

UN EJEMPLO DE INGENIERÍA ECONÓMICA

Carmen Herrero

Universidad de Alicante e Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas

RESUMEN

Presentamos una introducción a los modelos de emparejamiento, la base de la concesión del Nobel de Economía 2012 a A. Roth y L. Shapley. La construcción de estos modelos constituye un ejercicio de análisis, experimentación y diseño, camino por el que la Economía está transitando en las últimas décadas, cada vez con más precisión. Sirven, además, para resolver muchos problemas de la vida real, yendo más allá de los modelos tradicionales, en que los precios de mercado son la base del equilibrio entre oferta y demanda.

PALABRAS CLAVE

Emparejamiento,
Mercados no monetarios,
Nobel 2012.

1. Introducción

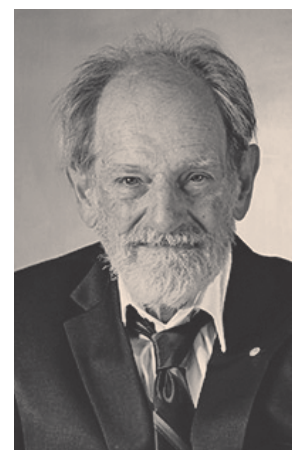
El **Nobel de Economía 2012** se ha otorgado conjuntamente a Alvin E. Roth y Lloyd Shapley, por sus *contribuciones en la teoría de las asignaciones estables y el diseño de mercados*. En palabras de la Real Academia Sueca de Ciencias, la combinación de las teorías de Shapley y los experimentos, investigaciones empíricas y técnicas de diseño de Roth han generado un campo de investigación floreciente y mejorado el funcionamiento de muchos mercados. El Nobel 2012 se ha concedido a un ejemplo extraordinario de ingeniería económica.

El trabajo por el que Roth y Shapley han sido premiados se centra en el análisis de los llamados mercados de *emparejamiento* en los que no hay, en general, intercambios monetarios, o en los que no hay un precio de equilibrio que sirva para igualar oferta y demanda. Los problemas de emparejamiento aparecen en multitud de situaciones: en el mercado de trabajo, entre trabajadores y empresas; en la asignación de estudiantes a colegios o universidades; entre donantes y receptores de órganos para trasplantes, etcétera.

La modelización de este tipo de problemas de asignación está estrechamente vinculada a las ideas de la Teoría de Juegos. Se trata de analizar la existencia de soluciones eficientes y estables (el núcleo) y, en su caso, de hallar un procedimiento para encontrarlas.



Alvin E. Roth



Lloyd S. Shapley

La combinación de los trabajos de Shapley y Roth ha permitido, por una parte, modelizar adecuadamente este tipo de problemas, por otra, construir algoritmos para encontrar las soluciones en el núcleo, y, finalmente, extendiendo y acomodando adecuadamente los modelos, encontrar procedimientos suficientemente sencillos como para aplicar estas soluciones a multitud de problemas de la vida real.

2. El emparejamiento de los matrimonios

Consideremos una situación en la que tenemos dos grupos de agentes: hombres y mujeres. Cada uno de los hombres es capaz de ordenar linealmente a las mu-

eres y, recíprocamente, incluyendo la opción de permanecer solteros (sin emparejar), en el caso de que no les satisfaga el emparejamiento propuesto.

Una *asignación* en un problema de emparejamiento es una aplicación que empareja cada mujer con un hombre (o bien algunos quedan solteros).

Consideremos una asignación y supongamos que hay un hombre y una mujer que no están emparejados entre sí, pero que ambos se prefieren mutuamente a las parejas que les han sido asignadas. Si este es el caso, decimos que la asignación se puede bloquear por dicha pareja. Una asignación es *estable* cuando no hay ninguna pareja que pueda bloquear dicha asignación.

El *núcleo* de un problema de emparejamiento es el conjunto de las asignaciones estables. Y es natural pensar que las soluciones razonables a nuestro problema deberían ser asignaciones estables. Podemos entonces preguntarnos:

1. ¿Podemos garantizar la existencia de asignaciones estables para cualquier problema?
2. Si la respuesta a la primera pregunta es sí, ¿cómo es el conjunto de asignaciones estables?, y
3. ¿Es posible calcular fácilmente las asignaciones estables (o al menos algunas de ellas)?
4. Los mecanismos que sirven para calcular estas asignaciones, ¿son compatibles con los incentivos?, o, dicho de otro modo, ¿tienen los agentes motivos para mentir al reportar sus preferencias?

Las respuestas a estas preguntas fueron proporcionadas por nuestros Nobel, en distintos trabajos y con distintos colaboradores. Shapley y Scarf (1974) probaron que el conjunto de asignaciones estables es siempre no vacío; Roth (1982a) probó que el conjunto de asignaciones estables tiene estructura de retículo, y Roth y Sotomayor (1990) presentaron una modificación del algoritmo de Gale y Shapley (1962) para obtener los extremos de dicho retículo, que están compuestos por las asignaciones más preferidas por cada uno de los dos grupos. Por su parte, Roth (1982), Alcalde y Barberá (1994) y Alcalde (1996) analizaron la compatibilidad con los incentivos en este problema.

El algoritmo, que proporciona además una prueba constructiva de la existencia de asignaciones estables, funciona de la siguiente manera.

Paso 1: cada uno de los hombres propone emparejarse con él a su mujer preferida.

Paso 2: si una mujer tiene varias propuestas, acepta la que más le agrada (siempre que sea preferida a quedarse soltera, en cuyo caso, la rechaza). Se realizan determinados emparejamientos, y quedan sin emparejar un cierto número de hombres y mujeres.

Paso 3: los hombres no emparejados proponen a su mejor opción entre las restantes.

Paso 4: las mujeres aceptan o rechazan las ofertas.

Eventualmente, en un número finito de pasos, todos los hombres y mujeres quedan emparejados o solteros, sin opciones a cambiar su situación. FIN.

El resultado del algoritmo anterior proporciona el emparejamiento estable más preferido por los hombres. De manera simétrica, si empiezan proponiendo las mujeres, se obtiene otro emparejamiento estable: el preferido por ellas.

El problema de emparejamiento de matrimonios tiene muchas aplicaciones. En particular, es de gran utilidad en el mercado laboral, cuando los puestos de trabajo ofrecidos por las empresas son evaluados por los candidatos, y, viceversa, las empresas tienen preferencias sobre el perfil de los trabajadores que desean contratar. Cuando las preferencias de unos y otras son conocidas, en un procedimiento de asignación centralizado, es sencillo obtener asignaciones empresa-trabajador que cumplan los requisitos de eficiencia y estabilidad.

3. El problema de intercambio de órganos

Uno de los problemas que más impacto mediático ha tenido entre los relacionados con el tema de emparejamiento es el que se refiere a la posibilidad de realización de trasplantes cruzados de órganos (en especial de riñones), entre vivos.

El trasplante de riñón es la mejor opción para pacientes con insuficiencia renal terminal. Los trasplantes de

riñón se pueden realizar de un donante con muerte encefálica, o también de un donante vivo, siendo este tipo menos frecuente, pero mucho más efectivo. Un problema adicional que aparece en las donaciones entre vivos es que, en muchos casos, el potencial donante y el receptor son incompatibles, o su compatibilidad (relacionada con el grupo sanguíneo y las características de los tejidos) es baja, impidiendo la realización del trasplante. En el caso en que donante y receptor sean incompatibles, la posibilidad de trasplante se pierde. Para resolver este problema se plantea la idea de los trasplantes cruzados: si tenemos dos donantes que son incompatibles con sus receptores, pero son compatibles con el receptor del otro donante, una solución sería *cruzar* los donantes y los receptores, y en lugar de no hacer ningún trasplante, tendríamos dos riñones aprovechados para dos personas que los necesitan. Desde 2003 se están realizando en el mundo trasplantes cruzados con relativa asiduidad.

¿Cómo resolver el problema de los trasplantes cruzados de riñones? En realidad, este es un ejemplo de un problema de intercambio de objetos indivisibles, un problema sencillo de emparejamiento (en este caso, de riñones con receptores).

Consideremos un problema en el que hay n objetos indivisibles que son propiedad, cada uno de ellos, de una persona (en el caso de los riñones, cada paciente tiene un donante propio). Cada una de las personas tiene una preferencia estricta sobre los objetos, no siendo su propio objeto el más preferido (las preferencias sobre los riñones se determinan aquí médicamente, analizando el grado de compatibilidad). El problema está definido entonces por el conjunto de objetos (*los riñones*), el conjunto de agentes, (*los pacientes*), las preferencias de los agentes sobre los objetos (*el grado de compatibilidad*) y la distribución inicial de objetos (*donde cada paciente está emparejado con el riñón de su donante*).

Este es un mundo en el que no hay mercado (precios). Se trata de encontrar una asignación en la que cada agente reciba un objeto y que cumpla buenas propiedades.

Una *asignación* es una aplicación que asigna cada objeto a un único agente y en la que cada agente recibe un único objeto.

Una asignación es *individualmente racional* si el objeto asignado a cada agente es para este mejor que su objeto inicial. Una asignación es estable cuando ningún subgrupo de agentes puede, dados sus recursos iniciales, obtener una asignación mejor que la propuesta.

El *núcleo* de un problema de asignación es el conjunto de las asignaciones estables (que son, asimismo, individualmente racionales y eficientes).

También en este caso el núcleo de un problema de asignación es no vacío, como probaron Shapley y Scarf (1974). Ellos presentan dos pruebas de este resultado, una de ellas constructiva, proporcionando un algoritmo para encontrar una solución. Este algoritmo (TTC), funciona de la siguiente manera:

Paso 1: cada agente señala su mejor objeto. Como hay un número finito de agentes y objetos, hay por lo menos un ciclo.

Los agentes y objetos del ciclo se asignan y salen del problema.

Paso 2: cada agente que quedó sin asignar en la etapa anterior señala su mejor objeto entre los que quedaron de la etapa anterior. Hay por lo menos un ciclo.

Los agentes y objetos del ciclo se asignan y salen del problema, etcétera.

Eventualmente, en un número finito de pasos, todos los agentes están asignados y el algoritmo termina.

Lo más interesante es que, en este caso (asignaciones de objetos indivisibles), el núcleo contiene una única asignación, precisamente la obtenida mediante el algoritmo TTC, como probaron Roth y Postlewaite (1977). Además, la asignación obtenida mediante este algoritmo no es manipulable, es decir, que nadie se puede beneficiar reportando preferencias falsas. La compatibilidad con los incentivos del algoritmo TTC fue probada por Roth (1982b).

La propuesta de poner en práctica el algoritmo TTC para la asignación de trasplantes cruzados entre vivos proviene de Roth, Sonmez y Unver (2004, 2005). Junto con los médicos Delmonico y Daidman, organizaron el *New England Program for Kidney Exchange* (NEPKE), en 2004. En 2005 siguió el *Johns Hopkins Kidney Ex-*

change Program y otros. Ahora el *United Network for Organ Sharing* (UNOS) está desarrollando un programa nacional de trasplantes cruzados siguiendo el algoritmo TTC en todo Estados Unidos.

4. La asignación de estudiantes

El tercer tipo de modelo que consideramos es el problema de asignación de estudiantes a universidades (o de escolares a colegios). Hay varias diferencias importantes respecto del modelo anterior. Por una parte, en uno de los lados del mercado (las universidades o los colegios) hay más de una plaza ofertada, es decir, cada universidad ofrece un determinado número de plazas algunas de las cuales son percibidas como idénticas por los estudiantes. Por otra parte, el papel de las universidades es pasivo, es decir, que son los estudiantes los que solicitan plaza, y las universidades (o colegios) se limitan a aceptar o rechazar al estudiante. El problema de la admisión de estudiantes se abordó por primera vez en el trabajo de Gale y Shapley (1962). Desde el principio, queda claro que el modelo de la admisión de estudiantes y el de la asignación de matrimonios tienen importantes diferencias (véase Roth, 1985).

Uno de los mecanismos utilizados en la admisión de estudiantes es el conocido como Mecanismo de Boston, que era el utilizado en la ciudad de Boston para asignar alumnos a las escuelas. En este mecanismo, los alumnos (o sus padres, en el caso de las escuelas) ordenan los colegios según sus preferencias, y cada escuela ofrece un determinado número de plazas. El mecanismo de Boston pretende satisfacer la primera opción del mayor número de familias. Para conseguir esto, funciona de la siguiente manera:

Paso 1: cada alumno remite su solicitud a su primera opción. Las escuelas, dadas estas solicitudes, aceptan hasta un máximo dado por sus plazas ofertadas, de acuerdo a un determinado orden de prioridad, y rechazan a los estudiantes que sobrepasan esta cuota.

Paso 2: los estudiantes que han sido rechazados en la primera etapa, pasan a solicitar su segunda opción, a las escuelas que aún tienen plazas. Las escuelas aceptan las solicitudes, de acuerdo a su orden de prioridad, has-

ta un máximo dado por sus plazas restantes, y rechazan a los sobrantes.

Si quedan aún estudiantes sin asignar, y plazas vacantes en algunas escuelas, se vuelve a repetir el proceso, donde ahora los estudiantes solicitan su tercera opción, etcétera.

El proceso termina cuando todos los alumnos han sido asignados y/o no hay plazas vacantes en ninguna escuela.

Si bien el Mecanismo de Boston es un proceso de asignación para este problema, desde la perspectiva de los modelos de emparejamiento tiene una debilidad fundamental, y es su falta de estabilidad, lo que provoca problemas de falta de compatibilidad con los incentivos. Es decir, los alumnos tienen incentivos a mentir a la hora de revelar sus preferencias. Abdulkaridoglou, Pathak, Roth y Sonmez (2005) propusieron una adaptación del método de Boston que evitara estos inconvenientes, adaptando el algoritmo de Gale y Shapley al caso de asignación de escuelas. La modificación consiste en tomar la primera asignación como tentativa y dejar que, en la segunda etapa, las escuelas puedan reconsiderar las admisiones provisionales realizadas en la primera etapa. De esta forma se obtiene un emparejamiento con todas las propiedades deseables. Esta modificación del Mecanismo de Boston se utiliza en la actualidad para la asignación de escuelas no solo en Boston, sino en Nueva York, Denver, Nueva Orleans y Washington. Solo en la ciudad de Nueva York se asignan por este procedimiento 90.000 adolescentes a escuelas secundarias cada año.

Hay diversas extensiones interesantes de este problema, como el caso en que los estudiantes tienen solo un número fijo de solicitudes posibles (como ocurre en los sistemas de asignación centralizados, como en el caso español), analizado en Romero-Medina (1998), o el caso en que aparecen ciertas reglas de prioridad adicionales, como el caso de hermanos, o la introducción de beneficios para ciertos tipos de estudiantes (minorías). La compatibilidad con los incentivos se analiza en Kara y Sonmez (1997).

La asignación de estudiantes es un problema similar al de asignación de médicos a especialidades en el MIR. En este caso, un problema que aparece con frecuencia

también es el de la existencia de parejas, que desean trabajar en la misma ciudad o en el mismo centro. Estas y otras extensiones se analizan en Roth y Peranson (1997). Estos procedimientos han permitido también mejorar las asignaciones de MIR a hospitales. Roth ha trabajado en la asignación de MIR desde 1998, asignando más de 20.000 médicos por año a hospitales en Estados Unidos.

5. Comentarios finales

En este trabajo hemos presentado una introducción a los modelos de emparejamiento, base de la concesión del Premio Nobel de Economía 2012 a Alvin Roth y Lloyd Shapley.

La construcción, análisis y resolución de los modelos de emparejamiento es un ejemplo de análisis, experimentación y diseño, camino por el que el desarrollo de la Economía como ciencia está transcurriendo, cada vez más, en los últimos tiempos. En palabras de Roth (2002), en el papel de los economistas como diseñadores de soluciones prácticas ha jugado un papel importantísimo la Teoría de Juegos, pero para avanzar en el conocimiento, se debe complementar este papel con experimentación y computación. La idea que Roth quiere transmitir es que hay que dar un paso más en el análisis del diseño: hay que enseñar lo que hemos aprendido, cambiar la teoría por la práctica, complementarla, mirar los datos y analizarlos desde la óptica de aprender a diseñar. Esta dinámica, a su vez, plantea nuevas cuestiones a la teoría, que esta tiene que esforzarse en responder y así hacer avanzar el conocimiento.

Además de las importantes aplicaciones prácticas de la teoría de emparejamientos, hay otro elemento a destacar. Los razonamientos y pruebas en los modelos de emparejamiento no se realizan mediante símbolos matemáticos, sino en lenguaje corriente. Cualquier persona con una formación suficiente para seguir una sucesión moderada de inferencias lógicas es capaz de

entender la mayoría de las pruebas y, es en parte, esta virtualidad la que ha contribuido al éxito de la puesta en práctica de los mecanismos aquí comentados.

BIBLIOGRAFÍA

- Abdulkaridoglou, A.; Pathak, P. A.; Roth, A.; Sonmez, T. (2005), «The Boston Public School match», *American Economic Review* 95 (2): 368-371.
- Alcalde, J. (1996), «Implementation of Stable solutions to the marriage problem», *Journal of Economic Theory* 69: 240-254.
- Gale, D. y Shapley, L. S. (1962), College admissions and the stability of the marriage, *American Mathematical Monthly* 69: 9-15.
- Kara, T. y Sonmez, T. (1997), «Implementation of College Admission Rules», *Economic Theory* 9, 197-218.
- Ma, J. (1994), «Strategy-proofness and the strict core in a market with indivisibilities», *International Journal of Game Theory* 23, 75-83.
- Romero-Medina, A. (1998), «Implementation of Stable Solutions in a Restricted Matching Market», *Review of Economic Design* 3, 137-47.
- Roth, A. E. (1982a), «The economics of matching: stability and incentives», *Math. Op. Research*, 7: 617-628.
- Roth, A. E. (1982b), «Incentive compatibility in a market with indivisible goods», *Economics Letters* 9, 127-132.
- Roth, A. E. (1985), «The College Admissions Problem is not Equivalent to the Marriage Problem», *Journal of Economic Theory* 36, 277-88.
- Roth, A. E. (2002), «The Economist as Engineer: game Theory, Experimentation and Computation as tools for Design Economics», *Econometrica* 70 (4): 1341-78.
- Roth, A. E. y Peranson, E. (1997), «The effects on the change in the NRPM Matching algorithm», *Journal of the American Medical Association*, 278:729-732
- Roth, A. E. y Sotomayor, M. (1990), «Two-sided matching: A study in Game Theoretic Modeling and Analysis», New York, Cambridge U. Press.
- Roth, A. E. y Postlewaite, A. (1977), «Weak versus strong domination in a market with indivisible goods», *Journal of Mathematical Economics* 4, 131-137.
- Roth, A. E.; Sönmez, T. y Ünver, U. (2004), «Kidney exchange», *Quarterly Journal of Economics* 119, 457-488.
- Roth, A. E.; Sönmez, T. y Ünver, U. (2005), «Pairwise kidney exchange», *Journal of Economic Theory* 125, 151-188.
- Shapley, L. y Scarf, H. (1974), «On Cores and indivisibilities», *Journal of Mathematical Economics* 1, 23-28.