo (Problema «Albergue»)

11 EPM en el problema «Farolas» y 4 en «Albergue» puntuaron con un 0 el procedimiento alternativo correcto porque no entendieron lo que había hecho el alumno de primaria.

c) Respuestas basadas en una división con interpretación incorrecta del resto
Este tipo de respuesta de los estudiantes de primaria fue puntuada con 0 por 43 de los 84 EPM en el problema «Farolas», y por 78 en el problema «Albergue», indicando que el resultado era incorrecto.

Fue puntuada con 0,5 por 39 EPM en «Farolas» y por 6 en «Albergue», indicando que el estudiante había utilizado un procedimiento correcto, pero reconocían que había cometido un error:

> Está bien planteado y la división bien hecha pero se le ha olvidado que el resto son farolas que también hay que pintar de otro color, por lo tanto, sería 12 colores (Problema «Farolas»).
>
> No es correcto del todo porque aunque sabe que hay que dividir, no ha resuelto bien la división. El resto no es cero (Problema «Albergue»).

d) Respuestas basadas en procedimientos alternativos con error
En el problema «Farolas» los 29 EPM que puntuaron con 1 la respuesta alternativa con error lo justificaron por la corrección del resultado: «Este alumno ha utilizado ensayo-error pero lo ha realizado correctamente».

Los 45 EPM que puntuaron con un 0.5 en el problema «Farolas» y los 42 en el problema «Albergue» dieron tres tipos de argumentos. Unos la corrección del procedimiento:

> El niño se ha equivocado al escribir los números, pero ha entendido el problema (Problema «Farolas»).
>
> El niño sabe lo que está haciendo aunque el resultado no es el correcto. El procedimiento es adecuado (Problema «Albergue»).

Otros que la explicación era insuficiente (estos EPM no consideraron el error técnico):

> Está bien planteado y el resultado es correcto, pero le falta explicar cómo sabe que son 12 colores (Problema «Farolas»).

Y otros la falta de claridad del procedimiento:

> El proceso es un poco liado pero de todas formas no da la solución correcta al problema ya que olvida que sobran 3 alumnos y no les da mesa a esos tres alumnos (Problema «Albergue»).

En el problema «Albergue», los 37 EPM que puntuaron esta respuesta C con un 0 argumentaron que el alumno de primaria no daba un resultado correcto porque no había tenido en cuenta el resto pero no se dieron cuenta del error de cálculo (corrección resultado): «La solución es incorrecta porque el niño no entiende el valor del resto 3».

En resumen, las justificaciones dadas por los EPM a las puntuaciones de 0 y 0,5 en las respuestas basadas en un procedimiento alternativo correcto fueron debidas en ambos problemas a que para los EPM el procedimiento empleado no estaba del todo claro; no era adecuado para un niño de sexto de primaria, o el EPM no terminaba de comprender el procedimiento empleado por el estudiante de primaria. Además, el hecho de que puntuaran mejor las respuestas basadas en un procedimiento alternativo con error que las respuestas basadas en una división con error se justifica porque muchos EPM, en la respuesta basada en el procedimiento alternativo, no identificaron el error sino que puntuaron con 1 o 0,5, justificando que el resultado era correcto. Sin embargo, identificar que la respuesta basada en la división era incorrecta resultaba más fácil, pues el resultado era incorrecto. En este caso, muchos EPM puntuaron con 0, justificando que el resultado era incorrecto, y aquellos que puntuaron con 0,5 «valoraron» el hecho de que el alumno de primaria hubiese empleado una división (procedimiento correcto), pero penalizaron no haber obtenido un resultado correcto.

DISCUSIÓN

Este estudio se enmarca en la línea de investigación sobre el conocimiento del profesor y tiene como objetivo indagar en el conocimiento especializado de contenido matemático de un grupo de estudiantes para maestro en relación con problemas de división-medida con resto. La mayoría de las investigaciones realizadas hasta el momento se ha centrado en cómo los EPM resuelven problemas de división-medida identificando sus dificultades. Este conocimiento es necesario pero no suficiente para interpretar las respuestas de los estudiantes, pues es preciso el uso del conocimiento especializado de contenido matemático, que va más allá de saber resolver los problemas de división-medida con resto; el uso de este conocimiento permite a los profesores realizar tareas específicas de la enseñanza, como interpretar las respuestas de estudiantes identificando los procedimientos utilizados y las dificultades más comunes (competencia «mirar de manera profesional el pensamiento matemático de los estudiantes»).

Con el objetivo de indagar y examinar el conocimiento especializado de contenido matemático de los EPM, se ha analizado no solo cómo resuelven los EPM los problemas de división-medida sino también como interpretan las respuestas dadas por alumnos de sexto curso de primaria utilizando distintos procedimientos a los mismos problemas que ellos previamente habían resuelto. En este estudio, se ha entendido por *interpretar*, cómo los EPM evalúan las respuestas de los estudiantes puntuándolas con 0, 0.5 o 1 y qué justificaciones ofrecen a las puntuaciones dadas.

El conocimiento especializado de contenido matemático del grupo de EPM

Un alto porcentaje de EPM resolvió los dos problemas propuestos de forma correcta, siendo el procedimiento más empleado la división y en menor medida otros procedimientos alternativos a la división, como el conteo o las sumas o restas repetidas. Además, la mayoría de EPM que había resuelto correctamente los problemas puntuó con un 1 las respuestas de los estudiantes de primaria basadas en una división con interpretación correcta del resto, sin embargo, solo la mitad de ellos puntuaron con un 1 las respuestas basadas en un procedimiento alternativo correcto.

En las justificaciones que dieron los EPM a las puntuaciones de 0 y 0,5 en las respuestas basadas en un procedimiento alternativo correcto, solo una parte de ellos justificó que el procedimiento empleado no era adecuado para un alumno de sexto curso. Los otros EPM expresaron que el procedimiento era poco claro o que no era suficientemente comprensible, lo que denota falta de conocimiento relativo a los procesos de construcción del conocimiento matemático, que forma parte del conocimiento especializado de contenido matemático.

Por otra parte, se observa la tendencia de algunos EPM a puntuar mejor las respuestas basadas en procedimientos alternativos con error que las repuestas basadas en una división con error. Parece ser que estos EPM penalizaron más un error en la división que un error en procedimientos alternativos. Una posible interpretación de este hecho viene dada por una de las características del cuestionario: la respuesta basada en un procedimiento alternativo con un error tenía un resultado correcto (problema «Farolas»), mientras que la respuesta basada en una división con error tenía un resultado incorrecto. Por tanto, puede ser que los EPM valoraran más la corrección del resultado que el procedimiento utilizado.

Además, algunos EPM que resolvieron regular o de forma incorrecta un problema fueron capaces de identificar las soluciones correctas. Este resultado puede explicarse por las características del cuestionario 2, que parece que ayudó a algunos EPM a identificar respuestas correctas dadas por los estudiantes de primaria al plantearles a los EPM al mismo tiempo varias respuestas con diferentes características.

Implicaciones para la formación de maestros

En lo que se refiere al conocimiento de matemáticas del maestro, y teniendo en cuenta los resultados obtenidos, nuestra investigación pone de relieve que, aunque los EPM tuvieron un alto nivel de éxito en la resolución de los problemas (alrededor del 75%), en mucha menor proporción fueron capaces de interpretar de forma adecuada las respuestas de alumnos de primaria a esos mismos problemas (conocimiento especializado de contenido matemático). Estos resultados subrayan la necesidad de desarrollar la competencia necesaria para que los maestros puedan identificar los distintos procedimientos de resolución de problemas de estructura multiplicativa e interpretarlos en el marco del currículo de primaria. Para ello se debe tener en cuenta el grado de comprensión que tienen los alumnos del significado de la división, el razonamiento multiplicativo y el nivel de dominio del algoritmo de esta operación (Downton, 2009; Li y Silver, 2000), así como de los principales errores que cometen. Las tareas para los EPM formadas por la dupla «resolver-interpretar respuestas» permite conectar distintos dominios de conocimientos necesarios para la enseñanza, al proponer la realización de una tarea profesional para el maestro como es interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes.

La realización de este tipo de tareas implica conocer las matemáticas y las teorías del aprendizaje y construcción del conocimiento matemático, ya que en su resolución se utilizan conocimientos de didáctica de la matemática sobre el aprendizaje matemático para diagnosticar y proponer justificaciones y procesos de intervención. Luego, el propio proceso de resolución de la segunda tarea puede producir conocimiento en la medida en que los EPM pueden identificar respuestas correctas que ellos mismos no han elaborado, y en algunos casos a pesar incluso de no haber sabido resolver correctamente los problemas propuestos. Este proceso de construcción del conocimiento profesional está vinculado a la forma en la que se presenta a los EPM al conocimiento científico de didáctica de la matemática que es pertinente para estas situaciones.

Si esta segunda tarea se propone cuando los EPM aún no han recibido formación específica acerca de los problemas de estructura multiplicativa, como se hizo en esta investigación, la forma en que los EPM responden a esta proporciona información al formador sobre las referencias iniciales de los EPM acerca de este tipo de problemas que le ayudará a adecuar el conocimiento de didáctica de la matemática, que en el programa de formación se convierte en objeto de aprendizaje. Además, sirve de punto de reflexión inicial para los EPM.

En el caso de que los EPM hayan recibido formación específica, estas tareas permiten desarrollar la competencia «mirar de una manera profesional» (*Professional noticing*) en el pensamiento matemático de los estudiantes, en la medida en que los EPM se ejerciten en las destrezas de *a*) identificar las estrategias usadas por los alumnos, *b*) interpretar la comprensión matemática que ponen de manifiesto y *c*) tomar decisiones relativas a la enseñanza, teniendo en cuenta dicha comprensión (Jacobs, Lamb y Philipp, 2010), tras integrar el uso de un conocimiento específico en la realización de tareas profesionales, como es el interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes de educación primaria.

Nuestro trabajo se ha centrado no solo en el análisis de los procedimientos de resolución de problemas de división-medida empleados por los futuros maestros, como han hecho otros trabajos, sino también en la forma en que interpretan respuestas de alumnos de primaria que emplean distintos procedimientos. Los resultados obtenidos ofrecen a los formadores unas referencias iniciales acerca de los conocimientos de los EPM sobre problemas de división medida y del uso que hacen de estos conocimientos en una de sus tareas profesionales que deberán realizar en su profesión: ser capaz de interpretar las respuestas de los alumnos.

RECONOCIMIENTOS

Esta investigación ha recibido el apoyo del Ministerio de Ciencia e Innovación, Secretaria de Estado de Investigación (España), a través del proyecto EDU2011-27288, y de la Universidad de Alicante (España), con el proyecto emergente GRE10-10.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ball, D.L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21 (2), pp. 132-144. http://dx.doi.org/10.2307/749140

Ball, D.L.; Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal for Teacher Education*, 59 (5), pp. 389-407. http://dx.doi.org/10.1177/0022487108324554

Callejo, M.L. y Vila, A. (2009). Approach to mathematical problem solving and students' belief systems: two case studies. *Educational Studies in Mathematics*, 72 (1), pp. 11-126. http://dx.doi.org/10.1007/s10649-009-9195-z

Campbell, S. (1996). On pre-service teachers' understanding of division with remainder. En L. Puig, y A. Gutiérrez (eds.). *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Valencia: PME, vol. 2, pp. 177-184.

Carpenter, T.P.; Lindquist, M.M.; Matthews, W. y Silver E.A. (1983). Result of the third NAEP Mathematics Assessment: Secondary School. *Mathematics Teacher*, 76 (9), pp. 652-659.

Carrillo, J.; Climent, N.; Contreras, L.C. y Muñoz-Catalán, M.C. (2012). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. CERME8. Disponible en línea: http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG17/Wg17_Climent.pdf. (Última consulta, 21 de octubre de 2013).

Castro, E. y Castro, E. (1996). Conocimiento de contenido pedagógico de los estudiantes de Magisterio sobre la estructura multiplicativa. En J. Giménez, S. Llinares y V. Sánchez (eds.). *El proceso de llegar a ser un profesor de Primaria. Cuestiones desde la Educación matemática*. Granada: Comares, pp. 119-141.

Contreras, M. y Gómez, B. (2006). Sobre problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones. *Actas del X Simposio de la SEIEM. Investigación en Educación Matemática*, pp. 171-184.

Downton, A. (2009). A study of comparative performance on partitive and quotitive division in solving division word problems. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (eds.). *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Thessaloniki, Greece: PME, vol. 2, pp. 465-472.

Fernández, C.; Llinares, S. y Valls, J. (2013). Primary school teacher's noticing of students' mathematical thinking in problem solving. *The Mathematics Enthusiast*, 10 (1&2), pp. 441-468.

Graeber, A.O.; Tirosh, D. y Glover, R. (1986). Preservice teachers' misconceptions in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, pp. 95-102.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situation. En D. Grows (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: McMillan, pp. 276-295.

Greer, B.; Verschaffel, L. y De Corte, E. (2002). «The answer is really 4.5»: Beliefs about word problems. En G. Leder, E. Pehkonen y G. Törner (eds.). *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 271-292.

Jacobs, V.; Lamb, L. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41 (2), pp. 169-202.

Kaasila, R., Pehkonen, E. y Hellinen (2010). Finnish pre-service teachers' and upper secondary students' understanding of division and reasoning strategies used. *Educational Studies in Mathematics*, 73 (3), pp. 247-261.
http://dx.doi.org/10.1007/s10649-009-9213-1

Lago, M.O.; Rodríguez, P.; Enesco, I.; Jiménez, L. y Dopico, C. (2008). Me sobran cuatro y no sé qué hacer con ellas. Un estudio sobre los problemas de división con resto en 1.º de ESO. *Anales de Psicología*, 24 (2), pp. 201-212.

Li, Y. y Silver, E.A. (2000). Can younger students succeed where older students fail? An examination of third graders' solutions of a division-with-remainder (DWR) problem. *Journal of Mathematical Behavior*, 19 (2), pp. 233-246.
http://dx.doi.org/10.1016/S0732-3123(00)00046-8

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Llinares, S. (2014). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept. *International Journal of Science and Mathematics Education*. DOI. dx.doi.org/10.1007/s10763-014-9544-y
http://dx.doi.org/10.1007/s10763-014-9544-y

Sherin, M.; Jacobs, V. y Philipp, R. (ed.) (2010). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes.* New York: Routledge.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), pp. 4-14.
http://dx.doi.org/10.3102/0013189X015002004

Silver, E.A.; Shapiro, L.J. y Deutsch, A. (1993). Sense making and the solution of division problems involving remainders: An examination of middle school students' solution processes and their interpretation of solutions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24 (2), pp. 117-135.
http://dx.doi.org/10.2307/749216

Strauss, A. y Corbin, J. (1994). Grounded theory methodology: An overview. En N. K. Denzin y Y. Lincoln (eds.). *Handbook of Qualitative Research*. Thousand Oaks: Sage, pp. 273-285.

Varas L.M.; Lacourly N.; López, A.D. y Giaconi, V. (2013). Evaluación del conocimiento pedagógico del contenido para enseñar matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 31 (1), pp. 171-187

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: What and why? En G. Harel y J. Confrey (eds.). *The development of multiplicative reasoning in the learning of the mathematics.* New York: State University of New York Press, pp. 41-59.

Verschaffel, L.; De Corte, E. y Borghart, E. (1997). Pre-service teachers' conceptions and beliefs about the role of real-world knowledge in mathematical modeling of school word problems. *Learning and Instruction*, 7 (4), pp. 339-359.
http://dx.doi.org/10.1016/S0959-4752(97)00008-X

Pre-service teachers' knowledge when they interpret primary school students' answers to quotitive division problems

Ceneida Fernández Verdú, María Luz Callejo de la Vega
Dpto. de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante
ceneida.fernandez@ua.es, luz.callejo@ua.es

Maximina Márquez Torres
Escuela Técnica Industrial «Capitán Anselmo Belloso», Maracaibo, Venezuela
maximina.marquez@gmail.com

Previous research has shown the importance of developing the competence of professionally noticing students' mathematical thinking by pre-service teachers (PST), a competence defined as three interrelated skills: identifying students' strategies and procedures; interpreting students' understanding; and deciding how to respond on the basis of students' understanding (Jacobs, Lamb, & Philipp, 2010; Sherin, Jacobs, & Philipp, 2010). Although noticing effectively is, both complex and challenging, previous studies have shown that this competence could be developed in teacher training programs. Proof of such development can be found in Fernández, Llinares and Valls (2013) in the proportionality context and in Sánchez-Matamoros, Fernández and Llinares (2014) in the derivative context. However, the difficulties found in the development of this competence make further research necessary in order to know which is the mathematical teaching knowledge required by PSTs in the different mathematical domains.

One of these mathematical domains where previous research has shown that both primary school students and PSTs have difficulties with is the domain of multiplicative structure. In this study we investigate how PSTs use the mathematical content knowledge when interpreting sixth grade primary school students' answers related to quotitive division problems. The research questions were:

- How do PSTs solve quotitive division problems?
- How do PSTs interpret the answers given by sixth grade primary school students to quotitive division problems?
- How do PSTs grade primary school students' answers and which are the justifications provided?

The 84 pre-service teachers that took part in this study were in the first year of their course. These PSTs fulfilled two tests (test 1 and test 2). Test 1 consisted of two quotitive division word problems. Test 2 consisted of four primary school students' answers to each problem from test 1. PSTs had to grade these answers with 0, 0.5 or 1 and provide justifications.

For each problem, the pre-service teachers' answers to test 1 were classified as correct when the pre-service teachers were able to make the division and interpret the remainder or when they used another method correctly (such as the building-up strategy). Answers were classified as almost correct when the PSTs were able to calculate the solution through the division and underline the remainder without a correct interpretation. Answers where the remainder was not mentioned or was meaningless were classified as incorrect. With regards to test 2, we examined the grade given to students' answers by the PSTs and their justifications. The justifications were then categorised according to five categories: clarity of the method used, accuracy of the method, suitability of the method, result accuracy and explanation.

Results show that the majority of PSTs successfully solved the two problems using a division. However, few of them were able to interpret students' answers where they used a correct alternative method to the division procedure. In fact, PSTs graded better answers based on a division than those answers based on an alternative method to the division. The justifications provided by PSTs were based on the clarity of the method (the alternative method to the division doesn't seem to be clear to PSTs), on the suitability of the method (this method was not suitable for a sixth grade primary school student) and on the lack of understanding of the method by the PST.

Results of this study provide information to teacher trainers about the initial references of pre-service teachers' knowledge related to quotitive division problems and about the use of this knowledge in one of their professional tasks: interpreting students' answers.

Keywords**.** Specialised content knowledge; pre-service teachers; quotitive division problems.