



**FACULTAD DE CIENCIAS**  
**GRADO EN MATEMÁTICAS**  
**TRABAJO FIN DE GRADO**  
**CURSO ACADÉMICO 2013-2014**

TÍTULO:

**GEOMETRÍA DE LOS RAYOS X PARALELOS**

AUTOR:

**PALOMA MARÍN MARTÍNEZ**



# Resumen

La tomografía geométrica es una rama de las matemáticas cuyas técnicas permiten la reconstrucción de un cuerpo a partir de sus secciones, proyecciones o rayos X. El estudio de esta materia comenzó en el siglo XX y supuso un avance importante en el campo de la Medicina, ya que es el fundamento de los escáneres y resonancias magnéticas. Este trabajo se centra en los rayos X paralelos, es decir, aquellos rayos X cuyos haces son paralelos, dadas las importantes aplicaciones de éstos. Y el estudio se hace sobre los cuerpos convexos planos. Un rayo X de un cuerpo es considerado como una función continua que mide la cantidad de materia encontrada por cada haz al pasar a través del cuerpo.

El objetivo perseguido es describir aquellos conjuntos de direcciones en los que hay que tomar los rayos X para que cualquier cuerpo convexo plano esté determinado de forma única por sus rayos X. En la actualidad, hay muchos problemas abiertos relacionados con la tomografía geométrica. Algunos de ellos están relacionados con la caracterización de los cuerpos que pueden ser determinados por un número concreto de rayos X. Otros tienen como objeto las demostraciones formales de los algoritmos que se utilizan en la práctica para la reconstrucción tomográfica.

## Abstract

Geometric tomography is a branch of mathematics whose techniques allow the reconstruction of a body from its sections, projections or X-rays. The study of this subject began in the twentieth century and was a major breakthrough in the field of Medicine, since it is the foundation of the scanners and magnetic resonance imagings. This paper focuses on the parallel X-rays, that is, those X-rays whose beams are parallel, given their important applications. And the study is done about the planar convex bodies. An X-ray of a body is

considered as a continuous function that measures the amount of material found by each beam passing through the body.

The aim is to describe those sets of directions in which X-rays have to be taken in order that any planar convex body is uniquely determined by its X-rays. Nowadays, there are many open problems related to geometric tomography. Some of them are related to the characterization of the bodies that can be determined by a specific number of X-rays. Other of them are aimed to formal proofs of the algorithms used in practice for tomographic reconstruction.

### **Palabras clave**

- Tomografía geométrica
- Reconstrucción a partir de proyecciones
- Cuerpos convexos planos

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>7</b>
<b>2. Antecedentes</b>	<b>9</b>
<b>3. Objetivos</b>	<b>11</b>
<b>4. Materiales</b>	<b>13</b>
<b>5. Resultados</b>	<b>17</b>
<b>6. Discusión de los resultados</b>	<b>25</b>
<b>7. Conclusiones</b>	<b>29</b>



# Capítulo 1

## Introducción

*Tomografía* proviene del griego  $\tau\acute{o}\mu\omicron\zeta$ , que significa una sección, y es un área establecida y activa de las matemáticas. La Tomografía Geométrica busca determinar la forma de un cuerpo a partir de sus proyecciones o secciones. Los resultados que se obtienen tienen importantes aplicaciones a muchas ciencias y -en particular- a la Medicina ya que son el fundamento de los rayos X, de los escáneres y de las resonancias magnéticas.

Todos sabemos que los materiales densos como los huesos o los dientes se muestran como áreas claras en una radiografía médica vista en el negatoscopio de un médico, mientras que las regiones más oscuras corresponden a otros tejidos menos densos. Cada haz de rayos X se desplaza a lo largo de una línea recta, y su intensidad después de atravesar el cuerpo depende de la cantidad de material que ha atravesado; altas intensidades resultan en un punto más oscuro en la imagen de rayos X, y las intensidades bajas se muestran como un punto más claro. Si los haces del rayo X son todos paralelos, entonces la imagen del rayo X contiene información sobre la cantidad de materia del cuerpo que hay sobre cada línea recta paralela a la dirección del rayo X.

Hay una expresión matemática que da esta cantidad para cada haz del rayo X. Si medimos la densidad del cuerpo en cada punto, obtenemos una *función de densidad*  $f$ . Cada haz del rayo X viaja a través de una recta  $l$  y la cantidad de materia que atraviesa es entonces la integral de  $f$  a lo largo de  $l$ . Se requiere algún conocimiento de la teoría de integración para entender el significado de este concepto, pero si el cuerpo es lo suficientemente simple esto puede ser evitado.

El escáner médico TAC (Tomografía Axial Computarizada) usa los datos de un número de rayos X de un cuerpo 3-dimensional, tomados en direcciones diferentes pero coplana-

rias, para producir imágenes de cortes del cuerpo. Esto es bastante extraordinario, en vista del hecho de que no importa cuántas direcciones se usen, hay siempre distintas densidades que pueden producir el mismo conjunto de rayos X; en resumen, ningún corte está únicamente determinado. Las imágenes producidas por el escáner TAC son aproximaciones, y las técnicas matemáticas usadas para generarlas son distintas en muchos aspectos de las que trataremos a continuación.

# Capítulo 2

## Antecedentes

En la Conferencia sobre Tomografía que se celebró en Oberwolfach en 1990, Gardner introdujo el término *tomografía geométrica*. En el libro de dicho autor [3], se ofreció la siguiente definición: “La *tomografía geométrica* es el área de las matemáticas que se ocupa de la recuperación de información sobre un objeto geométrico a partir de datos sobre sus secciones o proyecciones o ambas”. Nosotros nos centraremos en los cuerpos convexos (en muchos casos en el plano), y a veces nos restringiremos más al caso de los polítopos (muchas veces de los polígonos convexos).

Considerando solo una subclase estricta de distribuciones de densidad, uno puede a veces obtener unicidad en el problema inverso de determinar un conjunto a partir de un conocimiento parcial de sus secciones. Por ejemplo, Gardner y McMullen [5] probaron que hay ciertos conjuntos prescritos de cuatro direcciones en el espacio Euclídeo  $n$ -dimensional  $\mathbb{E}^n$ , tales que los rayos  $X$  de un cuerpo convexo en estas direcciones lo distinguen de todos los demás cuerpos convexos. (En este contexto, un rayo  $X$  da las longitudes de las cuerdas del cuerpo paralelas a la dirección del rayo  $X$ ). En tales situaciones uno podría formular e implementar un algoritmo que proporcione una reconstrucción arbitrariamente precisa a partir de un conjunto finito fijo de rayos  $X$ .

Incluso cuando los datos obtenidos no llevan a una única solución, pueden plantearse algunas preguntas interesantes de importancia práctica. Por ejemplo, ¿cuál es la mejor manera de estimar el volumen de un cuerpo convexo tridimensional, dadas las áreas de sus proyecciones sobre planos? Lutwak [9] obtuvo una sorprendente cota superior aplicando la desigualdad de la proyección de Petty, una de una serie de profundas desigualdades isoperimétricas afines estudiadas en [8]. La cota de Lutwak, que se extiende a  $\mathbb{E}^n$ , de

hecho es invariante afín - ¡da el volumen exacto para los elipsoides!

Gran parte de la tomografía geométrica, como se expone en [3], consiste en problemas inversos relativos a datos de uno de estos tres tipos: rayos X, medidas de proyecciones y medidas de secciones concurrentes. Nosotros explicaremos el concepto de rayos X y daremos solo una muestra de los muchos resultados, poniendo el foco en la unicidad e interesándonos por temas como estabilidad y reconstrucción.

# Capítulo 3

## Objetivos

El objetivo general de este Trabajo de Fin de Grado es explorar los problemas y técnicas de la Tomografía Geométrica. El trabajo se centrará en los rayos X paralelos de cuerpos convexos planos, es decir, todos los conjuntos que consideremos serán subconjuntos del plano  $\mathbb{E}^2$ .

En el Capítulo 2 hemos hecho una breve revisión histórica del desarrollo de la Tomografía Geométrica y en el Capítulo 1 hemos hablado un poco de sus aplicaciones. A continuación, en el Capítulo 5 trataremos de establecer los resultados principales que se conocen para la reconstrucción (determinación / indeterminación) a partir de rayos X paralelos proyectados en un número finito de direcciones. Al mismo tiempo construiremos ejemplos que pongan de manifiesto la necesidad de las hipótesis bajo las que se prueban dichos resultados principales. Y finalmente expondremos una relación de algunos problemas abiertos y presentaremos ejemplos que los motiven.



# Capítulo 4

## Materiales

La documentación que sirve de base para este trabajo es principalmente el libro [3]. Pero para comprender los principales resultados que en él se exponen es necesario conocer antes algunos conceptos, que vamos a introducir brevemente.

Nuestra terminología para teoría de conjuntos y topología es estándar. Si  $E$  es un conjunto, entonces  $|E|$ ,  $\text{co } E$ ,  $\text{cl } E$ ,  $\text{int } E$  y  $\text{bd } E$  denotan el *cardinal*, *complemento*, *clausura*, *interior* y *frontera* de  $E$  respectivamente. La *diferencia simétrica* de  $E$  y  $F$  es

$$E \triangle F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E).$$

Un conjunto  $G_\delta$  es una intersección numerable de conjuntos abiertos y un conjunto  $F_\delta$  es una unión numerable de conjuntos cerrados. Un conjunto es de *primera categoría* si es la unión numerable de conjuntos diseminados (denso en ninguna parte), y en otro caso es de *segunda categoría*. Un conjunto en un espacio métrico completo es de segunda categoría si y solo si es el complemento de un conjunto de primera categoría, y esto ocurre si y solo si contiene un conjunto  $G_\delta$  denso.

Topológicamente, un cuerpo convexo no es muy interesante. La superficie de un cuerpo convexo  $K$  en  $\mathbb{E}^n$  es homeomorfa a  $S^{n-1}$  vía una *aplicación radial*  $f$ , definida por seleccionar un punto  $x_0 \in \text{int } K$  y siendo

$$f(x) = (x - x_0) / \|x - x_0\|,$$

para cada  $x \in \text{bd } K$ .

¿Qué significa exactamente decir que una sucesión de conjuntos compactos converge a otro conjunto compacto? Uno debe tener una manera de medir la distancia entre dos

conjuntos compactos. Esta noción de distancia debe comportarse como la distancia usual  $d(x, y) = \|x - y\|$  entre puntos, la cual tiene tres propiedades fundamentales:  $d(x, y) \geq 0$ , y se da la igualdad si y solo si  $x = y$ ;  $d(x, y) = d(y, x)$ ; y la desigualdad triangular

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Tal función es llamada *métrica*. Aquí definiremos solo una métrica para los conjuntos compactos, aunque hay varias de uso común (véase el Lema 6 para otra). La *métrica de Hausdorff*  $\delta$  sobre la clase de los conjuntos compactos no vacíos en  $\mathbb{E}^n$  está definida por

$$\delta(E, F) = \max\{\max_{x \in E} d(x, F), \max_{x \in F} d(x, E)\}.$$

La métrica de Hausdorff es la estándar en el estudio de los conjuntos convexos. Un cuerpo convexo es propio si su interior es no vacío. Denotamos por  $\mathcal{K}_0^n$  el espacio de los cuerpos convexos propios en  $\mathbb{E}^n$  con la métrica de Hausdorff.

A menudo queremos trabajar con las clases de equivalencia de conjuntos medibles módulo conjuntos de medida cero, y aquí es útil escribir  $E \simeq F$  cuando  $\lambda_n(E \triangle F) = 0$ .

Sea  $\mu$  una medida en  $\mathbb{E}^n$  y  $E$  un conjunto acotado en  $\mathbb{E}^n$  de  $\mu$ -medida finita positiva. El *centroide* de  $E$  con respecto a  $\mu$  es el punto

$$c = \frac{1}{\mu(E)} \int_E x d\mu(x).$$

El centroide de  $E$  está contenido en  $\text{conv } E$ , donde  $\text{conv } E$  es la envoltura convexa de  $E$ .

El concepto básico es el de un *rayo*  $X$  (paralelo)  $X_u K$  de un cuerpo convexo plano  $K$  en la dirección  $u \in S^1$ . Esta es la función, definida en  $u^\perp$ , que da la longitud de cada cuerda de  $K$  paralela a  $u$ . Nótese que esto está en concordancia con la idea de que un rayo  $X$  de un cuerpo mida la cantidad de materia encontrada por cada haz al pasar a través del cuerpo, y que  $X_u K$  es continua y cóncava en su soporte. Véase la figura 4.1.

El rayo  $X$  de un cuerpo convexo está relacionado con un objeto estándar en geometría conocido como simetrizado de Steiner. Si  $u \in S^1$ , el *simetrizado de Steiner*  $S_u K$  de  $K$  en la dirección  $u$  es el conjunto obtenido trasladando, en la dirección  $u$ , todas las cuerdas de  $K$  paralelas a  $u$  de tal manera que son biseccionadas por  $u^\perp$ , y entonces tomando la unión de los segmentos de recta resultantes. Véase la Figura 4.2. Nótese que  $K$  y  $S_u K$  tienen los mismos rayos  $X$  en la dirección  $u$ .

Ahora definiremos tres maneras diferentes en las que los rayos  $X$  pueden ser usados para distinguir un conjunto en una clase del resto de conjuntos en esa misma clase. En

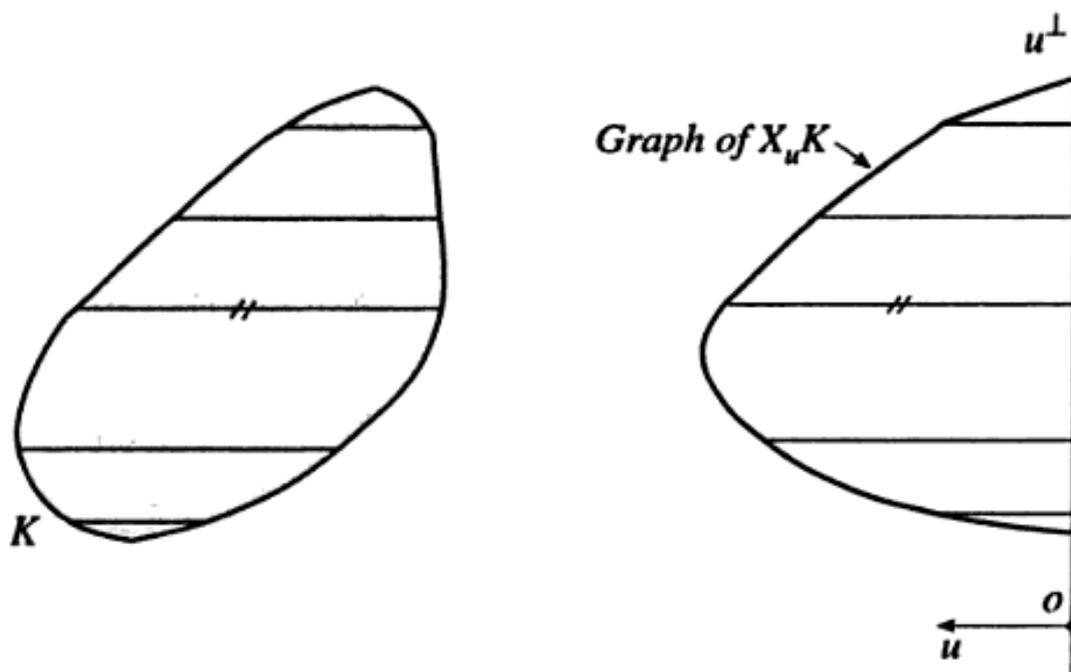


Figura 4.1: Un rayo  $X$  de un cuerpo convexo

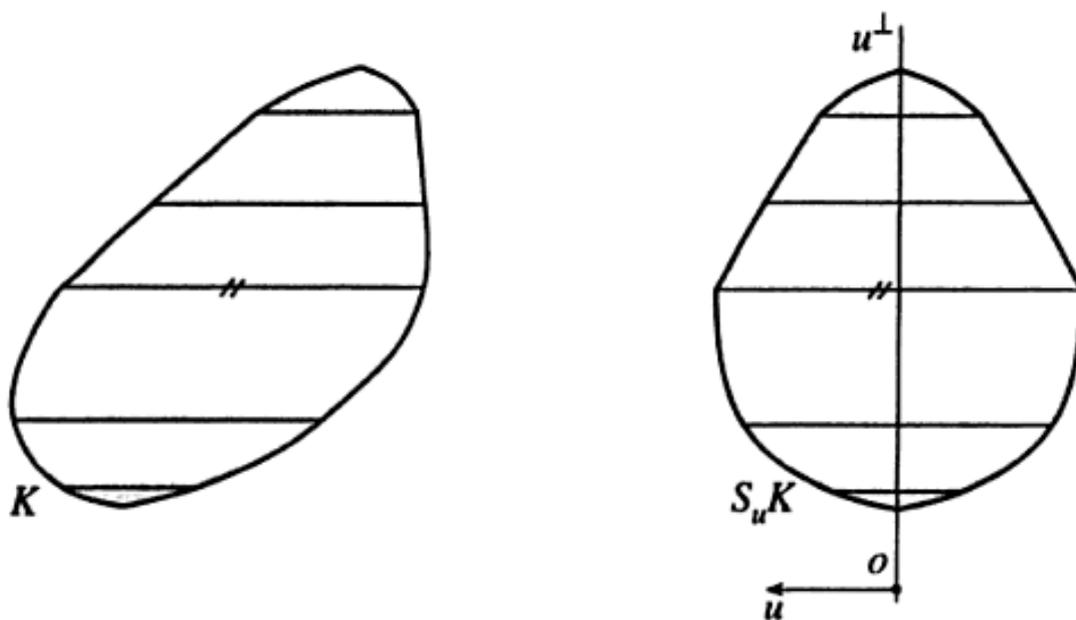


Figura 4.2: Un simetrizado de Steiner de un cuerpo convexo

las definiciones, estamos identificando rayos  $X$  con sus correspondientes simetrizados, de acuerdo a nuestra observación anterior. El símbolo  $\simeq$ , definido anteriormente, denota equivalencia salvo en un conjunto de medida cero, y para  $S$  un subespacio  $k$ -dimensional de  $\mathbb{E}^n$ ,  $X_S E \simeq X_S E'$  significa que  $X_S E(x) = X_S E'(x)$  para  $\lambda_{n-k}$ -casi todo  $x \in S^\perp$ .

**Definición 1:** Sea  $\mathcal{E}$  una clase de conjuntos medibles acotados y  $S$  un conjunto fijo de subespacios en  $\mathbb{E}^n$ . Decimos que  $E \in \mathcal{E}$  está *determinado* por los rayos  $X$  paralelos a los subespacios de  $S$  si cuando  $E' \in \mathcal{E}$  y  $X_S E \simeq X_S E'$  para todo  $S \in S$ , tenemos que  $E \simeq E'$ .  $\diamond$

**Definición 2:** Sea  $\mathcal{E}$  una clase de conjuntos medibles acotados en  $\mathbb{E}^n$ . Decimos que  $E \in \mathcal{E}$  puede ser *verificado* por los rayos  $X$  paralelos a los subespacios en un conjunto  $S$  si  $S$  puede ser escogido (dependiendo de  $E$ ) de manera que si  $E' \in \mathcal{E}$  y  $X_S E \simeq X_S E'$  para todo  $S \in S$ , entonces  $E \simeq E'$ .  $\diamond$

**Definición 3:** Sea  $\mathcal{E}$  una clase de conjuntos medibles acotados en  $\mathbb{E}^n$ . Decimos que un conjunto  $E \in \mathcal{E}$  puede ser *sucesivamente determinado* por rayos  $X$  paralelos a los subespacios  $S_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , si éstos pueden ser escogidos inductivamente, la elección de  $S_i$  dependiendo de  $X_{S_j} E$ ,  $1 \leq j \leq i-1$ , de manera que si  $E' \in \mathcal{E}$  y para  $1 \leq i \leq m$  tenemos  $X_{S_i} E' \simeq X_{S_i} E$ , entonces  $E' \simeq E$ .  $\diamond$

Cuando  $E$  y  $E'$  son cuerpos convexos, podemos reemplazar igualdad módulo conjuntos de medida nula por igualdad exacta en cada una de estas definiciones.

También decimos que los conjuntos de  $\mathcal{E}$  están *determinados por  $m$  rayos  $X$*  si hay un conjunto  $S$  de  $m$  subespacios 1-dimensionales (o direcciones) tales que cada conjunto en  $\mathcal{E}$  está determinado por sus rayos  $X$  paralelos a los subespacios en  $S$  (o direcciones). Las expresiones “ $E \in \mathcal{E}$  puede ser *verificado por  $m$  rayos  $X$* ” y “ $E \in \mathcal{E}$  puede ser *sucesivamente determinado por  $m$  rayos  $X$* ”, y las correspondientes expresiones para rayos  $X$   $k$ -dimensionales, se definen de manera análoga.

Cuando cada subespacio de  $S$  es 1-dimensional, se trata de rayos  $X$  ordinarios. Consideremos esta situación ahora.

Determinación significa que las direcciones de los rayos  $X$  están fijadas de antemano, mientras que verificación es un procedimiento de “comprobación” en el que las direcciones dependen del conjunto dado. La noción interactiva de determinación sucesiva yace entre éstas dos: Si los conjuntos de  $\mathcal{E}$  pueden ser determinados por rayos  $X$  en un conjunto de direcciones, entonces cada uno de tales conjuntos puede ser sucesivamente determinado por los mismos rayos  $X$ ; y si lo anterior es cierto, entonces cada conjunto de  $\mathcal{E}$  puede ser verificado por rayos  $X$  en estas direcciones.

A menos que uno esté trabajando con una clase de conjuntos que tengan alguna orientación especial, no habrá manera favorable de elegir la primera dirección para la determinación sucesiva, por tanto ésta debe ser considerada como dada en lugar de escogida.

# Capítulo 5

## Resultados

El problema consiste en encontrar qué conjuntos  $S$  de direcciones, si hay alguno, tienen la propiedad de que cualquier cuerpo convexo plano  $K$  está *determinado* de forma única por sus rayos  $X$  tomados en las direcciones del conjunto.

**Teorema 1:** *Un simetrizado de Steiner de un cuerpo convexo es también un cuerpo convexo.*

Si miramos las Figuras 4.1 y 4.2, nos convenceremos de que un rayo  $X$  nunca determinará un cuerpo convexo. Si  $K$  no es simétrico respecto a  $u^\perp$ , entonces  $S_u K$  es diferente de  $K$ , pero tiene el mismo rayo  $X$  que  $K$  en la dirección  $u$ . Por otro lado, si  $K = S_u K$ , el conjunto cerrado  $K'$  de puntos entre el grafo de  $X_u K$  y  $u^\perp$  es un cuerpo convexo con una forma distinta a la de  $K$ , pero con el mismo rayo  $X$ . En consecuencia, bien podemos asumir que hay al menos dos direcciones no paralelas en nuestro conjunto  $S$ .

Imaginemos que pensamos en los rayos  $X$  como imágenes, tal como se muestran en la consulta de un médico. Podemos saber las direcciones en las que se tomaron, pero no la posición de sus soportes sobre la recta ortogonal: en otras palabras, podemos conocer los rayos  $X$  sujetos a traslación. Por supuesto, entonces podríamos esperar determinar el cuerpo convexo sujeto a traslación, pero aparte de esto no encontraríamos ninguna otra dificultad. Para ver esto, necesitamos algunas observaciones que serán útiles.

**Lema 1 (Principio de Cavalieri):** *Supóngase que  $E$  y  $E'$  son cuerpos conexos tales que cada una de las rectas paralelas a una dirección fija  $u$  se encuentra con  $E$  y  $E'$  en segmentos de recta de igual longitud. Entonces  $\lambda_2(E) = \lambda_2(E')$ , esto es, las áreas de  $E$  y  $E'$  son iguales.*

En particular,  $K$  y  $S_u K$  tienen la misma área.

**Lema 2:** *Supóngase que  $E$  y  $E'$  son cuerpos conexos tales que cada una de las rectas paralelas a una dirección fija  $u$  se encuentra con  $E$  y  $E'$  en segmentos de recta de igual longitud. Entonces los centroides de  $E$  y  $E'$  están sobre la misma recta paralela a  $u$ .*

Obsérvese que para un  $K$  dado y un  $u$ , ambos  $X_uK$  y  $S_uK$  contienen la misma información sobre  $K$ . De hecho, para nuestros propósitos, podemos identificar  $X_uK$  y  $S_uK$ .

**Teorema 2:** *Sea  $S$  un conjunto conteniendo al menos dos direcciones no paralelas. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *Si  $K$  y  $K'$  son cuerpos convexos y  $S_uK$  es una traslación de  $S_uK'$  para todo  $u \in S$ , entonces  $K$  es una traslación de  $K'$ .*

(ii) *Si  $K$  y  $K'$  son cuerpos convexos y  $S_uK = S_uK'$  para todo  $u \in S$ , entonces  $K = K'$ .*

El Teorema 2 responde de manera satisfactoria a la pregunta que nos hacíamos. Por lo tanto podemos volver al problema de encontrar conjuntos finitos  $S$  de direcciones tales que los correspondientes rayos  $X$  determinen cuerpos convexos.

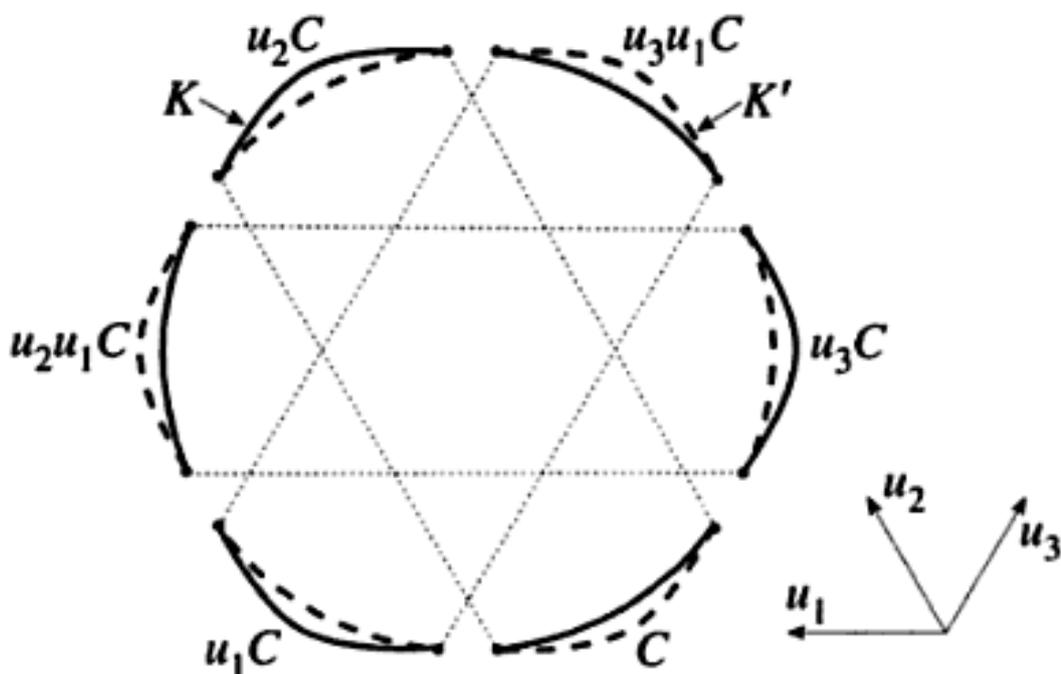
**Teorema 3:** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , hay un conjunto de  $n$  direcciones no paralelas mutuamente tales que hay polígonos convexos diferentes con los mismos rayos  $X$  en esas direcciones.*

Supóngase que  $K$  y  $K'$  son dos cuerpos convexos con los mismos rayos  $X$  en un conjunto  $S$  que contiene al menos dos direcciones. Como tienen el mismo centroide, sus interiores deben intersectar. Supóngase que  $C$  es un componente (un subconjunto conexo maximal) de  $\text{int}(K \setminus K')$  y  $u \in S$ . Sea  $uC$  el conjunto de todas las  $x \in \text{int}(K' \setminus K)$  tal que la recta  $l_u + x$  intersecta  $C$ . (Denotaremos siempre por  $l_u$  la recta que pasa por  $o$  paralela a  $u$ , de manera que  $l_u + x$  es la recta que pasa por  $x$  paralela a  $u$ .) Nótese que  $C$  y  $uC$  son disjuntos. Además, como los rayos  $X$  de  $K$  y  $K'$  en la dirección  $u$  son iguales,  $C$  y  $uC$  también tienen cuerdas de igual longitud en cada recta paralela a esta dirección. Por lo tanto  $uC$  es un componente de  $\text{int}(K' \setminus K)$ . Sea

$$\mathcal{C} = \{u_{i_m} \cdots u_{i_1} C : m \in \mathbb{N}, u_{i_j} \in S\}.$$

Llamamos a  $\mathcal{C}$  el *sistema de componentes asociado a  $C$* ; esto es el conjunto de todos los componentes (distintos) obtenidos de esta forma a partir de  $C$  usando una secuencia finita de direcciones de  $S$  (véase la Figura 5.1).

**Lema 3:** *Sean  $K$  y  $K'$  dos cuerpos convexos distintos con los mismos rayos  $X$  en un conjunto  $S$  de  $n$  direcciones no paralelas mutuamente. Sea  $C$  un componente de  $\text{int}(K \setminus K')$  y  $\mathcal{C}$  el sistema de componentes asociado a  $C$ . Entonces  $\mathcal{C}$  es finito y  $|\mathcal{C}| \geq 2n$ .*



**Figura 5.1:** Un sistema de componentes asociado

**Definición 4:** Sea  $S$  un conjunto finito de direcciones. Un polígono convexo no degenerado  $Q$  es llamado  $S$ -regular si tiene la siguiente propiedad: Si  $v$  es un vértice de  $Q$  y  $u \in S$ , entonces la recta  $l_u + v$  a través de  $v$  paralela a  $u$  alcanza un vértice distinto  $v'$  de  $Q$ . Decimos que  $Q$  es *débilmente*  $S$ -regular si tiene la propiedad anterior, modificada para permitir  $v' = v$  (la cual puede ocurrir solo si  $l_u + v$  sostiene  $Q$  en  $v$ ).  $\diamond$

Por ejemplo, un  $2n$ -gono regular es  $S$ -regular si  $S$  es el conjunto de direcciones de sus lados.

**Lema 4:** Sean  $K$  y  $K'$  dos cuerpos convexos distintos con los mismos rayos  $X$  en un conjunto  $S$  de al menos dos direcciones no paralelas mutuamente y supóngase que  $C$  es un componente de  $\text{int}(K \triangle K')$ . Entonces los centroides de los componentes en el sistema  $\mathcal{C}$  asociado a  $C$  forman los vértices de un polígono  $S$ -regular.

El Lema 4 reduce la determinación por rayos  $X$  de cuerpos convexos a la clasificación de aquellos conjuntos  $S$  de direcciones que admiten polígonos  $S$ -regulares. El Lema 5 requiere dos nuevos conceptos: (i) el *polígono mejorado*  $M(Q)$  de un polígono  $Q$  es el polígono cuyos vértices son los puntos medios de los lados de  $Q$ ; (ii) un polígono regular afín es la imagen por una transformación afín de un polígono regular.

**Lema 5:** Sea  $Q_0$  un  $n$ -gono convexo con centroide en el origen. Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , defi-

nimos  $Q_k = \sec(\pi/n)M(Q_{k-1})$ . Entonces la sucesión  $\{Q_{2k}\}$  converge (en la métrica de Hausdorff) a un polígono regular afín.

**Corolario 1:** Si hay un polígono débilmente  $S$ -regular, entonces  $S$  es un subconjunto de las direcciones de los lados de un polígono regular afín.

**Teorema 4:** Los cuerpos convexos son determinados por rayos  $X$  tomados en cualquier conjunto de direcciones que no sea un subconjunto de las direcciones de los lados de un polígono regular afín.

**Corolario 2:** Los cuerpos convexos están determinados por ciertos conjuntos de cuatro rayos  $X$ , pero por ningún conjunto de tres rayos  $X$ .

El Teorema 4 clasifica todos los conjuntos de direcciones tales que los rayos  $X$  de un cuerpo convexo, tomados en estas direcciones, lo determinan de forma única.

**Teorema 5:** Sea  $S$  un subconjunto de direcciones de los lados de un polígono regular afín. El número de  $n$ -gonos convexos no congruentes mutuamente con los mismos rayos  $X$  en las direcciones de  $S$  incrementa al menos exponencialmente con  $n$ .

A pesar de la idea del Teorema 5, la sensación que permanece es la de que “la mayoría” de cuerpos convexos deberían estar determinados por sus rayos  $X$  en solo dos direcciones. De hecho esto es cierto, en el siguiente sentido. Decimos que una afirmación es cierta para la mayoría (en el sentido de las categorías de Baire) de los cuerpos convexos, si es cierta para un conjunto de segunda categoría en  $\mathcal{K}_0^n$ .

A continuación necesitaremos una métrica alternativa sobre el conjunto de los cuerpos convexos. Si  $K_1$  y  $K_2$  son cuerpos convexos, la métrica de la diferencia simétrica  $\delta^S$  se define como

$$\delta^S(K_1, K_2) = \lambda_2(K_1 \triangle K_2).$$

**Lema 6:** Sobre el conjunto de los cuerpos convexos, la métrica de la diferencia simétrica  $\delta^S$  es equivalente a la métrica de Hausdorff  $\delta$ .

**Lema 7:** Sea  $n = 2$ . La aplicación de Steiner  $S_u : \mathcal{K}_0^n \rightarrow \mathcal{K}_0^n$  que lleva un cuerpo convexo  $K$  a su simetrizado de Steiner  $S_u K$  es continua.

En principio es sorprendente que el Lema 7 se convierta en falso si  $\mathcal{K}_0^2$  es reemplazado por el espacio  $\mathcal{K}^2$  de todos los conjuntos convexos compactos, con la métrica de Hausdorff. Para ver esto, sea  $H$  el segmento de recta cerrado que une  $o$  con el punto  $(0, 1)$ , y  $H_n$  el segmento de recta cerrado que une  $o$  y  $(1/n, 1)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces  $H_n \rightarrow H$ , pero los simetrizados de Steiner  $S_y H_n$  en la dirección  $y$  convergen a  $\{0\}$ , mientras que  $S_y H$  es

el segmento de recta cerrado que une  $(0, -1/2)$  con  $(0, 1/2)$ .

**Lema 8:** *Sea  $\mathcal{D}$  el conjunto de todos los cuerpos convexos determinados por sus rayos  $X$  en las direcciones coordinadas. Entonces  $\mathcal{D}$  es un conjunto  $G_\delta$  en  $\mathcal{K}_0^n$ .*

**Teorema 6:** *Dadas dos direcciones no paralelas, el conjunto de cuerpos convexos determinado por sus rayos  $X$  en estas direcciones es de segunda categoría en  $\mathcal{K}_0^n$ .*

Si  $S$  es cualquier conjunto finito de al menos dos direcciones, el Teorema 6 muestra que “la mayoría” de cuerpos convexos están determinados por sus rayos  $X$  en las direcciones de  $S$ . El Lema 9 proporciona una subclase con una estructura definida.

**Lema 9:** *Sea  $S$  un conjunto finito de direcciones. Supóngase que  $K$  es un cuerpo convexo y que  $Q$  es un polígono convexo inscrito en  $K$  (i.e. cuyos vértices están en  $bd K$ ) y con cada uno de sus lados paralelo a una dirección en  $S$ . Entonces  $Q$  está inscrito en cualquier otro cuerpo convexo  $K'$  con los mismos rayos  $X$  que  $K$  en las direcciones de  $S$ .*

**Definición 5:** Sea  $S$  un conjunto finito de direcciones. Decimos que un cuerpo convexo  $K$  es  $S$ -inscribible si  $int K$  es la unión de interiores de polígonos convexos inscritos en  $K$ , cuyos lados son paralelos a las direcciones de  $S$ .  $\diamond$

Del Lema 9 se deduce que un cuerpo convexo  $S$ -inscribible está determinado entre los cuerpos convexos por sus rayos  $X$  en las direcciones de  $S$ .

**Definición 6:** Sea  $K$  un cuerpo convexo y  $u$  una dirección. Llamamos  $u$ -aplicación a la aplicación definida en  $bd K$  que intercambia los extremos de las cuerdas de  $K$  paralelas a  $u$ , y la denotamos por  $f_u$ .  $\diamond$

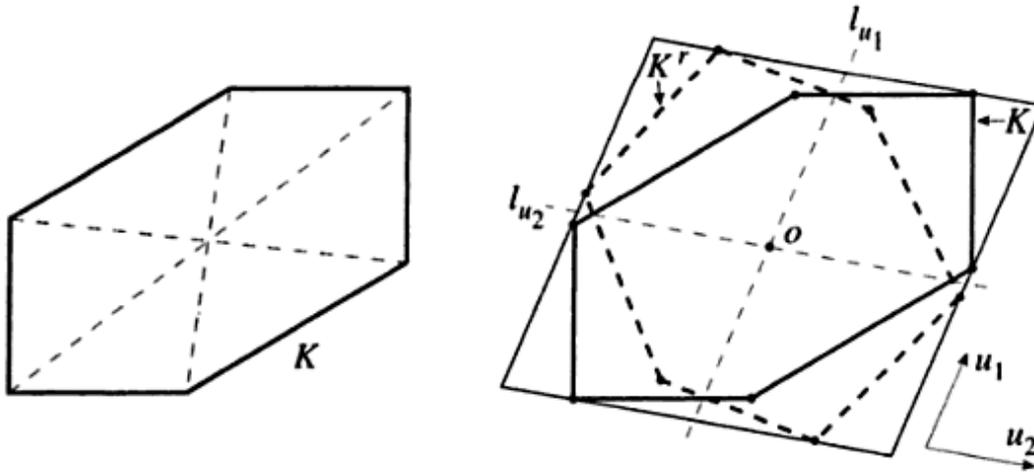
Supóngase que nos muestran un objeto uniforme y nos piden comprobar si contiene un agujero convexo de una cierta forma y orientación. Podríamos entonces elegir direcciones de rayos  $X$ , dependiendo del cuerpo convexo con esta forma y orientación, de tal manera que ningún otro cuerpo convexo produzca el mismo conjunto de rayos  $X$  en ese conjunto de direcciones. Decimos que el cuerpo convexo puede ser *verificado* por rayos  $X$  en ese conjunto de direcciones.

**Teorema 7:** *Un cuerpo convexo puede ser verificado por rayos  $X$  en un conjunto de tres direcciones.*

Queda claro, así, que se necesita una dirección menos para que haya unicidad cuando las direcciones no son escogidas de antemano.

**Teorema 8:** *Hay un polígono convexo no verificable por rayos  $X$  tomados en cualquier par de direcciones.*

En la Figura 5.2 vemos un ejemplo que ilustra el teorema anterior. Se trata de un hexágono simétrico respecto al centro tal que ninguna de sus diagonales es paralela a ningún eje. Como vemos, los polígonos  $K$  y  $K'$  son distintos pero tienen los mismos rayos  $X$  en las direcciones de los ejes  $u_1$  y  $u_2$ .



**Figura 5.2:** Un polígono convexo no verificable por dos rayos  $X$

Supóngase que la forma de un agujero no es conocida con anterioridad, y tiene que ser encontrada por medio de rayos  $X$ . En lugar de fijar todas las direcciones inicialmente, uno podría mejor decidir seleccionarlas inductivamente. Después de tomar el primer rayo  $X$ , la imagen del rayo  $X$  podría ser consultada, y esta información ser usada para elegir la dirección del segundo rayo  $X$ , y así sucesivamente. Decimos que un cuerpo convexo puede ser *sucesivamente determinado* por rayos  $X$  en un conjunto de direcciones si puede ser distinguido de cualquier otro cuerpo convexo por sus rayos  $X$  tomados de este modo. Ésta es, por supuesto, una idea muy natural y práctica, que se encuentra entre la determinación y la verificación.

**Teorema 9:** *Los polígonos convexos pueden ser sucesivamente determinados por tres rayos  $X$ .*

El Teorema 8 implica que el número tres en el Teorema 9 no puede ser reducido a dos.

Ahora volvemos a la pregunta de reconstruir cuerpos convexos a partir de sus rayos  $X$ . Nuestro propósito es idear un algoritmo que pueda ser implementado para al menos los cuerpos suaves y estrictamente convexos. Sin embargo, incluso en este caso la justificación teórica de este algoritmo está todavía incompleta, y de hecho conduce a un fascinante problema abierto.

**Lema 10:** *Supóngase que  $K$  es un cuerpo convexo y que  $u_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , son tres direcciones no paralelas mutuamente. Hay al menos dos triángulos (posiblemente degenerados) inscritos en  $K$  cuyos lados son todos paralelos a las direcciones  $u_i$ .*

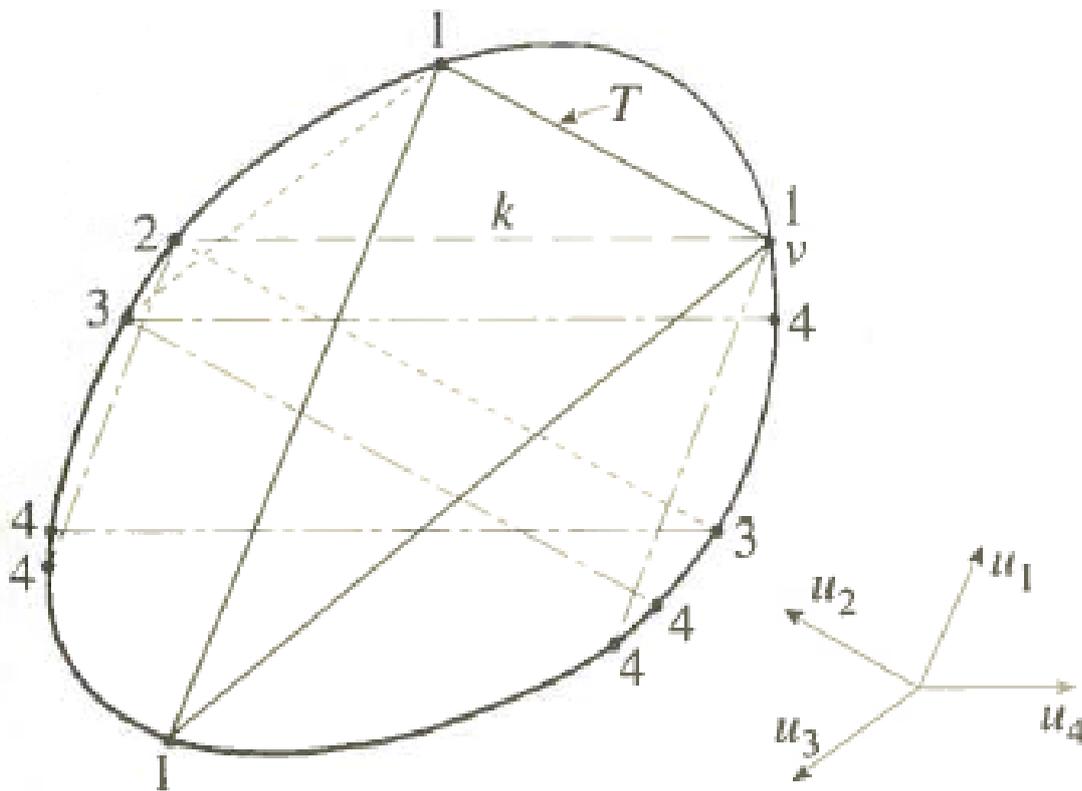
Nótese que si  $K$  es suave, los triángulos proporcionados por el Lema 10 no son degenerados. Si  $\text{bd } K$  no contiene segmentos de recta paralelos a las direcciones dadas, habrá exactamente dos de estos triángulos; en otro caso podría haber infinitos.

**Lema 11:** *Sea  $K$  un cuerpo convexo y  $u_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , tres direcciones no paralelas mutuamente. Los triángulos inscritos del Lema 10 pueden ser encontrados a partir de los rayos  $X$  de  $K$  en estas tres direcciones.*

Sea  $S = \{u_i : 1 \leq i \leq 3\}$  el conjunto de tres direcciones tales que los rayos  $X$  de cualquier cuerpo convexo tomados en estas direcciones lo determinen, como en el Corolario 2. Supóngase desde ahora que  $K$  es un cuerpo estrictamente convexo y suave. Por el Lema 11, podemos encontrar varios puntos de la frontera de  $K$  a partir de los rayos  $X$ , a saber, los vértices de los cuatro pares de triángulos inscritos cuyos lados son paralelos a algunas tres de las cuatro direcciones. De hecho, para proceder con el algoritmo, solo necesitamos usar las tres primeras direcciones para calcular los vértices  $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$  de un triángulo inscrito  $T$ .

Consideramos el conjunto de todas las cuerdas de  $K$  paralelas a algún  $u_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , que tengan un extremo en  $V_1$  e intersecten con  $\text{bd } T$  en un punto distinto a este extremo. Habrá cuatro de estas: los tres lados de  $T$  y una cuerda  $k$  paralela a  $u_3$ , uno de cuyos extremos es un vértice  $v$  de  $T$ . Sea  $V_2$  el conjunto de todos los extremos de estas cuerdas. Entonces  $V_2$  consiste de los vértices de  $T$  y el otro extremo de  $k$ . El rayo  $X$   $X_{u_3}K$  da la longitud de  $k$  y el hecho de que  $k \cap \text{int } T \neq \emptyset$  determina el lado de  $v$  sobre el que  $k$  yace en la recta  $l_{u_3} + v$ . Así  $V_2$  puede ser calculado a partir de nuestros rayos  $X$ . Continuamos este proceso inductivamente. Específicamente, en la etapa  $n$  consideramos el conjunto de todas las cuerdas de  $K$  paralelas a algún  $u_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , con un extremo en  $V_n$  y que intersecta con la frontera de  $\text{conv } V_n$  en un punto distinto de este extremo. Sea  $V_{n+1}$  el conjunto de todos los extremos de estas cuerdas. De esta manera producimos finitos conjuntos  $V_n$  de puntos en  $\text{bd } K$  que pueden ser encontrados a partir de los rayos  $X$ , con  $V_n \subset V_{n+1}$  para cada  $n$ . (Véase la Figura 5.3, en la que el etiquetado denota la  $n$  más pequeña tal que el punto pertenece a  $V_n$ .) Sea  $V = \cup_n V_n$ .

**Lema 12:** *El conjunto  $V$  es infinito.*



**Figura 5.3:** Un posible procedimiento de reconstrucción

**Lema 13:** Para  $1 \leq i \leq 4$ , el conjunto  $cl V$  es invariante bajo la aplicación  $f_{u_i}$ .

Resumiendo, tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 10:** Sea  $S$  un conjunto de direcciones tales que los cuerpos convexos están determinados por sus rayos  $X$  en estas direcciones. Para cada cuerpo estrictamente convexo y suave  $K$ , un conjunto infinito  $V$  de puntos en  $bd K$  puede, en principio, ser construido a partir de los rayos  $X$  de  $K$  en las direcciones de  $S$ . Además, la clausura de  $V$  es invariante bajo la  $u$ -aplicación para cada  $u \in S$ .

El algoritmo esbozado aquí sería una solución válida al problema de reconstrucción para cuerpos suaves y estrictamente convexos si pudiese ser obtenida una respuesta positiva al Problema 4.

# Capítulo 6

## Discusión de los resultados

Los resultados que hemos visto son importantes, pero es necesario seguir trabajando en el tema para dar respuesta a algunos problemas abiertos que planteamos a continuación.

**Problema 1:** *Caracterizar aquellos cuerpos convexos que pueden ser determinados por dos rayos  $X$ .*

Sabemos por el Teorema 6 que la mayoría de los cuerpos convexos pueden ser determinados por dos rayos  $X$ . Luego, parece lógico pensar que esos cuerpos convexos que pueden ser determinados por dos rayos  $X$  tengan alguna característica en común que haga que estos sí puedan ser determinados y el resto de cuerpos convexos no.

Por otro lado, en [3] encontramos una caracterización de conjuntos planos de medida finita determinados por dos rayos  $X$ . Estos conjuntos son los cuerpos convexos planos que son  $S$ -inscribibles. Sin embargo, los resultados parciales de Giering [6] relativos a triángulos y cuadriláteros sugieren que este problema podría ser complicado.

**Problema 2:** *¿Cuándo un conjunto de cuerpos convexos es un conjunto de simetrizados de Steiner de algún cuerpo convexo?*

Esta cuestión es interesante porque si conocemos el conjunto de simetrizados de Steiner de un cuerpo convexo, entonces podemos llegar a conocer el cuerpo convexo.

Hay dos versiones de esta pregunta, dependiendo de si el conjunto de direcciones de los simetrizados está estipulado de antemano. Obviamente si queremos que los cuerpos sean simetrizados de Steiner, deberán ser todos simétricos sobre una recta. Falconer [2] da tales condiciones de consistencia para un conjunto finito de rayos  $X$ , pero su resultado corresponde al caso de rayos  $X$  de un cuerpo convexo suave cuya densidad puede variar.

**Problema 3:** *¿Los cuerpos convexos pueden ser sucesivamente determinados por tres*

rayos  $X$ ?

El Teorema 9 dice que un cuerpo convexo puede ser verificado por tres rayos  $X$ . Es decir, que podemos elegir un conjunto  $S$  de tres direcciones de manera que si los rayos  $X$  en las direcciones de  $S$  de dos cuerpos convexos son equivalentes, entonces ambos cuerpos convexos son equivalentes. Ahora nos preguntamos si esto se puede hacer de manera que las tres direcciones de  $S$  sean elegidas inductivamente, es decir, que la elección de un vector dependa de los rayos  $X$  obtenidos en las direcciones elegidas anteriormente.

El Teorema 7 nos dice que esto que nos planteamos es posible hacerlo con polígonos convexos. El problema consiste en descubrir si también es posible con el resto de cuerpos convexos.

**Problema 4:** *Sea  $S$  un conjunto finito de direcciones tales que los rayos  $X$  de un cuerpo convexo tomados en esas direcciones lo determinen. Supóngase que  $K$  es un cuerpo suave y estrictamente convexo y que  $V$  es un subconjunto infinito de  $bd K$  invariante bajo la  $u$ -aplicación para cada  $u \in S$ . ¿Es  $cl V = bd K$ ?*

En el algoritmo que hemos dado al final del capítulo 5, a partir de los rayos  $X$  de un cuerpo estrictamente convexo y suave obtenemos una serie de puntos de un conjunto que hemos nombrado  $V$ . Si se consiguiese demostrar la igualdad  $cl V = bd K$ , dicho algoritmo sería válido para reconstruir este tipo de cuerpos.

Este problema parece involucrar la teoría de homeomorfismos del círculo, como sigue. Si  $bd K$  es un círculo, la composición de cualquier par de  $u$ -aplicaciones es una rotación, así que tales composiciones para un  $K$  general constituyen generalizaciones naturales de rotaciones del círculo. Además, la  $u$ -aplicación sobre  $bd K$  puede ser vista, vía la aplicación radial, como un homeomorfismo de  $S^1$  de un tipo especial. De la teoría general de tales homeomorfismos, se deduce que  $cl V$  debe ser  $bd K$  o un conjunto de Cantor. Para un único homeomorfismo de  $S^1$ , Denjoy mostró que la última posibilidad puede ocurrir, pero no si el homeomorfismo pertenece a  $C^2(S^1)$ . Podemos asegurarnos de que todas las  $u$ -aplicaciones estén en  $C^2(bd K)$  restringiendo nuestra atención a los cuerpos convexos de clase  $C^2$ . Sin embargo, necesitamos un teorema como el de Denjoy para aplicarlo no solo a un homeomorfismo, sino a un grupo de homeomorfismos del tipo apropiado.

**Problema 5:** *Obtener un resultado de estabilidad para estimar la distancia entre dos cuerpos convexos cuyos rayos  $X$  en un conjunto de  $n$  direcciones coincidan con un error máximo de  $\varepsilon$ .*

Los resultados de estabilidad también pueden estimar el área de la diferencia simétrica de dos cuerpos convexos  $K$  y  $K'$  cuyos rayos  $X$  en las direcciones del conjunto  $S$  difieren en un valor no superior a  $\varepsilon$ .

Por ejemplo, Longinetti [7] da la siguiente estimación de estabilidad: Supóngase que  $K$  y  $K'$  son cuerpos convexos tales que para todas las direcciones  $u$ ,  $\|X_u K - X_u K'\|_\infty < \varepsilon$ , es decir,  $K$  y  $K'$  son “ $\varepsilon$ -equicordales”. Entonces  $\lambda_2(K \triangle K') \leq C\varepsilon^2$ , donde  $C \leq 14,2$  es una constante independiente de  $K$  y  $K'$ . También, si  $K \cap K' \neq \emptyset$ , entonces  $\delta(K, K') < 3\varepsilon$ .

Es posible que los métodos de Sonnevend [10] puedan ser de utilidad a la hora de contestar a este problema.



# Capítulo 7

## Conclusiones

La tomografía geométrica, y más concretamente los rayos X paralelos de cuerpos convexos planos, tienen una gran importancia en el campo de la Medicina porque son la base del escáner TAC. El objetivo de esta técnica es conocer un cuerpo a partir de los rayos X que obtenemos de él.

Para hacerlo de una manera eficiente, buscamos utilizar la menor cantidad posible de direcciones de los rayos X. Pero a la hora de poder conocer un cuerpo no solo influye el número de direcciones que empleemos, sino también la forma en que éstas se escogen.

Dependiendo de si el conjunto de direcciones está fijado de antemano, si lo fijamos al conocer la forma y orientación que estamos buscando o si lo fijamos a medida que vamos obteniendo los rayos X; estaremos determinando, verificando o determinando sucesivamente los cuerpos convexos.

Si intentamos determinar los cuerpos convexos, podremos hacerlo siempre y cuando nuestro conjunto de direcciones no sea un subconjunto de direcciones de los lados de un polígono regular afín. Si buscamos determinarlos con un conjunto de direcciones pequeño, podremos hacerlo con ciertos conjuntos de cuatro rayos X, pero con ninguno de tres. Sin embargo, es sorprendente que “la mayoría” (en el sentido de las categorías de Baire) de los cuerpos convexos son determinados por sus rayos X en dos direcciones no paralelas.

Por otro lado, si intentamos verificar un cuerpo convexo, podremos hacerlo tomando los rayos X en un conjunto de tres direcciones. Pero si probamos con un conjunto de dos direcciones, siempre hay un polígono convexo que no es verificable.

Si nos interesa más la práctica de la determinación sucesiva, no podemos afirmar na-

da sobre la totalidad de los cuerpos convexos, pero sí tenemos la seguridad de que los polígonos convexos pueden ser sucesivamente determinados por tres rayos  $X$ .

Este es un área relativamente moderna de las matemáticas y por eso hay todavía mucho trabajo por hacer. En la práctica, podemos utilizar un algoritmo que se ha ideado para reconstruir un cuerpo suave y estrictamente convexo. Sin embargo, todavía no se ha podido justificar teóricamente. Ése es uno de los muchos problemas abiertos que hay relacionados con esta rama del conocimiento matemático.

# Bibliografía

- [1] BONNESEN, T. and FENCHEL, W. *Theory of Convex Bodies*. 1st Edition. USA: BCS Associates, 1987. ISBN: 0-914351-02-8.
- [2] FALCONER, K. J. Consistency conditions for a finite set of projections of a function. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*. 1979, **85**(1), 61-68. ISSN: 0305-0041
- [3] GARDNER, R. J. *Geometric Tomography*. 1st Edition. New York: Cambridge University Press, 1995. ISBN: 0-521-45126-4.
- [4] GARDNER, R. J. Geometric Tomography. *Notices of the AMS*. 1995, **42**(4), 422-429. ISSN: 0002-9920.
- [5] GARDNER, R. J and MCMULLEN P. On Hammer's X-ray problem. *J. London Math. Soc.* 1980, **21**(2), 171-175. ISSN: 0024-6107.
- [6] GIERING O. Drei- und Viereckspaare, für deren Drei- und Vierecke jeweils zwei Steiner Symmetrisierungen übereinstimmen. *Elemente Der Mathematik* 1985, **40**(1), 1-10. ISSN: 0013-6018.
- [7] LONGINETTI, M. Some questions of stability in the reconstruction of plane convex bodies from projections. *Inverse Problems* 1985, **1**(1), 87-89. ISSN: 0266-5611.
- [8] LUTWAK, E. Selected affine isoperimetric inequalities. In: P. M. Gruber and J. M. Wills, eds. *Handbook of Convex Geometry*. 1st Edition. Amsterdam: North Holland, 1993, p. 151-176. ISBN: 0444895981.
- [9] LUTWAK, E. A general isepiphanic inequality. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1984, **90**(3), 415-421. ISSN: 0002-9939.

- [10] SONNEVEND, G. An optimal sequential algorithm for the uniform approximation of convex functions on  $[0, 1]^2$ . *Appl. Math. Optim.* 1983, **10**(1), 127-142. ISSN: 0095-4616.