
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

Τομέας Δομοστατικής

Εργαστήριο Στατικής & Αντισεισμικών Ερευνών



Πρωτότυπες αριθμητικές διαδικασίες
μαθηματικού προγραμματισμού για
την ανελαστική ανάλυση
τρισδιάστατων πλαισιωτών
σχηματισμών με τη μέθοδο των
δυνάμεων

Διατριβή υποβληθείσα
στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
για τον τίτλο του
Διδάκτορα Μηχανικού

Θεόδωρος Ν. Πάτσιος
Διπλ. Πολιτικός Μηχανικός (ΕΜΠ), Μ.Δ.Ε. «Δ.Σ.Α.Κ.»

Επιβλέπων: Δρ. Κωνσταντίνος Β. Σπηλιόπουλος, Καθηγητής

Μάρτιος 2019

Πρωτότυπες αριθμητικές διαδικασίες μαθηματικού προγραμματισμού για την ανελαστική ανάλυση τρισδιάστατων πλαίσιων σχηματισμών με τη μέθοδο των δυνάμεων.

«Δῶς μοι πᾶ στῶ καὶ τὰν γᾶν κινάσω» (Αρχιμήδης)



Ο θεός Ερμής τρέχει καθώς κρατά το κηρύκειό-του με το αριστερό χέρι του, ως συνήθως.
[Αττική Λήκυθος, περίπου 480–470 π.Χ.]^(*)

^(*) Πηγή Εικόνας: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lekythos_of_Hermes.jpg (Βικιπαίδεια)

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

1	Εισαγωγή.....	3
1.1	Περίληψη	3
1.2	Κίνητρα για την παρούσα εργασία	3
1.2.1	<i>Επιλέγοντας την προσέγγιση με το μικρότερο πλήθος αγνώστων.....</i>	<i>3</i>
1.2.2	<i>Διαθέσιμοι Αλγόριθμοι για την Υλοποίηση των Τεχνικών Αυτοματοποίησης και Επίλυσης.....</i>	<i>6</i>
2	Βιβλιογραφική Επισκόπηση.....	9
2.1	Μέθοδος Δυνάμεων	9
2.2	Μαθηματικός Προγραμματισμός.....	11
2.3	Πλαστικότητα με χρήση Μαθηματικού Προγραμματισμού.....	13
2.4	Αντισυμβατικές Μέθοδοι στην Πλαστικότητα.....	23
3	Πεπερασμένα Στοιχεία Δοκού/Υποστυλώματος σε Όρους Ευκαμψίας.....	25
3.1	Ορισμοί	25
3.2	Αξονική Συνιστώσα	25
3.3	Στρεπτική Συνιστώσα	26
3.4	Ροπές Κάμψης.....	26
4	Διέπουσες Εξισώσεις.....	29
5	Πίνακες Ισορροπίας.....	33
5.1	Συνθήκες Ισορροπίας στον Τρισδιάστατο Χώρο.....	33
5.2	Γραμμικές Προβολές από Καθολικές σε Τοπικές Τρισδιάστατες Καρτεσιανές Συντεταγμένες.....	33
5.3	Εξισώσεις Υπολογισμού των $\{B_0, B_1\}$	35
5.4	Διαδικασίες για τον Προσδιορισμό των Στατικών Βάσεων	35
5.4.1	<i>Εξωτερικά Φορτία.....</i>	<i>36</i>
5.4.2	<i>Στατικός Πλεονάζοντα (Υπέρ-Στατικά) Μεγέθη.....</i>	<i>36</i>
6.	Εκκεντρότητες Στοιχείων.....	39
7	Συναρτήσεις Διαρροής.....	41
7.1	Γραμμικοποιημένες Συναρτήσεις Διαρροής.....	41
7.2	Ενσωμάτωση Ασυνεχειών	43
8	Πλαστική Κράτνυση Υλικού.....	45
8.1	Τμηματικός Γραμμικοί Καταστατικοί Νόμοι.....	45
8.2	Τοπικοί Συντελεστές Ευκαμψίας για Κράτνυση Υλικού.....	46
8.3	Μαθηματική Διατύπωση της Κράτνυσης Υλικού	47
8.4	Μία Συνεπής ως προς τους Νόμους της Φυσικής Υλοποίηση της Κράτνυσης Υλικού	51
8.5	Μαθηματική Διατύπωση της Τοπικής Αποφόρτισης στην Κρατυνόμενη Πλαστική Ροή.....	52
9	Στατική-Κινηματική Διαδικότητα	53
9.1	Αρχή Λειτουργίας των Μοχλών	53
9.2	Αρχή των Δυνατών Έργων	53
10	Έλεγχος Φορτίου & Μετατόπισης.....	55
10.1	Πρόβλεψη των Κρίσιμων Συντελεστών Κλιμάκωσης Φορτίου	55
10.2	Έλεγχος Παραμορφώσεων.....	55
11	Μια Μέθοδος Δυνάμεων για Ανάλυση με Όρους 1^{ης} Τάξεως.....	57
11.1	Διατύπωση του Προβλήματος	57
11.2	Αριθμητική Διαδικασία.....	58

12	Διερεύνηση της Επέκτασης σε Ανάλυση με Όρους 2^{α5} Τάξεως	63
12.1	Συντελεστές Ευκαμψίας για Ροπές Κάμψης.....	63
12.2	Μητρώα Συντελεστών Ευκαμψίας.....	64
12.3	Διαδικασίες για τους Πίνακες Ισορροπίας.....	65
12.3.1	Πίνακας “B ₀ ”.....	65
12.3.2	Πίνακας “B ₁ ”.....	67
12.4	Μεταβολές Εντατικών Μεγεθών	70
12.5	Διατύπωση του Προβλήματος	70
12.6	Μια Αριθμητική Μέθοδος Βασιζόμενη σε Ελεγχόμενη Εφαρμογή Φορτίου	72
12.7	Σκέψεις για μια Αριθμητική Μέθοδο Βασιζόμενη σε Ελεγχόμενη Εφαρμογή Μετατοπίσεων	75
13	Παραδείγματα.....	79
13.1	Μονόροφο Τρισδιάστατο (3Δ) Πλαίσιο, Μονών Ανοιγμάτων, Με Έκκεντρους Συνδέσμους.....	79
13.2	Εξαώροφο Τρισδιάστατο (3Δ) Πλαίσιο, Μονών Ανοιγμάτων	82
13.3	Μονόροφο, Δισδιάστατο (2Δ) Πλαίσιο Ενός Ανοίγματος.....	85
13.4	Μια Απλή Εσχάρα (3Δ).....	87
13.5	Δισδιάστατη (2Δ) Δοκός Δύο Ανοιγμάτων	89
13.6	Μονόροφο Δισδιάστατο (2Δ) Πλαίσιο Τριών Ανοιγμάτων, Εξ Ωπλισμένου Σκυροδέματος	92
13.7	Παράκτια Εξέδρα (2Δ).....	98
13.8	Το Τριώροφο Δισδιάστατο (2Δ) Πλαίσιο Ενός Ανοίγματος Του Πειράματος Του Yarimci	103
13.9	Ασύμμετρα Φορτισμένη Εσχάρα (3Δ).....	105
13.10	Δεκαώροφο Τρισδιάστατο (3Δ) Χαλύβδινο Πλαίσιο Τριών Φατνωμάτων.....	107
14	Συμπερασματικές Επισημάνσεις.....	113
14.1	Πλεονεκτήματα της Προτεινόμενης Μεθόδου	113
14.2	Μειονεκτήματα της Προτεινόμενης Μεθόδου.....	113
15	Ευχαριστίες.....	115
16	Παράρτημα Ι – Ένα σύντομο Εγχειρίδιο Χρήσης για το Πρόγραμμα.....	117
16.1	Δομή των Αρχείων Εισόδου	117
16.2	Επεξήγηση του Συντακτικού των Αρχείων Εισόδου	120
16.3	Ένα Παράδειγμα Αρχείου Εισόδου	129
16.4	Ένα Παράδειγμα Αρχείου Εξόδου.....	131
17	Παράρτημα ΙΙ – Κατάλογος Σχημάτων.....	155
18	Παράρτημα ΙΙΙ – Κατάλογος Πινάκων	157
19	Παράρτημα ΙV – Βιβλιογραφικές Αναφορές	159

1 Εισαγωγή

1.1 Περίληψη

Στην παρούσα εργασία αναπτύχθηκε μια μέθοδος για την ανάλυση ανελαστικών στατικών υπέρ-ορισμένων δισδιάστατων (2Δ) και τρισδιάστατων (3Δ) φερόντων πλαισίων. Η πλαστικότητα προσομοιώνεται υπό την παραδοχή σημειακών πλαστικών αρθρώσεων. Προτείνεται ένας καινούργιος, πλήρως αυτοματοποιημένος φορμαλισμός που χρησιμοποιεί τους πολλαπλασιαστές του Lagrange προκειμένου να προσομοιωθούν οι ασυνέχειες ενός φορέα, με εύκολο και αποτελεσματικό τρόπο. Ως άγνωστοι του (πρωτεύοντος) προβλήματος νοούνται οι στατικές πλεονάζουσες δυνάμεις και ροπές. Λαμβάνονται υπ' όψιν η κρατυνόμενη πλαστικότητα, οι εσωτερικές ασυνέχειες (π.χ. αρθρώσεις), και οι εκκεντρότητες των κόμβων ενώσεως μεταξύ μελών. Επίσης, στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, διερευνήθηκε και ένας φορμαλισμός που συμπεριλαμβάνει τις γεωμετρικές μη-γραμμικότητες (ή αλλιώς τα φαινόμενα "P-Δ" και "P-Δ-δ").

Συγγράφηκε ένα λογισμικό μικτού κώδικα σε γλώσσες FORTRAN 2003/2008 και ANSI C/C++, το οποίο δύναται να παρακολουθεί την ακριβή βήμα-προς-βήμα πλαστικοποίηση και την ανάπτυξη παραμορφώσεων πέραν των ελαστικών, για δομικά πλαίσια οποιασδήποτε γεωμετρίας, σύμφωνα με μια προκαθορισμένη κατανομή εξωτερικών φορτίσεων και υπό την παραδοχή μη-ολόνομης πλαστικής συμπεριφοράς υλικού, μέχρι τον αποτελεσματικό προσδιορισμό του σημείου κατάρρευσης (φορτίου και μηχανισμού).

Η προτεινόμενη μέθοδος, η οποία είναι μια μέθοδος που ανήκει στην κατηγορία των μεθόδων «βήμα προς βήμα», διατυπώθηκε και αναπτύχθηκε χρησιμοποιώντας αλγορίθμους εύρεσης συντομότερης διαδρομής εντός γράφων, την έννοια της μη-ολόνομης πλαστικότητας, και τον μαθηματικό προγραμματισμό.

1.2 Κίνητρα για την παρούσα εργασία

Η μέθοδος των δυνάμεων έχει εν γένει μικρότερο αριθμό αγνώστων από την μέθοδο των επικόμβιων μετακινήσεων. Επίσης, ο μαθηματικός προγραμματισμός αποτελεί ένα πλαίσιο εργασίας που παρέχει την δυνατότητα να διατυπωθεί ένας μαθηματικός φορμαλισμός που περιγράφει την μη-ολόνομη πλαστικότητα κατά τρόπο διαισθητικά αντιληπτό και συμβατό προς το φυσικό πρόβλημα. Επιπλέον, υπάρχει πληθώρα αλγορίθμων εύρεσης συντομότερων διαδρομών εντός γράφων αλλά και αλγορίθμων βελτιστοποίησης προκειμένου να υλοποιηθούν οι απαραίτητες τεχνικές αυτοματοποίησης και επίλυσης.

1.2.1 Επιλέγοντας την προσέγγιση με το μικρότερο πλήθος αγνώστων

Κατά την αναφορά σε εφαρμογές της δομοστατικής μηχανικής, η στατική ανάλυση με μητρώα (πίνακες) θεωρείται ως αναγκαιότητα για έναν αποτελεσματικό σχεδιασμό καθώς και μια ορθή εκτίμηση της φέρουσας ικανότητας και συμπεριφοράς των κατασκευών. Παραδοσιακά, αυτή η διεργασία διεξάγεται με την βοήθεια της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων (ΜΠΣ), ακολουθώντας την μέθοδο άμεσης ακαμψίας.

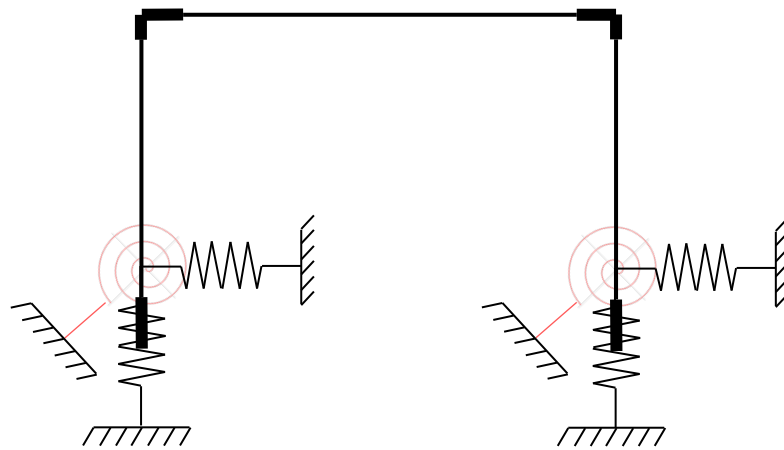
Όταν εφαρμόζεται η μέθοδος άμεσης ακαμψίας για την πραγματοποίηση στατικής ανάλυσης με την ΜΠΣ (κινηματική περιγραφή του προβλήματος), ένα στοιχείο δοκού/υποστυλώματος στον τρισδιάστατο (3Δ) χώρο έχει έξι (6) (κινηματικούς) βαθμούς ελευθερίας (ΒΕ) σε κάθε κόμβο του. Παρά το γεγονός ότι οι συνοριακοί (αμετάθετοι) ΒΕ είναι γνωστοί και ως εκ τούτου μειώνεται αλγεβρικά το μέγεθος του προβλήματος, εξακολουθεί να χρειάζεται ένα μεγάλο πλήθος αγνώστων. Ωστόσο, όταν ακολουθείται η μέθοδος ευκαμψίας (στατική περιγραφή του προβλήματος), αναμένεται πολύ μικρότερος αριθμός αγνώστων: Αυτοί οι άγνωστοι είναι οι στατικές πλεονάζουσες ή υπέρ-στατικές ποσότητες, και

σχετίζονται με τον 1^ο αριθμό Betti του επιπέδου γράφου που χρησιμοποιείται ως έννοια προκειμένου να προσομοιωθεί τοπολογικά η συνδεσμολογία μιας κατασκευής. Ακολουθεί μια σύντομη παρουσίαση, για την περίπτωση των εξωτερικώς στατικώς υπέρ-ορισμένων (υπέρ-στατικών) πλαισιωτών κατασκευών.

Έστω “N” ο αριθμός των κόμβων, “M” ο αριθμός των μελών, και “N_{BN}” ο αριθμός των συνοριακών κόμβων ενός χωρικού (3Δ) πλαισίου, όπου ο “N_{BN}” είναι εξ ορισμού του μικρότερος ή ίσος προς τον “N”. Επιπλέον, σε κάθε έναν από τους ακραίους κόμβους ενός πεπερασμένου στοιχείου δοκού/υποστυλώματος, το άθροισμα των ασυνεχειών “N_d” και των συνεχειών “N_c” είναι πάντα ίσο προς 6: Με αναφορά σε ολόκληρη την κατασκευή, ισχύει η ακόλουθη ισότητα για τους συνοριακούς κόμβους:

$$\sum_{i=1}^{N_{BN}} N_{c,i} + \sum_{i=1}^{N_{BN}} N_{d,i} = 6 \cdot N_{BN} \quad (1)$$

Όπου στην (1), υποτίθεται ότι μόνο ένα στοιχείο συνδέεται σε κάθε συνοριακό κόμβο (κάτι που είναι μια αρκετά εύλογη υπόθεση, δεδομένου ότι η αλληλεπίδραση μεταξύ εδάφους και κατασκευής προσομοιώνεται συνήθως χρησιμοποιώντας στροφικά και γραμμικά ελατήρια που συνδέονται επί των συνοριακών κόμβων του πλαισίου αυτής –βλ. Σχήμα 1 ακολούθως).



Σχήμα 1: Ένα απλό παράδειγμα ενός θυροειδούς πλαισίου, όπου η αλληλεπίδραση εδάφους κατασκευής προσομοιώνεται με γραμμικά και στροφικά ελατήρια (τα τελευταία απεικονίζονται με σπείρες του Αρχιμήδη).

Σύμφωνα με τους ως άνω ορισμούς, ο αριθμός των αγνώστων του αντιστοίχου προβλήματος άμεσης ακαμψίας είναι:

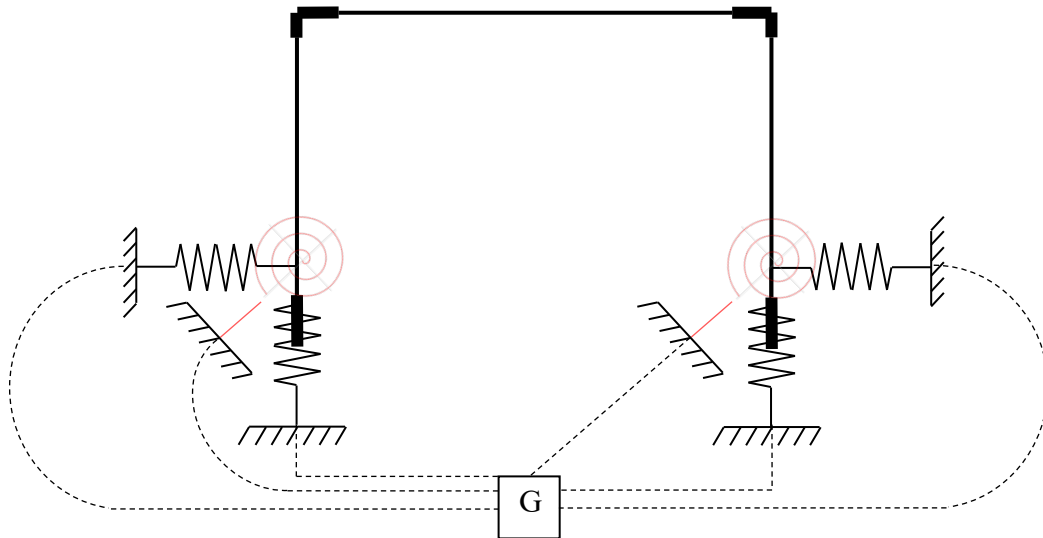
$$n_s = 6 \cdot N - \sum_{i=1}^{N_{BN}} N_{c,i} \quad (2)$$

Όπου στην (2) λαμβάνονται υπόψιν μόνο οι μη-μηδενικοί κινηματικοί βαθμοί ελευθερίας του γραμμικού συστήματος που πρέπει να επιλυθεί.

Υποθέτοντας ότι όλοι οι συνοριακοί κόμβοι της ίδιας κατασκευής συνδέονται σε έναν κοινό (εικονικό) κόμβο εδάφους (βλ. Σχήμα 2) έτσι ώστε ένα σχηματίζεται ένα πλήρες σύνολο κλειστών βρόχων (τοπολογικοί κύκλοι), τότε, σύμφωνα με τον 1^ο αριθμό του Betti, το πλήθος των αγνώστων για το πρόβλημα της μεθόδου των συντελεστών ευκαμψίας, είναι:

$$n_f = 6 \cdot [(M + N_{BN}) - (N + 1) + 1] - \sum_{i=1}^{N_{BN}} N_{d,i} \quad (3)$$

Όπου στην (3) υποτίθεται ότι το δομικό πλαίσιο προσομοιώνεται ως επίπεδος γράφος ή τουλάχιστον ως σύνθεση επιπέδων γράφων, έτσι ώστε να ισχύει η αναφερόμενη τοπολογική σταθερά.

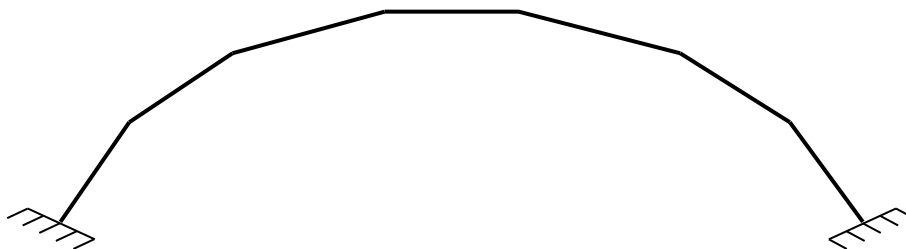


Σχήμα 2: Γραφική αναπαράσταση ενός δομικού πλαισίου κείμενου επί επιπέδου, όπου ο κόμβος «εδάφους» (αγγλ. «ground») συμβολίζεται με το γράμμα “G”.

Αφαιρώντας την (3) από την (2), και με την βοήθεια της (1), μπορεί να γίνει μια σύγκριση μεταξύ των βασικών αγνώστων των δύο προσεγγίσεων, ακαμψίας και ευκαμψίας:

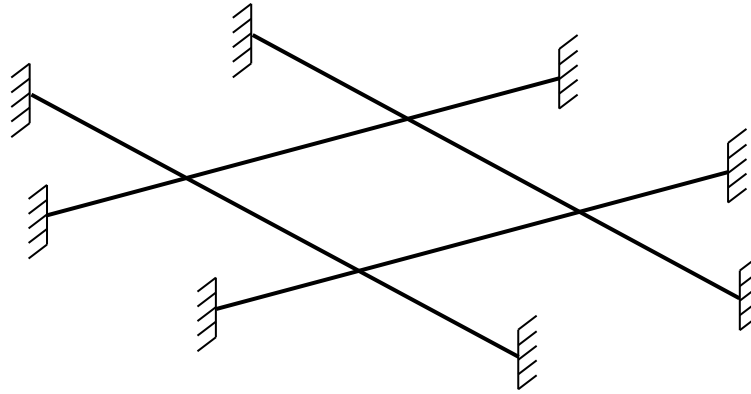
$$n_s - n_f = 6 \cdot \left[(N - M) + \left(N - \frac{\sum_{i=1}^N N_{c,i}}{3} \right) \right] \quad (4)$$

Επειδή ο αριθμός κόμβων μιας κατασκευής θα είναι πάντα μεγαλύτερος από τον αριθμό των μελών αυτής τουλάχιστον κατά μία μονάδα (βλ. Σχήμα 3 ακολούθως), ο πρώτος από τους δύο όρους στο δεξί μέλος της Εξίσωσης (4) θα είναι πάντα θετικός αριθμός.



Σχήμα 3: Η περίπτωση ενός συνεχούς τόξου που προσομοιώνεται ως ένα πεπερασμένο σύνολο από επτά (7) ευθύγραμμα τμήματα (γραμμικά στοιχεία δοκού)· όπως μπορεί εύκολα να παρατηρηθεί, ο αριθμός των κόμβων, συμπεριλαμβανόμενων των συνοριακών, είναι ίσος προς τον αριθμό των μελών, συν ένα.

Υποθέτοντας περαιτέρω ότι ο δεύτερος όρος αντιστοιχεί σε μια πλήρως συνεχή κατασκευή, η μέγιστη αναμενόμενη τιμή για το ένα τρίτο του αριθμού συνεχειών όλων των συνοριακών συνθηκών-της δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από το διπλάσιο του αριθμού των συνοριακών κόμβων αυτής: Επομένως, η διαφορά μεταξύ των δύο πληθών αγνώστων θα είναι στις περισσότερες των περιπτώσεων θετική, με εξαίρεση τις κατασκευές των οποίων οι συνοριακοί κόμβοι είναι περισσότεροι από το ήμισυ του συνόλου των κόμβων τους (π.χ. εσχάρες μικρού μεγέθους – βλ. Σχήμα 4 ακολούθως). Επομένως, μπορεί να συναχθεί το συμπέρασμα ότι, για την πλειονότητα των στατικώς υπέρ-ορισμένων κατασκευών, η μέθοδος των δυνάμεων διατυπωμένη με χρήση άλγεβρας πινάκων θα έχει μικρότερο πλήθος αγνώστων από την μέθοδο των επικόμβιων μετακινήσεων (μέθοδο άμεσης ακαμψίας).



Σχήμα 4: Παράδειγμα μιας μικρής εσχάρας με δώδεκα (12) κόμβους συνολικά, από τους οποίους οι οκτώ (8) – που είναι περισσότεροι από το ήμισυ του συνολικού αριθμού των κόμβων της κατασκευής– είναι συνοριακοί κόμβοι· κατά την έννοια των μη-μηδενικών βαθμών ελευθερίας, το δομοστατικό πρόβλημα σε όρους ακαμψίας έχει είκοσι τέσσερεις (24) αγνώστους, ενώ σε όρους ευκαμψίας έχει σαράντα οκτώ (48) αγνώστους.

Μπορεί εύκολα ναδειχθεί ότι η διαφορά που περιγράφεται από την Εξίσωση (4) είναι μια εν γένει θετική ποσότητα και για εσωτερικά στατικά υπέρ-ορισμένες κατασκευές.

1.2.2 Διαθέσιμοι Αλγόριθμοι για την Υλοποίηση των Τεχνικών Αυτοματοποίησης και Επίλυσης

Ένα επιπρόσθετο κίνητρο για την παρούσα ερευνητική εργασία αφορούσε τον τρόπο αντιμετώπισης του ζητήματος του αυτόματου υπολογισμού των πινάκων ισορροπίας: Υπάρχει ένα μεγάλο πλήθος από αλγόριθμους που δύνανται να προσδιορίζουν συντομότερες διαδρομές μεταξύ απομακρυσμένων ή/και συνεχόμενων κόμβων επιπέδων γράφων (οι οποίες έχουν το ελάχιστο ή σχεδόν ελάχιστο τοπολογικό μήκος), ένα χαρακτηριστικό που είναι κρίσιμο ώστε να υπολογίζονται οι συνθήκες ισορροπίας, τόσο λόγω των εξωτερικών φορτίων, όσο και λόγω της εσωτερικής ανακατανομής εντάσεων εξαιτίας των στατικά πλεοναζόντων δυνάμεων ή/και ροπών. Επιπλέον, η μέχρι σήμερα διεξαχθείσα έρευνα έχει προτείνει την χρήση των πολλαπλασιαστών Lagrange για την προσομοίωση των εσωτερικών/εξωτερικών ασυνεχειών μιας κατασκευής κατά την στατική ανάλυση με μητρώα και χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή, μια ιδέα που είναι χρήσιμη όταν πραγματοποιούνται οριακή, βήμα προς βήμα, και γενικώς μη-γραμμικές αναλύσεις (προσομοίωση και επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος της δομοστατικής ανάλυσης)· και αυτό διότι, όταν ακολουθείται η μέθοδος των συντελεστών ευκαμψίας, κατά τον υπολογισμό των εξισώσεων ισορροπίας χρειάζεται να υποτεθούν μόνον συνεχείς θεμελιώδεις φορείς. Ως εκ τούτου, το ζήτημα της αυτόματης παραγωγής των πινάκων ισορροπίας ήταν αμιγώς τεχνικής φύσεως.

Τέλος, η μη-ολόνομη πλαστικότητα που ορίζεται αυστηρά με την βοήθεια μιας συνθήκης γραμμικής συμπληρωματικότητας μεταξύ πλαστικού δυναμικού και πολλαπλασιαστών Lagrange, μπορεί να υπολογισθεί εύκολα με την βοήθεια αλγορίθμων βελτιστοποίησης (π.χ. Τετραγωνικού Προγραμματισμού, Σειριακού Τετραγωνικού Προγραμματισμού, και Μεθόδους Εσωτερικού Σημείου)· οι πολλαπλασιαστές Lagrange μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν προκειμένου να αποδώσουν ένα αριθμητικώς ικανοποιητικό συμβιβαστό των παραμορφώσεων στην περίπτωση ελαστικών ασυνεχειών (εσωτερικών/εξωτερικών ελευθερώσεων μιας κατασκευής). Ειδικά στην τελευταία περίπτωση, δεν υπάρχει πρακτικώς καμία υστέρηση υπολογιστικού χρόνου σε σύγκριση με τις πλήρως συνεχείς κατασκευές: Το πλήθος των περιορισμών λόγω των ασυνεχειών είναι πάντα δύο φορές το πλήθος των αντίστοιχων ασυνεχειών, το οποίο εν γένει είναι ένας αριθμός μικρότερος από τον αριθμό των περιορισμών που περιγράφουν τα πολύτοπα διαρροής των συνεχειών· η τελευταία συνθήκη ισχύει ιδιαίτερω στην περίπτωση των τρισδιάστατων (3Δ) κατασκευών, όπου ο ελάχιστος δυνατός αριθμός αλληλοεπιδρώντων

εντατικών συνιστωσών είναι δύο, π.χ. η διαξονική κάμψη, η οποία, για την περίπτωση μιας συνάρτησης διαρροής με μόνο μία εξίσωση αποδίδει συνολικά τέσσερις περιορισμούς.

Συνεπώς προς τα παραπάνω, υπήρχε διαθέσιμο ένα ενιαίο και απλό θεωρητικό πλαίσιο προκειμένου να υλοποιηθεί μια πλήρως αυτοματοποιημένη προσέγγιση βασιζόμενη αμιγώς στην μέθοδο των συντελεστών ευκαμψίας, και επιλέχθηκε να διερευνηθούν οι δυνατότητές-του.

2 Βιβλιογραφική Επισκόπηση

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται μια βιβλιογραφική επισκόπηση στα πεδία της μεθόδου των δυνάμεων και στις εφαρμογές του μαθηματικού προγραμματισμού στην πλαστικότητα, με χρονολογική σειρά· επίσης, γίνεται μια σύντομη βιβλιογραφική αναφορά στους αλγορίθμους βελτιστοποίησης που χρησιμοποιήθηκαν και δοκιμάστηκαν στην παρούσα εργασία, καθώς και σε ορισμένες αντισυμβατικές μεθόδους στην πλαστικότητα.

2.1 Μέθοδος Δυνάμεων

Πριν την εποχή της αυτοματοποιημένης δομοστατικής ανάλυσης, οι μηχανικοί εργάζονταν κατά κύριο λόγο ακολουθώντας την προσέγγιση της μεθόδου ευκαμψίας: Η θεωρία κάμψης μιας δοκού εξαιτίας συνδυασμένης δράσης εγκάρσιου κατανεμημένου φορτίου και αξονικής θλίψης ή εφελκυσμού καταγράφηκε επισήμως για πρώτη φορά από τον J. Perry το 1892 [1], και, από το 1919, ο A. Berry είχε λύσει το πρόβλημα της γεωμετρικής μη-γραμμικότητας λόγω αλληλεπίδρασης ροπής κάμψης και αξονικής δύναμης σε δοκούς, βασιζόμενος στην εξίσωση των τριών ροπών [2]: πλήρως ανεπτυγμένοι πίνακες των συναρτήσεων κατά Berry βρίσκονται στο σύγγραμμα [3]. Τα πράγματα άλλαξαν ριζικά αργότερα, με την εμφάνιση των ηλεκτρονικών υπολογιστών, οι οποίοι έδωσαν και το έναυσμα για την ανάπτυξη της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων (ΜΠΣ), οι αρχές της οποίας ήταν ήδη γνωστές τουλάχιστον από το 1943 [4]. Κατά την γνώση του γράφοντος, ο K.J. Dallyson ήταν ο πρώτος που παρουσίασε μια μέθοδο δυνάμεων για την ανάλυση τάσεων σε κυκλικού σχήματος πλαίσια, το 1953 [5]. Τα πρώτα άρθρα για την γενικευμένη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων δημοσιεύθηκαν έναν χρόνο αργότερα από τον I.X. Αργύρη και τον S. Kelsey [6]. Κατά την ίδια χρονική περίοδο, δημοσιεύθηκαν δύο ακόμη άρθρα από τους ίδιους συγγραφείς, τα οποία σηματοδότησαν την ανάπτυξη της αυτοματοποίησης της μεθόδου των δυνάμεων για την δομοστατική ανάλυση ([7],[8]). Ο W.R. Spillers [9] ήταν ο πρώτος που ανέφερε ότι, στην δομοστατική ανάλυση με μητρώα, η μέθοδος των δυνάμεων έχει λιγότερο πλήθος αγνώστων μεταβλητών από την μέθοδο των μετακινήσεων. Το 1965, δημοσιεύθηκε από τον Αθ.Ι. Ρουσόπουλο μια πλήρης θεωρία για τρισδιάστατα (3Δ) ελαστικά δομικά πλαίσια η οποία ακολουθεί μια προσέγγιση που βασίζεται αμιγώς στην μέθοδο των δυνάμεων προκειμένου να διατυπωθούν οι διέπουσες εξισώσεις [10]: σε αυτή την εργασία, διατυπώνεται για πρώτη φορά η έννοια των αμοιβαιοτήτων, που είναι μια γενίκευση του θεωρήματος αμοιβαιότητας των Betti-Maxwell. Ένας πλήρως αυτοματοποιημένος φορμαλισμός βασιζόμενος στην μέθοδο των δυνάμεων που περιλαμβάνει και την γεωμετρική μη-γραμμικότητα και μια προσέγγιση στηριζόμενη στην ολόνομη πλαστικότητα με χρήση του καταστατικού νόμου των Ramberg-Osgood, παρουσιάστηκε για πρώτη φορά το 1966 από τους J.T. Oden and A. Neighbors [11]. Το 1969 παρουσιάστηκε από τους J. C. de C. Henderson και E. A. W. Maunder ένα άρθρο που προτείνει την χρήση σταθερών αλγεβρικής τοπολογίας για την δομοστατική ανάλυση πλαισίων [12]. Φορμαλισμοί για την πλαστική (οριακή) ανάλυση και τον σχεδιασμό ελαχίστου βάρους πρωτοεμφανίστηκαν το 1971 από τους S.J. Fenves και A. Gonzalez-Caro [13]. Η ενσωματωμένη/ολοκληρωμένη (integrated) μέθοδος δυνάμεων διατυπώθηκε και προτάθηκε από τον S.N. Patnaik το 1973 [14]. Τεχνικές για τον αυτόματο προσδιορισμό μιας στατικής βάσης (σύνολο ανεξάρτητων βρόχων) εμφανίστηκαν στην βιβλιογραφία το 1974 από τους A.C. Cassel, J.C. de C. Henderson, και A. Kaveh ([15],[16]). Μια βελτίωση στην τεχνική αναζήτησης τοπολογικών κύκλων παρουσιάστηκε το 1978 από τον A. Kaveh [17]. Μια μέθοδος δυνάμεων που αντιμετωπίζει το πρόβλημα της γεωμετρικής μη-γραμμικότητας εισάγοντας ένα σύνολο από εικονικά παραμορφώσιμα μέλη περίξ των κόμβων της κατασκευής ώστε να δημιουργήσει έναν γεωμετρικό πίνακα ευκαμψίας που

συμπληρώνει τον κλασικό πίνακα ευκαμψίας λόγω γραμμικώς ελαστικής συμπεριφοράς προτάθηκε το 1978 από τον C. Polizzotto [18]. Στην ουσία της, αυτή η προσέγγιση είναι μια αλγεβρική μέθοδος.

Η ενσωματωμένη/ολοκληρωμένη (*integrated*) μέθοδος δυνάμεων εφαρμόστηκε στην ανάλυση απόκρισης συχνοτήτων από τους S.N. Patnaik και S. Yadagiri το 1978 [19]. Μια διαδικασία βελτιστοποίησης που βασίζεται στην συνδυαστική και χρησιμοποιεί την θεωρία μητρωοειδών (*matroids*) και τον «άπληστο» αλγόριθμο (*greedy algorithm*) προκειμένου να παράγει (βέλτιστα) σύνολα ανεξάρτητων τοπολογικών κύκλων σε ραβδωτές κατασκευές προτάθηκε το 1979 από τον A. Kaveh [20]. Το 1982, προτάθηκαν από τους I. Kaneko, M. Lawo, και G. Thierauf μερικές βελτιώσεις στις αλγεβρικές διαδικασίες που αφορούσαν τον υπολογισμό των πινάκων ισορροπίας [21]. Διάφορες τεχνικές προκειμένου να λαμβάνει κανείς στατικές βάσεις (*τοπολογικούς κύκλους, διαδρομές μεταφοράς εξωτερικών φορτίων*) με το ελάχιστο δυνατό (ή σχεδόν ελάχιστο) πλήθος μελών παρουσιάστηκαν στην βιβλιογραφία από τον A. Kaveh ([22],[23],[24]). Οι A. Jennings και T.K.H. Tam παρουσίασαν το 1986 και για πρώτη φορά στην βιβλιογραφία μια αυτοματοποιημένη μέθοδο βέλτιστου πλαστικού σχεδιασμού πλαισίων που βασιζόταν σε μια προσέγγιση με αγνώστους τις δυνάμεις [25]. Την ίδια χρονιά, οι S.N. Patnaik και K.T. Joseph παρουσίασαν δύο υπολογιστικά σχήματα για να παράγουν αυτόματα τον πίνακα συμβιβαστού στην ενσωματωμένη/ολοκληρωμένη (*integrated*) μέθοδο των δυνάμεων [26]. Μια πρώτη προσπάθεια να ακολουθηθεί μια προσέγγιση βασιζόμενη στην μέθοδο των δυνάμεων και στα πλαίσια του μαθηματικού προγραμματισμού έγινε για πρώτη φορά από τους N.Z. Pereira, L.A. Borges, και M.B. Hecke το 1988 [27]. Τόσο η στατική, όσο και η κινηματική προσέγγιση διατυπώθηκαν και επιλύθηκαν χρησιμοποιώντας τον δυικό αλγόριθμο του Lemke. Κατά την διάρκεια του ίδιου έτους, ο A. Kaveh παρουσίασε ορισμένες μεθόδους για την μελέτη των τοπολογικών ιδιοτήτων πλαισιωτών κατασκευών, η εφαρμογή των οποίων απέδωσε μερικές νέες τεχνικές για τον προσδιορισμό της στατικής αοριστίας [28]. Το 1991, ο A. Kaveh πρότεινε ένα κριτήριο σχετικής ακαμψίας για την διαδικασία επιλογής του συνόλου των ανεξάρτητων τοπολογικών κύκλων που συνεισφέρει στην βέλτιστη δομή των πινάκων ευκαμψίας [29]. Μια μέθοδος άμεσης ευκαμψίας που σχεδιάστηκε ώστε να λειτουργεί σε διασύνδεση με την μέθοδο άμεσης δυσκαμψίας προτάθηκε από τους C.A. Felippa και K.C. Park, το 1997 [30]. Στην θεματική περιοχή του βέλτιστου πλαστικού σχεδιασμού, μια καινούργια τεχνική αυτοματοποίησης προτάθηκε από τον K.B. Σπηλιόπουλο [31], ενώ την ίδια χρονιά προτάθηκε από τους K.B. Σπηλιόπουλο και Π.Γ. Σουλιώτη μια προσέγγιση αυτόματου προσδιορισμού του φορτίου κατάρρευσης [32]. Μια επαναληπτική τεχνική για την βήμα προς βήμα μείωση της στατικής αοριστίας προτάθηκε από τον B.K. Κουμούση το 1998 [33]. Οι πρόσφατες εξελίξεις στην ενσωματωμένη/ολοκληρωμένη μέθοδο των δυνάμεων συζητήθηκαν από τους S.N. Patnaik, P.M. Κορωνάιου, D.A. Hopkins κατά την διάρκεια της ίδιας χρονιάς [34]. Μια επέκταση της ενσωματωμένης/ολοκληρωμένης μεθόδου των δυνάμεων προκειμένου να συμπεριλαμβάνει τις μη-γραμμικές κατασκευές παρουσιάστηκε από τους N.R.B. Krishnam Raju και J. Nagabhushana [35]. Ο σχεδιασμός πλαισίων με χρήση γενετικών αλγορίθμων παρουσιάστηκε για πρώτη φορά από τους A. Kaveh και V. Kalatjari το 2002 [36] και το 2004 [37], και από τους A. Kaveh και A. Abdietehrani επίσης το 2004 [38]. Ένα σύνολο από δοκιμαστικές μελέτες περιπτώσεων στον δομοστατικό βέλτιστο σχεδιασμό με την βοήθεια αλγορίθμων σειριακού τετραγωνικού προγραμματισμού και μιας ενσωματωμένης/ολοκληρωμένης μεθόδου δυνάμεων παρουσιάστηκε από τον R. Sedaghati το 2005 [39]. Μια γεωμετρικώς μη-γραμμική μέθοδος δυνάμεων για δομές συνδυασμένων και εναλλασσόμενων αμιγώς εφελκυστικών / θλιπτικών μελών και εν γένει μηχανισμών απειροστών παραμορφώσεων (*tensegrity*) προτάθηκε την ίδια χρονιά από τους Y. Luo και J. Lu [40]. Η ενσωμάτωση των ημιάκαμπτων κόμβων πραγματοποιήθηκε από τους A. Kaveh και H. Moez το 2005 [41]. Γενετικοί αλγόριθμοι για δομοστατική βελτιστοποίηση εφαρμόστηκαν από τους A. Kaveh και H. Rahami το 2006

([42],[43]) και τους H. Rahami, A. Kaveh, και Y. Gholipour το 2008 [44]. ευρετικοί (*heuristic*) αλγόριθμοι εφαρμόστηκαν στην πλαστική οριακή ανάλυση πλαισίων από τους A. Kaveh και M. Jahanshani την ίδια χρονιά [45]. Επίσης, την ίδια χρονιά, παρουσιάστηκε από τους A. Kaveh και H. Moez μία τρόπον τινά βαθμιαία πρόοδος στην ανάλυση με ημιάκαμπτους κόμβους [46]. Το 2009, μια υπάρχουσα μέθοδος οριακής ανάλυσης πλαισίων επεκτάθηκε προκειμένου να λαμβάνει υπόψιν της κατασκευές με ελκυστήρες/θλιπτήρες [47]. Το 2010, οι A. Kaveh και S. Malakouti Rad εισήγαγαν μια τεχνική για ταυτόχρονη ανάλυση και σχεδιασμό κατασκευών χρησιμοποιώντας γενετικούς αλγόριθμους και τεχνικές βελτιστοποίησης τύπου σμήνους σωματιδίων [48]. την ίδια χρονιά, παρουσιάστηκε μια αποτελεσματική μέθοδος μαθηματικού προγραμματισμού [49] για δομικά πλαίσια από ελαστικό-ιδεωδώς πλαστικό υλικό. Το 2011, εφαρμόστηκαν μετα-ευρετικοί (*meta-heuristic*) αλγόριθμοι για τον βέλτιστο σχεδιασμό κατασκευών από τους Kaveh και Talatahari [50]. Καινούργιες τεχνικές για την μείωση του υπολογιστικού κόστους στην ανάλυση κατασκευών που ακολουθούν κανονικότητες σχήματος προτάθηκαν από τον Kaveh κ.α. το 2012 [51]. Μια αριθμητική μελέτη της ελαστοπλαστικής απόκρισης επιπέδων πλαισίων υποκειμένων σε σενάρια ψευδοστατικών ανακυκλιζόμενων φορτίσεων υπό την παραδοχή μη-ολόνομων πλαστικών αρθρώσεων και αλληλεπίδρασης ροπής κάμψης και αξονικής δύναμης παρουσιάστηκε στην [52]. Το 2013, οι K.B. Σπηλιόπουλος και N.Γ. Δαής επέκτειναν μια υπάρχουσα προσέγγιση που βασίζεται στην μέθοδο των δυνάμεων και πραγματοποιεί οριακή ανάλυση δισδιάστατων (2Δ) πλαισίων, ώστε να λειτουργεί και για τρισδιάστατα (3Δ) πλαίσια [53]. Ένα πρόγραμμα βελτιστοποίησης για την 2^{ης} τάξεως, βήμα προς βήμα ελαστοπλαστική ανάλυση επιπέδων πλαισίων παρουσιάστηκε στην [54]. Ένας κανόνας ισότροπης πλαστικής κράτυνσης υλικού με χρήση μη-ολόνομων πλαστικών αρθρώσεων για την 1^{ης} τάξεως βήμα προς βήμα ανάλυσης πλαισίων με την μέθοδο των δυνάμεων παρουσιάστηκε για πρώτη φορά στην [55]. Το 2016, μια υπάρχουσα βήμα προς βήμα μέθοδος δυνάμεων επεκτάθηκε στην ανάλυση ανελαστικών τρισδιάστατων (3Δ) πλαισίων [56]. ενσωματώθηκε ένας γραμμικός μετασχηματισμός για την προβολή των εντατικών συνιστωσών στους τοπικούς άξονες του κάθε μέλους, ο οποίος απαιτεί λιγότερες πράξεις στον ψηφιακό υπολογιστή από τον ισοδύναμο που προτάθηκε στην [53]. υιοθετήθηκαν γραμμικοποιημένες κυρτές συναρτήσεις διαρροής οι οποίες σχηματίζονται κατά πλήρως αυτοματοποιημένο τρόπο. Μια αμιγώς βασισμένη στην μέθοδο δυνάμεων προσέγγιση στην ελαστοπλαστική ανάλυση πλαισίων με κρατυνόμενες πλαστικές αρθρώσεις παρουσιάστηκε στην [57], η οποία, κατ' ουσία είναι μια ενοποίηση των μέχρι σήμερα ευρημάτων της ερευνητικής δουλειάς των συγγραφέων των εργασιών [52],[54],[55], και [56].

2.2 Μαθηματικός Προγραμματισμός

Ο τίτλος της παρούσας ενότητας αφορά έναν κλάδο της αριθμητικής ανάλυσης που θεραπεύει το πρόβλημα εύρεσης δεσμευμένων ακροτάτων συνεχών (*αλλά και διακριτών*) συναρτήσεων που είναι είτε φραγμένες από ένα σύνολο περιορισμών (*ισοτήτων ή/και ανισοτήτων*), είτε μη φραγμένες. Ακολούθως παρουσιάζεται μια σύντομη σχετική βιβλιογραφική επισκόπηση, καθ' όσον, από την οπτική του μηχανικού, το ενδιαφέρον εστιάζεται μόνο στην εφαρμογή αυτών των αριθμητικών τεχνικών.

Η τεχνική για την επίλυση του προβλήματος των δεσμευμένων ακροτάτων βασίζεται στην ιδέα της δημιουργίας ενός γραμμικού συνδυασμού της συνάρτησης και των περιορισμών αυτής, και προτάθηκε για πρώτη φορά το 1811 από τον J.L. Lagrange [58]. αυτή η τεχνική είναι ιδιαίτερος χρήσιμη για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών υποκειμένες σε περιορισμούς μορφής ισοτήτων. Σε ένα υπόμνημα προς την Γαλλική Ακαδημία Επιστημών [59], ο J.-B.J. Fourier θέτει ένα σύνολο ερωτήσεων σχετικά με τον προσδιορισμό της βέλτιστης λύσης σε προβλήματα όπου οι άγνωστες μεταβλητές δεσμεύονται από περιορισμούς το πλήθος των οποίων είναι ίσο προς ή ακόμη μεγαλύτερο από τον αριθμό των

μεταβλητών· επιπλέον, υποθέτει ότι αυτοί οι περιορισμοί μπορεί να είναι συναρτήσεις με μορφή ανισοτήτων των αγνώστων του προβλήματος. Καταδεικνύει την αναμενόμενη περιπλοκότητα με την βοήθεια μερικών απλών παραδειγμάτων γεωμετρικής ευστάθειας. Το 1823, ο Fourier ήταν ο πρώτος στην ανθρώπινη ιστορία που εξέφρασε την ανάγκη για την ανάπτυξη αλγορίθμων βελτιστοποίησης, κάτι που πραγματοποιήθηκε για πρώτη φορά περίπου έναν αιώνα μετά. Το πρώιμο έργο στο αντικείμενο πραγματοποιήθηκε και εφαρμόστηκε από τον L.V. Kantorovich το 1939 [60]: σε αυτή του την εργασία, η οποία είναι στην ουσία της μια πρώτη θεμελίωση του Γραμμικού Προγραμματισμού (ΓΠ), ασχολείται με το πρακτικό πρόβλημα της βελτιστοποίησης μιας μονάδας παραγωγής πολυστρωματικών σανίδων/φύλλων ξύλου. Την ίδια χρονιά, οι απαραίτητες και επαρκείς συνθήκες που ισχύουν για ένα δεσμευμένο ακρότατο αποδείχθηκαν από τον W. Karush στην Μεταπτυχιακή του Εργασία [61]; αργότερα, η ανάπτυξη των ψηφιακών υπολογιστών έδωσε έναυσμα σε αυτόν τον νέο κλάδο της αριθμητικής ανάλυσης που ονομάζεται «Μαθηματικός Προγραμματισμός» (ΜΠ).

Στις παραγράφους που ακολουθούν, γίνεται μια σύντομη αναφορά στις βιβλιογραφικές πηγές που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα διδακτορική διατριβή· μια εις βάθος προσέγγιση στο θέμα δεν αποτέλεσε μέρος της παρούσας εργασίας, διότι, από την οπτική του μηχανικού, το κύριο ενδιαφέρον ήταν να διερευνηθεί η απόδοση των αλγορίθμων αυτών στο πρόβλημα της βήμα-προς-βήμα μη γραμμικής δομοστατικής ανάλυσης.

Οι πρώτοι αλγόριθμοι βελτιστοποίησης που αναπτύχθηκαν ανήκουν στην οικογένεια της Μεθόδου Simplex, η οποία εισήχθη το 1951 από τον Dantzig [62]. Αυτοί οι αλγόριθμοι βρίσκουν μια βέλτιστη λύση (*ελαχιστοποίηση/μεγιστοποίηση*) μιας γραμμικής συνάρτησης η οποία υπόκειται σε ένα σύνολο γραμμικών περιορισμών (*ισότητες/ανισότητες*), και, από μια ιστορική οπτική, αναπτύχθηκαν αρχικά για στρατιωτικούς σκοπούς (*επιχειρησιακή έρευνα*). Η δυική μέθοδος του Lemke [63] είναι επίσης ένας ιστορικός αλγόριθμος που έχει αρκετά υπολογιστικά πλεονεκτήματα σε διάφορες εφαρμογές του (π.χ. στην επιχειρησιακή έρευνα και στην δομική πλαστικότητα με θεώρηση χαλάρωσης υλικού). Μια αναλυτική παρουσίαση του Γραμμικού Προγραμματισμού (ΓΠ) βρίσκεται στο σύγγραμμα [64]: ακόμη μια λεπτομερής πηγή της αντίστοιχης/σχετικής βιβλιογραφίας μπορεί να ευρεθεί το σύγγραμμα [65].

Στα χρόνια που ακολούθησαν την εφεύρεσή της, η χρήση της μεθόδου Simplex βρήκε εφαρμογές σε διάφορους τομείς της οικονομίας, συμπεριλαμβανόμενου του σχεδιασμού μεταφορικών συστημάτων, την διαχείριση χαρτοφυλακίου, τον βέλτιστο πλαστικό σχεδιασμό (*με την έννοια του ελαχίστου βάρους*), και την οριακή ανάλυση πλαισιωτών κατασκευών· αυτές οι εφαρμογές έδωσαν το έναυσμα για την έναρξη ενός νέου κλάδου της αριθμητικής ανάλυσης, την ανάπτυξη αλγορίθμων βελτιστοποίησης για μη-γραμμικά προβλήματα. Από τις αρχές της δεκαετίας 1980-1990, αναπτύχθηκαν οι καινοτόμες προσεγγίσεις του Τετραγωνικού Προγραμματισμού (ΤΠ), του Σειριακού/Διαδοχικού Τετραγωνικού Προγραμματισμού (ΣΤΠ) και οι Μέθοδοι Εσωτερικού Σημείου (ΜΕΣ): αναλυτικές παρουσιάσεις των αρχών στις οποίες βασίζονται καθώς και τρόποι υλοποίησής τους υπάρχουν στην σχετική βιβλιογραφία (π.χ. [66],[67]).

Δεσμευμένα ακρότατα μιας ολόκληρης κατηγορίας γενικώς μη-γραμμικών συναρτήσεων υπό εν γένει μη-γραμμικούς περιορισμούς μπορούν να υπολογισθούν στην σημερινή εποχή με χρήση μιας μεγάλης ποικιλίας επιλυτών, κάποιιοι από τους οποίους είναι επίσης κατάλληλοι για πίνακες με αραιά μεταξύ τους μη-μηδενικά στοιχεία (π.χ. [68] – [73]). Τα κύρια χαρακτηριστικά των αλγορίθμων αυτών είναι οι πολύ καλές ιδιότητες σύγκλισης, πλην όμως διαθέτουν μόνο γραμμικό/υπεργραμμικό ρυθμό σύγκλισης.

2.3 Πλαστικότητα με χρήση Μαθηματικού Προγραμματισμού

Είναι γνωστό ότι ο ΜΠ παρέχει τον πιο φυσικό φορμαλισμό για την ενσωμάτωση της πλαστικότητας σε μια ποικιλία προβλημάτων της μηχανικής με την βοήθεια των πολλαπλασιαστών Lagrange και μιας συνθήκης γραμμικής συμπληρωματικότητας. Ακολούθως παρουσιάζεται η υπάρχουσα βιβλιογραφία σχετικά με τις εφαρμογές του ΜΠ σε μεθόδους μη-γραμμικής ανάλυσης κατασκευών που ενσωματώνουν την πλαστικότητα κυρίως με χρήση πλαστικών αρθρώσεων μηδενικού φυσικού μήκους (*plastic hinges of zero length*).

Εξ όσων δύναται να γνωρίζει ο γράφων, η πρώτη εργασία που αφορούσε την εφαρμογή της πλαστικότητας στην μηχανική με χρήση ΜΠ παρουσιάστηκε το 1951 από τους A.C. Charnes και H.J. Greenberg με την μορφή μιας πρώιμης αναφοράς κατά την διάρκεια μιας συνεδρίασης της Αμερικανικής Μαθηματικής Εταιρίας (AMS) που έλαβε χώρα στην Μινεσότα [74]: το πρόβλημα που έλυσαν ήταν αυτό του προσδιορισμού του οριακού φορτίου (*φορτίου κατάρρευσης*) μιας κατασκευής. Το 1957, οι W.S. Dorn και H.J. Greenberg πρότειναν τρεις βασικούς τύπους γραμμικών προγραμμάτων για το πρόβλημα της οριακής ανάλυσης οι οποίοι είχαν μικρότερες απαιτήσεις μνήμης, και ανέπτυξαν και δοκίμασαν διάφορες αποτελεσματικές διαδικασίες σε δικτυώματα [75]. Το 1959, οι A. Charnes, C.E. Lemke και O.C. Zienkiewicz έλυσαν το πρόβλημα της προσομοίωσης της κινηματικής και στατικής θεώρησης της πλαστικής κατάρρευσης πλαισίων με την μορφή δυικών προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού [76].

Το 1965, ο W. Prager συνέγραψε ένα βιβλίο θεωρίας των κατασκευών υπό το πρίσμα του μαθηματικού προγραμματισμού [77]: επίσης ενδιαφέρουσα ήταν η συνεργασία μεταξύ G. Maier και D.C. Drucker [78]. Το πρώτο άρθρο που πραγματεύθηκε το θεωρητικό πρόβλημα της πλαστικής χαλάρωσης/αποδόμησης υλικού (*material softening*) υλικού συγγράφηκε από τον G. Maier [79], καθώς επίσης και ο συσχετισμός μεταξύ δομοστατικής ανάλυσης και ΤΠ ([80],[81]).

Η ιδέα της προσέγγισης μέσω ΤΠ χρησιμοποιήθηκε από τους G. Maier και M. Capurso για την διατύπωση προβλημάτων βήμα-προς-βήμα ελαστοπλαστικής ανάλυσης για ελαστικά-πλαστικώς κρατυνόμενα συνεχή μέσα [82]: ιδιαίτερο βάρος δίνεται στον ελαστικό-ιδεωδώς πλαστικό καταστατικό νόμο υλικών: αυτή η εργασία είναι κατ' ουσίαν η υπό το πρίσμα του μαθηματικού προγραμματισμού αναδιαμορφωμένη έκδοση των αρχών της βήμα-προς-βήμα πλαστικότητας που εισήγαγαν οι W. Prager, D. Hodge, και H.J. Greenberg. Στην εργασία [83], ο G. Maier διατύπωσε μια σειρά από τμηματικώς γραμμικούς καταστατικούς νόμους συνδυασμένους με νόμους συσχετισμένης πλαστικής ροής χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό μητρώων στις εξισώσεις του, οι οποίες περιγράφουν την ελαστοπλαστική ανάλυση των κατασκευών υπό κινηματική και ισότροπη κράτυνση: εξετάζονται τόσο η ανάλυση βήμα-προς-βήμα, όσο και η ανάλυση προσδιορισμού σταθεροποίησης υπό ανακυκλιζόμενες φορτίσεις σταθερού εύρους (*shakedown*). Στην εργασία [84], ο G. Maier διερεύνησε το πρόβλημα της βήμα-προς-βήμα ανάλυσης υπό την υπόθεση μεγάλων μετατοπίσεων και των αντίστοιχων φαινομένων αστάθειας, και της πλαστικότητας που εξαρτάται από τον ρυθμό επιβολής των εξωτερικών φορτίσεων: σε αυτό το άρθρο γίνεται μια λεπτομερής παρουσίαση που συμπεριλαμβάνει αναλυτικούς φορμαλισμούς και αποδείξεις των αντίστοιχων θεωρημάτων. Οι O. De Donato και G. Maier [85] πρότειναν τρεις διαδικασίες για την ανελαστική ανάλυση δοκών εξ ωπλισμένου σκυροδέματος υπό την θεώρηση κρατυνόμενου υλικού με περιορισμένη δυνατότητα πλαστικής στροφής (*στα στοιχεία υπό κάμψη*): οι προτεινόμενες μεθοδολογίες επιτρέπουν και την εκτίμηση της κατανομής των πλαστικών παραμορφώσεων κατά μήκους των στοιχείων δοκού. Οι L. Corradi και G. Maier [86] διατύπωσαν τις αναγκαίες και ικανές για την περίπτωση κατά την οποία η δυναμική απόκριση πλαισίων και συνεχών συστημάτων υπό ανακυκλιζόμενες φορτίσεις δεν οδηγεί σε σταθεροποίηση (*shakedown*). Οι G. Maier G.,

A. Zavelani Rossi και J.C. Dotreppe [87] μελέτησαν το πρόβλημα της διακλάδωσης δρόμων ισορροπίας (*bifurcation*) λόγω πλαστικής χαλάρωσης υλικού· σε αυτή την δουλειά, η διακλάδωση ταυτοποιείται ως ένα φαινόμενο που μπορεί να συμβεί ακόμη και στην περίπτωση απουσίας γεωμετρικών μη-γραμμικότητων. Οι S.B. Abdel-Baset, D.E. Grierson και N.C. Lind [88] μελέτησαν το φορτίο κατάρρευσης πλαισίων υπό θεώρηση φαινομένων 2^{ας} τάξεως, ακολουθώντας μια προσέγγιση βασιζόμενη στον Γραμμικό Προγραμματισμό· λαμβάνεται υπόψιν η επιρροή των αξονικών δυνάμεων τόσο στην αντοχή σε κάμψη όσο και στους συντελεστές ευκαμψιάς λόγω κάμψης. Οι O. De Donato και G. Maier [89] διατύπωσαν το πρόβλημα της ελαστοπλαστικής ανάλυσης πλαισίων υπό κρατυνόμενες πλαστικές αρθρώσεις ως ένα Πρόβλημα Παραμετρικής Γραμμικής Συμπληρωματικότητας (ΠΠΓΣ). Στην εργασία [90], ο G. Maier εφάρμοσε μια γραμμικοποίηση κριτηρίων διαρροής, και, αργότερα, ο I. Kaneko [91] επινόησε μια εκ νέου διατύπωση των ([85],[89]) και την εφάρμοσε σε πλαίσια από ωπλισμένο σκυρόδεμα. Οι G. Maier, D.E. Grierson, και M.J. Best [92] έδειξαν ότι μια σειρά από προβλήματα ΓΠ, Γραμμικού Προγραμματισμού Περιορισμένης Βάσης (ΓΠΠΒ), και ΤΠ, μπορούν να διατυπωθούν για την εκτίμηση της μετελαστικής συμπεριφοράς των κατασκευών χρησιμοποιώντας πεπερασμένα στοιχεία υπό τις παραδοχές περί ελαστικού-ιδεωδώς πλαστικού καθώς και πλαστικώς κρατυνόμενου υλικού· συγκεκριμένα, για ελαστικά-ιδεωδώς πλαστικό υλικό, βρέθηκε ότι οι αλγόριθμοι ΤΠ έχουν την καλύτερη απόδοση. Ο D.L. Smith [93] επινόησε ένα σχήμα λύσης για το ΠΠΓΣ χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο των Wolfe-Markowitz και επιβάλλοντας την ισχύ της συμπληρωματικότητας σε κάθε βασικό (*pivotal*) βήμα της μεθόδου Simplex· το οποίο και λειτουργεί ως ένας περιορισμός των μεταβλητών που εισέρχονται στην βάση. Ελαφρές τροποποιήσεις του αλγορίθμου ήταν επαρκείς ώστε να τον μετατρέψουν για να λειτουργεί εξίσου καλά και για την μη-ολόνομη πλαστικότητα· επιδείχθηκε και η επέκταση σε τμηματικώς αναλογική φόρτιση. Ο G. Maier κ.α. ([94],[95]) εφάρμοσαν ελαστική και ελαστοπλαστική ανάλυση σε αγωγούς κυκλικής διατομής επικαθήμενους στον πυθμένα της θάλασσας, για διάφορα προφίλ πυθμένα και τύπους εδαφών, και ανέπτυξαν λεπτομερώς την ρύθμιση των παραμέτρων της αριθμητικής τεχνικής που επινόησαν, η οποία βρέθηκε ότι διέθετε ικανοποιητική ιδιότητα σύγκλισης και ποιότητα αποτελεσμάτων· οι γεωμετρικές μη-γραμμικότητες λαμβάνονται επίσης υπ' όψιν, ενώ οι προτεινόμενες προσεγγίσεις μπορούν να αποτελέσουν την βάση για την επίλυση του προβλήματος βέλτιστου σχεδιασμού (*ελαχιστοποίηση κόστους*). Ο I. Kaneko [96] πρότεινε έναν τροποποιημένο φορμαλισμό Προβλήματος Γραμμικής Συμπληρωματικότητας (ΠΓΣ) για πλαστικώς κρατυνόμενα υλικά που απαιτεί λιγότερο υπολογιστικό χρόνο και μνήμη στον Η/Υ. Μια τεχνική ΓΠΠΒ [97] εφαρμόστηκε από τους G. Maier, S. Giacomini, και F. Paterlini στην ελαστοπλαστική και οριακή ανάλυση. Οι G. Maier και T. Hueckel [98] δημοσίευσαν μια μελέτη σε καταστατικούς νόμους κατάλληλους για ελαστοπλαστική ανάλυση σε γεωτεχνικά και βραχώδη υλικά, αλλά και σε σκυρόδεμα· σε αυτή την μελέτη, ταυτοποιείται η εξάρτηση των μέτρων ελαστικότητας από τις πλαστικές παραμορφώσεις, καθώς επίσης και τα φαινόμενα αστάθειας υλικού εντός της περιοχής πλαστικής κράτυνσης του καταστατικού νόμου. Η βιβλιογραφική αναφορά [99] αντιστοιχεί σε ένα βιβλίο που περιέχει μια ποικιλία άρθρων με θέμα την πλαστικότητα βασιζόμενη στον μαθηματικό προγραμματισμό· το σύγγραμμα αυτό περιλαμβάνει λεπτομερή κείμενα που περιέχουν θεμελιώδεις εργασίες που εκπονήθηκαν και παρουσιάστηκαν από μερικούς εκ των πατέρων της πλαστικότητας.

Ο I. Kaneko [100] εργάστηκε βασιζόμενος απευθείας σε απειροστές ποσότητες κατάφερε να ενσωματώσει την μη-ολόνομη πλαστικότητα χωρίς να απαιτηθούν διορθωτικές τεχνικές/διεργασίες όπως αυτές στις εργασίες ([92],[93]). Οι A. Franchi και M.Z. Cohn [101] παρέχουν μια προσέγγιση που βασίζεται σε ένα σύνολο προγραμμάτων γενικής χρήσης, βασιζόμενοι στον δικό τους αλγόριθμο τύπου ΠΠΓΣ, ο οποίος εκλαμβάνεται ως ιδιαίτερα περίπλοκος από κάποιους ερευνητές. Οι L. Faravelli και P.

Zanon [102] κατέδειξαν την σημασία του να λαμβάνεται υπόψη η επιρροή των διατμητικών δυνάμεων στην αποτίμηση του φορτίου κατάρρευσης πλαισίων· επινοήθηκε ένας φορμαλισμός για την οριακή ανάλυση όπου η διατμητική δύναμη ενσωματώνεται με την μορφή μιας παραμέτρου που επηρεάζει την επιφάνεια αλληλεπίδρασης ροπής κάμψης και αξονικής δύναμης· το κριτήριο αλληλεπίδρασης $\{M,V,N\}$ κατά DIN-18880 για μεταλλικές διατομές χρησιμοποιήθηκε ως συγκριτικό σημείο αναφοράς. Οι G. Maier, F. Giannessi, και A. Nappi [103] πρότειναν μια ολόνομη προσέγγιση στο αντίστροφο πρόβλημα ανίχνευσης της ελαστοπλαστικής απόκρισης ελαστικών-ιδεωδώς πλαστικών ή/και ελαστικών-πλαστικώς κρατυνόμενων κατασκευών μέσα από μια σειρά προβλημάτων ΓΠ, τα οποία λύνονται με την επινοήση αριθμητικών διαδικασιών που αξιοποιούν τα χαρακτηριστικά του κάθε μαθηματικού φορμαλισμού: αυτές οι τεχνικές έχουν υπολογιστικά πλεονεκτήματα εν συγκρίσει προς άλλες γενικευμένες τεχνικές βελτιστοποίησης που χαρακτηρίζονται ως «άμεσης αναζήτησης» (*direct search*). Οι F. Giannessi, L. Jurina, και G. Maier [104] πρότειναν ένα πρόβλημα τετραγωνικού προγραμματισμού για τον υπολογισμό ενός σχεδιασμού ελαχίστου κόστους ενός αγωγού κυκλικής διατομής που εδράζεται επί ενός σκληρού θαλάσσιου πυθμένα χρησιμοποιώντας τα όρια της καμπτικής καμπυλότητας ως περιορισμούς· παρουσιάζονται αρκετά παραδείγματα σε αυτή την εργασία. Μια βιβλιογραφική επισκόπηση τύπου «state-of-the-art» στις εφαρμογές του ΜΠ στην πλαστικότητα (μέχρι το έτος 1982) παρουσιάστηκε από τους G. Maier και J. Munro στην εργασία [105]· σε αυτή την εργασία παρουσιάζονται θέματα όπως αυτό των πλαστικών καταστατικών νόμων, της πλαστικής (οριακής) ανάλυσης, της ανάλυσης σταθεροποίησης (*shakedown*), των μεθόδων φραγής, της ελαστοπλαστικής ανάλυσης, της ανάλυσης με θεώρηση μεγάλων μετατοπίσεων και λαμβανόμενων υπόψη των φαινομένων αστάθειας, των προβλημάτων επαφής και συστημάτων κλείδας, καθώς επίσης και της δυναμικής πλαστικότητας. Επίσης γίνεται συζήτηση για υπολογιστικά και θεωρητικά θέματα. Ένα ενδιαφέρον άρθρο το οποίο προτείνει έναν φορμαλισμό ΜΠ για την Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων (ΜΣΣ) με αναφορά στην αριθμητική βήμα-προς-βήμα ανάλυση ελαστοπλαστικών συστημάτων συγγράφηκε από τους G. Maier και G. Novati [106]· το άρθρο καλύπτει ελαστικά-ιδεωδώς πλαστικά και πλαστικώς κρατυνόμενα συστήματα. Οι J.A.T. De Freitas και D.L. Smith ([107],[108]) πρότειναν μια γενική μεθοδολογία/ενοποιημένη προσέγγιση για το πρόβλημα μη-γραμμικής ανάλυσης χρησιμοποιώντας στατικές και κινηματικές θεωρήσεις στον Lagrangian φορμαλισμό του, ο οποίος δύναται να λάβει υπόψη του τις μεγάλες μετατοπίσεις και την μεταλυγισμική συμπεριφορά θόλων και τρισδιάστατων (3D) τόξων. Οι G. Maier και A. Nappi συνέγραψαν ένα κεφάλαιο βιβλίου [109] στο οποίο παρουσιάζονται αναλυτικά η φυσική σημασία της βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς και την θεωρία γραμμικής συμπληρωματικότητας που χρησιμοποιούνται στην επίλυση προβλημάτων μηχανικής στην πλαστικότητα με χρήση ΜΠ· με αναφορά σε αυτές τις μαθηματικές σχέσεις, μπορεί να διατυπωθεί και να επιλυθεί αποτελεσματικά μια σειρά προβλημάτων, συμπεριλαμβανόμενου και αυτού της θραύσης. Οι Π.Δ. Παναγιωτόπουλος, Χ.Κ. Μπανιωτόπουλος, Α.Β. Αβδελάς [110] πρότειναν μια μέθοδο γραμμικοποίησης προβλημάτων ΓΠ, η οποία παρουσιάζει τα πλεονεκτήματα τόσο των αλγορίθμων βελτιστοποίησης, όσο και των επιλυτών γραμμικών συστημάτων. Ο Π.Δ. Παναγιωτόπουλος συνέγραψε ένα αναλυτικό βιβλίο [111] που πραγματεύεται προβλήματα της μηχανικής που διατυπώνονται υπό μορφή συναρτήσεων στοιχειωδών μεταβολών ποσοτήτων υποκείμενων σε περιορισμούς ανισοτήτων, το οποίο επιχειρεί –μεταξύ άλλων– να παρέχει ένα μαθηματικό υπόβαθρο για την αντιμετώπιση εύρεσης δεσμευμένου ακροτάτου εν γένει μη-κυρτών προβλημάτων, υπό την θεώρησή τους ως επαλληλίας ενός κυρτού και ενός κοίλου μέρους· περιέχονται και εφαρμογές σε προβλήματα πλαστικότητας, στατικά και δυναμικά. Σε ένα άρθρο βιβλιογραφικής επισκόπησης που αφιερώθηκε στην μνήμη του καθηγητή J. Munro, οι G. Maier και D.L. Smith [112] συνοψίζουν τις πρόσφατες συνεισφορές στο πεδίο της εφαρμογής του μαθηματικού προγραμματισμού

για την πλαστική ανάλυση προβλημάτων της μηχανικής μέχρι το έτος 1986. Παρ' ότι η ΜΕΣ είχε ήδη κάνει την πρώτη της εμφάνιση εκείνη την εποχή, ήταν πολύ νωρίς ώστε να επηρεάσει το συγκεκριμένο επιστημονικό πεδίο, όπως σχολιάστηκε και από τους συγγραφείς. Επιπλέον, οι συγγραφείς τονίζουν το δυναμικό της εφαρμογής των μεθόδων μαθηματικού προγραμματισμού στην μηχανική, και αναφέρουν ότι δεν έχει αποδώσει μέχρι εκείνη την στιγμή την πλήρη επιρροή της στην πρακτική του επαγγέλματος του μηχανικού. Κατ' ουσία, αυτό το άρθρο είναι μια ενημέρωση σε ένα προηγούμενο άρθρο βιβλιογραφικής επισκόπησης των G. Maier και J. Munro ([105]). Οι W.X. Zhong και R.L. Zhang συνέγραψαν ένα άρθρο [113] όπου οι παραμετρικές μεταβολικές αρχές (*parametric variational principles*) της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας και της ελάχιστης συμπληρωματικής ενέργειας χρησιμοποιούνται προκειμένου να διατυπωθούν και να επιλυθούν προβλήματα ανάλυσης βήμα-προς-βήμα στην πλαστικότητα τα οποία μπορούν να συμπεριλάβουν και την πλαστική χαλάρωση υλικού· η λύση λαμβάνεται με την βοήθεια του ΤΠ. Συμπεριλαμβάνεται και μια εφαρμογή στα γεωτεχνικά. Οι G. Maier και A. Nappi γενίκευσαν ένα σχήμα ολοκλήρωσης διαφορικών εξισώσεων τύπου «προς τα πίσω διαφορά» (*backward-difference integration scheme*) για να λύσουν δυναμικά προβλήματα εξαρτώμενα από τον ρυθμό επιβολής φόρτισης/παραμόρφωσης στην ελαστικότητα-πλαστικότητα, προσθέτοντας γενικευμένες συναρτήσεις διαρροής και πλαστική κράτυνση [114]. Σε αυτή την διαδικασία, οι πλαστικοί πολλαπλασιαστές αντιστοιχούν στους ρυθμούς μεταβολής των πλαστικών παραμορφώσεων: κατ' ουσίαν η μέθοδος αυτή συμπίπτει με τα προβλήματα ΤΠ που βασίζονται σε ολόνομη πλαστικότητα υπό θεώρηση πλαστικών παραμορφώσεων που είναι ανεξάρτητες του ρυθμού επιβολής της φόρτισης και τμηματικώς γραμμικών καταστατικών νόμων για πλαστικώς κρατυνόμενα υλικά. Οι F. Tin-Loi και M.B. Wong [115] παρουσίασαν μια προσέγγιση στο πρόβλημα της ελαστοπλαστικής βήμα-προς-βήμα ανάλυσης φερόντων πλαισίων βασιζόμενοι στον μαθηματικό προγραμματισμό: παρ' ότι η εν λόγω προσέγγιση απαιτεί ένα μεγάλο πλήθος περιορισμών –πρωτίστως λόγω της γραμμικοποίησης των μη-γραμμικών κυρτών επιφανειών διαρροής που χρησιμοποίησαν– μπορεί να ανιχνεύσει αποτελεσματικά φαινόμενα τοπικής αποφόρτισης καθώς και τα αντίστοιχα μη-μοναδικά πεδία παραμορφώσεων.

Οι G. Maier και G. Novati [116] χρησιμοποίησαν τις ίδιες μεταβολικές αρχές όπως στην εργασία [113], και υποθέτοντας ότι κάθε συνάρτηση διαρροής εκφράζεται ως το άθροισμα δύο μερών (μια συνάρτηση που ορίζεται χρησιμοποιώντας τα όρια των τοπικών εντατικών μεγεθών, και μια που ορίζεται χρησιμοποιώντας τις σταθερές των ορίων διαρροής με αναφορά στον καταστατικό νόμο του υλικού) επινόησαν μία βάση για να διατυπώνουν και να λύνουν μη-γραμμικά προβλήματα βελτιστοποίησης: τα όρια διαρροής μπορεί να είναι ένα εν γένει μη-γραμμικό συναρτησιακό των εσωτερικών μεταβλητών/παραμέτρων που περιγράφουν τον καταστατικό νόμο του υλικού. Το άρθρο αυτό παρέχει ένα ενοποιημένο πλαίσιο για την αντιμετώπιση μιας ποικιλίας προβλημάτων που συμπεριλαμβάνουν, χωρίς να περιορίζονται μόνο σε αυτά, ελαστικά-ιδεωδώς πλαστικά και γραμμικά πλαστικώς κρατυνόμενα υλικά. Ο F. Tin-Loi [117] μελέτησε τον βέλτιστο πλαστικό σχεδιασμό φερόντων πλαισίων υπό συνδυασμένη κάμψη και αξονική δύναμη: λαμβάνονται υπ' όψιν μόνο κριτήρια για ανάλυση 1^{ης} τάξεως, και το σχήμα βελτιστοποίησης που βασίζεται στον ΓΠ στηρίζεται σε περιγραφή με συντελεστές ευκαμψίας και λειτουργεί σε δύο φάσεις, υποθέτοντας ιδεατά πλαστική συμπεριφορά υλικού προκειμένου να προβλέψει τον μηχανισμό κατάρρευσης που αποδίδει τον σχεδιασμό ελαχίστου βάρους που αντέχει την επιθυμητή μονοτονικά ασκούμενη εξωτερική φόρτιση. Ο ίδιος συγγραφέας πρότεινε στην εργασία [118] μία ευρετική (*heuristic*) διαδικασία γραμμικοποίησης της επιφάνειας διαρροής που βοηθά να λαμβάνεται μια καλύτερη εκτίμηση του οριακού φορτίου με το να αυξάνονται τοπικά τα σημεία παρεμβολής της εν γένει μη-γραμμικής κυρτής συνάρτησης διαρροής στο σημείο τομής αυτής με το διάνυσμα των αλληλοεπιδρώντων εντατικών μεγεθών της εκάστοτε υπό αναφορά διατομής: και σε

αυτή την εργασία γίνεται παραδοχή περί ιδεωδώς πλαστικής συμπεριφοράς. Οι R.R. Wakefield και F. Tin-Loi [119], βασιζόμενοι στην δουλειά του Kaneko [100], διερεύνησαν το πρόβλημα της μη-μοναδικότητας στις μετατοπίσεις που υπολογίζονται κατά την βήμα-προς-βήμα μη-ολόνομη ελαστοπλαστική ανάλυση, και κατέδειξαν το πώς τέτοια διαφοροποιούμενα μεταξύ τους αποτελέσματα μπορούν να ληφθούν πριν την κατάσταση της κατάρρευσης. Οι ίδιοι συγγραφείς ασχολήθηκαν και με το πρόβλημα του υπολογισμού μη-ολόνομων αναλύσεων μεγάλης κλίμακας [120]: συγκεκριμένα, με αναφορά στο ΠΓΣ, προτάθηκαν τρόποι βελτίωσης σχετικά με την μείωση της απαιτούμενης μνήμης και τον περιορισμό της διάδοσης των αριθμητικών σφαλμάτων λόγω των περιορισμένων δεκαδικών ψηφίων του υπολογιστή (*round-off errors*). Μερικές οπτικές της βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς συμπληρωματικότητας συζητήθηκαν από τους G. Giannessi και G. Maier στην [121]: κυρίως, παρουσιάζονται οι κοινές μαθηματικές ιδιότητες ανάμεσα στον βέλτιστο σχεδιασμό και την ανελαστική απόκριση των κατασκευών, καθώς και των προβλημάτων επαφής. Ο A. Nappi [122] επινόησε έναν φορμαλισμό για την βήμα προς βήμα ελαστοπλαστική ανάλυση πλαισίων ο οποίος βασίζεται κυρίως σε μια συνάρτηση ελεύθερης ενέργειας και σε μια συνάρτηση διάχυσης: οι ιδιότητες (εύρεσης) ακροτάτου του φορμαλισμού αυτού οδηγούν στην επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης άνευ περιορισμών: η οριακή ανάλυση (*limit analysis*) και η ανάλυση σταθεροποίησης (*shakedown analysis*) συζητούνται εντός του πλαισίου αυτού του φορμαλισμού: οι εσωτερικές μεταβλητές που χρησιμοποιούνται μπορούν να αντιστοιχούν είτε σε εσωτερικές δυνάμεις δομικών στοιχείων, είτε σε εξωτερικά φορτία, είτε σε μετατοπίσεις, είτε σε ρυθμούς επιβολής μετατοπίσεων (*τα οποία, στην περίπτωση της ανάλυσης σταθεροποίησης, μπορούν να είναι και συναρτήσεις του χρόνου*). Οι προτεινόμενες αριθμητικές διαδικασίες βασίζονται στον αλγόριθμο Newton-Raphson, και επομένως απέδωσαν καλές ιδιότητες σύγκλισης και ποιότητα αποτελεσμάτων για την τμηματικώς ολόνομη προσέγγιση. Οι Z. Cen και G. Maier [123] υιοθέτησαν ένα συνεκτικό μοντέλο ρωγμών (*cohesive crack model*) για την εξομοίωση της θραύσης σε κατασκευές φτιαγμένες από υλικό όμοιο προς το σκυρόδεμα, και μελέτησαν τα φαινόμενα διακλάδωσης και αστάθειας λόγω της πλαστικής χαλάρωσης (*αποδόμησης*) υλικού. Βρέθηκε ότι διάδοση της κορυφής της ρωγμής –η οποία είναι μια μονοτόνως αυξανόμενη ποσότητα–, θα πρέπει να χρησιμοποιείται ως κατευθυντήρια μεταβλητή για την βήμα-προς-βήμα διεργασία, και ότι οι προσεγγίσεις των συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων είναι μια καλή επιλογή για τον συγκεκριμένο τύπο προβλημάτων, διότι δεν απαιτείται αναπροσαρμογή της διαμέρισης του χωρίου (*τροποποίηση στο πλήθος και σχήμα των πεπερασμένων στοιχείων κατά την διάρκεια της ανάλυσης*): για ακόμη μια φορά, τονίζεται ότι η μη-ολόνομη πλαστική συμπεριφορά έχει έναν σημαντικό ρόλο στα αποτελέσματα της ανάλυσης κατά την περίπτωση που παρατηρείται το φαινόμενο της τοπικής αποφόρτισης. Τα αποτελέσματα της πλαστικής χαλάρωσης υλικού στην δυναμική απόκριση των κατασκευών μελετήθηκαν από τους G. Maier και U. Perego στην [124]. Ο F. Tin-Loi πρότεινε μια διαδικασία βέλτιστου πλαστικού σχεδιασμού τοξωτών κατασκευών με χρήση μόνο των όρων 1^{ης} τάξεως και υπό την υπόθεση ιδεωδώς πλαστικής συμπεριφοράς υλικού και εφαρμόζοντας μια κατάλληλη γραμμικοποίηση των κριτηρίων διαρροής που χρησιμοποίησε [125]: Η διαδικασία βασίζεται σε μια προσέγγιση με χρήση δεικτών ευκαμψίας και στο στατικό θεώρημα της οριακής ανάλυσης. Οι F. Tin-Loi και J.S. Pang [126] πρότειναν μια μέθοδο για την βήμα-προς-βήμα ανάλυση πλαστικώς κρατυνόμενων κατασκευών που διατυπώνεται έχοντας ως βάση ένα Πρόβλημα Μη-Γραμμικής Συμπληρωματικότητας (ΠΜΓΣ)· η μέθοδος δοκιμάστηκε για σενάρια ανακυκλιζόμενων φορτίσεων και απέδωσε καλά αποτελέσματα. Ο A. Corigliano μελέτησε ελαστοπλαστικά στατικά συστήματα υπό ψευδοστατικές φορτίσεις και υπό την παραδοχή περί μικρών παραμορφώσεων [127]· εξήγαγε φορμαλισμούς, τόσο εξαρτώμενους, όσο και ανεξάρτητους του ρυθμού επιβολής πλαστικών παραμορφώσεων. Οι G. Bolzon, G. Maier, και G. Novati

[128] συζήτησαν κάποιες οπτικές της βήμα-προς-βήμα ανάλυσης υπό τις παραδοχές περί οιονεί ψαθυρών υλικών και εντός του φορμαλιστικού πλαισίου της γραμμικής συμπληρωματικότητας. Υιοθέτησαν έναν καταστατικό νόμο για το μοντέλο συνεκτικής ρωγμής ο οποίος περιγράφει τον εφελκυσμό ως συνάρτηση της παραμόρφωσης διαστολής της ρωγμής (*χρησιμοποίησαν το μοντέλο του G.I. Barrenblatt*). Ακολούθησαν προσεγγίσεις τόσο για ολόνομη όσο και για μη-ολόνομη πλαστική συμπεριφορά υλικού, και, χρησιμοποιώντας μια βήμα προς βήμα προσέγγιση στο πρόβλημα με βάση την ΜΠΣ, διατύπωσαν δύο μαθηματικούς φορμαλισμούς για την διάδοση της ρωγμής: ένα ΠΓΣ και ένα ΓΠ. Τα φαινόμενα γεωμετρικής μη-γραμμικότητας ελήφθησαν υπ' όψιν με την μορφή μιας σταδιακής γραμμικοποίησης· επίσης, υιοθετήθηκαν κριτήρια για την συνολική αστάθεια (*αρνητικό έργο δευτέρας τάξεως*), και τα κριτήρια για την εμφάνιση φαινομένων διακλάδωσης διατυπώθηκαν από το ΠΓΣ σε όρους ρυθμών μεταβολής των αντιστοίχων ποσοτήτων (π.χ. έργου, συνοριακών συνθηκών, μετατοπίσεων, εξωτερικών φορτίων, συναρτήσεων διαρροής). Ο W.Q. Shen [129] πρότεινε μια καινοτόμο τεχνική για την οριακή ανάλυση επιπέδων πλαισίων με ΓΠ· δοκιμάστηκε σε επίπεδα πλαίσια υπό κατακόρυφα φορτία και πιέσεις ανέμου. Μια συγκριτική μελέτη των βασιζόμενων στον μαθηματικό προγραμματισμό προσεγγίσεων για την ανάλυση οιονεί-ψαθυρών κατασκευών δημοσιεύθηκε από τους G. Bolzon, G. Maier, και F. Tin-Loi [130]· σε αυτή την εργασία χρησιμοποιήθηκαν κυρίως αλγόριθμοι εξαντλητικής εξερεύνησης ενός δυαδικού δέντρου (*μέθοδος "branch-and-bound"*), και αλγόριθμοι τύπου Newton. Οι M. Mroz και G. Giambanco [131] παρουσίασαν ένα μοντέλο διεπαφής που είναι κατάλληλο για την ανάλυση ασυνεχειών υπό μονοτονικές και ανακυκλιζόμενες φορτίσεις· η συγκεκριμένη δουλειά είναι ιδιαίτερος κατάλληλη για την μοντελοποίηση των κοκκωδών (*εδαφικών*) υλικών. Οι F. Tin-Loi και V. Vimonsatit [132] παρουσίασαν έναν φορμαλισμό 2^{ος} τάξεως για την ελαστοπλαστική ανάλυση επιπέδων πλαισίων με πλαστικώς κρατυνόμο υλικό· το σχήμα λύσης βασίζεται σε μια επαναληπτική εφαρμογή του αλγορίθμου των Wolfe-Markowitz και μπορεί να ανιχνεύει τον δρόμο ισορροπίας και πέραν του σημείου αστάθειας· ωστόσο, αναγνωρίζεται από τους συγγραφείς ότι η διαδικασία στερείται ισχύος κατά την έννοια ότι, καθώς αυξάνεται ο αριθμός ενεργών πλαστικών αρθρώσεων, αυξάνεται και το πλήθος των βασικών λύσεων που πρέπει να ταυτοποιηθούν. Ένα υπολογιστικό σχήμα πρόγνωσης-διόρθωσης, που συμπεριλαμβάνει και μια τεχνική μήκους τόξου (*arc-length*) για να μοντελοποιήσει την 2^{ος} τάξεως ανελαστική απόκριση επιπέδων πλαισίων ως Πρόβλημα Μη-Γραμμικής Συμπληρωματικότητας (ΠΜΓΣ) παρουσιάζεται από τους F. Tin-Loi και J.S. Misa στην εργασία [133]. Οι C. Comi και A. Corigliano [134] επινόησαν έναν φορμαλισμό βασιζόμενο σε μεταβολές ποσοτήτων (*variational formulation*) για την εκτίμηση της δυναμικής ελαστοπλαστικής απόκρισης/συμπεριφοράς στερεών με ισότροπη πλαστική χαλάρωση· διατυπώνεται ένας μικτός φορμαλισμός βασιζόμενος σε μεταβολές ποσοτήτων (*mixed variational formulation*), όπου οι εξισώσεις περιγράφουν ένα υλικό που εξαρτάται από την βαθμίδα χαλάρωσής του και η χρονική διακριτοποίηση γίνεται χρησιμοποιώντας έναν γενικευμένο κανόνα ολοκλήρωσης μεσαίου σημείου. Παρουσιάζονται επίσης ικανές συνθήκες για την μοναδικότητα της λύσης και ένα άνω όριο στο βήμα χρονικής ολοκλήρωσης, καθώς και αριθμητικά παραδείγματα. Οι G. Bolzon, D. Ghilotti, και G. Maier [135] αντιμετώπισαν το αντίστροφο πρόβλημα του προσδιορισμού παραμέτρων για το μοντέλο συνεκτικής ρωγμής (*cohesive crack model*) με αναφορά σε κατασκευές από ωπλισμένο σκυρόδεμα οι οποίες προσομοιώνονται με την βοήθεια ΠΓΣ· η εξέλιξη των μετατοπίσεων κατά την διάρκεια των πειραμάτων που διεξήχθησαν μετρήθηκε χρησιμοποιώντας ιντερφερόμετρα (*συμβολόμετρα*) λέιζερ, και οι υπολογισμοί πραγματοποιήθηκαν χρησιμοποιώντας μια προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων για την προσαρμογή των δεδομένων η οποία εκφράζεται ως το πρόβλημα ελαχιστοποίησης μιας τετραγωνικής συνάρτησης που μετρά την απόκλιση μεταξύ των πειραματικώς μετρηθέντων και θεωρητικώς προβλεφθέντων μετατοπίσεων. Για τον προσδιορισμό των παραμέτρων

χρησιμοποιήθηκαν η μέθοδος ΣΤΠ και ένας άμεσης αναζήτησης Γενετικός Αλγόριθμος (ΓΑ). βρέθηκε ότι η μέθοδος ΣΤΠ αποδίδει καλύτερα όταν έχει να κάνει με πραγματικά πειραματικά δεδομένα. Ωστόσο, σε κάθε περίπτωση, απαιτήθηκε μια χαλάρωση της συνθήκης συμπληρωματικότητας προκειμένου να επιτευχθεί εύκολα η σύγκλιση. Οι G. Bolzon, G. Maier, και F. Tin-Loi [136] συζήτησαν το ζήτημα της πολλαπλότητας των λύσεων στην ανάλυση υπό θεωρήσεις οιονεί ψαθυρής θραύσης του υλικού· ακολουθήθηκαν τόσο η προσέγγιση της εξαρτημένης όσο και την ανεξάρτητης του ρυθμού επιβολής παραμορφώσεων πλαστικότητας· συζητήθηκαν τα χαρακτηριζόμενα ως αποτελεσματικά σχήματα λύσης των διατυπωθέντων ΠΓΣ, οι αντίστοιχοι αλγόριθμοι μαθηματικού προγραμματισμού που αποδίδουν καλά αποτελέσματα, οι δυνατότητες καθώς και οι περιορισμοί τους. Η προτεινόμενη μεθοδολογία μπορεί να ταυτοποιήσει αποτελεσματικά την πολλαπλότητα, ακόμη και την απουσία λύσης/λύσεων. Οι Y.H. Liu, V. Carvelli, και G. Maier [137] διερεύνησαν την ακεραιότητα των ελαττωματικών και υπό πίεση αγωγών κυκλικής διατομής χρησιμοποιώντας οριακή ανάλυση και αν'λαυση σταθεροποίησης· βρέθηκε ότι αυτές οι μέθοδοι είναι πιο οικονομικές (σε όρους υπολογιστικού χρόνου) και πιο αξιόπιστες από τις εναλλακτικές διαδικασίες βήμα-προς-βήμα που βασίζονται στην μέθοδο άμεσης ακαμψίας. Οι G. Bolzon και G. Cocchetti [138] διερεύνησαν την διάδοση ρωγμών με αλλαγή κατεύθυνσης και διακλάδωση (*kinking and branching*) σε ψαθυρά στερεά, φαινόμενα που επηρεάζουν επίσης την διακλάδωση του δρόμου ισορροπίας· παρουσιάζονται και συγκρίνονται διάφορες αριθμητικές τεχνικές. Διευκρινίζεται ότι η αλλαγή κατεύθυνσης της ρωγμής προκύπτει στην περίπτωση της ρηγμάτωσης “μορφής I” (εντός επιπέδου εφελκυσμός), και ότι η διακλάδωση αιχμηρής ρωγμής προκύπτει στην περίπτωση της ρηγμάτωσης “μορφής II” (εντός επιπέδου διάτμηση). ωστόσο, η διακλάδωση μιας ρωγμής ενισχύεται από υψηλότερους ρυθμούς επιβολής φόρτισης καθώς και από την έλλειψη ομοιογένειας του υλικού. Οι διαδικασίες ανάλυσης εφαρμόστηκαν στο κλασικό πείραμα κάμψης δοκών υπό φόρτιση τριών σημείων· βρέθηκε ότι μια κατάσταση ισότροπων τάσεων είναι τυπικό φαινόμενο γύρω από την ζώνη διάδοσης μιας ρωγμής· επιπλέον, βρέθηκε ότι η συμμετρική ή η ασύμμετρη διάδοση ρωγμής είναι το ίδιο πιθανό να συμβούν από την στιγμή που θα επιτευχθεί μια κατάσταση ισο-διαξονικής καταπόνησης (τάσης), κάτι που σημαίνει δυσκολίες στο να ξεφύγει κανείς από την μη-μοναδικότητα στην λύση του προβλήματος, ένα γεγονός που σίγουρα παίζει ρόλο στην ανάλυση πιο περίπλοκων κατασκευών. Οι G. Bolzon και F. Tin-Loi [139] μελέτησαν το πρόβλημα της φυσικής αστάθειας και των φαινομένων 2^{ας} τάξεως σε δομικά πλαίσια υπό υποθέσεις συγκεντρωμένης πλαστικότητας και ενός ελαστικού-πλαστικώς χαλαρούμενου καταστατικού νόμου που συσχετίζει ροπή κάμψης και στροφή: Εφαρμογές σε απλά επίπεδα πλαίσια καταδεικνύουν σημεία διακλάδωσης και οριακά σημεία, καθώς επίσης και αριθμητικά φαινόμενα αλματώδους μετάβασης από το σημείο αστάθειας στο αμέσως επόμενο ευσταθές σημείο ίσου φορτίου (*snap-through*) και αντιστρόφως (*snap-back*)· παρ' ότι η προτεινόμενη μεθοδολογία μπορεί εύκολα να επεκταθεί στην ανάλυση τρισδιάστατων κατασκευών μεγάλης κλίμακας, αναγνωρίζεται από τους συγγραφείς ότι, σε μια τέτοια περίπτωση, ο προσδιορισμός τέτοιων σημείων (και η πολλαπλότητα των λύσεων ή η απόδειξη περί της μη-ύπαρξης λύσης) δεν θα ήταν εύκολο ζήτημα, εξαιτίας της συνδυαστικής φύσης του προβλήματος. Ο F. Giambanco [140] πρότεινε ένα ασύμπτωτο υπολογιστικό σχήμα για την επίλυση του ΠΓΣ της βήμα-προς-βήμα ελαστοπλαστικής ανάλυσης πλαισιωτών κατασκευών· η κεντρική ιδέα είναι να λύσει κανείς μια ακολουθία από ΠΓΣ, για τα οποία ο πίνακας των περιορισμών αποτελείται μόνο από τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα περιορισμών του αρχικού ΠΓΣ. Παρέχεται τόσο απόδειξη περί της σύγκλισης, όσο και ένα υπό-πρόγραμμα σε γλώσσα Fortran 77. Αποδεικνύεται ότι η μέθοδος ότι έχει καλές ιδιότητες σύγκλισης.

Στην αρχή του έτους 2000, δημοσιεύθηκε ένα ειδικό τεύχος για τις άμεσες μεθόδους (*direct methods*) από τους G. Maier, V. Carvelli, και G. Cocchetti [141]. Οι S.M. Karakostas και E.S. Mystakidis [142]

πρότειναν έναν μη-κυρτό QP φορμαλισμό για μεταλλικές κατασκευές από ολόνομο υλικό με ομαλές ιδιότητες πλαστικής χαλάρωσης, ο οποίος απέδωσε ιδιότητες καλής σύγκλισης. Οι G. Maier, G. Bolzon και F. Tin-Loi [143] συζήτησαν μια σειρά από ανοικτά προβλήματα που απαιτούν διεπιστημονικές θεωρήσεις, διότι απευθύνονται από κοινού στα επιστημονικά πεδία της μηχανικής και του μαθηματικού προγραμματισμού. Τέτοια προβλήματα είναι η κινηματική προσέγγιση για την εκτίμηση της αντοχής όκλιμων/πλάστιμων υλικών με περιοδική ανομοιογένεια, το πρόβλημα της φραγής ποσοτήτων της ανάλυσης μετά-σταθεροποίησης χρησιμοποιώντας φορμαλισμό προβλήματος βελτιστοποίησης, η απειροστική/βήμα-προς-βήμα κατάρρευση και τα φαινόμενα εναλλασόμενης πλαστικότητας που παρατηρούνται στην πορο-πλαστικότητα (π.χ. *περιοδικές φορτίσεις σε κορεσμένα υλικά δύο φάσεων*), η προσομοίωση της ρηγμάτωσης κατασκευών αποτελούμενων από οιονεί-ψαθυρά υλικά (π.χ. *σκυρόδεμα*), και η ταυτοποίηση παραμέτρων ρηγμάτωσης των συστημάτων αυτών. Τα ανοικτά ζητήματα που συζητούνται απευθύνονται κυρίως στους ειδικούς ανάπτυξης αλγορίθμων βελτιστοποίησης. Ο F. Giambanco [144] παρουσίασε μια επαναληπτική μέθοδο που είναι γενικά κατάλληλη να λύνει ΠΓΣ, την Μέθοδο Ασυμπτωτικής Εναλλαγής (ΜΑΕ) μεταβλητών βάσης· υλοποιείται σε έναν φορμαλισμό που δύναται να λύνει το πρόβλημα της βήμα-προς-βήμα ελαστοπλαστικής ανάλυσης, αλλά μπορεί επίσης να λαμβάνει υπ' όψιν του και δυναμικούς βαθμούς ελευθερίας. Η βάση της ΜΑΕ είναι μία αυτό-επανακαλούμενη επίλυση μιας σειράς ΠΓΣ κατά την οποία ο πίνακας περιορισμών είναι διαγώνιος και περιέχει μόνο τα στοιχεία της κυρίας διαγώνιου του πίνακα ΠΓΣ· το προτεινόμενο υπολογιστικό σχήμα αποδεικνύεται ότι έχει καλές ιδιότητες σύγκλισης και απαιτεί λίγο χώρο αποθήκευσης στην μνήμη του Η/Υ. Επιπρόσθετα, βρέθηκε ότι απαιτεί μικρό υπολογιστικό χρόνο· ο πηγαίος κώδικας του υποπρογράμματος ΜΑΕ παρέχεται σε γλώσσα Fortran 77 στο Παράρτημα του άρθρου. Οι Μ. Παπαδρακάκης, Ν.Δ. Λαγαρός, Ι. Τσομπανάκης, και Ε. Πλεύρης διερεύνησαν την αποτελεσματικότητα διαφόρων μεθόδων βελτιστοποίησης που είτε βασίζονται στον ΜΠ ή/και στους ΓΑ για να επιλύουν προβλήματα βελτιστοποίησης δομοστατικού σχεδιασμού [145]· επίσης διερευνώνται τροποποιημένες διαδικασίες που βασίζονται και στους δύο τύπους αλγορίθμων όπου και διαπιστώθηκε ότι είναι ιδιαίτερες υποσχόμενες. Το κυρίως θέμα στο οποίο απευθύνονται είναι ο βέλτιστος σχεδιασμός (*ελαχίστου βάρους*) μιας κατασκευής χρησιμοποιώντας μια σειρά από τεχνητά επιταχυνσιογραφήματα αναφοράς τα οποία είναι καταλλήλως κλιμακωμένα ώστε να ταιριάζουν τις σεισμικές απαιτήσεις αναφοράς του σχεδιασμού με βάση τον εφαρμοζόμενο αντισεισμικό κώδικα. Χρησιμοποιείται ένα δίκτυο νευρώνων για να προβλέψει τα απαραίτητα δεδομένα για την φάση της δομοστατικής ανάλυσης των δοκιμών· επίσης εφαρμόζονται προχωρημένες τεχνικές απόξευξης για εκτέλεση υπολογισμών σε παράλληλη επεξεργασία. Τα αποτελέσματα καταδεικνύουν την αποτελεσματικότητα και τα αντίστοιχα υπολογιστικά πλεονεκτήματα των προτεινόμενων μεικτών διαδικασιών σε σύγκριση με τις διαδικασίες που βασίζονται σε αλγορίθμους ΤΠ/ΣΤΠ και ΓΑ· επίσης, οι προτεινόμενες διαδικασίες βρέθηκαν ότι είναι ιδιαίτερες κατάλληλες για υλοποίηση σε παραλληλία. Οι F. Tin-Loi και N.S. Que παρουσίασαν μια εργασία στην ταυτοποίηση παραμέτρων οιονεί ψαθυρών υλικών ([146],[147])· αυτή η δουλειά, που είναι ένα αντίστροφο πρόβλημα, διατυπώνεται ως Μαθηματικό Πρόγραμμα με Περιορισμούς Ισορροπίας (ΜΠΠ) το οποίο στην συνέχεια μετατρέπεται σε ένα τυπικό ΜΓΠ μέσω μιας εξομάλυνσης (*χαλάρωσης*) της συνθήκης συμπληρωματικότητας και των περιορισμών. Το πρόβλημα της εξομάλυνσης προσεγγίζεται με την λύση μιας σειράς προβλημάτων ΜΓΠ, με καλά αποτελέσματα. Οι G. Cocchetti και X. Shen [148] εφάρμοσαν το μοντέλο συνεκτικής ρηγμάτωσης σε διάφορους τμηματικώς γραμμικούς καταστατικούς νόμους (*με αναφορά στις συναρτήσεις διαρροής και στα μοντέλα διεπαφής που υιοθετήθηκαν*), προκειμένου να παρέχουν ένα ενιαίο σύνολο από απλά μαθηματικά εργαλεία ΠΓΣ για την ανελαστική ανάλυση οιονεί ψαθυρών υλικών, όπως τα φράγματα από ωπλισμένο σκυρόδεμα. Η

διαδικασία ανιχνεύει αποτελεσματικά τόσο την πολλαπλότητα όσο και την μη-ύπαρξη των λύσεων που μπορεί να προκύψουν εξαιτίας της χαλάρωσης υλικού. Οι H. Zhang και X. Zhang [149] ανέπτυξαν έναν καινούργιο αλγόριθμο για την δυναμική ανάλυση κατασκευών από ελαστικό-πλαστικός κρατυνόμο/χαλαρούμενο υλικό· η μέθοδος είναι ένας αλγόριθμος Παραμετρικού Τετραγωνικού Προγραμματισμού (ΠΤΠ) που συνδυάζεται με άμεση χρονική ολοκλήρωση των εξισώσεων της δυναμικής (*δια μέσου μιας ακριβούς ολοκλήρωσης ή/και μέσω της μεθόδου Newmark*), η οποία λύνεται ως ένα τυπικό πρόβλημα γραμμικής συμπληρωματικότητας. Την αποτελεσματικότητα της μεθόδου καταδεικνύουν αριθμητικά παραδείγματα ενός δυναμικά φορτιζόμενου δικτύωματος, ενός προβόλου υπό δυναμικό εφελκυσμό, και ενός δοκιμίου διπλής εγκοπής υπό κρουστική φόρτιση. Οι G. Cocchetti και G. Maier [150] παρέχουν μια ενιαία μεθοδολογία για την ανελαστική ανάλυση ραβδωτών κατασκευών με αναφορά στα πρόσφατα ερευνητικά αποτελέσματα στην θεωρία συμπληρωματικότητας του ΜΠ. Ακολουθούν μια προσέγγιση με κλασικές (*μηδενικού μήκους*) πλαστικές αρθρώσεις που υπακούν τμηματικώς γραμμικούς καταστατικούς νόμους που συμπεριλαμβάνουν πλαστική κράτυνση και χαλάρωση· συμπεριλαμβάνονται τόσο η ολόνομη όσο και η μη-ολόνομη πλαστικότητα, νοούμενη τόσο ως εξαρτημένη, όσο και ως ανεξάρτητη του ρυθμού επιβολής φορτίων/παραμορφώσεων και περιγραφόμενη στα πλαίσια φορμαλισμών ΠΓΣ που προβλέπουν και μη-μοναδικές λύσεις (*π.χ. διακλαδώσεις*). Μια απλή δοκιμαστική περίπτωση χρησιμοποιείται για να επιδείξει την ευαισθησία της λύσης, με αυστηρή τήρηση των αλλαγών στον καταστατικό νόμο των πλαστικών αρθρώσεων της υπό αναφορά κατασκευής για την περίπτωση της πλαστικής χαλάρωσης υλικού. Οι H.Zhang, X. Zhang, και J.S. Chen [151] εφάρμοσαν έναν πρόσφατα αναπτυχθέντα αλγόριθμο (*ο οποίος πρωτοπαρουσιάστηκε στην εργασία [149]*) για την δυναμική ελαστοπλαστική ανάλυση κατασκευών με πλαστική κράτυνση και χαλάρωση (*αποδόμηση*) υλικού σε διάφορες νέες δοκιμαστικές περιπτώσεις. Οι H.W. Zhang, W.X. Zhong, C.H. Wu, και A.H. Liao [152] παρουσίασαν τα πρόσφατα βήματα προόδου τους στην μέθοδο ΠΤΠ για την μελέτη ελαστοπλαστικών προβλημάτων επαφής με τριβή· εντός του περιεχομένου αυτής της δουλειάς, το πρόβλημα ΠΤΠ μετατρέπεται σε ένα τυπικό ΠΓΣ μέσω μιας γραμμικοποίησης του καταστατικού νόμου που μοντελοποιεί την τριβή, και αναπτύσσεται ένα γενικής χρήσεως πρόγραμμα τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων, το οποίο εφαρμόστηκε σε ειδικές περιπτώσεις δοκιμής που καταδεικνύουν την αποτελεσματικότητά του. Οι S. Tangaramvong και F. Tin-Loi ([153],[154]) επέκτειναν την προσέγγιση του ΠΠΓΣ προκειμένου να λαμβάνει υπόψιν δομικά πλαίσια με πλαστική χαλάρωση υλικού. Οι K. Krabbenhøft, A.V. Lyamin και S.W. Sloan [155] διατύπωσαν μια σειρά προβλημάτων πλαστικότητας ως προβλήματα κωνικού προγραμματισμού, που είναι ένας φορμαλισμός κατάλληλος για αποτελεσματική χρήση με αλγορίθμους βασιζόμενους στην μέθοδο εσωτερικού σημείου (*παρ' ότι ανιχνεύθηκαν κάποια θέματα/προβλήματα, όπως αναφέρεται από τους συγγραφείς*). Οι S. Tangaramvong και F. Tin-Loi επινόησαν επίσης μια μέθοδο που προσδιορίζει σε ένα βήμα το φορτίο κατάρρευσης και την κατανομή παραμορφώσεων πλαισίων υπό πλαστική χαλάρωση και αλληλεπίδραση εντατικών συνιστωσών [156]· η μέθοδος διατυπώνεται ως ένα ΜΠΠΠ. Οι R. Ardito, G. Cocchetti, και G. Maier [157] παρέχουν μια μέθοδο για την εκτίμηση της ασφάλειας των κατασκευών η οποία λαμβάνει υπόψιν της ολόνομη πλαστική χαλάρωση υλικού· παρ' ότι δεν θεραπεύονται φαινόμενα διακλάδωσης λόγω της γραμμικής συμπληρωματικότητας, σε αυτή την πολύ ενδιαφέρουσα δουλειά συμπεριλαμβάνονται εφαρμογές που χρησιμοποιούν γενικευμένα πεπερασμένα στοιχεία. Οι F. Pastor, E. Loute, και J. Pastor [158] πρότειναν μια νέα προσέγγιση παραγοντοποίησης στην οριακή ανάλυση χρησιμοποιώντας το θεώρημα άνω ορίου· στην πράξη, το σχήμα λύσης ξεκινά από μια αδρή διακριτοποίηση του δικτύου πεπερασμένων στοιχείων, η οποία πυκνώνει σταδιακά μετά από κάθε λύση προκειμένου να επιτευχθεί η επιθυμητή αριθμητική ακρίβεια. Γίνεται χρήση ενός επιλύτη που βασίζεται

στην ΜΕΣ για κυρτά προβλήματα, ο οποίος επιδεικνύει καλές ιδιότητες σύγκλισης και βελτιωμένη ποιότητα αποτελεσμάτων ακόμη και σε σχετικά μεγάλης κλίμακας παραδείγματα με αναφορά στους διαθέσιμους υπολογιστικούς πόρους. Οι S. Tangaramvong και F. Tin-Loi [159] επέκτειναν το κλασικό πρόβλημα της οριακής ανάλυσης πλαισίων με θεωρία 1^{ης} τάξεως προκειμένου να συμπεριλάβουν την γεωμετρική μη-γραμμικότητα· η συμπεριφορά του υλικού θεωρείται ελαστική-ιδεωδώς πλαστική. Το πρόβλημα διατυπώνεται ως ένα ΜΠΠΠ· παρά το γεγονός ότι η προτεινόμενη προσέγγιση ανήκει στην κατηγορία των άμεσων μεθόδων, δύναται να προβλέπει, σε ένα μόνο βήμα, το μέγιστο φορτίο και τις πραγματικές μέγιστες παραμορφώσεις της κατασκευής που του αντιστοιχούν, χωρίς να χρειάζεται να παρακολουθήσει κανείς την αλληλουχία των πλαστικοποιήσεων, κάτι που είναι απαραίτητο για οποιαδήποτε διαδικασία που ανήκει στην κατηγορία των μεθόδων «βήμα-προς-βήμα». Ένα λεπτομερές κεφάλαιο βιβλίου σχετικά με μεθόδους οριακής ανάλυσης που δυνητικά μπορούν να λειτουργήσουν ως μια χρήσιμη βάση για διδακτικούς σκοπούς, συγγράφηκε από τον F. Tin-Loi [160]. Ο προτεινόμενος φορμαλισμός ακολουθεί την διατύπωση με χρήση δεικτών ακαμψίας· η λεπτομερής παρουσίαση, με αρκετά παραδείγματα και με οδηγίες σε κάθε βήμα καθώς και ο προσφερόμενος πηγαίος κώδικας, αποτελούν μια καλή εισαγωγή για τον μη-εξοικειωμένο αναγνώστη. Οι S. Tarangamvong και F. Tin-Loi [161] εφάρμοσαν μια προσέγγιση με ΜΠΠΠ για την οριακή ανάλυση πλαισίων λαμβάνοντας υπόψιν φαινόμενα 2^{ας} τάξεως και πλαστική χαλάρωση (*αποδόμηση*) υλικού· η προτεινόμενη προσέγγιση είναι αποτελεσματική για την πλειονότητα των κατασκευών του μηχανικού, αλλά έχει περιορισμούς στην σπάνια περίπτωση κατά την οποία τα φαινόμενα τοπικού λυγισμού οδηγούν σε διακλαδώσεις του δρόμου ισορροπίας κατά την σταδιακή μεταβολή των εξωτερικών φορτίων.

Στην εργασία [162], οι S. Tarangamvong και F. Tin-Loi ακολούθησαν μια ολόνομη προσέγγιση για την επίλυση του ίδιου προβλήματος που εξετάστηκε στην εργασία [161], με καλά αποτελέσματα· στην περίπτωση κατά την οποία ενδέχεται να εμφανιστούν φαινόμενα μη-ολόνομης συμπεριφοράς μέσα στο ίδιο βήμα φόρτισης, εφαρμόζονται ειδικές τεχνικές διόρθωσης κατά το επόμενο βήμα της διαδικασίας. Οι M.A.A. Σκορδέλη και X. Μπίσμπος [163] μελέτησαν τρισδιάστατα (3Δ) πλαίσια με αναλύσεις τύπου «βήμα προς βήμα» και σταθεροποίησης (*shakedown*), υπό θεώρηση ελλειψοειδών επιφανειών διαρροής (π.χ. κατά *Orbisson*). Οι M.R. Mahini, H. Moharrami, και G. Cocchetti [164] διατύπωσαν ένα μαθηματικό πρόγραμμα που λύνει την βήμα-προς-βήμα ανάλυση πλαισίων με πλαστικές αρθρώσεις απαιτώντας την μεγιστοποίηση της ενέργειας διαρροής (*dissipation energy*)· η προτεινόμενη μέθοδος χρησιμοποιεί τον αναθεωρημένο αλγόριθμο Simplex, είναι εύκολη στον προγραμματισμό της, έχει ταχύτερη σύγκλιση καθώς και την δυνατότητα να ενσωματώσει την πλαστική χαλάρωση (*αποδόμηση*) υλικού. Οι D.Wu, W. Gao, S. Tangaramvong, και F. Tin-Loi [165] ακολούθησαν μια προσδιοριστική (*ντετερμινιστική*) προσέγγιση στο πρόβλημα ποσοτικοποίησης αβεβαιοτήτων (*uncertainty quantification*) του προσδιορισμού του φορτίου και μηχανισμού κατάρρευσης πλαισίων. Οι αβέβαιες παράμετροι είναι το υλικό, η γεωμετρία της διατομής, και οι συνθήκες φόρτισης, και μοντελοποιούνται χρησιμοποιώντας ανώτερα και κατώτερα όρια τιμών. Το αποτέλεσμα της εν λόγω υπολογιστικής διαδικασίας αποδίδει τιμές άνω και κάτω ορίου για το φορτίο κατάρρευσης καθώς και τις τιμές των αντίστοιχων αβέβαιων ποσοτήτων που ενεργοποιούν αυτά τα όρια τιμών. Τα αποτελέσματα συγκρίνονται με εκείνα που αποδίδει μια κλασική μέθοδος Monte-Carlo, και διαπιστώθηκε ικανοποιητική ταύτιση· ωστόσο, για την ανάλυση λυγισμού των κατασκευών των οποίων οι ιδιοτιμές είναι παρόμοιες ή ίδιας αριθμητικής αξίας, απαιτείται περαιτέρω έρευνα. Οι S. Tarangamvong και F. Tin-Loi [166] διερεύνησαν τον βέλτιστο τοπολογικό σχεδιασμό δικτυωτών κατασκευών συμπεριλαμβάνοντας την πλαστική χαλάρωση στις ιδιότητες υλικού· ακολουθήθηκε μια ΜΠΠΠ διατύπωση, και το πρόβλημα βελτιστοποίησης λύνεται μέσω ενός σχήματος δύο βημάτων, όπου κατά την πρώτη φάση ενημερώνονται τα κάτω όρια των βασικών

παραμέτρων της κατασκευής και λαμβάνεται μια λύση χρησιμοποιώντας έναν επιλύτη ΜΓΠ· στην δεύτερη φάση, χρησιμοποιείται η λύση της πρώτης φάσης ως βάση, αλλά όσες κρίσιμες διατομές έχουν εντατική κατάσταση στα κατώτερα όριά τους απορρίπτονται από το ενεργό σύνολο, και εν συνεχεία αναζητείται νέα βέλτιστη λύση, επιλύοντας άλλο ένα πρόβλημα ΜΓΠ. Παρ' ότι δεν είναι δυνατόν να παρασχεθεί απόδειξη για μια πραγματικά βέλτιστη λύση, οι συγκρίσεις της προτεινόμενης μεθόδου με ελαστοπλαστικές αναλύσεις βήμα-προς-βήμα καταδεικνύουν την καλή ποιότητα της μεθόδου σε πρακτικούς όρους. Οι Μ.Μ.Σ. Μανωλά και Β.Κ. Κουμούσης [167] πρότειναν μια προσέγγιση «μειωμένης συμπληρωματικότητας» (*reduced complementarity*) για την βήμα-προς-βήμα ανάλυση δομικών πλαισίων· σε αυτή την εργασία παρουσιάζεται μια αποτελεσματική τεχνική που μειώνει σημαντικά τους περιορισμούς του προβλήματος, υπό την παραδοχή ότι, εντός του ιδίου βήματος ανάλυσης, η αξονική δύναμη του μέλους δεν αυξάνεται ιδιαίτερος ώστε να προκαλέσει άλμα από το ένα υπερεπίπεδο του πολυτόπου διαρροής στο γειτονικό του, κάτι που συνήθως παρατηρείται σε αρκετές κατασκευές πολιτικού μηχανικού. Οι Η. Moharrami, Μ.Ρ. Mahini, και G. Cocchetti [168] παρουσίασαν μια επέκταση της τεχνικής Γραμμικού Προγραμματισμού Περιοριζόμενης Βάσης (ΜΠΠΒ) για κατασκευές υπό επίπεδη ένταση/παραμόρφωση χρησιμοποιώντας γενικευμένα πεπερασμένα στοιχεία. Ο Υ. Kanno [169] πρότεινε μια ταχέως συγκλίνουσα διαδικασία για την 1^{ης} τάξεως ελαστοπλαστική ανάλυση ραβδωτών κατασκευών με χρήση αλγορίθμων ΜΕΣ· το προτεινόμενο υπολογιστικό σχήμα είναι ένα μη-φραγμένο, μη-ομαλό κυρτό πρόβλημα που έχει καλές ιδιότητες σύγκλισης και μπορεί να επεκταθεί σε συστήματα παράλληλης επεξεργασίας. Μια τεχνική βελτιστοποίησης σχεδιασμού επιπέδων πλαισίων ορίζοντας την μέγιστη σταθερότητα ως κριτήριο συγγράφηκε από τον Μ. Cacho-Pérez [170].

Για περαιτέρω ανάγνωση σε άλλες εφαρμογές του μαθηματικού προγραμματισμού στην δομοστατική μηχανική και στην πλαστικότητα, που συμπεριλαμβάνουν αλλά δεν περιορίζονται σε ανάλυση σταθεροποίησης (*shakedown*), γενικευμένα μοντέλα με πεπερασμένα στοιχεία και εδαφομηχανική, η/ο αναγνώστ-ρια/-ης προτείνεται να διαβάσει ένα άριστο άρθρο βιβλιογραφικής επισκόπησης του G. Bolzon [171].

2.4 Αντισυμβατικές Μέθοδοι στην Πλαστικότητα

Παρ' ότι δεν ανήκουν στην κατηγορία των μεθόδων ΜΠ, οι ακόλουθες μέθοδοι προσέλκυσαν το ενδιαφέρον του γράφοντος κατά την αναζήτηση βιβλιογραφικών αναφορών· ακολουθεί μια σύντομη επισκόπηση.

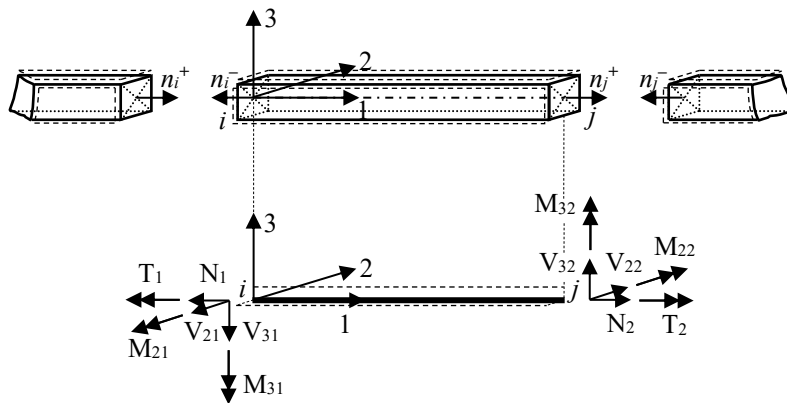
Η δουλειά των G. Royer-Carfangi και G. Buratti [172] είναι άξια αναφοράς, διότι παρουσίασαν διάφορα καταστατικά μοντέλα για την ακριβή προσομοίωση της πλαστικής χαλάρωσης σε δοκούς, τα οποία βρέθηκε ότι ήταν σε πλήρη συμφωνία με τα διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα. Η Μέθοδος Γραμμικής Αντιστοίχισης (*Linear Matching Method*) είναι επίσης άξια αναφοράς, διότι είναι γνωστή για την ιδιότητά της να αποδίδει το φορτίο κατάρρευσης χρησιμοποιώντας μόνο παραδοχές γραμμικής ελαστικότητας [173]· πρόσφατα, οι Ο. Barrera, Α.С. F. Cocks και Α. R. S. Ponter βελτίωσαν τις ιδιότητες σύγκλισης αυτής [174].

3 Πεπερασμένα Στοιχεία Δοκού/Υποστυλώματος σε Όρους Ευκαμψίας

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται οι καταστατικές σχέσεις που συσχετίζουν παραμορφώσεις (αξονική, στρεπτική, καμπτικές) και γενικευμένες δυνάμεις (αξονική δύναμη, ροπή στρέψης, ροπές κάμψης) στα άκρα κάθε πεπερασμένου στοιχείου τύπου δοκού-υποστυλώματος μιας οποιασδήποτε σκελετοειδούς κατασκευής / ενός φέροντος πλαισίου.

3.1 Ορισμοί

Από την οπτική της συμβολικής του διανυσματικού λογισμού, κάθε στοιχείο δοκού/υποστυλώματος στον τρισδιάστατο χώρο μπορεί να θεωρηθεί ως ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα (διάνυσμα) που ορίζεται από ένα τοπικό δεξιόστροφο σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων με βάση {1,2,3}, όπου ο άξονας «1» ταυτίζεται με το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τους κόμβους αρχής «i» και πέρατος «j» του στοιχείου· οι κόμβοι αρχής και πέρατος είναι τα κέντρα βάρους των αντίστοιχων διατομών. Για το πέρας του στοιχείου, οι θετικές κατευθύνσεις για τις τοπικές συνιστώσες δυνάμεων και ροπών ορίζονται σύμφωνα με το τοπικό σύστημα συντεταγμένων {1,2,3}, και για την αρχή του στοιχείου κατά έναν συμπληρωματικό τρόπο (βλ. Σχήμα 5 ακολούθως).

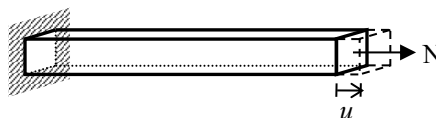


Σχήμα 5: Πεπερασμένο στοιχείο δοκού/υποστυλώματος με ακραίους κόμβους, τοπικούς άξονες, και τοπικές συνιστώσες δυνάμεων/ροπών.

Για κάθε τέτοιο πεπερασμένο στοιχείο, ορίζεται ένα σύνολο ανεξάρτητων μεταξύ τους, τοπικών, ελαστικών παραμορφώσεων (βλ. Σχήματα 6,7, και 8 ακολούθως). Αυτές οι παραμορφώσεις συνδέονται με τις αντίστοιχες εντατικές τους συνιστώσες μέσω της ιδιότητας της ευκαμψίας του υλικού από το οποίο αποτελείται το στοιχείο, μια ιδιότητα συγγενή της ελαστικότητας/ενδοτικότητας.

3.2 Αξονική Συνιστώσα

Για τις αξονικές δυνάμεις, ο συντελεστής ευκαμψίας περιγράφεται από την Εξίσωση (5), με αναφορά στο Σχήμα 6 που ακολουθεί:

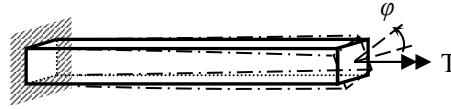


Σχήμα 6: Αξονική δύναμη (N) και μεταβολή μήκους (u)

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \Rightarrow \frac{N}{A} = E \cdot \frac{du}{dL} \Rightarrow u = \frac{L}{E \cdot A} \cdot N \quad (5)$$

3.3 Στρεπτική Συνιστώσα

Για την στρέψη, ο συντελεστής ευκαμψίας περιγράφεται από την Εξίσωση (6), με αναφορά στο Σχήμα 7 ακολούθως, όπου οι παραμορφώσεις λόγω στρέβλωσης και οι αντίστοιχες αμφίδρομες ροπές που τις προκαλούν αμελούνται (ανάλυση με θεωρία 1^{ης} τάξεως):



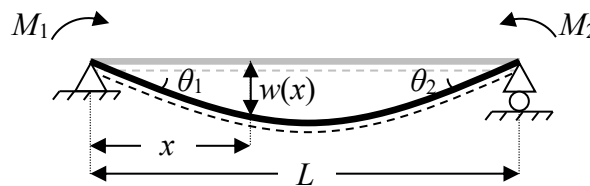
Σχήμα 7: Ροπή στρέψης (T) και στροφή (φ)

$$\tau = G \cdot \gamma \Rightarrow \frac{T}{I_T} = G \cdot \frac{d\phi}{dL} \Rightarrow \phi = \frac{L}{G \cdot I_T} \cdot T \quad (6)$$

Όπου στην (6), ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας στέψης θεωρείται ότι είναι σταθερός καθ' όλο το μήκος του πεπερασμένου ραβδωτού στοιχείου δοκού/υποστυλώματος.

3.4 Ροπές Κάμψης

Για τις ροπές κάμψης, οι συντελεστές ευκαμψίας βάσει της θεωρίας 1^{ης} τάξεως μπορούν να εξαχθούν επιλύοντας την αντίστοιχη διαφορική εξίσωση για το επίπεδο (2Δ) πρόβλημα· βλ. Σχήμα 8 ακολούθως:



Σχήμα 8: Παραμόρφωση (w) λόγω ασκούμενων στα άκρα της δοκού ροπών κάμψης {M₁, M₂} για το επίπεδο (2Δ) πρόβλημα.

Η διαφορική εξίσωση του βέλους κάμψης είναι (με αναφορά στο Σχήμα 8):

$$E \cdot I \cdot w''(x) = - \left[M_1 + \left(\frac{M_2 - M_1}{L} \right) \cdot x \right] \quad (7)$$

Όπου στην (7) έχει γίνει η υπόθεση ότι υπάρχει επαρκής δυσκαμψία ώστε οι παραμορφώσεις “w(x)” να είναι μικρές ώστε να ισχύει η ακόλουθη απλοποίηση για την καμπυλότητα “κ”:

$$\kappa = \frac{w''(x)}{\sqrt{[1+(w'(x))^2]^3}} \cong w''(x) \quad (8)$$

Η λύση της (7) λαμβάνεται μέσω σειριακής ολοκλήρωσης:

$$E \cdot I \cdot w'(x) = \int_{y=0}^{y=x} \left[M_1 + \left(\frac{M_2 - M_1}{L} \right) \cdot y \right] \cdot dy + C_1 = M_1 \cdot x + \left(\frac{M_2 - M_1}{2 \cdot L} \right) \cdot x^2 + C_1 \quad (9)$$

$$E \cdot I \cdot w(x) = \int_{y=0}^{y=x} \left[M_1 \cdot x + \left(\frac{M_2 - M_1}{L} \right) \cdot x^2 + C_1 \right] \cdot dy + C_2 = \frac{M_1}{2} \cdot x^2 + \left(\frac{M_2 - M_1}{6 \cdot L} \right) \cdot x^3 + C_1 \cdot x + C_2 \quad (10)$$

Όπου, στην (9), η ποσότητα “w'(x)” αντιστοιχεί στην κλίση της εφαπτομένης της συνάρτησης του βέλους κάμψης w(x), η οποία είναι η στροφή θ(x) λόγω κάμψης. Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες “w(0)=0” και “w(L)=0” στην Εξίσωση (10), λαμβάνονται οι τιμές των “C₂” και “C₁” αντιστοίχως:

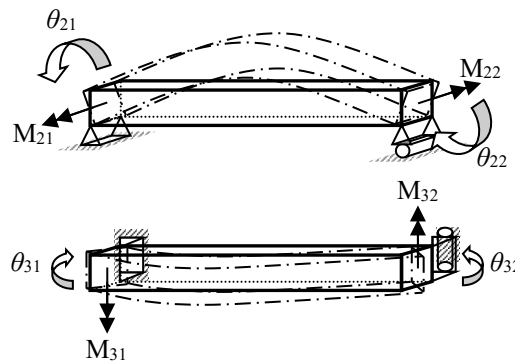
$$C_1 = -\left(\frac{2 \cdot M_1 + M_2}{6}\right) \cdot L \quad , \quad C_2 = 0 \quad (11)$$

Αντικαθιστώντας την (11) στην (9), οι τιμές των στροφών στα άκρα “ $\theta(0)$ ” and “ $\theta(L)$ ”, λαμβάνονται εύκολα:

$$\theta(0) = -\frac{L}{6 \cdot E \cdot I} \cdot (2 \cdot M_1 + M_2) \quad , \quad \theta(L) = -\frac{L}{6 \cdot E \cdot I} \cdot (M_1 + 2 \cdot M_2) \quad (12)$$

Θέτοντας “ $\theta(0) = -\theta_1$ ” and “ $\theta(L) = \theta_2$ ” στην (12), λαμβάνεται η μορφή άλγεβρας πινάκων των μη-συζευγμένων συντελεστών ευκαμψίας με βάση την θεωρία 1^{ης} τάξεως:

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (13)$$



Σχήμα 9: Ροπές κάμψης (M) και στροφές (θ) περί των αξόνων 2 και 3.

Για τον ισχυρό και ασθενή άξονα κάμψης, μπορεί να εισαχθεί ένας κατάλληλος συντελεστής στην Εξίσωση (13) (με αναφορά στο ανωτέρω Σχήμα 9):

$$\begin{Bmatrix} \theta_{j1} \\ \theta_{j2} \end{Bmatrix} = \frac{L}{6 \cdot E \cdot I_j} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} M_{j1} \\ M_{j2} \end{Bmatrix} \quad , \quad j = \{2,3\} \quad (14)$$

4 Διέπουσες Εξισώσεις

Σε αυτή την ενότητα, παρουσιάζεται μια απαρίθμηση των εξισώσεων που διέπουν την εντός των πλαισίων της παρούσης διατριβής αναπτυχθείσα διαδικασία δομοστατικής ανάλυσης που βασίζεται στην μέθοδο των δυνάμεων. Ακολουθείται μια παρουσίαση βασιζόμενη στον λογισμό των μεταβολών, όπου γίνεται χρήση των πεπερασμένων στοιχείων δοκού/υποστυλώματος που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 3.

Οι στοιχειώδεις μεταβολές των εντατικών μεγεθών μιας κατασκευής παρίστανται συμβολικά με την βοήθεια ενός διανύσματος “ $\Delta \mathbf{Q}_s$ ”, το οποίο διατυπώνεται ως το άθροισμα ενός διανύσματος “ $\Delta \mathbf{Q}_0$ ” λόγω των εξωτερικών φορτίων, και ενός διανύσματος “ $\Delta \mathbf{Q}_1$ ” λόγω των στατικώς πλεοναζόντων (υπέρ-στατικών) μεγεθών: το τελευταίως αναφερόμενο υφίσταται μόνο στην περίπτωση στατικώς υπέρ-ορισμένων (υπέρ-στατικών) κατασκευών:

$$\Delta \mathbf{Q}_s = \Delta \mathbf{Q}_0 + \Delta \mathbf{Q}_1 \quad (15)$$

Η εξίσωση (15) μπορεί να αναπτυχθεί περαιτέρω εκφράζοντας κάθε ένα από τα γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα ως το γινόμενο ενός πίνακα “ \mathbf{B}_i ” επί ένα διάνυσμα “ $\Delta \mathbf{p}_i$ ”, όπου $i=\{0,1\}$. Αυτοί οι πίνακες εκφράζουν τις τιμές των στοιχειωδών μεταβολών των εντατικών μεγεθών της κατασκευής λόγω μοναδιαίας τιμής στοιχειωδών μεταβολών εξωτερικών φορτίων “ $\Delta \mathbf{p}_0$ ” και μοναδιαίας τιμής εσωτερικών στατικώς πλεοναζόντων εντατικών μεγεθών “ $\Delta \mathbf{p}_1$ ”, αντιστοίχως:

$$\Delta \mathbf{Q}_s = \mathbf{B}_0 \cdot \Delta \mathbf{p}_0 + \mathbf{B}_1 \cdot \Delta \mathbf{p}_1 \quad (16)$$

Όπου, με αναφορά στα Σχήματα 6, 7, και 9, και συνενώνοντας σε κοινά διανύσματα τις μεταξύ τους όμοιες εντατικές συνιστώσες (αξονική, στρέψη, ροπή κάμψης περί τον ασθενή άξονα, ροπή κάμψης περί τον ισχυρό άξονα) για ολόκληρη την κατασκευή, έχουμε:

$$\Delta \mathbf{Q}_s^T = \{ \Delta \mathbf{N}^T \quad \Delta \mathbf{T}^T \quad \Delta \mathbf{M}_2^T \quad \Delta \mathbf{M}_3^T \} \quad (17)$$

Οι στοιχειώδεις μεταβολές στατικώς πλεοναζόντων μεγεθών “ $\Delta \mathbf{p}_1$ ” στην Εξίσωση (16) υπολογίζονται με την βοήθεια της συνθήκης συμβιβαστού των παραμορφώσεων, όπως προτάθηκε για πρώτη φορά από τον James Clerk–Maxwell:

$$\mathbf{B}_1^T \cdot \Delta \mathbf{q}_s = \mathbf{0} \quad (18)$$

Όπου στην Εξίσωση (18), το διάνυσμα “ $\Delta \mathbf{q}_s$ ” συμβολίζει τις στοιχειώδεις μεταβολές των γενικευμένων τοπικών παραμορφώσεων της κατασκευής στα σημεία αναφοράς αυτής (κρίσιμες διατομές), το οποίο μπορεί να διατυπωθεί ως άθροισμα των αντίστοιχων ελαστικών “ $\Delta \mathbf{q}_{el}$ ” και πλαστικών “ $\Delta \mathbf{q}_{pl}$ ” συνιστωσών:

$$\Delta \mathbf{q}_s = \Delta \mathbf{q}_{el} + \Delta \mathbf{q}_{pl} \quad (19)$$

Όπου, με αναφορά στα Σχήματα 6, 7, και 9, και συμπύσσοντας τις αντίστοιχες συνιστώσες παραμορφώσεων για ολόκληρη την κατασκευή, λαμβάνουμε:

$$\Delta \mathbf{q}_s^T = \{ \Delta \mathbf{u}^T \quad \Delta \boldsymbol{\phi}^T \quad \Delta \boldsymbol{\theta}_2^T \quad \Delta \boldsymbol{\theta}_3^T \}_s \quad (20)$$

Οι ελαστικές συνιστώσες στην Εξίσωση (19) υπολογίζονται με την βοήθεια του τοπικού μητρώου ευκαμψίας “ \mathbf{F} ”:

$$\Delta \mathbf{q}_{el} = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{Q}_s \tag{21}$$

Όπου στην Εξίσωση (21), το “**F**” ορίζεται για ολόκληρη την κατασκευή με αναφορά στις Εξισώσεις (5), (6) και (14), και η ταξινόμηση των ελαστικών συνιστωσών στο διάνυσμα “ $\Delta \mathbf{q}_{el}$ ” γίνεται σύμφωνα με την Εξίσωση (20):

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_N & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{F}_T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & \mathbf{F}_{M_2} & \mathbf{0} \\ & & & \mathbf{F}_{M_3} \end{bmatrix} \tag{22}$$

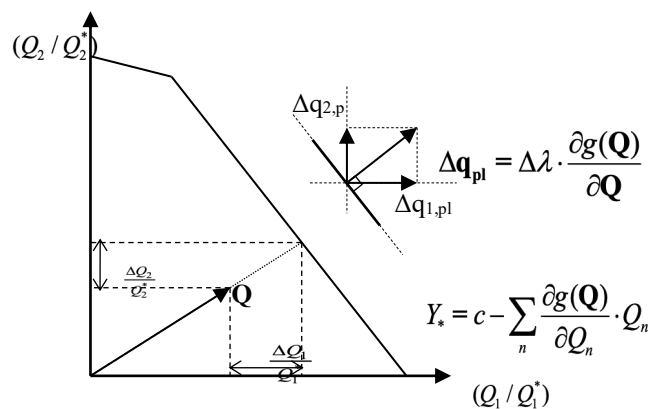
Για ένα ελαστικό-ιδεωδώς πλαστικό υλικό, οι συνιστώσες των πλαστικών παραμορφώσεων στην Εξίσωση (19) μπορούν να υπολογισθούν με την βοήθεια του αξιώματος περί της μεγιστοποίησης του πλαστικού έργου (κατ’ αντιστοιχία προς την φυσική, βλ. περί της μεγιστοποίησης της εντροπίας), χρησιμοποιώντας την ως προς το διάνυσμα αλληλοεπιδρώντων εντατικών μεγεθών παράγωγο μιας κατάλληλα ορισμένης συνάρτησης διαρροής “ $g(\mathbf{Q})$ ”:

$$\Delta \mathbf{q}_{pl} = \Delta \lambda \cdot \frac{\partial g(\mathbf{Q})}{\partial \mathbf{Q}} \tag{23}$$

Όπου στην Εξίσωση (23) η ποσότητα “ $\Delta \lambda$ ” συμβολίζει έναν πολλαπλασιαστή Lagrange. Αυτός ο πολλαπλασιαστής μπορεί να υπολογισθεί επακριβώς εντός του πλαισίου του Μαθηματικού Προγραμματισμού (ΜΠ), χρησιμοποιώντας μια συνθήκη γραμμικής συμπληρωματικότητας:

$$\mathbf{Y}_*^T \cdot \Delta \lambda = 0 \quad , \quad \mathbf{Y}_* \geq 0 \quad , \quad \Delta \lambda \geq 0 \tag{24}$$

Όπου στην (24), το “ \mathbf{Y}_* ” είναι το διάνυσμα των πλαστικών δυναμικών ολόκληρης της κατασκευής: Το πλαστικό δυναμικό ορίζεται ως μια μονόμετρη, μη-αρνητική, αδιάστατη ποσότητα, και εκφράζει την αριθμητική διαφορά μεταξύ της μέγιστης δυνατής και της πραγματικής τιμής μιας συνάρτησης διαρροής. Σχηματικά, η ιδέα του πλαστικού δυναμικού “ Y_* ” και του αντίστοιχου πολλαπλασιαστή Lagrange αναπαρίστανται στο Σχήμα 10 ακολούθως, για την περίπτωση δύο αλληλοεπιδρώντων συνιστωσών έντασης $\{Q_1, Q_2\}$:



Σχήμα 10: Πλαστικό δυναμικό και αντίστοιχος πολλαπλασιαστής Lagrange.

Για ένα γραμμικά πλαστικώς κρατυνόμενο υλικό, οι στοιχειώδεις μεταβολές των πλαστικών παραμορφώσεων είναι συσχετισμένες με τις αντίστοιχες-τους στοιχειώδεις μεταβολές εντατικών μεγεθών:

$$\Delta \mathbf{q}_{pl,s} = \mathbf{F}_s \cdot \Delta \mathbf{Q}_s \quad (25)$$

Όπου στην (25), με “ \mathbf{F}_s ” συμβολίζεται ένας διαγώνιος πίνακας του οποίου οι μη-μηδενικές τιμές εξαρτώνται από τις αλληλοεπιδράσεις συνιστώσες εντατικών μεγεθών των συναρτήσεων διαρροής που έχουν υιοθετηθεί για τα αντίστοιχα μέλη της κατασκευής.

Οι στοιχειώδεις μεταβολές των γενικευμένων μετατοπίσεων κατά την κατεύθυνση των εξωτερικών φορτίων που ασκούνται στην κατασκευή, μπορούν να υπολογισθούν μέσω της Στατικής-Κινηματικής Δυναμικότητας (SKD):

$$\Delta \mathbf{u}_s = \mathbf{B}_0^T \cdot \Delta \mathbf{q}_s \quad (26)$$

5 Πίνακες Ισορροπίας

Το παρόν κεφάλαιο περιέχει τις απαιτούμενες εξισώσεις για την περιγραφή και τον υπολογισμό της ισορροπίας στον τρισδιάστατο (3Δ) χώρο, καθώς και τις αντίστοιχες τεχνικές αυτοματοποίησης. Για λόγους συντομίας, παρουσιάζονται μόνο τα καινούργια στοιχεία των διαδικασιών αυτοματοποίησης: παρ' όλα αυτά, έχουν συμπεριληφθεί όλες οι απαιτούμενες αναφορές στις προηγούμενες σχετικές ερευνητικές εργασίες.

5.1 Συνθήκες Ισορροπίας στον Τρισδιάστατο Χώρο

Θεωρώντας το εξωτερικό γινόμενο σε μορφή πινάκων για έναν καρτεσιανό χώρο, οι αντιδρώσες ροπές “**M**” σε ένα συγκεκριμένο σημείο “*f*” λόγω ενός διανύσματος δυνάμεων “**F**” το οποίο ασκείται σε ένα άλλο σημείο “*s*”, μπορούν να περιγραφούν από την ακόλουθη εξίσωση:

$$\mathbf{M} = -\mathbf{d}_R \cdot \mathbf{F} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & +\Delta z & -\Delta y \\ -\Delta z & 0 & +\Delta x \\ +\Delta y & -\Delta x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} \quad (27)$$

Όπου

$$\Delta x = x_f - x_s, \quad \Delta y = y_f - y_s, \quad \Delta z = z_f - z_s \quad (28)$$

Η συνθήκη ισορροπίας μεταξύ των δύο σημείων “*f*” και “*s*”, εκπεφρασμένη στην πλήρη της μορφή και σε συντεταγμένες ως προς ένα καθολικό σημείο αναφοράς, μπορεί να γραφεί σε μορφή πινάκων, ως ακολούθως:

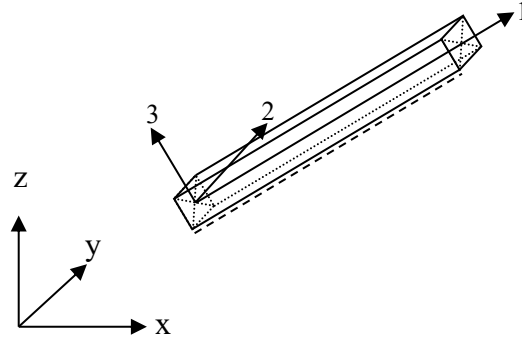
$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix}_f = - \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{d}_R & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix}_s \quad (29)$$

5.2 Γραμμικές Προβολές από Καθολικές σε Τοπικές Τρισδιάστατες Καρτεσιανές Συντεταγμένες

Ένας απλός στην υλοποίηση, αλλά και αποτελεσματικός γραμμικός μετασχηματισμός από καθολικές σε τοπικές συντεταγμένες, είναι ο ακόλουθος:

$$\mathbf{v}_L = \mathbf{T}_R \cdot \mathbf{v}_G \quad (30)$$

Όπου $\mathbf{v}_G = \{v_x \ v_y \ v_z\}^T$ είναι ένα διάνυσμα οι συνιστώσες του οποίου ορίζονται ως προς ένα καθολικό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με βάση $\{x,y,z\}$, και $\mathbf{v}_L = \{v_1 \ v_2 \ v_3\}^T$ είναι το ίδιο διάνυσμα ορισμένο ως προς ένα τοπικό καρτεσιανό σύστημα αναφοράς με βάση $\{1,2,3\}$. Όλα τα συστήματα αναφοράς θεωρούνται δεξιόστροφα, δηλαδή ακολουθούν τον κανόνα της δεξιάς χειρός για την αλληλουχία ορισμού των αξόνων τους με βάση τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου (βλ. και Σχήμα 11 ακολούθως).



Σχήμα 11: Καθολικά και τοπικά συστήματα αναφοράς (δεξιόστροφα).

Για την γενική περίπτωση, ο πίνακας “ \mathbf{T}_R ” που πραγματοποιεί τον γραμμικό μετασχηματισμό μπορεί να διατυπωθεί ως ακολούθως:

$$\mathbf{T}_R = \begin{bmatrix} +\frac{v_x}{L} & +\frac{v_y}{L} & +\frac{v_z}{L} \\ -\frac{v_x}{L} \cdot \frac{v_z}{L_{xy}} \cdot \cos \alpha + \frac{v_y}{L} \cdot \sin \alpha & -\frac{v_y}{L} \cdot \frac{v_z}{L_{xy}} \cdot \cos \alpha - \frac{v_x}{L} \cdot \sin \alpha & +\frac{L_{xy}}{L} \cdot \cos \alpha \\ +\frac{v_x}{L} \cdot \frac{v_z}{L_{xy}} \cdot \sin \alpha + \frac{v_y}{L} \cdot \cos \alpha & +\frac{v_y}{L} \cdot \frac{v_z}{L_{xy}} \cdot \sin \alpha - \frac{v_x}{L} \cdot \cos \alpha & -\frac{L_{xy}}{L} \cdot \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (31)$$

Όπου $L = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ και $L_{xy} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, και “ α ” είναι μια γωνία στροφής περί τον άξονα του διανύσματος “ \mathbf{v}_G ” ή “ \mathbf{v}_L ”.

Για κάθε μία από τις ειδικές περιπτώσεις κατά τις οποίες το καθολικό διάνυσμα “ \mathbf{v}_G ” είναι κάθετο σε ένα καρτεσιανό επίπεδο $\{x,y\}$ ή $\{y,z\}$ ή $\{z,x\}$, τα στοιχεία του πίνακα μετασχηματισμού “ \mathbf{T}_R ” ορίζονται από το σύνολο των Εξισώσεων (32):

$$\begin{aligned} \vec{v}_L \perp (\vec{v}_x \times \vec{v}_y): \quad \mathbf{T}_R &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & p \\ |p| & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \end{bmatrix}, \quad p = \text{sign}(v_1 \cdot v_z) \\ \vec{v}_L \perp (\vec{v}_y \times \vec{v}_z): \quad \mathbf{T}_R &= \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & |p| & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}, \quad p = \text{sign}(v_1 \cdot v_x) \\ \vec{v}_L \perp (\vec{v}_z \times \vec{v}_x): \quad \mathbf{T}_R &= \begin{bmatrix} 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & |p| \\ p & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad p = \text{sign}(v_1 \cdot v_y) \end{aligned} \quad (32)$$

Όπου στην Εξίσωση (32), η απόλυτη τιμή του “ p ” βοηθά στο να διατηρείται το δεξιόστροφο του συστήματος συντεταγμένων. Η περιστροφή της γωνίας “ α ” γύρω από τον διαμήκη άξονα ασκείται ξεχωριστά, με την βοήθεια του αντίστοιχου ταυστή στροφής “ \mathbf{R} ”:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & +\cos \alpha & +\sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & +\cos \alpha \end{bmatrix} \quad (33)$$

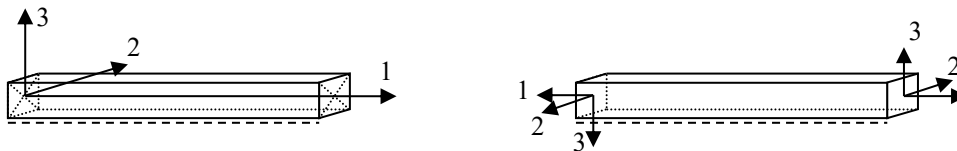
Μια ισοδύναμη πρακτική για τον καθορισμό της κατεύθυνσης των τοπικών αξόνων ενός μέλους στον τρισδιάστατο (3Δ) χώρο είναι αυτή του ορισμού ενός βοηθητικού σημείου, το οποίο, μαζί με τον διαμήκη άξονα (#1) ορίζει το ημιεπίπεδο επί του οποίου κείται το διάνυσμα του ασθενή άξονα κάμψης (#2). Ένας κατάλληλος γραμμικός μετασχηματισμός που βασίζεται στον ορισμό του βοηθητικού σημείου μπορεί να βρεθεί στην εργασία [53].

5.3 Εξισώσεις Υπολογισμού των $\{\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1\}$

Από την οπτική της υπολογιστικής υλοποίησης, είναι ευκολότερο να οριστούν οι πίνακες “ \mathbf{B}_0 ” και “ \mathbf{B}_1 ” με την βοήθεια ενός συνόλου μαθηματικών εξισώσεων (τύπων) οι οποίες εκφράζουν ταυτόχρονα την ισορροπία στον τρισδιάστατο (3Δ) χώρο και τον μετασχηματισμό των εντατικών συνιστωσών από το καθολικό στο τοπικό σύστημα αναφοράς κάθε μέλους της κατασκευής. Συνδυάζοντας τις Εξισώσεις (27) – (31) ή (27) – (30) και (32) – (33), αναλόγως της κατεύθυνσης του μέλους, λαμβάνεται μια όμοια μορφή των εξισώσεων που παρουσιάστηκαν για πρώτη φορά στο σύγγραμμα [10]:

$$\mathbf{B}_i = -\text{Sign}\{m\} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{T}_R & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{T}_R \cdot \mathbf{d}_R & \mathbf{T}_R \end{bmatrix}, \quad i = \{0, 1\} \quad (34)$$

Στην παρούσα διατριβή, ο νεοεισαχτής πολλαπλασιαστής “ $\text{Sign}\{m\}$ ” εφαρμόζει ένα πρόσθετο (\pm) πρόσημο σε κάθε σειρά της Εξίσωσης (34), αναλόγως του αν η κατεύθυνση των τοπικών αξόνων του μέλους/στοιχείου “ m ” συμπίπτει με την φορά διαγραφής της κατεύθυνσης της συντομότερης διαδρομής (\mathbf{B}_0) / κλειστού βρόχου (\mathbf{B}_1), ή όχι.



Σχήμα 12: Κατευθυντήριοι άξονες μέλους (αριστερά); άξονες διατομής για τις τοπικές συνιστώσες εντατικών μεγεθών (δεξιά).

Για ένα δεδομένο σύνολο στοιχειωδών μεταβολών εξωτερικών φορτίων και υπέρ-στατικών μεγεθών, και με την βοήθεια των Εξισώσεων (16) και (34), μπορούν εύκολα να υπολογισθούν οι στοιχειώδεις μεταβολές των εντατικών μεγεθών κάθε δομικού μέλους.

5.4 Διαδικασίες για τον Προσδιορισμό των Στατικών Βάσεων

Ο υπολογισμός των πινάκων ισορροπίας (βλ. Εξίσωση (34)) εξαρτάται από την αυτόματη επιλογή μιας στατικής βάσης που φέρει τα εξωτερικά φορτία (matrix “ \mathbf{B}_0 ”) και μιας στατικής βάσης που ορίζει τα στατικώς πλεονάζοντα εντατικά μεγέθη (matrix “ \mathbf{B}_1 ”): αυτές οι τεχνικές αυτοματισμού βασίζονται στην θεωρία γράφων και στους αλγόριθμους εύρεσης συντομότερης διαδρομής.

Για τα εξωτερικά φορτία, η ισορροπία ικανοποιείται κατά μήκος συνεχών προβόλων που καθορίζουν την συντομότερη διαδρομή από τα σημεία εφαρμογής των εξωτερικών φορτίων στους συνοριακούς κόμβους της κατασκευής. Για τα στατικώς πλεονάζοντα μεγέθη, η ισορροπία ικανοποιείται κατά μήκος των ανεξάρτητων μεταξύ τους αυτοϊσορροπούμενων προβόλων (εν είδη κλειστών διαδρομών) που ορίζονται από τους κύκλους του γράφου που περιγράφει τοπολογικά την κατασκευή. Στις ακόλουθες

ενότητες παρουσιάζονται συνοπτικά οι αντίστοιχοι αλγόριθμοι, οι οποίοι βασίζονται στις εργασίες [31],[47],[49], και [53]. Για την επίλυση του γενικού προβλήματος εύρεσης της συντομότερης διαδρομής εντός δικτύου/γράφου, χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος του Nicholson.

5.4.1 Εξωτερικά Φορτία

Σε αυτή την ενότητα, παρουσιάζεται ο προσδιορισμός μιας στατικής βάσης για τα εξωτερικά φορτία της κατασκευής (πίνακας \mathbf{B}_0).

Η κύρια ιδέα είναι να δημιουργήσει κανείς ένα σύνολο ανεξάρτητων μεταξύ τους προβόλων που μεταφέρουν τα δυνητικώς ασκούμενα εξωτερικά φορτία από κάθε ελεύθερο κόμβο της κατασκευής στο έδαφος (συνοριακοί κόμβοι). Η διαδικασία είναι αρκετά απλή ως προς τις αρχές στις οποίες στηρίζεται. Για κάθε κόμβο “ k ” της κατασκευής, όπου $k \rightarrow \{1, 2, \dots, N_{\text{nodes}}\}$:

0. Αποθήκευση όλων των συνοριακών κόμβων της κατασκευής σε μία λίστα.
1. Εύρεση των συντομότερων διαδρομών που οδηγούν από τον κόμβο k σε κάθε έναν από τους συνοριακούς κόμβους της κατασκευής, και αποθήκευση της αλληλουχίας κόμβων που απαρτίζουν κάθε διαδρομή σε μία λίστα, καθώς και το αντίστοιχο μήκος της διαδρομής αυτής.
2. Μεταξύ των προσδιορισθέντων διαδρομών, επέλεξε αυτήν με το ελάχιστο μήκος ως έγκυρη.

5.4.2 Στατικός Πλεονάζοντα (Υπέρ-Στατικά) Μεγέθη

Σε αυτή την ενότητα, παρουσιάζεται ο προσδιορισμός της στατικής βάσης (σύνολο τοπολογικών κύκλων) για τα στατικώς πλεονάζοντα (υπέρ-στατικά) μεγέθη μιας κατασκευής (πίνακας \mathbf{B}_1).

Η κεντρική ιδέα είναι να προσδιοριστεί ένα σύνολο ανεξάρτητων μεταξύ τους κλειστών διαδρομών (τοπολογικών κύκλων) οι οποίοι αναπαριστούν την έννοια των αυτοϊσορροπούμενων συστημάτων που υπάρχουν εντός της κατασκευής και καθορίζουν την ανακατανομή εντάσεων λόγω της στατικής αοριστίας/υπέρ-στατικότητας.

5.4.2.1 Βασική Διαδικασία

1. Έστω “ N ” ο αριθμός κόμβων της κατασκευής. Δημιουργία ενός επιπρόσθετου εικονικού κόμβου (εδάφους) με αύξοντα αριθμό “ $N+1$ ”, και σύνδεση όλων των συνοριακών κόμβων σε αυτόν (βλ. βήμα 2 ακολούθως για τον ορισμό και σχηματισμό του πίνακα αποστάσεων).
2. Σχηματισμός τον πίνακα αποστάσεων “ $d(i,j)$ ” που προσομοιώνει την κατασκευή ως γράφο: Για όλα τα συνδεδεμένα ζεύγη κόμβων (i,j) , όπου $\{i,j\} \rightarrow \{1, 2, \dots, N+1\}$ και “ $N+1$ ” είναι ο αριθμός των κόμβων του γράφου, ανάθεση της τιμής “1” στην αντίστοιχη θέση μνήμης “ $d(i,j)$ ”· για όλα τα ζεύγη κόμβων που δεν είναι συνδεδεμένα, ανάθεση μιας θεωρητικώς άπειρης τιμής απόστασης στην “ $d(i,j)$ ” (π.χ. “ $N_{\text{total}}+1$ ”, όπου “ N_{total} ” είναι ο αριθμός των κόμβων όλου του γράφου).
3. Ταξινόμηση όλων των κόμβων του γράφου σύμφωνα με την συνδεσιμότητά τους (δηλαδή με βάση το πλήθος των μελών που συνδέονται σε αυτούς) και αποθήκευση των αυξόντων αριθμών τους σε μία λίστα. Επίσης, σχηματισμός μιας λίστας με τους αύξοντες αριθμούς των μελών που συνδέονται σε κάθε κόμβο του γράφου.
4. Ορισμός/αρχικοποίηση ενός δείκτη μέτρησης: $k=1$.
5. Επιλογή του $k^{\text{οστού}}$ κόμβου της λίστας που δημιουργήθηκε στο βήμα #3, και εύρεση της συντομότερης διαδρομής μεταξύ των δύο άκρων του 1^{ου} μέλους που συνδέεται στον εν λόγω κόμβο· προκειμένου να αποφευχθεί η τετριμμένη λύση, γίνεται ανάθεση μια θεωρητικώς άπειρης τιμής για την απόσταση μεταξύ του κόμβου αρχής και πέρατος του εν λόγω μέλους, προτού ξεκινήσει η διαδικασία εύρεσης.

6. Δεδομένου ότι ισχύει είτε η ανισότητα " $L_{SP} < 2 \cdot (N_{nodes} - 1)$ " είτε η " $L_{SP} < 2 \cdot N_{nodes}$ ", όπου " L_{SP} " είναι το άθροισμα των μηκών των μελών και " N_{nodes} " είναι το πλήθος των κόμβων που σχηματίζουν την συντομότερη διαδρομή που βρέθηκε στο βήμα #5 αντιστοίχως, ανάθεση της τιμής "2" στις θέσεις μνήμης του πίνακα αποστάσεων " $d(i,j)$ " που αντιστοιχούν στα μήκη των μελών που σχηματίζουν τον κλειστό κύκλο (βρόχο). (Σημείωση: Ο ως άνω αναφερόμενος τύπος ανισοτήτων ονομάζεται «κανόνας παραδεκτού κύκλων/βρόχων». Σύμφωνα με την [53], η δεύτερη από τις δύο ανισότητες που παρατίθενται ανωτέρω είναι προτιμότερη για τρισδιάστατες κατασκευές).
7. Συνέχιση της διαδικασίας αναζητώντας τον επόμενο τοπολογικό κύκλο από το επόμενο κατά σειρά μέλος που συνδέεται στον $k^{οστό}$ κόμβο, μέχρις ότου όλα τα μέλη που συνδέονται στον κόμβο αυτό να έχουν εξεταστεί (δηλαδή όλα τα μήκη των συνδεόμενων μελών να έχουν λάβει την τιμή "2").
8. Επαύξηση του δείκτη $k \rightarrow k+1$ και επανάληψη της διαδικασίας εύρεσης (βήματα #5 ως #6), μέχρις ότου εξεταστούν όλοι οι κόμβοι του γράφου.

5.4.2.2 Διορθώνοντας το Πρόβλημα των Εξαρτώμενων Βρόχων

Στην περίπτωση όπου η διαδικασία που περιεγράφηκε στην ενότητα 5.4.2.1 αποδώσει αριθμό τοπολογικών κύκλων που είναι μικρότερος από τον 1^ο αριθμό του Betti, τότε πρέπει επίσης να εκτελεστεί και η ακόλουθη διαδικασία, προκειμένου να εντοπιστούν και να αφαιρεθούν οι κόμβοι που προκαλούν εξαρτημένους βρόχους:

0. Ορισμός/αρχικοποίηση ενός δείκτη μέτρησης $k=1$.
1. Έναρξη από τον $k^{οστό}$ κόμβο της λίστας που περιέχει τους αύξοντες αριθμούς των κόμβων ταξινομημένους σύμφωνα με την συνδεσιμότητά τους· επιλογή ενός συνδεόμενου στον τρέχοντα κόμβο μέλους του οποίου το μήκος είναι ίσο προς "2".
2. Εύρεση της συντομότερης διαδρομής μεταξύ των άκρων του επιλεγμένου μέλους· προκειμένου να αποφευχθεί η τετριμμένη λύση, γίνεται ανάθεση μιας θεωρητικώς άπειρης τιμής για το μήκος του υπό αναφορά μέλους (π.χ. " $N_{nodes} + 1$ ", όπου " N_{nodes} " είναι ο αριθμός των κόμβων του γράφου) πριν την έναρξη της διαδικασίας εύρεσης της συντομότερης διαδρομής.
3. Μετά τον προσδιορισμό ενός τοπολογικού κύκλου, γίνεται έλεγχος για το αν ικανοποιείται ο κανόνας παραδεκτού βρόχων, και ανάθεση της τιμής μήκους "2" στις αντίστοιχες θέσεις μνήμης του πίνακα αποστάσεων " $d(i,j)$ " για όλα τα μέλη που απαρτίζουν τον ευρεθέντα κύκλο.
4. Έλεγχος εντός του πίνακα αποστάσεων " $d(i,j)$ " για το αν όλα τα μέλη του γράφου έχουν τιμή μήκους ίση προς "2": Αν ναι, τότε προσδιορίστηκε επιτυχώς ένα πλήρες σύνολο ανεξάρτητων τοπολογικών κύκλων και ως εκ τούτου η διαδικασία μπορεί να προχωρήσει στο βήμα #6· αν όχι (π.χ. υπάρχουν ακόμη μέλη με τιμή μήκους ίση προς "1"), επιλέγεται ένα νέο μέλος που άπτεται του $k^{οστού}$ κόμβου και επαναλαμβάνονται τα βήματα #1 ως #4, μέχρις ότου εξεταστούν όλα τα απόμεινα στον $k^{οστό}$ κόμβο μέλη.
5. Ανάθεση $k \rightarrow k+1$ και επιστροφή στο βήμα #1, μέχρις ότου εξεταστούν όλοι οι κόμβοι του γράφου.
6. Έστω " $N_{c,k}$ " το πλήθος των προσδιορισθέντων τοπολογικών κύκλων. Έλεγχος αν το " $N_{c,k}$ " είναι ίσο προς τον 1^ο αριθμό του Betti: Αν ναι, η διαδικασία τερματίζεται επιτυχώς· αν όχι, συνέχιση στο βήμα #7.
7. Αφαίρεση του υπό αναφορά $k^{οστού}$ κόμβου από τον γράφο (δηλαδή ανάθεση μιας θεωρητικώς άπειρης τιμής μήκους σε όλα τα μέλη που συνδέονται στον κόμβο αυτόν), και επανάληψη των βημάτων #1 έως #4: Όταν όλα τα υπολειπόμενα μέλη του γράφου έχουν τιμή μήκους ίση προς "2", μετάβαση στο βήμα #8.

8. Επανατοποθέτηση του $k^{\text{οστό}}$ κόμβου του γράφου, καθώς και των συνδεδεμένων σε αυτόν μελών, και εκτέλεση των βημάτων #2 και #3 για κάθε ένα από τα συνδεδεμένα στον κόμβο αυτόν μέλη. Έστω “ $N'_{c,k}$ ” το νέο πλήθος των τοπολογικών κύκλων που προσδιορίστηκαν.
9. Αν ισχύει η ισότητα “ $N'_{c,k}=N_{c,k}+1$ ”, τότε ο υπό αναφορά $k^{\text{οστό}}$ κόμβος προκαλεί εξαρτημένους (εμφατνωμένους) τοπολογικούς κύκλους, επομένως τόσο ο κόμβος αυτός όσο και τα συνδεδεμένα σε αυτόν μέλη πρέπει να αφαιρεθούν από τον γράφο· αν δεν ισχύει, επιλογή ενός άλλου κόμβου (δηλαδή τίθεται $k \rightarrow k-1$), και μετάβαση στο βήμα #7.
10. Επανάληψη των βημάτων #7 έως #9 τόσες φορές όσο ο αριθμός των ελλειπόντων τοπολογικών κύκλων προκειμένου να συμπληρωθεί ο $1^{\text{ος}}$ αριθμός του Betti· κατ’ αυτόν τον τρόπο θα προσδιοριστεί ένα σύνολο ανεξάρτητων μεταξύ τους τοπολογικών κύκλων που δεν θα περιέχει τους κόμβους που προκαλούν εξαρτήσεις (εμφατνωμένους κύκλους).
11. Πρόσθεση στον γράφο των κόμβων που λείπουν, καθώς και των συνδεδεμένων σε αυτούς μελών, και εκτέλεση των βημάτων #2 και #3 για όλα τα συνδεδεμένα σε αυτούς τους κόμβους μέλη, προκειμένου να ευρεθεί ένα πλήρες σύνολο ανεξάρτητων μεταξύ τους τοπολογικών κύκλων.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι διαδικασίες που περιεγράφηκαν στην ενότητα 5.4.2 δεν αποδίδουν πάντα ένα σύνολο ανεξάρτητων τοπολογικών κύκλων με το ελάχιστο πλήθος μελών, αλλά με το σχεδόν ελάχιστο. Αυτό το μειονέκτημα οδηγεί στην δημιουργία καθολικών μητρών ευκαμψίας με πλήθος μη-μηδενικών στοιχείων μεγαλύτερο από το δυνητικώς πραγματικά ελάχιστο.

6. Εκκεντρότητες Στοιχείων

Σε γενικές γραμμές, θα μπορούσε να λεχθεί ότι, όσο πιο λεπτομερές είναι ένα στατικό προσομοίωμα, τόσο καλύτερη είναι η ποιότητα των αποτελεσμάτων μιας ανάλυσης. Ωστόσο, σε αυτή την γενική ιδέα υπάρχουν αρκετοί περιορισμοί· όσο πυκνότερη γίνεται η διαμέριση ενός χωρίου, τόσο απαιτητικότερη σε υπολογιστικούς πόρους γίνεται η στατική ανάλυση. Επιπλέον, και λόγω ότι οι υπολογιστικοί πόροι είναι πεπερασμένοι, η αύξηση της πυκνότητας της διαμέρισης πέραν ενός σημείου επιφέρει σημαντικές καθυστερήσεις στην σύγκλιση της αριθμητικής διαδικασίας επίλυσης. Επομένως, για την αποτελεσματική άσκηση του επαγγέλματος του μηχανικού χρειάζεται η θεώρηση κατάλληλων απλουστευτικών παραδοχών προκειμένου να μπορεί να διεξαχθεί με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια, ευκολία, και εντός εύλογου χρόνου το σύνολο των υπολογισμών του στατικού μοντέλου του φέροντα οργανισμού μιας οποιασδήποτε κατασκευής.

Στην προσομοίωση φερόντων οργανισμών, μια συνήθης πρακτική είναι αυτή της θεώρησης των περιοχών συνένωσης δοκών και υποστυλωμάτων (κόμβων) ως μη-παραμορφώσιμων περιοχών. Όταν συντρέχουν οι προϋποθέσεις υπό τις οποίες μπορεί να εφαρμοστεί αυτή η απλουστευτική παραδοχή, διευκολύνεται σημαντικά η διεξαγωγή των στατικών υπολογισμών, διότι λαμβάνονται πιο γρήγορα οι τιμές σχεδιασμού ή/και αντοχής των στοιχείων μιας κατασκευής στα άκρα αυτών. (Κοινώς, είναι σημαντικό να γίνεται ο απαραίτητος έλεγχος τάσεων στην περιοχή του κόμβου, σύμφωνα με τις αρχές της οριακής ανάλυσης επί των οποίων στηρίζονται όλοι οι σύγχρονοι αντισεισμικοί κανονισμοί).

Ένα πρακτικώς άκαμπτο μέρος ενός ραβδωτού στοιχείου είναι εξ ορισμού του μη-παραμορφώσιμο, επομένως θεωρείται ότι δεν αποθηκεύει εντός του δυναμική ενέργεια· από μια μαθηματική οπτική, έχει μηδενική ευκαμψία (ή άπειρη δυσκαμψία, κατά την δυκνή έννοια). Επομένως, η εκκεντρότητα στοιχείων έχει μόνο γεωμετρική σημασία στην μέθοδο των δυνάμεων [9]: Μόνο τα σημεία αρχής και πέρατος του παραμορφώσιμου μέρους ενός στοιχείου δοκού/υποστυλώματος χρειάζεται να ορισθούν ώστε να υπολογιστεί το Ευκλείδειο μήκος αυτού, το οποίο απαιτείται για τον υπολογισμό των συντελεστών του τοπικού μητρώου ευκαμψίας (βλ. Εξίσωση (22)), καθώς και για τις εξισώσεις ισορροπίας σε κάθε άκρο αυτού (βλ. Εξίσωση (34) με αναφορά στις (27) – (33)). Ας σημειωθεί ότι οι προηγούμενες αναφερθείσες ομάδες εξισώσεων καθώς και οι σχετικές με αυτές υπολογιστικές διαδικασίες δεν επηρεάζονται από την συμπερίληψη των εκκεντροτήτων.

Έστω $\{x_i, y_i, z_i\}$ οι συντεταγμένες του κόμβου αρχής “ i ” και $\{x_j, y_j, z_j\}$ οι συντεταγμένες του κόμβου πέρατος “ j ” ενός στοιχείου δοκού/υποστυλώματος μιας κατασκευής, και έστω $\{\bar{e}_{x,i}, \bar{e}_{y,i}, \bar{e}_{z,i}\}$ οι εκκεντρότητες πλησίον του κόμβου “ i ”, και $\{\bar{e}_{x,j}, \bar{e}_{y,j}, \bar{e}_{z,j}\}$ πλησίον του κόμβου “ j ”, αντιστοίχως· αυτές οι ποσότητες ορίζονται ως συνιστώσες διανυσμάτων που είναι παράλληλες στα διανύσματα βάσης του καθολικού συστήματος συντεταγμένων (βλ. Σχήμα 13 ακολούθως). Τότε, το παραμορφώσιμο μήκος του μέλους καθώς και οι προβολές αυτού σε έκαστο καθολικό επίπεδο ($\{x,y\}, \{y,z\}, \{z,x\}$) υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες τροποποιημένες συντεταγμένες:

$$\begin{aligned} x'_i &\rightarrow x_i + \bar{e}_{x,i} & x'_j &\rightarrow x_j + \bar{e}_{x,j} \\ y'_i &\rightarrow y_i + \bar{e}_{y,i} & y'_j &\rightarrow y_j + \bar{e}_{y,j} \\ z'_i &\rightarrow z_i + \bar{e}_{z,i} & z'_j &\rightarrow z_j + \bar{e}_{z,j} \end{aligned} \quad (35)$$

Όπου, στην ομάδα Εξισώσεων (35), οι συνιστώσες της εκκεντρότητας ορίζονται ως προσανατολισμένες ποσότητες (θετικές ή αρνητικές), αναλόγως του αν η κατεύθυνσή τους συμφωνεί με τις συνιστώσες της βάσης του καθολικού συστήματος συντεταγμένων, ή όχι.

7 Συναρτήσεις Διαρροής

Σε αυτό το κεφάλαιο ορίζεται ένα σύνολο ειδικών συναρτήσεων που αποτελούν τα όρια μεταξύ της ελαστικής και της πλαστικής κατάστασης υλικού. Η μορφή των συναρτήσεων αυτών απαιτεί τις υποθέσεις περί απλούστευσης των κατανομών έντασης και παραμόρφωσης που αφορούν το πρόβλημα της κάμψης (είτε μεμονωμένης, είτε σε συνδυασμό με άλλες εντατικές συνιστώσες), ώστε να ανταποκρίνονται στις υποθέσεις που αφορούν τις συγκεντρωμένες (μηδενικού μήκους) πλαστικές αρθρώσεις των ραβδωτών πεπερασμένων στοιχείων τύπου Euler-Bernoulli που χρησιμοποιούνται στην παρούσα διατριβή.

Περαιτέρω, δεικνύεται ότι ο ίδιος τύπος συναρτήσεων μπορεί να χρησιμοποιηθεί προκειμένου να ορισθούν όρια μηδενικών τιμών σε οποιαδήποτε από τις τοπικές εντατικές συνιστώσες στα άκρα ενός στοιχείου δοκού/υποστυλώματος, προκειμένου να περιγραφούν όλες οι εσωτερικές ασυνέχειες που μπορεί να έχει μια κατασκευή.

7.1 Γραμμικοποιημένες Συναρτήσεις Διαρροής

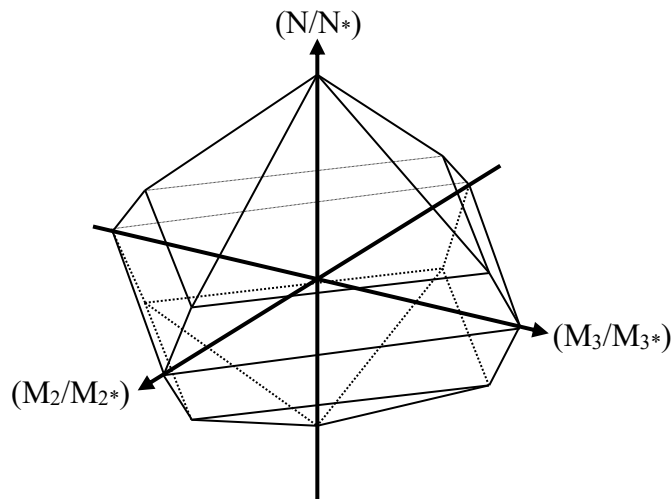
Για την ανάλυση ενός δομικού/φέροντος πλαισίου κατά την οποία λαμβάνεται υπ' όψιν η συμπεριφορά του υλικού πέραν της ελαστικής, ακολουθείται παραδοσιακά η προσέγγιση της πλαστικότητας με την βοήθεια των πλαστικών αρθρώσεων. Από την οπτική της αντοχής των υλικών, τα συμβατικά όρια μεταξύ ελαστικών και πλαστικών παραμορφώσεων μπορούν να ορισθούν με την βοήθεια ενός κλειστού, κυρτού κελύφους· με την έννοια της προτεινόμενης μεθόδου, αυτό το κέλυφος προσεγγίζεται από ένα κυρτό πολύεδρο, τα υπέρ-επίπεδα του οποίου ορίζονται με την βοήθεια της γραμμικοποιημένης παραλλαγής της (εν γένει μη-γραμμικής) συνάρτησης διαρροής (βλ. και Σχήματα 10 και 14):

$$g_i(\mathbf{Q}) = \sum_{n=1}^{N_{isc}(i)} s_n \cdot \frac{Q_n}{Q_n^{*(\pm)}} - c_i \leq 0 \quad , \quad i = \{1, 2, \dots, N_{eq}\} \quad (36)$$

Όπου στην (36), το “ N_{eq} ” συμβολίζει τον αριθμό εξισώσεων που αποτελούν την συνάρτηση διαρροής, το “ $N_{isc}(i)$ ” είναι ο αριθμός των αλληλοεπιδρώντων εντατικών συνιστωσών της i οστής εξίσωσης της συνάρτησης διαρροής “ $g_i(\mathbf{Q})$ ”, “ \mathbf{Q} ” είναι ένα διάνυσμα που περιέχει μόνο τις αλληλοεπιδρώσεις από τις εν δυνάμει έξι εντατικές συνιστώσες μιας διατομής (βλ. Σχήμα 1), και “ c ” είναι μια αδιάστατη σταθερά (π.χ. $c=1$).

Λόγω της τρισδιάστατης φύσης του προβλήματος, μπορεί να ορισθεί μια σειρά από κριτήρια αλληλοεπίδρασης, π.χ. $\{N, M_2, M_3\}$ ή $\{T, M_2, M_3\}$ ή $\{T, V_2, V_3\}$ ή $\{N, V_2, M_3\}$ ή $\{N, V_3, M_2\}$ ή $\{N, V_2, V_3, M_2, M_3\}$, κλπ· εφαρμοσμένες υλοποιήσεις τέτοιων κριτηρίων μπορούν να βρεθούν στους δομικούς κανονισμούς (π.χ. σκυροδέματος, μεταλλικών κατασκευών).

Για παράδειγμα, ο κανονισμός AISC-LRFD [175] προτείνει ένα κριτήριο για την αλληλοεπίδραση ροπής κάμψης και αξονικής δύναμης, το οποίο είναι μια γραμμική συνάρτηση με δύο κλάδους· γραφικά, παρουσιάζεται στο Σχήμα 14 ακολούθως:



Σχήμα 14: Τρισδιάστατη απεικόνιση της μορφής της δι-γραμμικής συνάρτησης κατά AISC-LRFD.

Ένα άλλο παράδειγμα από την άσκηση του επαγγέλματος του μηχανικού είναι το κριτήριο αστοχίας κατά DIN-18880, το οποίο είναι μια πολυκλαδική συνάρτηση διαρροής για αλληλοεπίδραση ροπής κάμψης, διάτμησης, και αξονικής δύναμης. Μια διατύπωση αυτής της συνάρτησης για επίπεδα πλαίσια παρουσιάζεται αναλυτικά στην [176]. οι αντίστοιχοι συντελεστές για την υλοποίηση της συνάρτησης σύμφωνα με την Εξίσωση (36) συνοψίζονται στον Πίνακα 1 ακολούθως:

S_i	N	Q	M
Eq. 1	–	–	1.00
Eq. 2	1.00	–	1.00/1.10
Eq. 3	–	0.45/1.15	1.00/1.15
Eq. 4	1.10/1.25	0.45/1.25	1.00/1.25
Eq. 5	–	1.00/0.90	–

Πίνακας 1: Συντελεστές “ S_i ” για την συνάρτηση διαρροής κατά DIN-18880.

Προκειμένου να λαμβάνεται υπ’ όψιν η θετική ή αρνητική πλαστική αντοχή για κάθε αλληλοεπιδρώσα εντατική συνιστώσα, εισάγεται ένα σύνολο πρόσημων (\pm) στην Εξίσωση (36), τα οποία χρησιμοποιούνται για να ορίσουν τον τομέα του υπερχώρου εντός του οποίου βρίσκεται κάθε ένα από τα υπερεπίπεδα αλληλεπίδρασης εντατικών μεγεθών που απαρτίζουν το πολύεδρο της συνάρτησης διαρροής· αυτή η προσήμανση υλοποιείται εύκολα με την βοήθεια της βασικής αρχής απαρίθμησης.

Για την περίπτωση δύο αλληλοεπιδρώντων εντατικών συνιστωσών, η σχηματιζόμενη διακριτή αλληλουχία συνδυασμών απεικονίζεται στο Σχήμα 15 ακολούθως:

$$\{+,+\}, \{+,-\}, \{-,+\}, \{-,-\}$$

Σχήμα 15: Αλληλουχία πρόσημων των όρων μιας συνάρτησης διαρροής με δύο αλληλοεπιδρώσες συνιστώσες.

Για την περίπτωση τριών αλληλοεπιδρώντων εντατικών συνιστωσών, η σχηματιζόμενη διακριτή αλληλουχία συνδυασμών απεικονίζεται στο σχήμα 16 ακολούθως:

$$\{+,+,+\}, \{+,+,-\}, \{+,-,+\}, \{+,-,-\}$$

$$\{-,+,+\}, \{-,+,-\}, \{-,-,+\}, \{-,-,-\}$$

Σχήμα 16: Αλληλουχία πρόσημων των όρων μιας συνάρτησης διαρροής με τρεις αλληλοεπιδρώσες συνιστώσες.

Για την περίπτωση πέντε αλληλοεπιδρώντων εντατικών συνιστωσών, η σχηματιζόμενη διακριτή αλληλουχία συνδυασμών απεικονίζεται στο Σχήμα 17 ακολούθως:

$$\begin{aligned}
 & \{+,+,+,+,+\}, \{+,+,+,+,-\}, \{+,+,+,-,+\}, \{+,+,+,-,-\} \\
 & \{+,+,-,+,+\}, \{+,+,-,+,-\}, \{+,+,-,-,+\}, \{+,+,-,-,-\} \\
 & \{+,-,+,+,+\}, \{+,-,+,+,-\}, \{+,-,+,-,+\}, \{+,-,+,-,-\} \\
 & \{+,-,-,+,+\}, \{+,-,-,+,-\}, \{+,-,-,-,+\}, \{+,-,-,-,-\} \\
 & \{-,+,+,+,+\}, \{-,+,+,+,-\}, \{-,+,+,-,+\}, \{-,+,+,-,-\} \\
 & \{-,+,-,+,+\}, \{-,+,-,+,-\}, \{-,+,-,-,+\}, \{-,+,-,-,-\} \\
 & \{-,-,+,+,+\}, \{-,-,+,+,-\}, \{-,-,+,-,+\}, \{-,-,+,-,-\} \\
 & \{-,-,-,+,+\}, \{-,-,-,+,-\}, \{-,-,-,-,+\}, \{-,-,-,-,-\}
 \end{aligned}$$

Σχήμα 17: Αλληλουχία πρόσημων των όρων μιας συνάρτησης διαρροής με πέντε αλληλοεπιδρώσες συνιστώσες.

Χρησιμοποιώντας την ανωτέρω αρχή, μπορεί να σχηματισθεί με αυτόματο τρόπο οποιαδήποτε μορφή πολυέδρου που αντιστοιχεί σε οποιονδήποτε τύπο γραμμικοποιημένης συνάρτησης διαρροής.

7.2 Ενσωμάτωση Ασυνεχειών

Για την περίπτωση μελών που έχουν εσωτερικές ελευθερώσεις (π.χ. αρθρώσεις), μπορεί να επιβληθεί μια απόξευση των αλληλοεπιδρώντων συνιστωσών των αντίστοιχων πλαστικών αρθρώσεων· αυτό επιτρέπει την πλαστικοποίηση μόνο στις παραμένουσες εντατικές συνιστώσες.

Ως παράδειγμα, μπορεί να θεωρηθεί ένα αμφιαρθρωτό στοιχείο δοκού/υποστυλώματος με πλαστικές αρθρώσεις σύμφωνα με το κριτήριο κατά AISC-LRFD [175], οριζόμενο για αλληλοεπιδρώσες εντατικές συνιστώσες $\{N, M_2, M_3\}$. Επειδή το στοιχείο έχω αρθρώσεις και στα δύο άκρα του, οι εντατικές συνιστώσες $\{M_2\}$ και $\{M_3\}$ θα είναι πάντα μηδέν, για θετικές και αρνητικές στροφές· επομένως απομένει μόνο η αξονική συνιστώσα $\{N\}$ ως ενεργή υποψήφια για πλαστικοποίηση. Στην πράξη, αυτό σημαίνει ότι πρέπει να ορισθεί μια ξεχωριστή συνθήκη στατικής παραδεκτών εντάσεων για κάθε συνιστώσα: άρα, μια συνάρτηση διαρροής αποτελούμενη από τρία ξεχωριστά μέρη (ένα για κάθε συνιστώσα), με τις φόρμουλες για $\{M_2\}$ και $\{M_3\}$ να έχουν εκφυλιστεί προκειμένου να περιγράψουν ότι οι αντίστοιχη φέρουσα ικανότητα είναι μηδενική. Αυτή η αποξευγμένη συνάρτηση διαρροής παρουσιάζεται ακολούθως με την μορφή της Εξίσωσης (37):

$$\begin{aligned}
 g_1(\mathbf{Q}) &= \{1/N^{*(\pm)} \quad 0 \quad 0\} \cdot \mathbf{Q} - 1 \leq 0 \\
 g_2(\mathbf{Q}) &= \{0 \quad 1/M_2^{*(\pm)} \quad 0\} \cdot \mathbf{Q} \leq 0 \\
 g_3(\mathbf{Q}) &= \{0 \quad 0 \quad 1/M_3^{*(\pm)}\} \cdot \mathbf{Q} \leq 0
 \end{aligned} \tag{37}$$

Όπου $\mathbf{Q} = \{N \ M_2 \ M_3\}^T$ είναι το διάνυσμα των αλληλοεπιδρώντων εντατικών συνιστωσών της αντίστοιχης κρίσιμης διατομής και το πρόσημο (\pm) χρησιμοποιείται για να καταδείξει άνω και κάτω όρια.

Η προταθείσα τεχνική απόξευξης που συνοψίζεται στην Εξίσωση (37) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ορισθούν όλες οι πιθανές εσωτερικές ελευθερώσεις· ο αντίστοιχος πολλαπλασιαστής Lagrange λόγω της συνθήκης συμπληρωματικότητας του περιορισμού ανισότητας (βλ. Εξίσωση (24)) προστίθεται στην αντίστοιχη γενικευμένη ελαστική παραμόρφωση (βλ. Εξίσωση (19) με αναφορά στην Εξίσωση (23)) προκειμένου να αποδώσει την πραγματική ελαστική γενικευμένη παραμόρφωση λόγω της αντίστοιχης εσωτερικής ελευθέρωσης.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι, παρ' όλο που η ενσωμάτωση των εσωτερικών ελευθερώσεων/ασυνεχειών με χρήση περιορισμών ισότητας αντί ανισότητας θα διαφαινόταν ως καταλληλότερη επιλογή εξ αρχής, δεν ήταν η σωστή: συγκεκριμένα, η δοκιμή διαφόρων παραδειγμάτων ακολουθώντας αυτή την

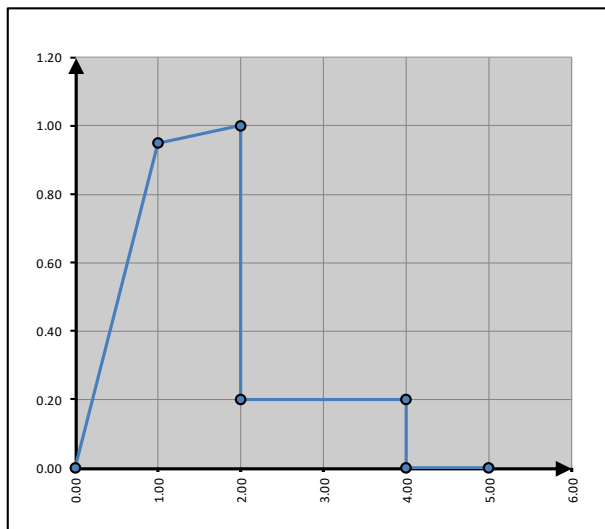
προσέγγιση κατέδειξε ότι ο πολλαπλασιαστής Lagrange ενός περιορισμού ισότητας προκύπτει πάντα ως αρνητική ποσότητα, ανεξαρτήτως της αναμενόμενης κατεύθυνσης της γενικευμένης ελαστικής παραμόρφωσης στην οποία αυτός αντιστοιχεί.

8 Πλαστική Κράτνση Υλικού

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται μια περίληψη των διεπουσών εξισώσεων που χρησιμοποιούνται στην κρατυνόμενη δομική πλαστικότητα καθώς και ένας πλήρης μαθηματικός φορμαλισμός για την ενσωμάτωσή τους στην μη-ολόνομη βήμα-προς-βήμα ανάλυση.

8.1 Τμηματικώς Γραμμικοί Καταστατικοί Νόμοι

Ακολουθώντας τις παραδοχές των πλαστικών αρθρώσεων, η μη-γραμμική συμπεριφορά υλικού προσομοιώνεται με έναν τμηματικώς γραμμικό καταστατικό νόμο υλικού. Σχηματικά, η κεντρική ιδέα παρουσιάζεται στο Σχήμα 18 ακολούθως, όπου απεικονίζεται ένα τυπικό διάγραμμα ροπής κάμψης ως συνάρτηση της αντίστοιχης στροφής σύμφωνα με τα οριζόμενα στον κανονισμό ATC-40 [177]:



Σχήμα 18: Καμπύλη φέρουσας ικανότητας μιας διατομής από ωπλισμένο σκυρόδεμα υπό ροπή κάμψης κατά ATC-40.

Ο αριθμητικές τιμές που καθορίζουν την ανωτέρω εξεικονιζόμενη τμηματικώς γραμμική καμπύλη καταγράφονται στον Πίνακα 2 ακολούθως, όπου οι τιμές ροπών και στροφών έχουν διαιρεθεί με την μέγιστη φέρουσα ικανότητα και στροφή διαρροής, αντιστοίχως:

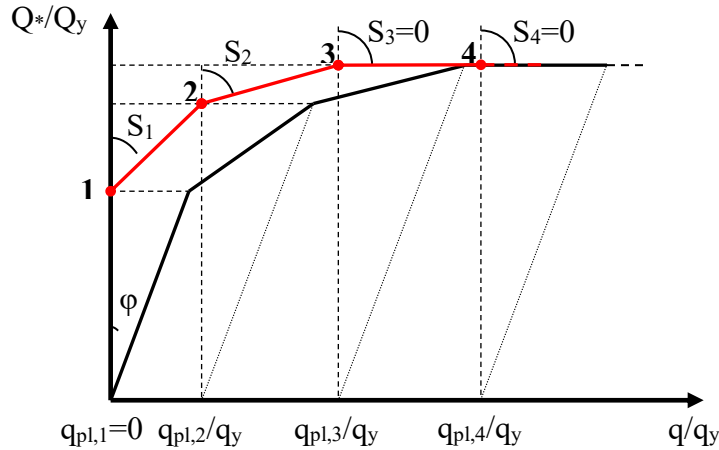
i	M	θ
0	0.000E+00	0.000E+00
1	9.500E-01	1.000E+00
2	1.000E+00	2.000E+00
3	2.000E-01	2.000E+00
4	2.000E-01	4.000E+00
5	0.000E+00	4.000E+00
6	0.000E+00	$+\infty$

Πίνακας 2: Αδιάστατες συντεταγμένες της καμπύλης φέρουσας ικανότητας κατά ATC-40.

Όπως επισημαίνεται συγκεκριμένα στον ATC-40 [177], από το σημείο 2 και πέρα (βλ. Πίνακα 2), «ξεκινά σημαντική υποβάθμιση της αντοχής· πέρα από αυτή την παραμόρφωση, δεν μπορεί πλέον να διασφαλιστεί η συνεχής αντοχή στις κυκλικά εναλλασσόμενες οριζόντιες δυνάμεις». Έτσι, η προτεινόμενη μέθοδος ανάλυσης θα αναπτυχθεί προκειμένου να μπορεί να τερματιστεί στο σημείο πέραν του οποίου ξεκινά η αποδόμηση του υλικού, και το οποίο αντιστοιχεί στο όριο πλαστικής κράτνσης.

8.2 Τοπικοί Συντελεστές Ευκαμψίας για Κράτυνση Υλικού

Προκειμένου να είναι δυνατή η διατύπωση των διεπουσών εξισώσεων της μεθόδου των δυνάμεων για την κρατυνόμενη πλαστικότητα, πρέπει πρώτα να εφαρμοσθεί η αρχή της διάκρισης/απόζευξης προκειμένου να διαχωριστούν οι ελαστικές από τις πλαστικές συνιστώσες των παραμορφώσεων. Σχηματικά, αυτή η διαδικασία απεικονίζεται στο Σχήμα 19 ακολούθως για ένα τυχαίο διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων με περιορισμένη πλαστική κράτυνση:



Σχήμα 19: Κανονικοποιημένη καμπύλη φέρουσας ικανότητας (τάσεις και αντίστοιχες πλαστικές παραμορφώσεις).

Όπου στο ανωτέρω Σχήμα 19, “ Q^* ” είναι μια αφηρημένη, τυχαία συνιστώσα έντασης (π.χ. ροπή κάμψης), “ Q_y ” είναι η αντίστοιχη αυτής (συμβατική) τιμή διαρροής, και “ q_y ” είναι η παραμόρφωση διαρροής που αντιστοιχεί στην “ Q_y ”. Η εξίσωση για τον προσδιορισμό της υπό αναφορά καμπύλης δίνεται ακολούθως:

$$\left(\frac{q_{pl,i}}{q_y} \right) = \left(\frac{q_{total,i}}{q_y} \right) - \left(\frac{Q_{*,i}}{Q_y} \right) \cdot \tan \varphi \quad (38)$$

Όπου στην (38), $i = \{1, 2, 3, 4\}$, $\tan \varphi = 1$ είναι η ελαστική ευκαμψία, και $q_{pl,i} \rightarrow +\infty$. Οι κανονικοποιημένοι συντελεστές ευκαμψίας “ S_i ” που αντιστοιχούν στην πλαστική κράτυνση μπορούν να υπολογισθούν εύκολα χρησιμοποιώντας την ακόλουθη εξίσωση:

$$S_i = \begin{cases} \left(\frac{q_{pl,i+1} - q_{pl,i}}{Q_{*,i+1} - Q_{*,i}} \right) \cdot \left(\frac{Q_y}{q_y} \right) & , \text{ if } Q_{*,i+1} - Q_{*,i} \neq 0 \\ 0 & , \text{ if } Q_{*,i+1} - Q_{*,i} = 0 \end{cases} \quad (39)$$

Όπου στην (39), $i = \{1, 2, 3, 4\}$: ας σημειωθεί ότι αυτοί οι συντελεστές είναι μηδενικοί μόνο στην περίπτωση ενός ιδεατά πλαστικού κλάδου του καταστατικού νόμου του υλικού, διότι σε αυτή την περίπτωση η μη-ολόνομη συμπεριφορά εξυπηρετείται από την συνθήκη συμβιβαστού των παραμορφώσεων (βλ. Εξίσωση (24)).

Οι φυσικοί συντελεστές ευκαμψίας των τοπικών πινάκων κράτυνσης της κατασκευής μπορούν να υπολογισθούν χρησιμοποιώντας την ακόλουθη εξίσωση, με αναφορά στην (39):

$$F_{S,i} = S_i \cdot \left(\frac{q_y}{Q_y} \right) \quad (40)$$

Όπου στην ανωτέρω Εξίσωση (40), “ q_y ” είναι η αντίστοιχη γενικευμένη παραμόρφωση διαρροής, και $i=\{1,2,3,4\}$ (βλ. Σχήμα 19). Αυτή η κατηγορία εξισώσεων ισχύει για κάθε καταστατικό νόμο, ασχέτως του αριθμού κορυφών/κλάδων που δυνητικώς περιέχει· στην περίπτωση επεξεργασίας πειραματικών δεδομένων, το μόνο προαπαιτούμενο είναι μια κατάλληλη γραμμικοποίηση της φυσικώς μετρούμενης (πειραματικής) καμπύλης.

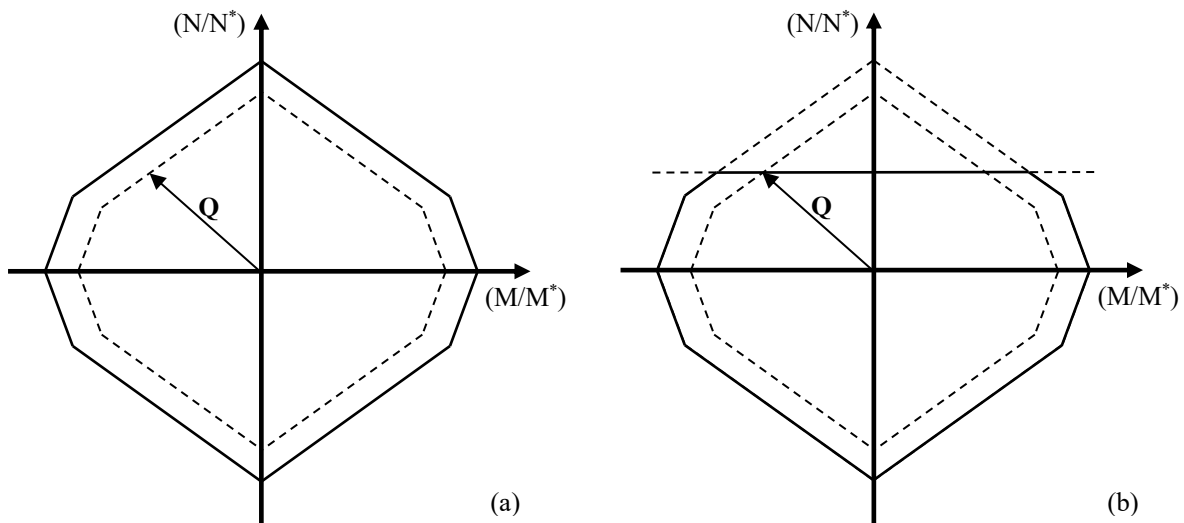
Προκειμένου να είναι δυνατή η σύγκριση με άλλα εμπορικά λογισμικά, απαιτήθηκε μια προσαρμογή των ανωτέρων εξισώσεων· για λόγους σύγκρισης με το SAP2000 [178], υιοθετήθηκαν οι ακόλουθες τιμές:

$$F_{S,N} = S \cdot \left(\frac{L}{E \cdot A} \right), \quad F_{S,M_2} = S \cdot \left(\frac{L}{6 \cdot E \cdot I_2} \right), \quad F_{S,M_3} = S \cdot \left(\frac{L}{6 \cdot E \cdot I_3} \right) \quad (41)$$

Όπου στην ανωτέρω Εξίσωση (41), “ S ” είναι ένας ενιαίος συντελεστής κράτνσης, σύμφωνα με την (39). Χρησιμοποιώντας την (40) ή την (41), μπορεί να υπολογισθεί το τοπικό μητρώο ευκαμψίας “ F_S ” για την περίπτωση της πλαστικής κράτνσης (βλ. Εξίσωση (25)).

8.3 Μαθηματική Διατύπωση της Κράτνσης Υλικού

Ο απλούστερος νόμος κράτνσης υλικού προτάθηκε από τον D.C. Drucker [179]. Για την προσέγγιση με πλαστικές αρθρώσεις, θεωρείται ότι κάθε σημείο της τμηματικής γραμμικής καμπύλης αντιπροσωπεύει μια ομοιόμορφα κατανεμημένη (ισότροπη) μεταβολή στον όγκο του αντίστοιχου κυρτού πολυτόπου διαρροής.

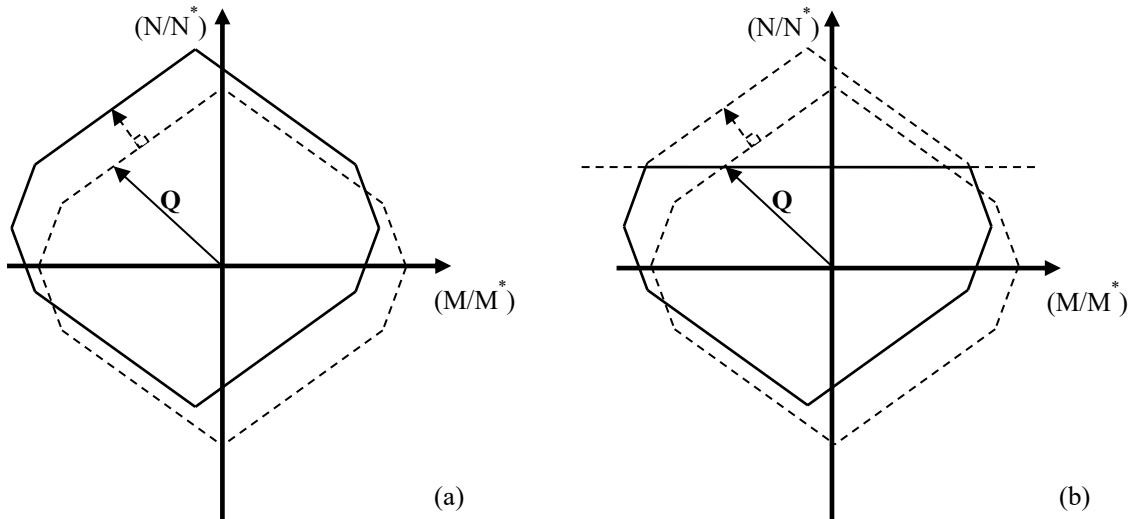


Σχήμα 20: (a) Ισότροπη κράτνση· (b) Ισότροπη κράτνση υποθέτοντας μια ιδεατώς πλαστική αξονική συνιστώσα έντασης.

Όπου στα ανωτέρω Σχήματα 20(a) και 20(b), το πολύτοπο που ορίζει το όριο διαρροής απεικονίζεται με διακεκομμένη γραμμή, και το πολύτοπο που ορίζει το τέλος του πρώτου κλάδου κράτνσης του τμηματικής γραμμικού καταστατικού νόμου του υλικού απεικονίζεται με συνεχή γραμμή.

Ένας άλλος απλός κανόνας κράτνσης υλικού που είναι και κατάλληλος για την μελέτη σεναρίων κυκλικώς εναλλασσόμενης (ανακυκλιζόμενης) φόρτισης, είναι αυτός κατά E. Melan [180] και W. Prager [181]. Αυτός ο τύπος κράτνσης είναι γραμμικός, επομένως είναι η απλούστερη μορφή κινηματικής κράτνσης. Κατά την συγκεκριμένη κινηματική κράτνση, ο όγκος του πολυτόπου διαρροής διατηρείται σταθερός, ενώ κινείται κατά μήκος μιας συγκεκριμένης κατεύθυνσης που ορίζεται ως κάθετη στο υπερεπίπεδο που ενεργοποιεί την διαρροή.

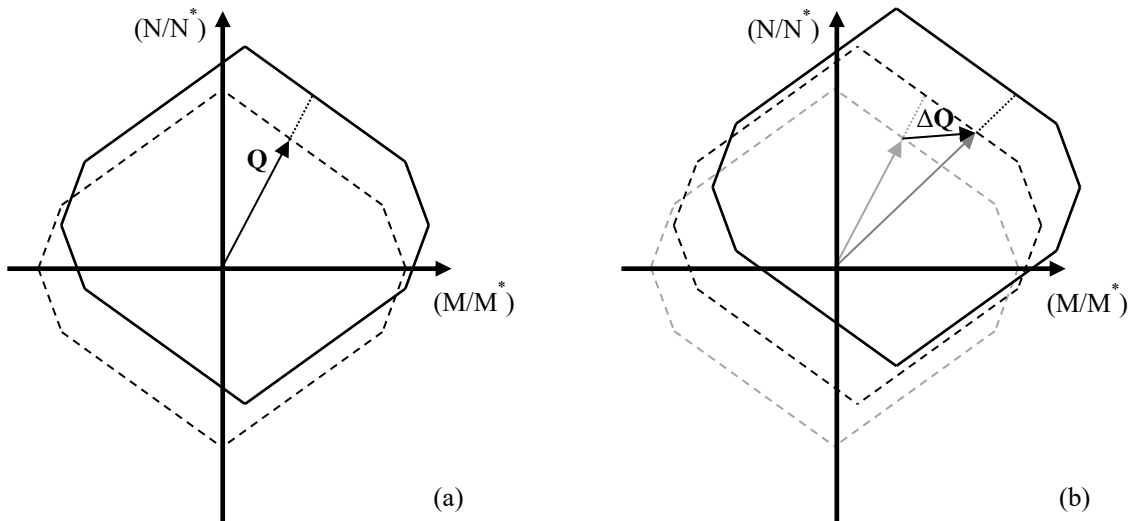
Σχηματικά, αυτή η μετάθεση απεικονίζεται στο Σχήμα 21 ακολούθως για ένα δισδιάστατο πρόβλημα, για δύο περιπτώσεις: μία κατά την οποία οι αξονικές δυνάμεις συμμετέχουν στην φάση κράτυνσης του υλικού (βλ. Σχήμα 21(a)), και μία όπου θεωρείται ότι η συνιστώσα αξονικής έντασης ακολουθεί ιδεατώως πλαστική συμπεριφορά (βλ. Σχήμα 21(b)):



Σχήμα 21: (a) Κινηματική κράτυνση κατά Prager· (b) Κράτυνση κατά Prager υποθέτοντας ιδεατώως πλαστική αξονική ένταση.

Ο καταλληλότερος για την μελέτη σεναρίων κυκλικά εναλλασσόμενης (ανακυκλιζόμενης) φόρτισης κανόνας κινηματικής κράτυνσης είναι αυτός κατά H. Ziegler [182]: αυτή είναι η πιο φυσική μορφή κράτυνσης υλικού διότι αποδίδει την πιο ακριβή κατανομή έντασης μιας κατασκευής, ιδίως στην περίπτωση που οι αξονικές δυνάμεις δεν είναι σταθερές κατά την διάρκεια μιας κυκλικά εναλλασσόμενης (ανακυκλιζόμενης) φόρτισης.

Σύμφωνα με τον κανόνα κράτυνσης κατά Ziegler, το διάνυσμα μετάθεσης του πολυτόπου διαρροής μιας διατομής έχει την ίδια κατεύθυνση με το διάνυσμα αλληλοεπιδρώντων εντατικών συνιστωσών της διατομής, όπως αυτό υπολογίζεται εντός του βήματος της ανάλυσης κατά το οποίο αγγίζει για πρώτη φορά το πολύτοπο της συνάρτησης διαρροής. Αυτό απεικονίζεται ακολούθως στο Σχήμα 22(a), για τον πρώτο κλάδο κράτυνσης ενός τμηματικώς γραμμικού καταστατικού νόμου υλικού· για δύο διαδοχικούς κλάδους κράτυνσης ενός τμηματικώς γραμμικού καταστατικού νόμου υλικού, η λειτουργία της διαδικασίας απεικονίζεται στο Σχήμα 22(b):



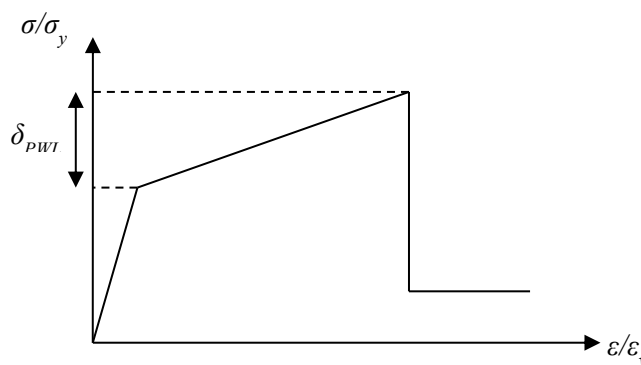
Σχήμα 22: (a) Κινηματική κράτνση κατά Ziegler. (b) Κράτνση κατά Ziegler για δύο διαδοχικούς κλάδους του καταστατικού νόμου του υλικού.

Από μια οπτική μαθηματική, αλλά και υπολογιστικής υλοποίησης, απαιτείται ένα σύνολο προ-επιλυμένων εξισώσεων προκειμένου να είναι εφικτή η εφαρμογή του μετασχηματισμού ή της μετάθεσης του πολυτόπου διαρροής λόγω ισότροπης ή κινηματικής κράτνσης, αντιστοίχως. Αυτές οι εξισώσεις διατυπώνονται και επιλύονται με την βοήθεια της αναλυτικής γεωμετρίας και της γραμμικής άλγεβρας (εφαρμοστέα επί διανυσμάτων/πινάκων).

Ο μετασχηματισμός του πολυτόπου διαρροής λόγω κράτνσης κατά Drucker σημαίνει ότι εφαρμόζεται σε αυτό μια ισότροπη διόγκωση. Επομένως, χρειάζεται μόνο να ενημερώνονται οι τιμές των σταθερών που περιγράφουν τα όρια της συνάρτησης διαρροής (με αναφορά στην Εξίσωση (36)):

$$c'_i = c_i + \delta_{PWL} \tag{42}$$

Όπου το “ δ_{PWL} ” απεικονίζεται ακολούθως στο Σχήμα 23, σε ένα τυπικό διάγραμμα ορθών τάσεων συναρτήσεως των αντίστοιχων παραμορφώσεων, όπου οι συντεταγμένες των αξόνων έχουν διαιρεθεί με τις αντίστοιχες αυτών τιμές διαρροής:



Σχήμα 23: Παράγοντας κλιμάκωσης τάσεων “ δ_{PWL} ” λόγω κράτνσης υλικού.

Ακολούθως περιγράφονται αναλυτικά οι μεταθέσεις του πολυτόπου διαρροής λόγω των κανόνων κινηματικής κράτνσης κατά Melan–Prager και Ziegler.

Έστω $\bar{\mathbf{n}}$ ένα μοναδιαίο διάνυσμα που δείχνει προς την κατεύθυνση της μετάθεσης του πολυτόπου διαρροής λόγω κινηματικής κράτνσης, και έστω $g_i(\bar{\mathbf{Q}})$ το σύνολο των εξισώσεων διαρροής που

περιγράφουν το πολύεδρο των περιορισμών, όπου $i = \{1, 2, 3, \dots, N_{eq}\}$ και \vec{Q} είναι ένα διάνυσμα που περιέχει τις αλληλοεπιδρώσες συνιστώσες έντασης. Αν, χρησιμοποιώντας τον τελεστή ανάδελα (*nabla*), συμβολίσουμε την βαθμίδα της συνάρτησης διαρροής ως προς τις εντάσεις “ $\vec{\nabla}g_i$ ”, αυτό το σύνολο εξισώσεων μπορεί να γραφεί με μαθηματικό συμβολισμό χρησιμοποιώντας την έννοια του εσωτερικού γινομένου (με αναφορά στην Εξίσωση (36)):

$$g_i(\vec{Q}) = (\vec{\nabla}g_i \cdot \vec{Q}) - c_{i,(k)} \leq 0 \quad (43)$$

Όπου στην (43), ο κάτω δείκτης “*k*” αντιστοιχεί στο βήμα της ανάλυσης εντός του οποίου λαμβάνει χώρα η μετάθεση. Χρησιμοποιώντας την ανωτέρω συμβολική/σημειογραφία, οι εξισώσεις του μετατοπισμένου πολυτόπου διαρροής λόγω κράτνσης υλικού μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$g'_i(\vec{Q}) = g_i(\vec{Q}) - \delta_{PWL} \cdot (\vec{\nabla}g_i \cdot \vec{n}) \quad (44)$$

Για την περίπτωση κράτνσης κατά Melan–Prager, το κατευθυντήριο διάνυσμα της μετατόπισης “ \vec{n} ” είναι παράλληλο στην βαθμίδα του ενεργοποιούμενου υπερεπίπεδου της συνάρτησης διαρροής “ $\vec{\nabla}g_a$ ” (όπου ο κάτω δείκτης “*a*” αντιστοιχεί στο ενεργοποιούμενο υπερεπίπεδο), ενώ για την περίπτωση της κράτνσης κατά Ziegler είναι παράλληλο στο διάνυσμα αλληλοεπιδρώντων συνιστωσών εντάσεων “ \vec{Q}_h ” που εγγίζει το πολύτοπο διαρροής την χρονική στιγμή που πρόκειται να ξεκινήσει η νέα κρατυνόμενη πλαστική ροή. Στην ουσία, το “ \vec{n} ” ορίζεται για κάθε κανόνα κράτνσης μέσω της κανονικοποίησης ενός διανύσματος αναφοράς «κράτνσης»: συνεπώς, η Εξίσωση (44) μπορεί να επαναδιατυπωθεί ως εξής:

$$g'_i(\vec{Q}) = \begin{cases} g_i(\vec{Q}) - \frac{\delta_{PWL}}{\|\vec{\nabla}g_a\|} \cdot (\vec{\nabla}g_i \cdot \vec{\nabla}g_a) & \text{(Melan–Prager)} \\ g_i(\vec{Q}) - \frac{\delta_{PWL}}{\|\vec{Q}_h\|} \cdot (\vec{\nabla}g_i \cdot \vec{Q}_h) & \text{(Ziegler)} \end{cases} \quad (45)$$

Δεδομένου ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι μια μονόμετρη ποσότητα, είναι πρακτικό να εφαρμοσθεί η μετάθεση του πολυτόπου απευθείας στις σταθερές “ $c_{i,(k)}$ ” των ανισώσεων: συνεπώς, συνδυάζοντας τις Εξισώσεις (42) και (45) προκειμένου να έχουμε ένα πλήρες σύνολο μαθηματικών εκφράσεων για την κράτνση, έχουμε:

$$c'_{i,(k)} = \begin{cases} c_{i,(k)} + \delta_{PWL} & \text{(Drucker)} \\ c_{i,(k)} + \frac{\delta_{PWL}}{\|\vec{\nabla}g_a\|} \cdot (\vec{\nabla}g_i \cdot \vec{\nabla}g_a) & \text{(Melan–Prager)} \\ c_{i,(k)} + \frac{\delta_{PWL}}{\|\vec{Q}_h\|} \cdot (\vec{\nabla}g_i \cdot \vec{Q}_h) & \text{(Ziegler)} \end{cases} \quad (46)$$

Η ανωτέρω διαδικασία εφαρμόζεται σε όλα τα υπερεπίπεδα $j = \{1, 2, \dots, 2^{N_{isc}(i)}\}$ κάθε εξίσωσης “*i*” της συνάρτησης διαρροής.

8.4 Μία Συνεπής ως προς τους Νόμους της Φυσικής Υλοποίηση της Κράτνωσης Υλικού

Το αξίωμα/πρόταση του Drucker διασφαλίζει την ensures το μη-αναστρέψιμο των διεργασιών πλαστικοποίησης ενός υλικού ([183],[184],[185])· έχει την ακόλουθη μαθηματική μορφή, σε όρους στοιχειωδών μεταβολών τάσης και πλαστικής παραμόρφωσης:

$$\Delta W_{pl} \propto \Delta \sigma \cdot \Delta \epsilon_{pl} \geq 0 \tag{47}$$

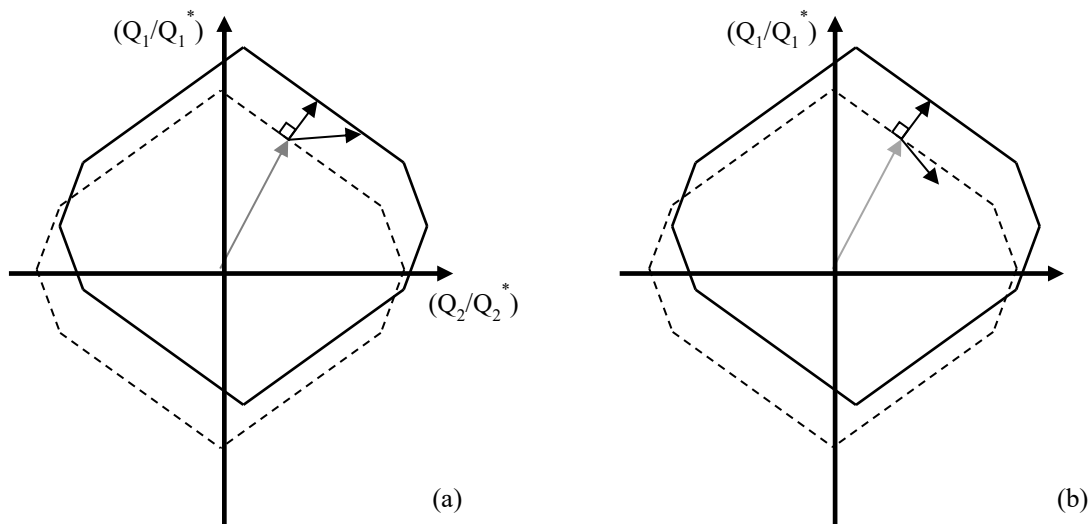
Για την περίπτωση της σημειακά συγκεντρωμένης πλαστικότητας (πλαστικές αρθρώσεις μηδενικού μήκους/εύρους), η Εξίσωση (47) μπορεί να επαναδιατυπωθεί σε όρους στοιχειωδών μεταβολών δυνάμεων/ροπών και πλαστικών παραμορφώσεων/στροφών.

Προκειμένου να επαναδιατυπωθεί το αξίωμα/πρόταση χρησιμοποιώντας μόνο ποσότητες γενικευμένων δυνάμεων, χρησιμοποιείται το αξίωμα μεγιστοποίησης του πλαστικού έργου· περαιτέρω, μια σημαντική απαίτηση είναι να διατυπωθεί μια αριθμητικώς αποτελεσματική μαθηματική μορφή που να μπορεί να αποδώσει τα επιθυμητά αποτελέσματα εντός του πλαισίου θεώρησης της πλαστικότητας ως ανεξάρτητης του ρυθμού επιβολής φορτίσεων:

$$\underbrace{\bar{\nabla} g_a(\mathbf{Q})}_{Stress} \cdot \underbrace{\{S \cdot \Delta \bar{\mathbf{Q}}\}}_{Strain} \geq 0 \tag{48}$$

Όπου “ $\bar{\nabla} g_a(\mathbf{Q})$ ” είναι η βαθμίδα του υπερεπιπέδου του πολυτόπου διαρροής που ενεργοποίησε την κρατυνόμενη πλαστική ροή και υπολογίζεται με βάση την Εξίσωση (36), και το “ S ” υπολογίζεται με την βοήθεια της Εξίσωσης (39)· δεδομένου ότι η βαθμίδα της συνάρτησης διαρροής δείχνει κατά την κατεύθυνση της εξέλιξης των στοιχειωδών μεταβολών των τοπικών πλαστικών παραμορφώσεων/γενικευμένων μετατοπίσεων, και από την στιγμή που η κρατυνόμενη πλαστική ροή ορίζει ότι οι στοιχειώδεις μεταβολές των συσχετισμένων τοπικών πλαστικών παραμορφώσεων/γενικευμένων μετατοπίσεων πρέπει να είναι ανάλογες προς τις στοιχειώδεις μεταβολές των αντίστοιχων εντάσεων/γενικευμένων δυνάμεων, τότε όλα τα εσωτερικά υπό-γινόμενα θα πρέπει να είναι θετικά, προκειμένου να είναι σε συμφωνία με το ενεργό υπερεπίπεδο του πολυτόπου διαρροής.

Σχηματικά, η σημασία της Εξίσωσης (48) παρουσιάζεται ακολούθως στο Σχήμα 24, για την απλή περίπτωση δύο αλληλοεπιδρώντων εντατικών συνιστωσών $\{Q_1, Q_2\}$ υπό κινηματική κράτνωση:



Σχήμα 24: Αξίωμα του Drucker: (a) ικανοποιείται; (b) παραβιάζεται.

8.5 Μαθηματική Διατύπωση της Τοπικής Αποφόρτισης στην Κρατυνόμενη Πλαστική Ροή

Το φαινόμενο της τοπικής αποφόρτισης κατά την διάρκεια μιας κρατυνόμενης πλαστικής ροής σχετίζεται με την παραβίαση του αξιώματος του Drucker – βλ. Εξισώσεις (47) και (48). Σε μια τέτοια περίπτωση, απαιτείται μια ανάκληση του πολυτόπου διαρροής, ώστε να περιγραφεί η διακοπή της κρατυνόμενης πλαστικής ροής· αυτό γίνεται ορίζοντας νέα, κατάλληλα όρια για την συνθήκη στατικώς αποδεκτών κατανομών έντασης. Για τον σκοπό αυτό, χρησιμοποιείται μια παραλλαγή της Εξίσωσης (46) για όλες τις μορφές κράτυνσης, αντιστοίχως:

$$c'_{i,(k)} = \begin{cases} \delta_{UNL} & \text{(Drucker)} \\ c_{i,(k)} - \frac{\delta_{UNL}}{\|\vec{\nabla}g_a\|} \cdot (\vec{\nabla}g_i \cdot \vec{\nabla}g_a) & \text{(Melan-Prager)} \\ c_{i,(k)} - \frac{\delta_{UNL}}{\|\vec{Q}_h\|} \cdot (\vec{\nabla}g_i \cdot \vec{Q}_h) & \text{(Ziegler)} \end{cases} \quad (49)$$

Όπου:

$$\delta_{UNL} = \begin{cases} (\vec{\nabla}g_\alpha \cdot \vec{Q}_{(k-1)}) & \text{(Drucker)} \\ \frac{c_{\alpha,(k)} - (\vec{\nabla}g_\alpha \cdot \vec{Q}_{(k-1)})}{\frac{1}{\|\vec{\nabla}g_a\|} \cdot (\vec{\nabla}g_\alpha \cdot \vec{\nabla}g_a)} & \text{(Melan-Prager)} \\ \frac{c_{\alpha,(k)} - (\vec{\nabla}g_\alpha \cdot \vec{Q}_{(k-1)})}{\frac{1}{\|\vec{Q}_h\|} \cdot (\vec{\nabla}g_\alpha \cdot \vec{Q}_h)} & \text{(Ziegler)} \end{cases} \quad (50)$$

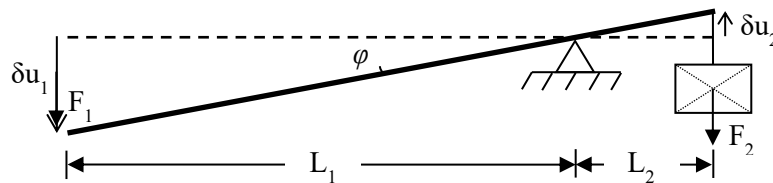
Όπου στις Εξισώσεις (49) και (50), ο κάτω δείκτης “α” αντιστοιχεί στο υπό αναφορά υπερεπίπεδο της εξίσωσης του πολυτόπου διαρροής που είχε ενεργοποιήσει την κρατυνόμενη πλαστική ροή, η οποία τώρα παραβιάζει το αξίωμα του Drucker και πρέπει να απενεργοποιηθεί.

9 Στατική-Κινηματική Δυσαικτικότητα

Σε αυτό το κεφάλαιο, παρουσιάζονται οι θεμελιώδεις αρχές της φυσικής / μηχανικής που συσχετίζουν το έργο και την μετατόπιση (του σημείου εφαρμογής) των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται σε μια παραμορφώσιμη συνεχή κατασκευή με το έργο και τις παραμορφώσεις των εσωτερικά της αυτής συνεχούς κατασκευής αναπτυσσόμενων εντάσεων.

9.1 Αρχή Λειτουργίας των Μοχλών

Από μια ιστορική οπτική [186], η πρώτη διατύπωση της αρχής των δυνατών έργων έγινε από τον Αρχιμήδη τον Συρακούσιο για το στοιχειώδες μηχανικό σύστημα ενός ζυγού ροπών (μοχλού), γνωστή και ως «νόμος των μοχλών» ή «αρχή λειτουργίας των μοχλών» (βλ. και Σχήμα 25 ακολούθως).



Σχήμα 25: Αρχή λειτουργίας μοχλών.

Το έργο που απαιτείται ώστε να μετακινηθεί προς τα άνω η μάζα που αντιστοιχεί στην δύναμη βαρύτητας “ F_2 ” κατά μια στοιχειώδη μετατόπιση “ δu_2 ”, είναι ίσο προς το έργο που απαιτείται για να μετακινηθεί προς τα κάτω ο μοχλός από την άλλη πλευρά του ζυγού. Λαμβάνοντας υπ’ όψιν ότι οι ανάλογες των μαζών $\{F_1, F_2\}$ δυνάμεις εφαρμόζονται με έναν απειροστά μικρό και σταθερό ως προς τον χρόνο “ t ” ρυθμό, και ότι οι προκύπτουσες στοιχειώδεις μετατοπίσεις $\{\delta u_1, \delta u_2\}$ είναι τόσο μικρές ώστε για κάθε στοιχειωδώς μικρή μεταβολή του χρόνου “ δt ” το σύστημα να βρίσκεται σε ισορροπία, τότε, το αξίωμα διατήρησης της ενέργειας αποδίδει την απαιτούμενη για την ανύψωση δύναμη “ F_1 ”:

$$\Delta W_1 = \Delta W_2 \rightarrow F_1 \cdot \delta u_1 = F_2 \cdot \delta u_2 \rightarrow F_1 = F_2 \cdot (\delta u_2 / \delta u_1) \quad (51)$$

Όπου η Εξίσωση (51) ισχύει όταν ισχύουν $(\delta F_1 / \delta t) = 0$, $(\delta F_2 / \delta t) = 0$, $(\delta u_1 / \delta t) \rightarrow 0$, και $(\delta u_2 / \delta t) \rightarrow 0$. Θεωρώντας την δοκό ως επαρκώς δύσκαμπτη ώστε να είναι πρακτικώς μη-παραμορφώσιμη, οι δύο παραμορφώσεις $\{\delta u_1, \delta u_2\}$ συσχετίζονται μέσω της εφαπτομένης της γωνίας « ϕ » (βλ. Σχήμα 25):

$$\tan \phi = (\delta u_1 / L_1) = (\delta u_2 / L_2) \rightarrow (\delta u_2 / \delta u_1) = (L_2 / L_1) \quad (52)$$

Συνδυάζοντας τις Εξισώσεις (51) και (52), βρίσκεται εύκολα ότι η απαιτούμενη δύναμη ανύψωσης είναι ανάλογη του λόγου των δύο μοχλοβραχιόνων $\{L_1, L_2\}$ της δοκού:

$$F_1 = F_2 \cdot (L_2 / L_1) \quad (53)$$

9.2 Αρχή των Δυνατών Έργων

Μια καταστατική σχέση μεταξύ δυνάμεων και μετατοπίσεων, με παρόμοια φυσική σημασία με αυτή που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα, μπορεί να διατυπωθεί και για τις παραμορφώσιμες κατασκευές. Το έργο των εξωτερικώς ασκούμενων φορτίων σε ένα στατικό/δομικό σύστημα ισούται με την δυναμική ενέργεια που αποθηκεύεται εντός της μάζας του συστήματος με την μορφή ενέργειας παραμόρφωσης· με αναφορά στις δεσπόζουσες εξισώσεις του Κεφαλαίου 4, η προαναφερθείσα ισορροπία ενεργειών εκφράζεται σε συμβολική μορφή ως ακολούθως:

$$\Delta W_{\text{external}} = \Delta W_{\text{internal}} \Rightarrow \Delta \mathbf{p}_0^T \cdot \Delta \mathbf{u}_s = \frac{1}{2} \cdot \Delta \mathbf{Q}_s^T \cdot \Delta \mathbf{q}_s \quad (54)$$

Η Εξίσωση (54) μπορεί να αναπτυχθεί περαιτέρω με την βοήθεια των Εξισώσεων (16), (19) και (21), όπου στην (19) οι συνιστώσες των στοιχειωδών μεταβολών των πλαστικών παραμορφώσεων έχουν παραλειφθεί λόγω της υπόθεσης περί αμιγώς ελαστικού υλικού:

$$\Delta \mathbf{p}_0^T \cdot \Delta \mathbf{u}_s = \frac{1}{2} \cdot \Delta \mathbf{p}_0^T \cdot [\mathbf{B}_0^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{B}_0] \cdot \Delta \mathbf{p}_0 + \Delta \mathbf{p}_0^T \cdot [\mathbf{B}_0^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{B}_1] \cdot \Delta \mathbf{p}_1 + \frac{1}{2} \cdot \Delta \mathbf{p}_1^T \cdot [\mathbf{B}_1^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{B}_1] \cdot \Delta \mathbf{p}_1 \quad (55)$$

Θεωρώντας ότι οι στοιχειώδεις μεταβολές των εξωτερικώς ασκούμενων φορτίων “ $\Delta \mathbf{p}_0$ ” είναι σταθερές και σχεδόν μηδενικές συν τω χρόνω, η παράγωγος της ανωτέρω εξίσωσης ως προς τις μεταβολές των φορτίων αποδίδει την λύση για την ελάχιστη δυναμική ενέργεια:

$$\Delta \mathbf{u}_s = [\mathbf{B}_0^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{B}_0] \cdot \Delta \mathbf{p}_0 + [\mathbf{B}_0^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{B}_1] \cdot \Delta \mathbf{p}_1 \quad (56)$$

Με την βοήθεια των Εξισώσεων (16), (19) και (21), η ανωτέρω εξίσωση λαμβάνει την συνεπτυγμένη μορφή της, που είναι η Εξίσωση (26).

Η ανωτέρω διατυπώθηκε για πρώτη φορά από τον James Clerk–Maxwell, για την επίλυση επίπεδων δικτυωμάτων από γραμμικώς ελαστικό υλικό, με την μορφή της εξίσωσης συμβιβαστού των παραμορφώσεων (βλ. *Εξίσωση (18)*). σε αυτή την διαφορική τους μορφή, μπορεί να δειχθεί ότι αυτές οι εξισώσεις ισχύουν για κάθε τύπο κατασκευής και υλικό, ελαστικό ή πλαστικό.

10 Έλεγχος Φορτίου & Μετατόπισης

Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται μια σύντομη παρουσίαση των τεχνικών άσκησης ελέγχου στην εφαρμογή εξωτερικών φορτίων και ανάπτυξης επικόμβιων γενικευμένων μετατοπίσεων, τεχνικές που είναι απαραίτητες για την εντός των πλαισίων της παρούσας διατριβής αναπτυχθείσας αριθμητικής μεθόδου.

10.1 Πρόβλεψη των Κρίσιμων Συντελεστών Κλιμάκωσης Φορτίου

Υποθέτοντας αφαιρετικά ότι είναι διαθέσιμη μια εφικτή κατεύθυνση για την λύση του προβλήματος της βήμα-προς-βήμα ανάλυσης, χρειάζεται μια κατάλληλη κλιμάκωση του διανύσματος της λύσης προκειμένου να ικανοποιείται επακριβώς με την μορφή ισότητας τουλάχιστον ένας νέος περιορισμός στο πέρας κάθε βήματος της διαδικασίας.

Χρησιμοποιώντας την βαθμίδα της Εξίσωσης (36), η συνθήκη στατικώς αποδεκτών κατανομών εντάσεως μπορεί να επαναδιατυπωθεί σε επίπεδο κρίσιμης διατομής με την μορφή ενός εσωτερικού γινομένου:

$$\vec{\nabla}g_i \cdot (\vec{Q}_{(k-1)} + \Delta\vec{Q}_{(k)}) - c_{i,(k)} \leq 0 \Rightarrow \vec{\nabla}g_i \cdot (\vec{Q}_{(k-1)} + \Delta\gamma \cdot \Delta\vec{Q}_{(k)}) = c_{i,(k)} \quad (57)$$

Όπου στην (57) το “ i ” αντιστοιχεί στον δείκτη της εξίσωσης της συνάρτησης διαρροής (βλ. Εξίσωση (36)), το “ k ” αντιστοιχεί στον δείκτη του τρέχοντος βήματος ανάλυσης, και “ $\Delta\gamma$ ” είναι ένας συντελεστής κλιμάκωσης (πολλαπλασιαστής).

Από την (57), ο κρίσιμος συντελεστής κλιμάκωσης φορτίου για το πολύτοπο διαρροής της κάθε κρίσιμης διατομής μπορεί να οριστεί ως η ελάχιστη θετική μονόμετρη ποσότητα επί την οποία πρέπει να πολλαπλασιαστεί το διάνυσμα μεταβολής “ $\Delta\vec{Q}_{(k)}$ ” των εντατικών μεγεθών του τρέχοντος βήματος προκειμένου να ικανοποιεί την (57) με την μορφή ισότητας. Συμβολικά, αυτό εκφράζεται ως:

$$\Delta\gamma_{\min} = \min \{ \Delta\gamma_i \} \quad , \quad i = \{1, 2, \dots, N_{eq}\} \quad (58)$$

Όπου:

$$\Delta\gamma_i = \min \left\{ \Delta\gamma_j = \frac{c_{j(i),(k)} - (\vec{\nabla}g_{j(i)} \cdot \vec{Q}_{(k-1)})}{(\vec{\nabla}g_{j(i)} \cdot \Delta\vec{Q}_{(k)})} : \Delta\gamma_j > 0 \right\} \quad , \quad j = \{1, \dots, 2^{N_{isc}(i)}\} \quad (59)$$

Όπου στην (59), όλες οι ποσότητες ορίζονται με αναφορά στον ορισμό μιας γενικευμένης συνάρτησης διαρροής σύμφωνα με την εξίσωση (36).

Δεδομένου ότι οι Εξισώσεις (58) και (59) ισχύουν για μία κρίσιμη διατομή, ο συνολικά ελάχιστος συντελεστής κλιμάκωσης για ολόκληρη την κατασκευή προκύπτει ως η ελάχιστη τιμή μεταξύ των ελάχιστων συντελεστών κλιμάκωσης κάθε μίας εκ των κρίσιμων διατομών της κατασκευής.

Για λόγους αριθμητικής αποτελεσματικότητας (π.χ. αποφυγή πρακτικώς μηδενικών βημάτων κατά την εξέλιξη μιας βήμα-προς-βήμα αριθμητικής διαδικασίας φόρτισης), ο περιορισμός ανισότητας που περιέχεται στην Εξίσωση (59) μπορεί να αντικατασταθεί με μια λιγότερο αυστηρή συνθήκη, π.χ. “ $\Delta\gamma_i > \rho$ ”, όπου το “ ρ ” είναι ένας θετικός, αλλά μη-μηδενικής τιμής αριθμός (π.χ. $\rho = 0.001$).

10.2 Έλεγχος Παραμορφώσεων

Συχνά απαιτείται ο εκ προοιμίου ορισμός ενός μεγίστου ορίου για μια μετατόπιση αναφοράς της υπό ανάλυση κατασκευής (π.χ. μέγιστη επιτρεπτή μετατόπιση οροφής στην στατική ανάλυση ανελαστικών

φορέων – *pushover analysis*): προς αυτή την κατεύθυνση, ο προαναφερθείς συντελεστής κλιμάκωσης στις Εξισώσεις (58) και (59) μπορεί να τροποποιηθεί περαιτέρω:

$$\Delta\gamma_{\min} \leq \frac{u_{\max} - u_{(k-1)}}{\Delta u_{(k)}} \quad (60)$$

Όπου στην (60), το “ u ” αντιστοιχεί στην μετατόπιση ενός κόμβου αναφοράς της κατασκευής, το “ k ” αντιπροσωπεύει το τρέχον βήμα της ανελαστικής ανάλυσης, και η μεταβολή της μετατόπισης αναφοράς “ $\Delta u_{(k)}$ ” υπολογίζεται από την στατική-κινηματική δυαδικότητα (βλ. Εξίσωση (26)), με την βοήθεια των (16),(19),(21),(23), και (25).

11 Μια Μέθοδος Δυνάμεων για Ανάλυση με Όρους 1^{ης} Τάξεως

11.1 Διατύπωση του Προβλήματος

Για την αποτελεσματική ανίχνευση όλων των συμβάντων πλαστικοποίησης κατά μήκος ενός οποιουδήποτε δεδομένου δρόμου επιβολής εξωτερικών φορτίων/μετατοπίσεων, μπορεί να διατυπωθεί μια διαδικασία «βήμα-προς-βήμα». Επομένως, του μαθηματικό πρόγραμμα θα παραχθεί για ένα οποιοδήποτε επαναλαμβανόμενο (θαμιστικό) βήμα “ k ”, όπου $k \in \{1,2,3,\dots\}$.

Σύμφωνα με τον ορισμό της συνάρτησης διαρροής, μια κατανομή εντάσεων είναι στατικώς αποδεκτή μόνο αν ικανοποιεί την (36) σε κάθε βήμα της ανάλυσης. Επομένως, το αντίστοιχο μέρος της (24) μπορεί να ξαναγραφεί ως ακολούθως:

$$\mathbf{Y}_* = \mathbf{c}_{(k)} - \nabla \mathbf{g}^T \cdot \mathbf{Q}_{(k)} = \mathbf{c}_{(k)} - \nabla \mathbf{g}^T \cdot (\mathbf{Q}_{(k-1)} + \Delta \mathbf{Q}_{(k)}) = \mathbf{c}_{(k)} - \nabla \mathbf{g}^T \cdot \mathbf{Q}_{(k-1)} - \nabla \mathbf{g}^T \cdot \Delta \mathbf{Q}_{(k)} \geq \mathbf{0} \quad (61)$$

Συνδυάζοντας τις Εξισώσεις (16), (36), και αντικαθιστώντας στην (61), το πλαστικό δυναμικό “ \mathbf{Y}_* ” μπορεί να εκφραστεί αποκλειστικά ως συνάρτηση των εξωτερικών φορτίων και των υπέρ-στατικών μεγεθών. Αν οι συντελεστές αυτής της σύνθετης συνάρτησης συμπυκνωθούν σε ένα μητρώο πρόσπτωσης “ $\bar{\mathbf{N}}$ ” [49], μπορεί να διατυπωθεί ένα σύνολο γραμμικών περιορισμών σε μορφή ανισοτήτων:

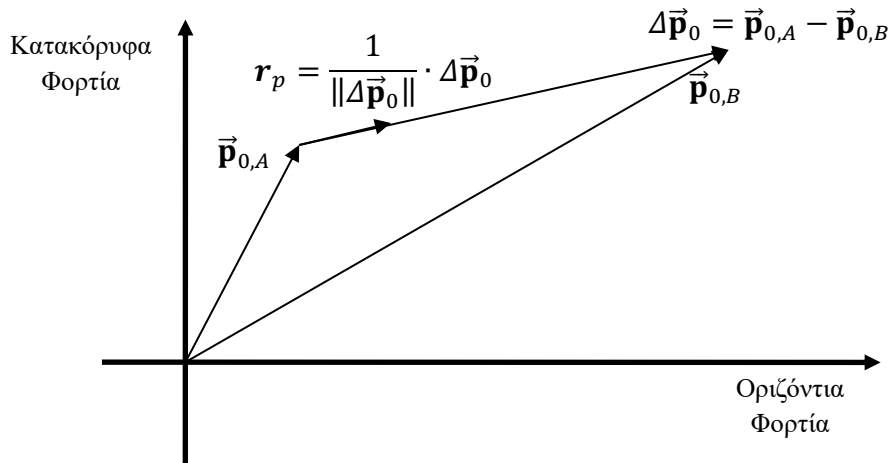
$$\mathbf{Y}_* = \mathbf{c}_{(k)} - \bar{\mathbf{N}}^T \cdot \mathbf{Q}_{(k-1)} - (\bar{\mathbf{N}}^T \cdot \mathbf{B}_0) \cdot \Delta \mathbf{p}_{0,(k)} - (\bar{\mathbf{N}}^T \cdot \mathbf{B}_1) \cdot \Delta \mathbf{p}_{1,(k)} \geq \mathbf{0} \quad (62)$$

Αντικαθιστώντας την Εξίσωση (16) στην (21), έπειτα τροποποιώντας την (23) με χρήση της (36), και την (25) με χρήση της (16), έπειτα αντικαθιστώντας και τις τρεις εξισώσεις στην (19) και μετά στην (18), λαμβάνουμε:

$$[\mathbf{B}_1^T \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{F}_S) \cdot \mathbf{B}_0] \cdot \Delta \mathbf{p}_{0,(k)} + [\mathbf{B}_1^T \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{F}_S) \cdot \mathbf{B}_1] \cdot \Delta \mathbf{p}_{1,(k)} + (\mathbf{B}_1^T \cdot \bar{\mathbf{N}}) \cdot \Delta \lambda_{(k)} = \mathbf{0} \quad (63)$$

Όπου στην (63), ο πίνακας “ \mathbf{F} ” υπολογίζεται με βάση την (22), και ο “ \mathbf{F}_S ” με βάση την (40) ή την (41) (με αναφορά στην (39)), αντιστοίχως.

Εντός των πλαισίων της παρούσας διατριβής, όλοι οι τύποι ανάλυσης «βήμα-προς-βήμα» που υλοποιήθηκαν (προδιαγεγραμμένοι δρόμοι φορτίσεως, στατική ανελαστική ανάλυση, ανακυκλιζόμενη φόρτιση) ορίστηκαν ως διαδικασίες ελεγχόμενες με βάση το φορτίο. Επομένως, το διάνυσμα “ $\Delta \mathbf{p}_0$ ” στις Εξισώσεις (62) και (63) είναι μια γνωστή παράμετρος· ως τέτοια, μπορεί να αντικατασταθεί από το αντίστοιχο καλώς ορισμένο διάνυσμα σταθερών “ \mathbf{r}_p ”, το οποίο παριστάνεται αφαιρετικά στο Σχήμα 26 ακολούθως, για την περίπτωση ενός δρόμου φόρτισης με έναν μόνο κλάδο ($\mathbf{p}_{0,A} \rightarrow \mathbf{p}_{0,B}$):



Σχήμα 26: Προδιαγεγραμμένοι δρόμοι φορτίσεως.

Οι εξισώσεις (63), (62), και (24), μπορούν να θεωρηθούν ως οι συνθήκες Karush–Kuhn–Tucker (KKT) ενός προβλήματος βελτιστοποίησης του οποίου οι πρωτεύουσες μεταβλητές είναι τα υπέρ-στατικά μεγέθη (δυνάμεις/ροπές). Συγκεκριμένα, η Εξίσωση (63) είναι η βαθμίδα μιας συνάρτησης Lagrange. Ο τελευταίος από τους τρεις προσθετούς όρους στην (63) είναι η βαθμίδα μιας συνάρτησης περιορισμών ανισότητας που ορίζεται από την Εξίσωση (62). Η Εξίσωση (24) είναι η συνθήκη γραμμικής συμπληρωματικότητας. Συνεπώς, μπορεί να γραφεί το ακόλουθο μαθηματικό πρόγραμμα (με αναφορά στο Σχήμα 26):

Ελαχιστοποίηση της συνάρτησης:

$$f(\Delta \mathbf{p}_1) = \frac{1}{2} \cdot \Delta \mathbf{p}_{1,(k)}^T \cdot [\mathbf{B}_1^T \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{F}_S) \cdot \mathbf{B}_1] \cdot \Delta \mathbf{p}_{1,(k)} + \mathbf{r}_p^T \cdot [\mathbf{B}_0^T \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{F}_S) \cdot \mathbf{B}_1] \cdot \Delta \mathbf{p}_{1,(k)} \quad (64)$$

Υποκείμενης στους περιορισμούς:

$$(\bar{\mathbf{N}}^T \cdot \mathbf{B}_1) \cdot \Delta \mathbf{p}_{1,(k)} \leq \mathbf{c}_{(k)} - \bar{\mathbf{N}}^T \cdot \mathbf{Q}_{(k-1)} - \bar{\mathbf{N}}^T \cdot \mathbf{r}_p$$

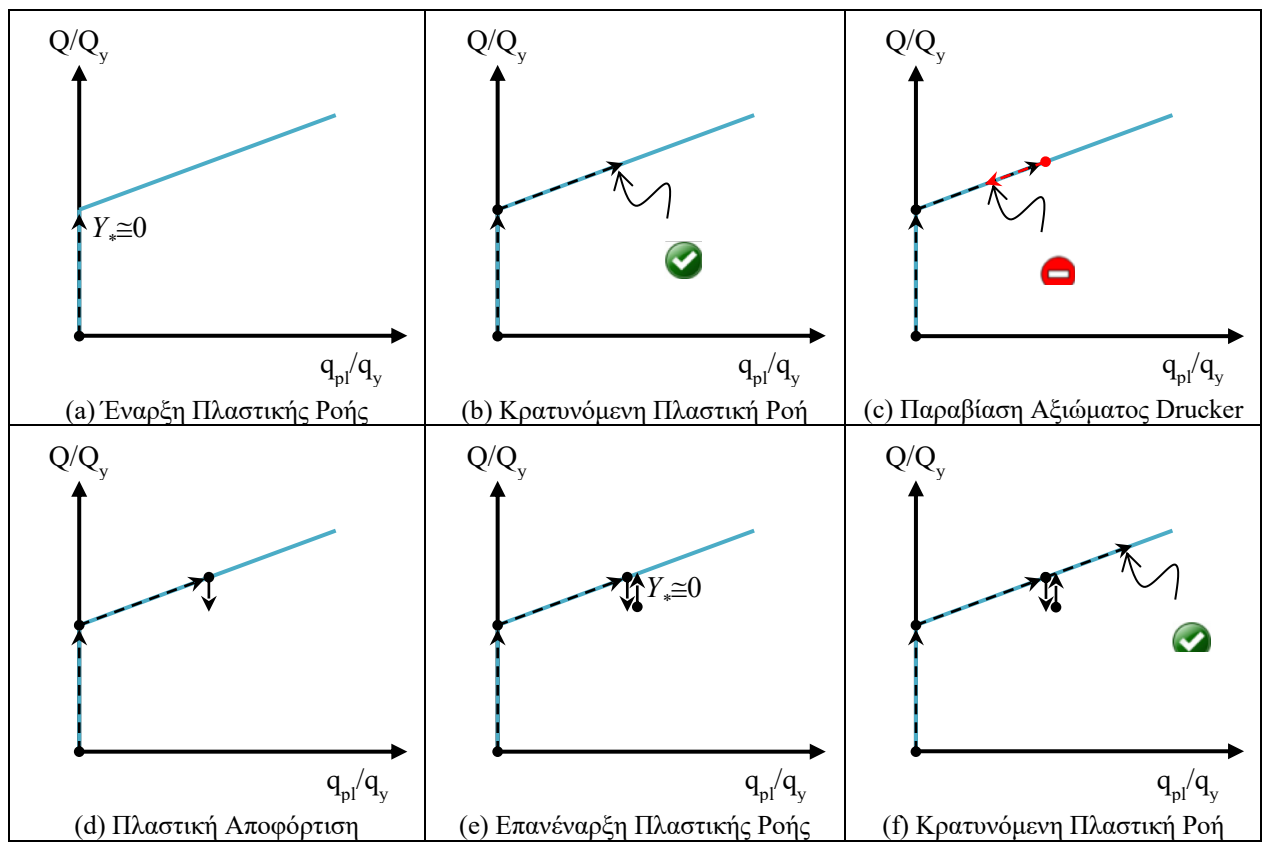
Δεδομένου ότι το ανωτέρω Τετραγωνικό Πρόγραμμα (QP) είναι αυστηρά κυρτό, η λύση του όχι απλώς υπάρχει, αλλά είναι και μοναδική. Το πρόβλημα (64) λύνεται με μια βήμα-προς-βήμα επαναληπτική (θαμιστική) διαδικασία· ακολουθεί η αναλυτική παρουσίαση της επινοηθείσας αριθμητικής διαδικασίας στην επόμενη ενότητα.

11.2 Αριθμητική Διαδικασία

Εντός του περιεχομένου της παρούσας διατριβής, σχεδιάστηκε και υλοποιήθηκε μια απλή διαδικασία ελέγχου εφαρμογής φορτίου για την επίλυση της (64). Η κεντρική ιδέα είναι να επιβληθεί μια σμίκρυνση του διανύσματος μεταβολής των φορτίων “ \mathbf{r}_p ” προκειμένου να προσδιοριστεί μια εφικτή κατεύθυνση για την λύση [49]· αυτό επιτυγχάνεται πολλαπλασιάζοντάς το με έναν θετικό, αλλά μικρής τιμής αριθμό “ ρ ” (π.χ. $\rho=10^{-3}$). Μια λεπτομερής παρουσίαση δίνεται ακολούθως· λαμβάνει υπ’ όψιν μη-ολόνομα, ιδεατώς πλαστικά και πλαστικώς κρατυνόμενα υλικά.

0. Ανάγνωση και προεπεξεργασία δεδομένων εισόδου.
1. Σχηματισμός της με τον ελάχιστο δυνατό αριθμό κόμβων/μελών στατικής βάσης λόγω εξωτερικών φορτίων και μιας με τον (σχεδόν) ελάχιστο δυνατό αριθμό κόμβων/μελών στατικώς βάσης λόγω υπέρ-στατικότητας, και υπολογισμός των πινάκων ισορροπίας \mathbf{B}_i , όπου $i=\{0,1\}$, αντιστοίχως· Βλ. Κεφάλαιο 2, Ενότητα 2.5.

2. Ορισμός των διανυσμάτων “ \mathbf{r}_p ” του προδιαγεγραμμένου δρόμου φορτίσεως· βλ. Σχήμα 26.
3. Αρχικοποίηση του μετρητή κλάδων του προδιαγεγραμμένου δρόμου φορτίσεων, $n=1$.
4. Για τον τρέχοντα κλάδο “ n ”, ενημέρωση των περιεχομένων των καθολικών πινάκων ευκαμψίας ($\mathbf{B}_i^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{B}_j$), όπου $\{i,j\}=\{0,1\}, \{1,1\}$ · η διαδικασία ενημέρωσης των πινάκων ευκαμψίας γίνεται χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (22) και τις σειρές της Εξίσωσης (34) που αντιστοιχούν στις συνιστώσες της (17), με χρήση των (27) – (31) ή των (27) – (30) και (31) – (32), αναλόγως της κατεύθυνσης του μέλους.
5. Αρχικοποίηση του μετρητή βημάτων ανάλυσης, $k=1$.
6. Έλεγχος για άρτι ενεργοποιημένες ή παραβιασμένες συσχετισμένες πλαστικές ροές. Μια συσχετισμένη πλαστική ροή θεωρείται ότι πρόκειται μόλις να ενεργοποιηθεί όταν η κορυφή του διανύσματος αλληλοεπιδρώντων εντάσεων μιας κρίσιμης διατομής αγγίζει ένα υπερεπίπεδο του πολυτόπου διαρροής της (π.χ. Σχήματα 27(a) και 27(e))· συνεπώς, η αντίστοιχη συνιστώσα του διανύσματος των πλαστικών δυναμικών γίνεται πρακτικώς μηδενική (π.χ. $Y \leq 10^{-8}$). Ο έλεγχος για παραβιαζόμενες συσχετισμένες πλαστικές ροές (βλ. Σχήμα 27(c)) γίνεται χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (48), με αναφορά στην (16), στην βαθμίδα της (36), και στην (39)· επίσης, στην (16), χρειάζεται να εφαρμοσθεί η ακόλουθη αντικατάσταση: $\Delta \mathbf{p}_0 \rightarrow \rho \cdot \mathbf{r}_p$:
 - a. Αν δεν ενεργοποιήθηκαν νέα συμβάντα (π.χ. έναρξη της ανάλυσης ή συνεχιζόμενη ολόνομη συμπεριφορά – Σχήματα 27(b) ή/και 27(f)), μετάβαση στο βήμα 8.
 - b. Αν ανιχνεύθηκε νέο σύνολο συμβάντων (π.χ.: ενεργοποίηση νέων πλαστικών ροών – βλ. Σχήματα 27(a) ή/και 27(e)· ή/και έναρξη πλαστικής αποφόρτισης – βλ. Σχήμα 27(c)), εκτέλεση βημάτων 7 έως 10, μετά επιστροφή στο βήμα (6.b) και επανέλεγχος· αν δεν προέκυψαν νέα συμβάντα μετά τον επανέλεγχο (π.χ. Σχήματα 27(b) ή/και 27(d) ή/και 27(f)), μετάβαση στο βήμα 11.



Σχήμα 27: Κρατυνόμενη Πλαστική Ροή και Μη-Ολόνομη Συμπεριφορά Υλικού.

7. Ενημέρωση του επηρεαζόμενου μέρους των πινάκων ($\mathbf{B}_i^T \cdot \mathbf{F}_S \cdot \mathbf{B}_j$) λόγω πλαστικής κράτνυσης, όπου $\{i,j\}=\{0,1\},\{1,1\}$. Η διαδικασία ενημέρωσης των πινάκων κράτνυσης γίνεται χρησιμοποιώντας τις σειρές της Εξίσωσης (34) που αντιστοιχούν στο σύνολο εκείνων των αλληλοεπιδρώντων εντατικών συνιστωσών της εκάστοτε κρίσιμης διατομής οι οποίες συνεισφέρουν στην κράτνυση (σύμφωνα με την επιλεγμένη συνάρτηση διαρροής – βλ. Εξίσωση (36)), και τις Εξισώσεις (40) ή (41) (με αναφορά στην Εξίσωση (39)). Σε περίπτωση που παραβιάζεται το αξίωμα του Drucker, οι αντίστοιχοι συντελεστές των πινάκων κράτνυσης μηδενίζονται.
8. Ενημέρωση του δεξιού μέλους των περιορισμών του προβλήματος (βλ. Εξίσωση (64)). Η διαδικασία ενημέρωσης των σταθερών συντελεστών “ $\mathbf{c}^{(k)}$ ” των περιορισμών γίνεται χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (46), αναλόγως του κανόνα κράτνυσης που έχει οριστεί. Στην περίπτωση της πλαστικής αποφόρτισης, και πάλι αναλόγως του ορισμένου κανόνα κράτνυσης, το πολύτοπο διαρροής είτε συρρικνώνεται, είτε μετακινείται αντίθετα προς την κατεύθυνση του διανύσματος κράτνυσης ώστε το ενεργό υπερεπίπεδο να αγγίξει το πέρας του διανύσματος αλληλοεπιδρώντων εντάσεων που προσδιορίστηκε κατά το τέλος του προηγούμενου βήματος ($k-1$): Χρησιμοποιούνται οι Εξισώσεις (49) και (50).
9. Επειδή οι συνιστώσες του διανύσματος μεταβολής εξωτερικών φορτίων “ \mathbf{r}_p ” ενδέχεται να είναι αρκετά μεγάλες ώστε να προκαλέσουν παραβίαση της συνθήκης στατικώς αποδεκτών κατανομών εντάσεων, απαιτείται μια κατάλληλη κλιμάκωσή τους ώστε να διατηρείται σε ισχύ η συνθήκη συμπληρωματικότητας: Πολλαπλασιασμός του “ \mathbf{r}_p ” με έναν μικρό αριθμό “ ρ ”. (Στα παραδείγματα που παρουσιάζονται σε αυτή την διατριβή, οι τιμές $\rho \in [10^{-6}, 1]$ βρέθηκαν να είναι σε γενικές γραμμές επαρκείς, με την τιμή $\rho=10^{-3}$ να είναι ένας βέλτιστος συμβιβασμός ανάμεσα σε υπολογιστική ταχύτητα και ακρίβεια).
10. Επίλυση του προβλήματος που περιγράφεται από την Εξίσωση (64) χρησιμοποιώντας οποιονδήποτε κατάλληλο αλγόριθμο (π.χ.[68],[69],[70]) και λήψη ενός συνόλου πρωτευουσών και δυικών μεταβλητών. Αν ο αλγόριθμος δεν συγκλίνει, μετάβαση στο βήμα 20, διότι η κατασκευή κατέρρευσε.
11. Διαίρεση των συνιστωσών της λύσης $\{\Delta \mathbf{p}_1, \Delta \lambda\}$ με την τιμή “ ρ ”.
12. Υπολογισμός του “ $\Delta \mathbf{Q}^{(k)}$ ”. Χρησιμοποιούνται οι Εξισώσεις (16) και (34): οι μεταβολές των τεμνουσών δυνάμεων μπορούν να υπολογισθούν εύκολα από τις τοπικές συνθήκες ισορροπίας κατά μήκος κάθε στοιχείου.
13. Υπολογισμός “ $\Delta \mathbf{q}_{el,(k)}$ ”. χρησιμοποιείται η Εξίσωση (21).
14. Υπολογισμός “ $\Delta \mathbf{q}_{pl,(k)}$ ”. Για ελαστικό-ιδεωδώς πλαστικό υλικό, χρησιμοποιείται η Εξίσωση (23): για ελαστικό-πλαστικώς κρατυνόμενο υλικό, χρησιμοποιείται η Εξίσωση (25), όπου οι συντελεστές ευκαμψίας μπορούν να υπολογισθούν από την Εξίσωση (40) ή (41), με την βοήθεια της (39).
15. Εύρεση του ελάχιστου συντελεστή “ $\Delta \gamma_k$ ” κλιμάκωσης της λύσης, ώστε να ενεργοποιείται μια νέα πλαστική άρθρωση, διασφαλίζοντας παράλληλα ότι η υπολογισθείσα τιμή δεν προκαλεί υπέρβαση του ορίου του τρέχοντα κλάδου του προδιαγεγραμμένου δρόμου φορτίσεως: Ο προσδιορισμός του συντελεστή γίνεται χρησιμοποιώντας τις Εξισώσεις (58) και (59): έπειτα, αν απαιτείται, πραγματοποιείται νέα κλιμάκωση σύμφωνα με την μέγιστη επιθυμητή μετατόπιση αναφοράς, με την βοήθεια της (60).
16. Κλιμάκωση των αντίστοιχων μεταβολών έντασης και παραμόρφωσης χρησιμοποιώντας τον συντελεστή που υπολογίστηκε προηγουμένως:

$$\Delta \mathbf{Q}^{(k)} \rightarrow \Delta \gamma_k \cdot \Delta \mathbf{Q}^{(k)} \quad , \quad \Delta \mathbf{q}_{el,(k)} \rightarrow \Delta \gamma_k \cdot \Delta \mathbf{q}_{el,(k)} \quad , \quad \Delta \mathbf{q}_{pl,(k)} \rightarrow \Delta \gamma_k \cdot \Delta \mathbf{q}_{pl,(k)}$$

17. Πρόσθεση των υπολογισθέντων μεταβολών έντασης και παραμόρφωσης του νέου βήματος (k) στις αντίστοιχες τιμές του προηγούμενου βήματος ($k-1$):

$$\mathbf{Q}^{(k)} = \mathbf{Q}^{(k-1)} + \Delta \mathbf{Q}^{(k)} \quad , \quad \mathbf{q}_{el}^{(k)} = \mathbf{q}_{el}^{(k-1)} + \Delta \mathbf{q}_{el}^{(k)} \quad , \quad \mathbf{q}_{pl}^{(k)} = \mathbf{q}_{pl}^{(k-1)} + \Delta \mathbf{q}_{pl}^{(k)}$$

18. Υπολογισμός του “ $\Delta \mathbf{u}_{s,(k)}$ ” χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (26). Έπειτα, πρόσθεση των τιμών αυτών στις αντίστοιχες τιμές μετατοπίσεως του προηγούμενου βήματος ($k-1$):

$$\mathbf{u}_{s,(k)} = \mathbf{u}_{s,(k-1)} + \Delta \mathbf{u}_{s,(k)}$$

19. Αν επιτεύχθηκε το τέλος του τρέχοντα κλάδου φόρτισης (ήτοι αν ισχύει $\left\| \Delta \mathbf{p}_0 \right\| - \sum_{i=1}^{i=k} \Delta \gamma_i \leq \rho - \beta \lambda$.

Σχήμα 26), μετάβαση στο βήμα 4 και επανάληψη της διαδικασίας για $n \rightarrow n+1$. αν επιτεύχθηκε το τέλος του δρόμου φόρτισης ή η μέγιστη μετατόπιση αναφοράς, μετάβαση στο βήμα 20. αλλιώς, επιστροφή στο βήμα 6 και επανάληψη της διαδικασίας για $k \rightarrow k+1$.

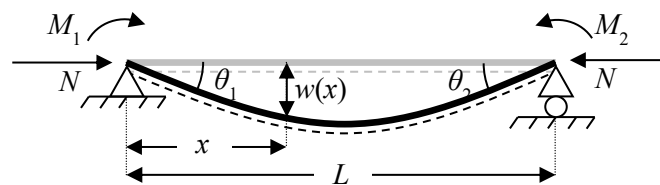
20. Εκτύπωση δεδομένων εξόδου, και τερματισμός.

12 Διερεύνηση της Επέκτασης σε Ανάλυση με Όρους 2^{ης} Τάξεως

Σε αυτό το κεφάλαιο επεκτείνονται οι διέπουσες εξισώσεις και πίνακες για την αναπτυχθείσα μέθοδο δυνάμεων με όρους 1^{ης} τάξεως έτσι ώστε να λαμβάνεται υπ' όψιν η επιρροή των αξονικών δυνάμεων στις παραμορφώσεις λόγω κάμψης· η προτεινόμενη μεθοδολογία συμπεριλαμβάνει τα φαινόμενα “P-Δ” και “P-Δ-δ”.

12.1 Συντελεστές Ευκαμψίας για Ροπές Κάμψης

Για τις ροπές κάμψης, οι συντελεστές ευκαμψίας 2^{ης} τάξεως μπορούν να εξαχθούν επιλύοντας την διαφορική εξίσωση του προβλήματος κάμψης επί επιπέδου στην παραμορφωμένη κατάσταση, όπου λαμβάνεται υπ' όψιν η συνεισφορά της συνιστώσας αξονικής έντασης στην ανάπτυξη επιπλέον στροφών κάμψης λόγω της εγκάρσιας παραμόρφωσης· βλ. Σχήμα 28 ακολούθως, όπου απεικονίζεται το επίπεδο (2Δ) πρόβλημα:



Σχήμα 28: Επαυξημένη βύθιση κάμψης (w) λόγω αξονικών δυνάμεων (N) για το πρόβλημα κάμψης επί επιπέδου (2Δ).

Η διαφορική εξίσωση της βύθισης είναι (με αναφορά στο ανωτέρω Σχήμα 23):

$$w''(x) + \mu^2 \cdot w(x) = - \left[M_1 \cdot \left(1 - \frac{x}{L} \right) + M_2 \cdot \frac{x}{L} \right] \quad (65)$$

Όπου, στην ανωτέρω Εξίσωση (65), ο λόγος των αξονικών δυνάμεων προς την ανά μονάδα μήκους δυσκαμψία της διατομής συμβολίζεται με:

$$\mu^2 = \frac{N}{E \cdot I} \quad (66)$$

Στην ανωτέρω Εξίσωση (66) υποτίθεται ότι για θλιπτική καταπόνηση ($N < 0$) ισχύει “ $\mu^2 > 0$ ”, και για εφελκυστική ($N > 0$) ισχύει “ $\mu^2 < 0$ ”. Με αναφορά στην (66), η λύση της (65) είναι:

$$\begin{aligned} \mu^2 > 0: \quad w(x) &= A_1 \cdot \sin(\mu \cdot x) + A_2 \cdot \cos(\mu \cdot x) - \frac{1}{\mu^2} \cdot \left[M_1 \cdot \left(1 - \frac{x}{L} \right) + M_2 \cdot \frac{x}{L} \right] \\ \mu^2 < 0: \quad w(x) &= A_1 \cdot e^{\mu \cdot x} + A_2 \cdot e^{-\mu \cdot x} - \frac{1}{\mu^2} \cdot \left[M_1 \cdot \left(1 - \frac{x}{L} \right) + M_2 \cdot \frac{x}{L} \right] \end{aligned} \quad (67)$$

Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες “ $w(0)=0$ ” και “ $w(L)=0$ ” στην (67), λαμβάνονται οι τιμές των “ A_1 ” και “ A_2 ”, αντιστοίχως:

$$\begin{aligned} \mu^2 > 0: \quad A_1 &= -\frac{1}{\mu^2} \cdot \left[\frac{M_1}{\tan(\mu \cdot L)} - \frac{M_2}{\sin(\mu \cdot L)} \right], \quad A_2 = \frac{M_1}{\mu^2} \\ \mu^2 < 0: \quad A_1 &= \frac{-e^{-\mu \cdot L} \cdot M_1 + M_2}{\mu^2 \cdot (e^{\mu \cdot L} - e^{-\mu \cdot L})}, \quad A_2 = \frac{e^{\mu \cdot L} \cdot M_1 - M_2}{\mu^2 \cdot (e^{\mu \cdot L} - e^{-\mu \cdot L})} \end{aligned} \quad (68)$$

Αντικαθιστώντας την (68) στην (67), και στην συνέχεια παραγωγίζοντας ως προς “x”, λαμβάνεται η αντίστοιχη συνάρτηση της στροφής “θ” λόγω κάμψης:

$$\begin{aligned} \mu^2 > 0: \quad \theta(x) &= \frac{M_1}{\mu \cdot L} \cdot \left[\frac{1}{\mu} - \frac{L \cdot \cos(\mu \cdot x)}{\tan(\mu \cdot L)} \right] + \frac{M_2}{\mu \cdot L} \cdot \left[\frac{L}{\sin(\mu \cdot L)} - \frac{\sin(\mu \cdot x)}{\mu} - \frac{1}{\mu} \right] \\ \mu^2 < 0: \quad \theta(x) &= \frac{-e^{-\mu \cdot L} \cdot M_1 + M_2}{\mu \cdot (e^{\mu \cdot L} - e^{-\mu \cdot L})} \cdot e^{\mu \cdot x} - \frac{e^{\mu \cdot L} \cdot M_1 - M_2}{\mu \cdot (e^{\mu \cdot L} - e^{-\mu \cdot L})} \cdot e^{-\mu \cdot x} + \frac{M_1 - M_2}{\mu^2 \cdot L} \end{aligned} \quad (69)$$

Θέτοντας “θ(0)=θ₁” και “θ(L)=-θ₂” στην (69), λαμβάνεται η αντίστοιχη μορφή του μητρώου ευκαμψίας στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων του μέλους:

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \begin{bmatrix} 2 \cdot F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & 2 \cdot F_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (70)$$

Όπου, για θλιπτικές αξονικές δυνάμεις, ισχύουν:

$$F_{11} = F_{22} = + \frac{3}{\mu \cdot L} \cdot \left[\frac{1}{\mu \cdot L} - \frac{1}{\tan(\mu \cdot L)} \right] \quad \& \quad F_{12} = F_{21} = - \frac{6}{\mu \cdot L} \cdot \left[\frac{1}{\mu \cdot L} - \frac{1}{\sin(\mu \cdot L)} \right] \quad (71)$$

Και για εφελκυστικές αξονικές, αντιστοίχως:

$$F_{11} = F_{22} = - \frac{3}{\mu \cdot L} \cdot \left[\frac{1}{\mu \cdot L} - \frac{1}{\tanh(\mu \cdot L)} \right] \quad \& \quad F_{12} = F_{21} = + \frac{6}{\mu \cdot L} \cdot \left[\frac{1}{\mu \cdot L} - \frac{1}{\sinh(\mu \cdot L)} \right] \quad (72)$$

Οι ανωτέρω Εξισώσεις (65) – (72) παρήχθησαν από την λύση που παρουσιάστηκε για πρώτη φορά από τον A. Berry στην [2].

Όπως αποδείχθηκε, απαιτούνται διαφορετικές εξισώσεις για τον υπολογισμό των στροφών λόγω κάμψης, αναλόγως της φοράς της αξονικής δύναμης (εφελκυστική ή θλιπτική). Ωστόσο, σε όρους κλασικού συναρτησιακού προγραμματισμού, αυτό δημιουργεί δυσκολίες στην αυτοματοποίηση των υπολογισμών· προκειμένου να παρακαμφθεί αυτό το πρόβλημα, λαμβάνονται οι δύο πρώτοι όροι του αναπτύγματος κατά Maclaurin των Εξισώσεων (71) και (72), διότι οι μορφές τους είναι κοινές, τόσο για εφελκυσμό, όσο και για θλίψη. Έτσι, η Εξίσωση (70) γράφεται:

$$\begin{Bmatrix} \theta_{j1} \\ \theta_{j2} \end{Bmatrix} = \left(\frac{L}{6 \cdot E \cdot I_j} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{L^3}{360 \cdot (E \cdot I_j)^2} \cdot \text{diag} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{Bmatrix} M_{j1} \\ M_{j2} \end{Bmatrix}, \quad j = \{2,3\} \quad (73)$$

Η ανωτέρω επιλογή έχει ένα «βαρύ» κόστος· προκειμένου να προσεγγιστούν αποτελεσματικά οι τιμές των μη-γραμμικών συναρτήσεων στην (70), κάθε στοιχείο δοκού/υποστυλώματος πρέπει να υποδιαιρεθεί σε μικρότερα. Κατ’ αυτόν τον τρόπο, οι παραλειπόμενοι όροι εναλλασσόμενου πρόσημου των σειρών Maclaurin στην Εξίσωση (73) προκαλούν την ελάχιστη μείωση στην ακρίβεια υπολογισμού.

12.2 Μητρώα Συντελεστών Ευκαμψίας

Το μέρος του μητρώου των μη-συζευγμένων συντελεστών ευκαμψίας που αντιστοιχεί στις ροπές κάμψης είναι συνάρτηση της μεταβολής των αξονικών συνιστωσών έντασης “ΔN_s” του διανύσματος των εντάσεων “ΔQ_s”:

$$\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F} + \text{diag}\{\Delta \mathbf{N}_s\} \cdot \mathbf{F}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_N & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{F}_{Q_2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & \mathbf{F}_{Q_3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & \mathbf{F}_T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & & \mathbf{F}_{M_2} & \mathbf{0} \\ & & & & & \mathbf{F}_{M_3} \end{bmatrix} + \text{diag}\{\Delta \mathbf{N}_s\} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & & \mathbf{F}_{M_2}^g & \mathbf{0} \\ & & & & & \mathbf{F}_{M_3}^g \end{bmatrix} \quad (74)$$

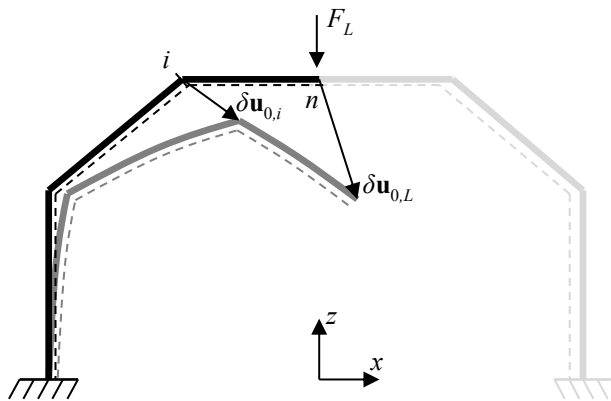
Όπου στην (74), “ \mathbf{F}_{M_j} ” και “ $\mathbf{F}_{M_j}^g$ ”, $j=\{2,3\}$, είναι οι 1^{ης} και 2^{ης} τάξεως όροι ευκαμψίας της Εξίσωσης (73), αντιστοίχως. Οι υπόλοιπες διέπουσες εξισώσεις είναι οι ίδιες με αυτές που χρησιμοποιούνται και για την ανάλυση με όρους 1^{ης} τάξεως.

12.3 Διαδικασίες για τους Πίνακες Ισορροπίας

Η ενσωμάτωση των γεωμετρικών μη-γραμμικοτήτων (οι οποίες αναφέρονται και ως φαινόμενα “ $P-\Delta$ ” και “ $P-\Delta-\delta$ ”) απαιτεί τον υπολογισμό της ισορροπίας στην παραμορφωμένη κατάσταση. Συνεπώς, θα πρέπει να επαναπροσδιορισθούν οι μέθοδοι υπολογισμού των πινάκων $\{\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1\}$. Η προτεινόμενη μεθοδολογία είναι μια γενίκευση/επέκταση αυτής που πρωτοπαρουσιάστηκε στην εργασία [54] δισδιάστατους (2Δ) φορείς.

12.3.1 Πίνακας “ \mathbf{B}_0 ”

Ακολουθώς παρουσιάζονται τα απαιτούμενα βήματα υπολογισμού του πίνακα “ \mathbf{B}_0 ” των εξωτερικών φορτίων για την ισορροπία στην παραμορφωμένη κατάσταση:



Σχήμα 29: Η συντομότερη διαδρομή του κόμβου “ n ” και η παραμορφωμένη κατάσταση του θεμελιώδη φορέα λόγω της “ L -οστής” συνιστώσας φορτίου (F_z).

1. Υπολογισμός του πίνακα “ \mathbf{B}_0 ” σύμφωνα με την Εξίσωση (34), για όλες τις συντομότερες διαδρομές της κατασκευής και τις αντίστοιχες κρίσιμες διατομές των μελών που επηρεάζονται από όλες τις πιθανές συνιστώσες φορτίων που δύναται να δεχθεί ο κόμβος αρχής κάθε συντομότερης διαδρομής· γίνεται χρήση της αντίστοιχης στατικής βάσης που προσδιορίστηκε με την βοήθεια κατάλληλου αλγορίθμου (π.χ. [47],[49]).
2. Εκτέλεση των υπό-βημάτων (2.a) – (2.e), για όλους τους κόμβους $n=\{1,2,\dots,N\}$ της κατασκευής:
 - a. Επιλογή της στήλης “ $\mathbf{b}_{0,L}$ ” του πίνακα “ \mathbf{B}_0 ” η οποία περιέχει τις εντατικές συνιστώσες που αναπτύσσονται σε ολόκληρη την κατασκευή και αντιστοιχούν στο L -οστό εξωτερικό, μοναδιαίας θετικής τιμής φορτίο του κόμβου “ n ”, όπου “ L ” είναι ένας δείκτης στήλης που αντιστοιχεί μόνο σε

φορτία δυνάμεων $\delta p_{0,L} \triangleq \{F_x, F_y, F_z\}$: για λόγους συνέπειας ως προς την ονοματολογία που χρησιμοποιείται στην παρούσα διατριβή, ανατίθεται ένας αμιγώς συμβολικός δείκτης προς αυτή την στήλη, με αναφορά στις Εξισώσεις (15) και (16):

$$\delta \mathbf{Q}_{0,L} \rightarrow \delta p_{0,L} \cdot \mathbf{b}_{0,L} \quad (75)$$

- b. Υπολογισμός των γενικευμένων τοπικών ελαστικών παραμορφώσεων “ $\delta \mathbf{q}_{0,L}$ ” που οφείλονται στην εξωτερικού φορτίου συνιστώσα δύναμης που αντιστοιχεί στην *L-οστή* στήλη του πίνακα “ \mathbf{B}_0 ”, χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (21). Αν λαμβάνονται υπόψιν οι συναρτήσεις Berry (φαινόμενα “*P-Δ-δ*” – βλ. Εξίσωση (73)), χρησιμοποιούνται και οι 1^{ης}, και οι 2^{ης} τάξεως όροι της (73) στην (21): αν λαμβάνονται υπ’ όψιν μόνο τα φαινόμενα “*P-Δ*”, χρησιμοποιούνται μόνο οι 1^{ος} τάξεως όροι της (73) στην (21):

$$\delta \mathbf{q}_{0,L} = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{Q}_{0,L} \quad (76)$$

Όπου το διάνυσμα “ $\delta \mathbf{Q}_{0,L}$ ” ορίστηκε στο υπό-βήμα (2.a).

- c. Υπολογισμός των ελαστικών μετατοπίσεων του κόμβου επί του οποίου ασκείται η μοναδιαία τιμή γενικευμένη δύναμη που αντιστοιχεί στην *L-οστή* στήλη του πίνακα “ \mathbf{B}_0 ”, χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (26):

$$\delta u_{0,j} = \mathbf{b}_{0,j}^T \cdot \delta \mathbf{q}_{0,L} \quad (77)$$

Όπου $j \triangleq \{F_x, F_y, F_z\}$, επομένως:

$$\delta \mathbf{u}_{0,L}^T = \{\delta u_{0,x} \quad \delta u_{0,y} \quad \delta u_{0,z}\} = \{\Delta x_L \quad \Delta y_L \quad \Delta z_L\} \quad (78)$$

Το διάνυσμα των μετατοπίσεων στην (78) απεικονίζεται αφαιρετικά στο ανωτέρω Σχήμα 29.

- d. Μετακίνηση κατά μήκος της συντομότερης διαδρομής που αντιστοιχεί στην *L-οστή* στήλη του πίνακα “ \mathbf{B}_0 ”, και, για κάθε κρίσιμη διατομή “*i*”, εκτέλεση των υπό-βημάτων (2.d.i) – (2.d.iv):
- i. Επιλογή της στήλης “ $\mathbf{b}_{0,k}$ ” του πίνακα “ \mathbf{B}_0 ” που αντιστοιχεί στον *k-οστό*, μοναδιαίας τιμής βαθμό ελευθερίας, όπου $k \triangleq (u_x, u_y, u_z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)$, και υπολογισμός των γενικευμένων ελαστικών μετατοπίσεων “ $\delta u_{0,k}$ ” της τρέχουσας κρίσιμης διατομής που οφείλονται στην μοναδιαία τιμή γενικευμένη δύναμη που αντιστοιχεί στην *L-οστή* στήλη του πίνακα “ \mathbf{B}_0 ”. χρησιμοποιείται η Εξίσωση (26):

$$\delta u_{0,k} = \mathbf{b}_{0,k}^T \cdot \delta \mathbf{q}_{0,L} \quad (79)$$

Όπου $k \triangleq \{F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z\}$, οπότε:

$$\delta \mathbf{u}_{0,i}^T = \{\Delta x_i \quad \Delta y_i \quad \Delta z_i \mid \Delta \varphi_{x,i} \quad \Delta \varphi_{y,i} \quad \Delta \varphi_{z,i}\} \quad (80)$$

Στην Εξίσωση (80), το μέρος του διανύσματος που περιλαμβάνει μόνο μετατοπίσεις απεικονίζεται αφαιρετικά στο ανωτέρω Σχήμα 29.

- ii. Υπολογισμός της στοιχειώδους μεταβολής “ $\delta \mathbf{d}_R$ ” του πίνακα “ \mathbf{d}_R ” (φαινόμενα “*P-Δ*”) σύμφωνα με την Εξίσωση (27), όπου τα $\{\Delta x, \Delta y, \Delta z\}$ παρακάτω, ακολουθώντας τα υπό-βήματα (2.c) και (2.d.i):

$$\begin{aligned} \Delta x &= \Delta x_i - \Delta x_L \\ \Delta y &= \Delta y_i - \Delta y_L \\ \Delta z &= \Delta z_i - \Delta z_L \end{aligned} \tag{81}$$

- iii. Για την περίπτωση κατά την οποία οι συναρτήσεις Berry λαμβάνονται υπ' όψιν (φαινόμενα “P-Δ-δ”), γίνεται υπολογισμός της μεταβολής “ $\delta \mathbf{T}_R$ ” του πίνακα μετασχηματισμού “ \mathbf{T}_R ” σύμφωνα με την ακόλουθη εξίσωση, όπου γίνεται χρήση των ποσοτήτων που υπολογίστηκαν κατά το υπό-βήμα (2.d.i)· σε αντίθετη περίπτωση, το υπό-βήμα (2.d.iii) παραλείπεται:

$$\delta \mathbf{T}_R = (\mathbf{R}_x \cdot \mathbf{R}_y \cdot \mathbf{R}_z) \cdot \mathbf{T}_R \tag{82}$$

Όπου στην (82), οι ποσότητες “ \mathbf{R}_x ”, “ \mathbf{R}_y ”, “ \mathbf{R}_z ” είναι οι ταυστές στροφής περί τους αντίστοιχους άξονες του καθολικού συστήματος αναφοράς συντεταγμένων $\{x,y,z\}$ · οι συνιστώσες τους υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες στοιχειώδεις μεταβολές γωνιών από την Εξίσωση (80).

- iv. Υπολογισμός και αποθήκευση της στοιχειώδους μεταβολής “ $\delta \mathbf{B}_0$ ” του πίνακα ισορροπίας “ \mathbf{B}_0 ” σύμφωνα με την Εξίσωση (34):

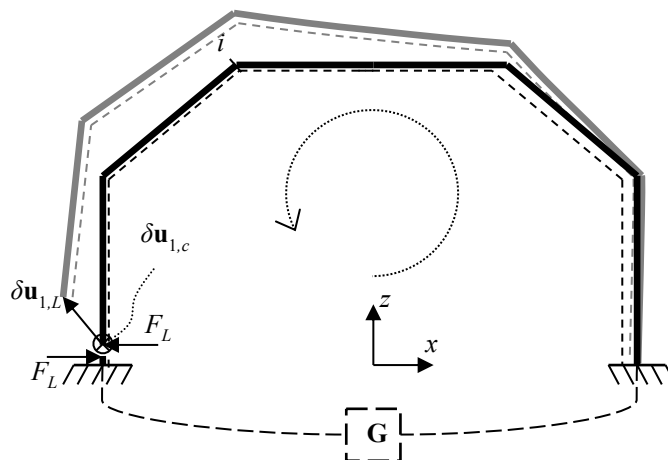
$$\delta \mathbf{B}_0 = -\text{Sign}\{m\} \cdot \begin{bmatrix} \delta \mathbf{T}_R & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \delta \mathbf{T}_R \cdot \delta \mathbf{d}_R & \delta \mathbf{T}_R \end{bmatrix} \tag{83}$$

Σημειώνεται ότι, όταν δεν λαμβάνονται υπ' όψιν οι συναρτήσεις Berry (φαινόμενα “P-Δ-δ”), θεωρείται ότι ο πίνακας μετασχηματισμού παραμένει αναλλοίωτος από την παραμορφωμένη κατάσταση των στοιχείων δοκού/υποστυλώματος της στατικά ορισμένης βάσης ($\delta \mathbf{T}_R = \mathbf{T}_R$).

- e. Επιστροφή στο υπό-βήμα (2.a) και επανάληψη για όλες τις συνιστώσες δύναμης του φορτίου του κόμβου “n”· έπειτα, τίθεται $n \rightarrow n + 1$ και η διαδικασία προχωρά στον επόμενο κόμβο.

12.3.2 Πίνακας “ \mathbf{B}_1 ”

Για τον υπολογισμό του πίνακα ισορροπίας “ \mathbf{B}_1 ” λόγω υπέρ-στατικών μεγεθών στην παραμορφωμένη κατάσταση, απαιτούνται τα ακόλουθα βήματα:



Σχήμα 30: Ο “n^{οστός}” βρόχος και το παραμορφωμένο σχήμα αυτού λόγω του “L^{οστός}” ζεύγους υπέρ-στατικών δυνάμεων (F_x)· με το γράμμα “G” συμβολίζεται ένας εικονικός κόμβος “εδάφους” (ground) που βοηθά να δημιουργηθούν οι κλειστοί βρόχοι στις στηρίξεις της κατασκευής.

1. Υπολογισμός του πίνακα ισορροπίας “ \mathbf{B}_1 ” σύμφωνα με την Εξίσωση (34), για όλους τους βρόχους (τοπολογικούς κύκλους) της κατασκευής και τις αντίστοιχες κρίσιμες διατομές που επηρεάζονται από τα υπέρ-στατικά μεγέθη κάθε βρόχου· χρησιμοποιείται η αντίστοιχη στατική βάση που προσδιορίστηκε με την βοήθεια κατάλληλου αλγορίθμου (π.χ. [53]).

2. Για όλους τους βρόχους της κατασκευής $n=\{1,2,\dots,N\}$, εκτέλεση των υπό-βημάτων (2.a) – (2.g):
 a. Επιλογή της στήλης “ $\mathbf{b}_{1,L}$ ” του πίνακα “ \mathbf{B}_1 ” η οποία περιέχει τις συνιστώσες έντασης όλης της κατασκευής που αντιστοιχούν στο L -οστό εσωτερικό, μοναδιαίας τιμής υπέρ-στατικό μέγεθος του βρόχου “ n ”, όπου “ L ” είναι ένας δείκτης που αντιστοιχεί μόνο σε υπέρ-στατικά μεγέθη δυνάμεων $\delta p_{1,L} \triangleq \{F_x, F_y, F_z\}$: για λόγους συνέπειας ως προς την ονοματολογία που χρησιμοποιείται στην παρούσα διατριβή, ανατίθεται ένας αμιγώς συμβολικός δείκτης προς αυτή την στήλη, με αναφορά στις Εξισώσεις (15) και (16):

$$\delta \mathbf{Q}_{1,L} \rightarrow \delta p_{1,L} \cdot \mathbf{b}_{1,L} \tag{84}$$

b. Υπολογισμός των γενικευμένων τοπικών ελαστικών παραμορφώσεων “ $\delta \mathbf{q}_{1,L}$ ” που οφείλονται σε μοναδιαίας τιμής ζεύγη συνιστωσών δυνάμεων των υπέρ-στατικών μεγεθών που αντιστοιχούν στην L -οστή στήλη του πίνακα “ \mathbf{B}_1 ”, χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (21). Αν λαμβάνονται υπ’ όψιν οι συναρτήσεις Berry (φαινόμενα “ $P-\Delta-\delta$ ” – βλ. Εξίσωση (73)), χρησιμοποιούνται και οι 1^{ης}, και οι 2^{ης} τάξεως όροι της (73) στην (18)· αν λαμβάνονται υπ’ όψιν μόνο τα φαινόμενα “ $P-\Delta$ ”, χρησιμοποιούνται μόνο οι 1^{ης} τάξεως όροι της (73) στην (18):

$$\delta \mathbf{q}_{1,L} = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{Q}_{1,L} \tag{85}$$

Όπου το διάνυσμα “ $\delta \mathbf{Q}_{1,L}$ ” ορίστηκε στο υπό-βήμα (2.a).

c. Υπολογισμός των σχετικών μετατοπίσεων μεταξύ των άκρων της ιδεατής τομής που επιβλήθηκε στον βρόχο “ n ”, οι οποίες οφείλονται στο μοναδιαίας τιμής ζεύγος συνιστωσών δυνάμεων των υπέρ-στατικών μεγεθών που αντιστοιχεί στην L -οστή στήλη του πίνακα “ \mathbf{B}_1 ”, χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (26):

$$\delta u_{1,j} = \mathbf{b}_{1,j}^T \cdot \delta \mathbf{q}_{1,L} \tag{86}$$

Όπου $j \triangleq \{F_x, F_y, F_z\}$, επομένως:

$$\delta \mathbf{u}_{1,L}^T = \{\delta u_{1,x} \quad \delta u_{1,y} \quad \delta u_{1,z}\} = \{\Delta x_L \quad \Delta y_L \quad \Delta z_L\} \tag{87}$$

Το διάνυσμα των μετατοπίσεων στην (87) απεικονίζεται αφαιρετικά στο ανωτέρω Σχήμα 30.

d. Υπολογισμός των στοιχειωδών μεταβολών “ $\delta \mathbf{d}_R$ ” των μοχλοβραχιόνων του εξωτερικού γινομένου για τις ροπές 2^{ας} που προκύπτουν εξαιτίας της σχετικής μετατόπισης των άκρων της ιδεατής τομής που επιβλήθηκε στον τρέχοντα βρόχο (φαινόμενα “ $P-\Delta$ ”) σύμφωνα με την Εξίσωση (27), όπου $\{\Delta x \quad \Delta y \quad \Delta z\} \rightarrow \{\Delta x_L \quad \Delta y_L \quad \Delta z_L\}$ είναι οι σχετικές μετατοπίσεις που υπολογίστηκαν κατά το προηγούμενο υπό-βήμα (2.c).

e. Για την περίπτωση κατά την οποία λαμβάνονται υπ’ όψιν οι συναρτήσεις Berry (φαινόμενα “ $P-\Delta-\delta$ ”), επιλογή της στήλης “ $\mathbf{b}_{1,k}$ ” του πίνακα “ \mathbf{B}_1 ” που αντιστοιχεί στο k -οστό, μοναδιαίο ζεύγος συνιστωσών υπέρ-στατικών μεγεθών ροπής, όπου $k \triangleq (\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)$, και υπολογισμός των στροφών “ $\delta \mathbf{u}_{1,k}$ ” της κρίσιμης διατομής “ c ” της επιβεβλημένης ιδεατής τομής, οι οποίες οφείλονται

σε μοναδιαίας τιμής ζεύγος συνιστωσών υπέρ-στατικών μεγεθών δύναμης που αντιστοιχούν στην L -οστή στήλη του πίνακα “ \mathbf{B}_1 ”, χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (26):

$$\delta u_{1,k} = \mathbf{b}_{1,k}^T \cdot \delta \mathbf{q}_{1,L} \quad (88)$$

Όπου $k \triangleq \{M_x, M_y, M_z\}$, οπότε:

$$\delta \mathbf{u}_{1,c}^T = \{ \Delta \varphi_{x,k} \quad \Delta \varphi_{y,k} \quad \Delta \varphi_{z,k} \} \quad (89)$$

Το διάνυσμα στροφών στην (89) απεικονίζεται αφαιρετικά στο ανωτέρω Σχήμα 30.

f. Μετακίνηση κατά μήκος του βρόχου που αντιστοιχεί στην L -οστή στήλη του πίνακα “ \mathbf{B}_1 ”, και, για κάθε κρίσιμη διατομή “ i ”, εκτέλεση των υπό-βημάτων (2.f.i) – (2.f.ii):

i. Για την περίπτωση που λαμβάνονται υπ’ όψιν οι συναρτήσεις Berry (φαινόμενα “ P - Δ - δ ”), γίνεται υπολογισμός της μεταβολής “ $\delta \mathbf{T}_R$ ” του πίνακα μετασχηματισμού “ \mathbf{T}_R ” κάθε κρίσιμης διατομής του υπό επεξεργασία βρόχου σύμφωνα με την ακόλουθη εξίσωση, όπου γίνεται χρήση των ποσοτήτων που προσδιορίστηκαν κατά το υπό-βήμα (2.e)· σε αντίθετη περίπτωση, το βήμα (2.f.i) παραλείπεται:

$$\delta \mathbf{T}_R = (\mathbf{R}_x \cdot \mathbf{R}_y \cdot \mathbf{R}_z) \cdot \mathbf{T}_R \quad (90)$$

Όπου στην (90), οι ποσότητες “ \mathbf{R}_x ”, “ \mathbf{R}_y ”, “ \mathbf{R}_z ” είναι οι τανυστές στροφής περί τους αντίστοιχους άξονες του καθολικού συστήματος αναφοράς $\{x,y,z\}$ · οι συνιστώσες τους υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες στοιχειώδεις μεταβολές των γωνιών από την Εξίσωση (89).

ii. Υπολογισμός και αποθήκευση της μεταβολής “ $\delta \mathbf{B}_1$ ” του πίνακα ισορροπίας “ \mathbf{B}_1 ” σύμφωνα με την Εξίσωση (34):

$$\delta \mathbf{B}_1 = -\text{Sign}\{m\} \cdot \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \hline \delta \mathbf{T}_R \cdot \delta \mathbf{d}_R & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{array} \right] \quad (91)$$

Όπου “ $\delta \mathbf{d}_R$ ” είναι ο πίνακας των μογλοβραχιόνων του εξωτερικού γινομένου που υπολογίστηκε στο υπό-βήμα (2.d). Λόγω της σχετικής φύσης των μετατοπίσεων των άκρων της επί του βρόχου ιδεατής τομής, τα στοιχεία των κυρίων τεταρτημορίων του ανωτέρω πίνακα έχουν τεθεί ίσα προς τον μηδενικό πίνακα διαστάσεων (3x3).

Σημειώνεται ότι, όταν δεν λαμβάνονται υπ’ όψιν οι συναρτήσεις Berry (φαινόμενα “ P - Δ - δ ”), θεωρείται ότι ο πίνακας μετασχηματισμού μένει ανεπηρέαστος από την σχετική παραμορφωμένη κατάσταση των στοιχείων δοκού/υποστυλώματος της στατικά ορισμένης βάσης ($\delta \mathbf{T}_R = \mathbf{T}_R$).

g. Επιστροφή στο υπό-βήμα (2.a) και επανάληψη για όλα τα υπέρ-στατικά μεγέθη δυνάμεων του βρόχου “ n ”. έπειτα, τίθεται $n \rightarrow n + 1$ και η διαδικασία προχωρά στον επόμενο βρόχο (τοπολογικό κύκλο).

Μόλις ολοκληρωθούν και οι δύο διαδικασίες που περιεγράφηκαν στις υπό-ενότητες 12.3.1 και 12.3.2, τα αντίστοιχα περιεχόμενα των πινάκων ισορροπίας μπορούν να ενημερωθούν σύμφωνα με την ακόλουθη εξίσωση:

$$\mathbf{B}_i \rightarrow \mathbf{B}_i + \delta \mathbf{B}_i(\Delta \mathbf{p}_i) \quad , \quad i = \{0,1\} \quad (92)$$

Όπου στην Εξίσωση (92), οι πίνακες “ \mathbf{B}_i ” εκφράζονται πλέον συναρτήσεις των στοιχειωδών μεταβολών των εξωτερικών φορτίων “ $\Delta\mathbf{p}_0$ ” ή των στοιχειωδών μεταβολών των υπέρ-στατικών μεγεθών δύναμης “ $\Delta\mathbf{p}_1$ ”, αντιστοίχως.

12.4 Μεταβολές Εντατικών Μεγεθών

Όπως καταδείχθηκε στην προηγούμενη ενότητα (12.3), η γεωμετρική μη-γραμμικότητα σημαίνει ότι οι συνθήκες ισορροπίας υπολογίζονται στην παραμορφωμένη κατάσταση· συνεπώς, η εξίσωση που περιγράφει την αρχή της υπέρθεσης τροποποιείται ως ακολούθως:

$$\Delta\mathbf{Q}_s = \mathbf{B}_0(\Delta\mathbf{p}_0) \cdot \Delta\mathbf{p}_0 + \mathbf{B}_1(\Delta\mathbf{p}_1) \cdot \Delta\mathbf{p}_1 \quad (93)$$

Όπου στην (93) οι πίνακες ισορροπίας $\{\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1\}$ είναι συναρτήσεις των εξωτερικών φορτίων “ $\Delta\mathbf{p}_0$ ” και των υπέρ-στατικών μεγεθών “ $\Delta\mathbf{p}_1$ ”, αντιστοίχως.

12.5 Διατύπωση του Προβλήματος

Σύμφωνα με τον ορισμό της συνάρτησης διαρροής, μια κατανομή εντάσεων είναι στατικώς αποδεκτή μόνο αν ικανοποιεί την ανίσωση (36) σε κάθε βήμα μιας ανάλυσης. Επομένως, το αντίστοιχο μέρος της (24) μπορεί να γραφεί ως ακολούθως:

$$\mathbf{Y}_* = \mathbf{c}_{(k)} - \nabla\mathbf{g}^T \cdot \mathbf{Q}_{(k)} = \mathbf{c}_{(k)} - \nabla\mathbf{g}^T \cdot (\mathbf{Q}_{(k-1)} + \Delta\mathbf{Q}_{(k)}) = \mathbf{c}_{(k)} - \nabla\mathbf{g}^T \cdot \mathbf{Q}_{(k-1)} - \nabla\mathbf{g}^T \cdot \Delta\mathbf{Q}_{(k)} \geq \mathbf{0} \quad (94)$$

Συνδυάζοντας τις Εξισώσεις (16), (36), και αντικαθιστώντας στην (61), το πλαστικό δυναμικό “ \mathbf{Y}_* ” μπορεί να διατυπωθεί ως συνάρτηση των εξωτερικών φορτίων και των υπέρ-στατικών μεγεθών. Αν οι συντελεστές αυτής της σύνθετης συνάρτησης συμπυκνωθούν σε ένα μητρώο πρόσπτωσης “ $\bar{\mathbf{N}}$ ” [49], μπορεί να γραφεί ένα σύνολο γραμμικών περιορισμών σε μορφή ανισοτήτων:

$$\mathbf{Y}_* = \mathbf{c}_{(k)} - \bar{\mathbf{N}}^T \cdot \mathbf{Q}_{(k-1)} - (\bar{\mathbf{N}}^T \cdot \mathbf{B}_0) \cdot \Delta\mathbf{p}_{0,(k)} - (\bar{\mathbf{N}}^T \cdot \mathbf{B}_1) \cdot \Delta\mathbf{p}_{1,(k)} \geq \mathbf{0} \quad (95)$$

Αντικαθιστώντας την Εξίσωση (93) στην (21), έπειτα τροποποιώντας την (23) με χρήση της (36), και την (25) με χρήση της (93), έπειτα αντικαθιστώντας και τις τρεις εξισώσεις στην (19) και μετά στην (18), λαμβάνουμε:

$$\left[\mathbf{B}_1^T \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{F}_S) \cdot \mathbf{B}_0 \right] \cdot \Delta\mathbf{p}_{0,(k)} + \left[\mathbf{B}_1^T \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{F}_S) \cdot \mathbf{B}_1 \right] \cdot \Delta\mathbf{p}_{1,(k)} + (\mathbf{B}_1^T \cdot \bar{\mathbf{N}}) \cdot \Delta\lambda_{(k)} = \mathbf{0} \quad (96)$$

Αντικαθιστώντας την Εξίσωση (93) στην (21), έπειτα τροποποιώντας την (23) με χρήση της (36), και την (25) με χρήση της (93), έπειτα αντικαθιστώντας και τις τρεις εξισώσεις στην (19) και μετά στην (26), λαμβάνουμε:

$$\left[\mathbf{B}_0^T \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{F}_S) \cdot \mathbf{B}_0 \right] \cdot \Delta\mathbf{p}_{0,(k)} + \left[\mathbf{B}_0^T \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{F}_S) \cdot \mathbf{B}_1 \right] \cdot \Delta\mathbf{p}_{1,(k)} + (\mathbf{B}_0^T \cdot \bar{\mathbf{N}}) \cdot \Delta\lambda_{(k)} = \Delta\mathbf{u}_{s,(k)} \quad (97)$$

Με την βοήθεια των (96) και (97), και συμπύσσοντας τα “ $\Delta\mathbf{p}_0$ ” και “ $\Delta\mathbf{p}_1$ ” σε ενιαίο διάνυσμα, λαμβάνουμε:

$$\left[\begin{array}{c|c} \left[\mathbf{B}_0^T \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{F}_S) \cdot \mathbf{B}_0 \right] & \left[\mathbf{B}_0^T \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{F}_S) \cdot \mathbf{B}_1 \right] \\ \hline \left[\mathbf{B}_1^T \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{F}_S) \cdot \mathbf{B}_0 \right] & \left[\mathbf{B}_1^T \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{F}_S) \cdot \mathbf{B}_1 \right] \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{c} \Delta\mathbf{p}_0 \\ \Delta\mathbf{p}_1 \end{array} \right\}_{(k)} + \left(\left[\begin{array}{c} \mathbf{B}_0^T \\ \mathbf{B}_1^T \end{array} \right] \cdot \bar{\mathbf{N}} \right) \cdot \Delta\lambda_{(k)} = \left\{ \begin{array}{c} \Delta\mathbf{u}_s \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}_{(k)} \quad (98)$$

Η ενσωμάτωση των γεωμετρικών μη-γραμμικοτήτων στον πίνακα συντελεστών ευκαμψίας “**F**” (βλ. Εξίσωση (74) με αναφορά στις (5), (6), και (73)) καθώς και στους πίνακες ισορροπίας $\{\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1\}$ (βλ. Εξίσωση (92) και τις αντίστοιχες διαδικασίες στις ενότητες 12.3.1 και 12.3.2) επηρεάζει την μορφή των Εξισώσεων (95) και (98), λόγω του γεγονότος ότι οι στοιχειώδεις μεταβολές των αξονικών δυνάμεων “ $\text{diag}\{\Delta \mathbf{N}_s\}$ ” υπάρχουν στην (74) και οι αντίστοιχες συνιστώσες δυνάμεων “ $\Delta \mathbf{p}_i$ ” υπάρχουν στην (92), όπου $i=\{0,1\}$. συγκεκριμένα ο Εσσιανός (Hessian) πίνακας στην (98) μετατρέπεται σε συνάρτηση των πρωτεύοντων αγνώστων “ $\Delta \mathbf{p}_0$ ” και “ $\Delta \mathbf{p}_1$ ”, και οι περιορισμοί του προβλήματος γίνονται μη-γραμμικοί (βλ. Εξίσωση (95) που περιέχει το διάνυσμα των πλαστικών δυναμικών, “ \mathbf{Y}^* ”). Από την άλλη πλευρά, ο πίνακας “**F_S**” εξακολουθεί να υπολογίζεται με βάση την Εξίσωση (40) ή την (41), αντιστοίχως (με αναφορά στην Εξίσωση (39)).

Η Εξίσωση (98), μαζί με τις (95) και (24), μπορούν να θεωρηθούν ως οι συνθήκες Karush–Kuhn–Tucker (KKT) του ακόλουθου –εν γένει μη-γραμμικού– προβλήματος βελτιστοποίησης:

Εύρεση ελαχίστου της συνάρτησης:

$$f\left(\left\{\begin{array}{c} \Delta \mathbf{p}_0 \\ \Delta \mathbf{p}_1 \end{array}\right\}_{(k)}\right) = \int \left[\left\{ \Delta \mathbf{p}_0^T \quad \Delta \mathbf{p}_1^T \right\}_{(k)} \cdot \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B}_0^T \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{F}_S) \cdot \mathbf{B}_0 & \mathbf{B}_0^T \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{F}_S) \cdot \mathbf{B}_1 \\ \hline \mathbf{B}_1^T \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{F}_S) \cdot \mathbf{B}_0 & \mathbf{B}_1^T \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{F}_S) \cdot \mathbf{B}_1 \end{array} \right]_{(k)} - \left\{ \Delta \mathbf{u}_{s(k)}^T \quad \mathbf{0} \right\} \right] \cdot \mathbf{d} \left(\left\{ \begin{array}{c} \Delta \mathbf{p}_0 \\ \Delta \mathbf{p}_1 \end{array} \right\}_{(k)} \right) \quad (99)$$

Υποκείμενης στους περιορισμούς:

$$\int \left(\bar{\mathbf{N}}^T \cdot \left[\mathbf{B}_0 \quad \mathbf{B}_1 \right] \right) \cdot \mathbf{d} \left(\left\{ \begin{array}{c} \Delta \mathbf{p}_0 \\ \Delta \mathbf{p}_1 \end{array} \right\}_{(k)} \right) \leq \mathbf{c}_{(k)} - \bar{\mathbf{N}}^T \cdot \mathbf{Q}_{(k-1)}$$

Η συνάρτηση «*f*» στην (99) είναι μορφής πολωνύμου και τάξεως κυβικής (ή ανώτερης), αναλόγως της προσέγγισης που ακολουθείται για τους πίνακες ισορροπίας (βλ. Εξίσωση (92)). επομένως το πρόβλημα βελτιστοποίησης κατατάσσεται ως πρόβλημα Μη-Γραμμικού Προγραμματισμού (NLP). Συγκεκριμένα, αν τεθούν συγκεκριμένες τιμές για τα “ $\Delta \mathbf{p}_i$ ” στην Εξίσωση (92), όπου $i=\{0,1\}$, τότε το αντίστροφο πρόβλημα της βασιζόμενης στην μέθοδο των δυνάμεων δομοστατικής ανάλυσης με όρους 2^{ας} τάξεως προσεγγίζεται με την εύρεση του δεσμευμένου ακροτάτου (ελαχίστου) μιας πολωνυμικής συνάρτησης κυβικής τάξεως υπό γραμμικούς περιορισμούς· από την οπτική της υπολογιστικής υλοποίησης, αυτό σημαίνει ότι οι πίνακες ισορροπίας αντιμετωπίζονται ως σταθερές.

Το διάνυσμα των αγνώστων στην Εξίσωση (99) μπορεί να μειωθεί στην περίπτωση ανάλυσης κατά την οποία εξετάζεται ένας προδιαγεγραμμένος δρόμος φορτίσεως· δεδομένου ότι, στην περίπτωση σεναρίων (προδιαγεγραμμένων δρόμων) φόρτισης, οι (στοιχειώδεις και μη) μεταβολές “ $\Delta \mathbf{p}_0$ ” των εξωτερικών φορτίων είναι καλώς ορισμένες, μπορούν να αντικατασταθούν στις εξισώσεις του προβλήματος από το αντίστοιχο διάνυσμα σταθερών “ \mathbf{r}_p ” που τις ορίζει (βλ. Σχήμα 22).

Επομένως, μπορεί να γραφεί ένας συνοπτικότερος φορμαλισμός, όπου οι μεταβολές “ $\Delta \mathbf{u}_{s(k)}$ ” των επικόμβιων μετατοπίσεων έχουν αφαιρεθεί, αφού πλέον μπορούν να υπολογισθούν μέσω της Εξίσωσης (26) ως παράγωγες ποσότητες που είναι συνάρτηση των στοιχειωδών μεταβολών των υπέρ-στατικών μεγεθών “ $\Delta \mathbf{p}_{1,(k)}$ ” και των αντίστοιχων μεταβολών των πολλαπλασιαστών Lagrange “ $\Delta \lambda_{(k)}$ ”:

Εύρεση ελαχίστου της συνάρτησης:

$$f(\Delta \mathbf{p}_1) = \int \Delta \mathbf{p}_{1,(k)}^T \cdot \left[\mathbf{B}_1^T \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{F}_S) \cdot \mathbf{B}_1 \right] \cdot \mathbf{d}(\Delta \mathbf{p}_{1,(k)}) + \mathbf{r}_p^T \cdot \left[\mathbf{B}_0^T \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{F}_S) \cdot \mathbf{B}_1 \right] \cdot \Delta \mathbf{p}_{1,(k)} \quad (100)$$

Υποκείμενης στους περιορισμούς:

$$\int \left(\bar{\mathbf{N}}^T \cdot \left[\mathbf{B}_1 \right] \right) \cdot \mathbf{d}(\Delta \mathbf{p}_{1,(k)}) \leq \mathbf{c}_{(k)} - \bar{\mathbf{N}}^T \cdot \mathbf{Q}_{(k-1)} - \bar{\mathbf{N}}^T \cdot \mathbf{r}_p$$

Το ανωτέρω πρόβλημα δεν είναι κυρτό· για την επίλυσή του σύμφωνα με την διαθέσιμη τεχνολογία αλγορίθμων, ενδέχεται να απαιτηθεί μια διαγώνια ενίσχυση του μη-γραμμικού Εσσιανού (*Hessian*) πίνακα.

Κάθε ένα από τα διατυπωθέντα προβλήματα (βλ. *Εξισώσεις (99) και (100)*) μπορεί να επιλυθεί κατά επαναληπτικό (*θαμιστικό*) τρόπο· απαιτούνται μια αριθμητική στρατηγική ελεγχόμενη με βάση τις μετατοπίσεις, και μια ελεγχόμενη με βάση τα φορτία, αντιστοίχως. Ακολουθούν λεπτομερείς περιγραφές.

12.6 Μια Αριθμητική Μέθοδος Βασιζόμενη σε Ελεγχόμενη Εφαρμογή Φορτίου

Μια αριθμητική μεθοδολογία που βασίζεται σε αλγόριθμο βελτιστοποίησης (π.χ. *Τετραγωνικού Προγραμματισμού, Σειριακού Τετραγωνικού Προγραμματισμού, Μέθοδο Εσωτερικού Σημείου*) θα αναζητήσει μια βέλτιστη λύση τηρώντας αυστηρά τα όρια των περιορισμών. Με αναφορά στο φυσικό πρόβλημα που εξετάζεται στην παρούσα διατριβή, ο τρόπος λειτουργίας των αλγορίθμων αυτών συνεπάγεται ότι κατά την διάρκεια της ανάλυσης δεν θα απαιτηθεί καμία επιστροφή του διανύσματος της λύσης εντός των ορίων της επιφάνειας διαρροής, κάτι που θα χρειαζόταν αν ακολουθούσε κανείς την μέθοδο άμεσης ακαμψίας· ωστόσο, αυτό το υπολογιστικό πλεονέκτημα έχει και ένα μειονέκτημα: η «βέλτιστη» λύση που προσδιορίζεται προκύπτει υπό την υπόθεση/παραδοχή ότι η πλήρης πλαστικοποίηση/μετατροπή της κατασκευής σε μηχανισμό θα λάβει χώρα πριν την εκδήλωση οποιωνδήποτε φαινομένων τοπικής ή καθολικής αστάθειας.

Υπό μια πιο συγκεκριμένη οπτική, οι αλγόριθμοι βελτιστοποίησης απαιτούν ένα αυστηρώς κυρτό πρόβλημα ως δεδομένο εισόδου προκειμένου να αποδώσουν μια λύση που να αντιστοιχεί σε ολικό ελάχιστο· με άλλα λόγια, ο Εσσιανός (*Hessian*) πίνακας των δεδομένων εισόδου πρέπει να είναι θετικά ορισμένος. Αν ένα πρόβλημα είναι ημι-κυρτό ή μη-κυρτό, εφαρμόζεται μια ενίσχυση της κύριας διαγώνιου του Εσσιανού (*Hessian*) πίνακα από τον ίδιο τον αλγόριθμο βελτιστοποίησης, προκειμένου να εξασφαλιστεί η σύγκλιση· σε φυσικούς όρους με αναφορά στο εξεταζόμενο πρόβλημα, αυτό σημαίνει ότι η δομική ευστάθεια υποτίθεται και επιβάλλεται στις εξισώσεις. Επομένως, αν μια βασιζόμενη σε αλγορίθμους βελτιστοποίησης βήμα-προς-βήμα διαδικασία επρόκειτο να πλησιάσει ένα σημείο όπου ο Εσσιανός πίνακας του προβλήματος θα μετατρέποταν σε θετικά ημί-ορισμένο ή αρνητικά ορισμένο, θα αποτύγχανε να προσδιορίσει το κρίσιμο φορτίο της υπό εξέτασης κατασκευής.

Από μια πρακτική οπτική, και τηρώντας τους ως ανωτέρω περιορισμούς, είναι δυνατόν να παραχθεί μια αριθμητική διαδικασία ελεγχόμενης εφαρμογής φορτίου για την επίλυση του προβλήματος που περιέχει όρους 2^{45} τάξεως και περιγράφεται από την Εξίσωση (100). Μια τέτοια αριθμητική μεθοδολογία θα είχε την δυνατότητα να προσομοιώνει αποτελεσματικά την μετά-ελαστική απόκριση μεταλλικών πλαισίων ύψους έως δέκα (10) ορόφων οι οποίες έχουν σχεδιαστεί και κατασκευαστεί με διατομές Κατηγορίας 1 (σε μερικές περιπτώσεις και Κατηγορίας 2, επίσης) σύμφωνα με τον Ευρωκώδικα 3 (E.C.3).

Η αριθμητική μεθοδολογία που παρουσιάζεται κατωτέρω λαμβάνει υπ' όψιν μη-ολόνομα, ελαστικά-ιδεατώς πλαστικά υλικά καθώς και ελαστικά-πλαστικώς κρατυνόμενα υλικά υπό θεωρήσεις περί γεωμετρικών μη-γραμμικοτήτων. Στην ουσία, είναι μια παραλλαγή της μεθοδολογίας που παρουσιάστηκε στην ενότητα 11.2, με την μόνη διαφορά την αναδρομική ενημέρωση των περιεχομένων των πινάκων ισορροπίας:

0. Ανάγνωση και προεπεξεργασία δεδομένων εισόδου.
1. Εύρεση της ελάχιστης δυνατής στατικής βάσης λόγω των εξωτερικών φορτίων και μιας (όσο το δυνατόν) ελάχιστης λόγω υπέρ-στατικών μεγεθών, και υπολογισμός των πινάκων ισορροπίας \mathbf{B}_i ,

- όπου $i=\{0,1\}$, αντιστοίχως (βλ. τις διαδικασίες που ορίστηκαν και περιεγράφηκαν στις ενότητες 5.4 και 12.3).
2. Ορισμός του προδιαγεγραμμένου δρόμου φορτίσεως, “ \mathbf{r}_p ” (βλ. Σχήμα 26).
 3. Αρχικοποίηση του μετρητή κλάδων του προδιαγεγραμμένου δρόμου φορτίσεως $n=1$.
 4. Για τον τρέχοντα κλάδο “ n ” του δρόμου φορτίσεως, πραγματοποιείται υπολογισμός όλων των αντίστοιχων πινάκων ευκαμψίας ($\mathbf{B}_i^T \cdot \mathbf{F}_S \cdot \mathbf{B}_i$), όπου $\{i,j\}=\{1,0\},\{1,1\}$. Η διαδικασία ενημέρωσης του πίνακα “ \mathbf{F} ” λόγω ελαστικότητας γίνεται με χρήση των Εξισώσεων (5), (6), και (14) ή (73), για ανάλυση με $1^{η}$ και $2^{η}$ τάξεως όρους, αντιστοίχως. Για τους πίνακες ισορροπίας “ \mathbf{B}_i ”, όπου $i=\{0,1\}$, η Εξίσωση (34) (με αναφορά στις (27) – (33)) χρησιμοποιείται για την ανάλυση με όρους $1^{η}$ τάξεως, και η Εξίσωση (92) (με αναφορά στις (83) και (91) καθώς και στις σχετικές με αυτές διαδικασίες) χρησιμοποιείται για την ανάλυση με όρους $2^{ος}$ τάξεως· εδώ, η τάξη του πολυωνύμου προσέγγισης μειώθηκε σε κυβική και οι ανισώσεις των περιορισμών εκφυλλίστηκαν σε γραμμικές, μέσω της υπόθεσης/παραδοχής ότι οι υπό-πίνακες “ $\delta \mathbf{B}_i$ ” στην Εξίσωση (92) είναι συναρτήσεις των αντίστοιχων μοναδιαίας τιμής στοιχειωδών μεταβολών “ $\Delta \mathbf{p}_i$ ”, όπου $i=\{0,1\}$.
 5. Αρχικοποίηση του μετρητή βημάτων ανάλυσης, $k=1$.
 6. Έλεγχος για έναρξη νέων ή για παραβίαση υφιστάμενων συσχετισμένων πλαστικών ροών. Μια συσχετισμένη πλαστική ροή θεωρείται ως έτοιμη να ενεργοποιηθεί όταν το διάνυσμα αλληλοεπιδρώντων εντατικών συνιστωσών μιας κρίσιμης διατομής εγγίζει κάποιο από τα υπέρ-επίπεδα του πολυτόπου διαρροής αυτής· κατά συνέπεια, η αντίστοιχη συνιστώσα του διανύσματος των πλαστικών δυναμικών γίνεται μηδενική (βλ. Εξίσωση (95)). Η διαδικασία ελέγχου για παραβιαζόμενες συσχετισμένες πλαστικές ροές γίνεται χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (48), με αναφορά στην υπολογιζόμενη ως προς τις εντάσεις βαθμίδα της (36), την (39), και την (93):
 - a. Αν δεν ενεργοποιήθηκαν νέα συμβάντα (π.χ. η διαδικασία ανάλυσης βρίσκεται στην αρχή ή υπάρχει συνεχιζόμενη ολόνομη συμπεριφορά της κατασκευής), μετάβαση στο βήμα 8.
 - b. Αν ενεργοποιήθηκε ένα νέο σύνολο συμβάντων (π.χ. ενεργοποίηση μιας συσχετισμένης πλαστικής ροής ή/και πλαστική αποφόρτιση), εκτέλεση των βημάτων 7 έως 9, έπειτα επιστροφή στο βήμα (6.b) και επανέλεγχος· αν δεν ανιχνευθούν νέα συμβάντα μετά τον επανέλεγχο, μετάβαση στο βήμα 10.
 7. Καταχώριση επικαιροποιημένων τιμών στους πίνακες ($\mathbf{B}_i^T \cdot \mathbf{F}_S \cdot \mathbf{B}_i$) λόγω των μεταβολών της πλαστικής κράτυνσης, όπου $\{i,j\}=\{1,0\},\{1,1\}$ · η διαδικασία ενημέρωσης αυτών των εκπεφρασμένων σε όρους ευκαμψίας πινάκων γίνεται χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (40) ή την ομάδα εξισώσεων (41) (με αναφορά στην Εξίσωση (39), και ένα κατάλληλο σύνολο παραμορφώσεων διαρροής, π.χ. την εκπεφρασμένη σε όρους ελαστικότητας ($S=1$) παραλλαγή της Εξίσωσης (40) ή της ομάδας Εξισώσεων (41)).
 8. Ενημέρωση των περιορισμών ανισότητας του προβλήματος. Η διαδικασία ενημέρωσης των σταθερών “ $\mathbf{c}_{(k)}$ ” γίνεται χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (46), αναλόγως του προκαθορισμένου κανόνα κράτυνσης. Στην περίπτωση της πλαστικής αποφόρτισης, και πάλι αναλόγως του προκαθορισμένου κανόνα κράτυνσης, το πολύτοπο διαρροής είτε συρρικνώνεται, είτε μετακινείται αντίθετα προς την κατεύθυνση του διανύσματος κράτυνσης ώστε το ενεργό υπερέπιπεδο να αγγίζει το πέρας του διανύσματος αλληλοεπιδρώντων εντάσεων που προσδιορίστηκε κατά το τέλος του προηγούμενου βήματος ($k-1$): Χρησιμοποιούνται οι Εξισώσεις (49) και (50).
 9. Επειδή οι συνιστώσες του διανύσματος μεταβολής εξωτερικών φορτίων “ \mathbf{r}_p ” ενδέχεται να είναι αρκετά μεγάλες ώστε να προκαλέσουν παραβίαση της συνθήκης στατικών αποδεκτών κατανομών εντάσεων, απαιτείται μια κατάλληλη κλιμάκωσή τους ώστε να διατηρείται σε ισχύ η συνθήκη

συμπληρωματικότητας: Πολλαπλασιασμός του “ \mathbf{r}_p ” με έναν μικρό αριθμό $\rho \in (0,1]$. (Στα παραδείγματα που μελετήθηκαν σε αυτή την διατριβή, οι τιμές $\rho \in [10^{-6}, 1]$ βρέθηκαν να είναι σε γενικές γραμμές επαρκείς, με την τιμή $\rho=10^{-3}$ να είναι ένας βέλτιστος συμβιβασμός ανάμεσα σε υπολογιστική ταχύτητα και ακρίβεια).

10. Επίλυση του προβλήματος (100) χρησιμοποιώντας οποιονδήποτε κατάλληλο αλγόριθμο (π.χ. [68] για ανάλυση με όρους 1^{ης} τάξεως ή [70] για ανάλυση με όρους 2^{ας} τάξεως, ή την αντίστοιχη παραλλαγή του [194] για κάθε τάξη ανάλυσης) και λήψη ενός συνόλου πρωτεύουσών και δυνάμεων μεταβλητών. Αν ο αλγόριθμος δεν συγκλίνει, μετάβαση στο βήμα 20, διότι η κατασκευή κατέρρευσε.

Σημείωση: Στην ελεγχόμενη από το εξωτερικώς ασκούμενο φορτίο ανάλυση προβλημάτων μεγάλης κλίμακας, όταν πλησιάζεται το σημείο κατάρρευσης, ενδέχεται ο αλγόριθμος επίλυσης να αποδώσει μικρές επαυξήσεις στα φορτία ενώ οι μετακινήσεις αναφοράς να έχουν λάβει ήδη πολύ μεγάλες τιμές. Αυτό θεωρείται ότι οφείλεται στο σφάλμα στρογγυλοποίησης του ηλεκτρονικού υπολογιστή· ένα απλό κριτήριο προκειμένου να αποφευχθούν περιττά βήματα πρακτικώς μηδενικής επαύξησης των εξωτερικών φορτίων είναι να πραγματοποιείται σύγκριση της σχετικής μεταβολής στην τέμνουσα βάση μεταξύ διαδοχικών βημάτων ανάλυσης, π.χ.:

$$\text{Αν } \left| \frac{\|\bar{\mathbf{v}}_{b,(k)}\| - \|\bar{\mathbf{v}}_{b,(k-1)}\|}{\|\bar{\mathbf{v}}_{b,(k-1)}\|} \cdot 100\% < 1\% \Rightarrow \text{Τερματισμός (μετάβαση στο βήμα 20)}$$

11. Διαίρεση των συνιστωσών της λύσης $\{\Delta \mathbf{p}_1, \Delta \mathbf{l}\}$ με την τιμή “ ρ ”.
12. Υπολογισμός του “ $\Delta \mathbf{Q}_{(k)}$ ”. Χρησιμοποιούνται οι Εξισώσεις (16) και (34)· οι μεταβολές των τεμνουσών δυνάμεων μπορούν να υπολογισθούν εύκολα από τις τοπικές συνθήκες ισορροπίας κατά μήκος κάθε στοιχείου.
13. Υπολογισμός “ $\Delta \mathbf{q}_{el,(k)}$ ”· χρησιμοποιείται η Εξίσωση (22) με αναφορά στις Εξισώσεις (5), (6)· και η (14) ή η (73), για ανάλυση με όρους 1^{ης} και 2^{ης} τάξεως, αντίστοιχα.
14. Υπολογισμός “ $\Delta \mathbf{q}_{pl,(k)}$ ”. Για ελαστικό-ιδεωδώς πλαστικό υλικό, χρησιμοποιείται η Εξίσωση (23)· για ελαστικό-πλαστικώς κρατυνόμενο υλικό, χρησιμοποιείται η Εξίσωση (25), όπου οι συντελεστές ευκαμψίας μπορούν να υπολογισθούν από την Εξίσωση (40) ή (41), με την βοήθεια της (39).
15. Εύρεση του ελάχιστου συντελεστή “ $\Delta \gamma_k$ ” κλιμάκωσης της λύσης με κριτήριο να ενεργοποιείται τουλάχιστον μια νέα πλαστική άρθρωση, διασφαλίζοντας παράλληλα ότι η υπολογισθείσα τιμή δεν προκαλεί υπέρβαση του ορίου του τρέχοντα κλάδου του προδιαγεγραμμένου δρόμου φορτίσεως: Ο προσδιορισμός του συντελεστή γίνεται χρησιμοποιώντας τις Εξισώσεις (58) και (59)· έπειτα, αν απαιτείται, πραγματοποιείται νέα κλιμάκωση σύμφωνα με την μέγιστη επιθυμητή μετατόπιση αναφοράς, με την βοήθεια της (60).
16. Κλιμάκωση των αντίστοιχων μεταβολών έντασης και παραμόρφωσης χρησιμοποιώντας τον συντελεστή που υπολογίστηκε προηγουμένως:

$$\Delta \mathbf{Q}_{(k)} \rightarrow \Delta \gamma_k \cdot \Delta \mathbf{Q}_{(k)} \quad , \quad \Delta \mathbf{q}_{el,(k)} \rightarrow \Delta \gamma_k \cdot \Delta \mathbf{q}_{el,(k)} \quad , \quad \Delta \mathbf{q}_{pl,(k)} \rightarrow \Delta \gamma_k \cdot \Delta \mathbf{q}_{pl,(k)}$$

17. Πρόσθεση των υπολογισθέντων μεταβολών έντασης και παραμόρφωσης του νέου βήματος (k) στις αντίστοιχες τιμές του προηγούμενου βήματος ($k-1$):

$$\mathbf{Q}_{(k)} = \mathbf{Q}_{(k-1)} + \Delta \mathbf{Q}_{(k)} \quad , \quad \mathbf{q}_{el,(k)} = \mathbf{q}_{el,(k-1)} + \Delta \mathbf{q}_{el,(k)} \quad , \quad \mathbf{q}_{pl,(k)} = \mathbf{q}_{pl,(k-1)} + \Delta \mathbf{q}_{pl,(k)}$$

18. Υπολογισμός του “ $\Delta \mathbf{u}_{s,(k)}$ ” χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (26). Έπειτα, πρόσθεση των τιμών αυτών στις αντίστοιχες τιμές μετατοπίσεως του προηγούμενου βήματος ($k-1$):

$$\mathbf{u}_{s,(k)} = \mathbf{u}_{s,(k-1)} + \Delta \mathbf{u}_{s,(k)}$$

19. Αν επιτεύχθηκε το τέλος του τρέχοντα κλάδου φόρτισης (δηλαδή αν ισχύει $\|\Delta \mathbf{p}_0\| - \sum_{i=1}^{i=k} \Delta \gamma_i \leq \rho$ – βλ. Σχήμα 2δ), μετάβαση στο βήμα 4 και επανάληψη της διαδικασίας για $n \rightarrow n+1$. αν επιτεύχθηκε το τέλος του δρόμου φόρτισης ή η μέγιστη μετατόπιση αναφοράς, μετάβαση στο βήμα 20. αλλιώς, επιστροφή στο βήμα 6 και επανάληψη της διαδικασίας για $k \rightarrow k+1$.
20. Εκτύπωση δεδομένων εξόδου, και τερματισμός.

Όπως καταδείχθηκε στην αρχή της παρούσας ενότητας, παρά το γεγονός ότι η παρούσα αριθμητική στρατηγική αποδίδει καλές ιδιότητες σύγκλισης, η κύρια ανεπάρκεια αυτής είναι η αδυναμία της να ανιχνεύσει το κρίσιμο σημείο ισορροπίας (φορτίο λυγισμού) μιας κατασκευής.

12.7 Σκέψεις για μια Αριθμητική Μέθοδο Βασιζόμενη σε Ελεγχόμενη Εφαρμογή Μετατοπίσεων

Σε αυτή την ενότητα, διατυπώνεται ένας βασιζόμενος σε μια παραλλαγή της μεθόδου Newton αλγόριθμος αριθμητικής επίλυσης προκειμένου να διερευνηθεί αν ο φορμαλισμός της Εξίσωσης (98) δύναται να ανιχνεύσει αποτελεσματικά το φορτίο λυγισμού ενός δομικού πλαισίου· λόγω της φύσεως της ήδη προταθείσας διαδικασίας αυτοματοποίησης για τους πίνακες ισορροπίας $\{\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1\}$, η ακόλουθη μεθοδολογία διατυπώνεται υπό παραδοχές περί πλήρους εσωτερικής συνέχειας της κατασκευής και αμιγώς ελαστικής συμπεριφοράς αυτής, όπου δεν απαιτούνται πολλαπλασιαστές Lagrange ($\Delta \lambda_{(k)} = 0$).

Κατ’ ουσίαν, ο ακόλουθος αλγόριθμος χρησιμοποιεί την μέθοδο μήκους τόξου (arc-length method), η οποία είναι η δουλειά των G.A. Wempner [187], E. Riks [188], και M.A. Crisfield [189]. Επειδή η αναφερθείσα μέθοδος αναπτύχθηκε με άξονα αναφοράς την μέθοδο άμεσης ακαμψίας, έχει προσαρμοστεί καταλλήλως για το εδώ βασιζόμενο στην μέθοδο των δυνάμεων πρόβλημα, μια προσέγγιση του οποίου παρουσιάζεται ακολούθως:

0. Ανάγνωση και προεπεξεργασία δεδομένων εισόδου.
1. Εύρεση μιας στατικής βάσης λόγω εξωτερικών φορτίων και μιας λόγω υπέρ-στατικότητας και υπολογισμός των πινάκων ισορροπίας \mathbf{B}_i , όπου $i=\{0,1\}$, αντιστοίχως (βλ. Εξίσωση (34)).
2. Καθορισμός των διανυσμάτων “ \mathbf{r}_p ” του προδιαγεγραμμένου δρόμου φορτίσεως (βλ. Σχήμα 22).
3. Αρχικοποίηση μετρητών $k=0, n=0$.
4. Επαύξηση του μετρητή κλάδων του προδιαγεγραμμένου δρόμου φορτίσεως, $n \rightarrow n+1$.
5. Αρχικοποίηση μέσω του ορισμού μιας στατικής εφικτής κατεύθυνσης για την λύση:
 - 5.a. Ορισμός του διανύσματος μεταβολής φορτίων “ \mathbf{r}_p ” σύμφωνα με τον τρέχοντα κλάδο “ n ” του προδιαγεγραμμένου δρόμου φορτίσεως.
 - 5.b. Υπόθεση περί ισχύος της ευστάθειας της κατασκευής, και υπολογισμός μιας αρχικής κατεύθυνσης λύσεως με την βοήθεια της συνθήκης συμβιβαστού των παραμορφώσεων:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{p}_0 \\ \Delta \mathbf{p}_1 \end{Bmatrix}_{(k)} = \rho \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -(\mathbf{B}_1^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{B}_1)^{-1} \cdot (\mathbf{B}_1^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{B}_0) \end{bmatrix} \cdot \{\mathbf{r}_p\} \quad (101)$$

Όπου:

$$0 < \rho < 1$$

Σημείωση: Αν τεθούν συγκεκριμένες τιμές στα διανύσματα “ $\Delta \mathbf{p}_i$ ” (όπου $i=\{0,1\}$) στις εξισώσεις για τον υπολογισμό των “ \mathbf{B}_0 ” και “ \mathbf{B}_1 ” (βλ. Εξίσωση (92) με αναφορά στις (83) και (91) καθώς και στις προσαρτημένες τους διεργασίες) τότε οι πίνακες ισορροπίας μπορούν να θεωρούνται ως σταθερές κατά την φάση της αρχικοποίησης.

5.c. Υπολογισμός των όρων 1^{ης} τάξεως του Εσσιανού (*Hessian*) σε δομή «ουρανογραμμής» (*skyline*):

$$\mathbf{H}_{(1st)} = \begin{bmatrix} (\mathbf{B}_0^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{B}_0) & (\mathbf{B}_0^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{B}_1) \\ (\mathbf{B}_1^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{B}_0) & (\mathbf{B}_1^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{B}_1) \end{bmatrix} \quad (102)$$

Σχόλιο: Η συγκεκριμένη μέθοδος αποθήκευσης που αφορά την στοιχειοθέτηση μόνο του τμήματος εκείνου των στηλών του Εσσιανού από το ύψος της κυρίας διαγώνιου και μέχρι και το τελευταίο μη-μηδενικό στοιχείο της εκάστοτε στήλης, είναι η προσφορότερη για την περίπτωση κατά την οποία η παραγοντοποίηση του Εσσιανού γίνεται σε γινόμενο τριών παραγόντων, δηλαδή κάτω τριγωνικού επί διαγώνιου επί άνω τριγωνικού πίνακα, όπου ο τελευταίος παράγοντας είναι ο ανάστροφος του κάτω τριγωνικού πίνακα. Η παραγοντοποίηση αυτή ονομάζεται LDL^T.

Σχόλιο: Η ονομασία «ουρανογραμμή» (*skyline*) οφείλεται στην ομοιότητα μεταξύ της τεθλασμένης γραμμής που περικλείει τις ζώνες μη-μηδενικών στοιχείων του πίνακα άνωθεν της κυρίας διαγώνιου αυτού και της νοητής τεθλασμένης γραμμής που σχηματίζουν οι κορυφές των ουρανοξυστών των Αμερικάνικων μεγαλουπόλεων με τον ουρανό.

5.d. Υπολογισμός των όρων 2^{ας} τάξεως του Εσσιανού σε δομή «ουρανογραμμής» χρησιμοποιώντας την αρχική εκτίμηση της λύσης (*προκύπτουσας θεωρώντας μόνο τους όρους 1^{ης} τάξεως*) από την (101) στις Εξισώσεις (92):

$$\mathbf{H}_{(2nd)} = \begin{bmatrix} (\mathbf{B}_0^T \cdot \mathbf{F}_{gnl} \cdot \mathbf{B}_0) & (\mathbf{B}_0^T \cdot \mathbf{F}_{gnl} \cdot \mathbf{B}_1) \\ (\mathbf{B}_1^T \cdot \mathbf{F}_{gnl} \cdot \mathbf{B}_0) & (\mathbf{B}_1^T \cdot \mathbf{F}_{gnl} \cdot \mathbf{B}_1) \end{bmatrix}_{(k)} \quad (103)$$

Όπου, με αναφορά στην Εξίσωση (74):

$$\mathbf{F}_{gnl} = \text{diag}\{\Delta \mathbf{N}_{(k)}\} \cdot \mathbf{F}_g = \text{diag}\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{0,N} & \mathbf{B}_{1,N} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{p}_0 \\ \Delta \mathbf{p}_1 \end{Bmatrix}_{(k)} \right\} \cdot \mathbf{F}_g \quad (104)$$

Σημείωση: Τα δύο μέρη του Εσσιανού αποθηκεύονται στην ίδια δομή θέσεων μνήμης.

5.e. Εφαρμογή παραγοντοποίησης LDL^T επί του Εσσιανού:

$$\mathbf{H}_{(1st)} + \mathbf{H}_{(2nd)} \rightarrow (\mathbf{L} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{L}^T)_{(k)} \quad (105)$$

5.f. Είναι ο Εσσιανός πίνακας θετικά ορισμένος;

(i) **Ναι:** Εκτίμηση των στοιχειωδών μεταβολών των μετατοπίσεων αναφοράς χρησιμοποιώντας όρους 1^{ης} και 2^{ης} τάξεως για τους πίνακες ισορροπίας (βλ. Εξίσωση (92)) στην Στατική/Κινηματική Δυναμικότητα / Αρχή Δυνατών Έργων (βλ. Εξίσωση (26)):

$$\Delta \mathbf{u}_{s(k)} = \left[\begin{bmatrix} \mathbf{B}_0^T \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{F}_{gnl}) \cdot \mathbf{B}_0 & (\mathbf{B}_0^T \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{F}_{gnl}) \cdot \mathbf{B}_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{p}_0 \\ \Delta \mathbf{p}_1 \end{Bmatrix}_{(k)} \right] \quad (106)$$

Όπου, με αναφορά στην (74):

$$\mathbf{F}_{gnl} = \text{diag}\{\Delta \mathbf{N}_{(k)}\} \cdot \mathbf{F}_g = \text{diag}\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{0,N} & \mathbf{B}_{1,N} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{p}_0 \\ \Delta \mathbf{p}_1 \end{Bmatrix}_{(k)} \right\} \cdot \mathbf{F}_g \quad (107)$$

Έπειτα, πραγματοποίηση ελέγχου περί του θετικού πρόσημου του εξωτερικού έργου:

$$\Delta \mathbf{p}_0^T \cdot \Delta \mathbf{u}_{s(k)} \geq 0 \quad (108)$$

Αν η ανίσωση (108) δεν ικανοποιείται, αυτό σημαίνει ότι εντοπίστηκε ένα σημείο διακλάδωσης στον δρόμο ισορροπίας· επιστροφή στο βήμα **5.b** και κλιμάκωση της εκτίμησης για την αρχική λύση (π.χ. επιλογή μιας μικρότερης τιμής για την παράμετρο μήκους τόξου “ ρ ”). Αν η (108) ικανοποιείται, πραγματοποιείται η επίλυση του ακόλουθου γραμμικοποιημένου συστήματος με βάση το σύνολο των εκτιμώμενων μετατοπίσεων αναφοράς που προέκυψαν από την (106):

$$(\mathbf{L} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{L}^T)_{(k)} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{p}_0 \\ \Delta \mathbf{p}_1 \end{Bmatrix}_{(k)} = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}_s \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}_{(k)} \quad (109)$$

Σημείωση: Σε αυτό το σημείο ελέγχονται οι τιμές μεταξύ των δύο λύσεων· δεν θα πρέπει να αναμένεται σημαντική απόκλιση.

(ii) **Όχι:** Η κατασκευή είναι ασταθής· τερματισμός του προγράμματος.

6. Έναρξη ενός νέου βήματος ανάλυσης, k :

$$\text{Τίθεται } k \rightarrow k+1, \text{ και έπειτα } \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{p}_0 \\ \Delta \mathbf{p}_1 \end{Bmatrix}_{(k)} = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{p}_0 \\ \Delta \mathbf{p}_1 \end{Bmatrix}_{(k-1)} \quad (110)$$

7. Υπολογισμός όρων 1^{ης} τάξεως του Εσσιανού – βλ. Εξίσωση (102).

8. Υπολογισμός όρων 2^{ας} τάξεως του Εσσιανού χρησιμοποιώντας την αρχική πρόλεξη της λύσης 1^{ης} τάξεως – βλ. Εξίσωση (103), όπου:

$$\mathbf{F}_{\text{gnl}} = \text{diag}\{\sum_{i=0}^{k-1} \Delta \mathbf{N}_i + \Delta \mathbf{N}_{(k)}\} \cdot \mathbf{F}_g = \text{diag}\left\{\sum_{i=0}^{k-1} \Delta \mathbf{N}_i + [\mathbf{B}_{0,N} \quad \mathbf{B}_{1,N}] \cdot \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{p}_0 \\ \Delta \mathbf{p}_1 \end{Bmatrix}_{(k)}\right\} \cdot \mathbf{F}_g \quad (111)$$

Σημείωση: Τα δύο μέρη του Εσσιανού (όροι 1^{ης} & 2^{ας} τάξεως) αποθηκεύονται σε κοινή δομή θέσεων μνήμης.

9. Εφαρμογή παραγοντοποίησης LDL^T στον Εσσιανό – βλ. Εξίσωση (105).

10. Είναι ο Εσσιανός πίνακας θετικά ορισμένος;

(a) **Ναι:** Εκτίμηση των στοιχειωδών μεταβολών των μετατοπίσεων αναφοράς χρησιμοποιώντας όρους 1^{ης} και 2^{ης} τάξεως στην Στατική/Κινηματική Δυναδικότητα / Αρχή των Δυνατών Έργων – χρησιμοποιείται η Εξίσωση (106) με την βοήθεια της (107).

(b) **Όχι:** Βρέθηκε κρίσιμο σημείο του δρόμου ισορροπίας· παροχή μιας νέας εφικτής κατεύθυνσης για την λύση του προβλήματος χρησιμοποιώντας την συνθήκη συμβιβαστού, αλλά για βήμα εξωτερικής φόρτισης αρνητικού (αντίθετου του αρχικού) πρόσημου, προκειμένου να ληφθεί υπ’ όψιν ο καθοδικός κλάδος του δρόμου ισορροπίας της κατασκευής:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{p}_0 \\ \Delta \mathbf{p}_1 \end{Bmatrix}_{(k)} = \rho \cdot \left[-(\mathbf{B}_1^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{B}_1)^{-1} \cdot (\mathbf{B}_1^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{B}_0) \right] \cdot \{-\mathbf{r}_p\} \quad (112)$$

Εκτέλεση των βημάτων **7**, **8** και **9** για τον ίδιο δείκτη βήματος “ k ”, έπειτα μετάβαση στο βήμα **11**.

11. Επίλυση της επικαιροποιημένης Εξίσωσης (109), σύμφωνα με την εκτιμώμενη στοιχειώδη μεταβολή της μετατόπισης αναφοράς.

12. Προσδιορίστηκε επιτυχώς προσεγγιστικά ένα νέο σημείο του δρόμου ισορροπίας. Σε αυτό το σημείο, οι δύο διαδοχικές εκτιμήσεις της λύσης θα πρέπει να συγκριθούν για πιθανές αποκλίσεις· συγκεκριμένα γίνεται έλεγχος των ακόλουθων συνθηκών:

$$-\rho \cdot \mathbf{r}_p \leq \Delta \mathbf{p}_{0(k)} \leq +\rho \cdot \mathbf{r}_p \quad \text{και} \quad \left| \|\Delta \mathbf{p}_{1(k)}\| - \|\Delta \mathbf{p}_{1(k-1)}\| \right| \leq \varepsilon \quad (113)$$

ή

$$\left| \left\| \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{p}_0 \\ \Delta \mathbf{p}_1 \end{Bmatrix}_{(k)} \right\| - \left\| \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{p}_0 \\ \Delta \mathbf{p}_1 \end{Bmatrix}_{(k-1)} \right\| \right| \leq \varepsilon \quad (114)$$

Όπου “ ε ” είναι το ελάχιστο σφάλμα της Κεντρικής Μονάδας Επεξεργασίας (CPU) ή κάποια (ή κάποια άλλη καταλλήλως επιλεγμένη αριθμητική ανοχή): αν κάποια ή και οι δύο από τις ανωτέρω συνθήκες δεν ικανοποιούνται, επιστροφή στο βήμα 7 και επανάληψη για το ίδιο βήμα ανάλυσης “ k ”. ειδάλλως, μετάβαση στο βήμα 13.

13. Ενημέρωση όλων των στατικών και κινηματικών μεταβλητών (ελαστικές κατανομές):

$$\mathbf{Q}_{s,(k)} = \mathbf{Q}_{s,(k-1)} + \Delta \mathbf{Q}_{s,(k)} \quad , \quad \mathbf{q}_{el,(k)} = \mathbf{q}_{el,(k-1)} + \Delta \mathbf{q}_{el,(k)} \quad , \quad \mathbf{u}_{s,(k)} = \mathbf{u}_{s,(k-1)} + \Delta \mathbf{u}_{s,(k)}$$

14. Αν αναπτύχθηκε η μέγιστη επιτρεπόμενη μετατόπιση αναφοράς, μετάβαση στο βήμα 15· αν η ανάλυση έφθασε στο τέλος του τρέχοντος κλάδου προδιαγεγραμμένης φορτίσεως, μετάβαση στο βήμα 4 και καθορισμός ενός νέου κλάδου φόρτισης, “ n ”. αλλιώς, μετάβαση στο βήμα 6 και εκκίνηση ενός νέου βήματος ανάλυσης “ k ”.

15. Εκτύπωση δεδομένων εξόδου και τερματισμός.

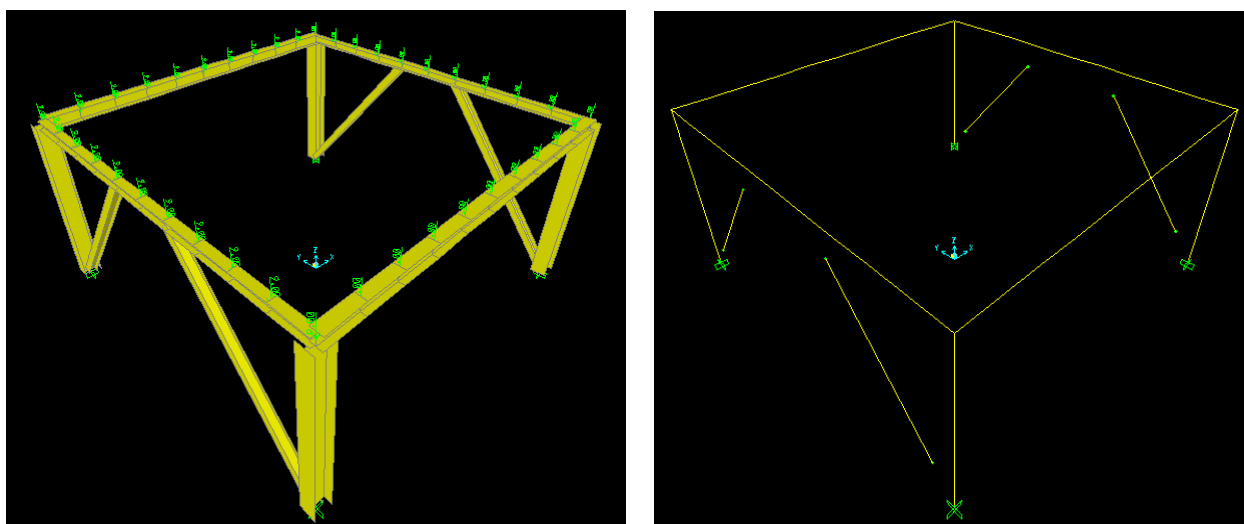
Η αριθμητική μεθοδολογία που παρουσιάστηκε ανωτέρω μπορεί να θεωρηθεί μόνο ως μια κεντρική ιδέα για μελλοντική ερευνητική κατεύθυνση· δεν έχει πραγματοποιηθεί επαρκής τεχνικός έλεγχος ακόμη, οπότε δεν υποτίθεται ούτε αποδεικνύεται η λειτουργικότητα ή η αποτελεσματικότητά της.

13 Παραδείγματα

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται διάφορα ενδεικτικά παραδείγματα προκειμένου να καταδειχθεί η λειτουργικότητα του βασιζόμενου στην μέθοδο των δυνάμεων φορμαλισμού που προτάθηκε. Όπου ήταν δυνατόν, τα αποτελέσματα συγκρίθηκαν με εκείνα που ελήφθησαν από την χρήση ευρέως αποδεκτών εμπορικών λογισμικών που βασίζονται στην ισοδύναμη μέθοδο άμεσης ακαμψίας· όπου δεν ήταν δυνατή η σύγκριση με εμπορικά λογισμικά, τα αποτελέσματα συγκρίθηκαν με αποτελέσματα λύσεων που βασίζονται στην διαθέσιμη διεθνή βιβλιογραφία.

13.1 Μονόροφο Τρισδιάστατο (3Δ) Πλαίσιο, Μονών Ανοιγμάτων, Με Έκκεντρους Συνδέσμους

Το ακόλουθο πλαίσιο (βλ. Σχήμα 31) επιλέχθηκε ως το 1^ο παράδειγμα. Έχει ύψος $H=3\text{m}$, και κεντροβαρείς αποστάσεις μεταξύ υποστυλωμάτων $L_x=L_y=6\text{m}$. Όλα τα υποστυλώματα είναι τοποθετημένα ώστε οι ισχυροί άξονες κάμψης αυτών να είναι παράλληλοι στον άξονα «y» του καθολικού συστήματος αναφοράς συντεταγμένων, και είναι πλήρως πακτωμένα στην βάση τους. Οι δοκοί τοποθετήθηκαν έτσι ώστε να κάμπτονται περί τον ισχυρό τους άξονα καθώς δέχονται τα εξωτερικά κατακόρυφα φορτία (τα οποία έχουν κατεύθυνση αντίθετη προς τον άξονα «z»), και κάθε μία εξ αυτών υποδιαιρείται σε μικρότερα στοιχεία, έκαστο μήκους $L=0.6\text{m}$. Οι έκκεντροι σύνδεσμοι τοποθετούνται εντός των ανοιγμάτων που είναι παράλληλα στο επίπεδο «y-z», θεωρούνται αμφιαρθρωτοί, και ελεύθεροι φορτίων.



Σχήμα 31: Τρισδιάστατες απεικονίσεις του μονόροφου πλαισίου (εικόνες από το SAP2000).

Οι ορισμοί του πλαισίου (αρίθμηση κόμβων και συντεταγμένες, συνδεσιμότητα μελών, αναθέσεις διατομών και αλληλοεπιδράσεις συνιστώσες έντασης) συνοψίζονται στους Πίνακες 3 και 4 ακολούθως.

Κόμβος	x	y	z	Κόμβος	x	y	z
1	6.00	6.00	0.00	7	0.00	3.60	3.00
2	0.00	6.00	0.00	8	0.00	2.40	3.00
3	0.00	0.00	0.00	9	0.00	0.00	3.00
4	6.00	0.00	0.00	10	6.00	0.00	3.00
5	6.00	6.00	3.00	11	6.00	2.40	3.00
6	0.00	6.00	3.00	12	6.00	3.60	3.00

Πίνακας 3: Επικόμβιες συντεταγμένες του μονόροφου πλαισίου.

Μέλος	Κόμβος: Αρχή→Πέρασ	Διατομή	Αλληλο- -επιδρώσες Συνιστώσες	Μέλος	Κόμβος: Αρχή→Πέρασ	Διατομή	Αλληλο- -επιδρώσες Συνιστώσες
1	1 → 5	HEM260	{N,M ₂ ,M ₃ }	9	6 → 5	HEM180	{M ₂ ,M ₃ }
2	2 → 6	HEM260	{N,M ₂ ,M ₃ }	10	9 → 8	HEB140	{M ₂ ,M ₃ }
3	3 → 9	HEM260	{N,M ₂ ,M ₃ }	11	8 → 7	HEB140	{M ₂ ,M ₃ }
4	4 → 10	HEM260	{N,M ₂ ,M ₃ }	12	7 → 6	HEB140	{M ₂ ,M ₃ }
5	1 → 12	HEB140	{N,M ₂ ,M ₃ }	13	9 → 10	HEM180	{M ₂ ,M ₃ }
6	2 → 7	HEB140	{N,M ₂ ,M ₃ }	14	10 → 11	HEB140	{M ₂ ,M ₃ }
7	3 → 8	HEB140	{N,M ₂ ,M ₃ }	15	11 → 12	HEB140	{M ₂ ,M ₃ }
8	4 → 11	HEB140	{N,M ₂ ,M ₃ }	16	12 → 5	HEB140	{M ₂ ,M ₃ }

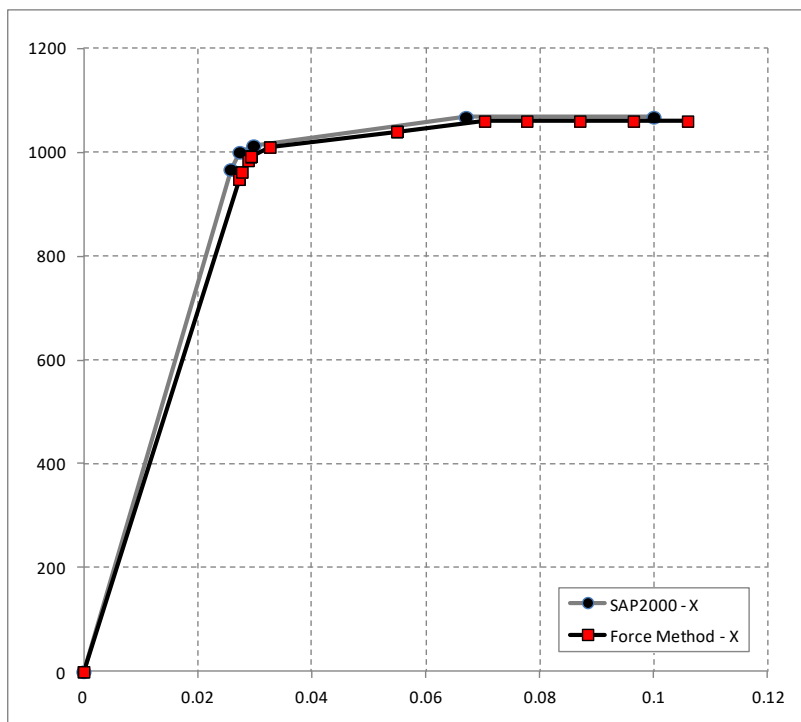
Πίνακας 4: Συνδεσιμότητα, διατομές, και αλληλοεπιδρώσες εντατικές συνιστώσες του μονόροφου πλαισίου.

Το υλικό της κατασκευής είναι χάλυβας ποιότητας S235, με μέτρο του Young $E=2.0E+8\text{kPa}$, συμβατική τάση διαρροής $f_y=235\text{MPa}$, και θεωρείται ελαστικό-ιδεωδώς πλαστικό.

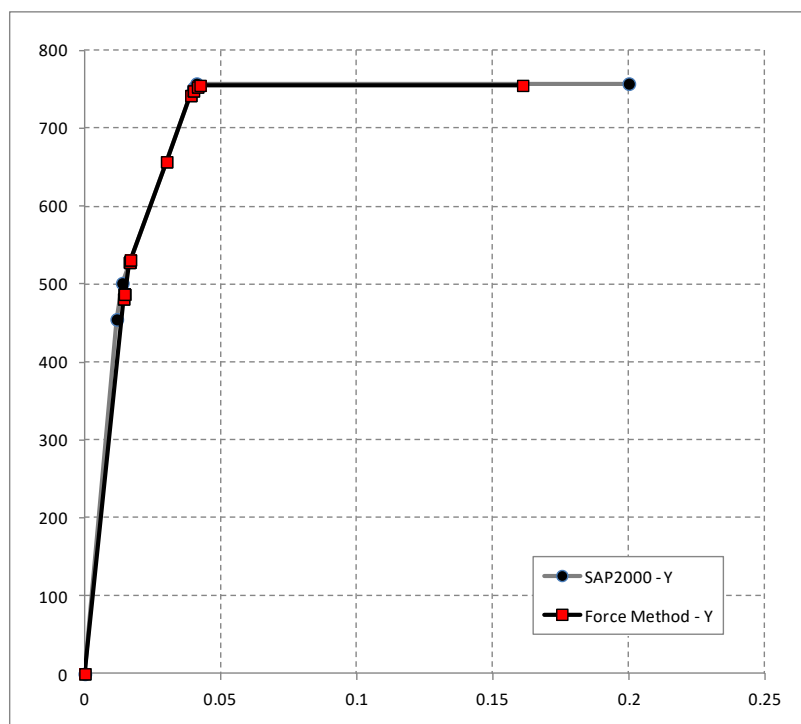
Για την προσομοίωση της μη-γραμμικότητας υλικού ακολουθείται η προσέγγιση της συγκεντρωμένης πλαστικότητας. Για τα υποστοιβάματα χρησιμοποιείται το γραμμικό κριτήριο αστοχίας κατά AISC-LRFD [175], για αλληλοεπίδραση $\{N, M_2, M_3\}$. Για τις δοκούς, εφαρμόζεται η παραλλαγή συζευγμένων ροπών $\{M_2, M_3\}$ του ίδιου κριτηρίου, δηλαδή χωρίς την συμμετοχή της αξονικής δύναμης $\{N\}$: προκειμένου να είναι εφικτή η σύγκριση με το SAP2000 [178], η επιρροή της στρέψης $\{T\}$ στις δοκούς δεν συμπεριλήφθηκε, καθ' όσον η αλληλεπίδραση στρέψης-ροπών κάμψης δεν υποστηρίζεται από την διαθέσιμη έκδοση του προγράμματος [178] (ωστόσο, για την συγκεκριμένη μορφή εξωτερικών φορτίων που ορίζεται παρακάτω, η συμμετοχή της στρέψης στην αναπτυσσόμενη ένταση της κατασκευής είναι πολύ μικρή). Υιοθετήθηκε μια γραμμική σχέση μεταξύ $\{M_2\}$ και $\{M_3\}$ και για τα δύο κριτήρια αλληλοεπίδρασης. Οι αρθρώσεις στα άκρα των έκκεντρων συνδέσμων δυσκαμψίας υλοποιήθηκαν σύμφωνα με τα οριζόμενα στην Εξίσωση (37).

Όλες οι δοκοί υπόκεινται σε ένα ομοιόμορφο φορτίο 15kN/m . Κάθε δοκός υποδιαιρείται σε μικρότερα στοιχεία μήκους 0.6m έκαστο, και τα ομοιόμορφα φορτία μετατρέπονται σε ένα πεπερασμένο σύνολο σημειακών φορτίων έκαστο μεγέθους 9kN . Τα οριζόντια φορτία ασκούνται στους τέσσερις άνω γωνιακούς κόμβους του πλαισίου.

Υπολογίστηκαν δύο στατικές ανελαστικές αναλύσεις, μία για κάθε οριζόντια κατεύθυνση $\{x, y\}$. Οι καμπύλες τέμνουσας βάσης προς την μετατόπιση της οροφής της κατασκευής παρουσιάζονται στα Σχήματα 32 και 33 ακολούθως, όπου συμπεριλαμβάνονται ποσοτικές συγκρίσεις με το λογισμικό SAP2000, για το οποίο χρησιμοποιήθηκαν οι προεπιλεγμένες παράμετροι ανάλυσης.



Σχήμα 32: Τέμνουσα βάσης προς μετατόπιση οροφής του πλαισίου (κατεύθυνση x). {Μονάδες: kN,m}.

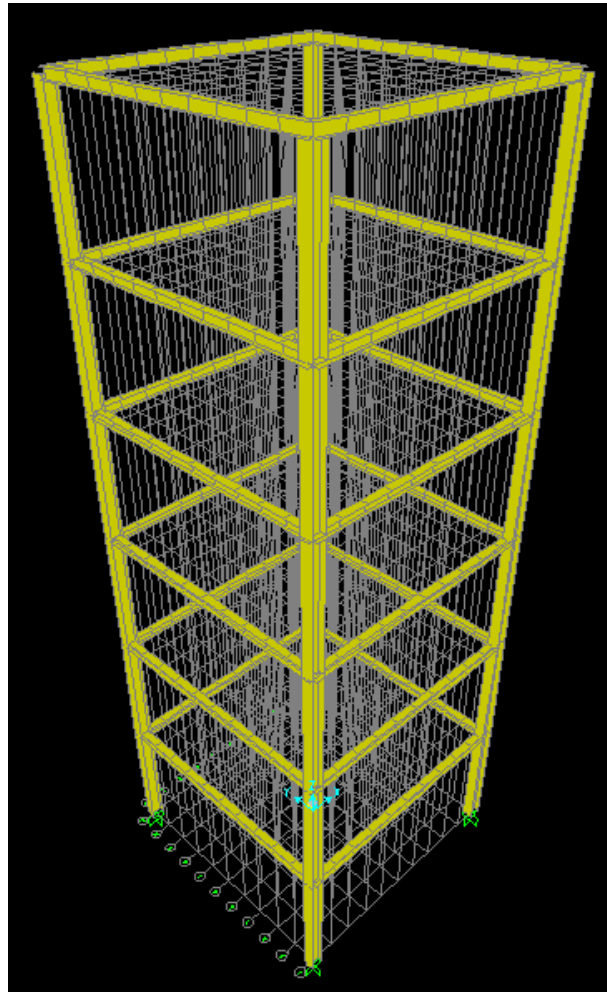


Σχήμα 33: Τέμνουσα βάσης προς μετατόπιση οροφής του πλαισίου (κατεύθυνση y). {Μονάδες: kN,m}.

Όπως διαφαίνεται από τα ανωτέρω σχήματα, τα αποτελέσματα είναι ικανοποιητικά: η μέγιστη τέμνουσα βάσης είναι $V_{b,x} \sim 1067 \text{ kN}$ για την κατεύθυνση « x », και $V_{b,y} \sim 757 \text{ kN}$ για την κατεύθυνση « y ».

13.2 Εξάωρο Τρισδιάστατο (3Δ) Πλαίσιο, Μονών Ανοιγμάτων

Ως δεύτερο παράδειγμα επιλέχθηκε ένα πλαίσιο έξι ορόφων, με ένα άνοιγμα σε κάθε οριζόντια διεύθυνση. Κάθε όροφος έχει ύψος $H=3.0\text{m}$ και κάθε άνοιγμα έκταση $L_x=L_y=6.0\text{m}$ (νοούμενη ως η απόσταση μεταξύ των αξόνων κέντρου βάρους των διατομών των αντίστοιχων υποστυλωμάτων). Οι δοκοί υποδιαιρούνται σε μικρότερα στοιχεία μήκους $L=0.6\text{m}$ έκαστο· τα υποστυλώματα τοποθετούνται έτσι ώστε οι ισχυροί άξονες κάμψης αυτών να είναι παράλληλοι στον άξονα «y» του καθολικού συστήματος αναφοράς και στην βάση του κτιρίου είναι πλήρως πακτωμένα. Η γεωμετρία του πλαισίου απεικονίζεται στο Σχήμα 34 ακολούθως.



Σχήμα 34: Τρισδιάστατη απεικόνιση του εξάωροφου πλαισίου (εικόνα από το SAP2000).

Οι διατομές δοκών και υποστυλωμάτων επιλέχθηκαν με σκοπό να σχηματίζεται ένας μηχανισμός πλάγιας κατάρρευσης όπου οι πλαστικές αρθρώσεις δημιουργούνται μόνο στα άκρα όλων των δοκών και σε εκείνα τα άκρα των υποστυλωμάτων που συνδέονται στην βάση του κτιρίου· συνοπτικά αναφέρεται και ως «μηχανισμός ισχυρών υποστυλωμάτων–ασθενών δοκών» (αγγλ.: «*strong column–weak beam sway mechanism*»). Ο σχεδιασμός κτιρίων που ακολουθούν αυτή την αρχή ονομάζεται «ικανοτικός». Οι διατομές και τα μήκη των μελών συνοψίζονται στον Πίνακα 5 ακολούθως.

Μέλη	Μήκος	Διατομή
Υποστυλώματα	3.0m	HEM300
Δοκοί	6.0m	HEM180

Πίνακας 5: Διατομές και μήκη μελών του εξάωροφου πλαισίου.

Το υλικό της κατασκευής είναι χάλυβας ποιότητας S235, με μέτρο του Young $E=2.0E+8\text{kPa}$, συμβατική τάση διαρροής $f_y=235\text{MPa}$, και θεωρείται ελαστικό-ιδεωδώς πλαστικό.

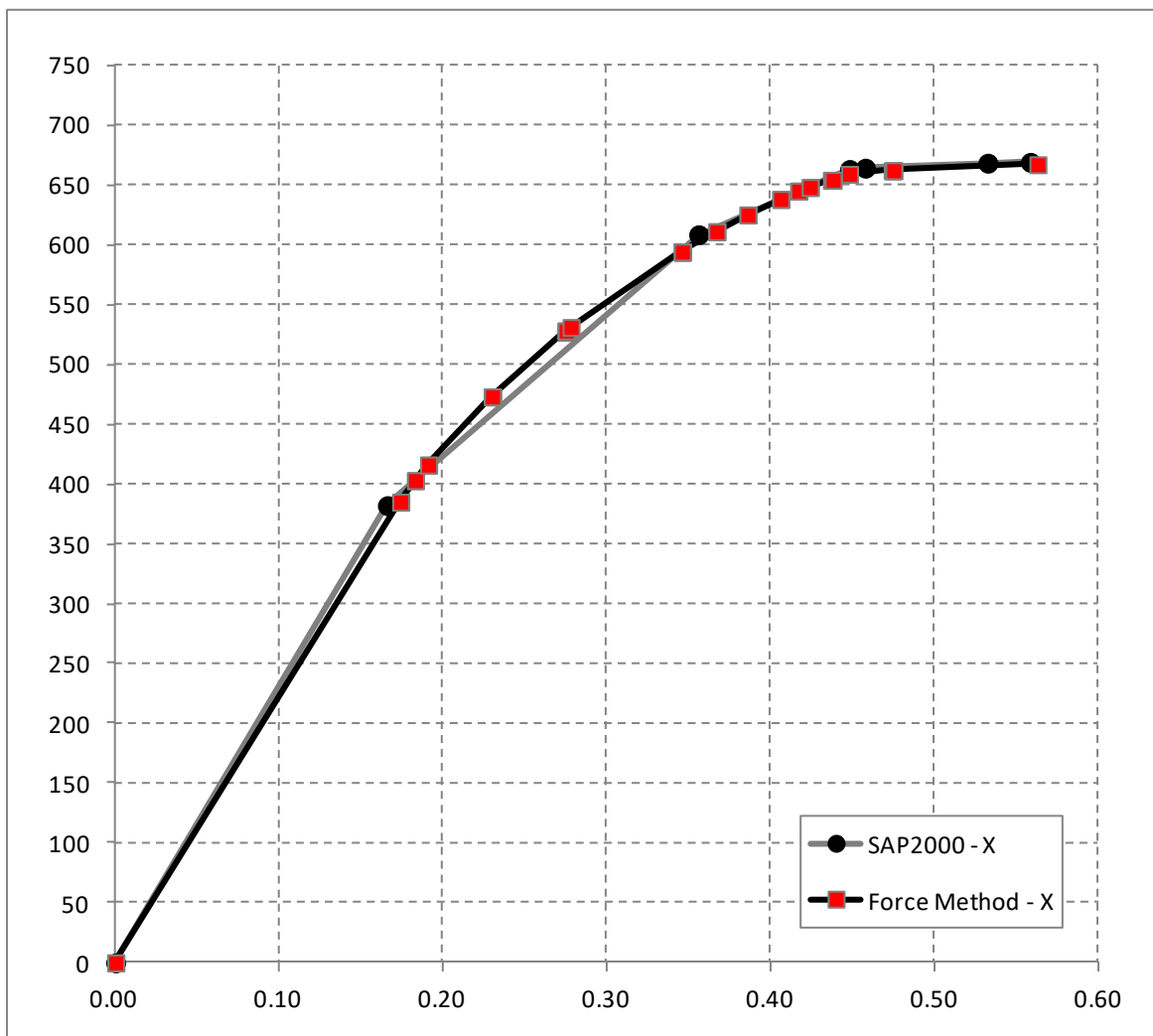
Για την προσομοίωση της μη-γραμμικότητας υλικού ακολουθήθηκε η παραδοχή σημειακών πλαστικών αρθρώσεων, όπως και στο 1^ο παράδειγμα.

Όλες οι δοκοί υπόκεινται σε ομοιόμορφα κατανεμημένο κατακόρυφο φορτίο 15kN/m . Κάθε δοκός υποδιαιρείται σε δέκα μικρότερα στοιχεία μήκους $L=0.6\text{m}$ έκαστο, και τα κατανεμημένα φορτία μετατρέπονται αντιστοίχως σε ένα πεπερασμένο σύνολο σημειακών φορτίων μεγέθους 9kN έκαστο.

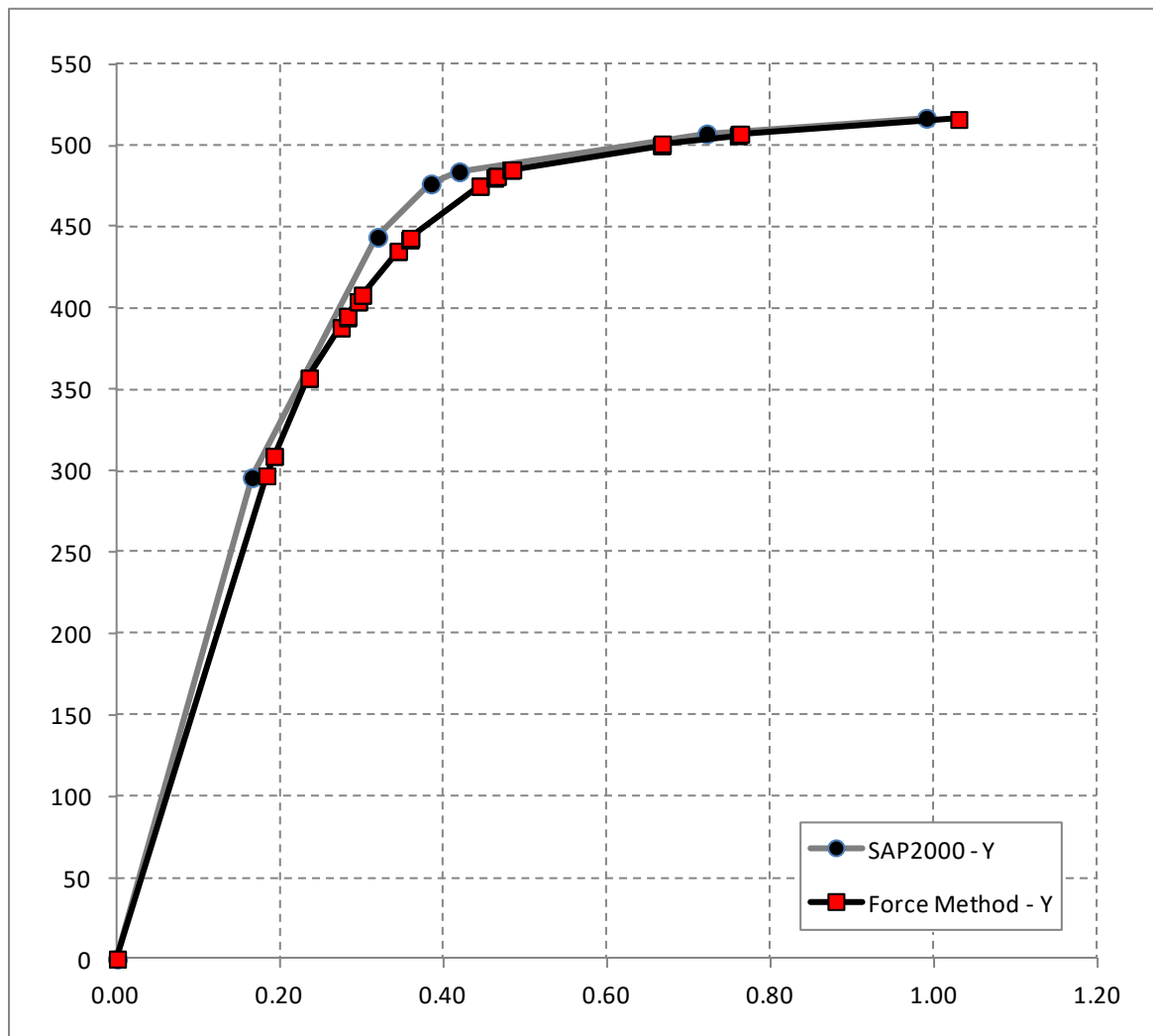
Στις ενώσεις δοκών-υποστυλωμάτων (κόμβους) εφαρμόζεται μια (διακριτή) κατανομή σημειακών (σεισμικών) φορτίων, η οποία προκύπτει από την 1^η ιδιομορφή που είναι γραμμικώς μεταβαλλόμενη ως προς το ύψος του κάθε ορόφου, υπό την απλουστευτική θεώρηση περί μη συμμετοχής ανώτερων ιδιομορφών.

Υπολογίστηκαν δύο στατικές ανελαστικές αναλύσεις, μία για κάθε οριζόντια διεύθυνση (x,y). Οι καμπύλες φέρουσας ικανότητας (τέμνουσα βάση προς την αντίστοιχη μετατόπιση οροφής) απεικονίζονται στα Σχήματα 35 και 36 ακολούθως, όπου συμπεριλαμβάνονται και τα αποτελέσματα των αντίστοιχων αναλύσεων με το εμπορικό λογισμικό SAP2000 [178], για το οποίο χρησιμοποιήθηκαν οι προεπιλεγμένες από την εταιρία τιμές παραμέτρων ανάλυσης.

Όπως διαφαίνεται, τα αποτελέσματα των δύο μεθόδων είναι σε συμφωνία: η μέγιστη τέμνουσα βάση κατά την κατεύθυνση x είναι $V_{b,x}\sim 667\text{kN}$: κατά την κατεύθυνση y, είναι $V_{b,y}\sim 516\text{kN}$.



Σχήμα 35: Καμπύλες φέρουσας ικανότητας εξάρωροφου πλαισίου, κατεύθυνση x. {Μονάδες: kN,m}.

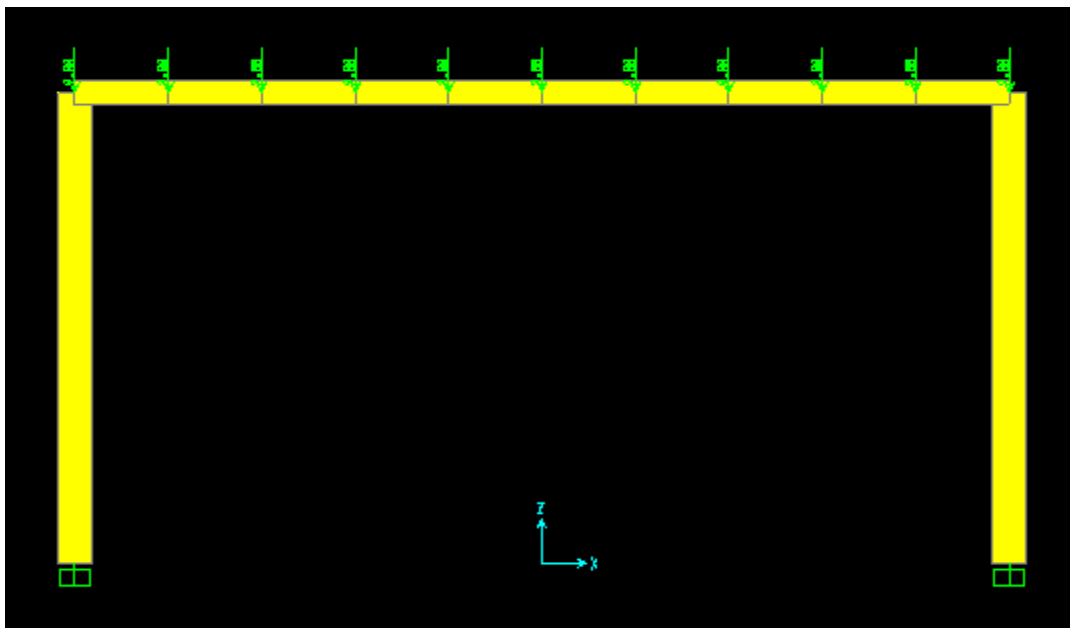


Σχήμα 36: Καμπύλες φέρουσας ικανότητας εξάρωφου πλαισίου, κατεύθυνση y. {Μονάδες: kN,m}.

13.3 Μονώροφο, Δισδιάστατο (2Δ) Πλαίσιο Ενός Ανοίγματος

Αυτό το παράδειγμα χρησιμοποιήθηκε για να ελεγχθεί η λειτουργικότητα της εντός των πλαισίων της παρούσας διατριβής προγραμματιστικής υλοποίησης της συνάρτησης διαρροής κατά DIN-18800, μέσω μιας σύγκρισης με την συνάρτηση κατά AISC-LRFD· για τον σκοπό αυτό, χρησιμοποιήθηκαν διατομές σχήματος διπλού «Τ» (αγγλ.: *I-shaped sections*).

Το ύψος του πλαισίου είναι $H=3.0\text{m}$ και το κεντροβαρές εύρος ανοίγματος $L=6.0\text{m}$. Η διατομή της δοκού είναι HEB160 και των υποστυλωμάτων HEM200. Όλα τα δομικά στοιχεία έχουν τοποθετηθεί ώστε να κάμπτονται περί τον ισχυρό τους άξονα. Οι δοκοί υποδιαιρούνται σε μικρότερα στοιχεία μήκους $L=0.6\text{m}$ έκαστο. Τα υποστυλώματα είναι πλήρως πακτωμένα στην βάση τους. Σχηματικά, το πλαίσιο απεικονίζεται στο Σχήμα 37 ακολούθως.

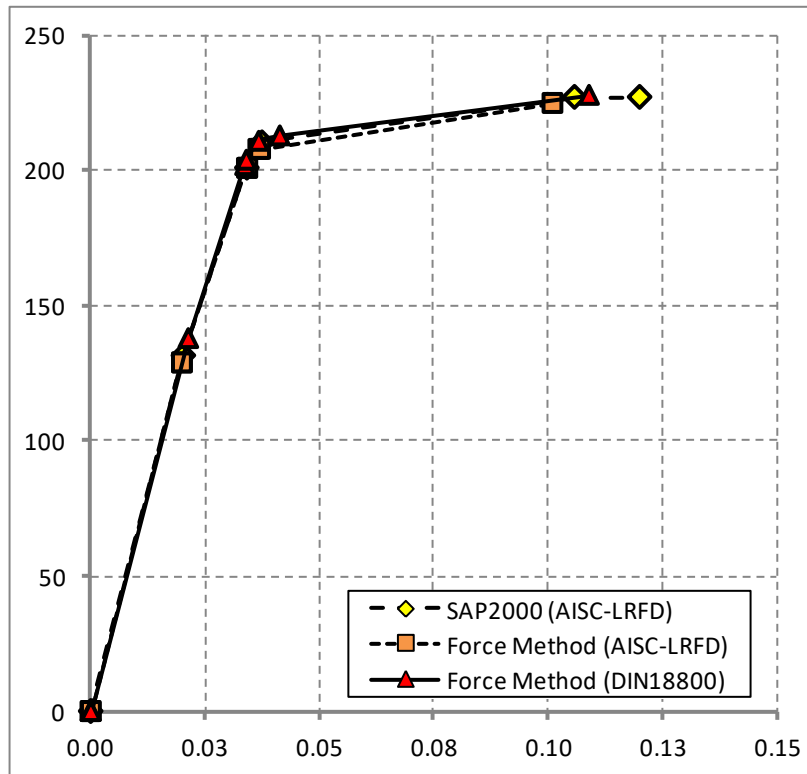


Σχήμα 37: Γεωμετρία του πλαισίου και κατακόρυφα φορτία (εικόνα από το SAP2000).

Το υλικό της κατασκευής είναι χάλυβας ποιότητας S235 με μέτρο του Young $E=2.0\text{E}+8\text{kPa}$, συμβατική τάση διαρροής $f_y=235\text{MPa}$, και θεωρείται ελαστικό-ιδεωδώς πλαστικό.

Στην δοκό ασκείται ένα ομοιόμορφο φορτίο μεγέθους 15kN/m , το οποίο προσομοιώνεται με ένα πεπερασμένο πλήθος σημειακών φορτίων, έκαστο μεγέθους 9kN , τα οποία ασκούνται σε ίσες μεταξύ τους αποστάσεις των 0.6m . Στον άνω αριστερά κόμβο ασκείται μια οριζόντια (σεισμική) δύναμη.

Υπολογίστηκαν δύο στατικές ανελαστικές αναλύσεις χρησιμοποιώντας την αναπτυχθείσα στα πλαίσια της παρούσας διατριβής μέθοδο· μία χρησιμοποιώντας το κριτήριο κατά AISC-LRFD, και μία χρησιμοποιώντας το DIN-18800. Τα αποτελέσματα συγκρίθηκαν με αυτά του SAP2000 [178] και βρέθηκε ότι υπάρχει συμπίπτουν μεταξύ τους. Όλες οι καμπύλες φέρουσας συμπεριφοράς (τέμνουσα βάσης προς μετατόπιση κόμβου οροφής) έχουν αποτυπωθεί στο Σχήμα 38 ακολούθως.



Σχήμα 38: Καμπύλες φέρουσας ικανότητας του επιπέδου πλαισίου. {Μονάδες: kN,m}.

13.4 Μια Απλή Εσχάρα (3Δ)

Το απλό αυτό παράδειγμα χρησιμοποιείται για να επιδείξει στην λειτουργικότητα του προτεινόμενου φορμαλισμού για κατασκευές όπου η συνεισφορά της στρέψης είναι σημαντική. Οι εσχάρες είναι μια χαρακτηριστική περίπτωση· μια απλή εσχάρα που βρέθηκε στην βιβλιογραφία [190] χρησιμοποιήθηκε ως λύση αναφοράς. Σχηματικά, απεικονίζεται στο Σχήμα 39 ακολούθως.

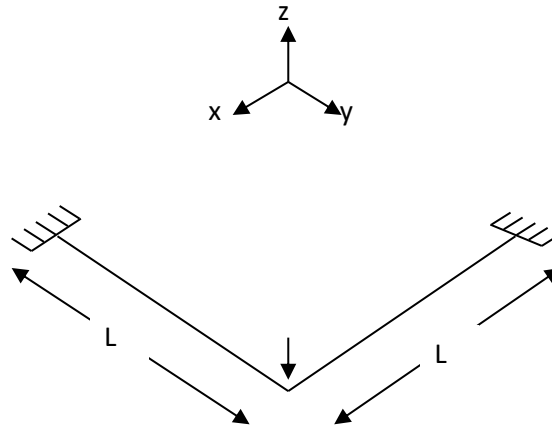


Figure 39: Γεωμετρία και φόρτιση της εσχάρας.

Όπως μπορεί να παρατηρηθεί, οι γεωμετρικές αναλογίες και φορτίσεις είναι οι ίδιες με αυτές που αναγράφονται στην [190]· εδώ, τα στοιχεία έχουν μήκος $L=3\text{m}$ και μια διατομή σχήματος κοίλου τετραγώνου με διαστάσεις $(b \times h)=(160 \times 160)\text{mm}$ και πάχος ελάσματος $t=10\text{mm}$.

Το υλικό της κατασκευής είναι χάλυβας ποιότητας S235 με μέτρο του Young ίσο προς $E=2.0E+8\text{kPa}$, συμβατική τάση διαρροής $f_y=235\text{MPa}$, και θεωρείται ότι είναι ελαστικό-ιδεωδώς πλαστικό.

Επιπρόσθετα προς τις ανωτέρω παραδοχές, η επιφάνεια διαρροής γραμμικοποιήθηκε ώστε να είναι σε συμφωνία με τον προτεινόμενο φορμαλισμό. Ακολουθεί ένας αναλυτικός υπολογισμός του φορτίου κατάρρευσης σύμφωνα με την γραμμική συνάρτηση διαρροής που ορίστηκε:

$$g(T, M_3) = \frac{T}{T_p} + \frac{M_3}{M_{3,p}} - 1 \leq 0 \quad (115)$$

Οι μερικές πωσ προς την κάθε εντατική συνιστώσα παράγωγοι της συνάρτησης διαρροής είναι:

$$\frac{\partial g}{\partial T} = \frac{1}{T_p}, \quad \frac{\partial g}{\partial M_3} = \frac{1}{M_{3,p}} \quad (116)$$

Συνεπώς, με την βοήθεια της (116), ο λόγος της πλαστικής στροφής (θ) λόγω κάμψης προς την πλαστική στροφή λόγω στρέψης (γ), θα είναι:

$$\frac{\theta}{\gamma} = \left(\frac{T_p}{M_{3,p}} \right) \cdot \frac{M_3}{T} \quad (117)$$

Όπως αναγράφεται ρητά και στην [190], η πλαστική στροφή λόγω κάμψης πλησίον ενός συνοριακού κόμβου του ενός μέλους θα έχει ως αποτέλεσμα μια ίση στροφή λόγω στρέψης στο άλλο μέλος, στην περιοχή πλησίον της ένωσης μεταξύ των δύο στοιχείων που απαρτίζουν την εσχάρα. Επομένως, από την Εξίσωση (117) μπορούμε να εξάγουμε την ακόλουθη γραμμική αναλογία:

$$\frac{M_3}{M_{3,p}} = \frac{T}{T_p} \quad (118)$$

Σύμφωνα με την [190], η εξίσωση που αποδίδει το φορτίο κατάρρευσης είναι η ακόλουθη:

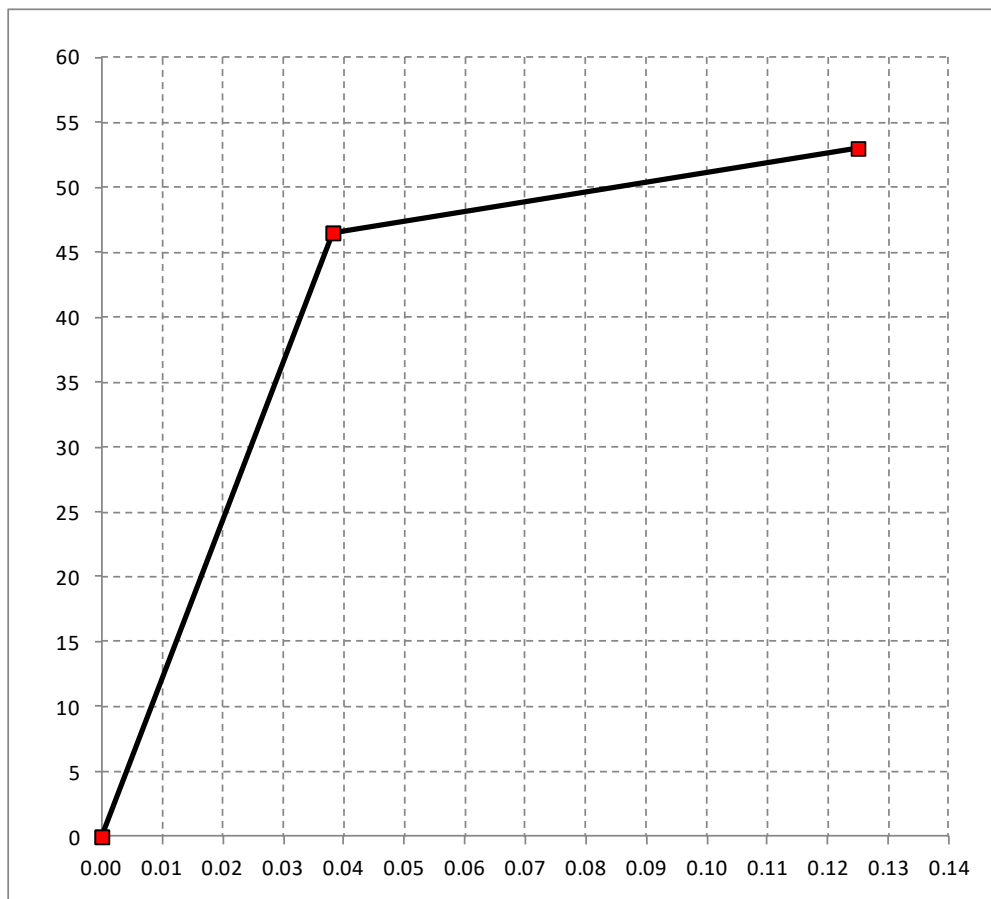
$$\frac{1}{2} \cdot P \cdot L = M_3 + T \quad (119)$$

Συνδυάζοντας τις (118) και (119), και υπό την απλουστευτική υπόθεση ότι ισχύει $M_{3p} = T_p$, λαμβάνεται:

$$P_C = \frac{2 \cdot M_{3,p}}{L} \quad (120)$$

Για την επιλεγμένη διατομή και υλικό, προκύπτει $M_{3p} = 79.4 \text{ kNm}$ και από την (120), $P_C = 52.93 \text{ kN}$.

Πραγματοποιήθηκε μια ανάλυση χρησιμοποιώντας τον προτεινόμενο φορμαλισμό της (64), και η καμπύλη φορτίου–μετατόπισης απεικονίζεται στο σχήμα 40 ακολούθως:

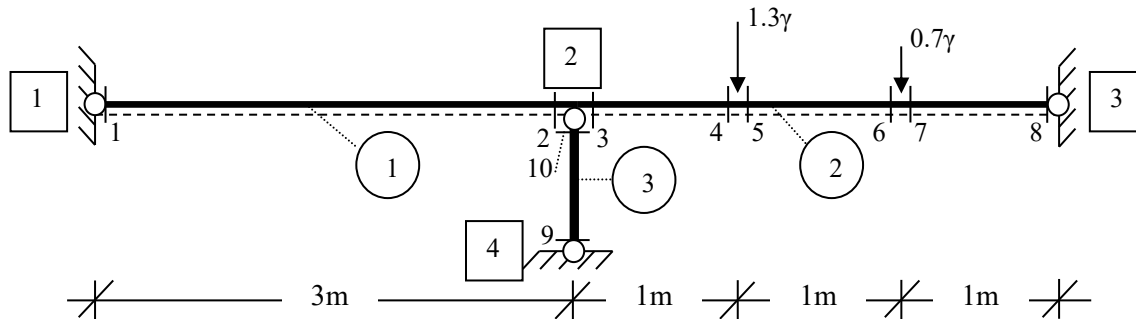


Σχήμα 40: Καμπύλη φορτίου προς αντίστοιχη μετατόπιση της εσχάρας· {Μονάδες: kN,m}.

Όπως διαφαίνεται, τα αποτελέσματα είναι σε συμφωνία· το φορτίο κατάρρευσης σύμφωνα με την προτεινόμενη μέθοδο είναι $P_C \sim 53 \text{ kN}$.

13.5 Δισδιάστατη (2Δ) Δοκός Δύο Ανοιγμάτων

Σε αυτό το παράδειγμα εξετάζεται μια δοκός δύο ανοιγμάτων που κείται επί επιπέδου και παρουσιάζει μη-ολόνομη κρατυνόμενη συμπεριφορά. Η γεωμετρία και οι συνθήκες φόρτισης, καθώς και η αρίθμηση των κρίσιμων διατομών του αντίστοιχου στατικού ομοιώματος απεικονίζονται στο Σχήμα 41 ακολούθως:



Σχήμα 41: Γεωμετρία της δοκού και ασκούμενα φορτία· αρίθμηση κόμβων, μελών, και κρίσιμων διατομών.

Η κατασκευή αποτελείται από χάλυβα ποιότητας S220 με συμβατική τάση διαρροής $f_y=220\text{MPa}$ και μέτρο του Young $E=2.0\text{E}+08\text{kPa}$. Η διατομή της δοκού είναι HEB160 και τοποθετείται έτσι ώστε να κάμπτεται περί τον ισχυρό της άξονα (#3), ενώ το αμφιαρθρωτό υποστύλωμα θεωρείται ως μη-παραμορφώσιμο στοιχείο με $L=1.0\text{m}$ και $A=1.0\text{E}+08\text{m}^2$. Το μέλος #2 υποδιαιρείται σε τρία ισομήκη πεπερασμένα στοιχεία. Η πλαστική κράτυνση του υλικού θεωρήθηκε ισότροπη (*Drucker*) και ορίστηκε σύμφωνα με τον Πίνακα 6 ακολούθως: οι καμπύλες φέρουσας συμπεριφοράς των πλαστικών αρθρώσεων υπολογίστηκαν χρησιμοποιώντας τις Εξισώσεις (38) και (39), και οι στροφές διαρροής χρησιμοποιώντας την ελαστική μορφή ($S=1$) της ομάδας Εξισώσεων (41).

Καμπύλη Συμπεριφοράς	
Παραμόρφωση	Τάση
0.00	0.00
1.00	1.00
7.00	1.25
$+\infty$	1.25

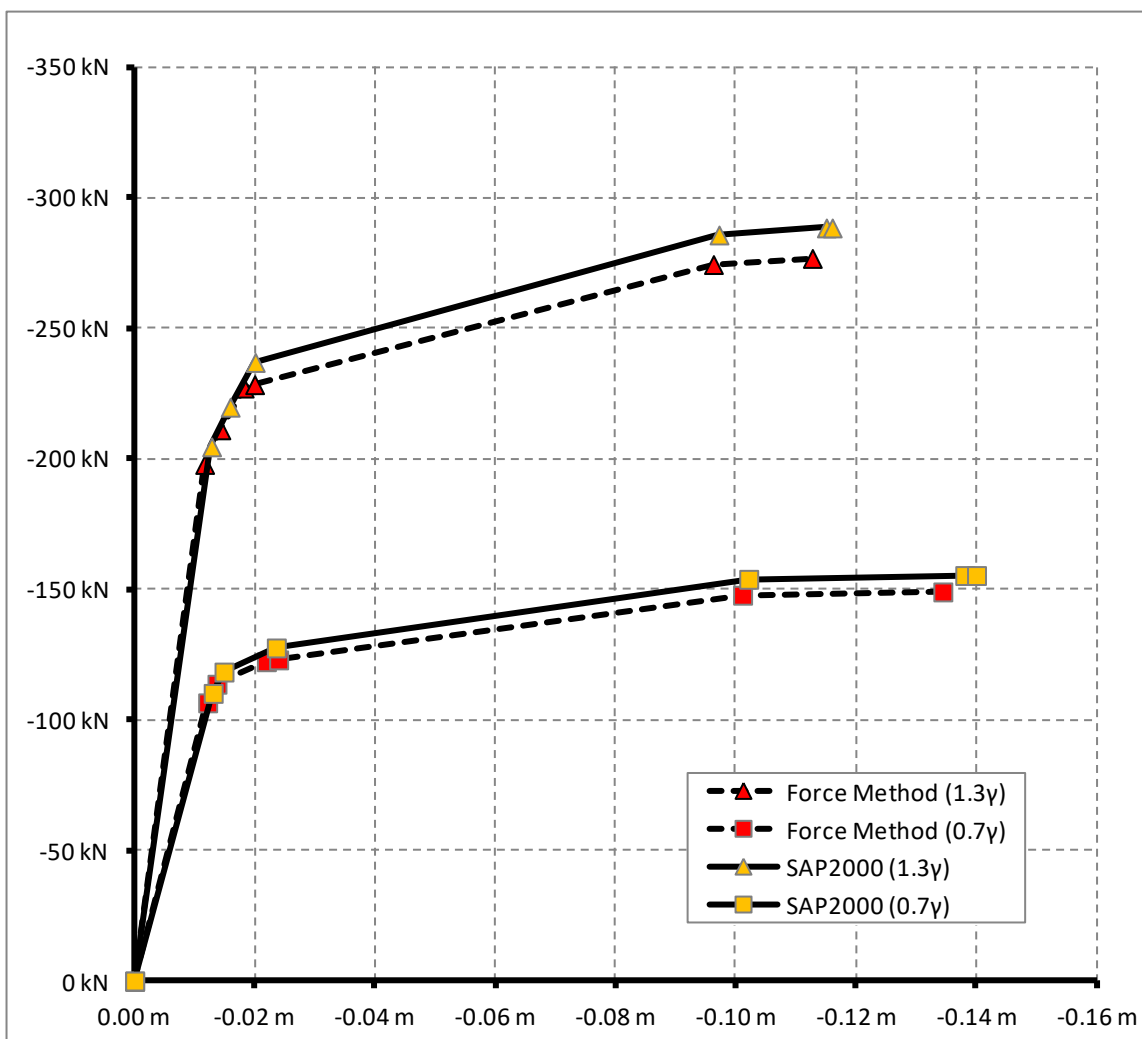
Πίνακας 6: Τμηματικώς γραμμικός καταστατικός νόμος υλικού (κανονικοποιημένος ως προς την παραμόρφωση και τάση διαρροής, αντιστοίχως).

Ο συντελεστής κλιμάκωσης “ γ ” των φορτίων που ασκούνται στην δοκό (βλ. Σχήμα 41) αυξήθηκε αναλογικά, προκειμένου να προσδιοριστούν το φορτίο και ο μηχανισμός κατάρρευσης. Στον Πίνακα 7 ακολούθως, παρουσιάζεται η αλληλουχία πλαστικοποιήσεων και τοπικών αποφορτίσεων μέχρι την κατάρρευση:

Βήματα	Κρίσιμη Διατομή #3	Κρίσιμες Διατομές #4 & #5	Κρίσιμη Διατομή #6
1		●	
2		Π.Κ.: ●	●
3	●	Τ.Α.:	Π.Κ.: ●
4	Π.Κ.: ●	Τ.Α.:	Π.Κ.: ●
5	Π.Κ.: ●	Π.Κ.: ●	Ι.Π.: ●
6	Ι.Π.: ●	Π.Κ.: ●	Ι.Π.: ●

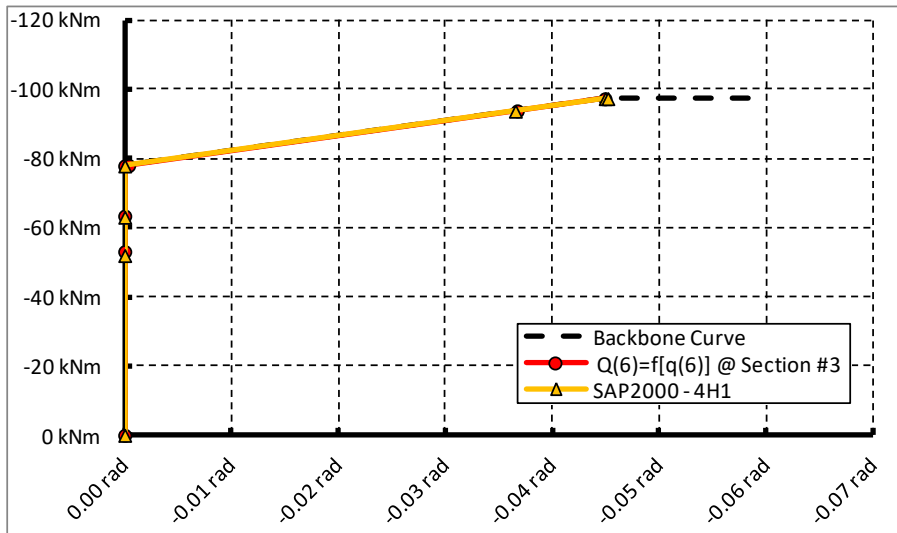
Πίνακας 7: Αλληλουχία Συμβάντων {Π.Κ.=Πλαστική Κράτυνση, Ι.Π.=Ιδεατά Πλαστική, Τ.Α.=Τοπική Αποφόρτιση}.

Πραγματοποιήθηκε συγκριτική ανάλυση με το SAP2000 [178], και οι καμπύλες φέρουσας συμπεριφοράς απεικονίζονται στο Σχήμα 42· το φορτίο κατάρρευση που προσδιορίστηκε με την προτεινόμενη μέθοδο είναι κατά ~4% μικρότερο από αυτό που προσδιορίστηκε με το SAP2000.



Σχήμα 42: Καμπύλες φορτίου-μετατόπισης. {Μονάδες: kN,m}.

Τα αντίστοιχα συγκριτικά διαγράμματα ροπών κάμψης - πλαστικών στροφών για τις κρίσιμες διατομές 3, 4, και 6, παρουσιάζονται στα Σχήματα 43–45, με αναφορά στο σχήμα 41 για την αρίθμηση των κρίσιμων διατομών. Η κρίσιμη διατομή 5 παραλείφθηκε, διότι έχει ταυτόσημα αποτελέσματα με την 4. Όπως διαφαίνεται, συντελείται μια μικρής κλίμακας τοπική αποφόρτιση στην διατομή 4. Τα αποτελέσματα συμπίπτουν μεταξύ τους.



Σχήμα 43: Καμπύλες ροπής κάμψης προς αντίστοιχη πλαστική στρόφι για την κρίσιμη διατομή #3 {Μονάδες: kNm, rad}.

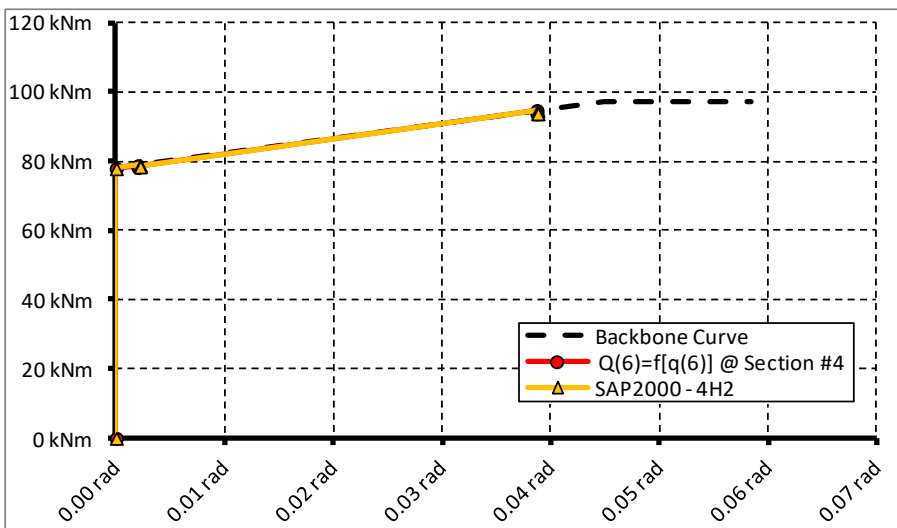


Figure 44: Καμπύλες ροπής κάμψης προς αντίστοιχη πλαστική στρόφι για την κρίσιμη διατομή #4 {Μονάδες: kNm, rad}.

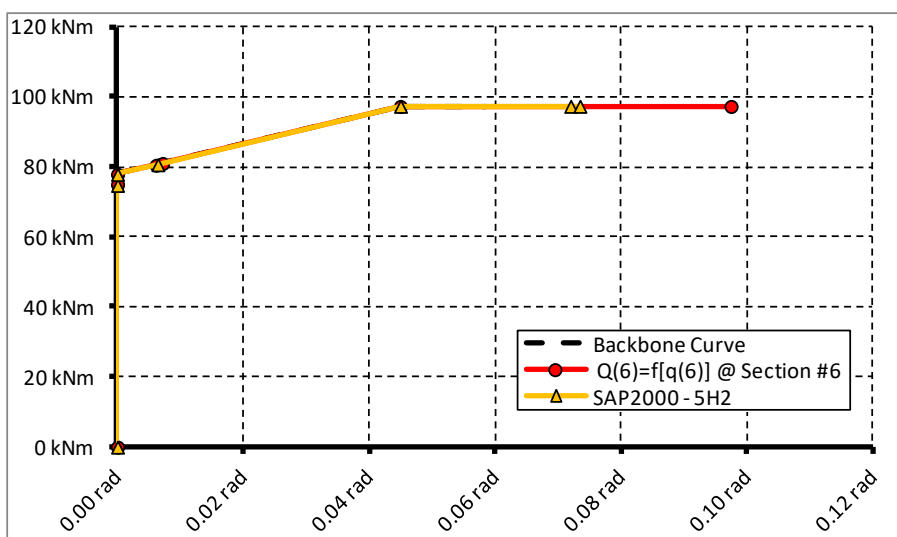


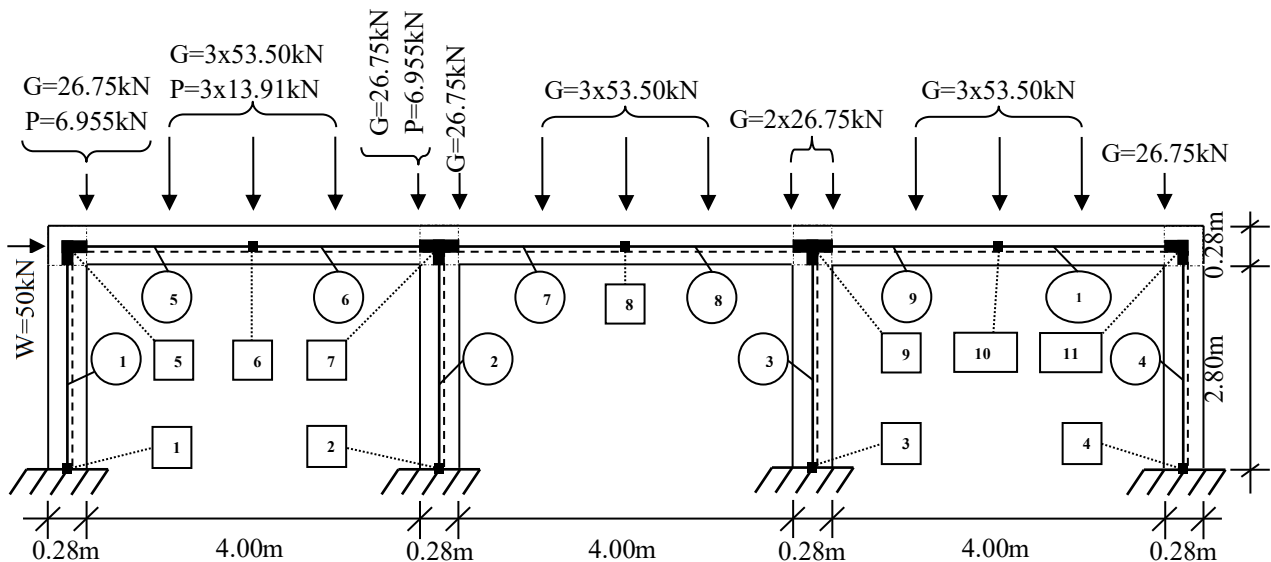
Figure 45: Καμπύλες ροπής κάμψης προς αντίστοιχη πλαστική στρόφι για την κρίσιμη διατομή #6 {Μονάδες: kNm, rad}.

13.6 Μονόροφο Δισδιάστατο (2Δ) Πλαίσιο Τριών Ανοιγμάτων, Εξ Ωπλισμένου Σκυροδέματος

Το παράδειγμα αυτό επιλέχθηκε προκειμένου να καταδειχθεί η αποτελεσματικότητα της προτεινόμενης μεθόδου σε ό,τι αφορά τις κομβικές εκκεντρότητες των στοιχείων καθώς και την καταλληλότητά-της για την ανάλυση πλαισίων από ωπλισμένο σκυρόδεμα. Πρόκειται για ένα επίπεδο πλαίσιο που έχει αναλυθεί από τους Ο. De Donato και G. Maier στην εργασία [89]· για τις ανάγκες της παρούσας διατριβής, όλα τα δεδομένα έχουν μετατραπεί σε μονάδες SI {kN,m}, και η επιτάχυνση της βαρύτητας ελήφθη ίση προς 10m/s^2 . Η γεωμετρία της κατασκευής απεικονίζεται στο Σχήμα 46 ακολούθως.

Κάθε μέλος δοκού και υποστυλώματος έχει δυνητικώς μία πλαστική άρθρωση σε κάθε άκρο του. Περαιτέρω, κάθε μέλος δοκού (μέλη με αύξοντες αριθμούς 5-10 στο Σχήμα 46 ακολούθως) υποδιαιρείται σε δύο ισομήκη πεπερασμένα στοιχεία, προκειμένου να είναι σε συμφωνία με το στατικό μοντέλο της εργασίας [89]. Συνεπεία της προαναφερθείσας διαίρεσης, τα ομοιομόρφως κατανεμημένα φορτία βαρύτητας “g” και κινητά “p” που ορίζονται στην [89] έχουν μετατραπεί σε ένα πεπερασμένο σύνολο σημειακών φορτίων τα οποία συμβολίζονται με “G” και “P”, αντιστοίχως, και τα οποία απεικονίζονται στο Σχήμα 46 ακολούθως.

Το πλαίσιο υποβάλλεται σε ένα προδιαγεγραμμένο σενάριο φόρτισης κατά το οποίο όλα τα φορτία ασκούνται σταδιακά στην κατασκευή, σύμφωνα με την ακόλουθη σειρά (όπως ορίζεται στην [89]): Πρώτα ασκούνται τα ίδια βάρη (g) στις δοκούς, με εύρος τιμών από 0 έως και 50kN/m · έπειτα ασκείται στον κόμβο 5 το οριζόντιο φορτίο (W) με εύρος τιμών από 0 έως και 50kN , και, τελικά, ασκούνται τα κινητά φορτία (p) στην αριστερή δοκό, με εύρος τιμών από 0 έως και 13kN/m . Οι αναφερθείσες τιμές κατανεμημένων φορτίων έχουν μετατραπεί σε τιμές ισοδύναμων διακριτών κατανομών φορτίων (σημειακά φορτία), των οποίων οι μέγιστες τιμές αναγράφονται στο Σχήμα 46 ακολούθως.



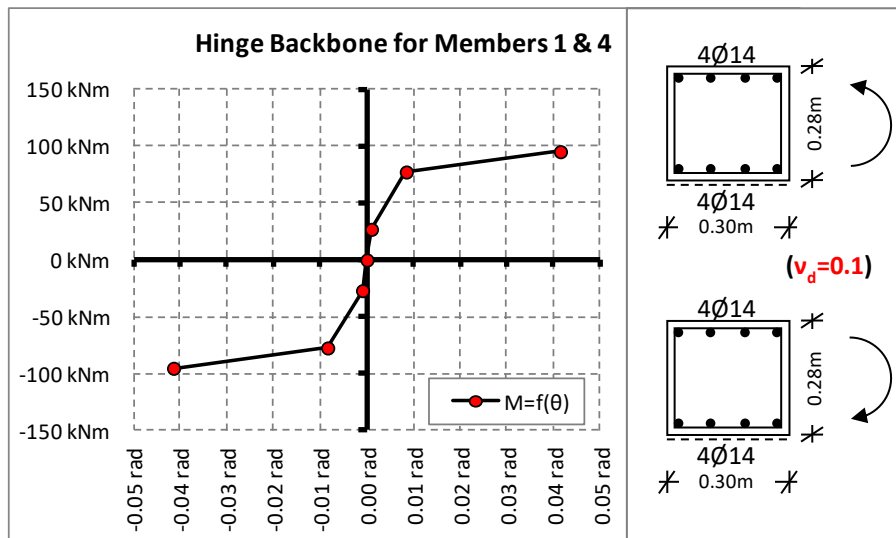
Σχήμα 46: Γεωμετρία του πλαισίου, αρίθμηση κόμβων και μελών, κομβικές εκκεντρότητες μελών, και φορτία.

Το υλικό στις τετράγωνες περιοχές των ενώσεων μεταξύ υποστυλωμάτων και δοκών θεωρείται κατά παραδοχή ως μη-παραμορφώσιμο (βλ. ανωτέρω Σχήμα 46).

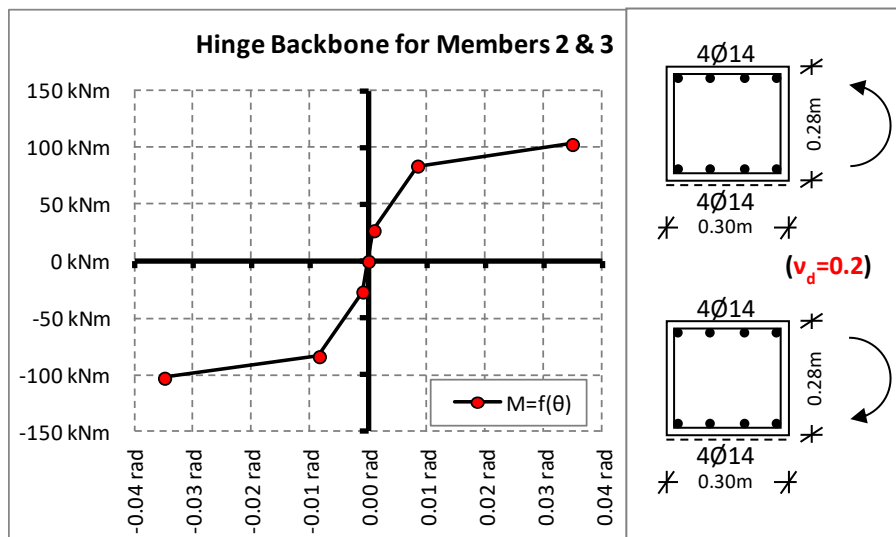
Προκειμένου να προσομοιωθεί η καμπτική συμπεριφορά των παραμορφώσιμων μερών της κατασκευής, επιλέχθηκε μια αυθαίρετη τιμή $E=25.786.967,4\text{kPa}$ για το μέτρο ελαστικότητας και $\nu=0,25$ για τον λόγο του Poisson. Σε όλα τα στοιχεία ανατέθηκε διατομή ορθογωνίου σχήματος διαστάσεων $(b \times h)=(0,30 \times 0,28\text{m})$ · συνεπώς, η τιμή $A=0,7840\text{E-}01\text{m}^2$ ορίσθηκε για το εμβαδόν της διατομής και οι

τιμές $I_2=5,488E-04m^4$ και $I_3=6,300E-04m^4$ για τις ροπές αδρανείας λόγω κάμψης περί του ασθενούς και ισχυρού άξονα, αντιστοίχως.

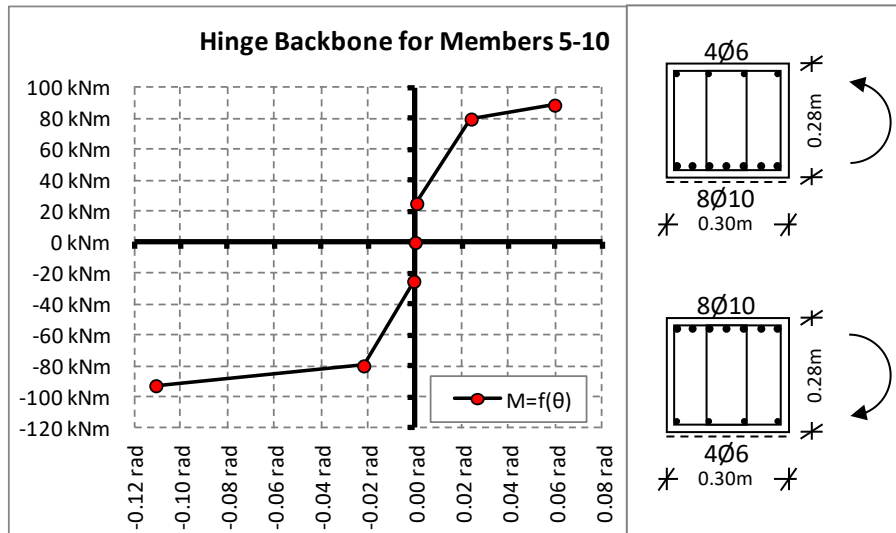
Οι καμπύλες φέρουσας συμπεριφοράς των πλαστικών αρθρώσεων του πλαισίου απεικονίζονται στα Σχήματα 47–49. Υποτέθηκε αμιγώς καμπτική συμπεριφορά, σύμφωνα με την [89]. οι στροφές λόγω κάμψης υπολογίσθηκαν χρησιμοποιώντας την ελαστική μορφή ($S=I$) της ομάδας των Εξισώσεων (41) με την βοήθεια των επιλεγμένων τιμών για τα E και I_3 : ως δεδομένο εισόδου για το “L” στις Εξισώσεις (41), δόθηκε το παραμορφώσιμο μήκος του κάθε μέλους.



Σχήμα 47: Καμπύλη φέρουσας συμπεριφοράς πλαστικών αρθρώσεων των εξωτερων υποστλωμάτων {Μονάδες: kNm,rad}.



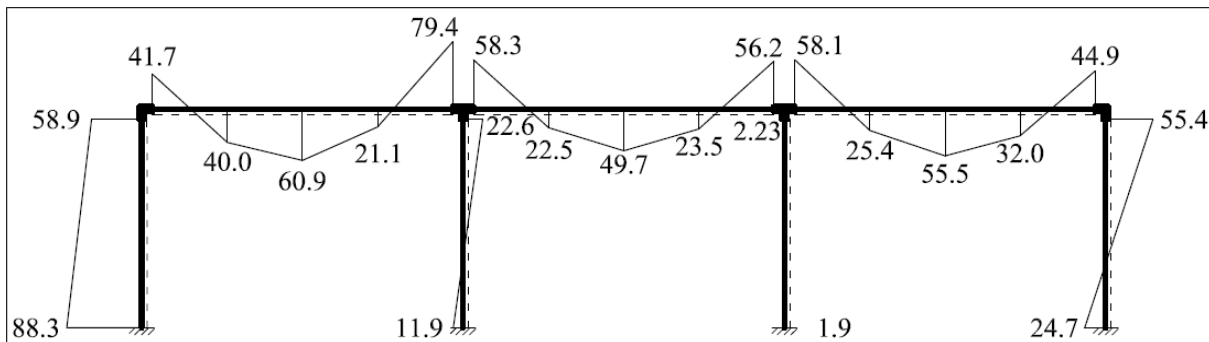
Σχήμα 48: Καμπύλη φέρουσας συμπεριφοράς πλαστικών αρθρώσεων των εσωτερων υποστλωμάτων {Μονάδες: kNm,rad}.



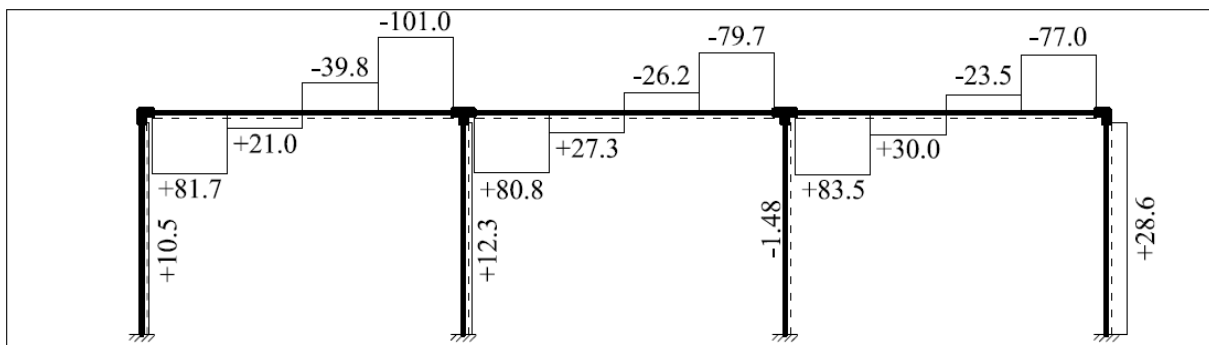
Σχήμα 49: Καμπύλη φέρουσας συμπεριφοράς πλαστικών αρθρώσεων των δοκών {Μονάδες: kNm,rad}.

Το σενάριο φόρτισης εκτελέστηκε υπό τον περιορισμό ότι, αν κατά την εκτέλεση ενός βήματος σταδιακής επιβολής της φόρτισης εξαντληθεί η πεπερασμένη δυναμικότητα ανάπτυξης πλαστικής στροφής λόγω κράτυνσης σε τουλάχιστον μία εκ των κρίσιμων διατομών της κατασκευής, η διαδικασία ανάλυσης τερματίζεται.

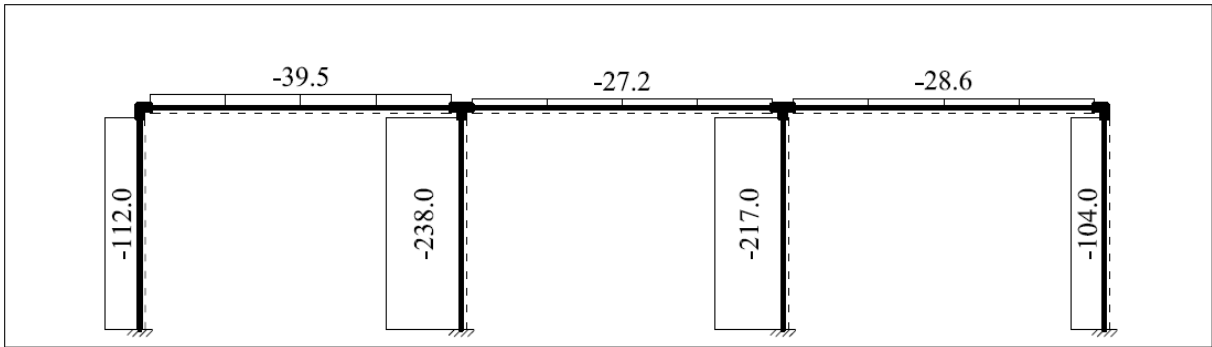
Τα διαγράμματα εντατικών μεγεθών $[M_3]$, $[V_2]$, $[N]$ κατά το πέρας της ανάλυσης απεικονίζονται στα Σχήματα Figures 50, 51, και 52, αντιστοίχως.



Σχήμα 50: Διάγραμμα ροπών κάμψης κατά το πέρας της ανάλυσης. {Μονάδες: kNm}.

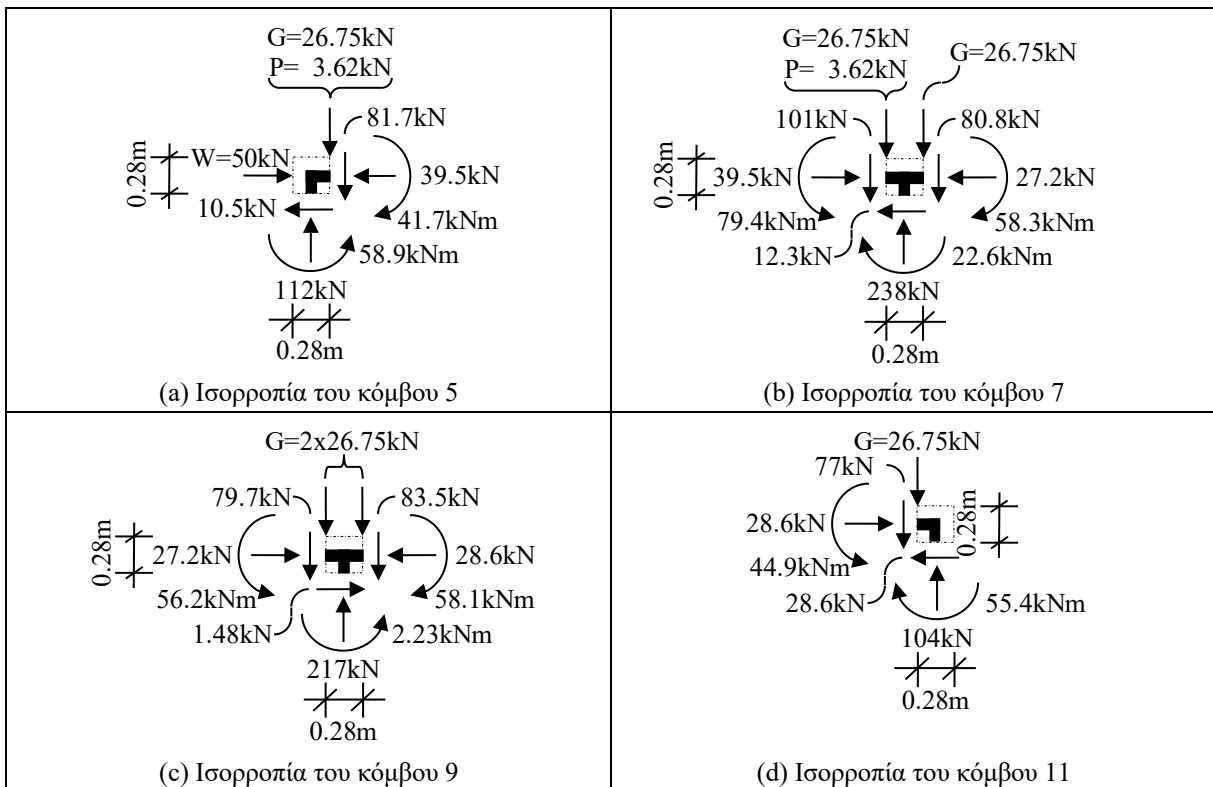


Σχήμα 51: Διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων κατά το πέρας της ανάλυσης. {Μονάδες: kN}.



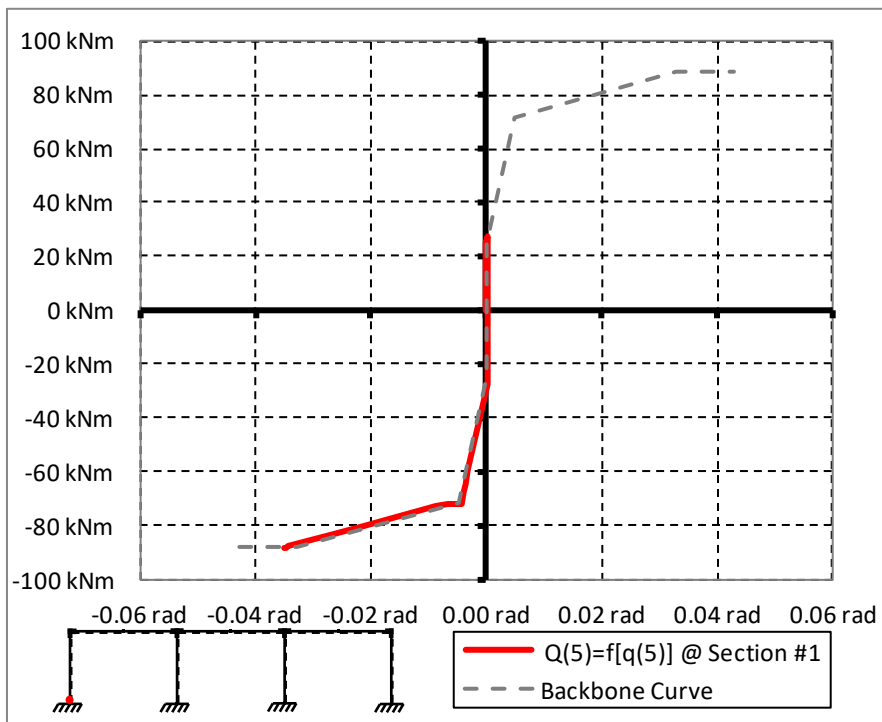
Σχήμα 52: Διάγραμμα αξονικών δυνάμεων κατά το πέρας της ανάλυσης. {Μονάδες: kN}.

Στο Σχήμα 53 απεικονίζονται οι τιμές φορτίων κατά το πέρας της ανάλυσης, μαζί με τις αντίστοιχες εσωτερικές δυνάμεις και ροπές στους κόμβους ενώσεως δοκών-υποστυλωμάτων της κατασκευής· έχοντας υπ’ όψιν και τις κομβικές εκκεντρότητες των στοιχείων, μπορεί εύκολα να επαληθευτεί ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες ισορροπίας των κόμβων.

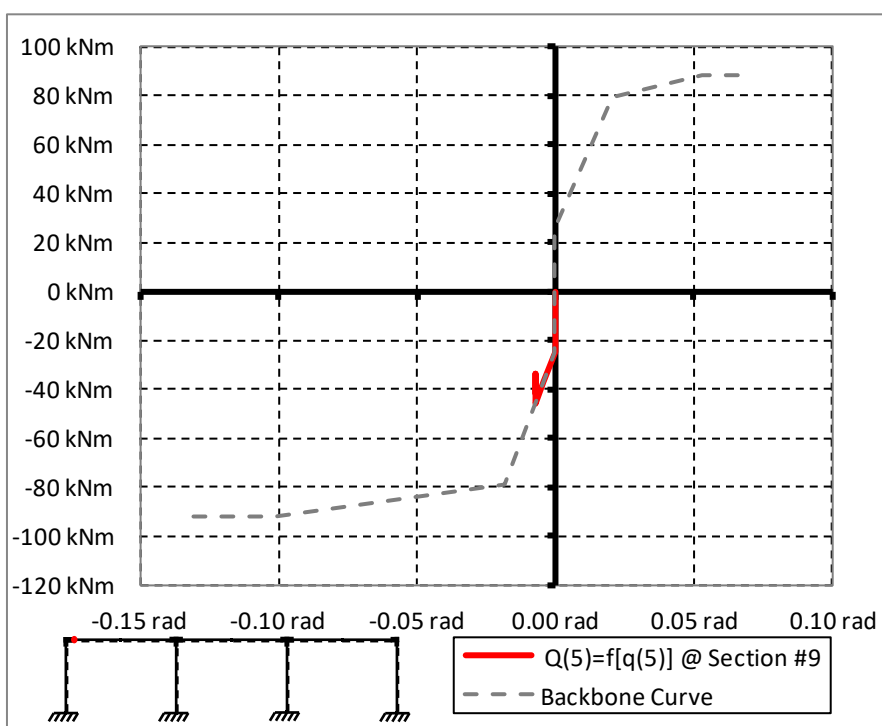


Σχήμα 53: Ισορροπία των ενώσεων δοκών-υποστυλωμάτων της κατασκευής κατά το πέρας της ανάλυσης. {Μονάδες: kN,m}.

Τα διαγράμματα ροπής κάμψης προς πλαστική στροφή για δύο χαρακτηριστικές κρίσιμες διατομές της κατασκευής απεικονίζονται στα Σχήματα 54 – 55· όπως μπορεί να παρατηρηθεί, η κρίσιμη διατομή #1 φθάνει στο όριο της δυνατότητάς της για πλαστική κράτυνση (βλ Σχήμα 54), και η κρίσιμη διατομή #9 παρουσιάζει μη-ολόνομη συμπεριφορά κατά την φάση της πλαστικής της κράτυνσης (βλ. Σχήμα 55).

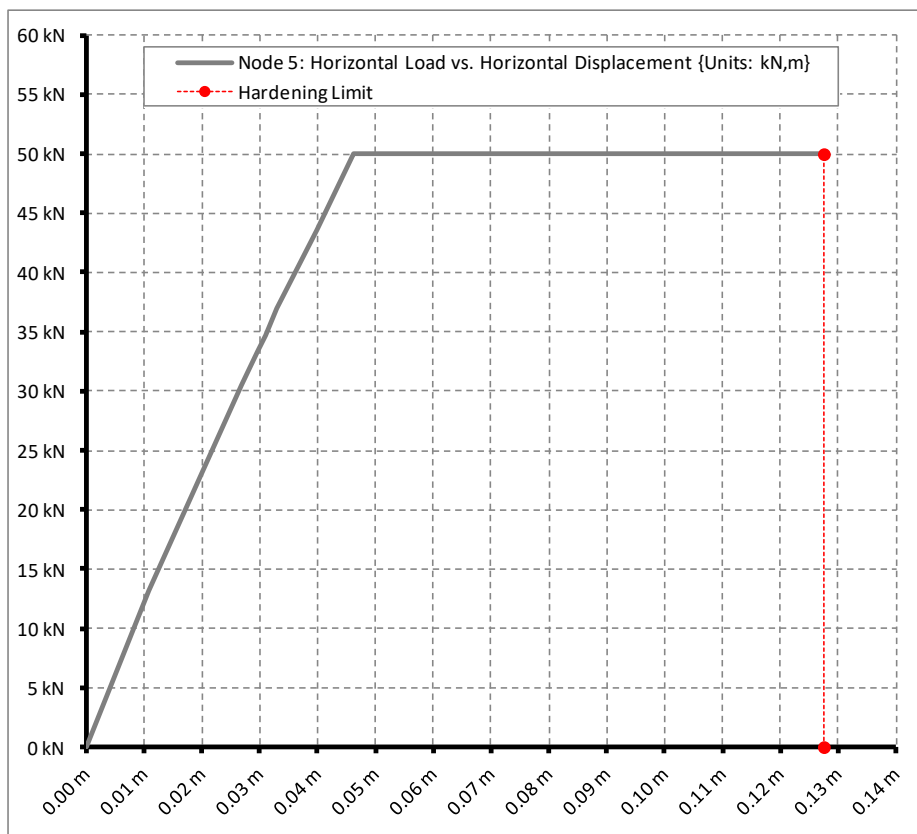


Σχήμα 54: Ροπή κάμψης προς πλαστική στρόφι της κρίσιμης διατομής 1. {Μονάδες: kNm,rad}.

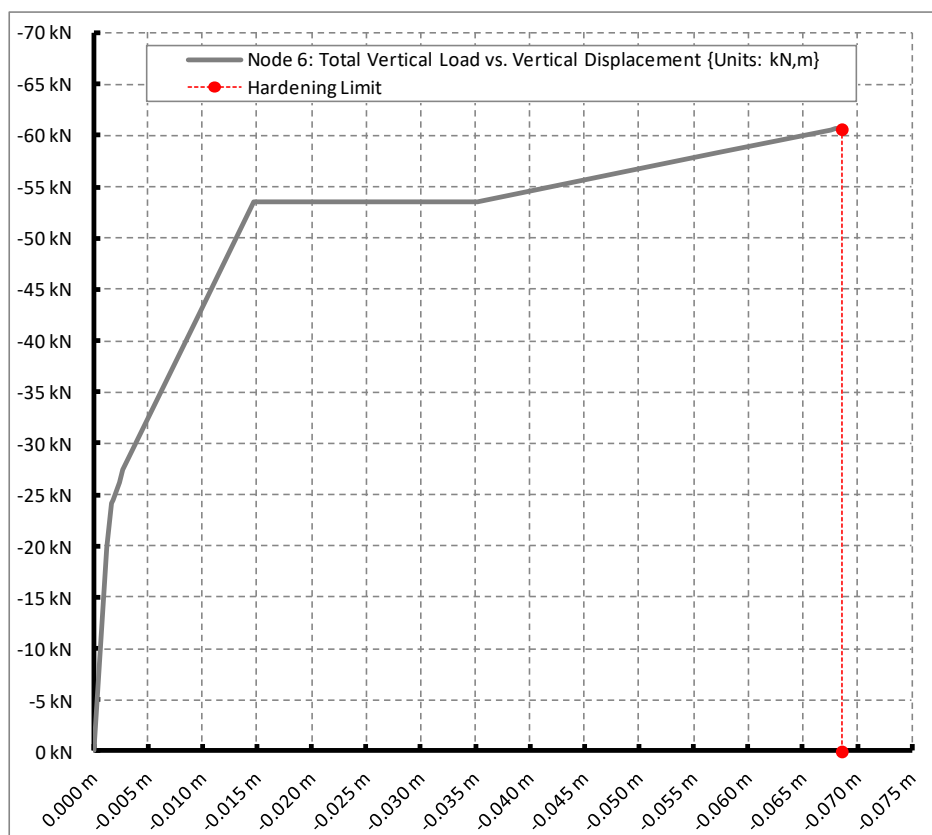


Σχήμα 55: Ροπή κάμψης προς πλαστική στρόφι της κρίσιμης διατομής 9 {Μονάδες: kNm,rad}.

Τέλος, με αναφορά στους ορισμούς φορτίων του Σχήματος 46, στο Σχήμα 56 απεικονίζεται το γράφημα των τιμών του οριζόντιου φορτίου (W) προς την αντίστοιχη οριζόντια μετατόπιση του κόμβου 5, και στο Σχήμα 57 το γράφημα του συνολικού κατακόρυφου φορτίου ($G+P$) του κόμβου 6 προς την αντίστοιχη κατακόρυφη μετατόπιση αυτού.



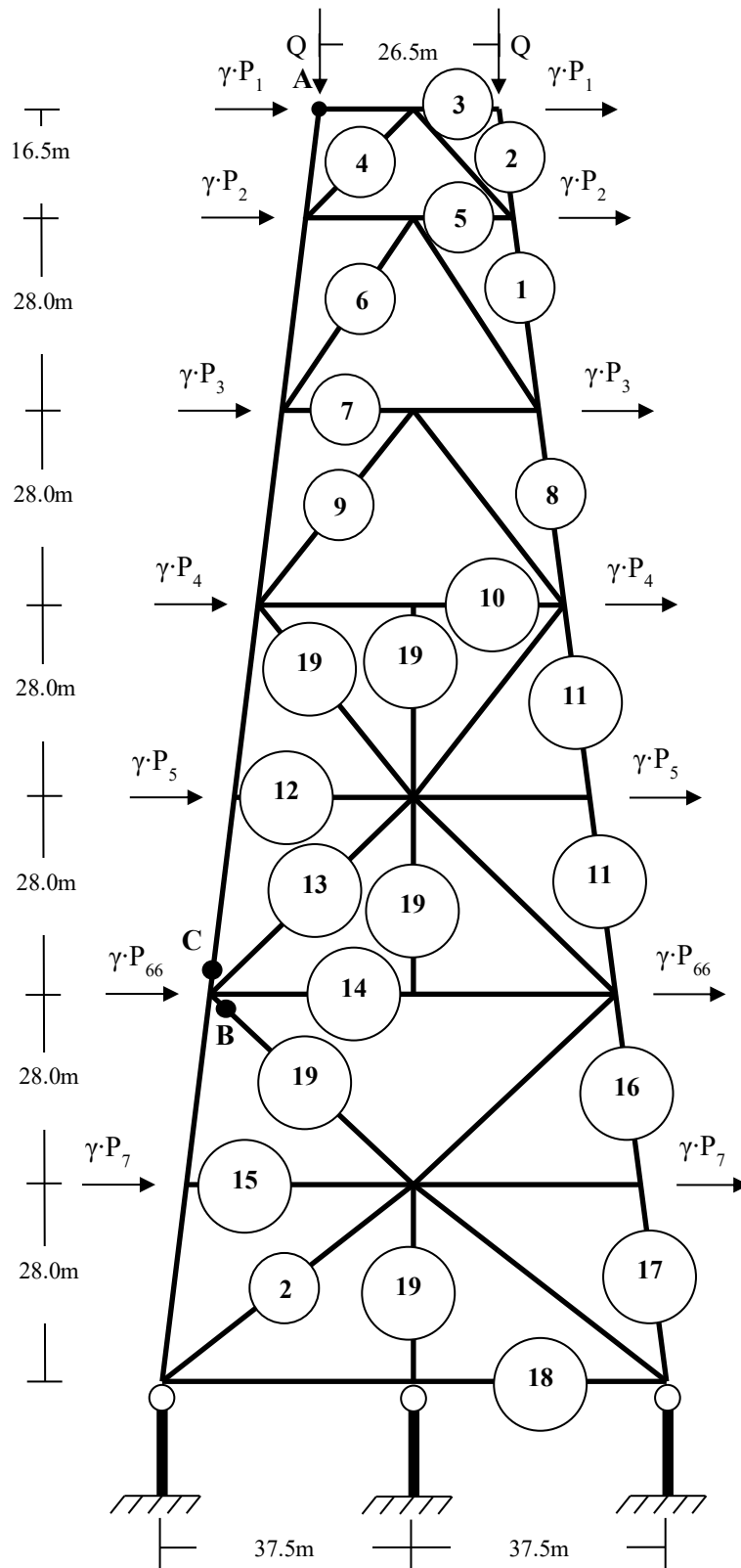
Σχήμα 56: Οριζόντιο φορτίο (W) ως συνάρτηση της οριζόντιας μετατόπισης του κόμβου 5. {Μονάδες: kN,m}.



Σχήμα 57: Άθροισμα φορτίων (G+P) ως συνάρτηση της κατακόρυφης μετατόπισης του κόμβου 6. {Μονάδες: kN,m}.

13.7 Παράκτια Εξέδρα (2Δ)

Αυτό το παράδειγμα επιλέχθηκε για να καταδείξει την αποτελεσματικότητα της προτεινόμενης μεθόδου στον υπολογισμό σεναρίων ανακυκλιζόμενης φόρτισης. Τα δεδομένα του πλαισίου ελήφθησαν από την [191]· η γεωμετρία και τα ασκούμενα φορτία απεικονίζονται στο Σχήμα 58 ακολούθως.



Σχήμα 58: Γεωμετρία της κατασκευής, διατομές μελών σύμφωνα με τον Πίνακα 8, ασκούμενα φορτία, κόμβος αναφοράς A (•) και κρίσιμες διατομές B και C (•). {Μονάδες: kN,m}.

Στο Σχήμα 58, οι περικλειόμενοι από κύκλους αριθμοί επάνω σε κάθε μέλος της κατασκευής αντιστοιχούν στις κυκλικές σωληνοειδείς διατομές που απαριθμούνται στον Πίνακα 8· σημειώνεται ότι η κατασκευή είναι συμμετρική ως προς κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το μέσον του εύρους της.

Διατομή	R _{εξωτερική}	R _{εσωτερική}
1	1.0250 m	0.9750 m
2	0.6640 m	0.6360 m
3	0.3340 m	0.3180 m
4	0.3330 m	0.3170 m
5	0.4675 m	0.4325 m
6	0.6675 m	0.6325 m
7	0.5200 m	0.4800 m
8	1.0275 m	0.9725 m
9	0.6625 m	0.6375 m
10	0.4650 m	0.4350 m
11	1.5225 m	1.4775 m
12	0.4580 m	0.4420 m
13	0.6650 m	0.6350 m
14	0.4640 m	0.4360 m
15	0.4600 m	0.4400 m
16	3.0250 m	2.9750 m
17	3.0225 m	2.9775 m
18	0.5100 m	0.4900 m
19	0.6600 m	0.6400 m

Πίνακας 8: Εξωτερικές και εσωτερικές ακτίνες των σωληνοειδών διατομών της κατασκευής.

Τα τρία υποστηρίζοντα μέλη στο Σχήμα 58 θεωρούνται ως μη-παραμορφώσιμα, δηλαδή έχουν $A=1.0E+08m^2$ και $I_{33}=1.0E+08m^4$, και θεωρούνται οιονεί ελαστικά.

Το υλικό της κατασκευής είναι δομικός χάλυβας με μέτρο του Young $E=2.1E+08kN/m^2$, λόγο του Poisson $\nu=0.3$, και τάση διαρροής $f_y=350000kN/m^2$.

Χρησιμοποιήθηκε ο τμηματικώς γραμμικός καταστατικός νόμος του Πίνακα 9 ακολούθως, με περιορισμένη κινηματική κράτυνση κατά Ziegler· η καμπύλη φέρουσας συμπεριφοράς των πλαστικών αρθρώσεων υπολογίστηκε χρησιμοποιώντας τις Εξισώσεις (38) και (39), και οι στροφές διαρροής υπολογίσθηκαν χρησιμοποιώντας την ελαστική μορφή ($S=I$) της ομάδας των Εξισώσεων (41).

Παρ' ότι η ως άνω επιλογή μοντελοποίησης υλικού είναι διαφορετική από τους ιδιότυπους συντελεστές κράτυνσης που χρησιμοποιήθηκαν στην [191], αποτελεί έναν πρακτικώς ισοδύναμο και εύκολο στην υλοποίηση φορμαλισμό που είναι συνεπής με την θεώρηση συζευγμένων εντατικών συνιστωσών που ακολουθείται στην παρούσα διατριβή· σημειώνεται ότι η τιμή της παραμόρφωσης μπορεί να υπολογισθεί ως άθροισμα της αξονικής επιμήκυνσης/βράχυνσης διαιρεμένης με την αξονική επιμήκυνση/βράχυνση διαρροής και της στροφής λόγω κάμψης διαιρεμένης με την στροφή διαρροής.

Καταστατικός Νόμος	
<i>Παραμόρφωση</i>	<i>Τάση</i>
0.00	0.00
1.00	1.00
6.00	1.25
+∞	1.25

Πίνακας 9: Τμηματικός γραμμικός καταστατικός νόμος (κανονικοποιημένος με τις τιμές παραμόρφωσης και τάσης διαρροής).

Όλα τα μέλη της κατασκευής διαιρούνται σε περαιτέρω μικρότερα πεπερασμένη στοιχεία μήκους ~1.5m έκαστο· η πλαστικοποίηση επιτρέπεται να συμβεί στα άκρα όλων των στοιχείων δοκού/υποστυλώματος που απαρτίζουν κάθε παραμορφώσιμο μέλος της κατασκευής.

Προκειμένου να προσομοιωθεί όσο το δυνατόν ακριβέστερα η θεωρητική παραβολική συνάρτηση διαρροής που χρησιμοποιήθηκε στην [191], κατασκευάστηκε μια γραμμικοποίησή-της που αποτελείται από τέσσερα ευθύγραμμα τμήματα σε κάθε τεταρτημόριο· βλ. Πίνακα 10 ακολούθως, με αναφορά στην Εξίσωση (36):

	s₁ (N)	s₂ (M₃)
1	0.1600000000	1.0000000000
2	0.4683544304	0.9493670886
3	0.7464788732	0.8450704225
4	0.9203539823	0.7079646018
5	1.0000000000	0.5714285714

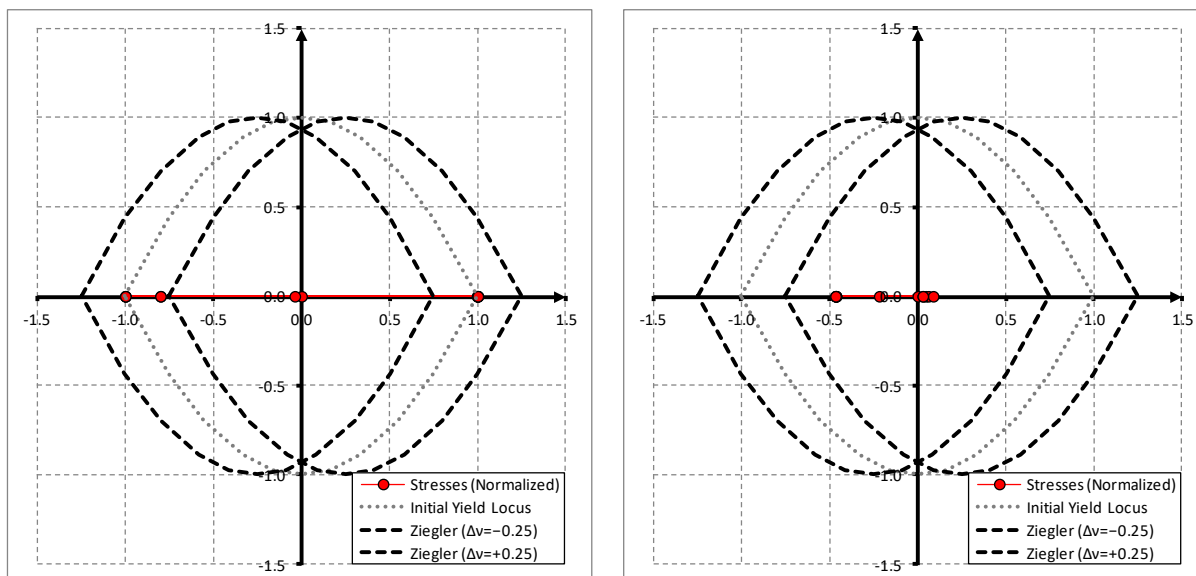
Πίνακας 10: Τμηματικός γραμμική προσέγγιση της θεωρητικής συνάρτησης $g(N, M_3) = (N/N^*)^2 + (M/M_3^*) - 1 \leq 0$.

Η τιμή των δύο σταθερών κατακόρυφων φορτίων είναι $Q=34335\text{kN}$, και οι ονομαστικές τιμές των οριζόντιων φορτίων είναι $P_1=742\text{kN}$, $P_2=6269\text{kN}$, $P_3=7294\text{kN}$, $P_4=6745\text{kN}$, $P_5=6781\text{kN}$, $P_6=6446\text{kN}$, και $P_7=7222\text{kN}$ (βλ. Σχήμα 58).

Ο συντελεστής κλιμάκωσης “ γ ” των οριζόντιων φορτίων που εφαρμόζονται στην κατασκευή (βλ. Σχήμα 58) κλιμακώνεται ανάλογα από την τιμή $\gamma=0.0$ στην $\gamma=+1.0$, έπειτα στην τιμή $\gamma=-0.8$ και έπειτα στην $\gamma=+0.8$, έτσι ώστε να δημιουργείται ένα σενάριο ανακυκλιζόμενης φόρτισης.

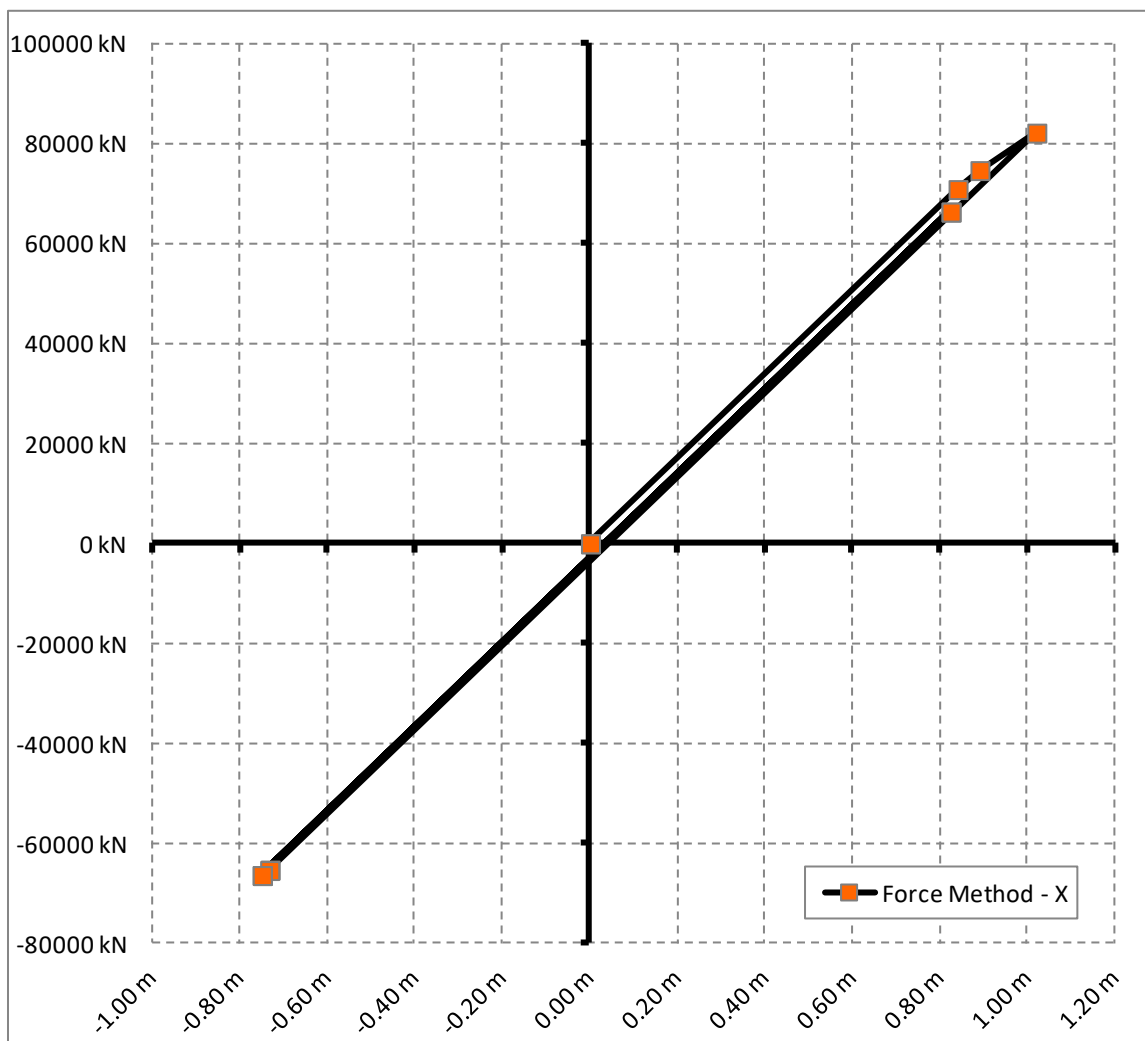
Ικανοποιητικές λύσεις του προβλήματος ελήφθησαν χρησιμοποιώντας τους αλγορίθμους ΤΠ and ΣΤΠ του M.J.D. Powell ([68],[70]).

Οι εντατικές καταστάσεις των διατομών “B” και “C” (βλ. Σχήμα 58) για κάθε βήμα του σεναρίου ανακυκλιζόμενης φόρτισης, καθώς και οι μετατοπίσεις των αντίστοιχων πολυτόπων διαρροής λόγω πλαστικής κράτυνσης του υλικού, απεικονίζονται στο Σχήμα 59 ακολούθως.



Σχήμα 59: Εντατικές καταστάσεις διατομής B (αριστερά) και διατομής C (δεξιά). {Μονάδες: κανονικοποιημένες τιμές}.

Η τέμνουσα βάσης ως συνάρτηση της οριζόντιας μετατόπισης του κόμβου «A» (βλ. Σχήμα 58) απεικονίζεται στο Σχήμα 60 ακολούθως· οι συντεταγμένες του σημείου κορυφής είναι $\{u_{\max}, V_b\} = \{1.02\text{m}, 8.22\text{E}+04\text{kN}\}$, και αντιστοιχούν στην τιμή του αθροίσματος των ονομαστικών τιμών των οριζόντιων φορτίων για συντελεστή κλιμάκωσης $\gamma \sim 0.99$.

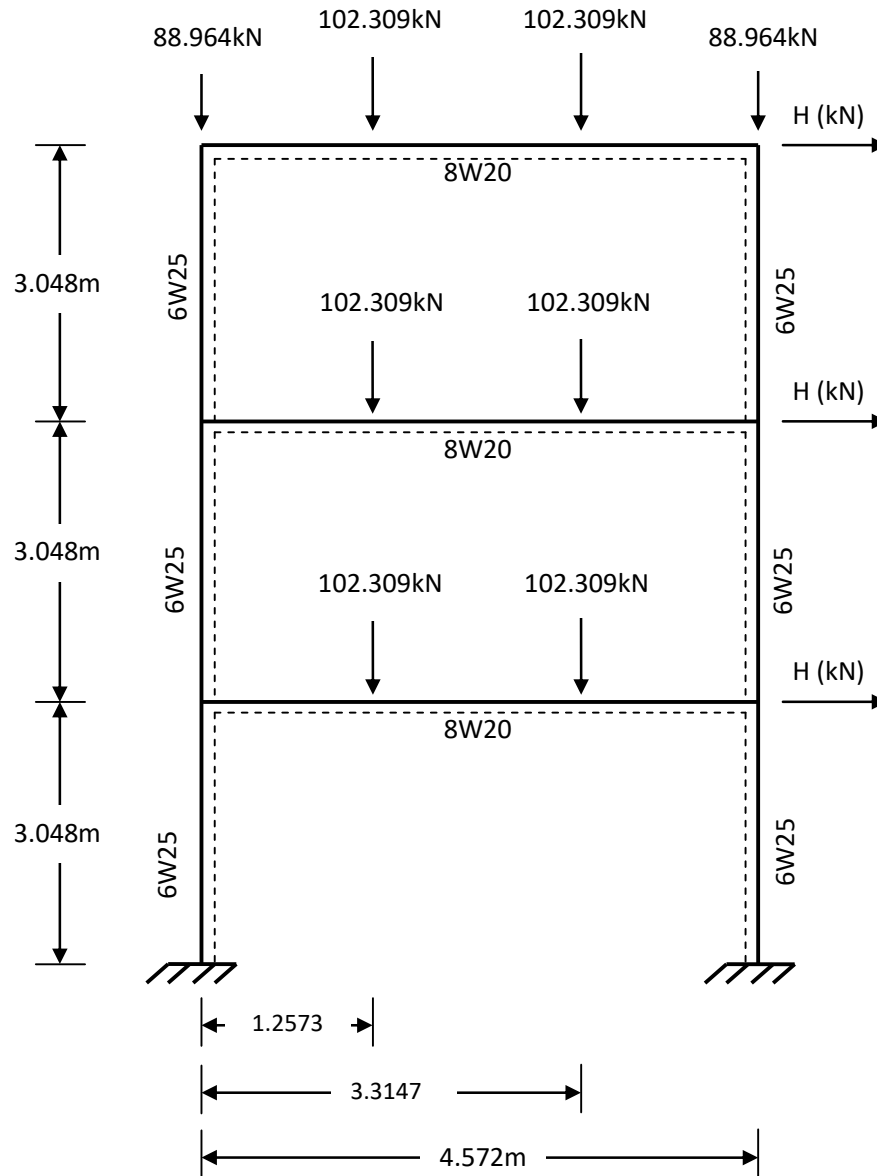


Σχήμα 60: Τέμνουσα βάσης “V_b” ως συνάρτηση της οριζόντιας μετατόπισης “u” του κόμβου A (•). {Μονάδες: kN,m}.

Τα αποτελέσματα έχουν ικανοποιητική ταύτιση με αυτά που παρουσιάζονται στην [191].

13.8 Το Τριώροφο Δισδιάστατο (2Δ) Πλαίσιο Ενός Ανοίγματος Του Πειράματος Του Yarimci

Το παράδειγμα αυτό χρησιμοποιείται για να καταδείξει την αποτελεσματικότητα της προτεινόμενης μεθόδου στον υπολογισμό σεναρίων ανακυκλιζόμενης φόρτισης. Το πλαίσιο που επιλέχθηκε είναι το δοκίμιο ενός από τα πειράματα που διεξήγαγε ο Yarimci και παρουσίασε στην [192]. Τα πειραματικά δεδομένα ελήφθησαν από την [193]· μετατράπηκαν από το Imperial σύστημα μονάδων στο SI, και έπειτα αναλύθηκαν υπό την παραδοχή ελαστικού ιδεωδώς πλαστικού υλικού στην [52]. Η γεωμετρία και οι φορτίσεις απεικονίζονται στο Σχήμα 61 ακολούθως.



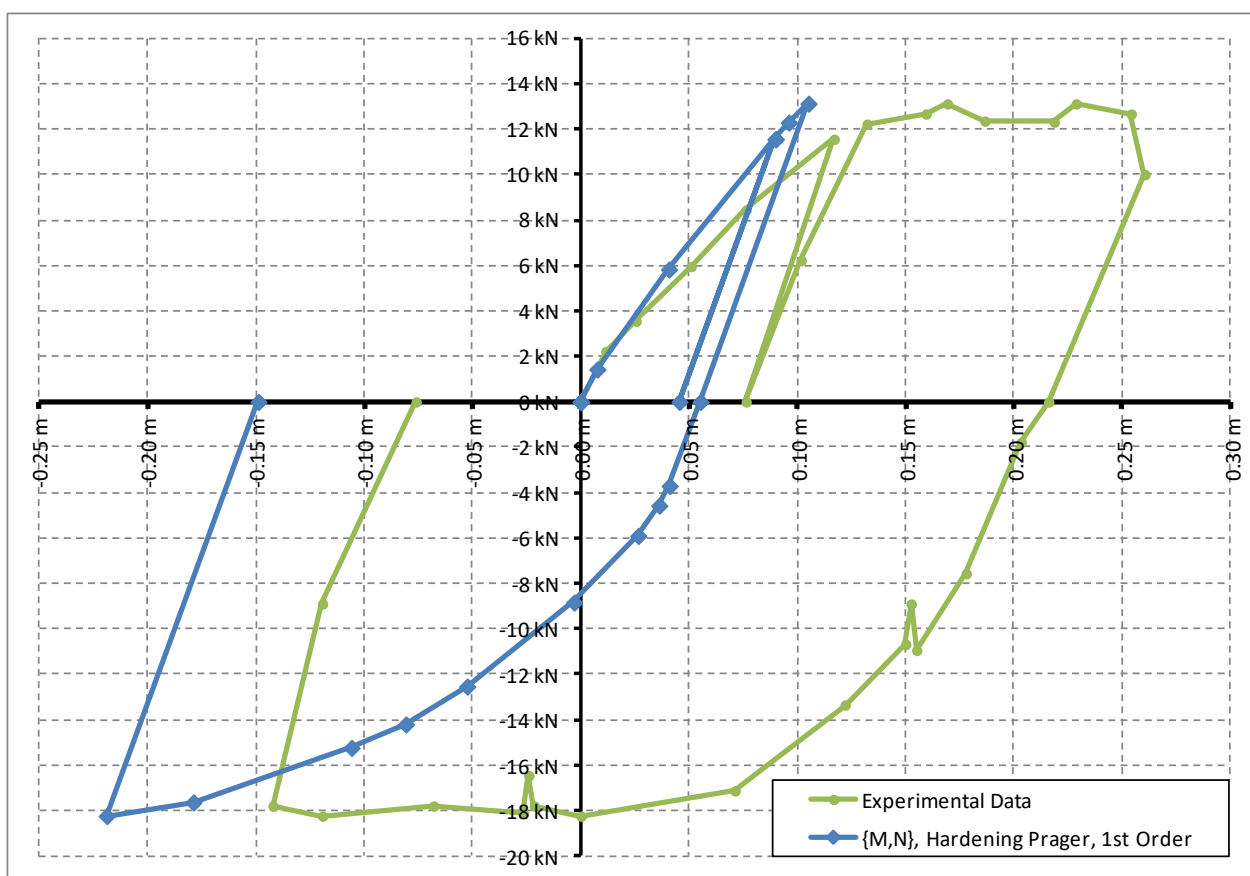
Σχήμα 61: Πλαίσιο ενός πειράματος του Yarimci· γεωμετρία, διατομές, και συνθήκες φόρτισης. {Μονάδες: kN,m}.

Πραγματοποιήθηκε ανάλυση 1^{ης} τάξεως, υπό την παραδοχή ενός τμηματικώς γραμμικού καταστατικού νόμου υλικού ο οποίος περιγράφεται στον Πίνακα 11 (αντιστοιχεί σε περιορισμένη πλαστική κράτνση με κλίση 3%) και μιας γραμμικοποιημένης συνάρτησης διαρροής που λαμβάνει υπ' όψιν την αλληλοεπίδραση ροπής κάμψης και αξονικής δύναμης (βλ. Πίνακα 10 με αναφορά στην Εξίσωση (36))· αυτές οι επιλογές έγιναν προκειμένου να επιτευχθεί μια σχετικά καλή προσαρμογή στα πειραματικά δεδομένα. Το υλικό υποτέθηκε ως δομικός χάλυβας με μέτρο του Young $E=199.947.961,5\text{kPa}$, τάση διαρροής $f_y=248.211,26\text{kPa}$ · η κινηματική κράτνση ορίστηκε κατά Prager.

Προκειμένου να προσομοιωθεί η πλαστικότητα σε έναν τρόπον τινά ικανοποιητικό βαθμό, κάθε μέλος διαιρέθηκε σε τρία (3) πεπερασμένα ραβδωτά στοιχεία. Υποτέθηκαν ομοιογένεια υλικού και γεωμετρική τελειότητα για ολόκληρο το μοντέλο. Τα αποτελέσματα συνοψίζονται στο Σχήμα 62.

Καταστατικός Νόμος	
Παραμόρφωση	Τάση
0.00	0.00
1.00	1.00
10.00	1.27
$+\infty$	1.27

Πίνακας 11: Τμηματικός γραμμικός καταστατικός νόμος (κανονικοποιημένος με τις τιμές παραμόρφωσης και τάσης διαρροής).



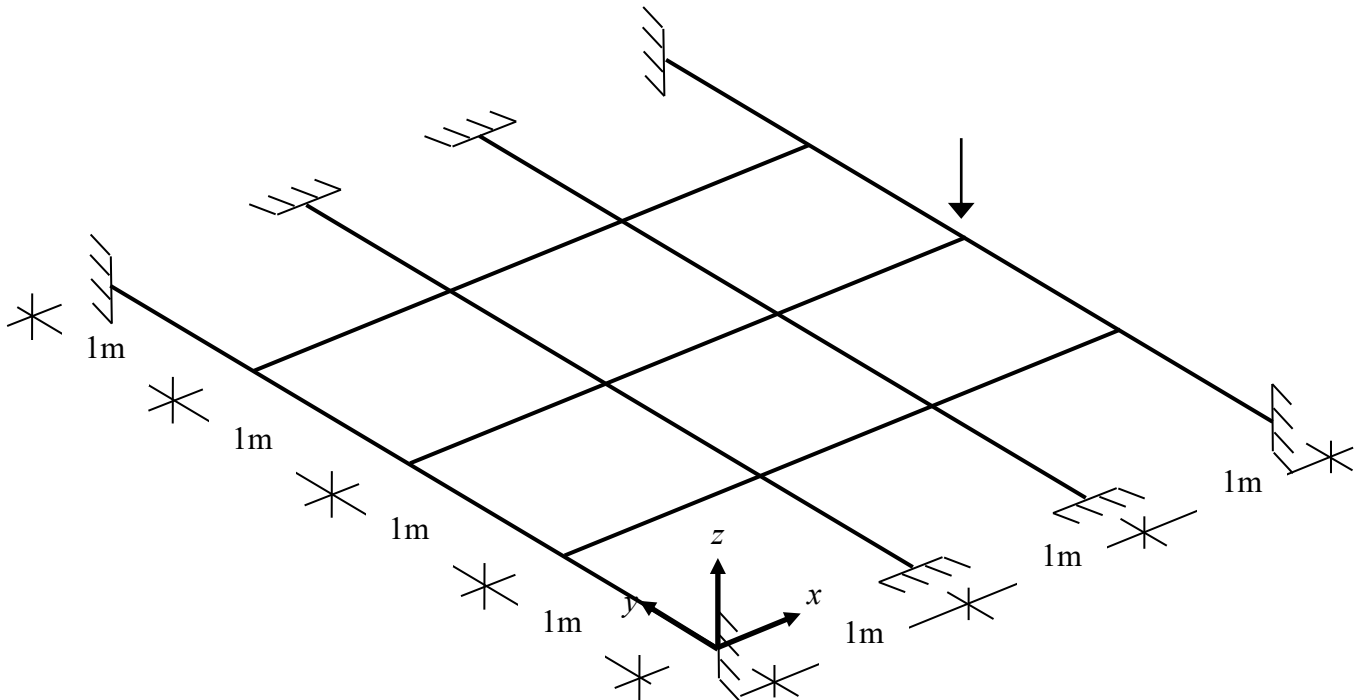
Σχήμα 62: Οριζόντιο φορτίο “H” συναρτήσεως της αντίστοιχης μετατόπισης “u” του άνω δεξιού κόμβου του πλαισίου.

Η προκύπτουσα λύση παρέχει μια στατικώς αποδεκτή καμπύλη φορτίου-μετατόπισης, όπου, παρά την σύζευξη των εντατικών μεγεθών $\{N, M_3\}$, η μη-ολόνομη συμπεριφορά του υλικού λαμβάνεται αποτελεσματικά υπ’ όψιν.

Δεδομένου ότι η υλοποιηθείσα μεθοδολογία ανάλυσης λειτουργεί με ελεγχόμενη εφαρμογή φορτίου, είναι δύσκολο να ληφθούν οι μετατοπίσεις που αποδίδει μια διαδικασία που στηρίζεται στην ελεγχόμενη επιβολή μετατοπίσεων. Πιθανώς μια αριθμητική διερεύνηση ως προς την πραγματική διακύμανση των μηχανικών ιδιοτήτων του υλικού (E, f_y) σε επίπεδο μέλους, καθώς και μια λεπτομερέστερη προσαρμογή του καταστατικού νόμου των πλαστικών αρθρώσεων, θα μπορούσε ενδεχομένως να οδηγήσει σε μια βελτιωμένη ακρίβεια υπολογισμού των μετατοπίσεων· ωστόσο, αυτό είναι πέρα από τους στόχους της παρούσας διατριβής.

13.9 Ασύμμετρα Φορτισμένη Εσχάρα (3Δ)

Το παρόν παράδειγμα έχει αναλυθεί και από τους R.R. Wakefield και F. Tin-Loi στην εργασία [120]. Η προοπτική απεικόνιση της γεωμετρίας της εσχάρας και των ασκούμενων σε αυτήν φορτίων απεικονίζεται στο Σχήμα 63 ακολούθως:

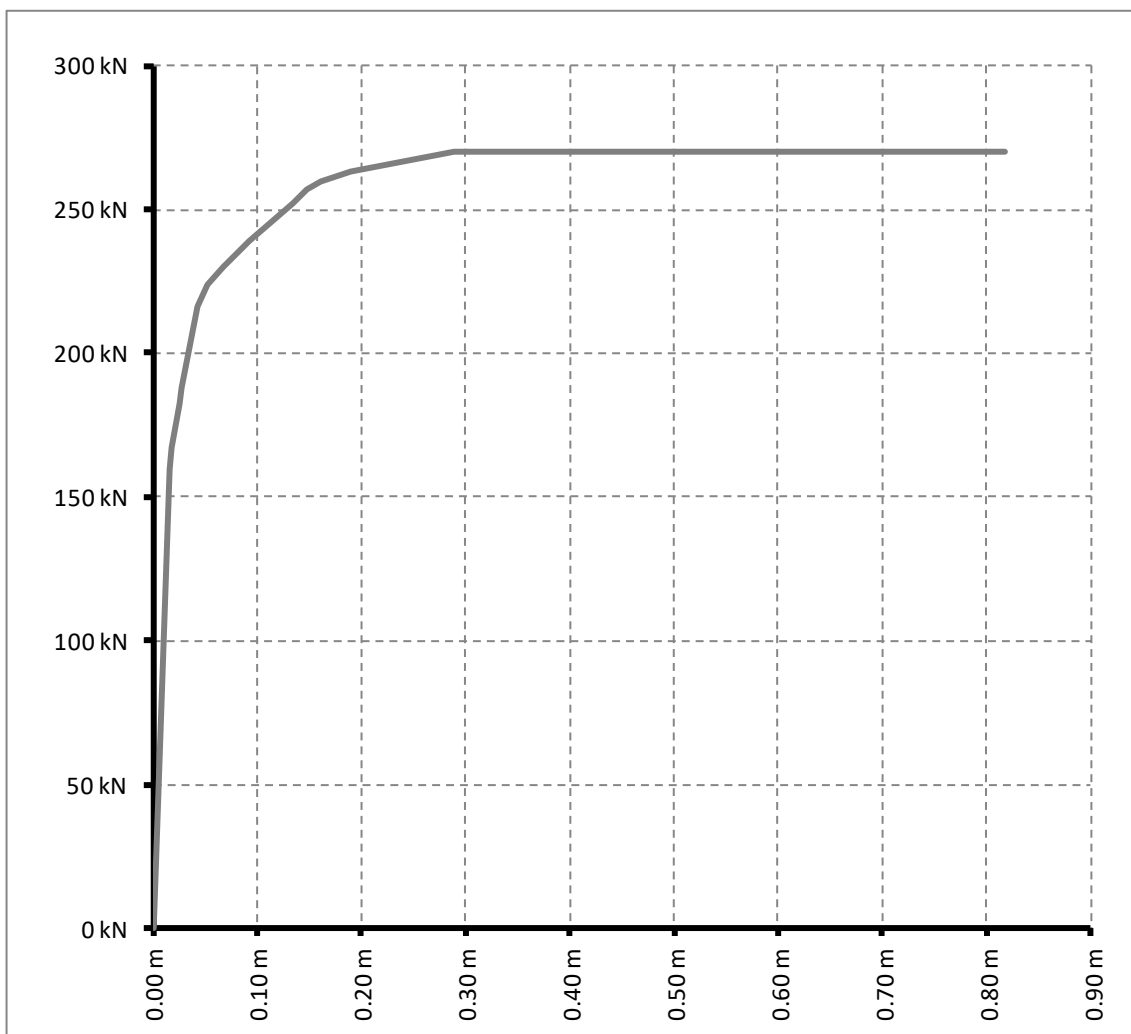


Σχήμα 63: Γεωμετρία της εσχάρας και συνθήκες φόρτισης.

Ο τύπος διατομής όλων των μελών είναι RHS $\{B=105\text{mm}, H=102\text{mm}, t_w=9.5\text{mm}\}$, και τα μέλη έχουν τοποθετηθεί ώστε οι ισχυροί άξονες κάμψης αυτών (#3) να βρίσκονται επί του επιπέδου $\{x,y\}$. Το υλικό είναι χάλυβας ποιότητας S350 με ενεργό τάσης διαρροής $f_y=304.347,8 \text{ kPa}$ (επιλέχθηκε ένας συντελεστής ασφαλείας $\gamma_s=1.15$), και θεωρείται ελαστικό-ιδεωδώς πλαστικό.

Για όλα τα μέλη της κατασκευής θεωρείται ότι διαρρέουν υπό συνδυασμένη διαξονική κάμψη $\{M_2, M_3\}$ και στρέψη $\{T\}$. Η θεωρητικώς σφαιρικής επιφάνεια διαρροής προσεγγίζεται από γραμμικά πολύεδρα. Κατασκευάστηκε μια προσέγγιση από 8 υπέρ-επίπεδα (1 υπέρ-επίπεδο σε κάθε υπέρ-κύβο, όπως ακριβώς και στην [120]): αυτό το γραμμικό πολύεδρο είναι τριπλά συμμετρικό ως προς τα υπερεπίπεδα $\{M_2, M_3\}$, $\{T, M_2\}$ και $\{T, M_3\}$.

Το μοναδικό φορτίο είναι σημειακό και κατακόρυφο, και εφαρμόζεται αυξητικά στην εσχάρα μέχρι του σημείου κατάρρευσης αυτής. Η καμπύλη φέρουσας συμπεριφοράς (φορτίου ως συνάρτηση της αντίστοιχης μετατόπισης) παρουσιάζεται στο σχήμα 64 ακολούθως:

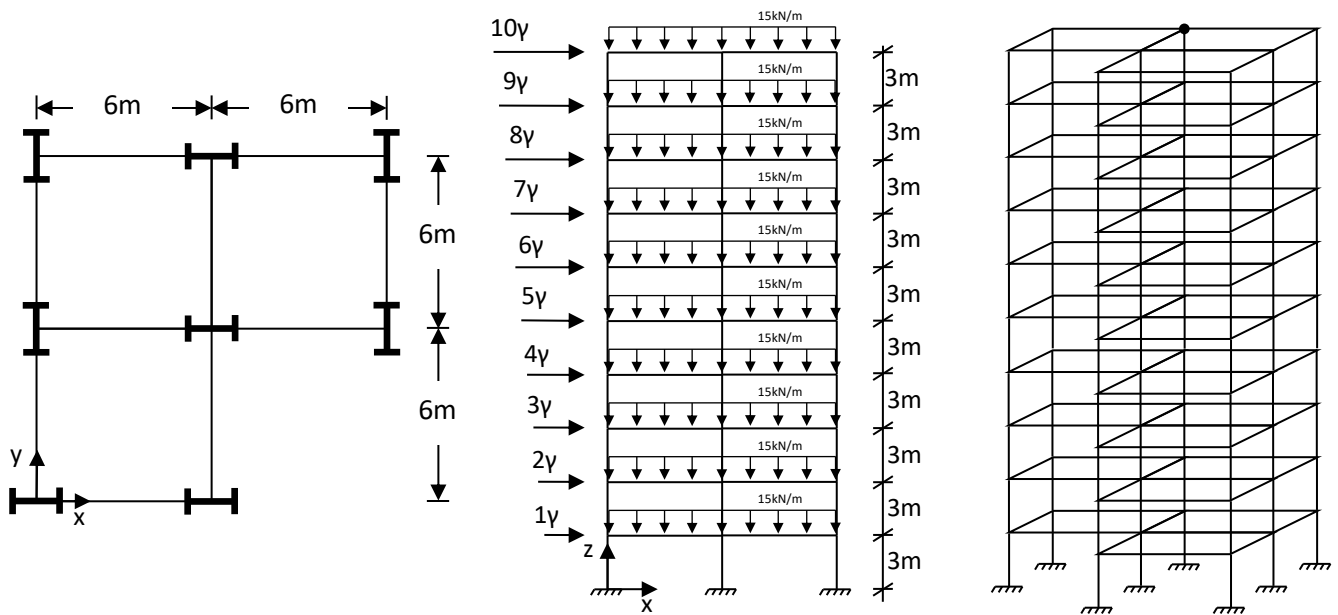


Σχήμα 64: Φορτίο ως συνάρτηση της αντίστοιχης μετατόπισης του φορτιζόμενου κόμβου {Μονάδες: kN,m}.

Όπως μπορεί να παρατηρηθεί εύκολα, το υπολογισθέν φορτίο κατάρρευσης (~270kN) είναι κοντά στο φορτίο αναφοράς (262,27kN) που παρατίθεται στην [120]. τα αποτελέσματα συμφωνούν μεταξύ τους εντός ενός εύρους ακριβείας (~3%).

13.10 Δεκαώροφο Τρισδιάστατο (3Δ) Χαλύβδινο Πλαίσιο Τριών Φατνωμάτων

Αυτό το παράδειγμα χρησιμοποιείται για να καταδείξει την αποτελεσματικότητα του προτεινόμενου φορμαλισμού στην ανάλυση δομικών πλαισίων σχετικά μεγάλης κλίμακας. Η γεωμετρία και οι συνθήκες φόρτισης απεικονίζονται στο Σχήμα 65 ακολούθως. Κάθε άνοιγμα έχει μήκος/έυρος 6m, και κάθε όροφος ύψος 3m. Οι διατομές των δοκών είναι HEM180 και των υποστυλωμάτων HEM400. Κάθε δοκός δέχεται ένα ομοιόμορφα καταναμημένο φορτίο κατεύθυνσης ($-\bar{z}$) και μεγέθους 15kN/m . Όλες οι δοκοί έχουν τοποθετηθεί ώστε να παραλαμβάνουν τα κατακόρυφα ασκούμενα σε αυτές φορτία καμπτόμενες περί τον ισχυρό άξονά τους (#3). Τα υποστυλώματα τοποθετήθηκαν ώστε τα μισά από αυτά να κάμπτονται περί τον ισχυρό άξονά τους και τα άλλα μισά περί τον ασθενή άξονα. Τα πλευρικά (οριζόντια) φορτία ασκούνται κατά την κατεύθυνση ($+\bar{x}$) του καθολικού συστήματος συντεταγμένων, όπου “ γ ” είναι ο συντελεστής κλιμάκωσης της οριζόντιας κατανομής των οριζόντιων αυτών φορτίων.



Σχήμα 65: Κάτοψη και όψεις της κατασκευής, προσανατολισμοί διατομών υποστυλωμάτων, ασκούμενα φορτία, τρισδιάστατη απεικόνιση πλαισίου, και κόμβος αναφοράς (*) {Μονάδες: kN,m}.

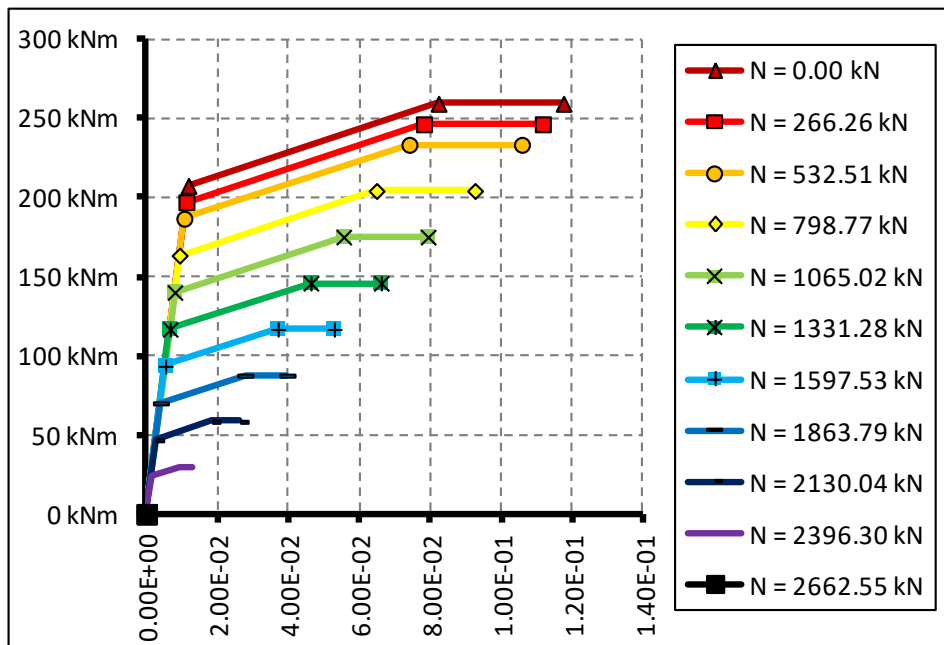
Το υλικό είναι S235 με μέτρο του Young $E=2.0E+08 \text{ kN/m}^2$, λόγο του Poisson $\nu=0.3$, και συμβατική τάση διαρροής $f_y=235000 \text{ kN/m}^2$. επιλέχθηκε η συμμετρική καμπύλη του Πίνακα 6 για την προσομοίωση της μετελαστικής συμπεριφοράς του υλικού.

Για όλες τις δοκούς επιλέχθηκε μια γραμμικοποιημένη επιφάνεια διαρροής σε διαξονική κάμψη $\{M_2, M_3\}$, και για όλα τα υποστυλώματα η διγραμμική συνάρτηση διαρροής σε διαξονική κάμψη και αξονική δύναμη $\{N, M_2, M_3\}$ κατά AISC-LRFD. Για τον υπολογισμό των επιμηκύνσεων-βραχύνσεων και στροφών διαρροής, χρησιμοποιήθηκε η ελαστική μορφή ($S=1$) της ομάδας (41), όπου τέθηκε $L=6\text{m}$ για τις δοκούς και $L=3\text{m}$ για τα υποστυλώματα. Η κράτυνση ορίστηκε κατά Drucker.

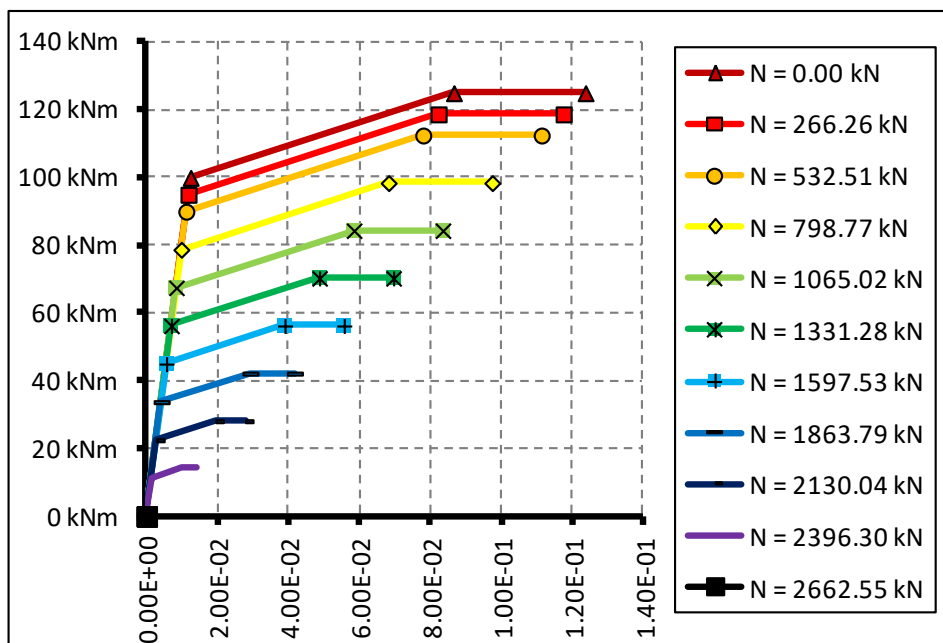
Πραγματοποιήθηκε μια σειρά στατικών ανελαστικών αναλύσεων χρησιμοποιώντας το βασικό μέθοδο στην μέθοδο των πρόγραμμα που συγγράφηκε στα πλαίσια της παρούσας διατριβής: μια ανάλυση 1^{ης} τάξεως υπολογίστηκε χρησιμοποιώντας τον επιλύτη ΤΠ [68], και δύο αναλύσεις 2^{ας} τάξεως πραγματοποιήθηκαν χρησιμοποιώντας τους επιλύτες ΣΤΠ [70] και ΜΕΣ [194], αντιστοίχως. Επίσης υπολογίστηκαν και δύο συγκριτικές αναλύσεις: μία χρησιμοποιώντας το SAP2000 [178] για την ανάλυση 1^{ης} τάξεως, και μία την έκδοση 9.3 του ADINA με όριο 900 κόμβων για την ανάλυση 2^{ας} τάξεως.

Για την ανάλυση 2^{ης} τάξεως, και προκειμένου να συμμορφωθεί το στατικό μοντέλο με το όριο 900 κόμβων του ADINA, όλα τα υποστυλώματα, και εκείνες οι δοκοί της κατασκευής που είναι παράλληλες στην κατεύθυνση x υποδιαιρέθηκαν σε έξι πεπερασμένα ραβδωτά πεπερασμένα, και οι δοκοί κατά την κατεύθυνση y υποδιαιρέθηκαν σε τρία στοιχεία· σημειώνεται ότι, για την ανάλυση 1^{ης} τάξεως, δεν πραγματοποιήθηκε καμία υποδιαίρεση στα υποστυλώματα.

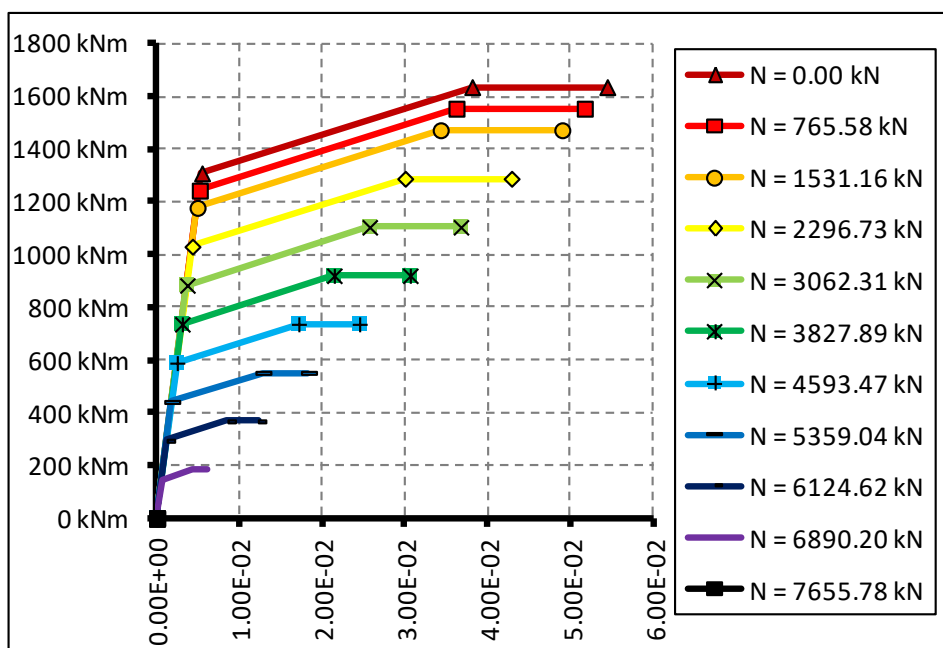
Περαιτέρω, έπρεπε να δοθούν ως δεδομένα εισόδου στο λογισμικό ADINA τα αντίστοιχα διαγράμματα ροπών-καμπυλοτήτων λόγω της αποζευγμένων εντάσεων προγραμματιστικής υλοποίησής του· τα διαγράμματα αυτά απεικονίζονται ακολούθως στα Σχήματα 66 και 67 για τον ασθενή και τον ισχυρό άξονα μιας διατομής HEM180, και στα Σχήματα 68 και 69 για τον ασθενή και τον ισχυρό άξονα μιας διατομής HEM400, αντιστοίχως· το μέτρο ευκαμψίας για κάθε διάγραμμα ροπής καμπυλότητας υπολογίστηκε χρησιμοποιώντας την ελαστική μορφή ($S=I$) της ομάδας Εξισώσεων (41), όπου τέθηκε $L=3m$ για τις διατομές HEM400 και $L=6m$ για τις HEM180, αντιστοίχως. Σημειώνεται ότι η συνεισφορά της στρέψης αμελήθηκε δίνοντας υψηλές τιμές διαρροής στις αντίστοιχες καμπύλες των δεδομένων εισόδου.



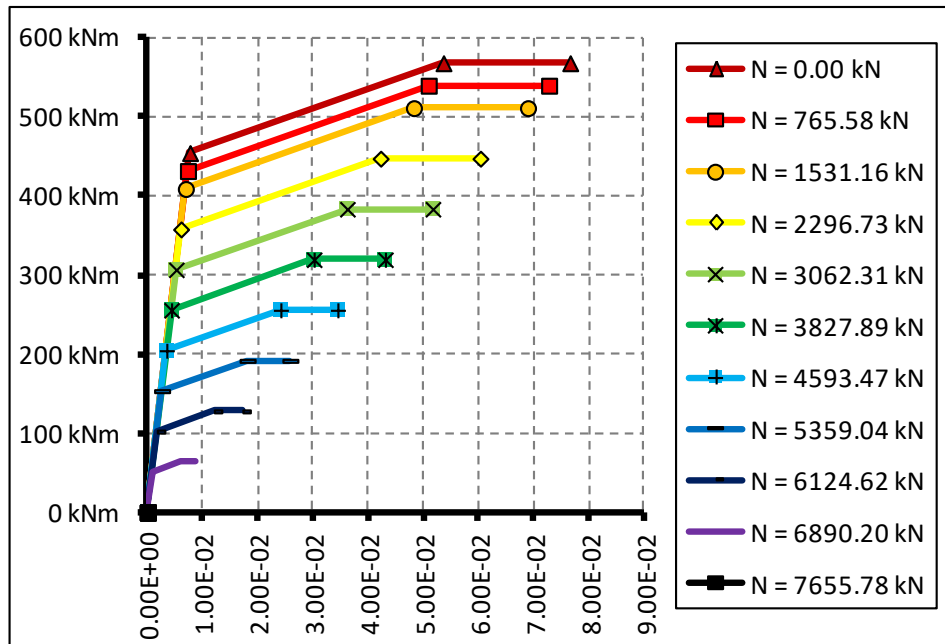
Σχήμα 66: Διαγράμματα ροπών-καμπυλοτήτων για διατομές HEM180 – ισχυρός άξονας {Μονάδες: kN,m,rad}.



Σχήμα 67: Διαγράμματα ροπών-καμπυλοτήτων για διατομές HEM180 – ασθενής άξονας {Μονάδες: kN,m,rad}.



Σχήμα 68: Διαγράμματα ροπών-καμπυλοτήτων για διατομές HEM400 – ισχυρός άξονας {Μονάδες: kN,m,rad}.



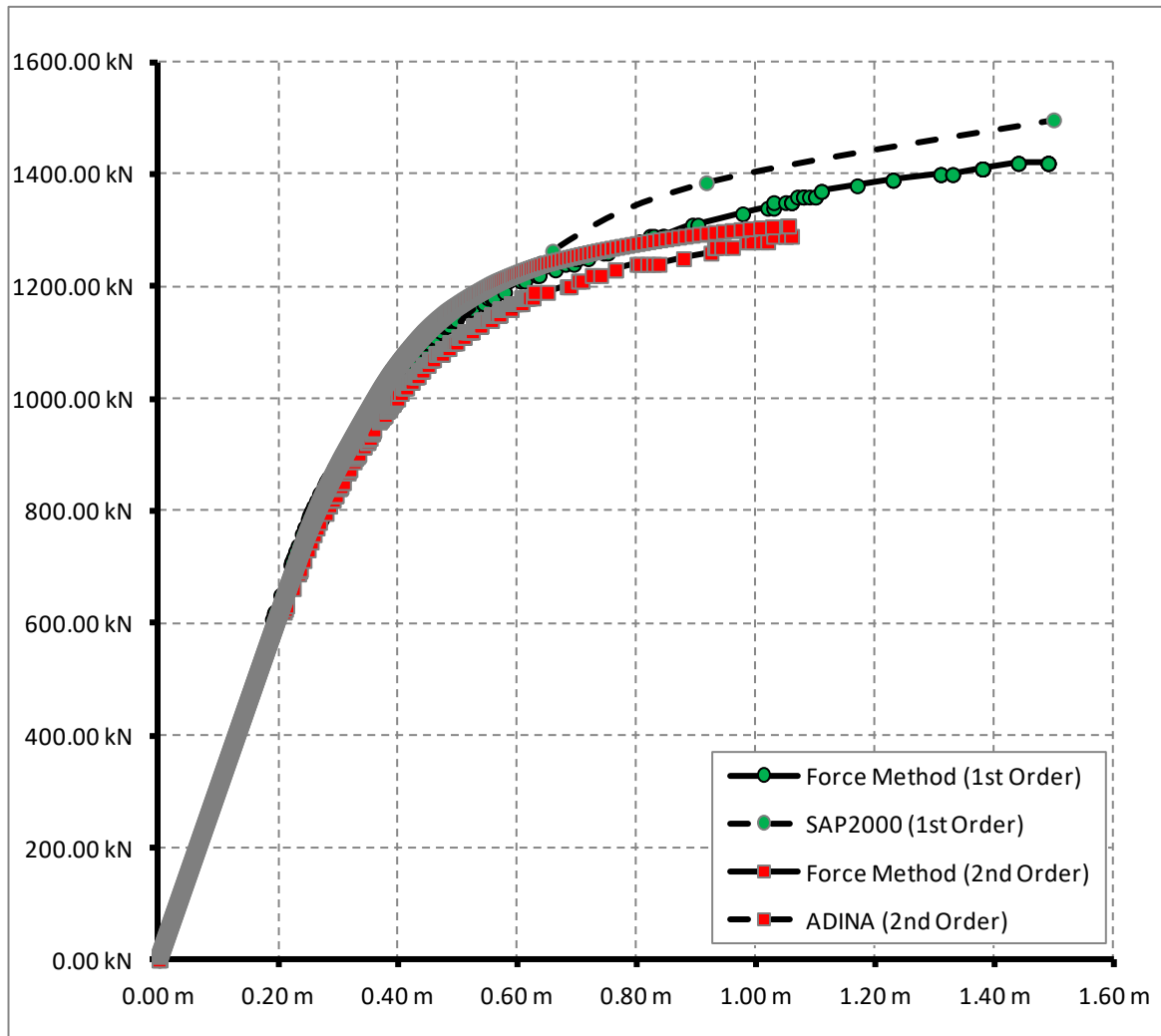
Σχήμα 69: Διαγράμματα ροπών-καμπυλοτήτων για διατομές HEM400 – ασθηνής άξονας {Μονάδες: kN,m,rad}.

Οι προκύπτουσες καμπύλες τέμνουσας βάσης ως συνάρτηση της μετατόπισης της οροφής απεικονίζονται στο Σχήμα 70 ακολούθως. Όπως προκύπτει από την εποπτεία του σχήματος, τα αποτελέσματα συμφωνούν μεταξύ τους.

Για την ανάλυση 1^{ης} τάξεως, η προτεινόμενη μεθοδολογία αποδίδει φορτίο κατάρρευσης που είναι κατά ~5% λιγότερο από αυτό που αποδίδει το SAP2000· αυτή η διαφορά αποδίδεται στην αραιότερη διαμέριση του μοντέλου που υποβλήθηκε στο SAP2000 ως δεδομένα εισόδου, σε σύγκριση με το πυκνότερης διαμέρισης μοντέλο που αναλύθηκε χρησιμοποιώντας την προτεινόμενη μέθοδο.

Για την ανάλυση 2^{ης} τάξεως, η προτεινόμενη μέθοδος αποδίδει φορτίο κατάρρευσης που είναι κατά ~1.5% λιγότερο από αυτό του ADINA· αυτή η διαφορά αποδίδεται πρωτίστως στις διαφορετικές μεταξύ των δύο προγραμμάτων παραδοχές περί των πλαστικών αρθρώσεων: Το ADINA λειτουργεί με απόξευξη εντατικών συνιστωσών, ενώ προτεινόμενη μέθοδος λειτουργεί με while the proposed method works with stress coupling.

Η εντός των πλαισίων της παρούσα διατριβής υλοποιημένη σύζευξη αλληλοεπιδρώντων εντατικών συνιστωσών υποθέτει ότι η τιμή της συνάρτησης διαρροής αντιπροσωπεύει την πορεία επαύξησης των ορθών τάσεων καθ' ύψος μιας κρίσιμης διατομής· παρ' ότι αυτή η προσέγγιση των πλαστικών αρθρώσεων είναι απλή στην υλοποίηση και παράγει στατικώς αποδεκτές κατανομές εντατικών μεγεθών, αδυνατεί να αποδώσει παραδεκτά διαγράμματα “ $M=f(\theta)$ ” (ροπή κάμψης ως συνάρτηση της αντίστοιχης πλαστικής στροφής) ή “ $N=f(\delta)$ ” (αξονική δύναμη ως συνάρτηση της πλαστικής επιμήκυνσης/βράχυνσης): Σε αυτό εδώ το παράδειγμα, παρατηρήθηκε ανακατανομή ροπών μεταξύ των δύο κατευθύνσεων κάμψης καθώς επαυξάνονταν σταδιακά τα οριζόντια (σεισμικά) φορτία· συγκεκριμένα, η λιγότερο επιφορτισμένη κατεύθυνση κάμψης αποφορτιζόταν ενώ ταυτόχρονα συνέχιζε να αναπτύσσει περαιτέρω πλαστική στροφή. Αυτό το φαινόμενο δεν επηρεάζει την καμπύλη φέρουσας ικανότητας ολόκληρης της κατασκευής.



Σχήμα 70: Τέμνουσα βάσης ως συνάρτηση της μετατόπισης οροφής του κόμβου αναφοράς (*) {Μονάδες: kN,m}.

Η ενσωμάτωση ενός επιλύτη κατάλληλου για πίνακες με αραιά μεταξύ τους μη-μηδενικά στοιχεία [194] απέδωσε μια κατά προσέγγιση 45% μείωση του υπολογιστικού χρόνου σε σύγκριση με την χρήση επιλύτη που χρησιμοποιεί ολόκληρους τους πίνακες [70]. Ωστόσο, θα πρέπει να σημειωθεί ότι, όταν υπολογίζονται παραδείγματα μεγάλης κλίμακας, ο γραμμικός/υπέρ-γραμμικός ρυθμός σύγκλισης των αλγορίθμων βελτιστοποίησης δεν είναι ανταγωνιστικός του τετραγωνικού ρυθμού της μεθόδου Newton-Raphson.

Περαιτέρω, η ενσωμάτωση της μη-ολόνομης πλαστικότητας στην μέθοδο των δυνάμεων έχει ένα επιπρόσθετο υπολογιστικό κόστος, καθ' ότι, για την τήρηση του αξιώματος του Drucker σε κάθε βήμα, ενδέχεται συχνά να απαιτηθούν το πολύ δύο κλήσεις του επιλύτη, ειδικά σε παραδείγματα μεγάλης κλίμακας.

14 Συμπερασματικές Επισημάνσεις

Παρουσιάστηκε για πρώτη φορά στην διεθνή βιβλιογραφία μια απλή στην υλοποίηση, πλήρως αυτοματοποιημένη και αμιγώς βασιζόμενη στην μέθοδο των δυνάμεων διαδικασία για την βήμα-προς-βήμα ανάλυση δισδιάστατων/τρειςδιάστατων πλαισιωτών κατασκευών από χάλυβα και ωπλισμένο σκυρόδεμα, με μη-ολόνομες πλαστικές αρθρώσεις.

14.1 Πλεονεκτήματα της Προτεινόμενης Μεθόδου

Η μέθοδος είναι απλή στην υλοποίηση, κυρίως διότι η βασιζόμενη στην μέθοδο των δυνάμεων διατύπωση είναι διαισθητικώς αντιληπτή· η συμβολική μορφή των καταστατικών εξισώσεων χαρακτηρίζεται από την μαθηματική της κομψότητα καθώς και από το ότι είναι εύκολο να τις συνδέσει κανείς με το φυσικό πρόβλημα που αναπαριστούν.

Πλήθος διαφορετικών και σύνθετων συναρτήσεων διαρροής συμπεριλαμβάνονται στην μαθηματική διατύπωση του προβλήματος. Όπως καταδείχθηκε, η διαξονική κάμψη, μόνη της ή συνδυαζόμενη με την αξονική δύναμη ή την στρέψη, καθώς και η επιρροή των τεμνουσών δυνάμεων, ενσωματώνονται αποτελεσματικά και με φυσικό τρόπο στο πρόβλημα· το μόνο που χρειάζεται είναι, για εκείνα τα μέλη της εκάστοτε κατασκευής που πλαστικοποιούνται, να επιλέγονται γραμμικοποιημένες συναρτήσεις διαρροής που να περιγράφουν επαρκώς την αλληλεπίδραση εντάσεων που πραγματοποιείται.

Η μη-ολόνομη πλαστικότητα λαμβάνεται υπ' όψιν ακολουθώντας μια τμηματικώς ολόνομη προσέγγιση που συμπεριλαμβάνεται στην προτεινόμενη αριθμητική στρατηγική μέσω μιας απλής «θεραπείας»· η προτεινόμενη μέθοδος συντίθεται βασιζόμενη στην ικανοποίηση του αξιώματος του Drucker, συνεπώς είναι πλησιέστερα στο φυσικό πρόβλημα όπου οι πλαστικές παραμορφώσεις είναι μη-αναστρέψιμες.

Ένα άλλο πλεονέκτημα που πηγάζει από την χρήση αλγορίθμων βελτιστοποίησης είναι ότι τα όρια της συνάρτησης διαρροής της κάθε κρίσιμης διατομής τηρούνται πάντα· δεν απαιτείται ποτέ επιστροφή στην επιφάνεια διαρροής, κάτι που συμβαίνει όταν χρησιμοποιείται η μέθοδος άμεσης ακαμψίας.

Η προτεινόμενη αριθμητική μέθοδος απαιτεί πολύ λίγες παραμέτρους προς ρύθμιση· έχει καλές ιδιότητες σύγκλισης που είναι ανεξάρτητες από την πυκνότητα διακριτοποίησης του στατικού συστήματος, και αποδίδει καλά αποτελέσματα ακόμη και για προβλήματα μεγάλης κλίμακας. Η υλοποίηση χρησιμοποιώντας έναν επιλύτη βασιζόμενο στην Μέθοδο Εσωτερικού Σημείου (IPM), κατάλληλο για αραιά στοιχειοθετημένους πίνακες [194] απέδωσε κατά προσέγγιση 45% μείωση του υπολογιστικού χρόνου σε σύγκριση με αντίστοιχο επιλύτη Σειριακού Τετραγωνικού Προγραμματισμού (SQP) [70].

14.2 Μειονεκτήματα της Προτεινόμενης Μεθόδου

Είναι γνωστό ότι ο γραμμικός/υπερ-γραμμικός ρυθμός σύγκλισης των αλγορίθμων βελτιστοποίησης δεν είναι ανταγωνιστικός στον τετραγωνικό ρυθμό των αλγορίθμων που βασίζονται στην μέθοδο Newton-Raphson.

Περαιτέρω, βρέθηκε ότι, για παραδείγματα μεγάλης κλίμακας, η επαναλαμβανόμενη διάβαση των αλγορίθμων βελτιστοποίησης μέσα στο ενεργό σύνολο (*active set*), η οποία χρειάζεται προκειμένου να ενσωματωθεί η μη-ολόνομη συμπεριφορά του υλικού, οδηγεί σε αυξημένους υπολογιστικούς χρόνους· στην περίπτωση της πλαστική κράτυνσης υλικού, μπορεί να απαιτηθούν συχνά το πολύ δύο κλήσεις στον επιλύτη εντός του ίδιου βήματος ανάλυσης, που σημαίνει ότι απαιτείται και μια επαναδιαμόρφωση του Εσσιανού (*Hessian*) πίνακα του προβλήματος. Στην τελευταία περίπτωση, ενδέχεται να απαιτείται και μια εκ νέου παραγοντοποίηση του Εσσιανού, αναλόγως του επιλύτη που χρησιμοποιείται.

Όταν πραγματοποιείται ανελαστική ανάλυση χρησιμοποιώντας αλγόριθμους Σειριακού Τετραγωνικού Προγραμματισμού (SQP) λαμβάνοντας υπ' όψιν και τα φαινόμενα 2^{ας} τάξεως, η φόρμουλα των Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) που χρησιμοποιείται για την τετραγωνική προσέγγιση του μη-γραμμικού Εσσιανού ακολουθεί την κατεύθυνση καθόδου του τοπικά οριζόμενου κυρτού προβλήματος. Περαιτέρω, όλοι οι αλγόριθμοι βελτιστοποίησης που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα διατριβή προσδιορίζουν μια λύση υπό την προϋπόθεση για την οριακή τήρηση των περιορισμών του προβλήματος. Από την οπτική της στατικής, αυτοί οι επιλύτες υποθέτουν ότι υπάρχει επαρκής δομική ευστάθεια έτσι ώστε οι πλαστικές αρθρώσεις να φθάνουν στην φάση πλαστικοποίησής τους πριν την εμφάνιση οποιονδήποτε φαινομένων αστάθειας (π.χ. λυγισμός εντός της ελαστικής περιοχής)· συνεπώς, φαινόμενα όπως ο τοπικός λυγισμός των μελών δοκού/υποστυλώματος καθώς και η μετά του λυγισμού συμπεριφορά των κατασκευών δεν κατέστη δυνατόν να προσδιοριστούν.

Είναι γνωστό ότι οι μέθοδοι που βασίζονται στην ελεγχόμενη άσκηση εξωτερικών φορτίων αδυνατούν να ανιχνεύσουν αποτελεσματικά τον μεταλυγισμικό δρόμο ισορροπίας των κατασκευών. Παρ' ότι διατυπώθηκε ένας επαυξημένος φορμαλισμός της μεθόδου των δυνάμεων με όρους 2^{ας} τάξεως που περιέχει τις επικόμβιες μετακινήσεις ως παραμέτρους στο δεξιό μέλος των εξισώσεων μηδενισμού της βαθμίδας της συνάρτησης, καθώς και μια αντίστοιχη αριθμητική διαδικασία που βασίζεται στην μέθοδο Newton, και στην συνέχεια δοκιμάστηκε για το πρόβλημα της μη-γραμμική ελαστικής ανάλυσης, βρέθηκε ότι οι λύσεις παρείχαν λύσεις ισορροπίας που απλώς ικανοποιούσαν πάντα την συνάρτηση συμβιβαστού· για κάθε διάνυσμα εξωτερικού φορτίου που θα μπορούσε να αποδώσει έναν μη-θετικά ορισμένο Εσσιανό πίνακα, τα προκύπτοντα υπέρ-στατικά μεγέθη ήταν τέτοια ώστε να διατηρούνταν θετικά ορισμένος ο Εσσιανός του προβλήματος και για το επόμενο βήμα ανάλυσης.

Οι προταθείσες τεχνικές αυτοματοποίησης για τον υπολογισμό των πινάκων ισορροπίας που περιγράφουν την έννοια των στατικώς πλεοναζόντων (υπέρ-στατικών) ποσοτήτων ενδέχεται να μην αποδώσουν πάντα την στατική βάση (σύνολο τοπολογικών κύκλων) με τον ελάχιστο δυνατό αριθμό μελών, αλλά με έναν σχεδόν ελάχιστο· αυτό οδηγεί σε ένα σύνολο καθολικών πινάκων ευκαμψίας $[\mathbf{B}_i^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{B}_j]$ (όπου $\{i,j\} = \{0,1\}, \{1,0\}, \{1,1\}$) που περιέχουν περισσότερα μη-μηδενικά στοιχεία από τα δυναμικώς ελάχιστα.

Επιπλέον, στην περίπτωση προσομοιωμάτων στατικώς υπέρ-ορισμένων κατασκευών με εσωτερικές ασυνέχειες, η εντός της παρούσης διατριβής τεχνική αυτοματοποίησης που βασίζεται στους πολλαπλασιαστές Lagrange δεν μειώνει καταλλήλως το πλήθος των υπέρ-στατικών μεγεθών, πράγμα που σημαίνει ότι μια μερικώς ασυνεχής κατασκευή θεωρείται πάντα ότι έχει το ίδιο πλήθος υπέρ-στατικών μεγεθών με την γεωμετρικώς ισοδύναμή της και πλήρως συνεχή κατασκευή.

15 Ευχαριστίες

Αν καταφέρατε να διαβάσετε μέχρι εδώ χωρίς να αποκοιμηθείτε στην πορεία, τότε είστε ένας πραγματικός Τζεντάι [195] της υπομονής: ως είναι η Δύναμη [196] μαζί σας!

Ένα καλό οικογενειακό περιβάλλον και μια καλή προσωπική ζωή, καθώς και καλοί εκπαιδευτικοί/καθηγητές, είναι καθοριστικής σημασίας παράγοντες ώστε να μπορεί κανείς να θέσει τα θεμέλια προκειμένου να αναπτυχθεί και να εξελιχθεί· μπορούν να είναι πολύτιμη βοήθεια υπέρ της επίτευξης του στόχου να βελτιώνει ο καθένας μας συνεχώς τον εαυτό του για όσο διαρκεί το ταξίδι της ζωής.

Πάνω από όλα, είμαι ευγνώμων στην οικογένειά μου: χωρίς της συναισθηματική και οικονομική τους υποστήριξη, όλες οι προσπάθειές μου για μόρφωση δεν θα έφθαναν ποτέ σε κάποιο σημείο άξιο λόγου.

Είμαι επίσης ευγνώμων στον επιβλέποντά-μου, διότι με ενθάρρυνε να ξεκινήσω αυτή την διδακτορική διατριβή· το διδακτορικό αυτό απεδείχθη τελικά πως ήταν μια ευτυχής συγκυρία: προσπαθώντας να εφεύρω και να προγραμματίσω μια αντισυμβατική υπολογιστική διαδικασία ξεκινώντας εντελώς από την αρχή, κατάφερα να αναπτύξω –μέσα από σκληρή προσωπική δουλειά– κάποιες αρκετά αξιόλογες δεξιότητες που αφορούν όχι μόνο την αριθμητική ανάλυση και την (σύγχρονη) γλώσσα ForTran, αλλά και τον προγραμματισμό των υπολογιστών γενικότερα.

Τα πρώτα αποτελέσματα της έρευνας που παρουσιάστηκε στην παρούσα διατριβή ήταν για δομικά πλαίσια κείμενα επί επιπέδου (2Δ), και χρηματοδοτήθηκαν από τον Ειδικό Λογαριασμό Κονδυλίων Έρευνας (ΕΛΚΕ) του ΕΜΠ.

Τέλος, είμαι ευγνώμων για όλα τα εμπόδια που αντιμετώπισα στον δρόμο που διάλεξα να βαδίσω· πήρα πολύτιμα μαθήματα καθώς χρειάστηκε να εργασθώ προκειμένου να τα υπερκεράσω.

16 Παράρτημα I – Ένα σύντομο Εγχειρίδιο Χρήσης για το Πρόγραμμα

Το πρόγραμμα που συγγράφηκε για την παρούσα διδακτορική διατριβή εκτελείται μέσω ενός τερματικού παραθύρου εντολών· λόγω του εκτεταμένου φόρτου εργασίας που απαιτήθηκε (όλος ο προγραμματισμός έγινε από την αρχή), η ενσωμάτωση ενός γραφικού περιβάλλοντος (GUI) έμεινε εκτός του παρόντος έργου.

16.1 Δομή των Αρχείων Εισόδου

Η όλη υλοποίηση της δομής του αρχείου εισόδου έγινε έχοντας κατά νου την απλότητα και την ευκολία στην δακτυλογράφηση· όλες οι προγραμματιστικές προσπάθειες εστιάστηκαν στην επίτευξη ενός αυτό-επεξηγούμενου συντακτικού. Η δομή του αρχείου εισόδου διαιρείται σε 18 ενότητες· κάθε μία από αυτές παρουσιάζεται αφαιρετικά ακολούθως:

1. Εισαγωγική Γραμμή:
 - a. Όνομα Αρχείου (Name) | Χώρος (2D/3D) | Τύπος Κατασκευής (Frame)
2. Ορισμοί Κόμβων:
 - a. Πλήθος Κόμβων
 - b. Αύξων Αριθμός Κόμβου | Συντεταγμένες (x, y, z) | Κατάσταση (Συνοριακός/Φορτιζόμενος/Ελεύθερος)
3. Ορισμοί Μελών:
 - a. Πλήθος Μελών
 - b. Αύξων Αριθμός Μέλους | Κόμβοι Αρχοί/Πέρατος | Εκκεντρότητες | Γωνία Στροφής Ισχυρού/Ασθενούς Άξονα | Εσωτερικές Συνοριακές Συνθήκες | Πλήθος/Μήκος Εσωτερικών Πεπερασμένων Στοιχείων | Κατάσταση (Φορτισμένος/Ελεύθερος)
4. Ορισμοί Συνοριακών Συνθηκών
 - a. Πλήθος Συνοριακών Συνθηκών
 - b. Όνομα Συνοριακής Συνθήκης | Μετατοπίσεις & Στροφές ($u_x, u_y, u_z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$)
5. Αναθέσεις Συνοριακών Συνθηκών
 - a. Πλήθος Αναθέσεων
 - b. Αριθμοί Κόμβων => Όνομα Συνοριακής Συνθήκης
6. Ορισμοί Σημειακών Φορτίων
 - a. Πλήθος Σημειακών Φορτίων
 - b. Όνομα φορτίου | Τύπος Φορτίου | Δυνάμεις & Ροπές ($F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z$)
7. Αναθέσεις Σημειακών Φορτίων
 - a. Πλήθος Αναθέσεων
 - b. Αριθμός/-οί Κόμβου/-ων => Όνομα Συγκεντρωμένου Φορτίου
8. Ορισμοί Κατανεμημένων Φορτίων
 - a. Πλήθος Κατανεμημένων Φορτίων
 - b. Όνομα Φορτίου | Είδος Φορτίου | Είδος Κατανομής | Ιδιότητες/Τιμές Φορτίου
9. Αναθέσεις Κατανεμημένων Φορτίων
 - a. Πλήθος Αναθέσεων

- b. Αριθμ-ός/-οί Μέλους/Μελών => Όνομα Κατανεμημένου Φορτίου
- 10. Ορισμοί Υλικών
 - a. Πλήθος Υλικών
 - b. Είδος | Όνομα | Πυκνότητα | Επιτάχυνση Βαρύτητας | Μέτρο Ελαστικότητας | Λόγος του Poisson | Τιμές Τάσης Διαρροής | Τιμές Τάσης Αντοχής | Είδος/Όνομα Καταστατικού Νόμου | Κανόνας Πλαστικής Κράτυνσης
 - c. Τιμές (Γραμμικοποιημένη Καμπύλη Τάσεων-Παραμορφώσεων - ισχύει μόνο για οριζόμενους από τον χρήση καταστατικούς νόμους (μη-τυποποιημένους))
- 11. Αναθέσεις Υλικών
 - a. Πλήθος Αναθέσεων
 - b. Αριθμ-ός/-οί Μέλους/Μελών => Όνομα Υλικού
- 12. Ορισμοί Διατομών
 - a. Πλήθος Διατομών
 - b. Είδος | Σχήμα | Όνομα | Ιδιότητες Σχήματος (B, H, t_f , t_w , κλπ)
- 13. Αναθέσεις Διατομών
 - a. Πλήθος Αναθέσεων
 - b. Αριθμ-ός/-οί Μέλους/Μελών => Όνομα Διατομής
- 14. Ορισμοί Συναρτήσεων Διαρροής
 - a. Πλήθος Συναρτήσεων Διαρροής
 - b. Όνομα Συνάρτησης Διαρροής | Λίστα Αλληλοεπιδρώντων Συνιστωσών
- 15. Αναθέσεις Συναρτήσεων Διαρροής
 - a. Πλήθος Αναθέσεων
 - b. Αριθμ-ός/-οί Μέλους/Μελών => Όνομα Συνάρτησης Διαρροής
- 16. Παράμετροι Ανάλυσης
 - a. Φαινόμενα «P-Δ» (ναι/όχι)
 - b. Μετατοπίσεις (μικρές/μεγάλες)
 - c. Επιλογή Επιλύτη (QPROG/LCONG/MOSEK)
 - d. Είδος Ανάλυσης (Οριακή/Στατική Ανελαστική/Προδιαγεγραμμένος Δρόμος Φόρτισης/Προδιαγεγραμμένη Ανακυκλιζόμενη Φόρτιση)
 - e. Συνδυασμός Φορτίων
 - f. Μέγιστο Πλήθος Βημάτων
 - g. Παράμετρος «μήκος τόξου»
 - h. Ιδιότητες/Παράμετροι ειδικές για κάθε είδος ανάλυσης
- 17. Παράμετροι Πλαστικών Αρθρώσεων
 - a. Πλαστικά Φράγματα (ενεργά/ανενεργά)
 - b. Ενδιάμεσες Πλαστικές Αρθρώσεις εντός των Μελών (ναι/όχι)
 - c. Λειτουργία Συμβατότητες για Παραμορφώσεις Διαρροής (Καμία/SAP2000)
- 18. Παράμετροι Εκτύπωσης για τις Τοπικές Εντατικές Συνιστώσες (Διαγράμματα Εντάσεων-Παραμορφώσεων)
 - a. Αυτόματη/Πλήρης/Καθοριζόμενη από τον χρήστη

b. Ιδιότητες/Παράμετροι Εκτύπωσης - ισχύει μόνο για παραμέτρους οριζόμενες από τον χρήστη

Στην ενότητα 16.2 του παρόντος Παραρτήματος συμπεριλαμβάνεται μια λεπτομερής επεξήγηση της μορφής των δεδομένων εισόδου και των εσωτερικών συναρτήσεων/εντολών· τυχόν σχόλια πάνω ή δίπλα από κάθε γραμμή συμπεριλαμβάνονται προκειμένου να διευκρινίζονται υποθέσεις του προκαθορισμένου συντακτικού καθώς και ιδιότητες/δυνατότητες του προγράμματος αυτού καθ' αυτού. Στην ενότητα 16.3 παρουσιάζεται ως παράδειγμα ένα αρχείο εισόδου για ένα απλό επίπεδο πλαίσιο.

Σημειώνεται ότι, η χρήση των κεφαλαίων γραμμάτων στα αρχεία εισόδου δεν είναι προαπαιτούμενο· παρέμεινε ως αφιέρωμα στις μέρες του παρελθόντος της ιδιαίτερας πρώιμης έκδοσης του προγράμματος η οποία δεν περιείχε συναρτήσεις ανάγνωσης και επεξεργασίας συμβολοσειρών (*μεταβλητών χαρακτήρων*).

Τέλος, σημειώνεται ότι, λόγω του αυξημένου φόρτου για την υλοποίηση της παρούσας εργασίας, δεν προγραμματίστηκε υποστήριξη πακέτου γλωσσών για τον κώδικα λογισμικού που αναπτύχθηκε· δεδομένου και ότι η συγγραφή λογισμικού Η/Υ γίνεται υποχρεωτικά στην αγγλική γλώσσα, χάριν απλότητας, ο κώδικας γράφηκε ώστε το πρόγραμμα να δύναται να αναγιγνώσκει τα περιεχόμενα των αρχείων εισόδου μόνο αν αυτά είναι γραμμένα με λατινικούς χαρακτήρες.


```

+-----+
|NUMBER OF DIFFERENT POINT LOAD TYPES:| 2
+-----+
|
| LOAD | LOAD TYPE: | | |
| NAME | E=EARTHQUAKE | FORCES |
| | G=GRAVITY | | MOMENTS |
| | Q=MOBILE | |
| | S=SNOW | |
| | W=WIND | F(x) F(y) F(z) | M(x) M(y) M(z) |
+-----+
P_LOAD_1 : E +1.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00
P_LOAD_2 : Q 0.00 0.00 0.00 -5.00 0.00 0.00 0.00 0.00
+-----+
|TOTAL NUMBER OF POINT LOAD ASSIGNMENTS:| 1
+-----+
|
| ASSIGNING LOADS TO THE LOADED NODES... |
+-----+
|
| NODE... | LOAD ASSIGNMENTS (BY LOAD NAME) |
| NUMBERS/RANGE | [NOTE: MUST BE COMMA SEPARATED!] |
+-----+
2 => P_LOAD_1 , P_LOAD_2
+-----+
|NUMBER OF DIFFERENT DISTRIBUTED LOAD TYPES:| 4
+-----+
|
| KIND | DISTRIBUTION: | [THESE APPLY ONLY TO DISCRETE DISTRIBUTIONS] |
| E=EARTHQUAKE |
+-----+
| LOAD | G=GRAVITY | U=UNIFORM | NUMBER | LOAD DISTANCE FROM THE START OF | | | | | | | |
| NAME | Q=MOBILE | T=TRAPEZOID | OF | THE MEMBER, AS A PERCENTAGE OF |
| | S=SNOW | D=DISCRETE | LOADS | THE MEMBER'S LENGTH. |
| | W=WIND | | | [ [ NODAL ECCENTRICITY INCLUDED ] | F(x) F(y) F(z) | M(x) M(y) M(z) |
| | | | | | | | | (START) | | | (END) |
+-----+
D_LOAD_1 : G U 0.00 0.00 -2.50 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00
D_LOAD_2 : Q T 0.00 0.00 -3.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 -6.00 0.00 0.00 0.00
D_LOAD_3 : Q D 0.33 0.00 0.00 -0.70 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00
0.66 0.00 0.00 -1.30 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00
D_LOAD_4 : Q U 0.00 0.00 -5.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00
+-----+
|TOTAL NUMBER OF DISTRIBUTED LOAD ASSIGNMENTS:| 1
+-----+
|
| ASSIGNING LOADS TO THE LOADED MEMBERS... |
+-----+
|
| MEMBER... | LOAD ASSIGNMENTS (BY LOAD NAME) |
| NUMBERS/RANGE | [NOTE: MUST BE COMMA SEPARATED!] |
+-----+
2 => D_LOAD_1 , D_LOAD_4
+-----+

```



```

+-----+
|NUMBER OF MATERIALS:| 4
+-----+
+-----+
| MATERIAL'S/MATERIAL'S/MASS PER GRAVITATIONAL | (E) | YIELD STRESS (fy) | ULTIMATE STRESS (fu) | PIECE-WISE LINEAR MATERIAL LAW TYPE | ISOTROPIC/KINEMATIC HARDENING RULE |
| ITYPE | INAME | UNIT VOLUME ACCELERATION | YOUNG'S MODULUS | POISSON'S RATIO | TENSION | COMPRESSION | TENSION | COMPRESSION | (SIMPLE / ATC-40 / KANEPE / CUSTOM) | (NONE/DRUCKER/FRAGER/ZIEGLER) |
+-----+
| CONCRETE | C20/25 | 2.54842 | 9.810 | 29000000.0 | 0.25 | +666.6 | -8000.0 | -20000.0 | ATC-40 | DRUCKER |
| STEEL | S235 | 8.05000 | 9.810 | 210000000.0 | 0.3 | +235000.0 | -235000.0 | -235000.0 | SIMPLE | NONE |
| STEEL | S220 | 8.05000 | 9.810 | 210000000.0 | 0.3 | +220000.0 | -220000.0 | -231000.0 | CUSTOM | FRAGER |
| STEEL | S400 | 8.05000 | 9.810 | 210000000.0 | 0.3 | +400000.0 | -400000.0 | -420000.0 | CUSTOM | ZIEGLER |
+-----+
| Backbone curve's type:.....:
| SYMMETRIC / ASYMMETRIC
| In the first case, only the positive values need be defined.
| In the second case, the negative values follow after the
| positive ones; all values must be defined in ascending order
| according to their coupled absolute strain values.
+-----+
| SYMMETRIC
+-----+
| NUMBER OF POINTS FOR THE CUSTOM PIECE-WISE LINEAR MATERIAL
| CONSTITUTIVE LAW
| Note: For all other constitutive law types, these lines must
| --- be omitted!
+-----+
| 6
+-----+
| NORMALIZED...
| STRESS|STRAIN
+-----+
| 1.00 1.00
| 1.25 6.00
| 0.20 6.00
| 0.20 8.00
| 0.00 8.00
| 0.00 1E+99
+-----+
| NUMBER OF MATERIAL ASSIGNMENTS:| 3
+-----+
+-----+
| ASSIGNING MATERIALS TO MEMBERS...|
+-----+
| MEMBER... | NAME OF MATERIAL |
| NUMBERS/RANGE | NUMBERS/RANGE |
+-----+
| 1,3 => S220
| 2 => S220
| 1:3 (=1,2,3) => S220
+-----+

```



```

+-----+
| NUMBER OF SECTIONS: | 18
+-----+
| SECTION'S | SECTION'S SHAPE | SECTION'S WIDTH | HEIGHT |
| TYPE      | (BUILT IN SHAPES) NAME | B | H |
+-----+
| STEEL     | RECTANGULAR           | REC_1 | 0.25 | 0.50
+-----+
| SECTION'S | SECTION'S SHAPE | SECTION'S WIDTH | HEIGHT | ELANGE | WEB |
| TYPE      | (BUILT IN SHAPES) NAME | B | H | tf | tw |
+-----+
| STEEL     | RECTANGULAR_TUBE     | REC_TUB_1 | 0.25 | 0.50 | 0.10 | 0.10
+-----+
| SECTION'S | SECTION'S SHAPE | SECTION'S Diameter |
| TYPE      | (BUILT IN SHAPES) NAME | D |
+-----+
| STEEL     | CIRCULAR              | CIR_1 | 0.60
+-----+
| SECTION'S | SECTION'S SHAPE | SECTION'S External | Internal |
| TYPE      | (BUILT IN SHAPES) NAME | Radius (Re) | Radius (Ri) |
+-----+
| STEEL     | CIRCULAR_TUBE        | CIR_TUB_1 | 0.5000 | 0.40
+-----+
| SECTION'S | SECTION'S SHAPE | SECTION'S WIDTH | HEIGHT | ELANGE | WEB | FILLET RADIUS |
| TYPE      | (BUILT IN SHAPES) NAME | B | H | tf | tw | Ri |
+-----+
| STEEL     | T_SECTION            | T_SEC_1 | 0.25 | 0.50 | 0.10 | 0.10 | --
| STEEL     | U_SECTION            | U_SEC_1 | 0.25 | 0.50 | 0.10 | 0.10 | --
| STEEL     | L_SECTION            | L_SEC_1 | 0.25 | 0.50 | 0.10 | 0.10 | --
| STEEL     | I_SECTION            | I_SEC_1 | 0.25 | 0.50 | 0.10 | 0.10 | 0.025
+-----+
| EUROPEAN SECTIONS |
| SECTION'S | IPE 80-750X...& | SECTION'S |
| TYPE      | HE-B/M 100-1000 | NAME |
+-----+
| STEEL     | EURO                 | IPE80
| STEEL     | EURO                 | IPE750X196
| STEEL     | EURO                 | HEB160
| STEEL     | EURO                 | HEM160
| STEEL     | EURO                 | HEM220
| STEEL     | EURO                 | HEM260
+-----+
| SECTION'S | AISC SECTIONS | SECTION'S |
| TYPE      | W6X25 , W8X21 | NAME |
+-----+
| STEEL     | AISC                | W6X25
| STEEL     | AISC                | W8X21
+-----+
| SECTION'S | SECTION'S SHAPE |
| TYPE      | (NON-DEFORMABLE!) |
+-----+
| STEEL     | RIGID
| CONCRETE | RIGID
+-----+
| NUMBER OF SECTION ASSIGNMENTS: | 3
+-----+
| ASSIGNING SECTIONS TO MEMBERS... |
| MEMBER... |
| NUMBERS/RANGE | NAME OF SECTION |
+-----+
| 1,3          => HEM160
| 2            => HEM160
| 1:3 (=1,2,3) => HEM160

```

```

+-----+
| NUMBER OF YIELD FUNCTIONS: | 27
+-----+
| FAILURE CRITERION DEFINITIONS |
| (all possible combos displayed) |
+-----+
| (N/Np)=1 : (N)
| (M/Mp)=1 : (M2)
| (M/Mp)=1 : (M3)
| (M/Mp)=1 : (M2, M3)
| (M/Mp)^2=1 : (M2, M3) [Approximates each quadrant of the circle with 4 linear segments]
| (M/Mp)+(N/Np)=1 : (N, M2)
| (M/Mp)+(N/Np)=1 : (N, M3)
| (M/Mp)+(N/Np)^2=1 : (N, M2, M3) [Approximates each quadrant of the parabola with 5 linear segments]
| (M/Mp)+(N/Np)^2=1 : (N, M2, M3) [Approximates each quadrant of the parabola with 5 planar segments]
| (M/Mp)^2+(N/Np)^2=1 : (N, M2, M3) [Approximates each quadrant of the sphere with 9 planar segments]
| (M/Mp)^2+(N/Np)^2=1 : (N, M2)
| (M/Mp)^2+(N/Np)^2=1 : (N, M3)
| (M/Mp)^2+(N/Np)^2=1 : (N, M2, M3, Q2, Q3)
| (M/Mp)+(T/Tp)=1 : (T, M2)
| (M/Mp)+(T/Tp)=1 : (T, M3)
| (M/Mp)^2+(T/Tp)^2=1 : (T, M2) [Approximates each quadrant of the circle with 4 linear segments]
| (M/Mp)^2+(T/Tp)^2=1 : (T, M3) [Approximates each quadrant of the circle with 4 linear segments]
| (M/Mp)^2+(T/Tp)^2=1 : (T, M2, M3) [Approximates each quadrant of the sphere with 9 planar segments]
| POLYTOPON : (N, Q2, Q3, T, M2, M3)
| CUSTOM : (CUSTOM)
| ELASTIC : (NONE) [No plasticity implementation; provides pure elastic solutions]
+-----+
| (FOR "CUSTOM" CRITERION ONLY: FOR ALL OTHER CRITERIA TYPES THESE LINES MUST BE OMITTED!)
|
| 3
|
| COEFFICIENTS FOR EACH LINE OF THE YIELD FUNCTION:
|
| k=N
| --- Q[k]
| g(Q[k]) = > S[k] * ----- - C = 0
| --- Qp[k]
| k=1
|
| (FOR "CUSTOM" CRITERION ONLY: FOR ALL OTHER CRITERIA TYPES THESE LINES MUST BE OMITTED!)
|
| S1 (N) S2 (Q2) S3 (Q3) S4 (Tc) S5 (M2) S6 (M3)
| 1.000000000 0.000000000 0.000000000 1.000000000 1.000000000 1.000000000
| 0.000000000 1.111111111 0.000000000 1.000000000 0.000000000 1.000000000
| 0.000000000 0.000000000 1.111111111 1.000000000 1.000000000 0.000000000
|
| NUMBER OF YIELD FUNCTION ASSIGNMENTS: | 3
+-----+
| ASSIGNING YIELD FUNCTIONS TO MEMBERS... |
| MEMBER... | ... |
| NUMBERS/RANGE | NAME OF YIELD FUNCTION |
+-----+
| 1,3 => AISC-LRFD
| 2 => DIN-18800
| 1:3 (=1,2,3) => POLYTOPON

```

```

+-----+
|P-DELTA EFFECTS:| YES / NO
+-----+
+-----+
|DISPLACEMENTS:| SMALL / LARGE
+-----+
+-----+
|SOLVER:| QPROG / LCONG / MOSEK
+-----+
+-----+
|ANALYSIS TYPE:| ELASTIC / LIMIT / SCENARIO / PUSHOVER / CYCLIC
+-----+
+-----+
PARAMETERS FOR [ELASTIC_] ANALYSIS (ONLY!):
+-----+
LOAD COMBINATION : 1.00*G+0.30*Q+1.00*E
MAX NUMBER OF STEPS: 1000
ARC-LENGTH : 0.001
LOAD SCALE FACTOR : 1.00
+-----+
PARAMETERS FOR [LIMIT_] ANALYSIS (ONLY!):
+-----+
LOAD COMBINATION : 1.00*G+0.30*Q+1.00*E
MAX NUMBER OF STEPS: 1000
ARC-LENGTH : 0.001
+-----+
PARAMETERS FOR [PUSHOVER] ANALYSIS (ONLY!):
+-----+
LOAD COMBINATION : 1.00*G+0.30*Q+1.00*E
MAX NUMBER OF STEPS: 1000
ARC-LENGTH : 0.001
REFERENCE NODE : 2
MAX. DISPLACEMENT : 1.00
+-----+
PARAMETERS FOR [SCENARIO] ANALYSIS (ONLY!):
+-----+
LOAD COMBINATION : 1.00*G+0.30*Q+1.00*E
MAX NUMBER OF STEPS: 1000
ARC-LENGTH : 0.001
NUMBER OF PATH PEAKS:
+-----+
1
+-----+
EXTERNAL LOADPATH VALUES:
+-----+
[ Q1 , Q2 , Q3 , .... , QN ]
+-----+
155.412 155.412 .....
+-----+
PARAMETERS FOR [CYCLIC_] ANALYSIS (ONLY!):
+-----+
LOAD COMBINATION : 1.00*G+0.30*Q+1.00*E
MAX NUMBER OF STEPS: 1000
ARC-LENGTH : 0.001
REFERENCE NODE : 2
NUMBER OF LOAD PEAKS: 5
PEAK SCALE FACTORS : +1.0,-0.8,+0.8,-0.8,+0.8

```

> Put these lines at the end of the input file.

```

+-----+
| PLASTIC HINGE PARAMETERS: |
+-----+
ELASTIC BARRIERS : ON / OFF
INTERMEDIATE HINGES: ON / OFF
COMPATIBILITY MODE : NONE / SAP2000

NOTE #1: For "Elastic" analysis, no plastic hinge parameters
----- are allowed to be defined.

NOTE #2: For "Limit" analysis, no plastic barriers and no
----- compatibility mode are allowed to be defined; only
the intermediate hinges may be defined.

+-----+
| Q=f (q) PRINT: | AUTO / CUSTOM / FULL
+-----+

+-----+
| ADDITIONAL PARAMETERS (APPLIES TO [CUSTOM] Q=f (q) PRINT OPTION ONLY ! ) :
+-----+
+-----+
| NUMBER OF PRINT REQUESTS: | 4
+-----+

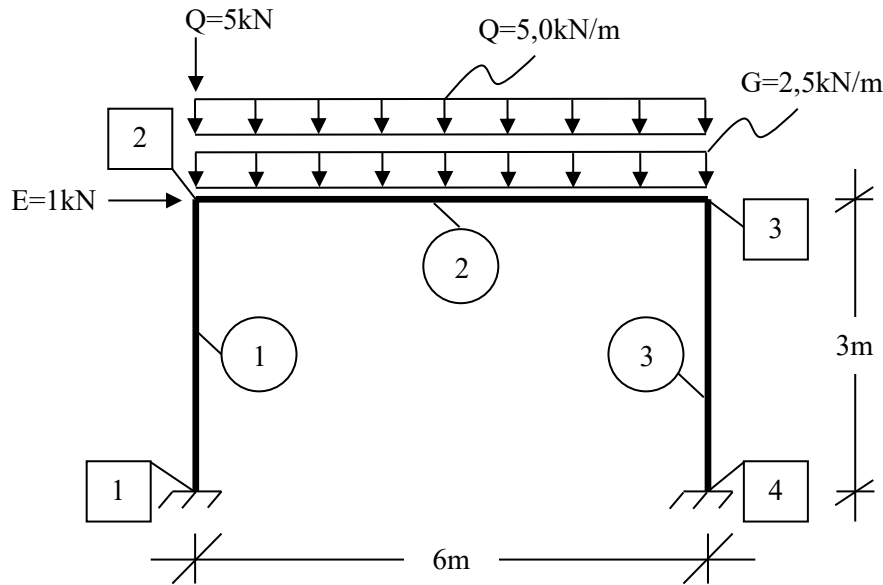
+-----+
| Member | Element | Section | Stress component | q-function |
| / | / | / | name (s) = | |
+-----+
| Number | Number (s) | Number (s) | (N,Q2,Q3,T,M2,M3) | type |
+-----+
1 / 1 / 1,2 : N,M3 = f(q-elastic)
2 / 1 / 1 : M3 = f(q-plastic)
2 / 10 / 2 : M3 = f(q-plastic)
3 / 1 / 1,2 : N,M3 = f(q-total)
+-----+

```

*****End of Input File*****

16.3 Ένα Παράδειγμα Αρχείου Εισόδου

Για την δημιουργία ενός ενδεικτικού αρχείου εισόδου για το πρόγραμμα που συγγράφηκε στα πλαίσια της παρούσας διατριβής, χρησιμοποιήθηκε το απλό πλαίσιο που απεικονίζεται στο Σχήμα 71 ακολούθως:



Σχήμα 71: Γεωμετρία, συννοριακές συνθήκες, και φορτίσεις της κατασκευής του αρχείου εισόδου.

Η κατασκευή ορίζεται από τέσσερις κόμβους (1,2,3,4) και τρία πεπερασμένα ραβδωτά στοιχεία Euler-Bernoulli (1,2,3)· όλα τα στοιχεία έχουν τοποθετηθεί ώστε να κάμπτονται περί τους ισχυρούς άξονές τους (#3), και η δοκός υποδιαιρέθηκε σε δέκα στοιχεία. Οι συννοριακοί κόμβοι είναι πλήρως πακτωμένοι. Ορίζονται δύο τύποι επικόμβιων φορτίων· ένα σεισμικό (E) και ένα κινητό (Q)· και τα δύο εφαρμόζονται στον κόμβο #2. Ορίζονται και δύο ομοιομόρφως κατανεμημένα φορτία· ένα ιδίου βάρους (G) και ένα κινητό (Q), τα οποία ασκούνται στο μέλος #2. Το υλικό της κατασκευής είναι δομικός χάλυβας S220· ορίστηκε αυθαίρετα ένας τμηματικός γραμμικώς καταστατικός νόμος υλικού, ενώ η κράτυση υποτέθηκε κινηματική κατά Ziegler. Η διατομή των υποστυλωμάτων είναι HEB180 και της δοκού HEB160. Για τα υποστυλώματα υποτέθηκε αλληλοεπίδραση ροπής κάμψης και αξονικής κατά AISC-LRFD, και για την δοκό αμιγώς καμπτική συμπεριφορά. Τα φαινόμενα «P-Δ» και οι μεγάλες μετατοπίσεις δεν ελήφθησαν υπ' όψιν (ανάλυση μόνο με όρους 1^{ης} τάξεως). Το πλαίσιο υποβλήθηκε σε στατική ανελαστική ανάλυση υπό έναν συνδυασμό φορτίων που θεωρεί 100% συμμετοχή των ιδίων βαρών (G) και 30% των κινητών (Q). Ο μέγιστος επιτρεπόμενος αριθμός βημάτων ανάλυσης ορίστηκε ίσος προς 100. Η παράμετρος «μήκους τόξου» (ρ) τέθηκε ίση προς 0,001. Ο κόμβος #2 επιλέχθηκε ως ο κόμβος αναφοράς (οροφής) για την καμπύλη φέρουσας ικανότητας, ενώ η μέγιστη επιτρεπόμενη οριζόντια μετακίνησή του τέθηκε ίση προς 0,50 μονάδες μήκους. Οι παράμετροι των πλαστικών αρθρώσεων δεν επιβάλλουν ιδεατώς πλαστική συμπεριφορά στις αξονικές δυνάμεις, ενώ τα υποδιαιρούμενα σε περισσότερα του ενός πεπερασμένα στοιχεία μέλη μπορούν να περιέχουν πλαστικές αρθρώσεις και εσωτερικά του μήκους τους. Οι συντελεστές πλαστικής κράτυσης σε όρους ευκαμψίας ορίζονται έτσι ώστε να διατηρείται η συμβατότητα με κοινώς παραδεκτά εμπορικά λογισμικά. Η εκτύπωση διαγραμμάτων τοπικών εντατικών συνιστωσών προς τις αντίστοιχές τους πλαστικές γενικευμένες παραμορφώσεις δημιουργείται αυτόματα και μόνο για εκείνες τις πλαστικές αρθρώσεις που ενεργοποιούνται κατά την διάρκεια της ανάλυσης.

Το αρχείο εισόδου που αντιστοιχεί στην ανωτέρω εικονιζόμενη και περιγραφείσα κατασκευή ακολουθεί στην επόμενη σελίδα.

Πρωτότυπες αριθμητικές διαδικασίες μαθηματικού προγραμματισμού για την ανελαστική ανάλυση τρισδιάστατων πλαισιωτών σχηματισμών με τη μέθοδο των δυνάμεων.

*****Beginning of Input File*****

```

INPUT_FILE_v.2.8.0_3D  3D  Frame
=====
4
 1  0.00  0.00  0.00  B
 2  0.00  0.00  3.00  L
 3  6.00  0.00  3.00  F
 4  6.00  0.00  0.00  B
3
 1  1  2  +0.00 +0.00 +0.00 +0.00 +0.00 -0.08  +180.00000 rad  1 1 1 1 1 1 1 1 1 1  N=3  F
 2  2  3  +0.10 +0.00 +0.00 -0.10 +0.00 +0.00  +90.00000 deg  1 1 1 1 1 1 1 1 1 1  N=10 L
 3  4  3  +0.00 +0.00 +0.00 +0.00 +0.00 -0.08  +180.00000 deg  1 1 1 1 1 1 1 1 1 1  N=3  F
1
B_COND_1:  0.0  0.0  0.0  0.0  0.0  0.0
1
1,4 => B_COND_1
2
P_LOAD_1:  E  +1.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00
P_LOAD_2:  Q   0.00  0.00 -5.00  0.00  0.00  0.00
1
2 => P_LOAD_1 , P_LOAD_2
2
D_LOAD_1:  G  U      0.00  0.00 -2.50  0.00  0.00  0.00
D_LOAD_2:  Q  U      0.00  0.00 -5.00  0.00  0.00  0.00
1
2 => D_LOAD_1 , D_LOAD_2
1
STEEL S220  8.05000  9.810  2.1E+8  0.3  +220000.0 -220000.0 +231000.0 -231000.0  CUSTOM  PRAGER
SYMMETRIC
 3
 1.00 1.00
 1.25 6.00
 1.25 1E+99
1
1:3 => S220
2
STEEL  EURO  HEB160
STEEL  EURO  HEM180
2
 1,3 => HEM180
 2   => HEB160
2
(M/Mp)=1 : {M3}
AISC-LRFD : {N,M3}
2
 1,3 => AISC-LRFD
 2   => (M/Mp)=1

P-D EFFECTS : NO
DISPLACEMENTS: SMALL
SOLVER      : QPROG
ANALYSIS TYPE: PUSHOVER
LOAD COMBINATION : 1.00*G+0.30*Q+1.00*E
MAX NUMBER OF STEPS: 100
ARC-LENGTH      : 0.01
REFERENCE NODE   : 2
MAX. DISPLACEMENT : 0.50

PLASTIC HINGE PARAMETERS:
PLASTIC BARRIERS : OFF
INTERMEDIATE HINGES: ON
COMPATIBILITY MODE : SAP2000

Q=f(q) PRINT : AUTO

```

*****End of Input File*****

16.4 Ένα Παράδειγμα Αρχείου Εξόδου

Σε αυτή την ενότητα, παρουσιάζεται μια επιλογή από τα δεδομένα εξόδου του προγράμματος που αντιστοιχούν στο αρχείο εισόδου που περιγράφει την κατασκευή που απεικονίζεται στο Σχήμα 71:

```

+-----+
| Program SSS - V_2.8.0_3D - Force_Method - Theodoros N. Patsios, Dr.Eng. Candidate |
+-----+
| Input File:                               EXAMPLE_INFOT.TXT|12/Mar/2019|22:07:12|
+-----+
|
|-----+
| Analysis Category: FUSHOVER|
| P-Delta Effects.: NO|
| Displacements....: SMALL|
|-----+
|
| Node # | Coordinates {x,y,z} | Boundary Conditions { Ux, Uy, Uz, Rx, Ry, Rz } |
+-----+
| 1 | 0.00 0.00 0.00 | 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 |
| 2 | 0.00 0.00 3.00 | 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 |
| 3 | 6.00 0.00 3.00 | 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 |
| 4 | 6.00 0.00 0.00 | 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 |
+-----+
|
| Member # | Node: Start --> End | Material | Section | Yield Function | Interacting Components | E | v | A (1) | A (2) | A (3) | I (1) | I (2) | I (3) |
+-----+
| 1 | 1 --> 2 | S220 | HEM180 | AISC-LRFD | (M,M3) | 0.210E+09 | 0.300E+00 | 0.113E-01 | 0.556E-01 | 0.186E-01 | 0.206E-05 | 0.258E-04 | 0.748E-04 |
| 2 | 2 --> 3 | S220 | HEB160 | (M/MP)=1 | (M3) | 0.210E+09 | 0.300E+00 | 0.543E-02 | 0.270E-01 | 0.881E-02 | 0.318E-06 | 0.889E-05 | 0.249E-04 |
| 3 | 4 --> 3 | S220 | HEM180 | AISC-LRFD | (M,M3) | 0.210E+09 | 0.300E+00 | 0.113E-01 | 0.556E-01 | 0.186E-01 | 0.206E-05 | 0.258E-04 | 0.748E-04 |
+-----+
|
| Node # | Load Kind | Force -> X | Force -> Y | Force -> Z | Moment @ X | Moment @ Y | Moment @ Z |
+-----+
| 2 | E | 1.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 2 | Q | 0.000 | 0.000 | -5.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
+-----+
|
| Table of Uniformly Distributed Loads applied to the Beam/Column Members of the Structure:
+-----+
| Member # | Load Kind | (Fx/L) | (Fz/L) | (Mx/L) | (My/L) | (Mz/L) |
+-----+
| 2 | G | 0.000 | 0.000 | -2.500 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 2 | Q | 0.000 | 0.000 | -5.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
+-----+

```


Member #	Section #	Xcrit.	Ycrit.	Zcrit.	Releases	Np (+)	Np (-)	Qp [2] (+)	Qp [2] (-)	Qp [3] (+)	Qp [3] (-)	Mp [1] (+)	Mp [1] (-)	Mp [2] (+)	Mp [2] (-)	Mp [3] (+)	Mp [3] (-)
1	1	0.00	0.00	0.00	1 1 1 1 1 1 1	0.249E+04	-0.249E+04	0.706E+04	-0.706E+04	0.237E+04	-0.237E+04	0.782E+01	-0.782E+01	0.935E+02	-0.935E+02	0.194E+03	-0.194E+03
2	1	0.00	0.00	0.97	1 1 1 1 1 1 1	0.249E+04	-0.249E+04	0.706E+04	-0.706E+04	0.237E+04	-0.237E+04	0.782E+01	-0.782E+01	0.935E+02	-0.935E+02	0.194E+03	-0.194E+03
3	1	0.00	0.00	0.97	1 1 1 1 1 1 1	0.249E+04	-0.249E+04	0.706E+04	-0.706E+04	0.237E+04	-0.237E+04	0.782E+01	-0.782E+01	0.935E+02	-0.935E+02	0.194E+03	-0.194E+03
4	1	0.00	0.00	1.95	1 1 1 1 1 1 1	0.249E+04	-0.249E+04	0.706E+04	-0.706E+04	0.237E+04	-0.237E+04	0.782E+01	-0.782E+01	0.935E+02	-0.935E+02	0.194E+03	-0.194E+03
5	1	0.00	0.00	1.95	1 1 1 1 1 1 1	0.249E+04	-0.249E+04	0.706E+04	-0.706E+04	0.237E+04	-0.237E+04	0.782E+01	-0.782E+01	0.935E+02	-0.935E+02	0.194E+03	-0.194E+03
6	1	0.00	0.00	2.92	1 1 1 1 1 1 1	0.249E+04	-0.249E+04	0.706E+04	-0.706E+04	0.237E+04	-0.237E+04	0.782E+01	-0.782E+01	0.935E+02	-0.935E+02	0.194E+03	-0.194E+03
7	1	0.10	0.00	3.00	1 1 1 1 1 1 1	0.119E+04	-0.119E+04	0.343E+04	-0.343E+04	0.112E+04	-0.112E+04	0.199E+01	-0.199E+01	0.374E+02	-0.374E+02	0.779E+02	-0.779E+02
8	1	0.68	0.00	3.00	1 1 1 1 1 1 1	0.119E+04	-0.119E+04	0.343E+04	-0.343E+04	0.112E+04	-0.112E+04	0.199E+01	-0.199E+01	0.374E+02	-0.374E+02	0.779E+02	-0.779E+02
9	1	0.68	0.00	3.00	1 1 1 1 1 1 1	0.119E+04	-0.119E+04	0.343E+04	-0.343E+04	0.112E+04	-0.112E+04	0.199E+01	-0.199E+01	0.374E+02	-0.374E+02	0.779E+02	-0.779E+02
10	1	1.26	0.00	3.00	1 1 1 1 1 1 1	0.119E+04	-0.119E+04	0.343E+04	-0.343E+04	0.112E+04	-0.112E+04	0.199E+01	-0.199E+01	0.374E+02	-0.374E+02	0.779E+02	-0.779E+02
11	1	1.26	0.00	3.00	1 1 1 1 1 1 1	0.119E+04	-0.119E+04	0.343E+04	-0.343E+04	0.112E+04	-0.112E+04	0.199E+01	-0.199E+01	0.374E+02	-0.374E+02	0.779E+02	-0.779E+02
12	1	1.84	0.00	3.00	1 1 1 1 1 1 1	0.119E+04	-0.119E+04	0.343E+04	-0.343E+04	0.112E+04	-0.112E+04	0.199E+01	-0.199E+01	0.374E+02	-0.374E+02	0.779E+02	-0.779E+02
13	1	1.84	0.00	3.00	1 1 1 1 1 1 1	0.119E+04	-0.119E+04	0.343E+04	-0.343E+04	0.112E+04	-0.112E+04	0.199E+01	-0.199E+01	0.374E+02	-0.374E+02	0.779E+02	-0.779E+02
14	1	2.42	0.00	3.00	1 1 1 1 1 1 1	0.119E+04	-0.119E+04	0.343E+04	-0.343E+04	0.112E+04	-0.112E+04	0.199E+01	-0.199E+01	0.374E+02	-0.374E+02	0.779E+02	-0.779E+02
15	1	2.42	0.00	3.00	1 1 1 1 1 1 1	0.119E+04	-0.119E+04	0.343E+04	-0.343E+04	0.112E+04	-0.112E+04	0.199E+01	-0.199E+01	0.374E+02	-0.374E+02	0.779E+02	-0.779E+02
16	1	3.00	0.00	3.00	1 1 1 1 1 1 1	0.119E+04	-0.119E+04	0.343E+04	-0.343E+04	0.112E+04	-0.112E+04	0.199E+01	-0.199E+01	0.374E+02	-0.374E+02	0.779E+02	-0.779E+02
17	1	3.00	0.00	3.00	1 1 1 1 1 1 1	0.119E+04	-0.119E+04	0.343E+04	-0.343E+04	0.112E+04	-0.112E+04	0.199E+01	-0.199E+01	0.374E+02	-0.374E+02	0.779E+02	-0.779E+02
18	1	3.58	0.00	3.00	1 1 1 1 1 1 1	0.119E+04	-0.119E+04	0.343E+04	-0.343E+04	0.112E+04	-0.112E+04	0.199E+01	-0.199E+01	0.374E+02	-0.374E+02	0.779E+02	-0.779E+02
19	1	3.58	0.00	3.00	1 1 1 1 1 1 1	0.119E+04	-0.119E+04	0.343E+04	-0.343E+04	0.112E+04	-0.112E+04	0.199E+01	-0.199E+01	0.374E+02	-0.374E+02	0.779E+02	-0.779E+02
20	1	4.16	0.00	3.00	1 1 1 1 1 1 1	0.119E+04	-0.119E+04	0.343E+04	-0.343E+04	0.112E+04	-0.112E+04	0.199E+01	-0.199E+01	0.374E+02	-0.374E+02	0.779E+02	-0.779E+02
21	1	4.16	0.00	3.00	1 1 1 1 1 1 1	0.119E+04	-0.119E+04	0.343E+04	-0.343E+04	0.112E+04	-0.112E+04	0.199E+01	-0.199E+01	0.374E+02	-0.374E+02	0.779E+02	-0.779E+02
22	1	4.74	0.00	3.00	1 1 1 1 1 1 1	0.119E+04	-0.119E+04	0.343E+04	-0.343E+04	0.112E+04	-0.112E+04	0.199E+01	-0.199E+01	0.374E+02	-0.374E+02	0.779E+02	-0.779E+02
23	1	4.74	0.00	3.00	1 1 1 1 1 1 1	0.119E+04	-0.119E+04	0.343E+04	-0.343E+04	0.112E+04	-0.112E+04	0.199E+01	-0.199E+01	0.374E+02	-0.374E+02	0.779E+02	-0.779E+02
24	1	5.32	0.00	3.00	1 1 1 1 1 1 1	0.119E+04	-0.119E+04	0.343E+04	-0.343E+04	0.112E+04	-0.112E+04	0.199E+01	-0.199E+01	0.374E+02	-0.374E+02	0.779E+02	-0.779E+02
25	1	5.32	0.00	3.00	1 1 1 1 1 1 1	0.119E+04	-0.119E+04	0.343E+04	-0.343E+04	0.112E+04	-0.112E+04	0.199E+01	-0.199E+01	0.374E+02	-0.374E+02	0.779E+02	-0.779E+02
26	1	5.90	0.00	3.00	1 1 1 1 1 1 1	0.119E+04	-0.119E+04	0.343E+04	-0.343E+04	0.112E+04	-0.112E+04	0.199E+01	-0.199E+01	0.374E+02	-0.374E+02	0.779E+02	-0.779E+02
27	1	6.00	0.00	0.00	1 1 1 1 1 1 1	0.249E+04	-0.249E+04	0.706E+04	-0.706E+04	0.237E+04	-0.237E+04	0.782E+01	-0.782E+01	0.935E+02	-0.935E+02	0.194E+03	-0.194E+03
28	1	6.00	0.00	0.97	1 1 1 1 1 1 1	0.249E+04	-0.249E+04	0.706E+04	-0.706E+04	0.237E+04	-0.237E+04	0.782E+01	-0.782E+01	0.935E+02	-0.935E+02	0.194E+03	-0.194E+03
29	1	6.00	0.00	0.97	1 1 1 1 1 1 1	0.249E+04	-0.249E+04	0.706E+04	-0.706E+04	0.237E+04	-0.237E+04	0.782E+01	-0.782E+01	0.935E+02	-0.935E+02	0.194E+03	-0.194E+03
30	1	6.00	0.00	1.95	1 1 1 1 1 1 1	0.249E+04	-0.249E+04	0.706E+04	-0.706E+04	0.237E+04	-0.237E+04	0.782E+01	-0.782E+01	0.935E+02	-0.935E+02	0.194E+03	-0.194E+03
31	1	6.00	0.00	1.95	1 1 1 1 1 1 1	0.249E+04	-0.249E+04	0.706E+04	-0.706E+04	0.237E+04	-0.237E+04	0.782E+01	-0.782E+01	0.935E+02	-0.935E+02	0.194E+03	-0.194E+03
32	1	6.00	0.00	2.92	1 1 1 1 1 1 1	0.249E+04	-0.249E+04	0.706E+04	-0.706E+04	0.237E+04	-0.237E+04	0.782E+01	-0.782E+01	0.935E+02	-0.935E+02	0.194E+03	-0.194E+03

Member	Section	Criterion	Local Strain Components						Local Stress Components					
			q(1)	q(2)	q(3)	q(4)	q(5)	q(6)	Q(1)	Q(2)	Q(3)	Q(4)	Q(5)	Q(6)
<STEP: 1> dGmin= 0.705E+01														
1	1	1	-0.502E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.279E-03	0.717E-04	-0.123E+02	0.311E+01	-0.417E+01	-0.447E-03	0.445E+01	0.333E+01
2	1	2	-0.502E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.157E-03	0.404E-04	-0.123E+02	0.311E+01	-0.417E+01	-0.447E-03	0.396E+00	0.296E+00
3	1	3	-0.502E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.859E-04	-0.221E-04	-0.123E+02	0.311E+01	-0.417E+01	-0.447E-03	0.396E+00	0.296E+00
4	1	4	-0.502E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.207E-03	-0.534E-04	-0.123E+02	0.311E+01	-0.417E+01	-0.447E-03	0.366E+01	-0.274E+01
5	1	5	-0.502E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.450E-03	-0.116E-03	-0.123E+02	0.311E+01	-0.417E+01	-0.447E-03	0.366E+01	-0.274E+01
6	1	6	-0.502E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.572E-03	-0.147E-03	-0.123E+02	0.311E+01	-0.417E+01	-0.447E-03	0.772E+01	-0.577E+01
7	1	7	-0.265E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.626E-07	-0.392E-03	-0.520E+01	-0.981E+01	0.149E-03	-0.764E-03	-0.432E-03	-0.898E+01
8	1	8	-0.265E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.581E-07	-0.287E-03	-0.520E+01	-0.981E+01	0.149E-03	-0.764E-03	-0.345E-03	-0.329E+01
9	1	9	-0.265E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.492E-07	-0.271E-04	-0.520E+01	-0.793E+01	0.149E-03	-0.764E-03	-0.345E-03	-0.329E+01
10	1	10	-0.265E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.447E-07	-0.122E-04	-0.520E+01	-0.793E+01	0.149E-03	-0.764E-03	-0.259E-03	0.131E+01
11	1	11	-0.265E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.358E-07	0.133E-03	-0.520E+01	-0.561E+01	0.149E-03	-0.764E-03	-0.259E-03	0.131E+01
12	1	12	-0.265E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.313E-07	0.193E-03	-0.520E+01	-0.561E+01	0.149E-03	-0.764E-03	-0.173E-03	0.457E+01
13	1	13	-0.265E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.223E-07	0.288E-03	-0.520E+01	-0.329E+01	0.149E-03	-0.764E-03	-0.173E-03	0.457E+01
14	1	14	-0.265E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.179E-07	0.323E-03	-0.520E+01	-0.329E+01	0.149E-03	-0.764E-03	-0.863E-04	0.647E+01
15	1	15	-0.265E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.894E-08	0.369E-03	-0.520E+01	-0.968E+00	0.149E-03	-0.764E-03	-0.863E-04	0.647E+01
16	1	16	-0.265E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.447E-08	0.379E-03	-0.520E+01	-0.968E+00	0.149E-03	-0.764E-03	0.000E+00	0.703E+01
17	1	17	-0.265E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.447E-08	0.375E-03	-0.520E+01	-0.135E+01	0.149E-03	-0.764E-03	0.000E+00	0.703E+01
18	1	18	-0.265E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.894E-08	0.361E-03	-0.520E+01	0.135E+01	0.149E-03	-0.764E-03	0.863E-04	0.625E+01
19	1	19	-0.265E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.179E-07	0.307E-03	-0.520E+01	0.367E+01	0.149E-03	-0.764E-03	0.863E-04	0.625E+01
20	1	20	-0.265E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.223E-07	0.268E-03	-0.520E+01	0.367E+01	0.149E-03	-0.764E-03	0.173E-03	0.412E+01
21	1	21	-0.265E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.313E-07	0.164E-03	-0.520E+01	0.599E+01	0.149E-03	-0.764E-03	0.173E-03	0.412E+01
22	1	22	-0.265E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.358E-07	0.999E-04	-0.520E+01	0.599E+01	0.149E-03	-0.764E-03	0.259E-03	0.644E+00
23	1	23	-0.265E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.447E-07	0.534E-04	-0.520E+01	0.831E+01	0.149E-03	-0.764E-03	0.259E-03	0.644E+00
24	1	24	-0.265E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.492E-07	-0.142E-03	-0.520E+01	0.831E+01	0.149E-03	-0.764E-03	0.345E-03	-0.418E+01
25	1	25	-0.265E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.581E-07	-0.345E-03	-0.520E+01	0.106E+02	0.149E-03	-0.764E-03	0.345E-03	-0.418E+01
26	1	26	-0.265E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.626E-07	-0.459E-03	-0.520E+01	0.106E+02	0.149E-03	-0.764E-03	0.432E-03	-0.103E+02
27	3	27	-0.435E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.329E-05	-0.780E-04	-0.106E+02	-0.520E+01	-0.149E-03	-0.447E-03	-0.318E-03	-0.421E+01
28	3	28	-0.435E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.261E-05	-0.372E-07	-0.257E-04	-0.106E+02	-0.520E+01	-0.149E-03	-0.447E-03	-0.462E-03
29	3	29	-0.435E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.261E-05	-0.459E-07	-0.106E+02	-0.520E+01	-0.149E-03	-0.447E-03	-0.462E-03	0.860E+00
30	3	30	-0.435E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.261E-05	-0.502E-07	-0.106E+02	-0.520E+01	-0.149E-03	-0.447E-03	-0.607E-03	0.593E+01
31	3	31	-0.435E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.261E-05	-0.589E-07	-0.106E+02	-0.520E+01	-0.149E-03	-0.447E-03	-0.607E-03	0.593E+01
32	3	32	-0.435E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.261E-05	-0.632E-07	-0.106E+02	-0.520E+01	-0.149E-03	-0.447E-03	-0.752E-03	0.110E+02

<STEP:	2>	dGmin=	Local Strain Components						Local Stress Components								
			Member	Section	Criterion	Values	q(1)	q(2)	q(3)	q(4)	q(5)	q(6)	Q(1)	Q(2)	Q(3)	Q(4)	Q(5)
1	1	0.301E+00	0.356E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.341E-03	-0.584E-02	-0.151E-02	0.869E+01	-0.295E+02	0.394E+02	0.584E-01	-0.778E+02	-0.584E+02	0.584E-01	-0.394E+02	-0.295E+02
	2	0.154E+00	0.356E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.341E-03	-0.469E-02	-0.121E-02	0.869E+01	-0.295E+02	0.394E+02	0.584E-01	-0.394E+02	-0.584E+02	0.584E-01	-0.394E+02	-0.295E+02
	3	0.154E+00	0.356E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.341E-03	-0.239E-02	-0.616E-03	0.869E+01	-0.295E+02	0.394E+02	0.584E-01	-0.394E+02	-0.584E+02	0.584E-01	-0.394E+02	-0.295E+02
	4	0.732E-02	0.356E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.341E-03	-0.125E-02	-0.322E-03	0.869E+01	-0.295E+02	0.394E+02	0.584E-01	-0.107E+01	-0.838E+00	0.584E-01	-0.107E+01	-0.838E+00
	5	0.732E-02	0.356E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.341E-03	0.105E-02	0.270E-03	0.869E+01	-0.295E+02	0.394E+02	0.584E-01	-0.107E+01	-0.838E+00	0.584E-01	-0.107E+01	-0.838E+00
	6	0.145E+00	0.356E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.341E-03	0.220E-02	0.566E-03	0.869E+01	-0.295E+02	0.394E+02	0.584E-01	0.373E+02	0.279E+02	0.584E-01	0.373E+02	0.279E+02
2	7	0.635E+00	-0.458E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.213E-03	0.819E-05	0.262E-02	-0.899E+02	0.111E+02	-0.195E-01	-0.943E-02	0.565E-01	0.495E+02	-0.943E-02	0.565E-01	0.495E+02
	8	0.552E+00	-0.458E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.213E-03	0.760E-05	0.250E-02	-0.899E+02	0.111E+02	-0.195E-01	-0.943E-02	0.452E-01	0.430E+02	-0.943E-02	0.452E-01	0.430E+02
	9	0.552E+00	-0.458E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.213E-03	0.643E-05	0.224E-02	-0.899E+02	0.130E+02	-0.195E-01	-0.943E-02	0.452E-01	0.430E+02	-0.943E-02	0.452E-01	0.430E+02
	10	0.455E+00	-0.458E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.213E-03	0.585E-05	0.210E-02	-0.899E+02	0.130E+02	-0.195E-01	-0.943E-02	0.339E-01	0.355E+02	-0.943E-02	0.339E-01	0.355E+02
	11	0.455E+00	-0.458E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.213E-03	0.468E-05	0.180E-02	-0.899E+02	0.153E+02	-0.195E-01	-0.943E-02	0.339E-01	0.355E+02	-0.943E-02	0.339E-01	0.355E+02
	12	0.341E+00	-0.458E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.213E-03	0.409E-05	0.164E-02	-0.899E+02	0.153E+02	-0.195E-01	-0.943E-02	0.226E-01	0.266E+02	-0.943E-02	0.226E-01	0.266E+02
	13	0.341E+00	-0.458E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.213E-03	0.292E-05	0.128E-02	-0.899E+02	0.177E+02	-0.195E-01	-0.943E-02	0.226E-01	0.266E+02	-0.943E-02	0.226E-01	0.266E+02
	14	0.210E+00	-0.458E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.213E-03	0.234E-05	0.109E-02	-0.899E+02	0.177E+02	-0.195E-01	-0.943E-02	0.113E-01	0.163E+02	-0.943E-02	0.113E-01	0.163E+02
	15	0.210E+00	-0.458E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.213E-03	0.117E-05	0.691E-03	-0.899E+02	0.200E+02	-0.195E-01	-0.943E-02	0.113E-01	0.163E+02	-0.943E-02	0.113E-01	0.163E+02
	16	0.609E-01	-0.458E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.213E-03	0.585E-06	0.477E-03	-0.899E+02	0.200E+02	-0.195E-01	-0.943E-02	0.754E-17	0.474E+01	-0.943E-02	0.754E-17	0.474E+01
	17	0.609E-01	-0.458E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.213E-03	0.585E-06	0.240E-04	-0.899E+02	0.223E+02	-0.195E-01	-0.943E-02	0.754E-17	0.474E+01	-0.943E-02	0.754E-17	0.474E+01
	18	0.105E+00	-0.458E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.213E-03	-0.117E-05	-0.215E-03	-0.899E+02	0.223E+02	-0.195E-01	-0.943E-02	0.113E-01	0.163E+02	-0.943E-02	0.113E-01	0.163E+02
	19	0.105E+00	-0.458E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.213E-03	-0.234E-05	-0.717E-03	-0.899E+02	0.246E+02	-0.195E-01	-0.943E-02	0.113E-01	0.163E+02	-0.943E-02	0.113E-01	0.163E+02
	20	0.288E+00	-0.458E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.213E-03	-0.292E-05	-0.981E-03	-0.899E+02	0.246E+02	-0.195E-01	-0.943E-02	0.226E-01	0.225E+02	-0.943E-02	0.226E-01	0.225E+02
	21	0.288E+00	-0.458E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.213E-03	-0.409E-05	-0.153E-02	-0.899E+02	0.269E+02	-0.195E-01	-0.943E-02	0.226E-01	0.225E+02	-0.943E-02	0.226E-01	0.225E+02
	22	0.489E+00	-0.458E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.213E-03	-0.468E-05	-0.182E-02	-0.899E+02	0.269E+02	-0.195E-01	-0.943E-02	0.339E-01	0.381E+02	-0.943E-02	0.339E-01	0.381E+02
	23	0.489E+00	-0.458E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.213E-03	-0.585E-05	-0.242E-02	-0.899E+02	0.293E+02	-0.195E-01	-0.943E-02	0.339E-01	0.381E+02	-0.943E-02	0.339E-01	0.381E+02
	24	0.707E+00	-0.458E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.213E-03	-0.643E-05	-0.274E-02	-0.899E+02	0.293E+02	-0.195E-01	-0.943E-02	0.452E-01	0.551E+02	-0.943E-02	0.452E-01	0.551E+02
	25	0.707E+00	-0.458E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.213E-03	-0.760E-05	-0.339E-02	-0.899E+02	0.316E+02	-0.195E-01	-0.943E-02	0.452E-01	0.551E+02	-0.943E-02	0.452E-01	0.551E+02
	26	0.942E+00	-0.458E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.213E-03	-0.819E-05	-0.373E-02	-0.899E+02	0.316E+02	-0.195E-01	-0.943E-02	0.565E-01	0.734E+02	-0.943E-02	0.565E-01	0.734E+02
3	27	0.100E+01	-0.129E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.341E-03	-0.553E-05	-0.508E-02	-0.316E+02	-0.899E+02	0.195E-01	0.584E-01	-0.679E-01	-0.193E+03	0.584E-01	-0.679E-01	-0.193E+03
	28	0.550E+00	-0.129E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.341E-03	-0.496E-05	-0.417E-02	-0.316E+02	-0.899E+02	0.195E-01	0.584E-01	-0.489E-01	-0.106E+03	0.584E-01	-0.489E-01	-0.106E+03
	29	0.550E+00	-0.129E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.341E-03	-0.382E-05	-0.237E-02	-0.316E+02	-0.899E+02	0.195E-01	0.584E-01	-0.489E-01	-0.106E+03	0.584E-01	-0.489E-01	-0.106E+03
	30	0.997E-01	-0.129E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.341E-03	-0.326E-05	-0.147E-02	-0.316E+02	-0.899E+02	0.195E-01	0.584E-01	-0.299E-01	-0.181E+02	0.584E-01	-0.299E-01	-0.181E+02
	31	0.997E-01	-0.129E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.341E-03	-0.212E-05	0.341E-03	-0.316E+02	-0.899E+02	0.195E-01	0.584E-01	-0.299E-01	-0.181E+02	0.584E-01	-0.299E-01	-0.181E+02
	32	0.363E+00	-0.129E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.341E-03	-0.155E-05	0.124E-02	-0.316E+02	-0.899E+02	0.195E-01	0.584E-01	-0.110E-01	0.693E+02	0.584E-01	-0.110E-01	0.693E+02

Member	Section	Criterion	Local Strain Components						Local Stress Components									
			q(1)	q(2)	q(3)	q(4)	q(5)	q(6)	Q(1)	Q(2)	Q(3)	Q(4)	Q(5)	Q(6)				
3 > dGmin= 0.692E+01																		
1	1	0.330E+00	0.422E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.374E-03	-0.640E-02	-0.165E-02	0.103E+02	-0.324E+02	0.433E+02	0.640E-01	-0.853E+02	-0.638E+02				
	2	0.168E+00	0.422E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.374E-03	-0.514E-02	-0.133E-02	0.103E+02	-0.324E+02	0.433E+02	0.640E-01	-0.432E+02	-0.323E+02				
	3	0.168E+00	0.422E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.374E-03	-0.262E-02	-0.676E-03	0.103E+02	-0.324E+02	0.433E+02	0.640E-01	-0.432E+02	-0.323E+02				
	4	0.796E-02	0.422E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.374E-03	-0.136E-02	-0.351E-03	0.103E+02	-0.324E+02	0.433E+02	0.640E-01	-0.106E+01	-0.835E+00				
	5	0.796E-02	0.422E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.374E-03	0.117E-02	0.299E-03	0.103E+02	-0.324E+02	0.433E+02	0.640E-01	-0.106E+01	-0.835E+00				
	6	0.160E+00	0.422E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.374E-03	0.243E-02	0.624E-03	0.103E+02	-0.324E+02	0.433E+02	0.640E-01	0.411E+02	0.307E+02				
2	7	0.698E+00	-0.468E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.232E-03	0.896E-05	0.288E-02	-0.920E+02	0.128E+02	-0.213E-01	-0.103E-01	0.618E-01	0.544E+02				
	8	0.603E+00	-0.468E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.232E-03	0.832E-05	0.274E-02	-0.920E+02	0.128E+02	-0.213E-01	-0.103E-01	0.495E-01	0.470E+02				
	9	0.603E+00	-0.468E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.232E-03	0.704E-05	0.245E-02	-0.920E+02	0.146E+02	-0.213E-01	-0.103E-01	0.495E-01	0.470E+02				
	10	0.494E+00	-0.468E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.232E-03	0.640E-05	0.229E-02	-0.920E+02	0.146E+02	-0.213E-01	-0.103E-01	0.371E-01	0.385E+02				
	11	0.494E+00	-0.468E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.232E-03	0.512E-05	0.195E-02	-0.920E+02	0.170E+02	-0.213E-01	-0.103E-01	0.371E-01	0.385E+02				
	12	0.368E+00	-0.468E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.232E-03	0.448E-05	0.177E-02	-0.920E+02	0.170E+02	-0.213E-01	-0.103E-01	0.247E-01	0.287E+02				
	13	0.368E+00	-0.468E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.232E-03	0.320E-05	0.138E-02	-0.920E+02	0.193E+02	-0.213E-01	-0.103E-01	0.247E-01	0.287E+02				
	14	0.224E+00	-0.468E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.232E-03	0.256E-05	0.117E-02	-0.920E+02	0.193E+02	-0.213E-01	-0.103E-01	0.124E-01	0.175E+02				
	15	0.224E+00	-0.468E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.232E-03	0.128E-05	0.737E-03	-0.920E+02	0.216E+02	-0.213E-01	-0.103E-01	0.124E-01	0.175E+02				
	16	0.635E-01	-0.468E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.232E-03	0.640E-06	0.506E-03	-0.920E+02	0.216E+02	-0.213E-01	-0.103E-01	0.904E-17	0.495E+01				
	17	0.635E-01	-0.468E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.232E-03	-0.640E-06	0.179E-04	-0.920E+02	0.239E+02	-0.213E-01	-0.103E-01	0.904E-17	0.495E+01				
	18	0.115E+00	-0.468E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.232E-03	0.128E-05	-0.238E-03	-0.920E+02	0.239E+02	-0.213E-01	-0.103E-01	0.124E-01	-0.893E+01				
	19	0.115E+00	-0.468E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.232E-03	-0.256E-05	-0.776E-03	-0.920E+02	0.262E+02	-0.213E-01	-0.103E-01	-0.124E-01	-0.893E+01				
	20	0.310E+00	-0.468E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.232E-03	0.320E-05	-0.106E-02	-0.920E+02	0.262E+02	-0.213E-01	-0.103E-01	-0.247E-01	-0.241E+02				
	21	0.310E+00	-0.468E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.232E-03	0.448E-05	-0.164E-02	-0.920E+02	0.286E+02	-0.213E-01	-0.103E-01	-0.247E-01	-0.241E+02				
	22	0.523E+00	-0.468E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.232E-03	0.512E-05	-0.195E-02	-0.920E+02	0.309E+02	-0.213E-01	-0.103E-01	-0.371E-01	-0.407E+02				
	23	0.523E+00	-0.468E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.232E-03	0.640E-05	-0.259E-02	-0.920E+02	0.309E+02	-0.213E-01	-0.103E-01	-0.371E-01	-0.407E+02				
	24	0.753E+00	-0.468E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.232E-03	0.704E-05	-0.292E-02	-0.920E+02	0.309E+02	-0.213E-01	-0.103E-01	-0.495E-01	-0.586E+02				
	25	0.753E+00	-0.468E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.232E-03	0.832E-05	-0.360E-02	-0.920E+02	0.332E+02	-0.213E-01	-0.103E-01	-0.495E-01	-0.586E+02				
	26	0.100E+01	-0.468E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.232E-03	-0.896E-05	-0.396E-02	-0.920E+02	0.332E+02	-0.213E-01	-0.103E-01	-0.618E-01	-0.779E+02				
3	27	0.101E+01	-0.514E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.374E-03	-0.605E-05	-0.610E-02	-0.332E+02	-0.920E+02	0.213E-01	0.640E-01	-0.743E-01	-0.195E+03				
	28	0.548E+00	-0.136E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.374E-03	-0.543E-05	-0.413E-02	-0.332E+02	-0.920E+02	0.213E-01	0.640E-01	-0.535E-01	-0.105E+03				
	29	0.548E+00	-0.136E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.374E-03	-0.418E-05	-0.234E-02	-0.332E+02	-0.920E+02	0.213E-01	0.640E-01	-0.535E-01	-0.105E+03				
	30	0.875E-01	-0.136E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.374E-03	-0.356E-05	-0.141E-02	-0.332E+02	-0.920E+02	0.213E-01	0.640E-01	-0.328E-01	-0.157E+02				
	31	0.875E-01	-0.136E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.374E-03	-0.232E-05	0.438E-03	-0.332E+02	-0.920E+02	0.213E-01	0.640E-01	-0.328E-01	-0.157E+02				
	32	0.387E+00	-0.136E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.374E-03	-0.170E-05	0.136E-02	-0.332E+02	-0.920E+02	0.213E-01	0.640E-01	-0.120E-01	0.738E+02				

<STEP:	Local Strain Components						Local Stress Components									
	Member	Section	Criterion	Values	q(1)	q(2)	q(3)	q(4)	q(5)	q(6)	Q(1)	Q(2)	Q(3)	Q(4)	Q(5)	Q(6)
4	gGmin= 0.327E+02															
1	1	1	0.516E+00	0.609E-05	0.000E+00	0.602E-03	-0.101E-01	-0.260E-02	0.149E+02	-0.491E+02	0.657E+02	0.103E+00	-0.133E+03	-0.998E+02	0.657E+02	0.103E+00
2	1	2	0.270E+00	0.609E-05	0.000E+00	0.602E-03	-0.815E-02	-0.210E-02	0.149E+02	-0.491E+02	0.657E+02	0.103E+00	-0.694E+02	-0.520E+02	0.657E+02	0.103E+00
3	1	3	0.270E+00	0.609E-05	0.000E+00	0.602E-03	-0.432E-02	-0.112E-02	0.149E+02	-0.491E+02	0.657E+02	0.103E+00	-0.694E+02	-0.520E+02	0.657E+02	0.103E+00
4	1	4	0.250E-01	0.609E-05	0.000E+00	0.602E-03	-0.241E-02	-0.623E-03	0.149E+02	-0.491E+02	0.657E+02	0.103E+00	-0.549E+01	-0.417E+01	0.657E+02	0.103E+00
5	1	5	0.250E-01	0.609E-05	0.000E+00	0.602E-03	0.142E-02	0.364E-03	0.149E+02	-0.491E+02	0.657E+02	0.103E+00	-0.549E+01	-0.417E+01	0.657E+02	0.103E+00
6	1	6	0.228E+00	0.609E-05	0.000E+00	0.602E-03	0.334E-02	0.858E-03	0.149E+02	-0.491E+02	0.657E+02	0.103E+00	-0.585E+02	0.436E+02	0.657E+02	0.103E+00
7	2	1	0.100E+01	-0.492E-04	0.000E+00	0.393E-03	0.144E-04	0.413E-02	-0.967E+02	0.173E+02	-0.343E-01	-0.174E-01	0.995E-01	0.779E+02	-0.343E-01	-0.174E-01
8	2	8	0.871E+00	-0.492E-04	0.000E+00	0.393E-03	0.134E-04	0.394E-02	-0.967E+02	0.173E+02	-0.343E-01	-0.174E-01	0.796E-01	0.678E+02	-0.343E-01	-0.174E-01
9	2	9	0.871E+00	-0.492E-04	0.000E+00	0.393E-03	0.113E-04	0.355E-02	-0.967E+02	0.173E+02	-0.343E-01	-0.174E-01	0.796E-01	0.678E+02	-0.343E-01	-0.174E-01
10	2	10	0.728E+00	-0.492E-04	0.000E+00	0.393E-03	0.103E-04	0.335E-02	-0.967E+02	0.173E+02	-0.343E-01	-0.174E-01	0.597E-01	0.567E+02	-0.343E-01	-0.174E-01
11	2	11	0.728E+00	-0.492E-04	0.000E+00	0.393E-03	0.824E-05	0.291E-02	-0.967E+02	0.173E+02	-0.343E-01	-0.174E-01	0.597E-01	0.567E+02	-0.343E-01	-0.174E-01
12	2	12	0.568E+00	-0.492E-04	0.000E+00	0.393E-03	0.721E-05	0.268E-02	-0.967E+02	0.173E+02	-0.343E-01	-0.174E-01	0.398E-01	0.442E+02	-0.343E-01	-0.174E-01
13	2	13	0.568E+00	-0.492E-04	0.000E+00	0.393E-03	0.515E-05	0.219E-02	-0.967E+02	0.173E+02	-0.343E-01	-0.174E-01	0.398E-01	0.442E+02	-0.343E-01	-0.174E-01
14	2	14	0.390E+00	-0.492E-04	0.000E+00	0.393E-03	0.412E-05	0.194E-02	-0.967E+02	0.173E+02	-0.343E-01	-0.174E-01	0.199E-01	0.304E+02	-0.343E-01	-0.174E-01
15	2	15	0.390E+00	-0.492E-04	0.000E+00	0.393E-03	0.206E-05	0.140E-02	-0.967E+02	0.173E+02	-0.343E-01	-0.174E-01	0.199E-01	0.304E+02	-0.343E-01	-0.174E-01
16	2	16	0.195E+00	-0.492E-04	0.000E+00	0.393E-03	0.103E-05	0.112E-02	-0.967E+02	0.173E+02	-0.343E-01	-0.174E-01	0.904E-17	0.152E+02	-0.343E-01	-0.174E-01
17	2	17	0.195E+00	-0.492E-04	0.000E+00	0.393E-03	0.103E-05	0.112E-02	-0.967E+02	0.173E+02	-0.343E-01	-0.174E-01	0.904E-17	0.152E+02	-0.343E-01	-0.174E-01
18	2	18	0.167E-01	-0.492E-04	0.000E+00	0.393E-03	-0.206E-05	0.538E-03	-0.967E+02	0.285E+02	-0.343E-01	-0.174E-01	0.199E-01	0.130E+01	-0.343E-01	-0.174E-01
19	2	19	0.167E-01	-0.492E-04	0.000E+00	0.393E-03	-0.412E-05	0.402E-03	-0.967E+02	0.308E+02	-0.343E-01	-0.174E-01	0.199E-01	0.130E+01	-0.343E-01	-0.174E-01
20	2	20	0.246E+00	-0.492E-04	0.000E+00	0.393E-03	-0.515E-05	0.732E-03	-0.967E+02	0.308E+02	-0.343E-01	-0.174E-01	0.398E-01	0.192E+02	-0.343E-01	-0.174E-01
21	2	21	0.493E+00	-0.492E-04	0.000E+00	0.393E-03	-0.721E-05	0.142E-02	-0.967E+02	0.331E+02	-0.343E-01	-0.174E-01	0.398E-01	0.192E+02	-0.343E-01	-0.174E-01
22	2	22	0.493E+00	-0.492E-04	0.000E+00	0.393E-03	-0.824E-05	0.177E-02	-0.967E+02	0.331E+02	-0.343E-01	-0.174E-01	0.398E-01	0.192E+02	-0.343E-01	-0.174E-01
23	2	23	0.493E+00	-0.492E-04	0.000E+00	0.393E-03	-0.103E-04	0.251E-02	-0.967E+02	0.354E+02	-0.343E-01	-0.174E-01	0.597E-01	0.384E+02	-0.343E-01	-0.174E-01
24	2	24	0.757E+00	-0.492E-04	0.000E+00	0.393E-03	-0.113E-04	0.289E-02	-0.967E+02	0.354E+02	-0.343E-01	-0.174E-01	0.597E-01	0.384E+02	-0.343E-01	-0.174E-01
25	2	25	0.757E+00	-0.492E-04	0.000E+00	0.393E-03	-0.134E-04	0.367E-02	-0.967E+02	0.378E+02	-0.343E-01	-0.174E-01	0.796E-01	0.589E+02	-0.343E-01	-0.174E-01
26	2	26	0.104E+01	-0.492E-04	0.000E+00	0.393E-03	-0.144E-04	0.145E-01	-0.967E+02	0.378E+02	-0.343E-01	-0.174E-01	0.995E-01	0.808E+02	-0.343E-01	-0.174E-01
27	3	1	0.106E+01	-0.160E-03	0.000E+00	0.602E-03	-0.982E-05	-0.126E-01	-0.378E+02	-0.967E+02	0.343E-01	0.103E+00	-0.120E+00	-0.205E+03	0.343E-01	-0.174E-01
28	3	2	0.580E+00	-0.155E-04	0.000E+00	0.602E-03	-0.882E-05	-0.442E-02	-0.378E+02	-0.967E+02	0.343E-01	0.103E+00	-0.870E-01	-0.111E+03	0.343E-01	-0.174E-01
29	3	3	0.580E+00	-0.155E-04	0.000E+00	0.602E-03	-0.681E-05	-0.248E-02	-0.378E+02	-0.967E+02	0.343E-01	0.103E+00	-0.870E-01	-0.111E+03	0.343E-01	-0.174E-01
30	3	4	0.961E-01	-0.155E-04	0.000E+00	0.602E-03	-0.581E-05	-0.150E-02	-0.378E+02	-0.967E+02	0.343E-01	0.103E+00	-0.536E-01	-0.172E+02	0.343E-01	-0.174E-01
31	3	5	0.961E-01	-0.155E-04	0.000E+00	0.602E-03	-0.381E-05	0.438E-03	-0.378E+02	-0.967E+02	0.343E-01	0.103E+00	-0.536E-01	-0.172E+02	0.343E-01	-0.174E-01
32	3	6	0.403E+00	-0.155E-04	0.000E+00	0.602E-03	-0.281E-05	0.141E-02	-0.378E+02	-0.967E+02	0.343E-01	0.103E+00	-0.202E-01	0.766E+02	0.343E-01	-0.174E-01

Member	Section	Criterion	Local Strain Components						Local Stress Components					
			q(1)	q(2)	q(3)	q(4)	q(5)	q(6)	Q(1)	Q(2)	Q(3)	Q(4)	Q(5)	Q(6)
<STEP: 5> dGmin= 0.685E+02														
1	1	0.100E+01	0.714E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.132E-02	-0.200E-01	-0.517E-02	0.175E+02	-0.822E+02	0.110E+03	0.227E+00	-0.259E+03	-0.194E+03
		0.588E+00	0.714E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.132E-02	-0.169E-01	-0.435E-02	0.175E+02	-0.822E+02	0.110E+03	0.227E+00	-0.152E+03	-0.114E+03
		0.588E+00	0.714E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.132E-02	-0.104E-01	-0.270E-02	0.175E+02	-0.822E+02	0.110E+03	0.227E+00	-0.152E+03	-0.114E+03
		0.177E+00	0.714E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.132E-02	-0.724E-02	-0.187E-02	0.175E+02	-0.822E+02	0.110E+03	0.227E+00	-0.449E+02	-0.337E+02
		0.177E+00	0.714E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.132E-02	-0.831E-03	-0.218E-03	0.175E+02	-0.822E+02	0.110E+03	0.227E+00	-0.449E+02	-0.337E+02
		0.242E+00	0.714E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.132E-02	0.237E-02	0.608E-03	0.175E+02	-0.822E+02	0.110E+03	0.227E+00	0.621E+02	0.463E+02
2	7	0.111E+01	-0.560E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.103E-02	0.317E-04	0.349E-01	-0.110E+03	0.199E+02	-0.755E-01	-0.458E-01	0.219E+00	0.865E+02
		0.963E+00	-0.560E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.103E-02	0.295E-04	0.437E-02	-0.110E+03	0.199E+02	-0.755E-01	-0.458E-01	0.175E+00	0.750E+02
		0.963E+00	-0.560E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.103E-02	0.249E-04	0.392E-02	-0.110E+03	0.218E+02	-0.755E-01	-0.458E-01	0.175E+00	0.750E+02
		0.800E+00	-0.560E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.103E-02	0.227E-04	0.369E-02	-0.110E+03	0.218E+02	-0.755E-01	-0.458E-01	0.131E+00	0.623E+02
		0.800E+00	-0.560E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.103E-02	0.181E-04	0.320E-02	-0.110E+03	0.241E+02	-0.755E-01	-0.458E-01	0.131E+00	0.623E+02
		0.621E+00	-0.560E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.103E-02	0.159E-04	0.294E-02	-0.110E+03	0.241E+02	-0.755E-01	-0.458E-01	0.876E-01	0.483E+02
		0.424E+00	-0.560E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.103E-02	0.113E-04	0.240E-02	-0.110E+03	0.264E+02	-0.755E-01	-0.458E-01	0.876E-01	0.483E+02
		0.424E+00	-0.560E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.103E-02	0.907E-05	0.211E-02	-0.110E+03	0.264E+02	-0.755E-01	-0.458E-01	0.438E-01	0.330E+02
		0.424E+00	-0.560E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.103E-02	0.453E-05	0.152E-02	-0.110E+03	0.287E+02	-0.755E-01	-0.458E-01	0.438E-01	0.330E+02
		0.210E+00	-0.560E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.103E-02	0.227E-05	0.121E-02	-0.110E+03	0.287E+02	-0.755E-01	-0.458E-01	0.239E-16	0.164E+02
		0.210E+00	-0.560E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.103E-02	0.227E-05	0.573E-03	-0.110E+03	0.311E+02	-0.755E-01	-0.458E-01	0.239E-16	0.164E+02
		0.213E-01	-0.560E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.103E-02	-0.453E-05	0.241E-03	-0.110E+03	0.311E+02	-0.755E-01	-0.458E-01	0.438E-01	0.166E+01
		0.213E-01	-0.560E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.103E-02	-0.907E-05	-0.450E-03	-0.110E+03	0.334E+02	-0.755E-01	-0.458E-01	-0.438E-01	-0.166E+01
		0.270E+00	-0.560E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.103E-02	-0.113E-04	-0.807E-03	-0.110E+03	0.334E+02	-0.755E-01	-0.458E-01	-0.876E-01	-0.210E+02
		0.270E+00	-0.560E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.103E-02	-0.159E-04	-0.935E-02	-0.110E+03	0.357E+02	-0.755E-01	-0.458E-01	-0.876E-01	-0.210E+02
		0.536E+00	-0.560E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.103E-02	0.181E-04	-0.193E-02	-0.110E+03	0.357E+02	-0.755E-01	-0.458E-01	-0.131E+00	-0.417E+02
		0.536E+00	-0.560E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.103E-02	-0.227E-04	-0.272E-02	-0.110E+03	0.380E+02	-0.755E-01	-0.458E-01	-0.131E+00	-0.417E+02
		0.819E+00	-0.560E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.103E-02	-0.249E-04	-0.313E-02	-0.110E+03	0.380E+02	-0.755E-01	-0.458E-01	-0.175E+00	-0.638E+02
		0.819E+00	-0.560E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.103E-02	-0.295E-04	-0.397E-02	-0.110E+03	0.403E+02	-0.755E-01	-0.458E-01	-0.175E+00	-0.638E+02
		0.112E+01	-0.560E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.103E-02	-0.317E-04	-0.371E-01	-0.110E+03	0.403E+02	-0.755E-01	-0.458E-01	-0.219E+00	-0.872E+02
3	27	0.124E+01	-0.221E-03	0.000E+00	0.000E+00	0.132E-02	-0.223E-04	-0.330E-01	-0.403E+02	-0.110E+03	0.755E-01	0.227E+00	-0.272E+00	-0.239E+03
		0.685E+00	-0.165E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.132E-02	-0.201E-04	-0.518E-02	-0.403E+02	-0.110E+03	0.755E-01	0.227E+00	-0.199E+00	-0.132E+03
		0.685E+00	-0.165E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.132E-02	-0.157E-04	-0.278E-02	-0.403E+02	-0.110E+03	0.755E-01	0.227E+00	-0.199E+00	-0.132E+03
		0.135E+00	-0.165E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.132E-02	-0.135E-04	-0.187E-02	-0.403E+02	-0.110E+03	0.755E-01	0.227E+00	-0.125E+00	-0.246E+02
		0.135E+00	-0.165E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.132E-02	-0.906E-05	0.343E-03	-0.403E+02	-0.110E+03	0.755E-01	0.227E+00	-0.125E+00	-0.246E+02
		0.432E+00	-0.165E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.132E-02	-0.686E-05	0.145E-02	-0.403E+02	-0.110E+03	0.755E-01	0.227E+00	-0.519E-01	0.824E+02

<STEP:	6	dGmin= 0.305E+01	Local Strain Components						Local Stress Components								
			Member	Section	Criterion	Values	q(1)	q(2)	q(3)	q(4)	q(5)	q(6)	Q(1)	Q(2)	Q(3)	Q(4)	Q(5)
1	1	0.102E+01	0.116E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.123E-02	-0.204E-01	-0.709E-02	0.176E+02	-0.833E+02	0.111E+03	0.210E+00	-0.263E+03	-0.197E+03			
	2	0.599E+00	0.722E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.123E-02	-0.171E-01	-0.442E-02	0.176E+02	-0.833E+02	0.111E+03	0.210E+00	-0.155E+03	-0.116E+03			
	3	0.599E+00	0.722E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.123E-02	-0.106E-01	-0.275E-02	0.176E+02	-0.833E+02	0.111E+03	0.210E+00	-0.155E+03	-0.116E+03			
	4	0.181E+00	0.722E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.123E-02	-0.739E-02	-0.191E-02	0.176E+02	-0.833E+02	0.111E+03	0.210E+00	-0.461E+02	-0.346E+02			
	5	0.181E+00	0.722E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.123E-02	-0.890E-03	-0.233E-03	0.176E+02	-0.833E+02	0.111E+03	0.210E+00	-0.461E+02	-0.346E+02			
	6	0.243E+00	0.722E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.123E-02	0.236E-02	0.604E-03	0.176E+02	-0.833E+02	0.111E+03	0.210E+00	0.624E+02	0.466E+02			
2	7	0.112E+01	-0.565E-04	0.000E+00	-0.981E-03	0.294E-04	0.369E-01	-0.111E+03	0.201E+02	-0.700E-01	-0.435E-01	0.203E+00	0.871E+02				
	8	0.969E+00	-0.565E-04	0.000E+00	-0.981E-03	0.273E-04	0.440E-02	-0.111E+03	0.201E+02	-0.700E-01	-0.435E-01	0.162E+00	0.754E+02				
	9	0.969E+00	-0.565E-04	0.000E+00	-0.981E-03	0.231E-04	0.394E-02	-0.111E+03	0.220E+02	-0.700E-01	-0.435E-01	0.162E+00	0.754E+02				
	10	0.805E+00	-0.565E-04	0.000E+00	-0.981E-03	0.210E-04	0.371E-02	-0.111E+03	0.220E+02	-0.700E-01	-0.435E-01	0.122E+00	0.627E+02				
	11	0.805E+00	-0.565E-04	0.000E+00	-0.981E-03	0.168E-04	0.321E-02	-0.111E+03	0.243E+02	-0.700E-01	-0.435E-01	0.122E+00	0.627E+02				
	12	0.624E+00	-0.565E-04	0.000E+00	-0.981E-03	0.147E-04	0.295E-02	-0.111E+03	0.243E+02	-0.700E-01	-0.435E-01	0.812E-01	0.486E+02				
	13	0.624E+00	-0.565E-04	0.000E+00	-0.981E-03	0.105E-04	0.241E-02	-0.111E+03	0.266E+02	-0.700E-01	-0.435E-01	0.812E-01	0.486E+02				
	14	0.426E+00	-0.565E-04	0.000E+00	-0.981E-03	0.840E-05	0.212E-02	-0.111E+03	0.266E+02	-0.700E-01	-0.435E-01	0.406E-01	0.332E+02				
	15	0.426E+00	-0.565E-04	0.000E+00	-0.981E-03	0.420E-05	0.153E-02	-0.111E+03	0.289E+02	-0.700E-01	-0.435E-01	0.406E-01	0.332E+02				
	16	0.210E+00	-0.565E-04	0.000E+00	-0.981E-03	0.210E-05	0.122E-02	-0.111E+03	0.289E+02	-0.700E-01	-0.435E-01	0.239E-16	0.164E+02				
	17	0.210E+00	-0.565E-04	0.000E+00	-0.981E-03	0.210E-05	0.573E-03	-0.111E+03	0.313E+02	-0.700E-01	-0.435E-01	0.239E-16	0.164E+02				
	18	0.224E-01	-0.565E-04	0.000E+00	-0.981E-03	0.420E-05	0.122E-02	-0.111E+03	0.313E+02	-0.700E-01	-0.435E-01	0.406E-01	0.174E+01				
	19	0.224E-01	-0.565E-04	0.000E+00	-0.981E-03	0.840E-05	0.456E-03	-0.111E+03	0.336E+02	-0.700E-01	-0.435E-01	0.406E-01	0.174E+01				
	20	0.272E+00	-0.565E-04	0.000E+00	-0.981E-03	0.105E-04	0.815E-03	-0.111E+03	0.336E+02	-0.700E-01	-0.435E-01	0.812E-01	0.212E+02				
	21	0.272E+00	-0.565E-04	0.000E+00	-0.981E-03	0.147E-04	0.156E-02	-0.111E+03	0.359E+02	-0.700E-01	-0.435E-01	0.812E-01	0.212E+02				
	22	0.540E+00	-0.565E-04	0.000E+00	-0.981E-03	0.168E-04	0.194E-02	-0.111E+03	0.359E+02	-0.700E-01	-0.435E-01	0.122E+00	0.420E+02				
	23	0.540E+00	-0.565E-04	0.000E+00	-0.981E-03	0.210E-04	0.274E-02	-0.111E+03	0.382E+02	-0.700E-01	-0.435E-01	0.122E+00	0.420E+02				
	24	0.824E+00	-0.565E-04	0.000E+00	-0.981E-03	0.231E-04	0.315E-02	-0.111E+03	0.382E+02	-0.700E-01	-0.435E-01	0.162E+00	0.642E+02				
	25	0.824E+00	-0.565E-04	0.000E+00	-0.981E-03	0.273E-04	0.399E-02	-0.111E+03	0.405E+02	-0.700E-01	-0.435E-01	0.162E+00	0.642E+02				
	26	0.113E+01	-0.565E-04	0.000E+00	-0.981E-03	0.294E-04	0.389E-01	-0.111E+03	0.405E+02	-0.700E-01	-0.435E-01	0.203E+00	0.877E+02				
3	27	0.125E+01	-0.225E-03	0.000E+00	0.123E-02	-0.207E-04	-0.347E-01	-0.405E+02	-0.111E+03	0.700E-01	0.210E+00	-0.253E+00	-0.241E+03				
	28	0.694E+00	-0.166E-04	0.000E+00	0.123E-02	-0.187E-04	-0.524E-02	-0.405E+02	-0.111E+03	0.700E-01	0.210E+00	-0.185E+00	-0.133E+03				
	29	0.694E+00	-0.166E-04	0.000E+00	0.123E-02	-0.146E-04	-0.301E-02	-0.405E+02	-0.111E+03	0.700E-01	0.210E+00	-0.185E+00	-0.133E+03				
	30	0.138E+00	-0.166E-04	0.000E+00	0.123E-02	-0.126E-04	-0.190E-02	-0.405E+02	-0.111E+03	0.700E-01	0.210E+00	-0.117E+00	-0.252E+02				
	31	0.138E+00	-0.166E-04	0.000E+00	0.123E-02	-0.849E-05	0.335E-03	-0.405E+02	-0.111E+03	0.700E-01	0.210E+00	-0.117E+00	-0.252E+02				
	32	0.435E+00	-0.166E-04	0.000E+00	0.123E-02	-0.645E-05	0.145E-02	-0.405E+02	-0.111E+03	0.700E-01	0.210E+00	-0.491E-01	0.829E+02				

Member	Section	Criterion	Local Strain Components						Local Stress Components						
			q(1)	q(2)	q(3)	q(4)	q(5)	q(6)	Q(1)	Q(2)	Q(3)	Q(4)	Q(5)	Q(6)	
7> qGmin= 0.110E+02															
1	1	0.110E+01	0.345E-04	0.000E+00	0.722E-03	-0.221E-01	-0.171E-01	0.186E+02	-0.894E+02	0.120E+03	0.124E+00	-0.285E+03	-0.213E+03		
2	1	0.652E+00	0.762E-05	0.000E+00	0.722E-03	-0.186E-01	-0.480E-02	0.186E+02	-0.894E+02	0.120E+03	0.124E+00	-0.169E+03	-0.126E+03		
3	1	0.652E+00	0.762E-05	0.000E+00	0.722E-03	-0.117E-01	-0.301E-02	0.186E+02	-0.894E+02	0.120E+03	0.124E+00	-0.169E+03	-0.126E+03		
4	1	0.205E+00	0.762E-05	0.000E+00	0.722E-03	-0.817E-02	-0.211E-02	0.186E+02	-0.894E+02	0.120E+03	0.124E+00	-0.522E+02	-0.391E+02		
5	1	0.205E+00	0.762E-05	0.000E+00	0.722E-03	-0.120E-02	-0.312E-03	0.186E+02	-0.894E+02	0.120E+03	0.124E+00	-0.522E+02	-0.391E+02		
6	1	0.250E+00	0.762E-05	0.000E+00	0.722E-03	0.228E-02	0.587E-03	0.186E+02	-0.894E+02	0.120E+03	0.124E+00	0.642E+02	0.479E+02		
7	1	0.116E+01	-0.570E-04	0.000E+00	-0.706E-03	0.173E-04	0.476E-01	-0.112E+03	0.210E+02	-0.412E-01	-0.313E-01	0.119E+00	0.901E+02		
8	1	0.100E+01	-0.570E-04	0.000E+00	-0.706E-03	0.161E-04	0.454E-02	-0.112E+03	0.210E+02	-0.412E-01	-0.313E-01	0.955E-01	0.779E+02		
9	1	0.100E+01	-0.570E-04	0.000E+00	-0.706E-03	0.136E-04	0.407E-02	-0.112E+03	0.229E+02	-0.412E-01	-0.313E-01	0.955E-01	0.779E+02		
10	1	0.829E+00	-0.570E-04	0.000E+00	-0.706E-03	0.124E-04	0.382E-02	-0.112E+03	0.229E+02	-0.412E-01	-0.313E-01	0.717E-01	0.646E+02		
11	1	0.829E+00	-0.570E-04	0.000E+00	-0.706E-03	0.989E-05	0.331E-02	-0.112E+03	0.253E+02	-0.412E-01	-0.313E-01	0.717E-01	0.646E+02		
12	1	0.641E+00	-0.570E-04	0.000E+00	-0.706E-03	0.865E-05	0.304E-02	-0.112E+03	0.253E+02	-0.412E-01	-0.313E-01	0.478E-01	0.499E+02		
13	1	0.641E+00	-0.570E-04	0.000E+00	-0.706E-03	0.618E-05	0.247E-02	-0.112E+03	0.276E+02	-0.412E-01	-0.313E-01	0.478E-01	0.499E+02		
14	1	0.436E+00	-0.570E-04	0.000E+00	-0.706E-03	0.495E-05	0.218E-02	-0.112E+03	0.276E+02	-0.412E-01	-0.313E-01	0.239E-01	0.339E+02		
15	1	0.436E+00	-0.570E-04	0.000E+00	-0.706E-03	0.247E-05	0.156E-02	-0.112E+03	0.299E+02	-0.412E-01	-0.313E-01	0.239E-01	0.339E+02		
16	1	0.213E+00	-0.570E-04	0.000E+00	-0.706E-03	0.124E-05	0.124E-02	-0.112E+03	0.299E+02	-0.412E-01	-0.313E-01	-0.143E-16	0.166E+02		
17	1	0.213E+00	-0.570E-04	0.000E+00	-0.706E-03	0.124E-05	0.124E-02	-0.112E+03	0.322E+02	-0.412E-01	-0.313E-01	-0.143E-16	0.166E+02		
18	1	0.269E-01	-0.570E-04	0.000E+00	-0.706E-03	-0.247E-05	0.222E-03	-0.112E+03	0.322E+02	-0.412E-01	-0.313E-01	-0.239E-01	0.209E+01		
19	1	0.269E-01	-0.570E-04	0.000E+00	-0.706E-03	-0.495E-05	-0.486E-03	-0.112E+03	0.345E+02	-0.412E-01	-0.313E-01	-0.239E-01	0.209E+01		
20	1	0.284E+00	-0.570E-04	0.000E+00	-0.706E-03	0.618E-05	-0.856E-03	-0.112E+03	0.345E+02	-0.412E-01	-0.313E-01	-0.478E-01	-0.221E+02		
21	1	0.284E+00	-0.570E-04	0.000E+00	-0.706E-03	-0.865E-05	-0.162E-02	-0.112E+03	0.369E+02	-0.412E-01	-0.313E-01	-0.478E-01	-0.221E+02		
22	1	0.559E+00	-0.570E-04	0.000E+00	-0.706E-03	0.989E-05	-0.202E-02	-0.112E+03	0.369E+02	-0.412E-01	-0.313E-01	-0.478E-01	-0.221E+02		
23	1	0.559E+00	-0.570E-04	0.000E+00	-0.706E-03	-0.124E-04	-0.285E-02	-0.112E+03	0.392E+02	-0.412E-01	-0.313E-01	-0.717E-01	-0.435E+02		
24	1	0.850E+00	-0.570E-04	0.000E+00	-0.706E-03	-0.136E-04	-0.325E-02	-0.112E+03	0.392E+02	-0.412E-01	-0.313E-01	-0.955E-01	-0.662E+02		
25	1	0.850E+00	-0.570E-04	0.000E+00	-0.706E-03	-0.161E-04	-0.411E-02	-0.112E+03	0.415E+02	-0.412E-01	-0.313E-01	-0.955E-01	-0.662E+02		
26	1	0.116E+01	-0.570E-04	0.000E+00	-0.706E-03	-0.173E-04	-0.481E-01	-0.112E+03	0.415E+02	-0.412E-01	-0.313E-01	-0.119E+00	-0.903E+02		
27	1	0.125E+01	-0.595E-03	0.000E+00	0.722E-03	-0.127E-04	-0.442E-01	-0.415E+02	-0.112E+03	0.412E-01	0.124E+00	-0.155E+00	-0.241E+03		
28	1	0.689E+00	-0.170E-04	0.000E+00	0.722E-03	-0.115E-04	-0.522E-02	-0.415E+02	-0.112E+03	0.412E-01	0.124E+00	-0.115E+00	-0.132E+03		
29	1	0.689E+00	-0.170E-04	0.000E+00	0.722E-03	-0.911E-05	-0.298E-02	-0.415E+02	-0.112E+03	0.412E-01	0.124E+00	-0.115E+00	-0.132E+03		
30	1	0.129E+00	-0.170E-04	0.000E+00	0.722E-03	-0.791E-05	-0.185E-02	-0.415E+02	-0.112E+03	0.412E-01	0.124E+00	-0.747E-01	-0.235E+02		
31	1	0.129E+00	-0.170E-04	0.000E+00	0.722E-03	-0.551E-05	-0.398E-03	-0.415E+02	-0.112E+03	0.412E-01	0.124E+00	-0.747E-01	-0.235E+02		
32	1	0.448E+00	-0.170E-04	0.000E+00	0.722E-03	-0.431E-05	0.152E-02	-0.415E+02	-0.112E+03	0.412E-01	0.124E+00	-0.346E-01	0.855E+02		

<STEP:	gGmin= 0.189E+02	Local Strain Components						Local Stress Components																			
		Member	Section	Criterion	Values	q(1)	q(2)	q(3)	q(4)	q(5)	q(6)	Q(1)	Q(2)	Q(3)	Q(4)	Q(5)	Q(6)										
1	1	0.125E+01	0.650E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.176E-03	-0.252E-01	-0.350E-01	0.199E+02	-0.996E+02	0.133E+03	-0.300E-01	-0.324E+03	-0.242E+03	0.751E+00	0.814E-05	0.000E+00	0.000E+00	-0.176E-03	-0.213E-01	-0.550E-02	0.199E+02	-0.996E+02	0.133E+03	-0.300E-01	-0.194E+03	-0.145E+03
2	1	0.751E+00	0.814E-05	0.000E+00	0.000E+00	-0.176E-03	-0.252E-01	-0.350E-01	0.199E+02	-0.996E+02	0.133E+03	-0.300E-01	-0.324E+03	-0.242E+03	0.751E+00	0.814E-05	0.000E+00	0.000E+00	-0.176E-03	-0.213E-01	-0.550E-02	0.199E+02	-0.996E+02	0.133E+03	-0.300E-01	-0.194E+03	-0.145E+03
3	1	0.751E+00	0.814E-05	0.000E+00	0.000E+00	-0.176E-03	-0.252E-01	-0.350E-01	0.199E+02	-0.996E+02	0.133E+03	-0.300E-01	-0.324E+03	-0.242E+03	0.751E+00	0.814E-05	0.000E+00	0.000E+00	-0.176E-03	-0.213E-01	-0.550E-02	0.199E+02	-0.996E+02	0.133E+03	-0.300E-01	-0.194E+03	-0.145E+03
4	1	0.252E+00	0.814E-05	0.000E+00	0.000E+00	-0.176E-03	-0.252E-01	-0.350E-01	0.199E+02	-0.996E+02	0.133E+03	-0.300E-01	-0.324E+03	-0.242E+03	0.252E+00	0.814E-05	0.000E+00	0.000E+00	-0.176E-03	-0.213E-01	-0.550E-02	0.199E+02	-0.996E+02	0.133E+03	-0.300E-01	-0.194E+03	-0.145E+03
5	1	0.252E+00	0.814E-05	0.000E+00	0.000E+00	-0.176E-03	-0.252E-01	-0.350E-01	0.199E+02	-0.996E+02	0.133E+03	-0.300E-01	-0.324E+03	-0.242E+03	0.252E+00	0.814E-05	0.000E+00	0.000E+00	-0.176E-03	-0.213E-01	-0.550E-02	0.199E+02	-0.996E+02	0.133E+03	-0.300E-01	-0.194E+03	-0.145E+03
6	1	0.255E+00	0.814E-05	0.000E+00	0.000E+00	-0.176E-03	-0.252E-01	-0.350E-01	0.199E+02	-0.996E+02	0.133E+03	-0.300E-01	-0.324E+03	-0.242E+03	0.255E+00	0.814E-05	0.000E+00	0.000E+00	-0.176E-03	-0.213E-01	-0.550E-02	0.199E+02	-0.996E+02	0.133E+03	-0.300E-01	-0.194E+03	-0.145E+03
7	1	0.119E+01	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.225E-03	-0.421E-05	0.568E-01	-0.114E+03	0.223E+02	0.100E-01	-0.999E-02	-0.290E-01	0.927E+02	0.102E+01	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.225E-03	-0.421E-05	0.568E-01	-0.114E+03	0.223E+02	0.100E-01	-0.999E-02	-0.232E-01	0.797E+02
8	1	0.102E+01	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.225E-03	-0.391E-05	0.111E-01	-0.114E+03	0.223E+02	0.100E-01	-0.999E-02	-0.232E-01	0.797E+02	0.102E+01	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.225E-03	-0.391E-05	0.106E-01	-0.114E+03	0.223E+02	0.100E-01	-0.999E-02	-0.232E-01	0.797E+02
9	1	0.102E+01	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.225E-03	-0.391E-05	0.106E-01	-0.114E+03	0.223E+02	0.100E-01	-0.999E-02	-0.232E-01	0.797E+02	0.102E+01	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.225E-03	-0.391E-05	0.106E-01	-0.114E+03	0.223E+02	0.100E-01	-0.999E-02	-0.232E-01	0.797E+02
10	1	0.843E+00	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.225E-03	-0.301E-05	0.390E-02	-0.114E+03	0.242E+02	0.100E-01	-0.999E-02	-0.174E-01	0.656E+02	0.843E+00	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.225E-03	-0.301E-05	0.390E-02	-0.114E+03	0.242E+02	0.100E-01	-0.999E-02	-0.174E-01	0.656E+02
11	1	0.843E+00	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.225E-03	-0.241E-05	0.335E-02	-0.114E+03	0.265E+02	0.100E-01	-0.999E-02	-0.174E-01	0.656E+02	0.843E+00	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.225E-03	-0.241E-05	0.335E-02	-0.114E+03	0.265E+02	0.100E-01	-0.999E-02	-0.174E-01	0.656E+02
12	1	0.645E+00	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.225E-03	-0.211E-05	0.307E-02	-0.114E+03	0.265E+02	0.100E-01	-0.999E-02	-0.116E-01	0.503E+02	0.645E+00	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.225E-03	-0.211E-05	0.307E-02	-0.114E+03	0.265E+02	0.100E-01	-0.999E-02	-0.116E-01	0.503E+02
13	1	0.645E+00	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.225E-03	-0.150E-05	0.248E-02	-0.114E+03	0.289E+02	0.100E-01	-0.999E-02	-0.116E-01	0.503E+02	0.645E+00	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.225E-03	-0.150E-05	0.248E-02	-0.114E+03	0.289E+02	0.100E-01	-0.999E-02	-0.116E-01	0.503E+02
14	1	0.430E+00	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.225E-03	-0.120E-05	0.217E-02	-0.114E+03	0.289E+02	0.100E-01	-0.999E-02	-0.581E-02	0.335E+02	0.430E+00	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.225E-03	-0.120E-05	0.217E-02	-0.114E+03	0.289E+02	0.100E-01	-0.999E-02	-0.581E-02	0.335E+02
15	1	0.430E+00	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.225E-03	-0.601E-06	0.152E-02	-0.114E+03	0.312E+02	0.100E-01	-0.999E-02	-0.581E-02	0.335E+02	0.430E+00	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.225E-03	-0.601E-06	0.152E-02	-0.114E+03	0.312E+02	0.100E-01	-0.999E-02	-0.581E-02	0.335E+02
16	1	0.198E+00	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.225E-03	-0.301E-06	0.119E-02	-0.114E+03	0.312E+02	0.100E-01	-0.999E-02	-0.143E-16	0.154E+02	0.198E+00	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.225E-03	-0.301E-06	0.119E-02	-0.114E+03	0.312E+02	0.100E-01	-0.999E-02	-0.143E-16	0.154E+02
17	1	0.198E+00	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.225E-03	-0.301E-06	0.119E-02	-0.114E+03	0.312E+02	0.100E-01	-0.999E-02	-0.143E-16	0.154E+02	0.198E+00	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.225E-03	-0.301E-06	0.119E-02	-0.114E+03	0.312E+02	0.100E-01	-0.999E-02	-0.143E-16	0.154E+02
18	1	0.513E-01	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.225E-03	0.601E-06	0.137E-03	-0.114E+03	0.335E+02	0.100E-01	-0.999E-02	-0.581E-02	0.400E+01	0.513E-01	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.225E-03	0.601E-06	0.137E-03	-0.114E+03	0.335E+02	0.100E-01	-0.999E-02	-0.581E-02	0.400E+01
19	1	0.513E-01	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.225E-03	0.120E-05	-0.605E-03	-0.114E+03	0.358E+02	0.100E-01	-0.999E-02	0.581E-02	-0.400E+01	0.513E-01	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.225E-03	0.120E-05	-0.605E-03	-0.114E+03	0.358E+02	0.100E-01	-0.999E-02	0.581E-02	-0.400E+01
20	1	0.318E+00	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.225E-03	0.150E-05	-0.989E-03	-0.114E+03	0.358E+02	0.100E-01	-0.999E-02	0.116E-01	-0.248E+02	0.318E+00	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.225E-03	0.150E-05	-0.989E-03	-0.114E+03	0.358E+02	0.100E-01	-0.999E-02	0.116E-01	-0.248E+02
21	1	0.318E+00	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.225E-03	0.211E-05	-0.178E-02	-0.114E+03	0.381E+02	0.100E-01	-0.999E-02	0.116E-01	-0.248E+02	0.318E+00	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.225E-03	0.211E-05	-0.178E-02	-0.114E+03	0.381E+02	0.100E-01	-0.999E-02	0.116E-01	-0.248E+02
22	1	0.602E+00	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.225E-03	0.241E-05	-0.219E-02	-0.114E+03	0.381E+02	0.100E-01	-0.999E-02	0.174E-01	-0.469E+02	0.602E+00	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.225E-03	0.241E-05	-0.219E-02	-0.114E+03	0.381E+02	0.100E-01	-0.999E-02	0.174E-01	-0.469E+02
23	1	0.602E+00	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.225E-03	0.301E-05	-0.303E-02	-0.114E+03	0.405E+02	0.100E-01	-0.999E-02	0.174E-01	-0.469E+02	0.602E+00	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.225E-03	0.301E-05	-0.303E-02	-0.114E+03	0.405E+02	0.100E-01	-0.999E-02	0.174E-01	-0.469E+02
24	1	0.904E+00	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.225E-03	0.331E-05	-0.347E-02	-0.114E+03	0.405E+02	0.100E-01	-0.999E-02	0.232E-01	-0.704E+02	0.904E+00	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.225E-03	0.331E-05	-0.347E-02	-0.114E+03	0.405E+02	0.100E-01	-0.999E-02	0.232E-01	-0.704E+02
25	1	0.904E+00	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.225E-03	0.391E-05	-0.436E-02	-0.114E+03	0.428E+02	0.100E-01	-0.999E-02	0.232E-01	-0.704E+02	0.904E+00	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.225E-03	0.391E-05	-0.436E-02	-0.114E+03	0.428E+02	0.100E-01	-0.999E-02	0.232E-01	-0.704E+02
26	1	0.122E+01	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.225E-03	0.421E-05	-0.655E-01	-0.114E+03	0.428E+02	0.100E-01	-0.999E-02	0.290E-01	-0.952E+02	0.122E+01	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.225E-03	0.421E-05	-0.655E-01	-0.114E+03	0.428E+02	0.100E-01	-0.999E-02	0.290E-01	-0.952E+02
27	1	0.125E+01	-0.126E-02	0.000E+00	0.000E+00	-0.176E-03	0.151E-05	-0.613E-01	-0.428E+02	-0.114E+03	0.100E-01	-0.300E-01	0.201E-01	-0.241E+03	0.125E+01	-0.126E-02	0.000E+00	0.000E+00	-0.176E-03	0.151E-05	-0.613E-01	-0.428E+02	-0.114E+03	0.100E-01	-0.300E-01	0.201E-01	-0.241E+03
28	1	0.681E+00	-0.175E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.176E-03	0.122E-05	-0.519E-02	-0.428E+02	-0.114E+03	0.100E-01	-0.300E-01	0.103E-01	-0.131E+03	0.681E+00	-0.175E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.176E-03	0.122E-05	-0.519E-02	-0.428E+02	-0.114E+03	0.100E-01	-0.300E-01	0.103E-01	-0.131E+03
29	1	0.681E+00	-0.175E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.176E-03	0.634E-06	-0.291E-02	-0.428E+02	-0.114E+03	0.100E-01	-0.300E-01	0.103E-01	-0.131E+03	0.681E+00	-0.175E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.176E-03	0.634E-06	-0.291E-02	-0.428E+02	-0.114E+03	0.100E-01	-0.300E-01	0.103E-01	-0.131E+03
30	1	0.112E+00	-0.175E-04	0.000E+00	0.000E+00	-0.176E-03	0.343																				

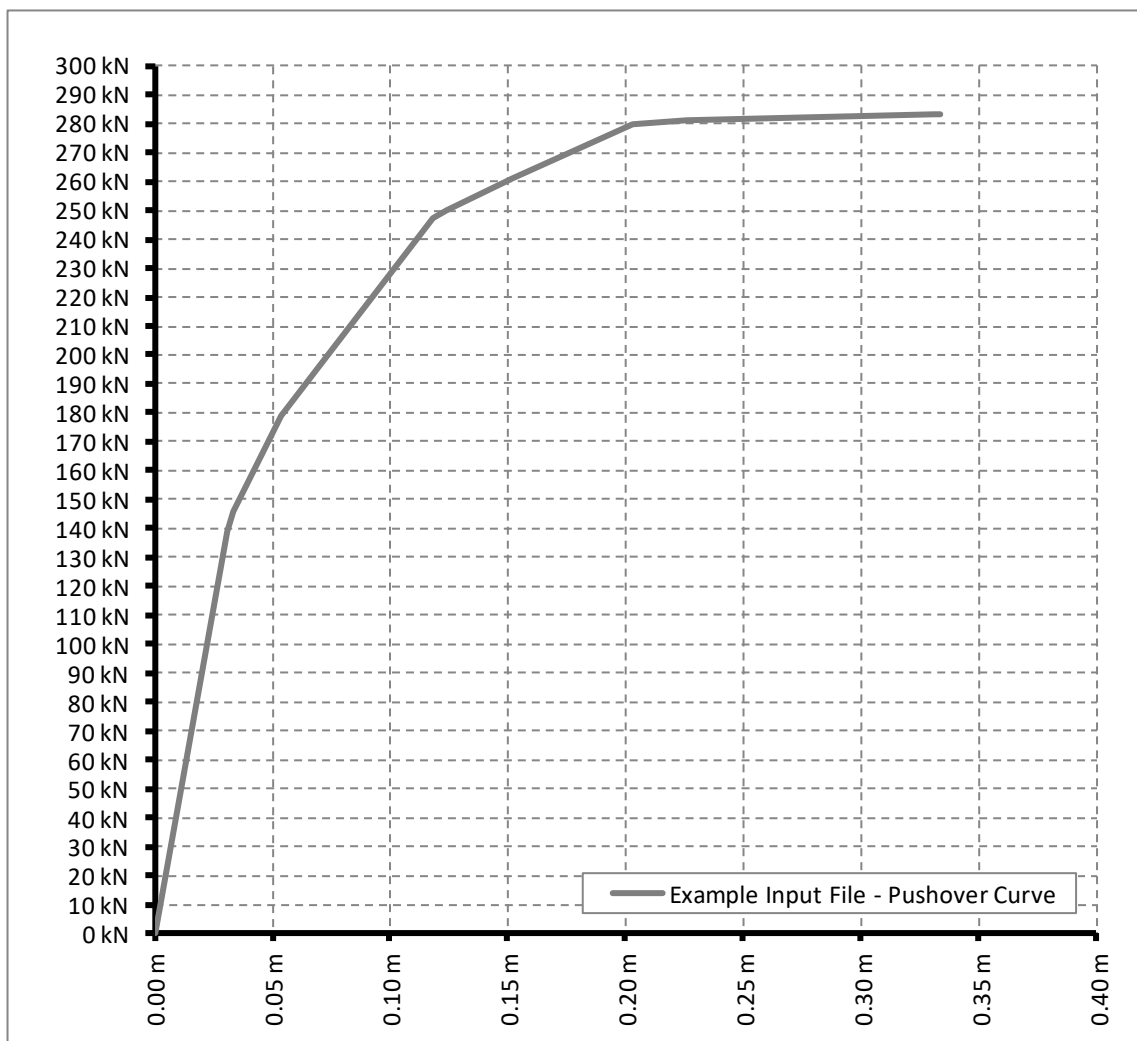
Member	Section	Criterion	Local Strain Components						Local Stress Components						
			q(1)	q(2)	q(3)	q(4)	q(5)	q(6)	Q(1)	Q(2)	Q(3)	Q(4)	Q(5)	Q(6)	
<STEP: 9> dGmin= 0.100E-01															
1	1	0.125E+01	0.696E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.183E-03	-0.252E-01	0.351E-01	0.199E+02	-0.996E+02	0.133E+03	-0.313E-01	-0.324E+03	-0.242E+03
2	1	0.751E+00	0.814E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.183E-03	-0.213E-01	-0.550E-02	0.199E+02	-0.996E+02	0.133E+03	-0.313E-01	-0.194E+03	-0.145E+03
3	1	0.751E+00	0.814E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.183E-03	-0.136E-01	-0.350E-02	0.199E+02	-0.996E+02	0.133E+03	-0.313E-01	-0.194E+03	-0.145E+03
4	1	0.252E+00	0.814E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.183E-03	-0.969E-02	-0.249E-02	0.199E+02	-0.996E+02	0.133E+03	-0.313E-01	-0.646E+02	-0.482E+02
5	1	0.252E+00	0.814E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.183E-03	-0.191E-02	-0.492E-03	0.199E+02	-0.996E+02	0.133E+03	-0.313E-01	-0.646E+02	-0.482E+02
6	1	0.255E+00	0.814E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.183E-03	0.198E-02	0.509E-03	0.199E+02	-0.996E+02	0.133E+03	-0.313E-01	0.653E+02	0.488E+02
7	1	0.119E+01	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.221E-03	-0.439E-05	0.568E-01	-0.114E+03	0.223E+02	0.104E-01	-0.979E-02	-0.303E-01	0.927E+02
8	1	0.102E+01	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.221E-03	-0.408E-05	0.111E-01	-0.114E+03	0.223E+02	0.104E-01	-0.979E-02	-0.242E-01	0.797E+02
9	1	0.102E+01	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.221E-03	-0.345E-05	0.106E-01	-0.114E+03	0.242E+02	0.104E-01	-0.979E-02	-0.242E-01	0.797E+02
10	1	0.843E+00	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.221E-03	-0.313E-05	0.390E-02	-0.114E+03	0.242E+02	0.104E-01	-0.979E-02	-0.182E-01	0.657E+02
11	1	0.843E+00	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.221E-03	-0.251E-05	0.335E-02	-0.114E+03	0.265E+02	0.104E-01	-0.979E-02	-0.182E-01	0.657E+02
12	1	0.645E+00	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.221E-03	-0.219E-05	0.307E-02	-0.114E+03	0.265E+02	0.104E-01	-0.979E-02	-0.121E-01	0.503E+02
13	1	0.645E+00	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.221E-03	-0.157E-05	0.248E-02	-0.114E+03	0.289E+02	0.104E-01	-0.979E-02	-0.121E-01	0.503E+02
14	1	0.430E+00	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.221E-03	-0.125E-05	0.217E-02	-0.114E+03	0.289E+02	0.104E-01	-0.979E-02	-0.606E-02	0.335E+02
15	1	0.330E+00	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.221E-03	-0.627E-06	0.152E-02	-0.114E+03	0.312E+02	0.104E-01	-0.979E-02	-0.606E-02	0.335E+02
16	1	0.198E+00	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.221E-03	-0.313E-06	0.119E-02	-0.114E+03	0.312E+02	0.104E-01	-0.979E-02	-0.146E-16	0.154E+02
17	1	0.198E+00	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.221E-03	0.313E-06	0.496E-03	-0.114E+03	0.335E+02	0.104E-01	-0.979E-02	-0.146E-16	0.154E+02
18	1	0.514E-01	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.221E-03	0.627E-06	0.137E-03	-0.114E+03	0.335E+02	0.104E-01	-0.979E-02	-0.606E-02	0.401E+01
19	1	0.514E-01	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.221E-03	0.125E-05	-0.606E-03	-0.114E+03	0.358E+02	0.104E-01	-0.979E-02	0.606E-02	0.401E+01
20	1	0.318E+00	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.221E-03	0.157E-05	-0.990E-03	-0.114E+03	0.358E+02	0.104E-01	-0.979E-02	0.121E-01	-0.248E+02
21	1	0.318E+00	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.221E-03	0.219E-05	-0.178E-02	-0.114E+03	0.381E+02	0.104E-01	-0.979E-02	0.121E-01	-0.248E+02
22	1	0.602E+00	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.221E-03	0.251E-05	-0.219E-02	-0.114E+03	0.381E+02	0.104E-01	-0.979E-02	0.182E-01	-0.469E+02
23	1	0.602E+00	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.221E-03	0.313E-05	-0.303E-02	-0.114E+03	0.405E+02	0.104E-01	-0.979E-02	0.182E-01	-0.469E+02
24	1	0.904E+00	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.221E-03	0.345E-05	-0.347E-02	-0.114E+03	0.405E+02	0.104E-01	-0.979E-02	0.242E-01	-0.704E+02
25	1	0.904E+00	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.221E-03	0.408E-05	-0.436E-02	-0.114E+03	0.428E+02	0.104E-01	-0.979E-02	0.242E-01	-0.704E+02
26	1	0.122E+01	-0.578E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.221E-03	0.439E-05	-0.656E-01	-0.114E+03	0.428E+02	0.104E-01	-0.979E-02	0.303E-01	-0.952E+02
27	1	0.125E+01	-0.127E-02	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.183E-03	0.163E-05	-0.614E-01	-0.428E+02	-0.114E+03	0.104E-01	-0.313E-01	0.215E-01	-0.241E+03
28	1	0.681E+00	-0.175E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.183E-03	0.133E-05	-0.519E-02	-0.428E+02	-0.114E+03	0.104E-01	-0.313E-01	0.114E-01	-0.131E+03
29	1	0.681E+00	-0.175E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.183E-03	0.718E-06	-0.291E-02	-0.428E+02	-0.114E+03	0.104E-01	-0.313E-01	0.114E-01	-0.131E+03
30	1	0.112E+00	-0.175E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.183E-03	0.413E-06	-0.177E-02	-0.428E+02	-0.114E+03	0.104E-01	-0.313E-01	0.121E-02	-0.202E+02
31	1	0.112E+00	-0.175E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.183E-03	-0.195E-06	0.517E-03	-0.428E+02	-0.114E+03	0.104E-01	-0.313E-01	0.121E-02	-0.202E+02
32	1	0.474E+00	-0.175E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.183E-03	-0.500E-06	0.166E-02	-0.428E+02	-0.114E+03	0.104E-01	-0.313E-01	-0.895E-02	0.904E+02

<STEP: 10> gMin= 0.114E+01		Local Strain Components						Local Stress Components							
Member	Section	Criterion	Values	q(1)	q(2)	q(3)	q(4)	q(5)	q(6)	Q(1)	Q(2)	Q(3)	Q(4)	Q(5)	Q(6)
1	1	0.125E+01	0.573E-03	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.204E+02	-0.998E+02	0.134E+03	-0.176E+00	-0.324E+03	-0.242E+03
1	2	0.750E+00	0.836E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.204E+02	-0.998E+02	0.134E+03	-0.176E+00	-0.194E+03	-0.145E+03
1	3	0.750E+00	0.836E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.204E+02	-0.998E+02	0.134E+03	-0.176E+00	-0.194E+03	-0.145E+03
1	4	0.250E+00	0.836E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.204E+02	-0.998E+02	0.134E+03	-0.176E+00	-0.641E+02	-0.478E+02
1	5	0.250E+00	0.836E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.204E+02	-0.998E+02	0.134E+03	-0.176E+00	-0.641E+02	-0.478E+02
1	6	0.258E+00	0.836E-05	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.204E+02	-0.998E+02	0.134E+03	-0.176E+00	-0.661E+02	0.494E+02
2	7	0.120E+01	-0.582E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.114E+03	0.229E+02	0.588E-01	0.131E-01	-0.170E+00	0.936E+02
2	8	0.103E+01	-0.582E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.114E+03	0.229E+02	0.588E-01	0.131E-01	-0.136E+00	0.804E+02
2	9	0.103E+01	-0.582E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.114E+03	0.229E+02	0.588E-01	0.131E-01	-0.136E+00	0.804E+02
2	10	0.848E+00	-0.582E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.114E+03	0.229E+02	0.588E-01	0.131E-01	-0.102E+00	0.660E+02
2	11	0.848E+00	-0.582E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.114E+03	0.229E+02	0.588E-01	0.131E-01	-0.102E+00	0.660E+02
2	12	0.646E+00	-0.582E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.114E+03	0.229E+02	0.588E-01	0.131E-01	-0.682E-01	0.503E+02
2	13	0.646E+00	-0.582E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.114E+03	0.229E+02	0.588E-01	0.131E-01	-0.682E-01	0.503E+02
2	14	0.427E+00	-0.582E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.114E+03	0.229E+02	0.588E-01	0.131E-01	-0.341E-01	0.332E+02
2	15	0.427E+00	-0.582E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.114E+03	0.229E+02	0.588E-01	0.131E-01	-0.341E-01	0.332E+02
2	16	0.191E+00	-0.582E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.114E+03	0.229E+02	0.588E-01	0.131E-01	-0.146E-16	0.148E+02
2	17	0.191E+00	-0.582E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.114E+03	0.229E+02	0.588E-01	0.131E-01	-0.146E-16	0.148E+02
2	18	0.629E-01	-0.582E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.114E+03	0.229E+02	0.588E-01	0.131E-01	-0.490E+01	-0.260E+02
2	19	0.629E-01	-0.582E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.114E+03	0.229E+02	0.588E-01	0.131E-01	-0.490E+01	-0.260E+02
2	20	0.334E+00	-0.582E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.114E+03	0.229E+02	0.588E-01	0.131E-01	-0.682E-01	0.260E+02
2	21	0.334E+00	-0.582E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.114E+03	0.229E+02	0.588E-01	0.131E-01	-0.682E-01	0.260E+02
2	22	0.622E+00	-0.582E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.114E+03	0.229E+02	0.588E-01	0.131E-01	-0.102E+00	0.484E+02
2	23	0.622E+00	-0.582E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.114E+03	0.229E+02	0.588E-01	0.131E-01	-0.102E+00	0.484E+02
2	24	0.927E+00	-0.582E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.114E+03	0.229E+02	0.588E-01	0.131E-01	-0.136E+00	-0.722E+02
2	25	0.927E+00	-0.582E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.114E+03	0.229E+02	0.588E-01	0.131E-01	-0.136E+00	-0.722E+02
2	26	0.125E+01	-0.582E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.114E+03	0.229E+02	0.588E-01	0.131E-01	-0.170E+00	-0.973E+02
3	27	0.125E+01	-0.157E-02	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.433E+02	-0.114E+03	0.588E-01	-0.176E+00	0.189E+00	-0.241E+03
3	28	0.678E+00	-0.177E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.433E+02	-0.114E+03	0.588E-01	-0.176E+00	0.132E+00	-0.130E+03
3	29	0.678E+00	-0.177E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.433E+02	-0.114E+03	0.588E-01	-0.176E+00	0.132E+00	-0.130E+03
3	30	0.105E+00	-0.177E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.433E+02	-0.114E+03	0.588E-01	-0.176E+00	0.750E-01	-0.187E+02
3	31	0.105E+00	-0.177E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.433E+02	-0.114E+03	0.588E-01	-0.176E+00	0.750E-01	-0.187E+02
3	32	0.485E+00	-0.177E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.433E+02	-0.114E+03	0.588E-01	-0.176E+00	0.178E-01	0.925E+02

Member	Local Strain Components						Local Stress Components					
	q(1)	q(2)	q(3)	q(4)	q(5)	q(6)	Q(1)	Q(2)	Q(3)	Q(4)	Q(5)	Q(6)
1	0.287E-02	0.000E+00	0.000E+00	-0.489E-02	-0.253E-01	-0.107E+00	0.211E+02	-0.101E+03	0.135E+03	-0.837E+00	-0.326E+03	-0.242E+03
2	0.746E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.489E-02	-0.214E-01	-0.548E-02	0.211E+02	-0.101E+03	0.135E+03	-0.837E+00	-0.194E+03	-0.144E+03
3	0.746E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.489E-02	-0.135E-01	-0.345E-02	0.211E+02	-0.101E+03	0.135E+03	-0.837E+00	-0.194E+03	-0.144E+03
4	0.242E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.489E-02	-0.956E-02	-0.244E-02	0.211E+02	-0.101E+03	0.135E+03	-0.837E+00	-0.626E+02	-0.463E+02
5	0.242E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.489E-02	-0.169E-02	-0.422E-03	0.211E+02	-0.101E+03	0.135E+03	-0.837E+00	-0.626E+02	-0.463E+02
6	0.270E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.489E-02	0.225E-02	0.589E-03	0.211E+02	-0.101E+03	0.135E+03	-0.837E+00	0.689E+02	0.517E+02
7	0.125E+01	0.000E+00	0.000E+00	0.265E-02	-0.117E-03	0.735E-01	-0.114E+03	0.235E+02	0.279E+00	0.117E+00	-0.809E+00	0.973E+02
8	0.107E+01	0.000E+00	0.000E+00	0.265E-02	-0.109E-03	0.253E-01	-0.114E+03	0.235E+02	0.279E+00	0.117E+00	-0.647E+00	0.837E+02
9	0.107E+01	0.000E+00	0.000E+00	0.265E-02	0.922E-04	0.248E-01	-0.114E+03	0.254E+02	0.279E+00	0.117E+00	-0.647E+00	0.837E+02
10	0.886E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.265E-02	-0.838E-04	0.409E-02	-0.114E+03	0.254E+02	0.279E+00	0.117E+00	-0.486E+00	0.690E+02
11	0.886E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.265E-02	-0.670E-04	0.352E-02	-0.114E+03	0.277E+02	0.279E+00	0.117E+00	-0.486E+00	0.690E+02
12	0.679E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.265E-02	-0.586E-04	0.323E-02	-0.114E+03	0.277E+02	0.279E+00	0.117E+00	-0.324E+00	0.529E+02
13	0.679E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.265E-02	-0.419E-04	0.261E-02	-0.114E+03	0.300E+02	0.279E+00	0.117E+00	-0.324E+00	0.529E+02
14	0.455E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.265E-02	-0.335E-04	0.229E-02	-0.114E+03	0.300E+02	0.279E+00	0.117E+00	-0.162E+00	0.355E+02
15	0.455E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.265E-02	-0.168E-04	0.162E-02	-0.114E+03	0.324E+02	0.279E+00	0.117E+00	-0.162E+00	0.355E+02
16	0.214E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.265E-02	-0.838E-05	0.127E-02	-0.114E+03	0.324E+02	0.279E+00	0.117E+00	-0.146E-16	0.167E+02
17	0.214E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.265E-02	0.838E-05	0.554E-03	-0.114E+03	0.347E+02	0.279E+00	0.117E+00	-0.146E-16	0.167E+02
18	0.439E-01	0.000E+00	0.000E+00	0.265E-02	0.168E-04	0.182E-03	-0.114E+03	0.347E+02	0.279E+00	0.117E+00	-0.162E+00	0.342E+01
19	0.439E-01	0.000E+00	0.000E+00	0.265E-02	0.335E-04	-0.586E-03	-0.114E+03	0.370E+02	0.279E+00	0.117E+00	0.162E+00	-0.342E+01
20	0.320E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.265E-02	0.419E-04	-0.982E-03	-0.114E+03	0.370E+02	0.279E+00	0.117E+00	0.324E+00	-0.249E+02
21	0.320E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.265E-02	0.586E-04	-0.180E-02	-0.114E+03	0.393E+02	0.279E+00	0.117E+00	0.324E+00	-0.249E+02
22	0.612E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.265E-02	0.670E-04	-0.222E-02	-0.114E+03	0.393E+02	0.279E+00	0.117E+00	0.486E+00	-0.477E+02
23	0.612E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.265E-02	0.838E-04	-0.309E-02	-0.114E+03	0.416E+02	0.279E+00	0.117E+00	0.486E+00	-0.477E+02
24	0.923E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.265E-02	0.922E-04	-0.354E-02	-0.114E+03	0.416E+02	0.279E+00	0.117E+00	0.647E+00	-0.718E+02
25	0.923E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.265E-02	0.109E-03	-0.445E-02	-0.114E+03	0.440E+02	0.279E+00	0.117E+00	0.647E+00	-0.718E+02
26	0.125E+01	0.000E+00	0.000E+00	0.265E-02	-0.117E-03	0.112E+00	-0.114E+03	0.440E+02	0.279E+00	0.117E+00	0.809E+00	-0.973E+02
27	0.125E+01	0.000E+00	0.000E+00	-0.489E-02	0.776E-04	-0.104E+00	-0.440E+02	-0.114E+03	-0.279E+00	-0.837E+00	0.954E+00	-0.241E+03
28	0.677E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.489E-02	0.695E-04	-0.517E-02	-0.440E+02	-0.114E+03	-0.279E+00	-0.837E+00	0.683E+00	-0.130E+03
29	0.677E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.489E-02	0.532E-04	-0.288E-02	-0.440E+02	-0.114E+03	-0.279E+00	-0.837E+00	0.683E+00	-0.130E+03
30	0.105E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.489E-02	0.451E-04	-0.173E-02	-0.440E+02	-0.114E+03	-0.279E+00	-0.837E+00	0.411E+00	-0.187E+02
31	0.105E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.489E-02	0.288E-04	0.570E-03	-0.440E+02	-0.114E+03	-0.279E+00	-0.837E+00	0.411E+00	-0.187E+02
32	0.485E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.489E-02	0.207E-04	0.172E-02	-0.440E+02	-0.114E+03	-0.279E+00	-0.837E+00	0.140E+00	0.926E+02

Member	Local Strain Components						Local Stress Components					
	q(1)	q(2)	q(3)	q(4)	q(5)	q(6)	Q(1)	Q(2)	Q(3)	Q(4)	Q(5)	Q(6)
1	0.294E-02	0.000E+00	0.000E+00	-0.500E-02	-0.253E-01	-0.109E+00	0.211E+02	-0.101E+03	0.135E+03	-0.856E+00	-0.326E+03	-0.242E+03
2	0.746E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.500E-02	-0.214E-01	-0.548E-02	0.211E+02	-0.101E+03	0.135E+03	-0.856E+00	-0.194E+03	-0.144E+03
3	0.746E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.500E-02	-0.135E-01	-0.345E-02	0.211E+02	-0.101E+03	0.135E+03	-0.856E+00	-0.194E+03	-0.144E+03
4	0.242E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.500E-02	-0.957E-02	-0.244E-02	0.211E+02	-0.101E+03	0.135E+03	-0.856E+00	-0.626E+02	-0.463E+02
5	0.242E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.500E-02	-0.169E-02	-0.422E-03	0.211E+02	-0.101E+03	0.135E+03	-0.856E+00	-0.626E+02	-0.463E+02
6	0.270E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.500E-02	0.225E-02	0.589E-03	0.211E+02	-0.101E+03	0.135E+03	-0.856E+00	0.689E+02	0.517E+02
7	-0.582E-04	0.000E+00	0.000E+00	0.271E-02	-0.120E-03	0.745E-01	-0.114E+03	0.235E+02	0.285E+00	0.120E+00	-0.828E+00	0.973E+02
8	0.107E+01	0.000E+00	0.000E+00	0.271E-02	-0.111E-03	0.253E-01	-0.114E+03	0.235E+02	0.285E+00	0.120E+00	-0.662E+00	0.837E+02
9	0.107E+01	0.000E+00	0.000E+00	0.271E-02	-0.943E-04	0.248E-01	-0.114E+03	0.254E+02	0.285E+00	0.120E+00	-0.662E+00	0.837E+02
10	0.886E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.271E-02	-0.857E-04	0.409E-02	-0.114E+03	0.254E+02	0.285E+00	0.120E+00	-0.497E+00	0.690E+02
11	0.886E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.271E-02	-0.686E-04	0.352E-02	-0.114E+03	0.277E+02	0.285E+00	0.120E+00	-0.497E+00	0.690E+02
12	0.679E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.271E-02	-0.600E-04	0.323E-02	-0.114E+03	0.277E+02	0.285E+00	0.120E+00	-0.331E+00	0.529E+02
13	0.679E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.271E-02	-0.429E-04	0.261E-02	-0.114E+03	0.300E+02	0.285E+00	0.120E+00	-0.331E+00	0.529E+02
14	0.455E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.271E-02	-0.343E-04	0.229E-02	-0.114E+03	0.300E+02	0.285E+00	0.120E+00	-0.166E+00	0.355E+02
15	0.455E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.271E-02	-0.171E-04	0.162E-02	-0.114E+03	0.324E+02	0.285E+00	0.120E+00	-0.166E+00	0.355E+02
16	0.214E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.271E-02	-0.857E-05	0.127E-02	-0.114E+03	0.324E+02	0.285E+00	0.120E+00	-0.102E-16	0.167E+02
17	0.214E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.271E-02	0.857E-05	0.554E-03	-0.114E+03	0.347E+02	0.285E+00	0.120E+00	-0.102E-16	0.167E+02
18	0.439E-01	0.000E+00	0.000E+00	0.271E-02	0.171E-04	0.182E-03	-0.114E+03	0.347E+02	0.285E+00	0.120E+00	-0.342E+01	0.342E+01
19	0.439E-01	0.000E+00	0.000E+00	0.271E-02	0.343E-04	-0.586E-03	-0.114E+03	0.370E+02	0.285E+00	0.120E+00	0.166E+00	-0.342E+01
20	0.320E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.271E-02	0.429E-04	-0.982E-03	-0.114E+03	0.370E+02	0.285E+00	0.120E+00	0.331E+00	-0.249E+02
21	0.320E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.271E-02	0.600E-04	-0.180E-02	-0.114E+03	0.393E+02	0.285E+00	0.120E+00	0.331E+00	-0.249E+02
22	0.612E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.271E-02	0.686E-04	-0.222E-02	-0.114E+03	0.393E+02	0.285E+00	0.120E+00	0.497E+00	-0.477E+02
23	0.612E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.271E-02	0.857E-04	-0.309E-02	-0.114E+03	0.416E+02	0.285E+00	0.120E+00	0.497E+00	-0.477E+02
24	0.923E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.271E-02	0.943E-04	-0.354E-02	-0.114E+03	0.416E+02	0.285E+00	0.120E+00	0.662E+00	-0.718E+02
25	0.923E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.271E-02	0.111E-03	-0.445E-02	-0.114E+03	0.440E+02	0.285E+00	0.120E+00	0.662E+00	-0.718E+02
26	0.125E+01	0.000E+00	0.000E+00	0.271E-02	0.120E-03	-0.113E+00	-0.114E+03	0.440E+02	0.285E+00	0.120E+00	0.828E+00	-0.973E+02
27	0.125E+01	0.000E+00	0.000E+00	-0.500E-02	0.794E-04	-0.105E+00	-0.440E+02	-0.114E+03	-0.285E+00	-0.856E+00	0.977E+00	-0.241E+03
28	0.677E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.500E-02	0.711E-04	-0.517E-02	-0.440E+02	-0.114E+03	-0.285E+00	-0.856E+00	0.699E+00	-0.130E+03
29	0.677E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.500E-02	0.545E-04	-0.288E-02	-0.440E+02	-0.114E+03	-0.285E+00	-0.856E+00	0.699E+00	-0.130E+03
30	0.105E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.500E-02	0.461E-04	-0.173E-02	-0.440E+02	-0.114E+03	-0.285E+00	-0.856E+00	0.421E+00	-0.187E+02
31	0.105E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.500E-02	0.295E-04	0.570E-03	-0.440E+02	-0.114E+03	-0.285E+00	-0.856E+00	0.421E+00	-0.187E+02
32	0.485E+00	0.000E+00	0.000E+00	-0.500E-02	0.212E-04	0.172E-02	-0.440E+02	-0.114E+03	-0.285E+00	-0.856E+00	0.143E+00	0.926E+02

Base Shear vs. Roof Displacement		
Step #	Displacement	Base Shear
0	0.000E+00	0.000E+00
1	0.231E-03	0.000E+00
2	0.305E-01	0.139E+03
3	0.334E-01	0.146E+03
4	0.537E-01	0.179E+03
5	0.118E+00	0.247E+03
6	0.124E+00	0.250E+03
7	0.152E+00	0.261E+03
8	0.203E+00	0.280E+03
9	0.203E+00	0.280E+03
10	0.226E+00	0.281E+03
11	0.331E+00	0.283E+03
12	0.334E+00	0.283E+03



Σχήμα 72: Καμπύλη φέρουσας ικανότητας της κατασκευής του αρχείου εισόδου - παραδείγματος.

```

+-----+-----+
| Member #    1 | Element #    1 |
+-----+-----+
| Q(1)=f[q(1)] @ Section(1):    1 |
+-----+-----+
| Plastic Hinge - Backbone Curve |
+-----+-----+
| [q]plastic| [q]total |   [Q]   |
+-----+-----+
| -0.189E-01| -0.239E-01| -0.311E+04|
| -0.145E-01| -0.184E-01| -0.311E+04|
| -0.000E+00| -0.306E-02| -0.249E+04|
|  0.000E+00|  0.000E+00|  0.000E+00|
|  0.000E+00|  0.306E-02|  0.249E+04|
|  0.145E-01|  0.184E-01|  0.311E+04|
|  0.189E-01|  0.239E-01|  0.311E+04|
+-----+-----+

```

```

+-----+-----+
| Member #    1 | Element #    1 |
+-----+-----+
| Q(1)=f[q(1)] @ Section #    1 |
+-----+-----+
| [q]plastic| [q]total |   [Q]   |
+-----+-----+
|  0.000E+00|  0.000E+00|  0.000E+00|
|  0.000E+00| -0.502E-05| -0.123E+02|
|  0.000E+00|  0.356E-05|  0.869E+01|
|  0.000E+00|  0.422E-05|  0.103E+02|
|  0.000E+00|  0.609E-05|  0.149E+02|
|  0.000E+00|  0.714E-05|  0.175E+02|
|  0.443E-05|  0.116E-04|  0.176E+02|
|  0.269E-04|  0.345E-04|  0.186E+02|
|  0.569E-04|  0.650E-04|  0.199E+02|
|  0.614E-04|  0.696E-04|  0.199E+02|
|  0.565E-03|  0.573E-03|  0.204E+02|
|  0.286E-02|  0.287E-02|  0.211E+02|
|  0.293E-02|  0.294E-02|  0.211E+02|
+-----+-----+

```

```

+-----+-----+
| Member #    1 | Element #    1 |
+-----+-----+
| Q(6)=f[q(6)] @ Section(1):    1 |
+-----+-----+
| Plastic Hinge - Backbone Curve |
+-----+-----+
| [q]plastic| [q]total |   [Q]   |
+-----+-----+
|-0.372E-01|-0.469E-01|-0.243E+03|
|-0.286E-01|-0.361E-01|-0.243E+03|
|-0.000E+00|-0.602E-02|-0.194E+03|
| 0.000E+00| 0.000E+00| 0.000E+00|
| 0.000E+00| 0.602E-02| 0.194E+03|
| 0.286E-01| 0.361E-01| 0.243E+03|
| 0.372E-01| 0.469E-01| 0.243E+03|
+-----+-----+

```

```

+-----+-----+
| Member #    1 | Element #    1 |
+-----+-----+
| Q(6)=f[q(6)] @ Section #    1 |
+-----+-----+
| [q]plastic| [q]total |   [Q]   |
+-----+-----+
| 0.000E+00| 0.000E+00| 0.000E+00|
| 0.000E+00| 0.717E-04| 0.333E+01|
| 0.000E+00|-0.151E-02|-0.582E+02|
| 0.000E+00|-0.165E-02|-0.638E+02|
| 0.000E+00|-0.260E-02|-0.998E+02|
| 0.000E+00|-0.517E-02|-0.194E+03|
|-0.183E-02|-0.709E-02|-0.197E+03|
|-0.114E-01|-0.171E-01|-0.213E+03|
|-0.285E-01|-0.350E-01|-0.242E+03|
|-0.286E-01|-0.351E-01|-0.242E+03|
|-0.416E-01|-0.481E-01|-0.242E+03|
|-0.100E+00|-0.107E+00|-0.242E+03|
|-0.102E+00|-0.109E+00|-0.242E+03|
+-----+-----+

```



```

+-----+-----+
| Member #    2 | Element #    1 |
+-----+-----+
| Q(6)=f[q(6)] @ Section(1):    7 |
+-----+-----+
| Plastic Hinge - Backbone Curve |
+-----+-----+
| [q]plastic| [q]total |   [Q]   |
+-----+-----+
|-0.888E-01|-0.112E+00|-0.973E+02|
|-0.683E-01|-0.863E-01|-0.973E+02|
|-0.000E+00|-0.144E-01|-0.779E+02|
| 0.000E+00| 0.000E+00| 0.000E+00|
| 0.000E+00| 0.144E-01| 0.779E+02|
| 0.683E-01| 0.863E-01| 0.973E+02|
| 0.888E-01| 0.112E+00| 0.973E+02|
+-----+-----+

```

```

+-----+-----+
| Member #    2 | Element #    1 |
+-----+-----+
| Q(6)=f[q(6)] @ Section #    7 |
+-----+-----+
| [q]plastic| [q]total |   [Q]   |
+-----+-----+
| 0.000E+00| 0.000E+00| 0.000E+00|
| 0.000E+00|-0.392E-03|-0.898E+01|
| 0.000E+00| 0.262E-02| 0.495E+02|
| 0.000E+00| 0.288E-02| 0.544E+02|
| 0.000E+00| 0.413E-02| 0.779E+02|
| 0.303E-01| 0.349E-01| 0.865E+02|
| 0.323E-01| 0.369E-01| 0.871E+02|
| 0.428E-01| 0.476E-01| 0.901E+02|
| 0.519E-01| 0.568E-01| 0.927E+02|
| 0.519E-01| 0.568E-01| 0.927E+02|
| 0.554E-01| 0.603E-01| 0.936E+02|
| 0.683E-01| 0.735E-01| 0.973E+02|
| 0.694E-01| 0.745E-01| 0.973E+02|
+-----+-----+

```

```

+-----+-----+
| Member #    2 | Element #    1 |
+-----+-----+
| Q(6)=f[q(6)] @ Section(2):      8 |
+-----+-----+
| Plastic Hinge - Backbone Curve |
+-----+-----+
| [q]plastic| [q]total |   [Q]   |
+-----+-----+
| -0.888E-01| -0.112E+00| -0.973E+02|
| -0.683E-01| -0.863E-01| -0.973E+02|
| -0.000E+00| -0.144E-01| -0.779E+02|
|  0.000E+00|  0.000E+00|  0.000E+00|
|  0.000E+00|  0.144E-01|  0.779E+02|
|  0.683E-01|  0.863E-01|  0.973E+02|
|  0.888E-01|  0.112E+00|  0.973E+02|
+-----+-----+

```

```

+-----+-----+
| Member #    2 | Element #    1 |
+-----+-----+
| Q(6)=f[q(6)] @ Section #      8 |
+-----+-----+
| [q]plastic| [q]total |   [Q]   |
+-----+-----+
| 0.000E+00| 0.000E+00| 0.000E+00|
| 0.000E+00| -0.287E-03| -0.329E+01|
| 0.000E+00| 0.250E-02| 0.430E+02|
| 0.000E+00| 0.274E-02| 0.470E+02|
| 0.000E+00| 0.394E-02| 0.678E+02|
| 0.000E+00| 0.437E-02| 0.750E+02|
| 0.000E+00| 0.440E-02| 0.754E+02|
| 0.000E+00| 0.454E-02| 0.779E+02|
| 0.640E-02| 0.111E-01| 0.797E+02|
| 0.642E-02| 0.111E-01| 0.797E+02|
| 0.879E-02| 0.135E-01| 0.804E+02|
| 0.205E-01| 0.253E-01| 0.837E+02|
| 0.205E-01| 0.253E-01| 0.837E+02|
+-----+-----+

```

```

+-----+-----+
| Member #    2 | Element #    2 |
+-----+-----+
| Q(6)=f[q(6)] @ Section(1):    9 |
+-----+-----+
| Plastic Hinge - Backbone Curve |
+-----+-----+
| [q]plastic| [q]total | [Q] |
+-----+-----+
| -0.888E-01| -0.112E+00| -0.973E+02 |
| -0.683E-01| -0.863E-01| -0.973E+02 |
| -0.000E+00| -0.144E-01| -0.779E+02 |
| 0.000E+00| 0.000E+00| 0.000E+00 |
| 0.000E+00| 0.144E-01| 0.779E+02 |
| 0.683E-01| 0.863E-01| 0.973E+02 |
| 0.888E-01| 0.112E+00| 0.973E+02 |
+-----+-----+

```

```

+-----+-----+
| Member #    2 | Element #    2 |
+-----+-----+
| Q(6)=f[q(6)] @ Section #    9 |
+-----+-----+
| [q]plastic| [q]total | [Q] |
+-----+-----+
| 0.000E+00| 0.000E+00| 0.000E+00 |
| 0.000E+00| -0.971E-04| -0.329E+01 |
| 0.000E+00| 0.224E-02| 0.430E+02 |
| 0.000E+00| 0.245E-02| 0.470E+02 |
| 0.000E+00| 0.355E-02| 0.678E+02 |
| 0.000E+00| 0.392E-02| 0.750E+02 |
| 0.000E+00| 0.394E-02| 0.754E+02 |
| 0.000E+00| 0.407E-02| 0.779E+02 |
| 0.640E-02| 0.106E-01| 0.797E+02 |
| 0.642E-02| 0.106E-01| 0.797E+02 |
| 0.879E-02| 0.130E-01| 0.804E+02 |
| 0.205E-01| 0.248E-01| 0.837E+02 |
| 0.205E-01| 0.248E-01| 0.837E+02 |
+-----+-----+

```

```

+-----+-----+
| Member #    2 | Element #   10 |
+-----+-----+
| Q(6)=f[q(6)] @ Section(2):    26 |
+-----+-----+
| Plastic Hinge - Backbone Curve |
+-----+-----+
| [q]plastic| [q]total |   [Q]   |
+-----+-----+
| -0.888E-01|-0.112E+00|-0.973E+02|
| -0.683E-01|-0.863E-01|-0.973E+02|
| -0.000E+00|-0.144E-01|-0.779E+02|
|  0.000E+00|  0.000E+00|  0.000E+00|
|  0.000E+00|  0.144E-01|  0.779E+02|
|  0.683E-01|  0.863E-01|  0.973E+02|
|  0.888E-01|  0.112E+00|  0.973E+02|
+-----+-----+

```

```

+-----+-----+
| Member #    2 | Element #   10 |
+-----+-----+
| Q(6)=f[q(6)] @ Section #    26 |
+-----+-----+
| [q]plastic| [q]total |   [Q]   |
+-----+-----+
|  0.000E+00|  0.000E+00|  0.000E+00|
|  0.000E+00|-0.459E-03|-0.103E+02|
|  0.000E+00|-0.373E-02|-0.734E+02|
|  0.000E+00|-0.396E-02|-0.779E+02|
| -0.104E-01|-0.145E-01|-0.808E+02|
| -0.327E-01|-0.371E-01|-0.872E+02|
| -0.345E-01|-0.389E-01|-0.877E+02|
| -0.436E-01|-0.481E-01|-0.903E+02|
| -0.607E-01|-0.655E-01|-0.952E+02|
| -0.608E-01|-0.656E-01|-0.952E+02|
| -0.683E-01|-0.733E-01|-0.973E+02|
| -0.107E+00|-0.112E+00|-0.973E+02|
| -0.108E+00|-0.113E+00|-0.973E+02|
+-----+-----+

```

```

+-----+-----+
| Member #    3 | Element #    1 |
+-----+-----+
| Q(1)=f[q(1)] @ Section(1):    27 |
+-----+-----+
| Plastic Hinge - Backbone Curve |
+-----+-----+
| [q]plastic| [q]total |   [Q]   |
+-----+-----+
| -0.189E-01| -0.239E-01| -0.311E+04|
| -0.145E-01| -0.184E-01| -0.311E+04|
| -0.000E+00| -0.306E-02| -0.249E+04|
|  0.000E+00|  0.000E+00|  0.000E+00|
|  0.000E+00|  0.306E-02|  0.249E+04|
|  0.145E-01|  0.184E-01|  0.311E+04|
|  0.189E-01|  0.239E-01|  0.311E+04|
+-----+-----+

```

```

+-----+-----+
| Member #    3 | Element #    1 |
+-----+-----+
| Q(1)=f[q(1)] @ Section #    27 |
+-----+-----+
| [q]plastic| [q]total |   [Q]   |
+-----+-----+
|  0.000E+00|  0.000E+00|  0.000E+00|
|  0.000E+00| -0.435E-05| -0.106E+02|
|  0.000E+00| -0.129E-04| -0.316E+02|
| -0.378E-04| -0.514E-04| -0.332E+02|
| -0.144E-03| -0.160E-03| -0.378E+02|
| -0.204E-03| -0.221E-03| -0.403E+02|
| -0.209E-03| -0.225E-03| -0.405E+02|
| -0.578E-03| -0.595E-03| -0.415E+02|
| -0.125E-02| -0.126E-02| -0.428E+02|
| -0.125E-02| -0.127E-02| -0.428E+02|
| -0.155E-02| -0.157E-02| -0.433E+02|
| -0.292E-02| -0.294E-02| -0.440E+02|
| -0.296E-02| -0.298E-02| -0.440E+02|
+-----+-----+

```

```

+-----+-----+
| Member #    3 | Element #    1 |
+-----+-----+
| Q(6)=f[q(6)] @ Section(1):    27 |
+-----+-----+
| Plastic Hinge - Backbone Curve |
+-----+-----+
| [q]plastic| [q]total |   [Q]   |
+-----+-----+
| -0.372E-01|-0.469E-01|-0.243E+03|
| -0.286E-01|-0.361E-01|-0.243E+03|
| -0.000E+00|-0.602E-02|-0.194E+03|
|  0.000E+00|  0.000E+00|  0.000E+00|
|  0.000E+00|  0.602E-02|  0.194E+03|
|  0.286E-01|  0.361E-01|  0.243E+03|
|  0.372E-01|  0.469E-01|  0.243E+03|
+-----+-----+

```

```

+-----+-----+
| Member #    3 | Element #    1 |
+-----+-----+
| Q(6)=f[q(6)] @ Section #    27 |
+-----+-----+
| [q]plastic| [q]total |   [Q]   |
+-----+-----+
|  0.000E+00|  0.000E+00|  0.000E+00|
|  0.000E+00|-0.780E-04|-0.421E+01|
|  0.000E+00|-0.508E-02|-0.193E+03|
| -0.995E-03|-0.610E-02|-0.195E+03|
| -0.721E-02|-0.126E-01|-0.205E+03|
| -0.268E-01|-0.330E-01|-0.239E+03|
| -0.284E-01|-0.347E-01|-0.241E+03|
| -0.378E-01|-0.442E-01|-0.241E+03|
| -0.550E-01|-0.613E-01|-0.241E+03|
| -0.550E-01|-0.614E-01|-0.241E+03|
| -0.628E-01|-0.691E-01|-0.241E+03|
| -0.979E-01|-0.104E+00|-0.241E+03|
| -0.990E-01|-0.105E+00|-0.241E+03|
+-----+-----+

```

17 Παράρτημα II – Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 1:	Ένα απλό παράδειγμα ενός θυροειδούς πλαισίου, όπου η αλληλεπίδραση εδάφους κατασκευής προσομοιώνεται με γραμμικά και στροφικά ελατήρια (τα τελευταία απεικονίζονται με σπείρες του Αρχιμήδη).	4
Σχήμα 2:	Γραφική αναπαράσταση ενός δομικού πλαισίου κείμενου επί επιπέδου, όπου ο κόμβος «εδάφους» (αγγλ. «ground») συμβολίζεται με το γράμμα “G”.	5
Σχήμα 3:	Η περίπτωση ενός συνεχούς τόξου που προσομοιώνεται ως ένα πεπερασμένο σύνολο από επτά (7) ευθύγραμμα τμήματα (γραμμικά στοιχεία δοκού)· όπως μπορεί εύκολα να παρατηρηθεί, ο αριθμός των κόμβων, συμπεριλαμβανόμενων των συνοριακών, είναι ίσος προς των αριθμό των μελών, συν ένα.....	5
Σχήμα 4:	Παράδειγμα μιας μικρής εσχάρας με δώδεκα (12) κόμβους συνολικά, από τους οποίους οι οκτώ (8) – που είναι περισσότεροι από το ήμισυ του συνολικού αριθμού των κόμβων της κατασκευής– είναι συνοριακοί κόμβοι· κατά την έννοια των μη-μηδενικών βαθμών ελευθερίας, το δομοστατικό πρόβλημα σε όρους ακαμψίας έχει είκοσι τέσσερις (24) αγνώστους, ενώ σε όρους ευκαμψίας έχει τριάντα (30) αγνώστους.	6
Σχήμα 5:	Πεπερασμένο στοιχείο δοκού/υποστυλώματος με ακραίους κόμβους, τοπικούς άξονες, και τοπικές συνιστώσες δυνάμεων/ροπών.	25
Σχήμα 6:	Αξονική δύναμη (N) και μεταβολή μήκους (u)	25
Σχήμα 7:	Ροπή στρέψης (T) και στροφή (φ).....	26
Σχήμα 8:	Παραμόρφωση (w) λόγω ασκούμενων στα άκρα της δοκού ροπών κάμψης $\{M_1, M_2\}$ για το επίπεδο (2Δ) πρόβλημα.	26
Σχήμα 9:	Ροπές κάμψης (M) και στροφές (θ) περί των αξόνων 2 και 3.	27
Σχήμα 10:	Πλαστικό δυναμικό και αντίστοιχος πολλαπλασιαστής Lagrange.	30
Σχήμα 11:	Καθολικά και τοπικά συστήματα αναφοράς (δεξιόστροφα).	34
Σχήμα 12:	Κατευθυντήριοι άξονες μέλους (αριστερά); άξονες διατομής για τις τοπικές συνιστώσες εντατικών μεγεθών (δεξιά).....	35
Σχήμα 13:	Ένα απλό παράδειγμα δομικού πλαισίου με εκκεντρότητες στοιχείων λόγω των σημείων συνένωσης μεταξύ δοκών-υποστυλωμάτων και υποστυλωμάτων-πέδινων θεμελίωσης· η αλληλεπίδραση εδάφους-κατασκευής προσομοιώνεται με στροφικά ελατήρια (απεικονίζονται με την σπείρα του Αρχιμήδη).....	40
Σχήμα 14:	Τρισδιάστατη απεικόνιση της μορφής της δι-γραμμικής συνάρτησης κατά AISC-LRFD.....	42
Σχήμα 15:	Αλληλουχία πρόσημων των όρων μιας συνάρτησης διαρροής με δύο αλληλοεπιδρώσες συνιστώσες.	42
Σχήμα 16:	Αλληλουχία πρόσημων των όρων μιας συνάρτησης διαρροής με τρεις αλληλοεπιδρώσες συνιστώσες.	42
Σχήμα 17:	Αλληλουχία πρόσημων των όρων μιας συνάρτησης διαρροής με πέντε αλληλοεπιδρώσες συνιστώσες.	43
Σχήμα 18:	Καμπύλη φέρουσας ικανότητας μιας διατομής από ωπλισμένο σκυρόδεμα υπό ροπή κάμψης κατά ATC-40.	45
Σχήμα 19:	Κανονικοποιημένη καμπύλη φέρουσας ικανότητα (τάσεις και αντίστοιχες πλαστικές παραμορφώσεις).	46
Σχήμα 20:	(a) Ισότροπη κράτυνση· (b) Ισότροπη κράτυνση υποθέτοντας μια ιδεατώς πλαστική αξονική συνιστώσα έντασης.	47
Σχήμα 21:	(a) Κινηματική κράτυνση κατά Prager· (b) Κράτυνση κατά Prager υποθέτοντας ιδεατώς πλαστική αξονική ένταση.	48
Σχήμα 22:	(a) Κινηματική κράτυνση κατά Ziegler. (b) Κράτυνση κατά Ziegler για δύο διαδοχικούς κλάδους του καταστατικού νόμου του υλικού.	49
Σχήμα 23:	Παράγοντας κλιμάκωσης τάσεων “δPWL” λόγω κράτυνσης υλικού.....	49
Σχήμα 24:	Αξίωμα του Drucker: (a) ικανοποιείται; (b) παραβιάζεται.	51
Σχήμα 25:	Αρχή λειτουργίας μοχλών.	53
Σχήμα 26:	Προδιαγεγραμμένοι δρόμοι φορτίσεως.....	58
Σχήμα 27:	Κρατυνόμενη Πλαστική Ροή και Μη-Ολόνομη Συμπεριφορά Υλικού.	59
Σχήμα 28:	Επαυξημένη βύθιση κάμψης (w) λόγω αξονικών δυνάμεων (N) για το πρόβλημα κάμψης επί επιπέδου (2Δ).....	63
Σχήμα 29:	Η συντομότερη διαδρομή του κόμβου “n” και η παραμορφωμένη κατάσταση του θεμελιώδη φορέα λόγω της “L ^{οσής} ” συνιστώσας φορτίου (F _z).	65
Σχήμα 30:	Ο “n ^{οσός} ” βρόχος και το παραμορφωμένο σχήμα αυτού λόγω του “L ^{οστού} ” ζεύγους υπέρ-στατικών δυνάμεων (F _x)· με το γράμμα “G” συμβολίζεται ένας εικονικός κόμβος “εδάφους” (ground) που βοηθά να δημιουργηθούν οι κλειστοί βρόχοι στις στηρίξεις της κατασκευής.	67
Σχήμα 31:	Τρισδιάστατες απεικονίσεις του μονώροφου πλαισίου (εικόνες από το SAP2000).....	79
Σχήμα 32:	Τέμνουσα βάση προς μετατόπιση οροφής του πλαισίου (κατεύθυνση x). {Μονάδες: kN,m}.	81

Σχήμα 33:	Τέμνουσα βάσης προς μετατόπιση οροφής του πλαισίου (κατεύθυνση y). {Μονάδες: kN,m}.....	81
Σχήμα 34:	Τρισδιάστατη απεικόνιση του εξάωροφου πλαισίου (εικόνα από το SAP2000).....	82
Σχήμα 35:	Καμπύλες φέρουσας ικανότητας εξάωροφου πλαισίου, κατεύθυνση x . {Μονάδες: kN,m}.....	83
Σχήμα 36:	Καμπύλες φέρουσας ικανότητας εξάωροφου πλαισίου, κατεύθυνση y . {Μονάδες: kN,m}.....	84
Σχήμα 37:	Γεωμετρία του πλαισίου και κατακόρυφα φορτία (εικόνα από το SAP2000).....	85
Σχήμα 38:	Καμπύλες φέρουσας ικανότητας του επιπέδου πλαισίου. {Μονάδες: kN,m}.....	86
Figure 39:	Γεωμετρία και φόρτιση της εσχάρας.....	87
Σχήμα 40:	Καμπύλη φορτίου προς αντίστοιχη μετατόπιση της εσχάρας· {Μονάδες: kN,m}.....	88
Σχήμα 41:	Γεωμετρία της δοκού και ασκούμενα φορτία: αρίθμηση κόμβων, μελών, και κρίσιμων διατομών.	89
Σχήμα 42:	Καμπύλες φορτίου-μετατόπισης. {Μονάδες: kN,m}.....	90
Σχήμα 43:	Καμπύλες ροπής κάμψης προς αντίστοιχη πλαστική στροφή για την κρίσιμη διατομή #3 {Μονάδες: kNm, rad}. 91	
Figure 44:	Καμπύλες ροπής κάμψης προς αντίστοιχη πλαστική στροφή για την κρίσιμη διατομή #4 {Μονάδες: kNm, rad}. 91	
Figure 45:	Καμπύλες ροπής κάμψης προς αντίστοιχη πλαστική στροφή για την κρίσιμη διατομή #6 {Μονάδες: kNm, rad}. 91	
Σχήμα 46:	Γεωμετρία του πλαισίου, αρίθμηση κόμβων και μελών, κομβικές εκκεντρότητες μελών, και φορτία.....	92
Σχήμα 47:	Καμπύλη φέρουσας συμπεριφοράς πλαστικών αρθρώσεων των εξώτερων υποστυλωμάτων {Μονάδες: kNm,rad}.	93
Σχήμα 48:	Καμπύλη φέρουσας συμπεριφοράς πλαστικών αρθρώσεων των εσώτερων υποστυλωμάτων {Μονάδες: kNm,rad}.	93
Σχήμα 49:	Καμπύλη φέρουσας συμπεριφοράς πλαστικών αρθρώσεων των δοκών {Μονάδες: kNm,rad}.	94
Σχήμα 50:	Διάγραμμα ροπών κάμψης κατά το πέρας της ανάλυσης. {Μονάδες: kNm}.....	94
Σχήμα 51:	Διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων κατά το πέρας της ανάλυσης. {Μονάδες: kN}.....	94
Σχήμα 52:	Διάγραμμα αξονικών δυνάμεων κατά το πέρας της ανάλυσης. {Μονάδες: kN}.	95
Σχήμα 53:	Ισορροπία των ενώσεων δοκών-υποστυλωμάτων της κατασκευής κατά το πέρας της ανάλυσης. {Μονάδες: kN,m}.....	95
Σχήμα 54:	Ροπή κάμψης προς πλαστική στροφή της κρίσιμης διατομής 1. {Μονάδες: kNm,rad}.....	96
Σχήμα 55:	Ροπή κάμψης προς πλαστική στροφή της κρίσιμης διατομής 9 {Μονάδες: kNm,rad}.....	96
Σχήμα 56:	Οριζόντιο φορτίο (W) ως συνάρτηση της οριζόντιας μετατόπισης του κόμβου 5. {Μονάδες: kN,m}.....	97
Σχήμα 57:	Άθροισμα φορτίων (G+P) ως συνάρτηση της κατακόρυφης μετατόπισης του κόμβου 6. {Μονάδες: kN,m}.	97
Σχήμα 58:	Γεωμετρία της κατασκευής, διατομές μελών σύμφωνα με τον Πίνακα 8, ασκούμενα φορτία, κόμβος αναφοράς A (•) και κρίσιμες διατομές B και C (•). {Μονάδες: kN,m}.....	98
Σχήμα 59:	Εντατικές καταστάσεις διατομής B (αριστερά) και διατομής C (δεξιά). {Μονάδες: κανονικοποιημένες τιμές}..	101
Σχήμα 60:	Τέμνουσα βάσης “V _b ” ως συνάρτηση της οριζόντιας μετατόπισης “u” του κόμβου A (•). {Μονάδες: kN,m}.....	102
Σχήμα 61:	Πλαίσιο ενός πειράματος του Yagimci· γεωμετρία, διατομές, και συνθήκες φόρτισης. {Μονάδες: kN,m}.....	103
Σχήμα 62:	Οριζόντιο φορτίο “H” συναρτήσει της αντίστοιχης μετατόπισης “u” του άνω δεξιού κόμβου του πλαισίου.	104
Σχήμα 63:	Γεωμετρία της εσχάρας και συνθήκες φόρτισης.....	105
Σχήμα 64:	Φορτίο ως συνάρτηση της αντίστοιχης μετατόπισης του φορτιζόμενου κόμβου {Μονάδες: kN,m}.	106
Σχήμα 65:	Κάτοψη και όψεις της κατασκευής, προσανατολισμοί διατομών υποστυλωμάτων, ασκούμενα φορτία, τρισδιάστατη απεικόνιση πλαισίου, και κόμβος αναφοράς (•) {Μονάδες: kN,m}.	107
Σχήμα 66:	Διαγράμματα ροπών-καμπυλοτήτων για διατομές HEM180 – ισχυρός άξονας {Μονάδες: kN,m,rad}.....	108
Σχήμα 67:	Διαγράμματα ροπών-καμπυλοτήτων για διατομές HEM180 – ασθενής άξονας {Μονάδες: kN,m,rad}.....	109
Σχήμα 68:	Διαγράμματα ροπών-καμπυλοτήτων για διατομές HEM400 – ισχυρός άξονας {Μονάδες: kN,m,rad}.....	109
Σχήμα 69:	Διαγράμματα ροπών-καμπυλοτήτων για διατομές HEM400 – ασθενής άξονας {Μονάδες: kN,m,rad}.....	110
Σχήμα 70:	Τέμνουσα βάσης ως συνάρτηση της μετατόπισης οροφής του κόμβου αναφοράς (•) {Μονάδες: kN,m}.....	111
Σχήμα 71:	Γεωμετρία, συνοριακές συνθήκες, και φορτίσεις της κατασκευής του αρχείου εισόδου.....	129
Σχήμα 72:	Καμπύλη φέρουσας ικανότητας της κατασκευής του αρχείου εισόδου - παραδείγματος.....	146

18 Παράρτημα III – Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 1:	Συντελεστές “Si” για την συνάρτηση διαρροής κατά DIN-18800.	42
Πίνακας 2:	Αδιάστατες συντεταγμένες της καμπύλης φέρουσας ικανότητας κατά ATC-40.	45
Πίνακας 3:	Επικόμβιες συντεταγμένες του μονώροφου πλαισίου.	79
Πίνακας 4:	Συνδεσιμότητα, διατομές, και αλληλοεπιδράσεις εντατικές συνιστώσες του μονώροφου πλαισίου.	80
Πίνακας 5:	Διατομές και μήκη μελών του εξάωροφου πλαισίου.	82
Πίνακας 6:	Τμηματικός γραμμικός καταστατικός νόμος υλικού (κανονικοποιημένος ως προς την παραμόρφωση και τάση διαρροής, αντιστοίχως).	89
Πίνακας 7:	Αλληλουχία Συμβάντων {Π.Κ.=Πλαστική Κράτνυση, Ι.Π.=Ιδεατά Πλαστική, Τ.Α.=Τοπική Αποφόρτιση}.	89
Πίνακας 8:	Εξωτερικές και εσωτερικές ακτίνες των σωληνοειδών διατομών της κατασκευής.	99
Πίνακας 9:	Τμηματικός γραμμικός καταστατικός νόμος (κανονικοποιημένος με τις τιμές παραμόρφωσης και τάσης διαρροής).	100
Πίνακας 10:	Τμηματικός γραμμική προσέγγιση της θεωρητικής συνάρτησης $g(N, M_3) = (N/N^*)^2 + (M/M_{3*}) - 1 \leq 0$	100
Πίνακας 11:	Τμηματικός γραμμικός καταστατικός νόμος (κανονικοποιημένος με τις τιμές παραμόρφωσης και τάσης διαρροής).	104

19 Παράρτημα IV – Βιβλιογραφικές Αναφορές

- [1] J. Perry, Struts and Tie Rods with Lateral Loads, *Philosophical Magazine and Journal of Science, Taylor and Francis*, **33** (5), 269–284, 1892.
- [2] A. Berry, Calculations of Stresses in Aerospace Wing Spars, *Transactions of the Royal Aeronautical Society*, **1**, 1919.
- [3] A.J.S. Pippard, Sir J. Baker, *Analysis of Engineering Structures*, E. Arnold & Co., London, 1936.
- [4] R. Courant, Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **49**, 1–43, 1943.
- [5] K.J. Dallison, Stress analysis of circular frames in a non-tapering fuselage, *Journal of the Royal Aeronautical Society*, **57**, 151–176, 1953.
- [6] J.H. Argyris, S.Kelsey, Energy Theorems and Structural Analysis, *Aircraft Engineering*, 1954 (re-printed by Butterworth's Scientific Publications, London, 1960).
- [7] J.H. Argyris, S.Kelsey, Structural Analysis by the Force Method, with Application to Aircraft Wings, *Jahrbuch von Wissenschaftlicher Gessellschaft für Luftfahrt*, 1956.
- [8] J.H. Argyris, S.Kelsey, The Matrix Force Method of Structural Analysis and some new applications, *British Aeronautical Research Council, R.&M. 3034*, February 1956.
- [9] W.R. Spillers, Application of topology in structural analysis, *Journal of the Structural Division, ASCE*, **13**, 89–301, 1963.
- [10] A.I. Roussopoulos, *Theory of Elastic Complexes*, Elsevier, 1965.
- [11] J.T. Oden, A. Neighbors, Network-Topological Formulation of Analyses of Geometrically and Materially Non-linear Space Frames, *Proc. International Conference on Space Structures, Blackwell Scientific Publications*, 1966.
- [12] J. C. de C. Henderson and E. A. W. Maunder., A problem in applied topology; on the selection of cycles for the flexibility analysis of skeletal structures, *J. Inst. Maths Applics*, **5**, 254–269, 1969.
- [13] S.J. Fenvez, A. Gonzalez-Caro, Network Topological Formulation of Analysis and Design of Rigid-Plastic Framed Structures, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **3**, 425–441, 1971.
- [14] S.N. Patnaik, An Integrated Force Method for Discrete Analysis, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, **6**, 237-251, 1973.
- [15] A. Kaveh, *Application of topology and matroid theory to the analysis of structures*, Ph.D. Thesis, Imperial College, London, 1974.
- [16] A. C. Cassell, J. C. de C. Henderson, A. Kaveh, Cycle Bases for the Flexibility Analysis of Structures, *International Journal for Numerical Methods In Engineering*, **8**, 521–528, 1974.
- [17] A. Kaveh, Improved Cycle Bases for the Flexibility Analysis of Structures, *Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering*, **9**, 267–272, 1976.
- [18] C. Polizzotto, A Formulation of The Force Method in The Context of Large Displacements, *Comp. Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **16**, 121–134, 1978.
- [19] S.N. Patnaik, S. Yadagiri, Design for Frequency by the Integrated Force Method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **16**, 213–230, 1978.
- [20] A. Kaveh, A Combinatorial Optimization Problem; Optimal Generalized Cycle Bases, *Comp. Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **20**, 39–51, 1979.
- [21] I. Kaneko, M. Lawo, G. Thierauf, On Computational Procedures for the Force Method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **18**, 1469–1495, 1982.
- [22] A. Kaveh, Statical Bases for an Efficient Flexibility Analysis of Planar Trusses, *Journal of Structural Mechanics*, **14** (4), 475-488, 1986.
- [23] A. Kaveh, An Efficient Flexibility Analysis of Structures, *Computers & Structures*, **22** (6), 973–977, 1986.
- [24] A. Kaveh, An Efficient Program for Generating Subminimal Cycle Bases for The Flexibility Analysis of Structures, *Communications in Applied Numerical Methods*, **2**, 339–344, 1986.

- [25] A. Jennings, T.K.H. Tam, Automatic Plastic Design of Frames, *Engineering Structures*, **8**, 139–147, 1986.
- [26] S.N. Patnaik, K.T. Joseph, Generation of the Compatibility Matrix in the Integrated Force Method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **55**, 239–257, 1986.
- [27] N.Z. Pereira, L.A. Borges, M.B. Hecke, A Force Method for Elastic-Plastic Analysis of Frames by Quadratic Optimization, *Int. J. of Solids and Structures*, **24** (2), 211–230, 1988.
- [28] A. Kaveh, Topological Properties of Skeletal Structures, *Computers & Structures*, **29** (3), 403–411, 1988.
- [29] A. Kaveh, Optimizing the Conditioning of Structural Flexibility Matrices, *Computers & Structures*, **41** (3), 489–494, 1991.
- [30] C.A. Felippa, K.C. Park, A Direct Flexibility Method, *Comp. Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **149**, 319–337, 1997.
- [31] K.V. Spiliopoulos, On the automation of the force method in the optimal plastic design of frames. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **141** (1–2), 141–156, 1997.
- [32] K.V. Spiliopoulos, P.G. Souliotis, Automatic Collapse Load Analysis of Regular Plane Frames using The Force Method, *Computers & Structures*, **64** (1–4), 531–540, 1997.
- [33] V.K. Koumoussis, Recursive Formulation of Force Method Programmed in Logic, *Journal of Computing in Civil Engineering*, **12** (1), 19–29, 1998.
- [34] S.N. Patnaik, R.M. Coroneos, D.A.Hopkins, Recent Advances in the Method of Forces: Integrated Force Method of Structural Analysis, *Advances in Engineering Software*, **29** (3–6), 463–474, 1998.
- [35] N.R.B. Krishnam Raju, J. Nagabhushanam, Nonlinear Structural Analysis using Integrated Force Method, *Sadhana*, **25** (4), 353–365, 2000.
- [36] A. Kaveh, V. Kalatjari, Genetic Algorithm for Discrete-Sizing Optimal Design of Trusses using the Force Method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **55**, 55–72, 2002.
- [37] A. Kaveh, V. Kalatjari, Size/Geometry Optimization of Trusses by the Force Method and Genetic Algorithm, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik & Mechanik (ZAMM)*, **84** (5), 347–357, 2004.
- [38] A. Kaveh, A. Abdi-tehrani, Design of Frames using Genetic Algorithm, Force Method, and Graph Theory, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **61**, 2555–2565, 2004.
- [39] R. Sedaghati, Benchmark Case Studies in Structural Design Optimization using The Force Method, *Int. J. of Solids and Structures*, **42**, 5848–5871, 2005.
- [40] Y. Luo, J. Lu, Geometrically Non-Linear Force Method for Assemblies with Infinitesimal Mechanisms, *Computers & Structures*, **84**, 2194–2199, 2006.
- [41] A. Kaveh, H. Moez, Analysis of frames with semi-rigid joints: A graph-theoretical approach, *Engineering Structures*, **28**, 829–836, 2006.
- [42] A. Kaveh, H. Rahami, Analysis, Design and Optimization of Structures using Force Method and Genetic Algorithm, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **65**, 1570–1584, 2006.
- [43] A. Kaveh, H. Rahami, Nonlinear Analysis and Optimal Design of Structures via Force Method and Genetic Algorithm, *Computers & Structures*, **84**, 770–778, 2006.
- [44] H. Rahami, A. Kaveh, Y. Gholipour, Sizing, Geometry and Topology Optimization of Trusses via Force Method and Genetic Algorithm, *Engineering Structures*, **30**, 2360–2369, 2008.
- [45] A. Kaveh, M. Jahanshani, Plastic limit analysis of frames using ant colony systems, *Computers & Structures*, **86**, 1152–1163, 2008.
- [46] A. Kaveh, H. Moez, Minimal Cycle Bases for Analysis of Frames with Semi-Rigid Joints, *Computers & Structures*, **86**, 503–510, 2008.
- [47] K.V. Spiliopoulos, T.N. Patsios, A Quick Estimate of the Strength of Uniaxially Tied Framed Structures, *Journal of Constructional Steel Research*, **65** (8–9), 1763–1775, 2009.
- [48] A. Kaveh, S. Malakouti Rad, Hybrid Genetic Algorithm and Particle Swarm Optimization for the Force Method-based Simultaneous Analysis and Design, *Iranian Journal of Science and Technology, Transaction B: Civil Engineering*, **34** (B1), 15–34, 2010.

- [49] K.V. Spiliopoulos, T.N. Patsios, An Efficient Mathematical Programming Method for The Elastoplastic Analysis of Frames, *Engineering Structures*, **32**, 1199–1214, 2010.
- [50] A. Kaveh, S. Talatahari, An enhanced charged system search for configuration optimization using the concept of fields of forces, *Structural Multidisciplinary Optimization*, **43**, 339–351, 2011
- [51] A. Kaveh, H. Rahami, S.R. Mirghaderi, M.A. Asl, Analysis of Near-Regular Structures using The Force Method, *Engineering Computations*, **30** (1), 21–48, 2012.
- [52] K.V. Spiliopoulos, T.N. Patsios, Numerical analysis of nonholonomic elastoplastic frames by mathematical programming, In: *G. de Saxcé, A. Oueslati, E. Charkaluk, J.B. Trisch (Editors), Limit States of Materials and Structures, Springer, Dodrecht*, 124–144, 2013.
- [53] K.V. Spiliopoulos, N.G. Dais, A powerful force-based approach for the limit analysis of three-dimensional frames, *Archive of Applied Mechanics*, **83** (5), 723–742, 2013.
- [54] T.N. Patsios, K.V. Spiliopoulos, A Force-Based Formulation for The 2nd Order Elastoplastic Analysis of Frames, *Proc. 2nd ECCOMAS Young Investigators Conference*, 104–107, 2013.
- [55] T.N. Patsios, K.V. Spiliopoulos, A Force-Based Formulation for the Analysis of Frames with Non-Holonomic Hardening Plastic Hinges, *WCCM XI – ECCM V – ECFD VI Conference*, 2014.
- [56] T.N. Patsios, K.V. Spiliopoulos, A Force-Based Formulation for The Analysis of 3-Dimensional Inelastic Structural Frames, *Proc. ECCOMAS VII Conference*, **2**, 3091–3106, ISBN: 978-618828440-1, National Technical University of Athens, 2016.
- [57] T.N. Patsios, K.V. Spiliopoulos, A Force-Based Mathematical Programming Method for the Incremental Analysis of 3D Frames with Non-Holonomic Hardening Plastic Hinges, *Computers & Structures*, **208**, 51–74, 2018.
- [58] J.L. Lagrange, Mécanique Analytique, *Seconde Partie de la Mécanique*, Section IV, 504–522, Paris, 1811.
- [59] J.-B. J. Fourier, *Mémoires de l'Académie des Sciences de l' Institut de France*, Tome VI, Partie Mathématique (Analyse), xxix–xlj, Paris, 1823.
- [60] L.V. Kantorovich, *Mathematical Methods in the Organization and Planning of Production*, 1939.
- [61] W. Karush, Minima of functions of several variables with inequalities as side constraints, *M.Sc. Dissertation, Department of Mathematics, University of Chicago*, Chicago, Illinois, 1939.
- [62] G.B. Dantzig, Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities, Chapter XXI of “Activity analysis of production and allocation”, *Cowles Commission Monograph 13*, T.C. Koopmans (editor), John Wiley, 1951.
- [63] C.E. Lemke, The dual method of solving the linear programming problem, *Naval Research Logistics Quarterly*, **1** (1), 36–47, 1954.
- [64] G.B. Dantzig, *Linear programming and extensions*, Princeton University Press, 1963.
- [65] D.G. Luenberger, *Linear and nonlinear programming (2nd Edition)*, Addison-Wesley Publishing Company, 1984.
- [66] R.J. Vanderbei, *Linear and nonlinear programming: Foundations and extensions*, Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [67] R. Fletcher, *Practical Methods of Optimization (2nd Edition)*, Wiley, 2001.
- [68] D. Goldfarb, A. Idnani, A numerically stable dual method for solving strictly convex quadratic programs, *Mathematical Programming*, **27**, 1–33, 1983.
- [69] N. Karmakar, A new polynomial-time algorithm for linear programming, *Combinatorica*, **4**, 373–397, 1984.
- [70] M.J.D. Powell, TOLMIN: A Fortran Package for Linearly Constrained Optimization Calculation, *DAMTP, 1989/NA2, University of Cambridge*, 1989.
- [71] E.D. Andersen and Y. Ye, A computational study of the homogeneous algorithm for large-scale convex optimization, *Computational Optimization and Applications*, **10**, 243–269, 1998.
- [72] E.D. Andersen and K.D. Andersen, The MOSEK interior point optimizer for linear programming: an implementation of the homogeneous algorithm, *High Performance Optimization*, 197–232, Kluwer Academic Publishers, 2000.

- [73] E. D. Andersen, C. Roos, T. Terlaky, On implementing a primal-dual interior point method for conic quadratic optimization, *Mathematical Programming*, **95** (2), 249-277, 2003.
- [74] Charnes A., Greenberg H.J., Plastic collapse and linear programming, Preliminary Report (“*The summer meeting in Mineapolis*”, *Abstract Nr. 506, p.480*), *Bulletin of the American Mathematical Society*, **51** (6), 449-494, 1951.
- [75] Dorn W.S., Greenberg H.J., Linear programming and plastic limit analysis of structures, *Quarterly of Applied Mathematics*, **15** (2), 155-167, 1957.
- [76] Charnes A., Lemke C.E., Zienkewicz O.C., Virtual work, linear programming and plastic limit analysis, *Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Mathematical and Physical Sciences*, **251** (1264), 110-116, 1959.
- [77] Prager W., Mathematical programming and theory of structures, *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, **13** (1), 312-332, 1965.
- [78] Maier G., Drucker D.C., Elastic-plastic continua containing unstable elements obeying normality and convexity relations, *Schweizerische Bauzeitung*, **84** (23), 447-450, 1966.
- [79] Maier G., On Elastic-Plastic Structures with Associated Stress-Strain Relations Allowing for Work Softening, *Meccanica*, **2** (1), 55-64, 1967.
- [80] Maier G., A quadratic-programming approach for certain nonlinear structural problems, *Meccanica*, **3** (2), 121-130, 1968.
- [81] Maier G., Quadratic programming and theory of elastic-perfectly plastic structures, *Meccanica*, **3** (4), 265-273, 1968.
- [82] Maier G., Capurso M., Incremental Elastoplastic Analysis and Quadratic Optimization, *Meccanica*, **5** (2), 107-116, 1970.
- [83] Maier G., A matrix structural theory of piecewise linear elastoplasticity with interacting yield planes, *Meccanica*, **5** (1), 54-66, 1970.
- [84] Maier G., Incremental plastic analysis in the presence of large displacements and physical instabilizing effects. *International Journal of Solids and Structures*, **7** (4), 345-372, 1971.
- [85] De Donato O., Maier G., Mathematical programming methods for the inelastic analysis of reinforced concrete frames allowing for limited rotation capacity, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, **4** (3), 307-329, 1972.
- [86] Corradi L., Maier G., Inadaptation theorems in the dynamics of elastic-work hardening structures. *Ingenieur Archiv*, **43** (1), 44-57, 1973.
- [87] Maier G., Zavelani Rossi A., Dotreppe J.C., Equilibrium branching due to flexural softening. *ASCE Journal of the Structural Division*, **99** (4), 897-901, 1973.
- [88] Abdel-Baset S.B., Grierson D.E., Lind N.C., Second-order collapse load analysis: LP approach, *ASCE Journal of the Structural Division*, **99** (11), 2215-2228, 1973.
- [89] De Donato O., Maier G., Historical deformation analysis of elastoplastic structures as a parametric linear complementarity problem, *Meccanica*, **11** (3), 166-171, 1976.
- [90] Maier G., Piecewise linearization of yield criteria in structural plasticity, *Solid Mechanics Archive*, **2** (3), 239-281, 1976.
- [91] Kaneko I., A mathematical programming method for the inelastic analysis of reinforced concrete frames, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **11** (7), 1137-1154, 1977.
- [92] Maier G., Grierson D.E., Best M.J., Mathematical programming methods for deformation analysis at plastic collapse, *Computers and Structures*, **7** (5), 599-612, 1977.
- [93] Smith D.L., The Wolfe-Markowitz algorithm for non-holonomic elastoplastic analysis, *Engineering Structures*, **1** (1), 8-16, 1978.
- [94] Maier G., Andreuzzi F., Elastic and elasto-plastic analysis of submarine pipelines as unilateral contact problems, *Computers and Structures*, **8** (3-4), 421-431, 1978.
- [95] Maier G., Andreuzzi F., Giannesi F., Jurina L., Taddei F., Unilateral contact, elastoplasticity and complementarity with reference to offshore pipeline design, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **17-18**, 469-495, 1978.

- [96] Kaneko I., Piecewise linear elastic-plastic analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **14** (5), 757–767, 1979.
- [97] G. Maier, S. Giacomini, F. Paterlini, Combined elastoplastic and limit analysis via restricted basis linear programming, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **19** (1), 21–48, 1979.
- [98] Maier G., Hueckel T., Nonassociated and coupled flow rules of elastoplasticity for rock-like materials, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and Geomechanics Abstracts*, **16** (2), 77–92, 1979.
- [99] Cohn M.Z., Maier G., Grierson D.E. (Editors), Engineering plasticity by mathematical programming, *Pergamon Press*, New York, 1979.
- [100] Kaneko I., Complete solutions for a class of elastic-plastic structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **21** (2), 193–209, 1980.
- [101] Franchi A. Cohn M.Z., Computer analysis of elastic-plastic structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **21** (3), 271–294, 1980.
- [102] Faravelli L., Zanon P., Limit Analysis of Steel Structures Allowing for Shear Force, *Journal of Structural Mechanics*, **9** (3), 325–337, 1981.
- [103] Maier G., Giannessi F., Nappi A., Indirect identification of yield limits by mathematical programming, *Engineering Structures*, **4** (2), 86–98, 1982.
- [104] Giannessi F., Jurina L., Maier G., A quadratic complementarity problem related to the optimal design of a pipeline freely resting on a rough sea bottom, *Engineering Structures*, **4** (2), 186–196, 1982.
- [105] Maier G., Munro J., Mathematical programming applications to engineering plastic analysis, *Applied Mechanics Reviews*, ASME, **35** (12), 1631–1643, 1982.
- [106] Maier G., Novati G., Elastic plastic boundary element analysis as a linear complementarity problem. *Applied Mathematical Models*, **7** (2), 74–82, 1983.
- [107] De Freltas J.A.T., Smith D.L., Elastoplastic Analysis of Planar Structures for Large Displacements, *Journal of Structural Mechanics*, **12** (4), 419–445, 1984.
- [108] De Freitas J.A.T., Smith, D.L., A general methodology for nonlinear structural analysis by mathematical programming, *Engineering Structures*, **6** (1), 52–60, 1984.
- [109] Maier G., Nappi A., On the unified framework provided by mathematical programming to plasticity, *Studies in Applied Mechanics*, **6** (*The D.C.Drucker Anniversary Volume*), 253–273, 1984.
- [110] Panagiotopoulos P.D., Baniotopoulos C.C., Avdelas A.V., Certain propositions on the activation of yield modes in elastoplasticity and their applications to deterministic and stochastic problems, *ZAMM*, **64** (11), 491–501, 1984.
- [111] Panagiotopoulos P.D., *Inequality Problems in Mechanics and Applications – Convex and Nonconvex Energy Functions*, Birkhäuser, 1985.
- [112] Maier G., Smith D.L., Update to “mathematical programming applications to engineering plastic analysis”, *Applied Mechanics Update*, ASME, New York, 377–383, 1986.
- [113] Zhong W.X., Zhang R.L., Parametric variational principles and their quadratic programming solutions in plasticity, *Computers and Structures*, **30** (4), 887–896, 1988.
- [114] Maier G., Nappi A., Backward difference time integration, nonlinear programming and extremum theorems in elastoplastic analysis, *Solid Mechanics Archives*, **14** (1), 37–64, 1989.
- [115] Tin-Loi F. Wong M.B., Nonholonomic computer analysis of elastoplastic frames, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **72** (3), 351–364, 1989.
- [116] Maier G., Novati G., Extremum theorems for finite-step backward-difference analysis of elastic-plastic nonlinearly hardening solids, *International Journal of Plasticity*, **6** (1), 1–10, 1990.
- [117] Tin-Loi F., On the optimal plastic synthesis of frames, *Engineering Optimization*, **16** (2), 91–108, 1990.
- [118] Tin-Loi F., A yield surface linearization procedure in limit analysis, *Journal of Structural Mechanics*, **18** (1), 135–149, 1990.

- [119] Wakefield R.R., Tin-Loi F., Mathematical programming and uniqueness in nonholonomic plasticity, *Computers and Structures*, **34**, 477–483, 1990.
- [120] Wakefield R.R., Tin-Loi F., Large scale nonholonomic elastoplastic analysis using a linear complementarity formulation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **84** (3), 229–242, 1990.
- [121] Giannessi F., Maier G., Complementarity systems and optimization problems in structural engineering, *Engineering Optimization*, **18** (1), 43–66, 1991.
- [122] Nappi A., Application of convex analysis concepts to the numerical solution of elastic-plastic problems by using an internal variable approach, *Engineering Optimization*, **18** (1–3), 79–92, 1991.
- [123] Cen Z., Maier G., Bifurcations and instabilities in fracture of cohesive-softening structures: a boundary element analysis, *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, **15** (9), 911–928, 1992.
- [124] Maier G., Perego U., Effects of softening in elastic-plastic structural dynamics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **34** (1), 319–347, 1992.
- [125] Tin-Loi F., Optimal plastic design of arches, *Computers and Structures*, **43** (4), 675–679, 1992.
- [126] Tin-Loi F., Pang J.S., Elastoplastic analysis of structures with nonlinear hardening: a nonlinear complementarity approach, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **107** (3), 299–312, 1993.
- [127] Corigliano A., Numerical Analysis of discretized elastoplastic systems using the generalized mid-point time integration, *Engineering Computations*, **11** (5), 389–411, 1994.
- [128] Bolzon G., Maier G., Novati G., Some aspects of quasibrittle fracture analysis as a linear complementarity problem, *Bazant Z.P., Bittnar Z., Jirasek M., Mazars J. (Editors): Fracture and damage in quasi-brittle structures: Experiment, modeling, and computer analysis*, E&FN Spon, 159–174, 1994.
- [129] Shen W.Q., Limit analyses of plane frames with a penalty linear programming method, *Computers and Structures*, **56** (4), 687–695, 1995.
- [130] Bolzon G., Maier G., Tin-Loi F., Holonomic and nonholonomic simulations of quasi-brittle fracture: a comparative study of mathematical programming approaches. In: *Wittmann FH (ed) Fracture mechanics of concrete structures, Proceedings FRAMCOS-2, Aedificatio Publishers, Freiburg*, 885–898, 1995.
- [131] Mróz Z., Giambanco G., An interface model for analysis of deformation behaviour of discontinuities, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **20** (1), 1–33, 1996.
- [132] Tin-Loi F., Vimonsatit V., Nonlinear analysis of semirigid frames: a parametric complementarity approach. *Engineering Structures*, **18** (2), 115–124, 1996.
- [133] Tin-Loi F., Misa J.S., Large displacement elastoplastic analysis of semirigid frames, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **39** (5), 741–762, 1996.
- [134] Comi C., Corrigano A., On uniqueness of the dynamic finite-step problem in gradient-dependent softening plasticity, *International Journal of Solids and Structures*, **33** (26), 3881–3902, 1996.
- [135] Bolzon G., Ghilotti D., Maier G., Parameter identification of the cohesive crack model. In: *Sol H., Oomens C.W.J. (Editors), Material identification using mixed numerical experimental methods. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht*, 213–222, 1997.
- [136] Bolzon G., Maier G., Tin-Loi F., On multiplicity of solutions in quasi-brittle fracture computations. *Computational Mechanics*, **19** (6), 511–516, 1997.
- [137] Liu Y.H., Carvelli V., Maier G., Integrity assessment of defective pressurized pipelines by direct simplified methods, *International Journal for Pressure Vessels and Piping*, **74** (1), 49–57, 1997
- [138] Bolzon G., Cocchetti G., On a case of crack path bifurcation in cohesive materials, *Archive of Applied Mechanics*, **68** (7), 513–523, 1998.
- [139] Bolzon G., Tin-Loi F., Physical instability and geometric effects in frames, *Engineering Structures*, **21** (7), 557–567, 1999.

- [140] Giambanco F., Elastic plastic analysis by the asymptotic pivoting method, *Computers and Structures*, **71** (2), 215–238, 1999.
- [141] Maier G., Carvelli V., Cocchetti G., On direct methods for shakedown and limit analysis, *European Journal of Mechanics A / Solids*, **19** (Special Issue), S79–S100, 2000.
- [142] Karakostas S.M., Mystakidis E.S., Evaluation of the ductility features in steel structures with softening moment-rotation behavior based on a non-convex optimization formulation, *Engineering Computations*, **17** (5), 573–592, 2000.
- [143] Maier G., Bolzon G., Tin-Loi F., Mathematical programming in engineering mechanics: some current problems. In: *Ferris M.C., Mangasarian O.L., Pang J.-S (Editors), Complementarity: Applications, Algorithms and Extensions, Kluwer Academic Publishers*, 201–231, 2001.
- [144] Tin-Loi F., Xia S.H., Holonomic softening: Models and analysis, *Mechanics of Structures and Machines*, **29** (1), 65–84, 2001.
- [145] Papadrakakis M., Lagaros N.D., Tsompanakis Y., Plevris V., Large scale structural optimization: computational methods and optimization algorithms, *Archives of Computational Methods in Engineering*, **8** (3), 239–301, 2001.
- [146] Tin-Loi F., Que N.S., Parameter identification of quasibrittle materials as a mathematical program with equilibrium constraints, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **190** (43–44), 5819–5836, 2001.
- [147] Tin-Loi F., Que N.S., Nonlinear programming approaches for an inverse problem in quasibrittle fracture, *International Journal of Mechanical Sciences*, **44** (5), 843–858, 2002.
- [148] Cocchetti G., Maier G., Shen X.P., Piecewise linear models for interfaces and mixed mode cohesive cracks. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, **3** (3), 279–298, 2002.
- [149] Zhang H., Zhang X., A combined parametric quadratic programming and precise integration method based dynamic analysis of elastic-plastic hardening/softening problems, *Acta Meccanica Sinica, (English Series)*, **18** (6), 638–647, 2002.
- [150] Cocchetti G., Maier G., Elastic-plastic and limit-state analyses of frames with softening plastic hinge models by mathematical programming, *International Journal of Solids and Structures*, **40** (25), 7219–7244, 2003.
- [151] Zhang H., Zhang X., Chen J.S., A new algorithm for numerical solution of dynamic elastic–plastic hardening and softening problems, *Computers and Structures*, **81** (17), 1739–1749, 2003.
- [152] Zhang H.W., Zhong W.X., Wu C.H., Liao A.H., Some advances and applications in quadratic programming method for numerical modeling of elastoplastic contact problems, *International Journal of Mechanical Sciences*, **48** (2), 176–189, 2006.
- [153] Tangarmvong S., Tin-Loi F., Limit analysis of strain softening steel frames under pure bending, *Journal of Constructional Steel Research*, **63** (9), 1151–1159, 2007.
- [154] Tangarmvong S., Tin-Loi F., A complementarity approach for elastoplastic analysis of strain softening frames under combined bending and axial force, *Engineering Structures*, **29** (5), 742–753, 2007.
- [155] Krabbenhøft K., Lyamin A.V., Sloan S.W., Formulation and solution of some plasticity problems as conic programs, *International Journal of Solids and Structures*, **44** (5), 1533–1549, 2007.
- [156] Tangarmvong S., Tin-Loi F., Simultaneous ultimate load and deformation analysis of strain softening frames under combined stresses, *Engineering Structures*, **30** (3), 664–674, 2008.
- [157] Ardito R., Cocchetti G., Maier G., On structural safety assessment by load factor maximization in piecewise linear plasticity, *European Journal of Mechanics A / Solids*, **27** (5), 859–881, 2008.
- [158] Pastor F., Loute E., Pastor J., Limit analysis and convex programming: a decomposition approach of the kinematic mixed method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **78** (3), 254–274, 2009.
- [159] Tangarmvong S., Tin-Loi F., Limit analysis of elastoplastic frames considering 2nd-order geometric nonlinearity and displacement constraints. *International Journal of Mechanical Sciences*, **51** (3), 179–191, 2009.

- [160] Tin-Loi F., Limit analysis by linear programming, In: Wong M.B. (Editor), *Plastic analysis and design of steel structures*, Elsevier, Amsterdam, 163–193, 2009.
- [161] Tangaramvong S., Tin-Loi F., A constrained non-linear system approach for the solution of an extended limit analysis problem, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **82** (8), 995–1021, 2009.
- [162] Tangaramvong S., Tin-Loi F., The influence of geometric effects on the behavior of strain softening frames, *Computational Mechanics*, **46** (5), 661–678, 2010.
- [163] Skordeli M.A.A., Bisbos C.D., Limit and shakedown analysis of 3D steel frames via approximate ellipsoidal yield surfaces, *Engineering Structures*, **32** (6), 1556–1567, 2010.
- [164] Mahini M.R., Moharrami H., Cocchetti G., A dissipated energy maximization approach to elastic-perfectly plastic analysis of planar frames, *Archives of Mechanics*, **65** (3), 171–194, 2013.
- [165] Wu D., Gao W., Tangaramvong S., Tin-Loi F., Robust stability analysis of structures with uncertain parameters using mathematical programming approach, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **100** (10), 720–745, 2014.
- [166] Tangaramvong S., Tin-Loi F., Topology optimization of softening structures under displacement constraints as an MPEC, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **49** (2), 299–314, 2014.
- [167] Manola M.M.S., Koumousis V., Ultimate state of plane frame structures with piecewise linear yield conditions and multi-linear behavior: A reduced complementarity approach, *Computers and Structures*, **130**, 22–33, 2014.
- [168] Moharrami H., Mahini M.R., Cocchetti G., Elastoplastic analysis of plane stress/strain structures via restricted basis linear programming, *Computers and Structures*, **146**, 1–11, 2015.
- [169] Kanno Y., A fast first-order optimization approach to elastoplastic analysis of skeletal structures, *Optimization and Engineering*, **17** (4), 861–896, 2016.
- [170] Cacho-Pérez M., 2D frames optimization. Criterion: maximum stability, *Applied Mathematical Modelling*, **46**, 591–601, 2017.
- [171] Bolzon G., Complementarity Problems in Structural Engineering: An Overview, *Archive of Computational Methods in Engineering*, **24** (1), 23–36, 2017.
- [172] Royer-Carfangi G., Buratti G., Plastic hinges as phase transitions in strain softening beams, *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, **2** (9), 1677–1699, 2007.
- [173] Martin Artieda C.C., Dargush G.F., Approximate limit load evaluation of structural frames using linear elastic analysis, *Engineering Structures*, **29**, 296–304, 2007.
- [174] Barrera O., Cocks A.C.F., Ponter A.R.S., Evaluation of the convergent properties of the linear matching method for computing the collapse of structural components, *European Journal of Mechanics A / Solids*, **28** (4), 665–667, 2009.
- [175] *Load and resistance factor design specification for structural steel buildings, 2nd Edition*. Chicago: American Institute of Steel Construction, 1993.
- [176] N. Gebbeken, *Eine Fliessgelenktheorie Höherer Ordnung für Räumliche Stabtragwerke*, Mitteilungen des Institus für Statik der Universität Hannover, Hannover, 1988.
- [177] C.D. Comartin, R.W. Niewarowski, C. Rojahn, *ATC-40 - Seismic Evaluation and Retrofit of Concrete Buildings*, Volume 1, Applied Technology Council, Seismic Safety Commission, Report N° SSC 96-01, 1996.
- [178] SAP2000, v19.2.1, User's manual, CSI Inc., 2017.
- [179] D.C. Drucker, The significance of the criterion for additional plastic deformation of metals, *Journal of Colloid Science*, **4** (3), 299–311, 1949.
- [180] E. Melan, Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums, *Ingenieur Archiv*, **9** (2), 116–126, 1938.
- [181] W. Prager, Recent developments in the mathematical theory of plasticity, *Journal of Applied Physics*, **20** (3), 235–241, 1949.
- [182] H. Ziegler, A modification of Prager's hardening rule, *Quarterly of Applied Mathematics, Brown University*, **17** (1), 55–65, 1959.

- [183] D.C. Drucker, Some implications of work hardening and ideal plasticity, *Quarterly of Applied Mathematics, Brown University*, **7** (4), 411–418, 1950.
- [184] D.C. Drucker, On uniqueness in the theory of plasticity, *Technical Report N^o. 116 (A11-116), Division of Applied Mathematics, Brown University*, 1955.
- [185] D.C. Drucker, A definition of stable inelastic material, *Technical Report No. 2 (Nonr-562(20)/2)), Division of Engineering, Brown University*, 1957.
- [186] D. Capecchi, *History of Virtual Work Laws: A History of Mechanics Prospective*, Springer-Verlag, Italy, 2012.
- [187] G.A. Wempner, Discrete approximations related to nonlinear theories of solids, *International Journal of Solids & Structures*, **7**, 1581–1599, 1971.
- [188] E. Riks, An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems, *International Journal of Solids & Structures*, **15**, 529–551, 1979.
- [189] M.A. Crisfield, An arc-length method including line searches and accelerations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **19**, 1269–1289, 1983.
- [190] J. Heyman, *Elements of the Theory of Structures*, Cambridge University Press, 1996.
- [191] S. Krenk, S. Vissing, C. Vissing-Jørgensen, A finite step updating method for the elastoplastic analysis of frames, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, **119** (12), 2478–2495, 1993.
- [192] E. Yarimci, *Incremental inelastic analysis of framed structures and some experimental verifications*, Technical Report N^o 273.45, Fritz Engineering Laboratory, Dept. Civil Engineering, Lehigh University, Pennsylvania, 1966.
- [193] Toma, S., Chen, W.-F., White, D.W., A selection of calibration frames in North America for second-order inelastic analysis, *Engineering Structures*, **17** (2), 104–112, 1995.
- [194] The MOSEK C Optimizer API Manual, Version 7.1 (Revision 49), MOSEK ApS, Copenhagen, Denmark.
- [195] <https://el.wikipedia.org/wiki/Τζεντάι>.
- [196] [https://el.wikipedia.org/wiki/Δύναμη_\(Πόλεμος_των_Αστρων\)](https://el.wikipedia.org/wiki/Δύναμη_(Πόλεμος_των_Αστρων))

(Αυτή η σελίδα αφέθηκε επιτηδευμένα κενή)

Πρωτότυπες αριθμητικές διαδικασίες μαθηματικού προγραμματισμού για την ανελαστική ανάλυση τρισδιάστατων πλαισιωτών σχηματισμών με τη μέθοδο των δυνάμεων.

