

XII JORNADAS DE REDES DE INVESTIGACIÓN EN DOCENCIA UNIVERSITARIA

El reconocimiento docente: innovar e investigar con criterios de calidad

ISBN: 978-84-697-0709-8



Diseño: Gabinete de Imagen y Comunicación Gráfica de la Universidad de Alicante

XII JORNADES DE XARXES D'INVESTIGACIÓ EN DOCÈNCIA UNIVERSITÀRIA

El reconeixement docent: innovar i investigar amb criteris de qualitat

Coordinadores

María Teresa Tortosa Ybáñez

José Daniel Álvarez Teruel

Neus Pellín Buades

© **Del texto: los autores**

© **De esta edición:**

Universidad de Alicante

Vicerrectorado de Estudios, Formación y Calidad

Instituto de Ciencias de la Educación (ICE)

ISBN: 978-84-697-0709-8

Revisión y maquetación: Neus Pellín Buades

Cómo desarrollar una mirada profesional en futuros profesores de matemáticas

M. Luz Callejo¹; G. Sánchez-Matamoros²; C. Fernández¹ y J. Valls¹

(1) Departamento de Innovación y Formación didáctica

Universidad de Alicante

(2) Departamento de Didáctica de las Matemáticas

Universidad de Sevilla

RESUMEN

Una de las finalidades de los programas de formación de profesores en el área de matemáticas es desarrollar una “mirada profesional” sobre la enseñanza y aprendizaje. Esto implica ser capaz de identificar lo que es realmente importante en los procesos de enseñanza y aprendizaje vinculados a diferentes tópicos. En el marco del “Máster Universitario en profesorado de Educación Secundaria” de la Universidad de Alicante hemos desarrollado un módulo con el objetivo de desarrollar una “mirada profesional” sobre el proceso de generalización en la resolución de problemas. El módulo consistía en una tarea individual donde los futuros profesores debían describir las respuestas dadas por estudiantes de secundaria a dos problemas de generalización lineal y agrupar las que reflejaban características comunes de la comprensión del proceso de generalización; y participar en un debate virtual en el que debían discutir y consensuar un informe sobre las características de la comprensión del proceso de generalización. Los resultados indican que la tarea permitió a los futuros profesores centrar su mirada en las ideas que subyacen del proceso de generalización, más que en la corrección del procedimiento realizado, destacando el potencial de la tarea para el desarrollo de una mirada profesional en los programas de formación.

Palabras clave: una mirada profesional; problemas de generalización lineal; futuros profesores de secundaria

1. INTRODUCCIÓN

Las investigaciones sobre el desarrollo profesional del profesor de matemáticas han subrayado la importancia de la competencia docente “desarrollo de una mirada profesional de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas” (Mason, 2002; Sherin, Jacobs y Philipps, 2010). Esta competencia permite al profesor de matemáticas ver las situaciones de enseñanza-aprendizaje de una manera profesional, permitiéndole interpretar situaciones complejas en el contexto del aula. Estas investigaciones también están demostrando que esta competencia se puede desarrollar en los programas de formación (Fernández, Llinares y Valls, 2012; Sánchez-Matamoros et al., 2012; Magiera, van den Kieboom y Moyer, 2013). Por ejemplo, van Es y Sherin (2002) han mostrado que los profesores pueden mejorar “su mirada profesional” si se les ayuda a desplazar su foco de atención desde los comentarios evaluativos a las interpretaciones de la comprensión de los alumnos basadas en evidencias. Otro foco de atención ha sido la observación de las interacciones producidas en debates en línea (Scherrer y Stein, 2013). En este sentido crear un texto escrito para convencer a otros en el debate en línea puede ayudar a los futuros profesores a desarrollar esta competencia docente. El texto producido por los futuros profesores en estos debates les puede ayudar a pasar desde la descripción de estrategias a la interpretación de la comprensión de los estudiantes aportando evidencias.

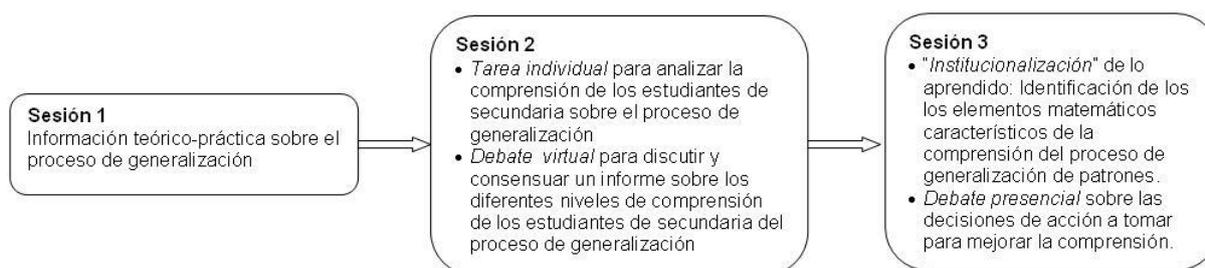
El desarrollo de la competencia docente “mirar profesionalmente” se facilita incorporando dominios específicos; en matemáticas esto conlleva identificar los elementos matemáticos importantes del dominio y relacionarlos con las características de la comprensión matemática de los estudiantes. Por ejemplo, evidencias de este desarrollo se muestran en investigaciones sobre la proporcionalidad (Fernández et al. 2012), la derivada (Sánchez-Matamoros et al., 2012), el álgebra (Magiera et al., 2013), generalización de patrones (Yesildere-Imre y Akkoç 2012; Mouhayar y Jurdak, 2012; Zapatera y Callejo, 2013).

El objetivo de esta comunicación es presentar cómo a través de un módulo de enseñanza diseñado ad hoc los futuros profesores de secundaria muestran evidencias de la comprensión matemática de los estudiantes cuando éstos resuelven problemas de generalización lineal, es decir, desarrollan una mirada profesional en un dominio específico, los problemas de generalización lineal.

2. DISEÑO DEL MÓDULO DE ENSEÑANZA

En la asignatura “Aproximación didáctica a la resolución de problemas de matemáticas” del “Máster Universitario en profesorado de Educación Secundaria”, especialidad de Matemáticas, en la que estaban matriculados 7 estudiantes, se trabajan los procesos: particularizar y generalizar, conjeturar y demostrar, en el contexto de la resolución de problemas, desde dos perspectivas: (1) matemática y (2) de desarrollo de una mirada profesional sobre las respuestas de los estudiantes.

El módulo se desarrolló a lo largo de tres semanas, con una sesión por semana (Figura 1). En la primera sesión presencial (4 horas presenciales) se dio información teórico-práctica relativa al proceso de generalización; en la segunda (4 horas presenciales y un trabajo on-line) los EPS realizaron individualmente una tarea analizando la comprensión de los estudiantes de educación secundaria en relación al tópico matemático seleccionado y se abrió un debate virtual con el objetivo de discutir entre ellos y consensuar un informe sobre la manera en la que interpretaban lo que estaban considerando como evidencias de diferentes niveles de comprensión de los estudiantes de secundaria sobre el proceso de generalización; en la tercera sesión se “institucionalizó” lo aprendido en las sesiones anteriores, es decir, se identificaron los elementos matemáticos principales necesarios para caracterizar la comprensión de los estudiantes de secundaria en relación a la generalización de patrones y se realizó un debate presencial.



Sesión 1

En esta sesión se propuso un marco teórico sobre el proceso de generalización en el contexto de la resolución de problemas. El proceso de generalización se entiende como el corazón de la actividad matemática y consiste en pasar del examen de un objeto o de un conjunto limitado de objetos al examen de un conjunto más extenso que lo incluya; es el proceso inverso a la particularización (Mason, Burton y Stacey, 1989). Ambos procesos aparecen juntos en la siguiente secuencia en el marco de la resolución de problemas:

Particularización --> Identificación de patrones --> Generalización --> Conjetura --> Demostración

El proceso de generalización lleva a hacer conjeturas sobre una gran cantidad de casos a partir de unos pocos ejemplos. La generalización se ve facilitada cuando la particularización se ha realizado sistemáticamente

También se mostró la potencialidad de algunos problemas para desarrollar este proceso, entre ellos los *problemas de identificación de patrones*. En estos problemas se proporcionan los primeros términos de una sucesión frecuentemente con un dibujo, y se pide calcular el valor del n ésimo término para un valor de n pequeño y para un valor de n grande. En algunos casos se pide también formular una regla general.

Sesión 2

En esta sesión se propuso una tarea formada por las respuestas de seis estudiantes de secundaria a dos problemas de generalización lineal que fueron adaptados de investigaciones previas (Zapatera y Callejo, 2011; Rivera y Becker, 2005) (Figura 2).

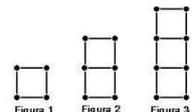
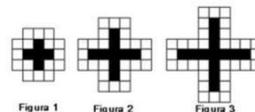
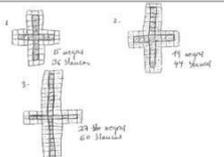
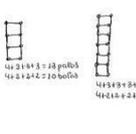
En los dos problemas se presenta una sucesión de figuras compuestas por: cuadros y bolas (problema 1; Zapatera y Callejo, 2011) y cuadrados blancos y negros (problema 2; Rivera y Becker, 2005). La regla general es siempre una función afín: $f(n) = an + b$, con $b \neq 0$.

Las dos primeras cuestiones de los dos problemas son de generalización cercana y se pueden resolver siguiendo una estrategia aditiva mediante recuento, con o sin dibujo, o con un método recursivo, apoyándose en el término anterior. La cuestión 3, de generalización lejana, también se puede resolver con una estrategia aditiva, aunque resulta laborioso. Las cuestiones 4 y 5 piden expresar la regla general, ya sea en forma verbal o algebraica, y permiten conocer si los estudiantes son capaces de coordinar el esquema numérico de la información procedente de la sucesión numérica con el esquema de la posición que ocupa el número en la secuencia numérica. Las respuestas de los alumnos de secundaria que los EPS debían analizar (Figura reflejaban distintos grados de desarrollo del proceso de generalización (Cañadas, Castro y Castro, 2007; García-Cruz y Martínón, 1999; Radford, 2011):

- No coordinación de la estructura espacial ni la numérica (Radford, 2011): Carlos (C).
- Utilización de estrategias aditivas (Zapatera y Callejo, 2011).
- Utilización de un método recursivo en los apartados de generalización cercana e intento de encontrar una relación funcional en el apartado de generalización lejana usando una regla de tres: Fernando (F).

- Utilización de un método recursivo en los apartados de generalización cercana y lejana sin intentar buscar una relación funcional: Daniel (D).
- Paso de una estrategia aditiva a una multiplicativa (relación funcional) en la generalización cercana (n=6):
 - ❖ Sin identificar la constante de crecimiento: Ana (A).
 - ❖ Identificando la constante de crecimiento: Beatriz (B).
- Utilización de un método directo deconstructivo (Rivera y Becker, 2008) descomponiendo la figura: Elena (E).

Figura 2. Problemas y respuestas de seis estudiantes de secundaria a los mismos

Problema 1		Problema 2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
<p>Las tres figuras siguientes son los primeros términos de una sucesión donde los cuadrados están formados por puntos (bolas) y segmentos (palos):</p>  <p>Figura 1 Figura 2 Figura 3</p> <p>1. ¿Cuántos palos y bolas se necesitan para construir la figura 4? 2. ¿Cuántos palos y bolas se necesitan para construir la figura 20? 3. ¿Cuántos palos y bolas se necesitan para construir la figura 207? 4. Busca una regla general que relacione el número de la figura y el número de bolas. Busca una regla general que relacione el número de la figura y el número de palos.</p>		<p>Las tres figuras siguientes son los primeros términos de una sucesión:</p>  <p>Figura 1 Figura 2 Figura 3</p> <p>1. ¿Cuántos cuadrados blancos y negros se necesitan para construir la figura 47? 2. ¿Cuántos cuadrados blancos y negros se necesitan para construir la figura 67? 3. ¿Cuántos cuadrados blancos y negros se necesitan para construir la figura 207? 4. Busca una regla general que relacione el número de la figura y el número de cuadrados negros. 5. Busca una regla general que relacione el número de la figura y el número de cuadrados blancos.</p>																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
<p>Respuesta de Carlos</p> <p>1. 9 bolas y 12 palos</p> <p>2. 18 bolas y 17 palos</p> <p>3. 30 bolas y 19 palos</p> <p>4. Cada 4 bolas es un cuadrado</p> <p>5. Cada 4 palos es un cuadrado</p> <p>Explica brevemente con tus palabras el razonamiento que has seguido. He ido aumentando bolas y palos hasta conseguir los cuadrados que quería.</p>	<p>Respuesta de Fernando</p> <p>1. Bolas $\rightarrow 8+2 = 10$ bolas Palos $\rightarrow 10+3 = 13$ palos</p> <p>2. Bolas $\rightarrow 10+2+2 = 14$ bolas Palos $\rightarrow 13+3+3 = 19$ palos</p> <p>3. 2ª figura $\rightarrow 6$ bolas $x = 20 \cdot 6 = 120$ bolas</p> <p>3ª figura $\rightarrow 7$ palos $x = 20 \cdot 7 = 140$ palos</p> <p>4. 5.</p> <p>Explica brevemente con tus palabras el razonamiento que has seguido. Lo primero que hecho son cinco sumas 2 bolas y 3 palos por cada cuadrado que me pedían, luego me he dado cuenta que con una regla de tres bastaría para poder hacerlos.</p>	<p>Respuesta de Carlos</p>  <p>1. 2ª figura $\rightarrow 5$ negros $20 \cdot 5 = 100$ negros</p> <p>3ª figura $\rightarrow 7$ negros $20 \cdot 7 = 140$ negros</p> <p>4ª figura $\rightarrow 9$ negros $20 \cdot 9 = 180$ negros</p> <p>Explica brevemente con tus palabras el razonamiento que has seguido. He estado contando que fuer la figura que quería y los he contado.</p>	<p>Respuesta de Fernando</p> <p>1. 18 negros y 17 blancos</p> <p>2. 32 negros y 27 blancos</p> <p>3. 27 negros y 24 blancos</p> <p>4. 207 negros y 240 blancos</p> <p>Explica brevemente con tus palabras el razonamiento que has seguido. Primero he sumado 6 negros y 5 blancos a cada figura para formar el siguiente luego igual que en el problema 1 he usado la regla de tres para hallar la figura 20.</p>																																																																																																																																																																																																																																																																																																															
<p>Respuesta de Daniel</p>  <p>4+3+3+3 = 13 palos 4+3+3+3 = 13 palos</p> <p>4+3+3+3+3 = 17 palos 4+3+3+3+3 = 17 palos</p> <p>4+3+3+3+3+3 = 19 palos 4+3+3+3+3+3 = 19 palos</p> <p>Explica brevemente con tus palabras el razonamiento que has seguido. El primer cuadrado tiene 4 bolas y en otros dos bolas más cada uno. El primer cuadrado tiene 4 palos y en otros 3 palos más cada uno.</p>	<p>Respuesta de Ana</p> <p>1. 10 bolas y 13 palos</p> <p>2. $8+4 \times 3 = 8+12 = 20$ bolas</p> <p>3. $10+4 \times 3 = 10+12 = 22$ palos</p> <p>4. $8+4 \times 17 = 8+68 = 76$ bolas</p> <p>5. $10+4 \times 17 = 10+68 = 78$ palos</p> <p>Explica brevemente con tus palabras el razonamiento que has seguido. En el primero he hecho un dibujo. En el segundo y el tercero me he fijado en la figura 2 y en que un cuadrado tiene 4 bolas y 4 palos y etc. He ido aumentando.</p>	<p>Respuesta de Daniel</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Figura</th> <th>Blancos</th> <th>Negros</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>5</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>13</td><td>5</td></tr> <tr><td>4</td><td>25</td><td>13</td></tr> <tr><td>5</td><td>41</td><td>25</td></tr> <tr><td>6</td><td>61</td><td>41</td></tr> <tr><td>7</td><td>85</td><td>61</td></tr> <tr><td>8</td><td>113</td><td>85</td></tr> <tr><td>9</td><td>145</td><td>113</td></tr> <tr><td>10</td><td>181</td><td>145</td></tr> <tr><td>11</td><td>221</td><td>181</td></tr> <tr><td>12</td><td>265</td><td>221</td></tr> <tr><td>13</td><td>313</td><td>265</td></tr> <tr><td>14</td><td>365</td><td>313</td></tr> <tr><td>15</td><td>421</td><td>365</td></tr> <tr><td>16</td><td>481</td><td>421</td></tr> <tr><td>17</td><td>545</td><td>481</td></tr> <tr><td>18</td><td>613</td><td>545</td></tr> <tr><td>19</td><td>685</td><td>613</td></tr> <tr><td>20</td><td>761</td><td>685</td></tr> <tr><td>21</td><td>841</td><td>761</td></tr> <tr><td>22</td><td>925</td><td>841</td></tr> <tr><td>23</td><td>1013</td><td>925</td></tr> <tr><td>24</td><td>1105</td><td>1013</td></tr> <tr><td>25</td><td>1201</td><td>1105</td></tr> <tr><td>26</td><td>1301</td><td>1201</td></tr> <tr><td>27</td><td>1405</td><td>1301</td></tr> <tr><td>28</td><td>1513</td><td>1405</td></tr> <tr><td>29</td><td>1625</td><td>1513</td></tr> <tr><td>30</td><td>1741</td><td>1625</td></tr> <tr><td>31</td><td>1861</td><td>1741</td></tr> <tr><td>32</td><td>1985</td><td>1861</td></tr> <tr><td>33</td><td>2113</td><td>1985</td></tr> <tr><td>34</td><td>2245</td><td>2113</td></tr> <tr><td>35</td><td>2381</td><td>2245</td></tr> <tr><td>36</td><td>2521</td><td>2381</td></tr> <tr><td>37</td><td>2665</td><td>2521</td></tr> <tr><td>38</td><td>2813</td><td>2665</td></tr> <tr><td>39</td><td>2965</td><td>2813</td></tr> <tr><td>40</td><td>3121</td><td>2965</td></tr> <tr><td>41</td><td>3281</td><td>3121</td></tr> <tr><td>42</td><td>3445</td><td>3281</td></tr> <tr><td>43</td><td>3613</td><td>3445</td></tr> <tr><td>44</td><td>3785</td><td>3613</td></tr> <tr><td>45</td><td>3961</td><td>3785</td></tr> <tr><td>46</td><td>4141</td><td>3961</td></tr> <tr><td>47</td><td>4325</td><td>4141</td></tr> <tr><td>48</td><td>4513</td><td>4325</td></tr> <tr><td>49</td><td>4705</td><td>4513</td></tr> <tr><td>50</td><td>4901</td><td>4705</td></tr> <tr><td>51</td><td>5101</td><td>4901</td></tr> <tr><td>52</td><td>5305</td><td>5101</td></tr> <tr><td>53</td><td>5513</td><td>5305</td></tr> <tr><td>54</td><td>5725</td><td>5513</td></tr> <tr><td>55</td><td>5941</td><td>5725</td></tr> <tr><td>56</td><td>6161</td><td>5941</td></tr> <tr><td>57</td><td>6385</td><td>6161</td></tr> <tr><td>58</td><td>6613</td><td>6385</td></tr> <tr><td>59</td><td>6845</td><td>6613</td></tr> <tr><td>60</td><td>7081</td><td>6845</td></tr> <tr><td>61</td><td>7321</td><td>7081</td></tr> <tr><td>62</td><td>7565</td><td>7321</td></tr> <tr><td>63</td><td>7813</td><td>7565</td></tr> <tr><td>64</td><td>8065</td><td>7813</td></tr> <tr><td>65</td><td>8321</td><td>8065</td></tr> <tr><td>66</td><td>8581</td><td>8321</td></tr> <tr><td>67</td><td>8845</td><td>8581</td></tr> <tr><td>68</td><td>9113</td><td>8845</td></tr> <tr><td>69</td><td>9385</td><td>9113</td></tr> <tr><td>70</td><td>9661</td><td>9385</td></tr> <tr><td>71</td><td>9941</td><td>9661</td></tr> <tr><td>72</td><td>10225</td><td>9941</td></tr> <tr><td>73</td><td>10513</td><td>10225</td></tr> <tr><td>74</td><td>10805</td><td>10513</td></tr> <tr><td>75</td><td>11101</td><td>10805</td></tr> <tr><td>76</td><td>11401</td><td>11101</td></tr> <tr><td>77</td><td>11705</td><td>11401</td></tr> <tr><td>78</td><td>12013</td><td>11705</td></tr> <tr><td>79</td><td>12325</td><td>12013</td></tr> <tr><td>80</td><td>12641</td><td>12325</td></tr> <tr><td>81</td><td>12961</td><td>12641</td></tr> <tr><td>82</td><td>13285</td><td>12961</td></tr> <tr><td>83</td><td>13613</td><td>13285</td></tr> <tr><td>84</td><td>13945</td><td>13613</td></tr> <tr><td>85</td><td>14281</td><td>13945</td></tr> <tr><td>86</td><td>14621</td><td>14281</td></tr> <tr><td>87</td><td>14965</td><td>14621</td></tr> <tr><td>88</td><td>15313</td><td>14965</td></tr> <tr><td>89</td><td>15665</td><td>15313</td></tr> <tr><td>90</td><td>16021</td><td>15665</td></tr> <tr><td>91</td><td>16381</td><td>16021</td></tr> <tr><td>92</td><td>16745</td><td>16381</td></tr> <tr><td>93</td><td>17113</td><td>16745</td></tr> <tr><td>94</td><td>17485</td><td>17113</td></tr> <tr><td>95</td><td>17861</td><td>17485</td></tr> <tr><td>96</td><td>18241</td><td>17861</td></tr> <tr><td>97</td><td>18625</td><td>18241</td></tr> <tr><td>98</td><td>19013</td><td>18625</td></tr> <tr><td>99</td><td>19405</td><td>19013</td></tr> <tr><td>100</td><td>19801</td><td>19405</td></tr> </tbody> </table> <p>Explica brevemente con tus palabras el razonamiento que has seguido. La figura 3 tiene 13 cuadrados negros y en otros 4 cuadrados más cada uno. La figura 3 tiene 32 cuadrados blancos y en otros 8 cuadrados más cada uno.</p>	Figura	Blancos	Negros	1	1	1	2	5	1	3	13	5	4	25	13	5	41	25	6	61	41	7	85	61	8	113	85	9	145	113	10	181	145	11	221	181	12	265	221	13	313	265	14	365	313	15	421	365	16	481	421	17	545	481	18	613	545	19	685	613	20	761	685	21	841	761	22	925	841	23	1013	925	24	1105	1013	25	1201	1105	26	1301	1201	27	1405	1301	28	1513	1405	29	1625	1513	30	1741	1625	31	1861	1741	32	1985	1861	33	2113	1985	34	2245	2113	35	2381	2245	36	2521	2381	37	2665	2521	38	2813	2665	39	2965	2813	40	3121	2965	41	3281	3121	42	3445	3281	43	3613	3445	44	3785	3613	45	3961	3785	46	4141	3961	47	4325	4141	48	4513	4325	49	4705	4513	50	4901	4705	51	5101	4901	52	5305	5101	53	5513	5305	54	5725	5513	55	5941	5725	56	6161	5941	57	6385	6161	58	6613	6385	59	6845	6613	60	7081	6845	61	7321	7081	62	7565	7321	63	7813	7565	64	8065	7813	65	8321	8065	66	8581	8321	67	8845	8581	68	9113	8845	69	9385	9113	70	9661	9385	71	9941	9661	72	10225	9941	73	10513	10225	74	10805	10513	75	11101	10805	76	11401	11101	77	11705	11401	78	12013	11705	79	12325	12013	80	12641	12325	81	12961	12641	82	13285	12961	83	13613	13285	84	13945	13613	85	14281	13945	86	14621	14281	87	14965	14621	88	15313	14965	89	15665	15313	90	16021	15665	91	16381	16021	92	16745	16381	93	17113	16745	94	17485	17113	95	17861	17485	96	18241	17861	97	18625	18241	98	19013	18625	99	19405	19013	100	19801	19405	<p>Respuesta de Ana</p> <p>1. 17 negros y 10 blancos</p> <p>2. Negros $6 \times 4 = 24$ $24+1 = 25$</p> <p>Blancos $7 \times 4 = 28$ $28+1 = 29$</p> <p>3. Negros $21 \times 4 = 84$ $84+1 = 85$</p> <p>Blancos $21 \times 4 = 84$ $84+1 = 85$</p> <p>Explica brevemente con tus palabras el razonamiento que has seguido. He hecho un dibujo para la figura 3, pero en los otros casos he calculado. He ido fijado en que la cruz negra tiene 4 palos y el cuadrado tiene 4 palos. Para contar los blancos me he fijado en que tiene 8 palos y 4 cuadrados de los que tiene.</p>
Figura	Blancos	Negros																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
1	1	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
2	5	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
3	13	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
4	25	13																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
5	41	25																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
6	61	41																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
7	85	61																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
8	113	85																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
9	145	113																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
10	181	145																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
11	221	181																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
12	265	221																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
13	313	265																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
14	365	313																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
15	421	365																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
16	481	421																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
17	545	481																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
18	613	545																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
19	685	613																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
20	761	685																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
21	841	761																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
22	925	841																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
23	1013	925																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
24	1105	1013																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
25	1201	1105																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
26	1301	1201																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
27	1405	1301																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
28	1513	1405																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
29	1625	1513																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
30	1741	1625																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
31	1861	1741																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
32	1985	1861																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
33	2113	1985																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
34	2245	2113																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
35	2381	2245																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
36	2521	2381																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
37	2665	2521																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
38	2813	2665																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
39	2965	2813																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
40	3121	2965																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
41	3281	3121																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
42	3445	3281																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
43	3613	3445																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
44	3785	3613																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
45	3961	3785																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
46	4141	3961																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
47	4325	4141																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
48	4513	4325																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
49	4705	4513																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
50	4901	4705																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
51	5101	4901																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
52	5305	5101																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
53	5513	5305																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
54	5725	5513																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
55	5941	5725																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
56	6161	5941																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
57	6385	6161																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
58	6613	6385																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
59	6845	6613																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
60	7081	6845																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
61	7321	7081																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
62	7565	7321																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
63	7813	7565																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
64	8065	7813																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
65	8321	8065																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
66	8581	8321																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
67	8845	8581																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
68	9113	8845																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
69	9385	9113																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
70	9661	9385																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
71	9941	9661																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
72	10225	9941																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
73	10513	10225																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
74	10805	10513																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
75	11101	10805																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
76	11401	11101																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
77	11705	11401																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
78	12013	11705																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
79	12325	12013																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
80	12641	12325																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
81	12961	12641																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
82	13285	12961																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
83	13613	13285																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
84	13945	13613																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
85	14281	13945																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
86	14621	14281																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
87	14965	14621																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
88	15313	14965																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
89	15665	15313																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
90	16021	15665																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
91	16381	16021																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
92	16745	16381																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
93	17113	16745																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
94	17485	17113																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
95	17861	17485																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
96	18241	17861																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
97	18625	18241																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
98	19013	18625																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
99	19405	19013																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
100	19801	19405																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
<p>Respuesta de Beatriz</p> <p>1. $4+2+2+2 = 10$ bolas</p> <p>2. $4+5 \cdot 2 = 14$ bolas</p> <p>3. $4+19 \cdot 2 = 42$ bolas</p> <p>4. $4+19 \cdot 3 = 61$ palos</p> <p>5. $4 + (x-1) \cdot 2$</p> <p>6. $4 + (x-1) \cdot 3$</p> <p>Explica brevemente con tus palabras el razonamiento que has seguido. He sumado a los 4 bolas del primer cuadrado, 2 bolas por cada cuadrado. He sumado a los 4 palos del primer cuadrado, 3 palos por cada cuadrado.</p>	<p>Respuesta de Elena</p> <p>1. $4+2+2+2 = 10$ bolas</p> <p>2. $4+5 \cdot 2 = 14$ bolas</p> <p>3. $4+19 \cdot 2 = 42$ bolas</p> <p>4. $4+19 \cdot 3 = 61$ palos</p> <p>5. número de palos $x \cdot n - (n-1) \cdot 2$</p> <p>6. número de bolas $2 \cdot (n-1) + 4$</p> <p>Explica brevemente con tus palabras el razonamiento que has seguido. En el primer y segundo apartado he sumado las bolas o los palos que se añadían. En el tercer apartado he calculado los palos que tienen 20 cuadrados y luego he restado los que he contado dos veces. Para calcular las bolas he multiplicado $\cdot 2$ por 20 días de 2 bolas.</p>	<p>Respuesta de Beatriz</p> <p>1. $5+4 \cdot 4 = 21$ negros</p> <p>2. $5+5 \cdot 4 = 25$ negros</p> <p>3. $5+19 \cdot 4 = 81$ negros</p> <p>4. $5+(19-1) \cdot 4$</p> <p>5. $5+5 \cdot 4 = 25$ negros</p> <p>6. $5+5 \cdot 8 = 45$ blancos</p> <p>7. $5+19 \cdot 4 = 81$ negros</p> <p>8. $5+(19-1) \cdot 4$</p> <p>Explica brevemente con tus palabras el razonamiento que has seguido. He sumado a los 5 negros de la primera figura, 4 negros por cada figura. He sumado a los 19 blancos de la primera figura, 5 blancos por cada figura.</p>	<p>Respuesta de Elena</p> <p>1. $8+4 = 12$ negros</p> <p>2. $18+5 \cdot 4 = 38$ negros</p> <p>3. $18+19 \cdot 4 = 90$ negros</p> <p>4. $18+19 \cdot 3 = 69$ blancos</p> <p>5. $18+19 \cdot 4 = 90$ negros</p> <p>6. $18+19 \cdot 3 = 69$ blancos</p> <p>7. $18+19 \cdot 4 = 90$ negros</p> <p>8. $18+19 \cdot 3 = 69$ blancos</p> <p>9. $18+19 \cdot 4 = 90$ negros</p> <p>10. $18+19 \cdot 3 = 69$ blancos</p> <p>Explica brevemente con tus palabras el razonamiento que has seguido. En el primer y segundo apartado he sumado los cuadrados que se añadían a la figura 3. En la tercera he descomponido la figura en partes para contar mejor. Esto lo he utilizado para hallar la regla general.</p>																																																																																																																																																																																																																																																																																																															

Las preguntas que los EPS debían responder respecto a cada uno de los problemas fueron las siguientes:

- A. Describe cómo ha resuelto cada estudiante los problemas 1 y 2 en relación al proceso de generalización.
- B1. Agrupa los estudiantes que presentan características comunes del desarrollo del proceso de generalización.
- B2. Caracteriza cada uno de los subgrupos que has formado.
- C. Indica en qué se diferencian los distintos grupos.

Con el objetivo de que los EPS consensuaran las interpretaciones realizadas de la comprensión de los estudiantes de secundaria sobre el proceso de generalización, se activó un debate virtual de dos semanas de duración. En la primera semana los EPS debían debatir sobre las siguientes cuestiones:

- *Características de cada uno de los grupos formados en relación al proceso de generalización.*
- *Diferencias de los distintos grupos formados.*

El debate quedó registrado por escrito. En la segunda semana, debían elaborar un informe conjunto. El informe debía recoger el consenso alcanzado sobre el número y las características de los grupos formados en relación al desarrollo del proceso de generalización y las diferencias entre ellos.

Sesión 3

En la tercera sesión se identificaron los elementos matemáticos principales necesarios para caracterizar la comprensión de los estudiantes de secundaria en relación a la generalización de patrones. También se trabajaron las estrategias y dificultades de los estudiantes en la resolución de los problemas de identificación de patrones y su potencialidad tanto para desarrollar el pensamiento algebraico como para vincular distintos modos de representación como el analítico (numérico y algebraico) y el geométrico. Se concluyó la sesión realizando un debate presencial a partir de la siguiente pregunta:

- Qué tipo de intervención didáctica sería adecuada para aquellos estudiantes que fueron capaces de construir algunos términos de la sucesión pero no de abstraer el patrón o regla general de la sucesión.

3. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

El módulo diseñado ha permitido obtener información sobre el desarrollo de la competencia docente “mirar de manera profesional” en el dominio específico de los

problemas de generalización lineal. Los EPS al resolver la tarea propuesta caracterizaron el proceso de generalización en los estudiantes de secundaria en cuatro categorías:

- (1) intento de llegar a la regla general,
- (2) generalización cercana y lejana,
- (3) uso del método recursivo y
- (4) “todo o nada.”

Las dos primeras categorías caracterizan el proceso de generalización. La generalización cercana demanda identificar un patrón de crecimiento de la sucesión, mientras que la generalización lejana o encontrar la regla general implica la coordinación de dos esquemas: el número de elementos de un término y la posición de cada término de la sucesión, lo que supone una relación más compleja (Radford, 2011). Por el contrario, la tercera categoría es un procedimiento en el que el estudiante observa que cada término aumenta en una diferencia constante y obtiene un término a partir del anterior. En la cuarta categoría los EPS consideraron solo si los estudiantes de secundaria habían llegado a una fórmula general o no, es decir, si el problema propuesto estaba bien resuelto o no, sin tener en cuenta el procedimiento o la conceptualización que el estudiante de secundaria ponía de manifiesto en su resolución.

Por otro el debate propuesto en el diseño jugó un papel muy importante en el desarrollo de la mirada profesional de los EPS del proceso de generalización, ante la necesidad que tenían los EPS de tomar una decisión consensuada sobre la idea de generalización (Fernández et al., 2012; Sánchez, García y Escudero, 2013).

El debate permitió a los EPS intercambiar diferentes posicionamientos sobre cómo caracterizar el proceso de generalización, lo que provocó en algunos de ellos un cambio en la manera de mirar las respuestas de los estudiantes de secundaria. El debate ayudó a los EPS a centrar su mirada en las ideas que subyacen en el proceso de generalización: generalización cercana y lejana e intento de expresar la regla general (paso de la estrategia aditiva a la funcional), más que en el procedimiento realizado. Por ejemplo, los EPS que en el cuestionario habían agrupado en función de “todo o nada” o en función del “uso o no de un método recursivo” cambiaron su forma de mirar las respuestas centrándose más en el proceso de generalización que en el hecho de haber llegado o no a la regla general, o si habían usado un método recursivo. Por ejemplo, JCB antes del debate escribió:

“Elena, Beatriz, Ana, Daniel y Fernando porque intentan averiguar de dónde partimos y a partir de ahí intentan averiguar el número de la figura con el incremento de los elementos, es decir, realizan una adición de elementos respecto un patrón inicial Carlos tiene problemas de establecer las sucesiones de elementos”

JCB al debatir con el resto de participantes, pasó de una caracterización basada en el procedimiento realizado, “método recursivo” a caracterizar el proceso de generalización como “intento de llegar a la regla general”:

“A todos nos parece correcto establecer en el nivel más alto (nivel 4) a Elena y Beatriz por ser las que llegan a la regla general y en el más bajo (nivel 1) sólo a Carlos ya que además de no entender la sucesión su forma de generalizar es dibujar las figuras y hacer un conteo. Desde mi punto de vista Ana y Fernando estarían en el nivel 3 ya que intentan generalizar, en cambio Daniel estaría en un nivel 2 pues para resolver la figura siempre parte de la anterior por lo que no veo el intento de generalizar por ningún lado”

Por tanto, la interacción con otros para poder convencer de la aceptabilidad y validez de las diferentes ideas ayudó a los EPS a trasladarse desde meras descripciones del uso de procedimientos a mostrar evidencias de la comprensión de los estudiantes de secundaria sobre el proceso de generalización, detallando ideas que subyacen en el proceso. Estos resultados confirman que los debates en línea pueden favorecer el desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes.

Reconocimientos. Esta investigación ha recibido el apoyo del Proyecto I+D+i EDU2011-27288 del Ministerio de Ciencia e Innovación. España.

4. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Cañadas, M. C., Castro, E., y Castro, E. (2007). Descripción de la generalización de estudiantes de 3º y 4º de ESO en la resolución de problemas que involucran sucesiones lineales y cuadráticas. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L.J. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 283-294). Badajoz: SEIEM.
- Fernández, C., Llinares, S., y Valls, J. (2012). Learning to notice students’ mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM Mathematics Education*, 44, 747-759.
- García-Cruz, J. A., y Martínón, A. (1999). Estrategia visual en la generalización de pautas lineales. *Enseñanza de las Ciencias*, 17(1), 31-43.

- Magiera, M., van den Kieboom, L., y Moyer, J. (2013). An exploratory study of preservice middle school teachers' knowledge of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 84, 93-113.
- Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge-Falmer.
- Mason, J., Burton, L. Y Stacey, K. (1989). *Pensar matemáticamente*. Barcelona: MEC-Labor.
- Mouhayar, R.R., y Jurdak, M.E. (2012). Teachers' ability to identify and explain students' actions in near and far figural pattern generalization tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 379-396.
- Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4 (pp. 17-24). Ankara, Turquía: PME.
- Rivera, F.D., y Becker, J. (2005). Establishing and justifying algebraic generalization at the sixth grade level. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4 (pp. 465-472). Prague: PME.
- Rivera, F.D., y Becker, J. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM Mathematics Education*, 48, 65-82.
- Sánchez, V., García, M., y Escudero, I. (2013). An analytical framework for analyzing student teachers' verbal interaction in learning situations. *Instructional Science*, 41(2), 247-269.
- Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., Valls, J., García, M., y Llinares, S. (2012). Cómo estudiantes para profesor interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes de bachillerato. La derivada de una función en un punto. En A. Estepa, A. Contreras, J. Delofeu, M.C. Penalva, F.J. García, y L. Ordoñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 497-508). Jaén: SEIEM.
- Scherrer, J., y Stein, M.K. (2013). Effects of a coding intervention on what teachers learn to notice during whole-group discussion. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(2), 105-124

- Sherin, M. G., Jacobs, V. R., y Philipp, R. A. (Eds) (2010). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes*. New York: Routledge
- Van Es, E. & Sherin, M. G. (2002). Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education*, 10(4), 571-596.
- Yesildere-Imre, S., y Akkoç, H. (2012). Investigating the development of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge of generalizing number patterns through school practicum. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15, 207-226.
- Zapatera, A., y Callejo, M.L. (2011). Nivel de éxito y flexibilidad en el uso de estrategias resolviendo problemas de generalización de pautas lineales. En M. Marín, G. Fernández, L.J. Blanco y M. Palarea (Eds). *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 351-360). Ciudad Real: SEIEM.
- Zapatera A., y Callejo, M.L. (2013). Cómo interpretan los estudiantes para maestro el pensamiento matemático de los alumnos sobre el proceso de generalización. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 535-544). Bilbao: SEIEM