Universidad Autónoma del Estado de México
Centro Universitario UAEM Valle de México

Carrera: Ingeniería en Sistemas y Comunicaciones

Unidad de Aprendizaje

Lógica Matemática

Unidad de Competencia

1. Introducción a la Lógica Matemática

Profesor: Saturnino Job Morales Escobar

Elaboración: Septiembre de 2019

Programa de Estudios por Competencias
LÓGICA MATEMÁTICA

I. IDENTIFICACIÓN DEL CURSO

<table>
<tr><td colspan="9">ORGANISMO ACADÉMICO: CENTRO UNIVERSITARIO UAEM VALLE DE MÉXICO</td></tr>
<tr><td colspan="4">Programa Educativo:
INGENIERIA EN SISTEMAS Y COMUNICACIONES</td><td colspan="5">Área de docencia: Ciencias Básicas y Matemáticas</td></tr>
<tr><td colspan="2">Aprobación por los H.H. Consejos Académico y de Gobierno</td><td colspan="2">Fecha de aprobación de actualización:
23/08/2019</td><td colspan="2">Programa elaborado por:
Saturnino Job Morales Escobar.</td><td>Actualizado por:
Maricela Quintana López, Saturnino Job Morales Escobar</td><td colspan="2">Fecha de elaboración:
25 de marzo de 2005.
Fecha de actualización:
agosto de 2019.</td></tr>
<tr><td>Clave</td><td>Horas de teoría</td><td>Horas de práctica</td><td>Total de horas</td><td>Créditos</td><td>Tipo de Unidad de Aprendizaje</td><td>Carácter de la Unidad de Aprendizaje</td><td>Núcleo de formación</td><td>Modalidad</td></tr>
<tr><td>L32279</td><td>3</td><td>1</td><td>4</td><td>7</td><td>Curso</td><td>Obligatoria</td><td>Sustantivo</td><td>Presencial</td></tr>
<tr><td colspan="5">Prerrequisitos (Conocimientos Previos):
Teoría de Conjuntos, Funciones, Relaciones, Álgebra.</td><td colspan="2">Unidad de Aprendizaje Antecedente
No aplica</td><td colspan="2">Unidad de Aprendizaje Consecuente
No aplica</td></tr>
<tr><td colspan="9">Programas educativos en los que se imparte:
Ingeniería en Sistemas y Comunicaciones</td></tr>
</table>

MAPA CURRICULAR DE LA LICENCIATURA EN INGENIERÍA EN SISTEMAS Y COMUNICACIONES 2004

CRÉDITOS TOTALES: 414

CIENCIAS BÁSICAS Y MATEMÁTICAS

- ALGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA 3 3 9
- ALGEBRA LINEAL 2 2 6
- ECUACIONES DIFERENCIALES 3 1 7
- CÁLCULO VECTORIAL 3 1 7
- ESTÁTICA Y DINÁMICA 3 3 9
- CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 3 1 7
- LÓGICA MATEMÁTICA 3 1 7
- ELECTROMAGNETISMO 2 2 6
- QUÍMICA 2 2 6
- MATEMÁTICAS DISCRETAS 3 1 7
- MÉTODOS NUMÉRICOS 4 2 10
- PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA PARA INGENIEROS 4 2 10

CIENCIAS DE LA INGENIERÍA

- INTRODUCCIÓN A LA INGENIERÍA 2 4 8
- FUNDAMENTOS DE PROGRAMACIÓN 3 3 9
- FUNDAMENTOS DE BASES DE DATOS 3 1 7
- SISTEMAS OPERATIVOS 4 2 10
- LENGUAJES FORMALES Y AUTÓMATAS 2 2 6
- ELECTRÓNICA ANALÓGICA 4 2 10
- COMUNICACIÓN POR MEDIOS ÓPTICOS 2 2 6
- TEMAS SELECTOS DE SISTEMAS 3 1 7
- LENGUAJES DE BAJO NIVEL 2 4 8
- ALGORITMOS Y ESTRUCTURAS DE DATOS 2 4 8
- BASES DE DATOS 2 4 8
- PROGRAMACIÓN ORIENTADA A OBJETOS 2 4 8
- INGENIERÍA DE SOFTWARE 2 4 8
- COMUNICACIÓN VÍA MICROONDAS Y SATELITAL 2 2 6
- SISTEMAS ELECTRÓNICOS DE COMUNICACIÓN 2 2 6
- CIRCUITOS ELÉCTRICOS 2 2 6
- SISTEMAS DE INFORMACIÓN 2 4 8
- PROGRAMACIÓN AVANZADA 2 2 6
- COMPILADORES 2 2 6
- INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES 2 4 8
- ADMINISTRACIÓN DE BASES DE DATOS 2 2 6
- TEORÍA DEL CONTROL * 2 2 6
- GRAFICACIÓN 2 2 6
- SISTEMAS OPERATIVOS PARA RED 4 2 10
- CALIDAD DEL SOFTWARE 2 2 6

INGENIERÍA APLICADA

- INTRODUCCIÓN A LA COMPUTACIÓN 2 4 8
- ARQUITECTURA DE COMPUTADORAS 2 4 8
- REDES 4 2 10
- PROTOCOLOS DE COMUNICACIÓN DE DATOS 3 3 9
- DESARROLLO DE PROYECTOS 2 2 6
- FORMULACIÓN Y EVALUACIÓN DE PROYECTOS 3 3 9
- RESIDENCIA PROFESIONAL 0 30 30
- SEMINARIO DE TITULACIÓN * 2 2 6
- INTELIGENCIA ARTIFICIAL * 2 2 6
- SISTEMAS DIGITALES 2 4 8
- SISTEMAS DISTRIBUIDOS 2 2 6
- SISTEMAS DE TIEMPO REAL 2 2 6
- INTERCONEXIÓN Y SEGURIDAD EN REDES 2 2 6
- TRANSMISIÓN Y COMUNICACIÓN DE DATOS 2 2 6
- SISTEMAS EXPERTOS 2 2 6
- SISTEMAS DE INSTRUMENTACIÓN Y CONTROL 2 2 6
- TALLER DE INVESTIGACIÓN 2 2 6

CIENCIAS SOCIALES Y HUMANIDADES

- ADMINISTRACIÓN 3 1 7
- CONTABILIDAD 3 1 7
- ECOLOGÍA, ÉTICA Y NORMATIVIDAD 3 1 7
- INGLÉS C1 2 2 6
- INGLÉS C2 2 2 6
- PSICOLOGÍA ORGANIZACIONAL 2 2 6
- PLANEACIÓN ESTRATÉGICA 2 2 6
- METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN 2 2 6
- CIENCIA Y HUMANISMO
- PROBLEMAS SOCIOECONÓMICOS DE MEXICO 3 1 7
- TÉCNICAS DE COMUNICACIÓN 3 1 7
- ADMINISTRACIÓN DE CENTROS DE CÓMPUTO 2 2 6
- AUDITORIA Y SEGURIDAD INFORMÁTICA 2 2 6

Estructura de la Unidad de Aprendizaje

1. Introducción a la Lógica Matemática
2. Lógica Proposicional
3. Lógica de Predicados
4. Programación Lógica

La presentación incluye material para los siguientes temas

1.1. Teoría de conjuntos

1.2. Funciones

1.3 Relaciones

EVALUACIÓN DE LA UNIDAD DE COMPETENCIA

Examen	*50%*
Ejercicios	*50%*

Teoría de Conjuntos

La teoría de conjuntos, se edifica sólidamente sobre axiomas mediante las leyes de la lógica.

La teoría de conjuntos tiene esencialmente dos actividades: comparar conjuntos y construir nuevos conjuntos a partir de unos dados.

Conceptos primarios

1. Conjunto
2. Elemento
3. Pertenencia

https://www.google.com/search?q=conjuntos&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwifxqOR1_nkAhURVa0KHQyQBjAQ_AUIEigB&biw=1920&bih=969#imgrc=CaWj4jVruYgnpM:

Los cuales no se definen, se determinan.

DETERMINACIÓN DE CONJUNTOS

Por extensión: proporcionando un listado de los elementos del conjunto.

Por ejemplo A= {2, 4, 6 ,8 ,10}

Por intención: indicando la propiedad que deben cumplir los elementos del conjunto.

Por ejemplo B= {x | x es un entero positivo par}

PERTENENCIA

- **Cuando se tiene el listado de todos los elementos componentes del conjunto:**

  Se comprueba si el elemento aparece en el mismo.

- **Cuando se conoce la propiedad que lo caracteriza:**

  Se verifica si la cumple o no.

Ser elemento de (relación de pertenencia), es una relación binaria entre dos objetos de la Teoría de Conjuntos.

Para indicar que a es un elemento del conjunto A, se denota $a \in A$ y se lee como a pertenece a A.

Cuando no lo es, se escribe $a \notin A$.

Esta notación permitirá determinar C= {2, 4, 6, 8}

como $C = \{x \mid x \in A \text{ y } x<10\}$ o $C = \{x \in A \mid x<10\}$

Axiomas

- ***Axioma (De existencia). Existe un conjunto.***
- ***Axioma (De igualdad). Dos conjuntos son iguales si, y solo si, contienen los mismos elementos.***
- ***De manera simbólica:***

$$A = B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

Ejemplo. Es claro que $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}$ ya que los dos conjuntos tienen exactamente los mismos elementos. Mas aún, también se cumple $\{a, a\} = \{a\}$ por la misma razón.

Cuando un conjunto esta contenido en otro y lo llamamos subconjunto.

Ejemplo. Un conjunto B es subconjunto de otro conjunto A, y se denota $B \subset A$, si todo elemento de B es elemento de A. Es decir:

$$B \subset A \Leftrightarrow \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$$

La igualdad es una doble inclusión

Dos conjuntos son iguales si, y solo si, cada uno es subconjunto del otro, o bien:

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A).$$

El conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto.

Axioma (De la unión).Dada una familia de conjuntos F, la unión de la familia F es el conjunto formado exactamente por los elementos de los conjuntos que están en F.

$$E = \{x \mid \exists A \in F, x \in A\}.$$

Ejemplo. Sean los conjuntos X = {1, 2, 3} e Y = {3, 4, 5} y con ellos la familia F = {X, Y}. Entonces la unión de F es el conjunto E = {1, 2, 3, 4, 5}.

El conjunto vacío es un conjunto que carece de elementos.

Se suele llamar conjunto nulo y se le denota por el símbolo Ø o { }.

Axioma (Del conjunto potencia). Dado un conjunto A, existe el conjunto cuyos elementos son los subconjuntos de A, llamado conjunto potencia y denotado P(A).

Ejemplo. El conjunto potencia de A = {1, 2, 3} es

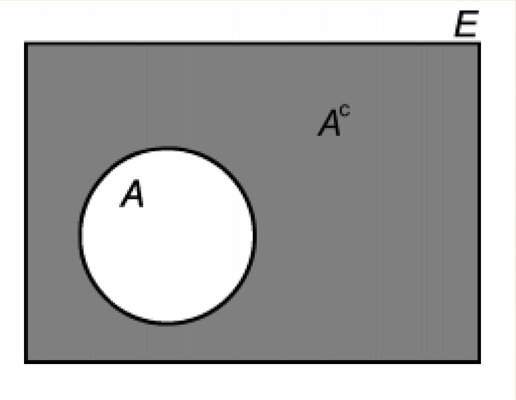
P(A) = {Ø, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {2, 3}, {3, 1}, {1, 2, 3}}.

Si A tiene n elementos, entonces P(A) tiene 2^n elementos.

Complemento

- ***El complemento de un subconjunto A del conjunto E es el conjunto de todos los elementos de E que no están en A.***
- ***Se denota A^c y se describe como***

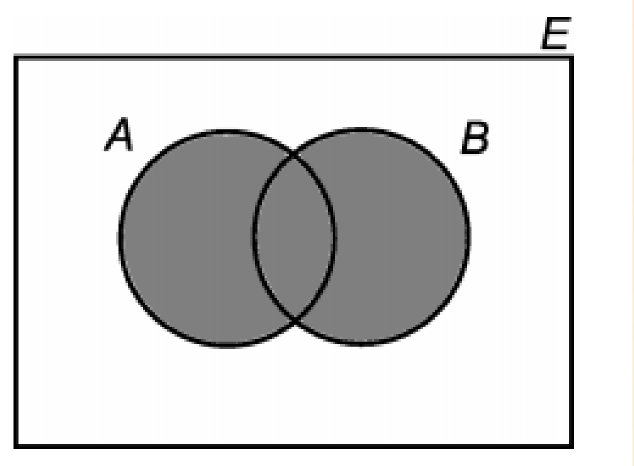
  $$A^c = \{x \in E \mid x \notin A\}$$



- Ejemplo. En el conjunto E = {1, 2, 3, 4, 5}, el complemento del conjunto A = {1, 2} es A^c = {3, 4, 5}.

Unión

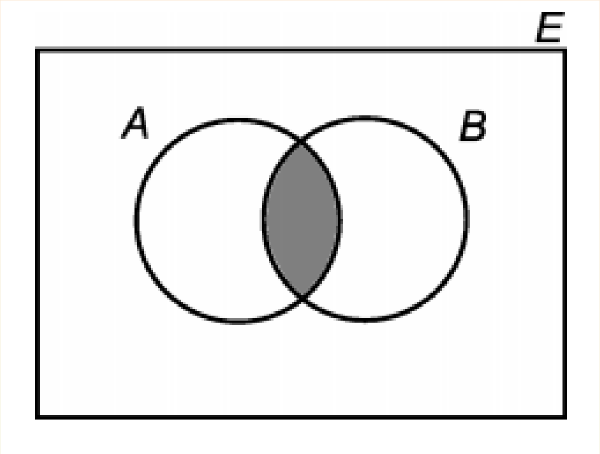
- ***La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos que están en A o están en B. Se denota A ∪ B.***
- $A \cup B = \{x \in E \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$



- Ejemplo. Dados los conjuntos A = {1, 2} y B = {2, 3} tenemos A ∪ B = {1, 2, 3}

Intersección

- ***La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos que están en A y están en B. Se denota A ∩ B. A ∩ B = {x ∈ E |(x ∈ A) ∧ (x ∈ B)}.***

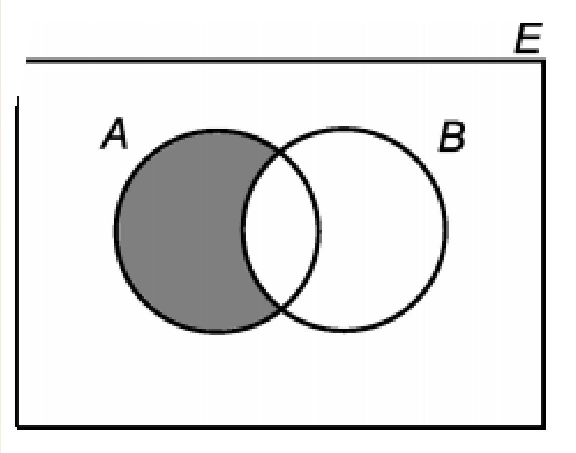


- Ejemplo. Dados los conjuntos A = {1, 2} y B = {2, 3} tenemos A ∩ B = {2}.

Diferencia

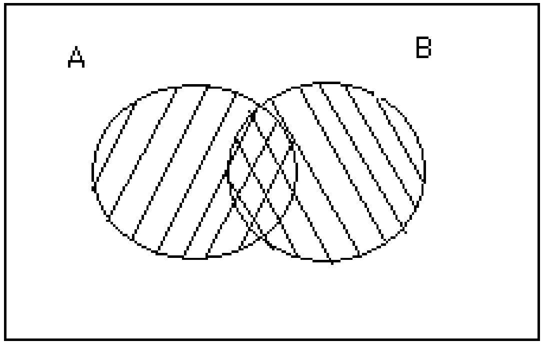
- ***La diferencia del conjunto A con el conjunto B es el conjunto formado por los elementos que están en A pero no en B. Se denota A\B.***

$$A \setminus B = \{x \in E \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$



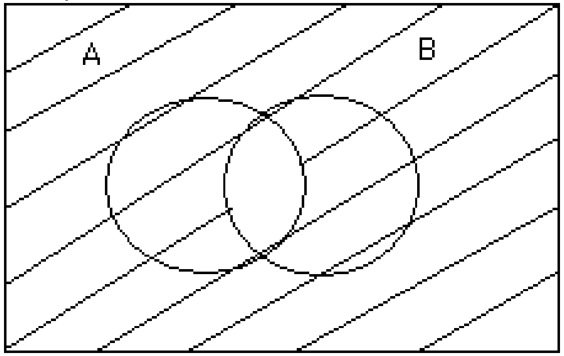
Ejemplo. Las diferencias de los conjuntos A = {1, 2} y B = {2, 3} son A \ B = {1}, B \ A = {3}.

Representación gráfica



(A U B)' están sin sombreado, A – B con sombreado en una dirección,

B – A en la otra dirección y A ∩ B en ambas direcciones respectivamente.



El conjunto (A ∩ B)'.

Segunda identidad de De Morgan.

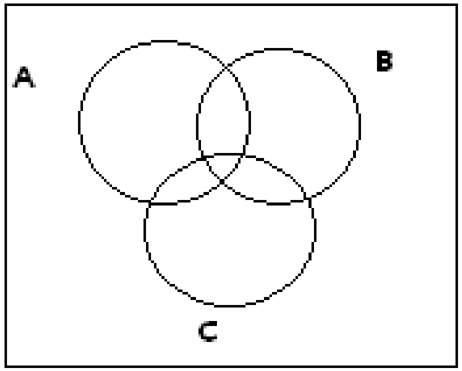
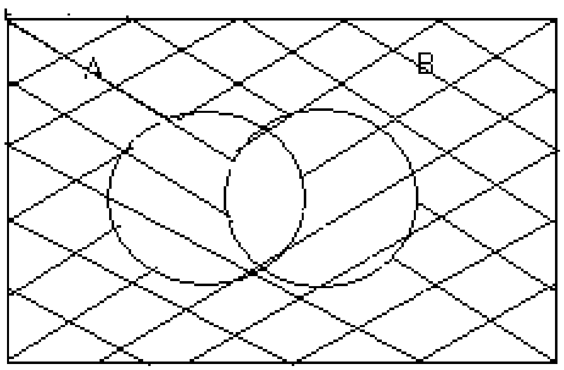


Diagrama de Venn de tres conjuntos



A^c y B^c, sombreados de maneras distintas.

A U (B – A)= A U (B ∩ A^c)   (por definición de la operación)

= (A U B) ∩ (A U A^c)

= (A U B) ∩ U

= A U B

A U B U C = { x | x ∈ A o x ∈ B o X ∈ C}

= { x | x es un elemento de por lo menos uno de los conjuntos A, B y C}

De manera general, si $A_1, A_2, \ldots$ son conjuntos, es posible escribir:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

- ***Para indicar el conjunto $\{ x \mid x \in A_i$ al menos para una i con $1 <= i <= n\}$; y***

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ al menos para una } i >= 1 \}$$

Mediante el uso de la ley asociativa de la intersección es posible escribir:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ para para toda } i \text{ con } 1 <= i <= n\}$$

Y así sucesivamente. En forma todavía más general, si P(i) es una condición relacionada con i,

$$\bigcup_{P(i)} A_i$$

Indica el conjunto {x | x $\in A_i$ al menos para una i que satisface P(i)}.

Ejemplo:

$$\bigcup_{p \in \delta^*(q, x)} \delta(p, a)$$

- Así

$$\bigcup_{p \in \delta^*(q, x)} \delta(p, a) = \{ x \mid x \in \delta(p, a) \text{ al menos para un } p \text{ de } \delta^*(q, x)\}$$

En particular, si $\delta^*(q, x) = \{r, s, t\}$, con esta fórmula se tendrá:

$$\delta(r, a) \cup \delta(s, a) \cup \delta(t, a).$$

Los elementos de un conjunto también pueden ser conjuntos, recordar que para cualquier conjunto A, el conjunto de todos los subconjuntos de A se llama conjunto potencia de A y se denota con 2^A.

Producto cartesiano

Sean A y B conjuntos cualesquiera, se puede construir un nuevo conjunto, llamado producto cartesiano de A y B, denotado como A ×B y se lee " A por B". Es el conjunto de pares ordenados expresado por

$$A \times B = \{ (a, b) | \; a \in A \text{ y } b \in B\}$$

Ordenado significa que el par (a , b) difiere del par (b, a), salvo que a y b sean el mismo.

- ***Si A tiene n elementos y B tiene m elementos, entonces el conjunto $A \times B$ tiene exactamente $n*m$ elementos.***

Por ejemplo:

$\{a, b\} \times \{b, c, d\} = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d)\}$

- ***En general, el conjunto de todas las "n-tuplas ordenadas $(a_1, a_2, \ldots a_n)$, donde:***

$a_i \in A_i$ para cada i, se denota como $A_1 \times A_2 \times \ldots A_n$.

Funciones

Las funciones son herramientas para asignar a cada elemento de un conjunto.

Una función f del conjunto A al conjunto B es un subconjunto del producto cartesiano A×B en el que no hay dos parejas que tengan el mismo primer elemento.

- Ejemplo. Sea $A = \{a, b, c\}$ y consideremos los subconjuntos de $A \times A$, $f = \{(a, a),(b, b),(b, c)\}$, $g = \{(a, b),(b, c),(c, a)\}$, $h = \{(a, a),(b, a)\}$. Los tres conjuntos son relaciones en A, pero f no es una función porque el elemento b aparece como primer elemento en dos parejas. Sin embargo, g y h sí son funciones.

Sea A y B conjuntos. Una función f de A en B es una asignación de exactamente un elemento de B a cada elemento de A. Se escribe f(a)= b, si b es el único elemento de B asignado por la función al elemento a de A.

Si f es una función de A en B, escribimos

$$f : A \rightarrow B.$$

Si f es una función de A en B.

Decimos que A es el dominio de f y B es el codominio de f.

Si f (a) = b, decimos que b es la imagen de a y a es una preimagen de b.

El rango o imagen de f es el conjunto de todas las imágenes de elementos de A.

También decimos, si f es una función de A en B, que f transforma A en B.

Funciones

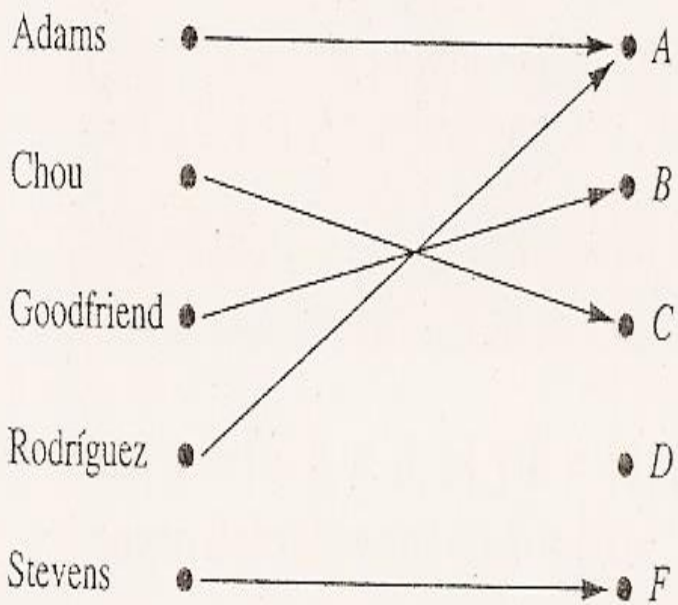


Figura 1. Asignación de letras a un conjunto de personas.

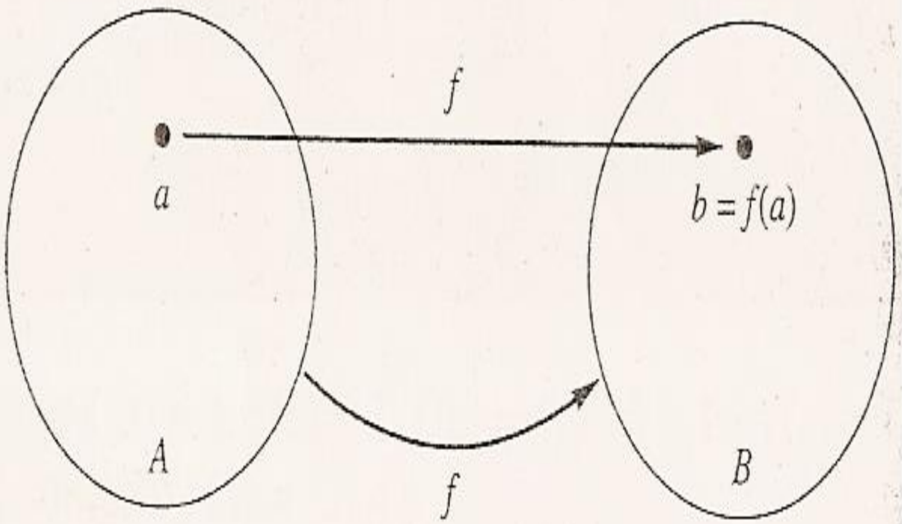


Figura 2. La función f transforma A en B.

Sean f_1 y f_2 funciones de A y R. Entonces $f_1 + f_2$ y $f_1\, f_2$ son también funciones de A en R definidas por:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x).$$

$$(f_1\, f_2)(x) = f_1(x)\, f_2(x).$$

Sea f una función de un conjunto A en un conjunto B y sea S un subconjunto de A

- ***La imagen de S es el subconjunto de B formado por todas las imágenes de los elementos de S.***
- ***Denotamos por f(S) a la imagen de S, de tal forma que***

  $f(S) = \{ f(s) | s \in S \}$.

Funciones Inyectivas y Sobreyectivas

- Se dice que una función es inyectiva si, y sólo si,

  $f(x) = f(y)$ implica que $x = y$ para x e y en el dominio de f. Una función se dice que es una inyección si es inyectiva.

- Una función f cuyo dominio y codominio son subconjuntos del conjunto de los números reales se denomina estrictamente creciente si $f(x) < f(y)$ siempre que $x < y$, y x e y estén en el dominio de f.

- De forma similar, f se dice que es estrictamente decreciente si $f(x) > f(y)$ siempre que $x < y$, y x e y estén en el dominio de f.

- ***Una función f de A a B es sobreyectiva, o sobre, si, y sólo si, para todo elemento b ϵ B hay un elemento a ϵ A tal que***

  $$f(a) = b.$$

  - ***Una función f es una sobreyección si es sobreyectiva.***

- ***La función f es una biyección o función biyectiva si es tanto inyectiva como sobreyectiva.***

Funciones Inyectivas y Sobreyectivas

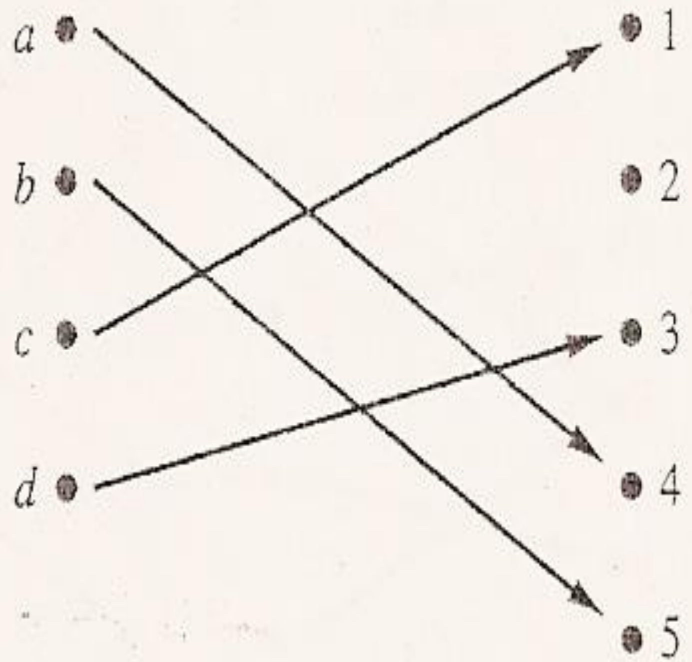


Figura 3. Una función inyectiva.

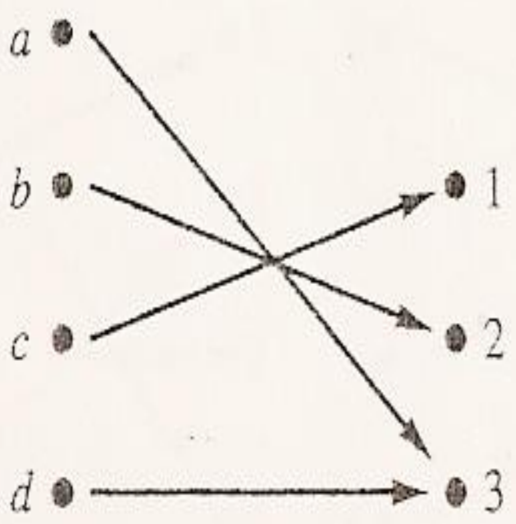


Figura 4. Una función sobreyectiva.

Funciones Inyectivas y Sobreyectivas

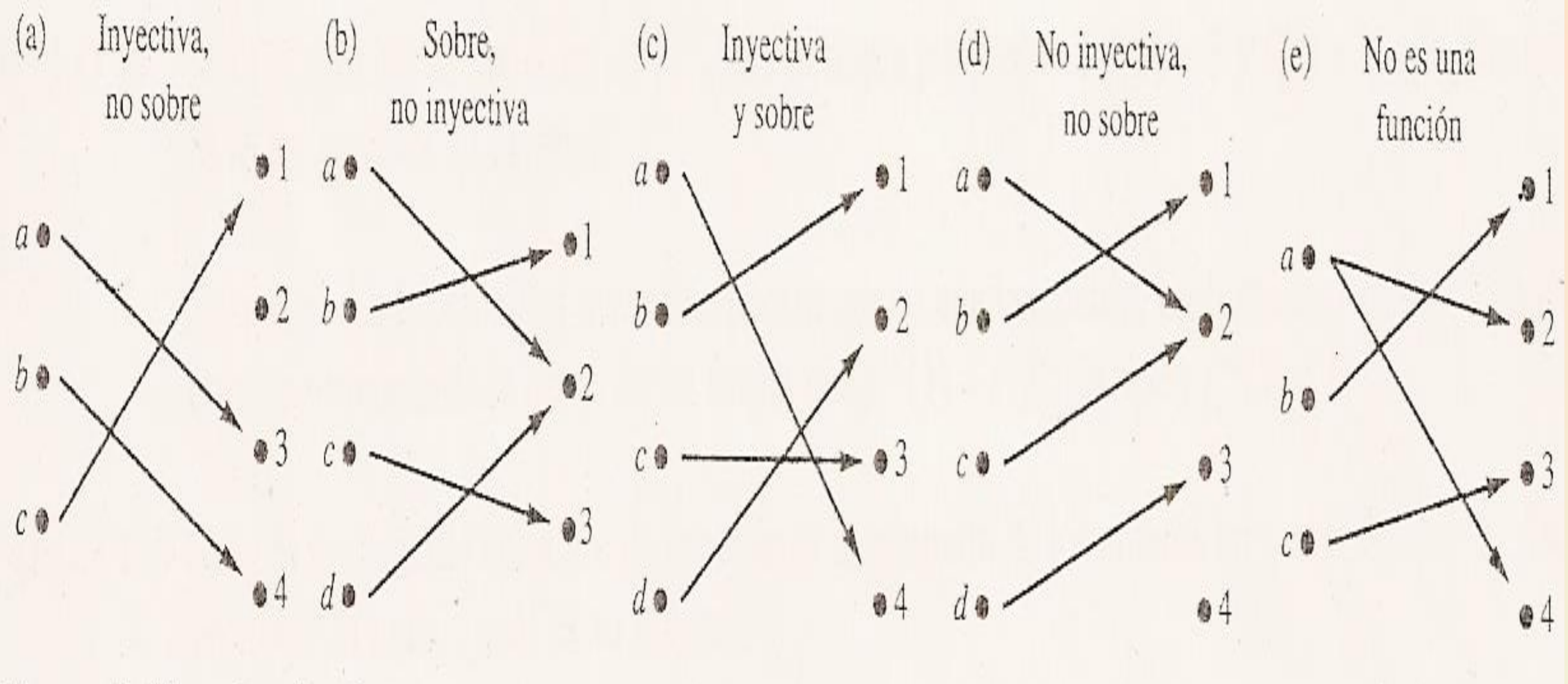


Figura 5. Ejemplos de diferentes tipos de correspondencias.

Gráfica de una Función

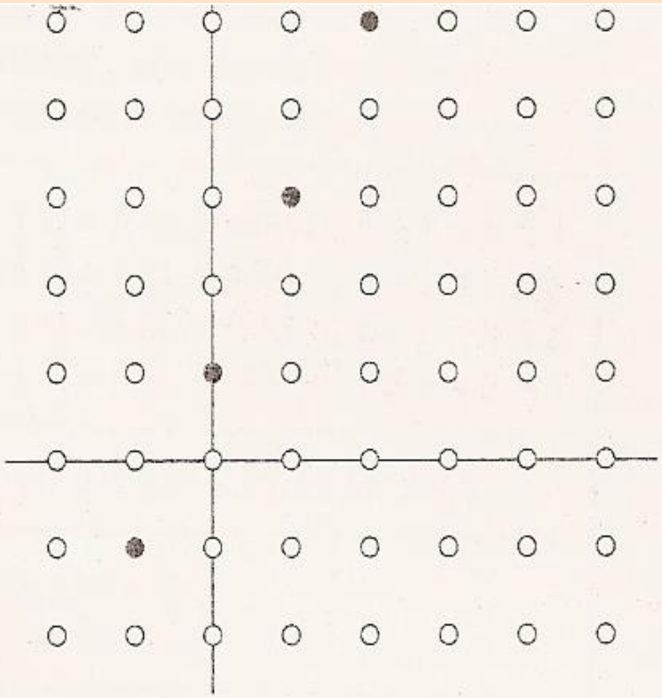


Figura 8. Gráfica de la función $f(n) = 2n + 1$ de **Z** en **Z**.

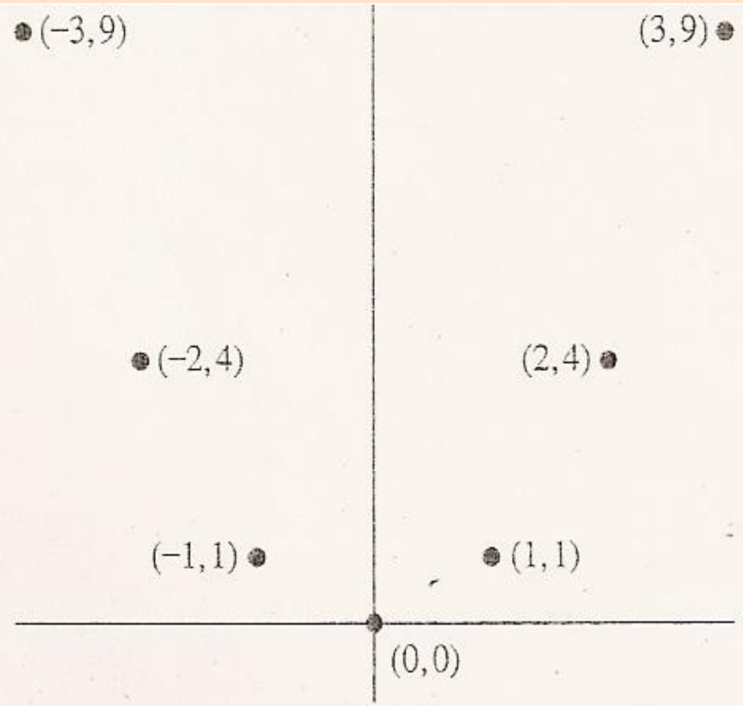


Figura 9. Gráfica de la función $f(x) = x^2$ de **Z** en **Z**.

Gráfica de una Función

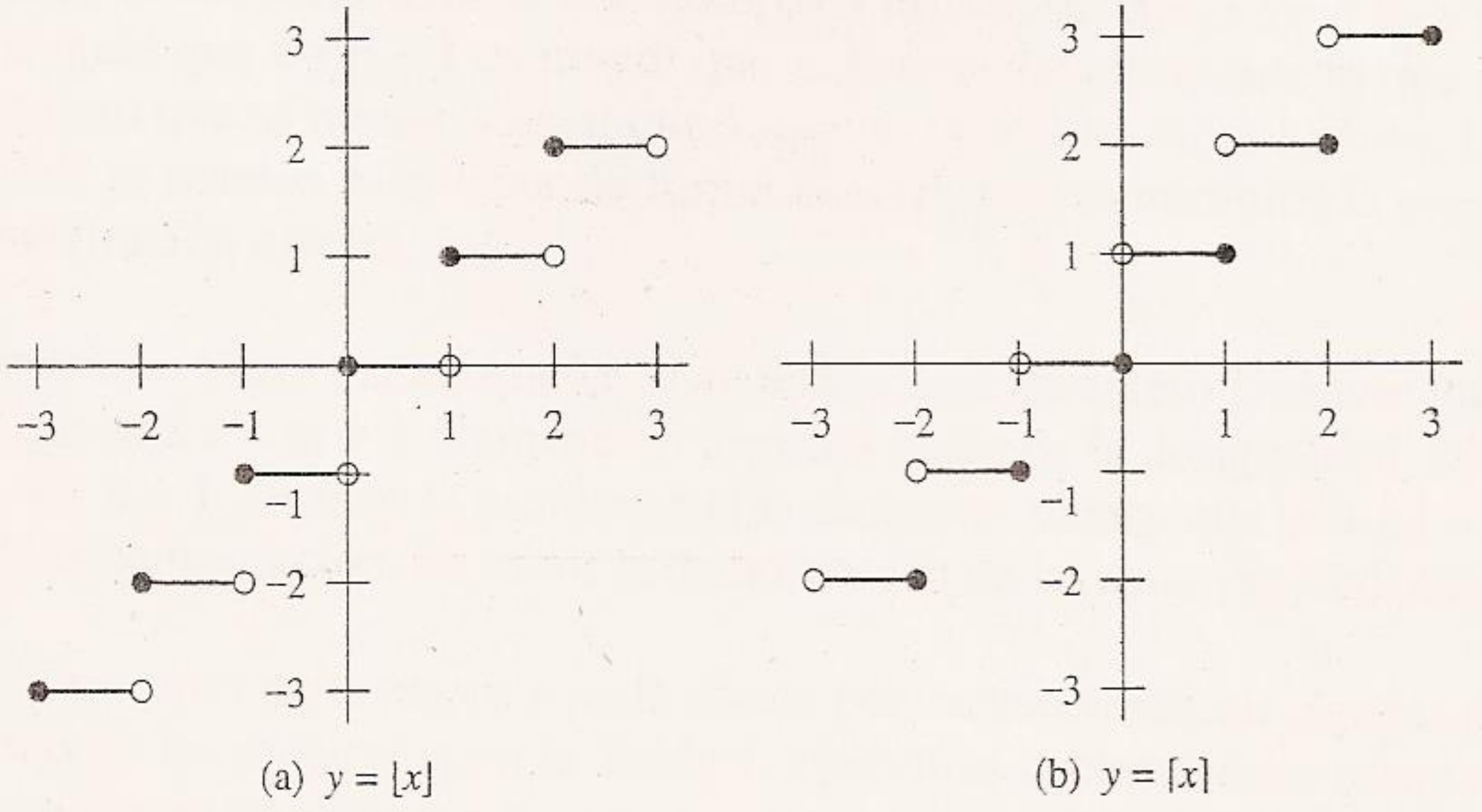
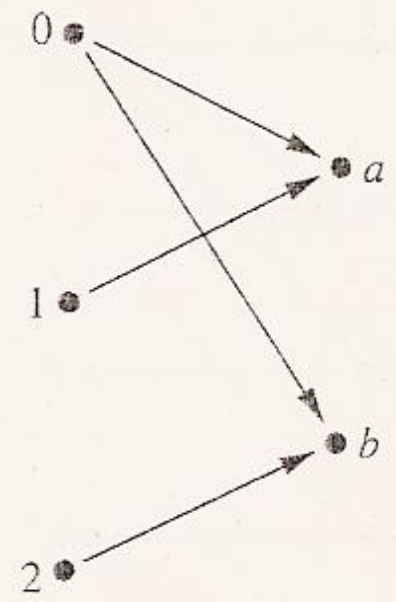


Figura 10. Gráficas de las funciones (a) parte entera y (b) parte entera por exceso.

Relaciones

Sean $\boldsymbol{A}$ *y* $\boldsymbol{B}$ *dos conjuntos. Una relación binaria de* $\boldsymbol{A}$ *en* $\boldsymbol{B}$ *es un subconjunto de* $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$.

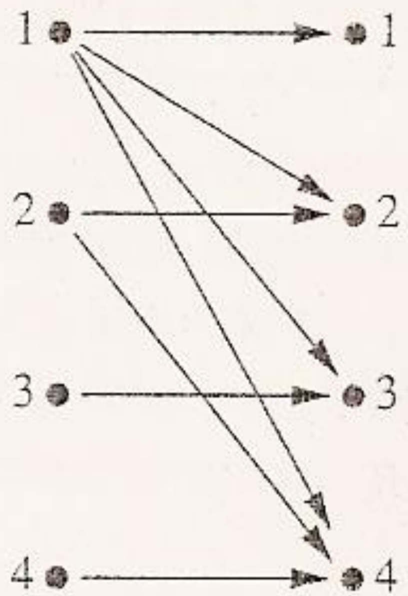


R	a	b
0	×	×
1	×	
2		×

Figura 1. Pares ordenados en la relación R del Ejemplo 3.

Relaciones en un conjunto

Una relación *en un conjunto* ***A*** *es una relación de* ***A*** *en* ***A****.*



R	1	2	3	4
1	×	×	×	×
2		×		×
3			×	
4				×

Figura 2. Pares ordenados en la relación R del Ejemplo 4.

Propiedades de las relaciones

*Se dice que una relación **R** en un conjunto **A** es **reflexiva** si(a, a) ϵ R para cada elemento a ϵ **A**.*

*Una relación **R** en un conjunto **A** es **simétrica** si para cualesquiera **a**, **b ϵ A** se tiene que (**b**, **a**) **ϵ R** siempre que (**a**, **b**) **ϵ R**.*

*Una relación **R** en un conjunto **A** es **antisimétrica** si para cualesquiera **a**, **b ϵ A** se tiene que (**a**, **b**) **ϵ R** y (**b**, **a**) **ϵ R** sólo si **a = b**.*

*Se dice que una relación **R** en un conjunto **A** es transitiva si para cualesquiera **a**, **b**, **c** ϵ **A** tales que (**a**, **b**) ϵ **R** y (**b**, **c**) ϵ **R** se tiene que (**a**, **c**) ϵ **R**.*

NOTA: *Con este tema se concluye la presentación de los conceptos básicos sobre conjuntos, funciones y relaciones.*

Bibliografía

- ***Kenneth H. Rosen (204). Matemática Discreta y sus aplicaciones, Ed. Mc Graw Hill***
- ***Patrick Suppes(1998). Introducción a la Lógica Matemática. Editorial Reverte,S.A***
- ***Eliot Mendelson(2015).Introduction to mathematical logic. D Van Nostrand Company.***
- ***Pascual Julian Irazno,Maria Al Puente(2007) Programación lógica: teoría y práctica.Pearson.***

Bibliografía

Complementaria

- ***Allen Tucker, Robert Noonan (2011). Lenguajes de programación principios y paradigmas. Spanish Edition.***
- ***R. Korfhage (1990). Lógica y algoritmos, con aplicaciones a las ciencias de la computación e información. Limusa.***

Guión Explicativo

- ***Este material está desarrollado como apoyo al curso presencial de la unidad de competencia Introducción a la Lógica Matemática de la UDA "Lógica Matemática", correspondiente a la carrera de Ingeniería en Sistemas y Comunicaciones.***

- ***Esta unidad de competencia introduce conceptos básico que se requieren en todos los temas que conforman la unidad de aprendizaje.***

- ***Se recomienda estudiar el tema antes de la sesión presencial.***

Guión Explicativo

- ***Se recomienda seguir la secuencia en la que se presenta el material para mayor comprensión de los temas.***

- ***Los temas se pueden consultar en extenso en las referencias proporcionadas en la bibliografía.***

- ***Se recomienda realizar ejercicios adicionales para complementar lo visto en clase y el material presentado.***