**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO**

**FACULTAD DE ECONOMÍA**

# CUADERNO DE EJERCICIOS
# EL PROCESO DE OPTIMIZACIÓN EN LA ECONOMÍA

**UNIDAD DE APRENDIZAJE**
**FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS 2**
**LICENCIATURA EN NEGOCIOS INTERNACIONALES BILINGÜE**

**AUTOR**
**JUVENAL ROJAS MERCED**

**TOLUCA, MÉXICO, SEPTIEMBRE DE 2019**

# CONTENIDO

# PRESENTACIÓN

El orden económico internacional sigue basado en la economía de mercado, por lo cual ha llegado a ser considerado como la forma de mayor eficiencia en cuanto a la asignación de los recursos, elemento escaso, entre la sociedad. Uno de los elementos de mayor importancia, y el cual es fundamental para la generación de los modelos necesarios para realizar dicha asignación de los recursos es la teoría.

En éste caso, la teoría predominante en los modelos económicos es la neoclásica. Teoría que tiene como base primordial a los modelos de optimización. A través de los cuales y mediante la utilización de elementos formalizados de la economía, específicamente microeconomía, se buscan encontrar soluciones óptimas a un problema de maximización o asignación de bienes o factores.

Dependiendo del agente económico será la forma de abordar dicho problema. Lo cierto es que derivado de la importancia que guarda el comportamiento de la empresa o del consumidor, se debe conocer, comprender y utilizar los conceptos y principios que se relacionan con la teoría microeconómica, la cual se encuentra integrada por una serie de hipótesis y/o supuestos con los cuales se pretende explicar aspectos de la realidad económica, tanto en la conducta del consumidor como del productor. Y que los conocimientos y herramientas básicas que se requieren para contar con una mayor y mejor comprensión, provienen de las matemáticas, específicamente del cálculo diferencial.

Es por ello que el programa de Fundamentos de matemáticas 2, es parte trascendente del Plan de estudios de la licenciatura en negocios internacionales bilingüe, el cual se imparte en la Facultad de Economía de la Universidad Autónoma del Estado de México.

La unidad de aprendizaje, tiene como propósito Conocer y emplear funciones de una o más variables, analizando conceptos y métodos del cálculo diferencial e integral para realizar aplicaciones para microeconomía, macroeconomía y negocios. Emplear modelos matemáticos de optimización para la resolución de problemas relacionados con la administración y la economía. Dentro está última es en donde se insertan los modelos optimización.

El propósito de este cuaderno de ejercicios es proporcionar un material didáctico práctico que se adapte a las diversas necesidades de los estudiantes de esta unidad de aprendizaje. En la actualidad existe una gran escasez de manuales y libros que incluyan ejercicios o problemas resueltos. La experiencia docente indica que los conocimientos y contenidos teóricos se asimilan mucho mejor si su estudio va acompañado de ejercicios prácticos.

La selección de los diversos ejercicios y/o problemas corresponden con el contenido de la unidad de aprendizaje, buscando en todo momento el facilitar la comprensión tanto teórica como práctica de los contenidos de cada una de las unidades que constituyen el programa correspondiente.

Por su contenido puede servir de complemento de cualquiera de los manuales o libros utilizados como bibliografía dentro del curso.

El cuaderno presenta una serie de ejercicios que se resuelven utilizando tanto instrumental analítico como gráfico. El nivel de formalización matemática corresponde con el del alumno que conoce y maneja, con cierta facilidad, las técnicas básicas de optimización, tratando en todo momento realizar la explicación en forma detallada, lo cual busca facilitar el seguimiento del alumno.

Lo anterior debido a que se considera que la resolución de ejercicios constituye una parte sumamente importante en enseñanza del análisis microeconómico y de la economía industrial.

# EJERCICIO DEMOSTRATIVO

La forma en cómo se propone se vaya desarrollando o resolviendo los ejercicios y/o problemas es de tal que se vaya desarrollando, sino paso por paso, sin los pasos necesarios buscando con ello se facilite la comprensión por parte del alumno.

Así, se recomienda sea de la siguiente forma:

**Supongamos que la compañía *XYZ* es el proveedor monopolista de «hyperflex». El departamento de marketing ha determinado que la demanda de hyperflex es**

$$P = 300 - 2Q$$

**XYZ tiene dos centros de producción. El gerente de la planta 1 ha encontrado que su planta puede producir según la curva total lineal**

$$CT_1 = 4Q_1$$

**La planta 2, en cambio, tiene una curva de costo total de**

$$CT_2 = 0.05(Q_2)^2$$

**Halle el producto que maximiza el beneficio de la empresa y la responsabilidad productiva de cada planta. Halle también el beneficio total de la empresa.**

---

Para obtener el nivel de producción que maximiza el beneficio, debemos sumar las curvas de costo marginal de las dos plantas para hallar la curva de costo marginal de la empresa. La curva de costo marginal de la planta 1 es horizontal a una ordenada de 4. La curva de costo marginal de la planta 2 se halla derivando $CT_2$ con respecto a $Q_2$:
$CMg = 0.1OQ_2$
Está claro que es más barato producir la primera unidad de producto en la planta 2 por $0.5 que producir una unidad en la planta 1 por $4. El costo incremental de la segunda unidad de producto es $0.2, que es más bajo que el de la planta 1. Esta relación se mantiene hasta que la empresa produce 40 unidades de producto en la planta 2, punto a partir del cual la producción se traslada a la planta 1. La aritmética confirma que producir más de 40 unidades en la planta 2 es más costoso que producir 40 unidades en la planta 2 y las restantes en la planta 1. El gerente querrá producir el nivel de producción para el cual el ingreso marginal sea igual a la suma de los costos marginales. Dado que la demanda es $P = 300 - 2Q$
el ingreso total será $IT = PQ = 300Q - 2Q^2$
y el ingreso marginal será $IMg = {}^{\Delta PQ}/_{\Delta Q} = 300 - 4Q$

Igualando el ingreso marginal y el costo marginal se obtiene el nivel de producción:
$300 - 4Q = 4$
$4Q = 296 \quad Q = 74$
La sustitución de la cantidad óptima en la función de demanda nos da el óptimo
$P = 300 - 2Q = 300 - 2(74) = 152$
Así, pues, el gerente venderá 74 unidades a un precio de $152 cada una

Dado que la producción total es superior a 40 unidades, la en la planta 2 es igual a 40 unidades. La producción en la planta 1 es igual a la diferencia entre las ventas totales y la producción en la planta 2: $74 - 40 = 34$.La sustitución de los datos de precios y cantidades en la función de nos da el beneficio de la empresa:
$\Pi = IT - CT_1 - CT_2 \quad \rightarrow \quad \Pi = 152(74) - 4(34) - 0.05(40)^2$
$\Pi = 11{,}248 - 136 - 80 = 11{,}032$

# EJERCICIOS PROPUESTOS

# 1. La derivada

1. Obtener el límite de la función $f(x) = x^2 - x + 2$, para valores cercanos a 2.

2. Haciendo uso de las leyes de los límites evaluar los límites y justificar

$$\lim_{x\to 5}(2x^2 - 3x + 4)$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$$

3. Calcular el límite

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x - 1}\right)$$

4. Sea $f(x) = 10x^3 + 5x^{-2} + 3\sqrt{x} + \frac{7}{x^3}$, calcular $\dfrac{df}{dx}$

5. Sea $f(x) = \left(x^3 - 2x^2 + 7x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(x^4 - 3x^3 + \frac{1}{x^2} + 5\right)$ calcule $\frac{df}{dx}$

6. Para la función $f(x) = x^3 - 3x$
a. Encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento
b. Determinar los máximos y mínimos relativos
c. Graficar

7. Para la función $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$
a. Encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento
b. Determinar los máximos y mínimos relativos
c. Graficar

8. Si $y = 3x^3 + 2x^2 + 5x + 1$, encuentre la ecuación de la recta tangente en el punto $(1,11)$

9. Encuentra las coordenadas del punto máximo de $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$.

10. Calcular los máximos y mínimos de $f(x) = x^3 - 3x$

11. Encuentra las coordenadas del punto de inflexión de $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$.

# 2. Aplicación de la Derivada en problemas económicos

1. La demanda de mercado de un bien $x$ viene dado por la función $Q = 150 - 2P$. Para un precio igual a 25 um, indique cómo es la demanda una vez hallada la elasticidad-precio de la demanda. (Matemáticas para el estudio de la microeconomía)

2. La demanda de mercado de un bien $Z$ viene dado por la función $P = 20 - 0.2Q$. Si el precio es igual a 10 um, ¿Cuál es la elasticidad-precio de la demanda?. (Matemáticas para el estudio de la microeconomía)

3. Hallar la elasticidad precio de la demanda cuando $P = 3$ u.m. si la función de demanda es

$$Q = \frac{50 - 10P}{5 + P}$$

4. Sea una economía de intercambio puro con dos consumidores y dos bienes, Las funciones de utilidad de los consumidores son:

$$U_1\left(x^1\right) = x_{11}^{2/3} x_{12}^{1/3} \qquad U_2\left(x^2\right) = x_{21}^{1/3} x_{22}^{2/3}$$

El consumidor 1 tiene una dotación inicial de $w^1 = (300, 700)$ unidades, y el consumidor 2 de $w^2 = (700, 300)$ unidades. Calcular la curva de contrato

5. Partiendo de la función indirecta de utilidad

$$V = \frac{8M^3}{27P_X P_Y^2}$$

Obtener

a. Las funciones de demanda ordinaria,
b. La ecuación de gasto
c. Las demandas compensadas,

6. Para obtener las funciones de demanda ordinaria hacemos uso de la identidad de Dada la función de costos $CT(x)\ 2x^3 - 21x^2 + 36x + 1{,}000$, determinar el (los) intervalo(s) para el que el costo es creciente. Determinar si hay algunos intervalos para los cuales el $CMg$ sea creciente.

7. Partiendo de la siguiente función de beneficios:

$$\Pi\left(P, W_1, W_2\right) = \frac{P^2\left(W_1 + W_2\right)}{4W_1W_2}$$

a. Obtener las demandas de inputs
b. Obtener la función de oferta del output
c. Obtener las demandas condicionadas de los inputs
d. la función de costos

8. Una empresa de mensajería analiza tres gamas de demandas para sus servicios:

- demanda semanal: $q_1 = 90 - 0.5p_1$
- demanda día de fiesta: $q_2 = 35 - 0.25p_2$
- demanda nocturna.: $q_3 = 30 - 0.20p_3$

siendo la función de costos totales

a. Hallar el precio que debe establecer e cada servicio con el fin de maximizar el beneficio obtenido.
b. Demuestre que si la empresa maximiza su beneficio, al servicio en el que la elasticidad precio-demanda en el punto crítico es más baja tiene un precio más bajo que lo demás.

9. Una empresa destina su planta a la elaboración de dos tipos de bienes $A$ y $B$. Obtiene un beneficio de 4 u.m. por unidad de $A$ y de 6 u.m por unidad de $B$. Los números de unidades de los dos tipos que puede producir mediante la planta están restringidos por la ecuación de transformación del producto dada por:

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0$$

con $x$ e $y$ los números de unidades (en miles) de $A$ y $B$ respectivamente producidas por semana. Hallar las cantidades de cada tipo que deben producirse a fin de maximizar el beneficio así como el beneficio máximo

10. Sabiendo que la función de producción de una empresa es: $z = 65 - 2(x-5)^2 - 4(y-4)^2$, los precios unitarios de los imputs $x$ e $y$ (en situación de competencia perfecta) son de 8 u.m.y 4 u.m. respectivamente y que el precio del bien producido es de 2 u.m. determinar el beneficio máximo.

11. Supongamos que los precios de los plátanos ($p_P$) y naranjas ($p_N$) se ven influidos por las demandas respectivas de uno y otro producto a través de las siguientes expresiones:

$$p_P = 110 - 3d_N - 5d_P \qquad p_N = 70 - 2d_N - 3d_P$$

donde $p_N$ y $d_N$ representan el precio y la demanda de naranjas respectivamente y $p_P$ y $d_P$ lo análogo para los plátanos. Sabiendo que el costo conjunto de abastecer de estas frutas el mercado es de:

$$CT = 2d_N^2 - 2d_N d_P + d_P^2 + 37.5$$

¿Cuál será la demanda óptima para que el beneficio del vendedor sea máximo?

## 3. La integral

1. Realizar la integral de la expresión

$$\frac{9x^2}{5} - \frac{7}{2x^3} + \frac{10}{x}$$

2. Encontrar la integral de la expresión

$$x^4 - \frac{8}{x^7} + \frac{3}{2x^5}$$

3. Encontrar

$$\int x^2 \ln x \, dx$$

4. Encontrar

$$\int x e^{2x} dx$$

5. Obtener las siguientes Integración por el método de sustitución

$$\int (6x-2)^{-4}dx \qquad \int (2x+9)^{-6}dx \qquad \int (5x+2)^{9}dx$$

$$\int (4x+2)^{5}dx \qquad \int (10x-15)^{4}dx$$

6. Evaluar las integrales

$$\int (x^2+3x-7)^5\,(2x+3)dx$$

$$\int \frac{1}{x\,ln\,x}dx$$

7. Evaluar

$$\int e^{x^2-5x}(2x-5)\,dx$$

$$\int x^2e^{x^3+1}dx$$

8. Evalúe las siguientes integrales definidas

$$\int_a^b x^4dx \qquad \int_1^3 \frac{1}{t}dt \qquad \int_0^2 e^{3x}dx$$

9. Determine el área acotada por la curva $y=3x^2+2x+5$, el eje $x$ y las líneas $x = 1$ y $x = 3$.

10. Evaluar

$$\int_0^2\int_3^4 xydxdy$$

## 4. Aplicaciones de la integral a problemas económicos

1. Calcular el área bajo la curva de la función $f(x)= 12x+3$ dentro del intervalo $-4 \leq x \leq 6$ utilizando el concepto de la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ y la fórmula de integral correspondiente.

2. Determinar el área bajo la curva de la función $f(x) = -x^2 + 9$ utilizando el método de la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ dentro del intervalo $-3 \leq x \leq 3$ y el eje ‘$x$’..

3. Determinar el área bajo la curva de la función $f(x) = e^x$ utilizando el método de la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ dentro del intervalo $-2 \leq x \leq 2$ y el eje '$x$'.

4. Si la curva de demanda de cierto producto es $p = 40 - 1.6q$ y la de oferta $p = 8 + 2.4q$. Determinar el excedente de los consumidores y de los productores

5. Dada la función de demanda $P = 42 - 5q - q^2$. Obtener el excedente del consumidor si el precio de equilibrio es de 6 um.

6. Dada la función de demanda $q = 64p^{-2}$. Obtener el excedente del consumidor si el precio de equilibrio es de 4 um.

7. Si una empresa monopólica con costos marginales constantes de 8 pesos enfrenta una demanda $Q = 100 - 2P$, ¿Qué tan grande es la pérdida de bienestar del monopolio?

8. La función de costo marginal de una empresa a un nivel de producción $x$ es

$$CMg(x) = 23.5 - 0.01x$$

Calcule el incremento en el costo total cuando el nivel de producción se incrementa de 1,000 a 1,500 unidades.

9. Para cierto país, la propensión marginal al consumo está dada por

$$\frac{dC}{dI} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2\sqrt{3I}}$$

Donde el consumo C es una función del ingreso nacional I. Aquí, I se expresa en grandes denominaciones de dinero. Determinar la función de consumo para el país, si se sabe que el consumo es de 10, cuando I = 12

10. La función de costo marginal de un fabricante es

$$\frac{dc}{dq} = 0.6q + 2$$

Si la producción actual es $q = 80$ unidades por semana, ¿Cuánto más costará incrementar la producción a 100 unidades por semana?

# SOLUCION A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

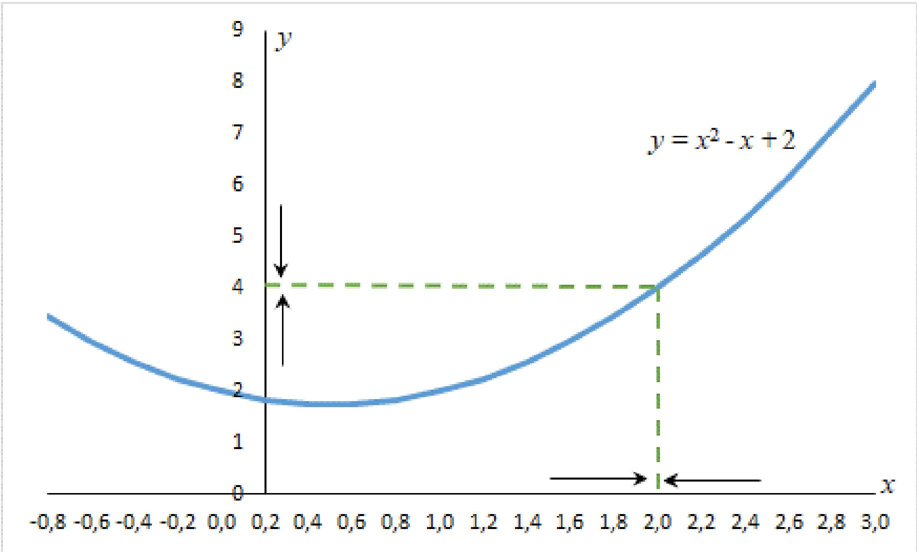
# 1. La derivada

## 1. Obtener el límite de la función $f(x) = x^2 - x + 2$, para valores cercanos a 2.

Las tablas siguientes dan valores de $f(x)$ para valores de $x$ cercanos a 2 pero no iguales a 2.

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 1.0 | 2.00000000 |
| 1.1 | 2.11000000 |
| 1.2 | 2.24000000 |
| 113 | 2.39000000 |
| 1.4 | 2.56000000 |
| 1.5 | 2.75000000 |
| 1.6 | 2.96000000 |
| 1.7 | 3.19000000 |
| 1.8 | 3.44000000 |
| 1.9 | 3.71000000 |
| 1.99 | 3.97010000 |
| 1.999 | 3.99700100 |

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 3.0 | 8.00000000 |
| 2.9 | 7.51000000 |
| 2.8 | 7.04000000 |
| 2.7 | 6.59000000 |
| 2.6 | 6.16000000 |
| 2.5 | 5.75000000 |
| 2.4 | 5.36000000 |
| 2.3 | 4.99000000 |
| 2.2 | 4.64000000 |
| 2.1 | 4.31000000 |
| 2.01 | 4.03010000 |
| 2.001 | 4.00300100 |




De la tabla y gráfica de $f$ (una parábola) se observa que cuando $x$ es cercana a 2 (a ambos lados de 2), $f(x)$ es cercana a 4.

Se expresa esto diciendo el límite de la función $f(x) = x^2 - x + 2$ cuando $x$ se aproxima a 2 es igual a 4.

La notación para esto es $\lim_{x \to 2}(x^2 - x + 2) = 4$

**2. Haciendo uso de las leyes de los límites evaluar los límites y justificar**

$$\lim_{x\to 5}(2x^2 - 3x + 4)$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$$

---

Para el primer caso

$$\lim_{x\to 5}(2x^2 - 3x + 4)$$

Se hace uso de la ley de límites de una diferencia y una suma

$$= \lim_{x\to 5} 2x^2 - \lim_{x\to 5} 3x + \lim_{x\to 5} 4$$

Aplicando la del límite de un múltiplo constante

$$= 2\lim_{x\to 5} x^2 - 3\lim_{x\to 5} x + \lim_{x\to 5} 4$$

Aplicando los límites especiales

$$= 2(5^2) - 3(5) + 4 = 39$$

Para el segundo caso

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$$

Se aplica la ley del cociente

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = \frac{\lim_{x\to -2}(x^3 + 2x^2 - 1)}{\lim_{x\to -2}(5 - 3x)}$$

Aplicando los límites de sumas, diferencias y múltiplos constantes

$$= \frac{\lim_{x\to -2} x^3 + \lim_{x\to -2} 2x^2 - \lim_{x\to -2} 1}{\lim_{x\to -2} 5 - \lim_{x\to -2} 3x}$$

Aplicando los límites especiales

$$= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)}$$

$$= -\frac{1}{11}$$

**3. Calcular el límite**

$$\lim_{x \to +\infty} \left( \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x - 1} \right)$$

---

Aquí se presenta una indeterminación $\infty - \infty$
Primero debe racionalizarse y después dividir para $x$ con el mayor exponente

$$\lim_{x \to +\infty} \left( \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x - 1} \right) \times \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x - 1}}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x - 1}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(x^2 + x + 1)(x^2 - x - 1)}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x - 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2(x + 1)}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x - 1}}$$

Dividiendo el numerador y denominador para $x$, al introducir la $x$ dentro del radical queda como $x^2$

$$2 \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}} = 2 \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}}$$

Finalmente, aplicando el teorema de sustitución

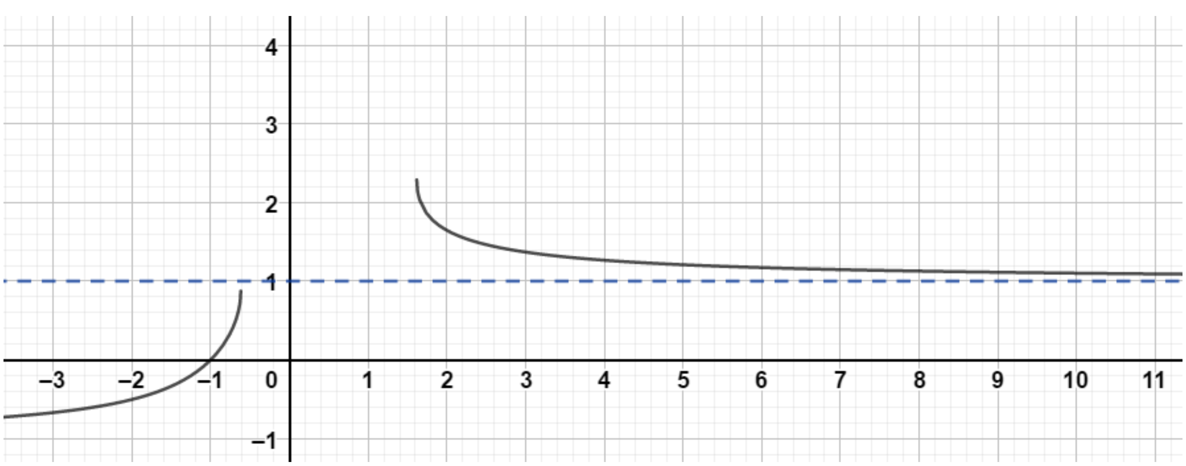
$$2 \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{1}{\infty}}{\sqrt{1 + \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty^2}}} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{1}}\right) = 2\left(\frac{1}{1 + 1}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

No olvidar que $\frac{k}{\infty} = 0$ y $k \in R$

Este resultado indica que la función

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x - 1}$$

Tiene una asíntota horizontal en $y = 1$



**4. Sea $f(x) = 10x^3 + 5x^{-2} + 3\sqrt{x} + \frac{7}{x^3}$, calcular $\frac{df}{dx}$**

Antes de aplicar la derivada recordemos que $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ y $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$, entonces, la función puede ser escrita como

$$f(x) = 10x^3 + 5x^{-2} + 3x^{1/2} + 7x^{-3}$$

Aplicando la regla de las derivadas tenemos

$$f'(x) = 10(x^3)' + 5(x^{-2})' + 3\left(x^{1/2}\right)' + 7(x^{-3})'$$

$$f'(x) = 10(3x^{3-1}) + 5(-2x^{-2-1}) + 3\left(\frac{1}{2}x^{1/2-1}\right) + 7(-3x^{-3-1})$$

$$f'(x) = 30(x^2) - 10(x^{-3}) + \frac{3}{2}\left(x^{-1/2}\right) - 21(x^{-4})$$

Así

$$\frac{df}{dx} = 30x^2 - 10x^{-3} + \frac{3}{2}x^{-1/2} - 21x^{-4}$$

$$\frac{df}{dx} = 30x^2 - \frac{10}{x^3} + \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{21}{x^4}$$

**5. Sea $\boldsymbol{f(x) = \left(x^3 - 2x^2 + 7x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(x^4 - 3x^3 + \frac{1}{x^2} + 5\right)}$ calcule $\boldsymbol{\frac{df}{dx}}$**

---

En este ejercicio se aplica la fórmula del producto

$$f(x) = \left(x^3 - 2x^2 + 7x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(x^4 - 3x^3 + \frac{1}{x^2} + 5\right)$$

$$\frac{df}{dx} = \left(x^3 - 2x^2 + 7x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(x^4 - 3x^3 + \frac{1}{x^2} + 5\right)' + \left(x^3 - 2x^2 + 7x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)'\left(x^4 - 3x^3 + \frac{1}{x^2} + 5\right)$$

$$\frac{df}{dx} = \left(x^3 - 2x^2 + 7x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(4x^3 - 9x^2 + \frac{2}{x^3}\right) + \left(3x^2 - 4x + 7 + \frac{1}{2x^{3/2}}\right)\left(x^4 - 3x^3 + \frac{1}{x^2} + 5\right)$$

Realizando las operaciones y reduciendo el resultado

$$\frac{df}{dx} = \left(4x^6 - 18x^5 + 2 - 8x^5 + 18x^4 - 4x^{-1} + 28x^4 - 63x^3 + 14x^{-2} + 4x^{5/2} - 9x^{3/2} + 2x^{-7/2}\right) + \left(3x^6 - 9x^5 + 3 + 15x^2 - 4x^5 + 12x^4 + 3 + 15x^2 + 7x^4 - 21x^3 + 7x^{-2} + 35 + \frac{5}{2}x^{5/2} - \frac{5}{2}x^{3/2} + \frac{1}{2}x^{-7/2} + \frac{5}{2}x^{-3/2}\right)$$

**6. Para la función $f(x) = x^3 - 3x$**

**a. Encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento**

**b. Determinar los máximos y mínimos relativos**

**c. Graficar**

---

a. Encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento

Se procede a calcular los valores críticos calculando la primera derivada e igualando a cero

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$$

De aquí se obtienen las raíces $x = \pm 1$, de tal forma que los valores críticos son $c_1 = 1$ y $c_2 = -1$. Para obtener los valores de crecimiento se realiza la siguiente tabla

| Intervalos | Signo de $f'(x)$ | $f(x)$ | Máximos y mínimos relativos |
|---|---|---|---|
| $(-\infty, -1)$ | Positivo | Creciente | $f(-1) = 2$ máximo relativo |
| $(-1,1)$ | Negativo | Decreciente | |
| $(1, \infty)$ | Positivo | Creciente | $f(1) = 2$ mínimo relativo |

Para obtener los intervalos sólo notamos que el dominio de $f(x)$ son todos los números reales y que los intervalos se forman utilizando los valores críticos y el dominio de la función

Para obtener el signo de la derivada sólo se debe tomar un punto del intervalo correspondiente y evaluar la derivada, así como fijarnos si el resultado es positivo o negativo.

b. Determinar los máximos y mínimos relativos

Para obtener los máximos y mínimos relativos se aplica el criterio de la primera derivada. Se obtienen las intersecciones con los ejes coordenados resolviendo la ecuación $f(x) = x^3 - 3x$. Primero intersecciones con el eje $x$, para ello se supone que $y = f(x) = 0$

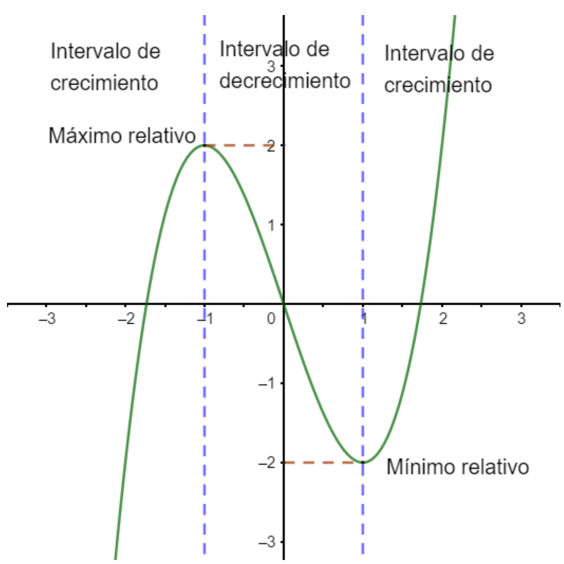
$$x^3 - 3x = 0 \to x(x^2 - 3) = 0$$

Y la solución es $x = 0$ , $x = \sqrt{3}$ , $x = \sqrt{3}$

Para obtener la intersección con el eje $y$ sólo evaluamos $f(x)$ cuando $x = 0$

$$f(0) = 0^3 - 3(0) = 0$$

c. Gráfica



**7. Para la función $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$**

**a. Encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento**

**b. Determinar los máximos y mínimos relativos**

**c. Graficar**

a. Encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento

Se procede a calcular los valores críticos calculando la primera derivada

$$f'(x) = \frac{2x}{3(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}$$

La derivada es cero o no existe cuando $\frac{2x}{3(x^2-1)^{\frac{2}{3}}} = 0$

La derivada no existe cuando el denominador $3(x^2-1)^{\frac{2}{3}} = 0$ es decir, cuando $x = \pm 1$

De aquí que los valores críticos son $c_1 = -1$, $c_2 = 0$ y $c_3 = 1$. Para obtener los valores de crecimiento se realiza la siguiente tabla

| Intervalos | Signo de $f'(x)$ | $f(x)$ | Máximos y mínimos relativos |
|---|---|---|---|
| $(-\infty, -1)$ | Negativo | Decreciente | |
| $(-1,0)$ | Negativo | Decreciente | $f(0)$ = -1 mínimo |
| $(0,1)$ | Positivo | Creciente | |
| $(1, \infty)$ | Positivo | Creciente | |

b. Determinar los máximos y mínimos relativos

Para obtener los máximos y mínimos relativos se obtienen las intersecciones con el eje $x$, ello implica que $y = f(x) = 0$

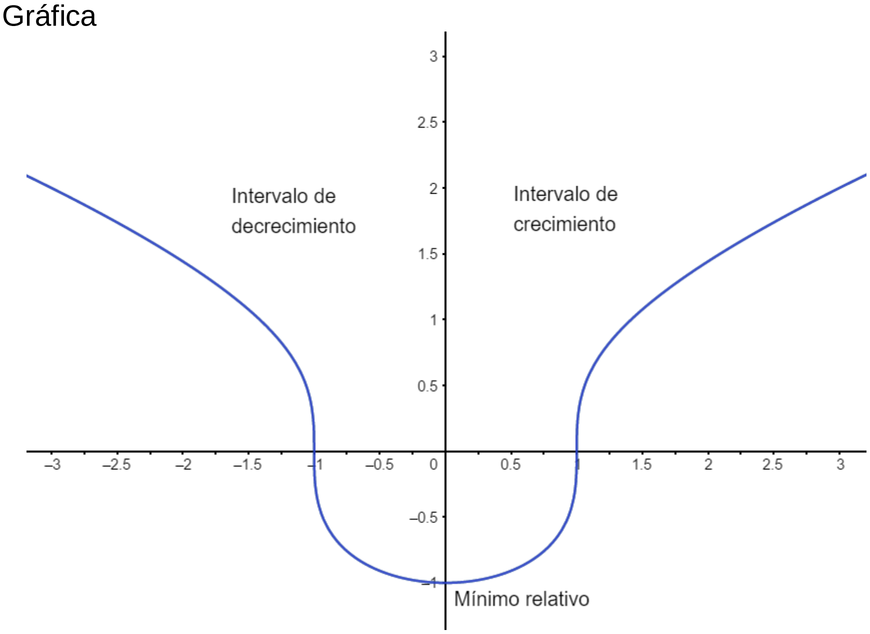
$$\sqrt[3]{x^2-1} = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

Y la solución es $x = 0$ , $x = 1$ , $x = -1$ puntos $(0,0), (-1,0), (1,0)$

Para obtener la intersección con el eje $y$ sólo evaluamos $f(x)$ cuando $x = 0$

$f(0) = \sqrt[3]{0^2 - 1} \rightarrow y = -1$, punto $(0, -1)$

c. Gráfica



**8. Si $y = 3x^3 + 2x^2 + 5x + 1$, encuentre la ecuación de la recta tangente en el punto $(1, 11)$**

Al calcular la derivada tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = 9x^2 + 4x + 5$$

Por lo que la pendiente de la recta es

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 9(1)^2 + 4(1) + 5 = 18$$

Dado que la ecuación de la recta tangente es:

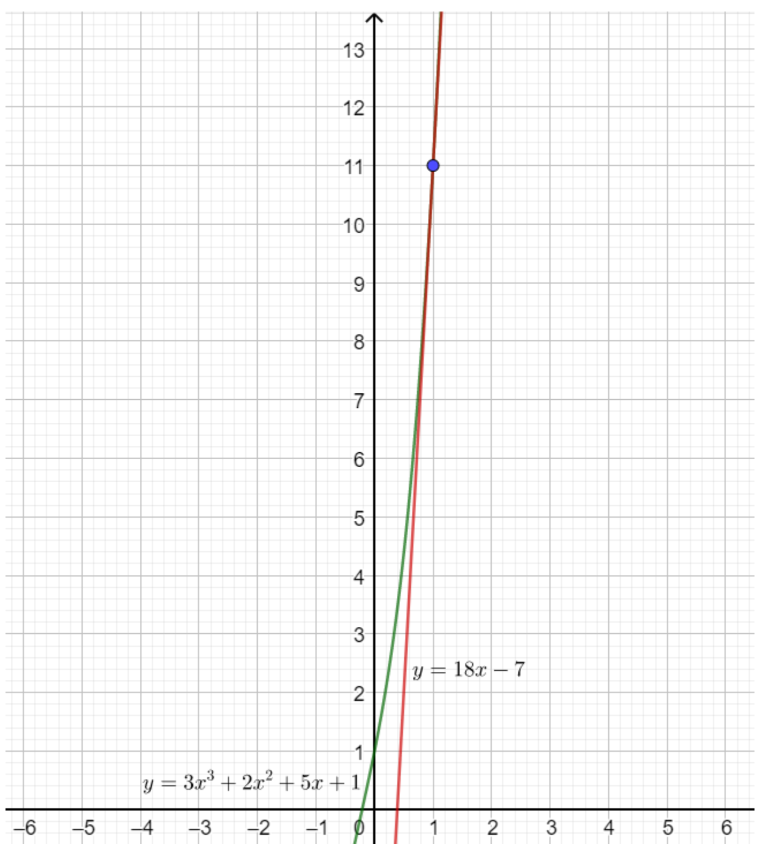
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Como el punto donde pasa la recta es $(1{,}11)$, entonces:

$$y - 11 = 18(x - 1)$$
$$y - 11 = 18x - 18$$
$$y = 18x - 7$$

Así, la ecuación de la recta tangente es

$$y = 18x - 7$$



**9. Encuentra las coordenadas del punto máximo de $f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x$.**

---

Para encontrar el punto máximo debemos derivar la función $f\left(x\right)$:

$$f'\left(x\right)=x^2-x-2$$

ahora hay que resolver la ecuación $x^2-x-2=0$ (factorizando o usando fórmula general):

Factorizando...

$$x^2-x-2=0$$
$$\left(x-2\right)\left(x+1\right)=0$$
$$x=2$$
$$x=-1$$

Por fórmula general...

$$x^2-x-2=0$$
$$x=\frac{-\left(-1\right)\pm\sqrt{\left(-1\right)^2-4\left(1\right)\left(-2\right)}}{2\left(1\right)}$$
$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm3}{2}$$
$$x_1=\frac{1+3}{2}=2 \qquad x_2=\frac{1-3}{2}=-1$$

$x=2$ y $x=-1$ son soluciones de $f'\left(x\right)=0$; para saber en cuál de los dos está el máximo evaluamos los resultados en $f''\left(x\right)=2x-1$:

$f''\left(2\right)=2\left(2\right)-1=3>0$ entonces en $x=2$ hay un mínimo.

$f''\left(-1\right)=2\left(-1\right)-1=-3<0$ entonces en $x=-1$ hay un <u>máximo</u>.

El valor buscado es $x=-1$ y el punto donde se encuentra el máximo es $M\left(-1,f\left(-1\right)\right)$

Es decir hay que sustituir $x=-1$ en la función original:

$f\left(-1\right)=\frac{1}{3}\left(-1\right)^3-\frac{1}{2}\left(-1\right)^2-2\left(-1\right)=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2=\frac{7}{6}$,

entonces el punto máximo de la función está en $M\left(-1,\frac{7}{6}\right)$.

## 10. Calcular los máximos y mínimos de $f(x) = x^3 - 3x$

Siempre iniciamos calculando las dos primeras derivadas

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f''(x) = 6x$

Ahora igualamos la primera derivada a cero y resolvemos la ecuación resultante

$f'(x) = 0 \qquad \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0$

Resolvemos la ecuación de segundo grado directamente

$3x^2 = 3 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm 1$

Por lo tanto podemos afirmar que

$x = 1 \qquad\qquad x = -1$

Son los puntos candidatos a ser máximos o mínimos. Esos puntos puede que sean máximos, mínimos o no sean nada. Para decidirlo los sustituimos en las derivadas segundas

$f''(-1) = 6(-1) = -6 < 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = -1$ es un máximo

$f''(1) = 6(1) = 6 > 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = -1$ es un mínimo

Por último, calculamos la ordenada que corresponde a cada punto sustituyéndolos en la función

$f(x) = x^3 - 3x$

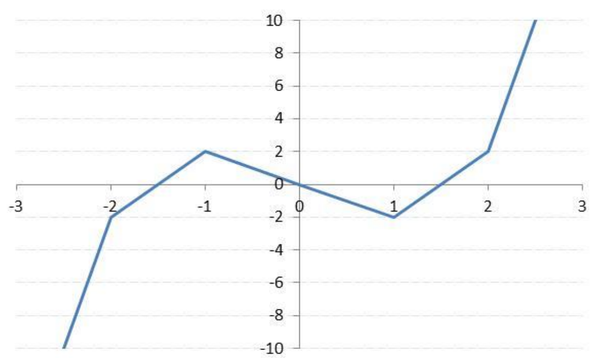
$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = -1 + 3 = 2$

$f(1) = (1)^3 - 3(1) = 1 - 3 = -2$

Por lo que se puede decir que la función $f(x)$ tiene

Un máximo en el punto $(-1, 2)$

Un mínimo en el punto $(1, -2)$



**11. Encuentra las coordenadas del punto de inflexión de $f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x$.**

Para encontrar el punto de inflexión debemos resolver la segunda derivada igualada con cero.

Como $f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x$, entonces $f'\left(x\right)=x^2-x-2$ y $f''\left(x\right)=2x-1$,

Se debe resolver: $2x-1=0$

cuya solución es $x=\frac{1}{2}$,

entonces el punto de inflexión está en $I\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$,

es decir hay que evaluar la función original en $x=\frac{1}{2}$,

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)+2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{12}$,

entonces el punto de inflexión está en $I\left(\frac{1}{2},\frac{11}{12}\right)$.

# 2. Aplicación de la Derivada en problemas económicos

**1. La demanda de mercado de un bien $x$ viene dado por la función $Q = 150 - 2P$. Para un precio igual a 25 um, indique cómo es la demanda una vez hallada la elasticidad-precio de la demanda. (Matemáticas para el estudio de la microeconomía)**

Si la forma de obtener la elasticidad es a través de la fórmula

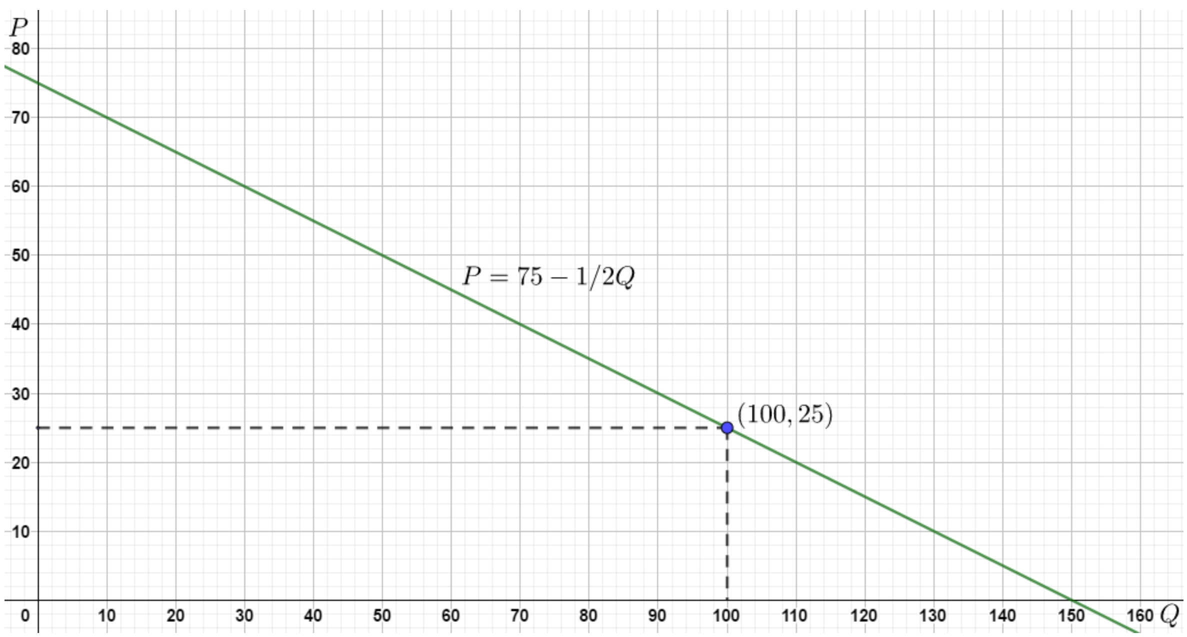
$$\varepsilon_{p,d} = \frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q}$$

A un precio de 25, la cantidad demanda es de $Q = 150 - 2(25) \rightarrow Q^* = 100$

De tal forma que

$$\varepsilon_{p,d} = -2\left(\frac{25}{100}\right)$$
$$\varepsilon_{p,d} = -\frac{1}{2} = -0.5$$

Se trata de un bien de demanda inelástica y nos expresa que por cada 1% que se incremente el precio, la cantidad demandada disminuirá 0.5%.



**2. La demanda de mercado de un bien $Z$ viene dado por la función $P = 20 - 0.2Q$. Si el precio es igual a 10 um, ¿Cuál es la elasticidad-precio de la demanda?. (Matemáticas para el estudio de la microeconomía)**

Si la forma de obtener la elasticidad es a través de la fórmula

$$\varepsilon_{p,d} = \frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q}$$

Para determinar la cantidad demandada, y su correspondiente elasticidad obtenemos la función de demanda directa.

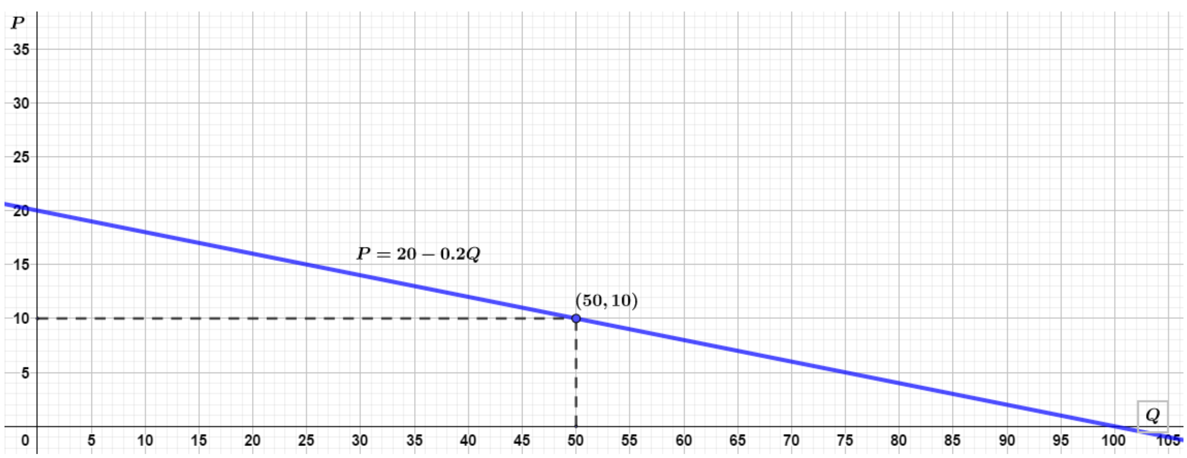
Si $P = 20 - 0.2Q \rightarrow Q = 100 - 5P$

A un precio de 10, la cantidad demanda es de $Q = 100 - 5(10) \rightarrow Q^* = 50$

De tal forma que

$$\varepsilon_{p,d} = -5\left(\frac{10}{50}\right)$$
$$\varepsilon_{p,d} = -1$$

Se trata de un bien de demanda con elasticidad unitaria y nos expresa que por cada 1% que se incremente el precio, la cantidad demandada disminuirá en la misma proporción



**3. Hallar la elasticidad precio de la demanda cuando $P = 3$ u.m. si la función de demanda es**

$$\boldsymbol{Q = \frac{50 - 10P}{5 + P}}$$

---

Si la forma de obtener la elasticidad es a través de la fórmula

$$\varepsilon_{p,d} = \frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q}$$

A un precio de 3, la cantidad demanda es de

$$Q = \frac{50 - 10(3)}{5 + 3} \rightarrow \; Q^{*} = \frac{20}{8}$$

La $\frac{dQ}{dP}$ es

$$\frac{dQ}{dP} = \frac{(5 + P)(-10) - (50 - 10P)(1)}{(5 + P)^2} = \frac{-50 - 10P - 50 + 10P}{(5 + P)^2} = \frac{-100}{(5 + P)^2}$$

$$\frac{dQ}{dP} = \frac{-100}{(5 + P)^2}\bigg|_{P=3} = \frac{-100}{(5 + 3)^2} = -\frac{100}{64}$$

De tal forma que

$$\varepsilon_{p,d} = -\frac{100}{64}\left(\frac{3}{20/8}\right) = -\frac{25}{16}\left(\frac{24}{20}\right)$$

$$\varepsilon_{p,d} = -\frac{1}{2} = -1.875$$

Se trata de un bien de demanda elástica y nos expresa que por cada 1% que se incremente el precio, la cantidad demandada disminuirá 1.875%.

**4. Sea una economía de intercambio puro con dos consumidores y dos bienes, Las funciones de utilidad de los consumidores son:**

$$U_1\left(x^1\right)=x_{11}^{2/3}x_{12}^{1/3} \qquad U_2\left(x^2\right)=x_{21}^{1/3}x_{22}^{2/3}$$

**El consumidor 1 tiene una dotación inicial de $w^1$ = (300, 700) unidades, y el consumidor 2 de $w^2$ = (700, 300) unidades. Calcular la curva de contrato**

Para la obtención de la curva de contrato la condición de eficiencia en el consumo está dada por

$$TMgS^1=\left.\frac{UMgX_1}{UMgX_2}\right|_1=\left.\frac{UMgX_1}{UMgX_2}\right|_2=TMgS^2$$

De esta forma:

$$\frac{2x_{12}}{x_{11}}=\frac{x_{22}}{2x_{21}}$$

Y de las dotaciones iniciales sabemos que para el consumo

$x_{11}$ + $x_{21}$ = 1,000 $\rightarrow$ $x_{21}$ = 1,000 - $x_{11}$

$x_{12}$ + $x_{22}$ = 1,000 $\rightarrow$ $x_{22}$ = 1,000 - $x_{12}$

$$\frac{2x_{12}}{x_{11}}=\frac{1,000-x_{12}}{2\left(1,000-x_{11}\right)}$$

Realizando las operaciones correspondientes

$$4x_{12}\left(1,000-x_{11}\right)=x_{11}\left(1,000-x_{12}\right)$$

$$4,000x_{12}-4x_{11}x_{12}=1,000x_{11}-x_{11}x_{12}$$

$$4,000x_{12}-3x_{11}x_{12}=1,000x_{11}$$

$$x_{12}\left(4,000-3x_{11}\right)=1,000x_{11}$$

$$x_{12}=\frac{1,000x_{11}}{4,000-3x_{11}}$$ Curva de Contrato

**5. Partiendo de la función indirecta de utilidad**

$$V = \frac{8M^3}{27P_X P_Y^2}$$

**Obtener**

**a. Las funciones de demanda ordinaria,**

**b. La ecuación de gasto**

**c. Las demandas compensadas,**

---

a. Para obtener las funciones de demanda ordinaria hacemos uso de la identidad de Roy, ya que esta identidad nos permite pasar de la función de utilidad indirecta a la demanda ordinaria a través de la siguiente expresión

$$X = -\frac{\frac{\partial V}{\partial P_X}}{\frac{\partial V}{\partial M}}$$

Así realizando las operaciones correspondientes

$$\frac{\partial V}{\partial P_X} = -\frac{8M^3}{27P_X^2 P_Y^2} \qquad \frac{\partial V}{\partial M} = \frac{24M^2}{27P_X P_Y^2}$$

De esta forma:

$$X = -\frac{\frac{\partial V}{\partial P_X}}{\frac{\partial V}{\partial M}} = -\frac{-\frac{8M^3}{27P_X^2 P_Y^2}}{\frac{24M^2}{27P_X P_Y^2}} = \frac{\left(8M^{\cancel{3}}\right)\left(\cancel{27}\,\cancel{P_X}\,\cancel{P_Y^2}\right)}{\left(24\cancel{M^2}\right)\left(\cancel{27}P_X^{\cancel{2}}\,\cancel{P_Y^2}\right)} = \frac{M}{3P_X}$$

Similarmente para $Y$

$$Y = -\frac{\frac{\partial V}{\partial P_Y}}{\frac{\partial V}{\partial M}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial P_Y} = -\frac{16M^3}{27P_X P_Y^3} \qquad \frac{\partial V}{\partial M} = \frac{24M^2}{27P_X P_Y^2}$$

De esta forma:

$$Y = -\frac{\frac{\partial V}{\partial P_Y}}{\frac{\partial V}{\partial M}} = -\frac{-\frac{16M^3}{27P_X P_Y^3}}{\frac{24M^2}{27P_X P_Y^2}} = \frac{\left(16M^{\cancel{3}}\right)\left(\cancel{27}\,\cancel{P_X}\,\cancel{P_Y^2}\right)}{\left(24\cancel{M^2}\right)\left(\cancel{27}\,\cancel{P_X}\,P_Y^{\cancel{3}}\right)} = \frac{2M}{3P_Y}$$

b. Para obtener la función de gasto mínimo, dado que en equilibrio el ingreso es igual al gasto

$$V = \frac{8M^3}{27P_X P_Y^2} \rightarrow \frac{8E^3}{27P_X P_Y^2}$$

y dado que la función indirecta de utilidad y la ecuación de gasto son inversas:

$$V = \frac{8E^3}{27P_X P_Y^2} \rightarrow 27VP_X P_Y^2 = 8E^3 \rightarrow E = \left(\frac{27VP_X P_Y^2}{8}\right)^{1/3}$$

La cual solo simplificando $E = \frac{3}{2}\left(VP_X P_Y^2\right)^{1/3}$ Ecuación de gasto

c. Funciones de demanda compensadas (hicksianas)

Para ello hacemos uso del Lema de Shepard, el cual establece que derivando a la función de gasto con respecto al precio, obtendremos la demanda correspondiente

$$\frac{dE}{dP_i} = hx_i$$

Si $E = \frac{3}{2}\left(VP_X P_Y^2\right)^{1/3}$

Para el bien 1 $\frac{dE}{dP_X} = hx = \frac{1}{2}\left(VP_Y^2\right)^{1/3} P_X^{-2/3} = \left(\frac{VP_Y^2}{8P_X^2}\right)^{1/3} = h_X$

Para el bien 2 $\frac{dE}{dP_Y} = h_Y = \left(VP_X\right)^{1/3} P_Y^{-1/3} = \left(\frac{VP_X}{P_Y}\right)^{1/3} = h_Y$

6. **Dada la función de costos $CT(x)$ $2x^3 - 21x^2 + 36x + 1{,}000$, determinar el (los) intervalo(s) para el que el costo es creciente. Determinar si hay algunos intervalos para los cuales el $CMg$ sea creciente**.

Para dar solución tenemos que derivar a la función, de esta forma:
$f'(x) = 6x^2 - 42x + 36$ lo que es equivalente a $f'(x) = x^2 - 7x + 6$
estableciendo $f'(x) = 0$ $\quad (x-6)(x-1) = 0$

Para determinar cuándo $f'(x) > 0$ y $f'(x) < 0$, se debe resolver las desigualdades
$(x-6)(x-1) > 0$ $\quad (x-6)(x-1) < 0$

De esta forma los valores críticos serán: $x = 6$ y $x = 1$

Con estos resultados se obtienen los intervalos $(-\infty, 1]$, $[1, 6]$ , $[6, \infty)$
Valuando la derivada con estos intervalos
$f'(0) = 6(0)^2 - 42(0) + 36 = 36 > 0$ Creciente
$f'(2) = 6(2)^2 - 42(2) + 36 = -24 < 0$ Decreciente
$f'(\infty) = 6(\infty)^2 - 42(\infty) + 36 = \infty > 0$ Creciente

| | 1 | | 6 | |
|---|---|---|---|---|
| Signo de $f'(x)$ + | | Signo de $f'(x)$ — | | Signo de $f'(x)$ + |

En forma de resumen

| Intervalo | Signo de $f'(x)$ | $y = f(x)$ |
|---|---|---|
| $(-\infty, 1]$ | + | Creciente |
| $[1, 6]$ | — | Decreciente |
| $[6, \infty)$ | + | Creciente |

Para el caso del Costo marginal, para determinar si hay algunos intervalos para los cuales el $CMg$ sea creciente.

El $CMg$ es la derivada del $CT$ $f'(x) = CMg = x^2 - 7x + 6$
Derivando al $CMg$ para determinar los intervalos creciente y creciente.
$\frac{dCMg}{dx} = 2x - 7 = 0$ Dando como resultado $x = 3.5$

Con este resultado se obtienen los intervalos (0, 3.5], [3.5, ∞)
Valuando la derivada con estos intervalos
$f\,'(2) = 2(2) - 7 = -3 < 0$
Decreciente
$f\,'(\infty) = 2(\infty) - 7 = \infty > 0$
Creciente

7. **Partiendo de la siguiente función de beneficios:**

$$\Pi(P,W_1,W_2)=\frac{P^2(W_1+W_2)}{4W_1W_2}$$

**a. Obtener las demandas de inputs**
**b. Obtener la función de oferta del output**
**c. Obtener las demandas condicionadas de los inputs**
**d. la función de costos**

---

*a.* Se trata de obtener las demandas de inputs

$$X_1^d(P,W_1,W_2) \quad ; \quad X_2^d(P,W_1,W_2)$$

Para trabajar más cómodamente, expresaremos la función de beneficios de otra manera, a saber:

$$\Pi(P,W_1,W_2)=\frac{P^2(W_1+W_2)}{4W_1W_2}=\frac{P^2}{4}\left(\frac{1}{W_1}+\frac{1}{W_2}\right)=\frac{P^2}{4W_1}+\frac{P^2}{4W_2}$$

Y ahora, aplicando el Lema de Hotelling.

$$X_1^d=-\frac{\partial\Pi(P,W_1,W_2)}{\partial W_1}=-\left[\frac{P^2}{4}\left(-\frac{1}{W_1^2}\right)\right]=\frac{P^2}{4W_1^2}$$

$$X_2^d=-\frac{\partial\Pi(P,W_1,W_2)}{\partial W_2}=-\left[\frac{P^2}{4}\left(-\frac{1}{W_2^2}\right)\right]=\frac{P^2}{4W_2^2}$$

b. *Obtener la función de oferta del output*, se trata de obtener la función: $Y=Y(P,W_1,W_2)$

De nuevo aplicamos el Lema de Hotelling.

$$Y=\frac{\partial\Pi(P,W_1,W_2)}{\partial P}=\frac{2P(W_1+W_2)}{4W_1W_2}=\frac{P(W_1+W_2)}{2W_1W_2}$$

c. Obtener las demandas condicionadas de los inputs, se trata de obtener las funciones:

$$X_1^C(Y,W_1,W_2) \quad ; \quad X_2^C(Y,W_1,W_2)$$

A partir de la función de oferta obtenida, despejando el precio:

$$Y=\frac{P(W_1+W_2)}{2W_1W_2}\cdots\rightarrow P=\frac{2W_1W_2}{W_1+W_2}Y$$

Y llevando este precio a las demandas obtenidas inicialmente:

$$X_1^C=\frac{P^2}{4W_1^2}=\frac{1}{4W_1^2}\left(\frac{2W_1W_2}{W_1+W_2}Y\right)^2=\left(\frac{W_2}{W_1+W_2}Y\right)^2$$

$$X_2^C=\frac{P^2}{4W_2^2}=\frac{1}{4W_2^2}\left(\frac{2W_1W_2}{W_1+W_2}Y\right)^2=\left(\frac{W_1}{W_1+W_2}Y\right)^2$$

d. Para obtener la función de costos, se trata de obtener la función: $CT(W_1,W_2,Y)$ operando:

$$CT(W_1, W_2, Y) = W_1 X_1^C + W_2 X_2^C$$

$$CT(W_1, W_2, Y) = W_1\left(\frac{W_2}{W_1 + W_2} Y\right)^2 + W_2\left(\frac{W_1}{W_1 + W_2} Y\right)^2 = \left[\frac{W_1 W_2^2 + W_2 W_1^2}{(W_1 + W_2)^2}\right] Y^2$$

$$CT(W_1, W_2, Y) = \left[\frac{W_1 W_2^2 + W_2 W_1^2}{(W_1 + W_2)^2}\right] Y^2 = \frac{W_1 W_2}{W_1 + W_2} Y^2$$

8. **Una empresa de mensajería analiza tres gamas de demandas para sus servicios:**

- **demanda semanal:** $q_1 = 90 - 0.5p_1$
- **demanda día de fiesta:** $q_2 = 35 - 0.25p_2$
- **demanda nocturna.:** $q_3 = 30 - 0.20p_3$

**siendo la función de costos totales**

a. **Hallar el precio que debe establecer e cada servicio con el fin de maximizar el beneficio obtenido.**

b. **Demuestre que si la empresa maximiza su beneficio, al servicio en el que la elasticidad precio-demanda en el punto crítico es más baja tiene un precio más bajo que lo demás.**

---

a. Precio que debe establecer e cada servicio con el fin de maximizar el beneficio obtenido

De las funciones de demanda $q_1 = 90 - \frac{1}{2}p_1$, $q_2 = 35 - \frac{1}{4}p_2$ , $q_3 = 30 - \frac{1}{5}p_3$

Y de costos $CT(Q) = 25 - 20Q$

Con las cuales se forma la función de beneficios a maximizar

$$\Pi = \left(90 - \frac{1}{2}p_1\right)p_1 + \left(35 - \frac{1}{4}p_2\right)p_2 + \left(30 - \frac{1}{5}p_3\right)p_3 - 25 + 20\left(90 - \frac{1}{2}p_1 + 35 - \frac{1}{4}p_2 + 30 - \frac{1}{5}p_3\right)$$

$$\Pi = 90p_1 - \frac{1}{2}p_1^2 + 35p_2 - \frac{1}{4}p_2^2 + 30p_3 - \frac{1}{5}p_3^2 - 25 + 1800 - 10p_1 + 700 - 5p_2 + 600 - 4p_3$$

$$\Pi = -\frac{1}{2}p_1^2 - \frac{1}{4}p_2^2 - \frac{1}{5}p_3^2 + 80p_1 + 30p_2 + 26p_3 - 25 + 3{,}075$$

hayamos el máximo:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p_1} = -p_1 + 80 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad p_1 = 80$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p_2} = -\frac{1}{2}p_2 + 30 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad p_2 = 60$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p_3} = -\frac{2}{5}p_3 + 26p_3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad p_3 = 65$$

b. Demuestre que si la empresa maximiza su beneficio, al servicio en el que la elasticidad precio-demanda en el punto crítico es más baja tiene un precio más bajo que lo demás.

Una vez obtenidos los precios, determinamos las cantidades óptimas

$$q_1 = 90 - \frac{1}{2}(80) = 50$$

$$q_2 = 35 - \frac{1}{4}(60) = 20$$

$$q_3 = 30 - \frac{1}{5}(65) = 17$$

Obtenemos las elasticidades

$$\varepsilon_{q_1,p_1} = \frac{\partial q_1}{\partial p_1}\frac{p_1}{q_1} = -\frac{1}{2}\left(\frac{80}{50}\right) = -0.8$$

$$\varepsilon_{q_2,p_2} = \frac{\partial q_2}{\partial p_2}\frac{p_2}{q_2} = -\frac{1}{4}\left(\frac{60}{20}\right) = -0.75$$

$$\varepsilon_{q_3,p_3} = \frac{\partial q_3}{\partial p_3}\frac{p_3}{q_3} = -\frac{1}{5}\left(\frac{65}{17}\right) = -0.76$$

**9. Una empresa destina su planta a la elaboración de dos tipos de bienes *A* y *B*. Obtiene un beneficio de 4 u.m. por unidad de *A* y de 6 u.m por unidad de *B*. Los números de unidades de los dos tipos que puede producir mediante la planta están restringidos por la ecuación de transformación del producto dada por:**

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0$$

**con *x* e *y* los números de unidades (en miles) de *A* y *B* respectivamente producidas por semana. Hallar las cantidades de cada tipo que deben producirse a fin de maximizar el beneficio así como el beneficio máximo**

---

$\Pi$: $4x + 6y$

Ecuación de Lagrange: $L = 4x + 6y + \lambda(x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4)$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 4 + 2\lambda x + 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 6 + 2\lambda y + 4\lambda = 0$$

Despejando a $\lambda$

$$\lambda = -\frac{2}{x+1} \quad \text{y} \quad \lambda = -\frac{3}{y+2}$$

Igualando y despejando

$$\lambda = -\frac{2}{x+1} = -\frac{3}{y+2} \qquad \Rightarrow \qquad 2(y+2) = 3(x+1) = 2y + 4 = 3x + 3 \quad \Rightarrow \qquad y = \frac{3x-1}{2}$$

Sustituyendo en la restricción $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0$

$$x^2 + \frac{1}{4}(3x-1)^2 + 2x + 2(3x-1) - 4 = 0$$

$$13x^2 + 26x - 23 = 0;$$

$$x = \frac{-26 \pm \sqrt{26^2 - 4(13)(-23)}}{2(13)} = \frac{-26 + 43.27}{26} = 0.66$$

Si $x = 0.66 \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{3(0.66) - 1}{2} = 0.49$

El beneficio es de $4x + 6y$

$\Pi = 4(0.66) + 6(0.49) = 5.58$ miles de u.m.

Realizando la comprobación a través del hessiano

$$
\begin{array}{lll}
Bxx = 2\lambda & & \\
Byy = 2\lambda & \begin{array}{l} H_2 = 4\lambda^2 > 0 \\ H_1 < 0 \end{array} & \text{máximo} \\
Bxy = 0 & &
\end{array}
$$

**10. Sabiendo que la función de producción de una empresa es: $z = 65 - 2(x-5)^2 - 4(y-4)^2$, los precios unitarios de los imputs $x$ e $y$ (en situación de competencia perfecta) son de $8$ u.m.y $4$ u.m. respectivamente y que el precio del bien producido es de $2$ u.m. determinar el beneficio máximo.**

Ingreso: $2z$
Gastos: 8x+4y

$$\Pi = 2z - 8x - 4y$$
$$\Pi = 2\left[65 - 2(x-5)^2 - 4(y-4)^2\right] - 8x - 4y$$
$$\Pi = 130 - 4(x-5)^2 - 8(y-4)^2 - 8x - 4y$$

Obteniendo las primeras derivadas

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -8(x-5) - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad -8x + 40 - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4$$
$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} = -16(y-4) - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad -16y + 64 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{15}{4}$$

Formando el hessiano

$$H = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -16 \end{vmatrix}$$

$$H_1 = -8$$
$$H_1 < 0$$

$$H_2 = (-8)(-16) - 0 = 128$$
$$H_2 > 0$$

por lo que es un máximo

**11. Supongamos que los precios de los plátanos ($p_P$) y naranjas ($p_N$) se ven influidos por las demandas respectivas de uno y otro producto a través de las siguientes expresiones:**

$$p_P = 110 - 3d_N - 5d_P \qquad\qquad p_N = 70 - 2d_N - 3d_P$$

**donde $p_N$ y $d_N$ representan el precio y la demanda de naranjas respectivamente y $p_P$ y $d_P$ lo análogo para los plátanos. Sabiendo que el costo conjunto de abastecer de estas frutas el mercado es de:**

$$CT = 2d_N^2 - 2d_N d_P + d_P^2 + 37.5$$

**¿Cuál será la demanda óptima para que el beneficio del vendedor sea máximo?**

---

Si denominamos
$x$ a la Demanda de Plátanos y $P_1$ al Precio de Plátanos
$y$ a la Demanda de Naranjas y $P_2$ al Precio de las Naranjas

$$p_1 = 110 - 3y - 5x$$
$$p_2 = 70 - 2y - 3x$$

**Ingresos** $IT = p_1 x + p_2 y = (110 - 3y - 5x)x + (70 - 2y - 3x)y$

$$IT = 110x - 3xy - 5x^2 + 70y - 2y^2 - 3xy = 110x + 70y - 6xy - 5x^2 - 2y^2$$

**Costos,** $CT = 2y^2 - 2xy + x^2 + 37.5$

$$\Pi = 110x + 70y - 6xy - 5x^2 - 2y^2 - 2y^2 + 2xy - x^2 - 37.5$$

$$\Pi = -6x^2 - 4y^2 - 4xy + 110x + 70y - 37.5$$

Obteniendo las Derivadas primeras

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -12x - 4y + 110 = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} = -8y - 4x + 70 = 0$$

Resolviendo el sistema obtenemos como resultado

$$y = 5, \qquad x = \frac{15}{2}$$

Para comprobar si los resultados corresponden a un máximo obtenemos las derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = -12 \qquad H_1 = \left|-12\right| < 0$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial y} = -4 \qquad H_2 = \begin{vmatrix} -12 & -4 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} = 96 - 16 = 80 > 0$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} = -8$$

$H_1 < 0$, $H_2 > 0$
Por lo tanto es un máximo

# 3. La integral

1. **Realizar la integral de la expresión**

$$\boldsymbol{\frac{9x^2}{5} - \frac{7}{2x^3} + \frac{10}{x}}$$

---

Planteando la integral

$$\int \left( \frac{9x^2}{5} - \frac{7}{2x^3} + \frac{10}{x} \right) dx$$

Reorganizando los términos para aplicar las reglas correspondientes

$$\int \left( \frac{9x^2}{5} - \frac{7}{2x^3} + \frac{10}{x} \right) dx = \int \left( \frac{9}{5} x^2 - \frac{7}{2} x^{-3} + \frac{10}{x} \right) dx$$

Se trata de una integral inmediata, por lo que al aplicar las reglas de integración

$$\int \left( \frac{9x^2}{5} - \frac{7}{2x^3} + \frac{10}{x} \right) dx = \frac{9}{5} \frac{x^{2+1}}{3} - \left( \frac{7}{2} \frac{x^{-3+1}}{-2} \right) + 10Ln|x| + C$$

Realizando las operaciones correspondientes se obtiene el resultado

$$\int \left( \frac{9x^2}{5} - \frac{7}{2x^3} + \frac{10}{x} \right) dx = \frac{9x^3}{15} + \frac{7}{4x^2} + 10Ln|x| + C$$

## 2. Encontrar la integral de la expresión $x^4 - \frac{8}{x^7} + \frac{3}{2x^5}$

Planteando la integral se tiene

$$\int \left(x^4 - \frac{8}{x^7} + \frac{3}{2x^5}\right) dx$$

Expresando la integral con los exponentes en el numerador con la finalidad de aplicar de forma directa las reglas de integración

$$\int \left(x^4 - \frac{8}{x^7} + \frac{3}{2x^5}\right) dx = \int \left(x^4 - 8x^{-7} + \frac{3}{2}x^5\right) dx$$

Aplicando las reglas de integración

$$\int \left(x^4 - \frac{8}{x^7} + \frac{3}{2x^5}\right) dx = \frac{x^{4+1}}{5} - 8\frac{x^{-7+1}}{-6} + \frac{3}{2}\frac{x^{-5+1}}{-4} + C$$

Al realizar las operaciones correspondientes obtenemos el resultado

$$\int \left(x^4 - \frac{8}{x^7} + \frac{3}{2x^5}\right) dx = \frac{x^5}{5} + \frac{4}{3x^6} - \frac{3}{8x^4} + C$$

**3. Encontrar**

$$\int x^2 \ln x \, dx$$

---

Aplicando la integración por partes, si $u = \ln x$ y $dv = x^2 dx$
Tendremos que $du = \frac{1}{x} dx$

$$v = \int x^2 dx \rightarrow v = \frac{x^3}{3}$$

De tal forma que

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int x^2 \ln x \, dx \quad = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \left(\frac{x^3}{3}\right)\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

Simplificando la expresión

$$\int x^2 \ln x \, dx \quad = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx$$

Aplicando las reglas de integración

$$\int x^2 \ln x \, dx \quad = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3} + C$$

Simplificando la expresión obtenemos el resultado

$$\int x^2 \ln x \, dx \quad = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C$$

Comprobando el resultado a través de su derivada

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C\right] = \frac{x^3}{3}\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(x^2) - \frac{x^2}{3}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C\right] = \frac{x^2}{3} + x^2 \ln x - \frac{x^2}{3}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C\right] = x^2 \ln x$$

**4. Encontrar**

$$\int xe^{2x}dx$$

---

Aplicando la integración por partes, si $u = x$ y $dv = e^{2x}dx$. Tendremos que $du = dx$

$$v = \int e^{2x}dx$$

Resolviendo por sustitución

$$u = 2x \to du = 2dx \to dx = \frac{du}{2}$$

Por lo que

$v = \int e^{2x}dx \to \int e^{u}\frac{du}{2} \to \frac{1}{2}\int e^{u}du$

$v = \frac{e^{u}}{2} \to v = \frac{e^{2x}}{2}$

De tal forma que

$\int udv = uv - \int vdu$

$\int xe^{2x}dx = x\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}dx$

$\int xe^{2x}dx = x\frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx$

Resolviendo por sustitución $\int e^{2x}\,dx$

$u = 2x \to du = 2dx \to dx = \frac{du}{2}$

$\int xe^{2x}dx = x\frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{u}\frac{du}{2}$

$\int xe^{2x}dx = x\frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{4}\int e^{u}\,du$

$\int xe^{2x}dx = x\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C$

$\int xe^{2x}dx = e^{2x}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) + C$

$\int xe^{2x}dx = e^{2x}\left(\frac{2x-1}{4}\right) + C$

$\int xe^{2x}dx = \frac{1}{4}(2x-1)e^{2x} + C$

**5. Obtener las siguientes Integración por el método de sustitución**

$$\int (6x-2)^{-4}dx \qquad \int (2x+9)^{-6}dx \qquad \int (5x+2)^{9}dx$$

$$\int (4x+2)^{5}dx \qquad \int (10x-15)^{4}dx$$

---

$$\int (6x-2)^{-4}dx$$

$u = 6x-2 \quad \frac{du}{dx} = 6 \quad dx = \frac{du}{6}$

$$\int u^{-4}\frac{du}{6} = \frac{1}{6}\int u^{-4}du = \frac{1}{6}\frac{u^{-3}}{-3} + c = -\frac{(6x-2)^{-3}}{18} + c = -\frac{1}{18(6x-2)^{3}} + c$$

$$\int (4x+2)^{5}dx$$

$u = 4x+2 \quad \frac{du}{dx} = 4 \quad dx = \frac{du}{4}$

$$\int u^{5}\frac{du}{4} = \frac{1}{4}\int u^{5}du = \frac{1}{4}\frac{u^{6}}{6} + c = \frac{(4x+2)^{6}}{24} + c$$

$$\int (2x+9)^{-6}dx$$

$u = 2x+9 \quad \frac{du}{dx} = 2 \quad dx = \frac{du}{2}$

$$\int u^{-6}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^{-6}du = \frac{1}{2}\frac{u^{-5}}{-5} + c = -\frac{(2x+9)^{-5}}{10} + c = -\frac{1}{10(2x+9)^{5}} + c$$

$$\int (10x-15)^{4}dx$$

$u = 10x-15 \quad \frac{du}{dx} = 10 \quad dx = \frac{du}{10}$

$$\int u^{4}\frac{du}{10} = \frac{1}{10}\int u^{4}du = \frac{1}{10}\frac{u^{5}}{5} + c = \frac{(10x+15)^{5}}{50} + c$$

$$\int (5x+2)^{9}dx$$

$u = 5x+2 \quad \frac{du}{dx} = 5 \quad dx = \frac{du}{5}$

$$\int u^{9}\frac{du}{5} = \frac{1}{5}\int u^{9}du = \frac{1}{5}\frac{u^{10}}{10} + c = \frac{(5x+2)^{10}}{50} + c$$

**6. Evaluar las integrales**

$$\int (x^2+3x-7)^5\,(2x+3)dx$$

$$\int \frac{1}{x\,ln\,x}dx$$

---

$$\int (x^2+3x-7)^5\,(2x+3)dx$$

Observamos que la diferencial de $x^2+3x-7$ es igual a $(2x+3)dx$, que aparece en la integral.

Por tanto, hacemos $x^2+3x-7=u$. Luego, $(2x+3)dx = du$.

Usando esta sustitución, la integral se reduce a $x^2+3x-7=u$.

Después $(2x+3)dx = du$

Usando esta sustitución, la integral se reduce a

$$\int (x^2+3x-7)^5\,(2x+3)dx = \int u^5\,du$$

$$\int (x^2+3x-7)^5\,(2x+3)dx = \frac{u^6}{6}+C$$

$$\int (x^2+3x-7)^5\,(2x+3)dx = \frac{1}{6}(x^2+3x-7)^6+C$$

En donde sustituimos el valor de $u$ otra vez.

$$\int \frac{1}{x\,ln\,x}dx$$

La integral dada es

$$\int \frac{1}{x\,ln\,x}dx = \int \frac{1}{ln\,x}\cdot\frac{1}{x}dx$$

Obsérvese que hemos separado el integrando de tal manera que la expresión $\frac{1}{x}dx$ ocurre como un factor distinto. Ésta es la diferencial de $\ln x$, y más aún, el resto del integrando también es una función simple de $\ln x$.

De modo que hacemos $\ln x = u$. Se sigue que $\frac{1}{x}dx = du$. La integral dada se reduce ahora a

$$\int \frac{1}{x\,ln\,x}dx = \int \frac{1}{ln\,x}\cdot\frac{1}{x}dx = \int \frac{1}{u}du = ln|u|+C$$

$$\int \frac{1}{x\,ln\,x}dx = \int \frac{1}{ln\,x}\cdot\frac{1}{x}dx = \int \frac{1}{u}du = ln|\ln x|+C$$

**7. Evaluar**

$$\int e^{x^2-5x}(2x-5)\,dx$$

$$\int x^2 e^{x^3+1} dx$$

---

Observemos que $(2x-5)dx$ aparece en la integral y esta cantidad es la diferencial de $x^2 - 5x$. En consecuencia, hacemos $u = x^2 - 5x$. Luego, $du = (2x-5)dx$ y la integral se transforma en

$$\int e^{x^2-5x}(2x-5)\,dx = \int e^u du = e^u + C$$

$$\int e^{x^2-5x}(2x-5)\,dx = e^{x^2-5x} + C$$

$$\int x^2 e^{x^3+1} dx$$

La derivada de $x^3+1$ es $3x^2$. Puesto que la expresión $x^2dx$ aparecen en el integrando, esto nos sugiere hacer $u = x^3+1$, además de $du = 3x^2$ y así $x^2dx = \frac{1}{3}du$. De tal forma que

$$\int x^2 e^{x^3+1} dx = \int e^u \left(\frac{1}{3}du\right)$$
$$\int x^2 e^{x^3+1} dx = \frac{1}{3}\int e^u du$$
$$\int x^2 e^{x^3+1} dx = \frac{1}{3}e^u + C$$
$$\int x^2 e^{x^3+1} dx = \frac{1}{3}e^{x^3+1} + C$$

**8. Evalúe las siguientes integrales definidas**

$$\int_a^b x^4 dx \qquad \int_1^3 \frac{1}{t} dt \qquad \int_0^2 e^{3x} dx$$

---

Tenemos que la integral

$$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5}$$

De tal forma que

$$\int_a^b x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_b^a = \frac{b^5}{5} - \frac{a^5}{5} = \frac{1}{5}(b^5 - a^5)$$

$$\int_1^3 \frac{1}{t} dt$$

$$\int_1^3 \frac{1}{t} dt = [\ln|t|]_1^3 = \ln|3| - \ln|1| = \ln 3$$

$$\int_0^2 e^{3x} dx$$

$$\int_0^2 e^{3x} dx = \left[\frac{e^{3x}}{3}\right]_0^2 = \frac{e^6}{3} - \frac{e^0}{3} = \frac{1}{3}(e^6 - 1)$$

**9. Determine el área acotada por la curva $y = 3x^2 + 2x + 5$, el eje $x$ y las líneas $x = 1$ y $x = 3$.**

Es claro que $y = f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ es no negativa para valores de $x$ en el intervalo definido por $1 \leq x \leq 3$. Así, el área requerida está dada por la siguiente integral definida:

$$\int_1^3 (3x^2 + 2x + 5)dx = [x^3 + x^2 + 5x]_1^3$$

$$\int_1^3 (3x^2 + 2x + 5)dx = [3^3 + 3^2 + 5(3)] - [1^3 + 1^2 + 5(1)]$$

$$\int_1^3 (3x^2 + 2x + 5)dx = 51 - 7$$

$$\int_1^3 (3x^2 + 2x + 5)dx = 44\ unidades\ cuadradas$$

**10. Evaluar**

$$\int_0^2 \int_3^4 xydxdy$$

---

La integral puede plantearse de una forma equivalente

$$\int_0^2 \int_3^4 xydxdy = \int_0^2 \left( \int_3^4 xydx \right) dy$$

Se usan integraciones sucesivas a partir de la integral interna. Primero se evalúa

$$\int_3^4 xydx$$

Se trata a $y$ como constante y se integra con respecto a $x$ entre los límites 3 y 4

$$\int_3^4 xydx = \left. \frac{x^2 y}{2} \right|_3^4$$

Al sustituir los límites para la variable $x$, se tiene

$$\frac{4^2 y}{2} - \frac{3^2 y}{2} = \frac{16y}{2} - \frac{9y}{2} = \frac{7}{2}y$$

Ahora se integra el resultado con respecto a y entre los límites 0 y 2

$$\int_0^2 \frac{7}{2} ydy = \left. \frac{7y^2}{4} \right|_0^2 = \frac{7 \times 2^2}{4} - 0 = 7$$

Así

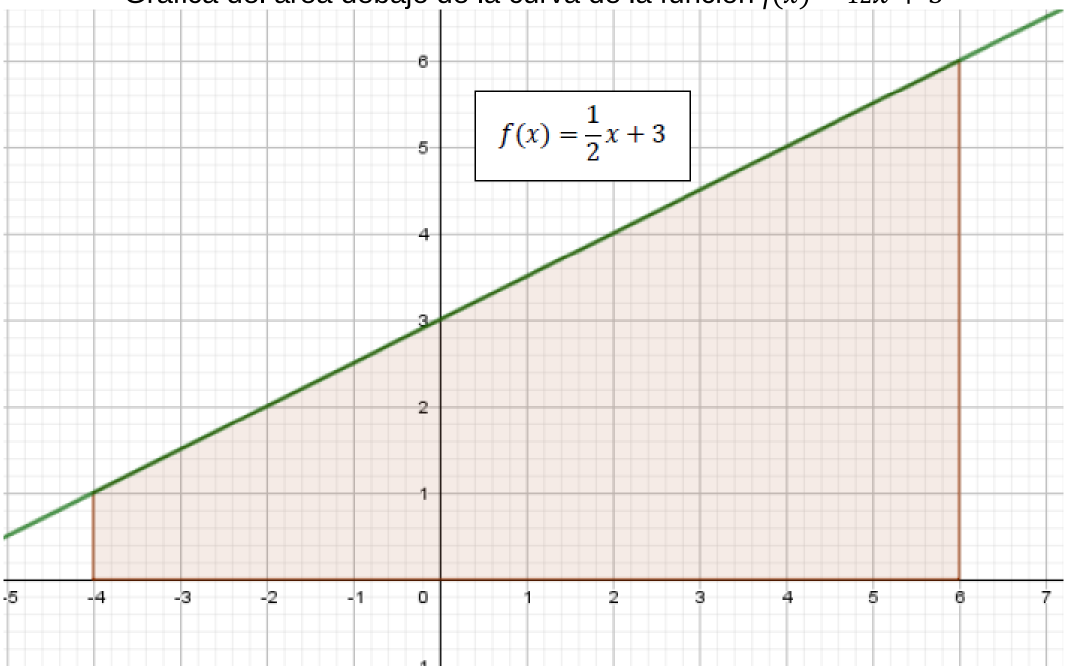
$$\int_0^2 \int_3^4 xydxdy = 7$$

# 4. Aplicaciones de la integral a problemas económicos

**1. Calcular el área bajo la curva de la función $f(x)$= $12x+3$ dentro del intervalo $-4 \leq x \leq 6$ utilizando el concepto de la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ y la fórmula de integral correspondiente.**

La gráfica correspondiente es

Gráfica del área debajo de la curva de la función $f(x) = 12x + 3$




La integral definida es

$$\int_{-4}^{6} \left(\frac{1}{2}x + 3\right) dx$$

De las fórmulas se obtiene el resultado

$$\int_{-4}^{6} \left(\frac{1}{2}x + 3\right) dx = \left(\frac{x^2}{4} + 3x\right)\Big|_{-4}^{6}$$

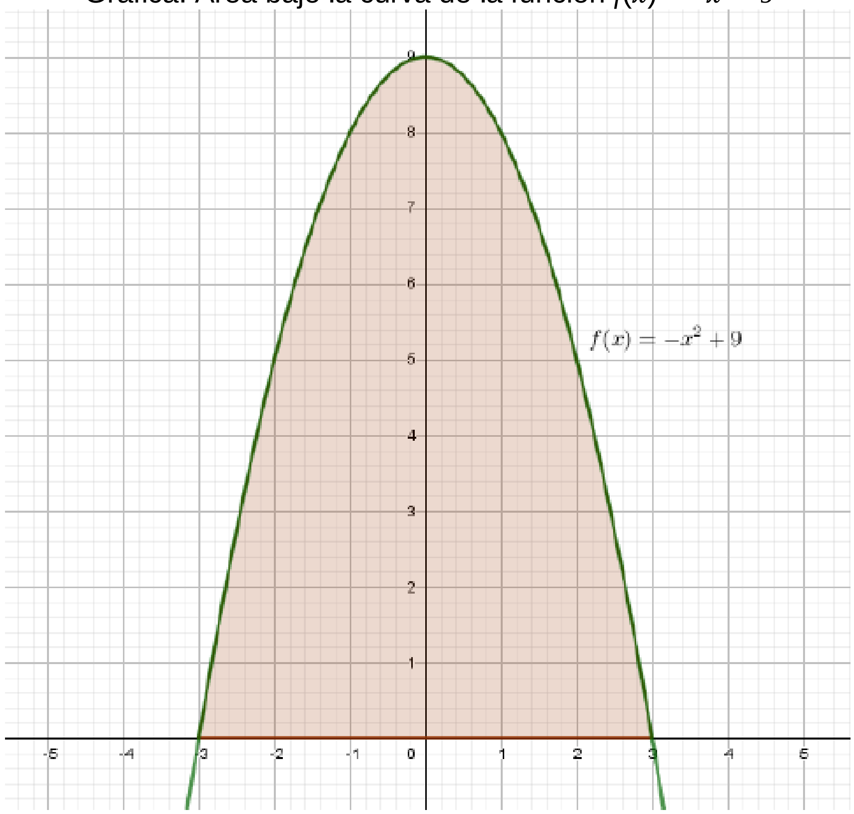
valuando el resultado

$$\left[\frac{6^2}{4} + 3(6)\right] - \left[\frac{(-4)^2}{4} + 3(-4)\right] = 27 + 8 = 35u^2$$

2. **Determinar el área bajo la curva de la función $f(x) = -x^2 + 9$ utilizando el método de la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ dentro del intervalo $-3 \leq x \leq 3$ y el eje '$x$'..**

La gráfica correspondiente es

Gráfica. Área bajo la curva de la función $f(x) = -x^2 + 9$




La integral definida es

$$\int_{-3}^{3} (-x^2 + 9)dx$$

De las fórmulas se obtiene el resultado

$$\int_{-3}^{3} (-x^2 + 9)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 9x\right)\Bigg|_{-3}^{3}$$

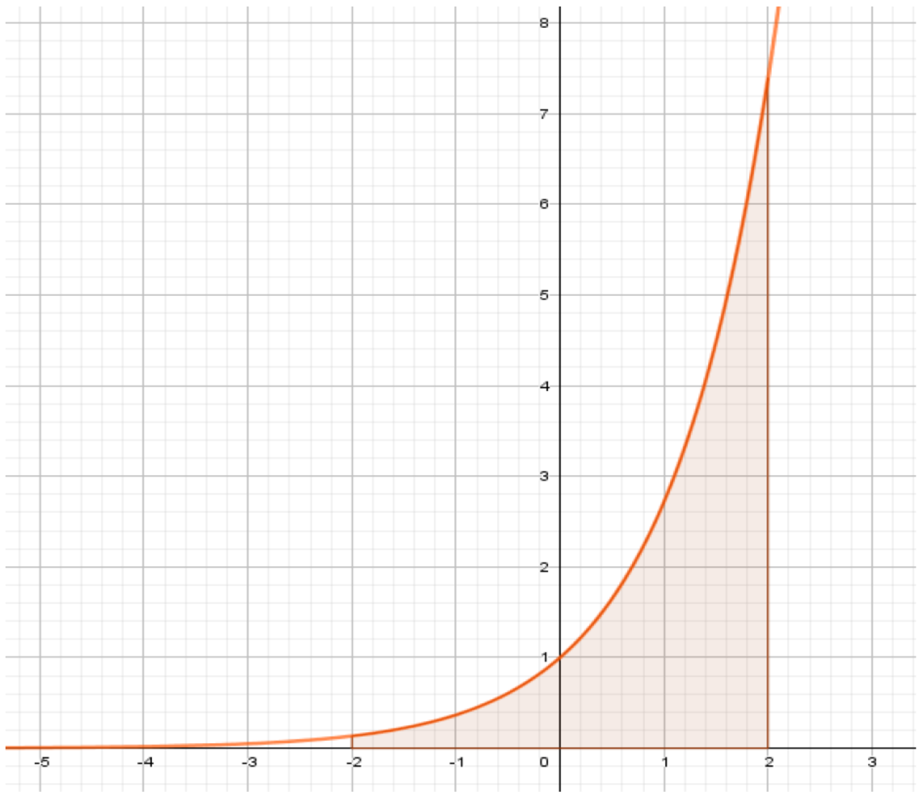
valuando el resultado

$$\left[-\frac{3^3}{3} + 9(3)\right] - \left[-\frac{(-3)^3}{3} + 9(-3)\right] = 18 - (-18) = 36u^2$$

**3. Determinar el área bajo la curva de la función $f(x) = e^x$ utilizando el método de la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ dentro del intervalo $-2 \leq x \leq 2$ y el eje '$x$'.**

La gráfica correspondiente es la siguiente

Gráfica. Área bajo la curva de la función $f(x) = e^x$




La integral definida es

$$\int_{-2}^{2} e^x dx$$

De las fórmulas

$$\int_a^b e^x dx = e^x + c$$

cómo de trata de una integral definida no se incluye la constante, de esta forma

$$\int_{-2}^{2} e^x dx = e^x|_{-2}^{2}$$

valuando el resultado

$$e^2 - e^{-2} = (2.71828182845905)^2 - (2.71828182845905)^{-2}$$
$$= 7.38905609893065 - 0.13533528323661 = 7.25372081569404u^2$$

**4. Si la curva de demanda de cierto producto es $p = 40 - 1.6q$ y la de oferta $p = 8 + 2.4q$. Determinar el excedente de los consumidores y de los productores**

Primero se debe determinar las condiciones de equilibrio, para ello se iguala la oferta con la demanda

$$8 + 2.4q = 40 - 1.6q$$
$$4q = 32 \quad \rightarrow \quad q^* = 8$$

Por lo que el precio de equilibrio será

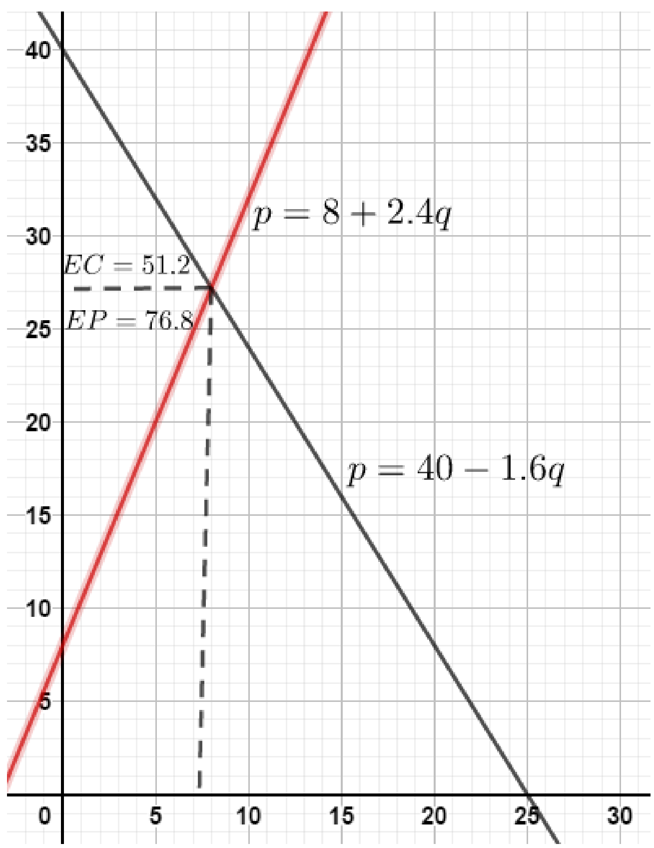
$$p = 8 + 2.4(8) \quad \rightarrow \quad p = 27.2$$

Excedente del consumidor

$$EC = \int_0^{q^+} (40 - 1.6q)dq - pq^*$$
$$EC = \int_0^{8} (40 - 1.6q)dq - (27.2)(8)$$
$$EC = 40q - \frac{1.6}{2}q^2 \Big|_0^8 - 217.6$$
$$EC = 40(8) - 0.8(8)^2 - 217.6$$
$$EC = 51.2\, u^2$$

Excedente del productor

$$EP = pq^* - \int_0^{q^+} (8 + 2.4q)dq$$
$$EC = (27.2)(8) - \int_0^{8} (8 + 2.4q)dq -$$
$$EP = 217.6 - [8q + 1.2q^2]_0^8$$
$$EC = 217.6 - [8(8) + 1.2(8)^2]$$
$$EC = 76.8\, u^2$$



**5. Dada la función de demanda $P = 42 - 5q - q^2$. Obtener el excedente del consumidor si el precio de equilibrio es de 6 um.**

Cómo ya se conoce el precio de equilibrio, se obtiene la cantidad correspondiente

$$6 = 42 - 5q - q^2 \quad \rightarrow \quad q^2 + 5q - 36 = 0$$

Factorizando

$$(q+9)(q-4) = 0 \quad \rightarrow \quad q = -9, \quad q = 4$$

La cantidad demandada de equilibrio es de 4 unidades

Con ello, el excedente del consumidor

$$EC = \int_0^{q^+} (42 - 5q - q^2)dq - pq^*$$

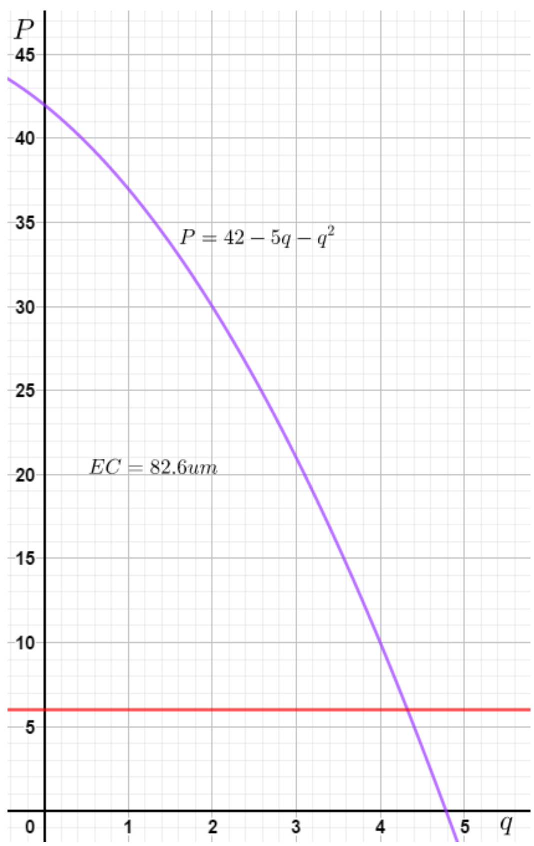
$$EC = \int_0^4 (42 - 5q - q^2)dq - (6)(4)$$

$$EC = 42q - \frac{5}{2}q^2 - \frac{1}{3}q^3 \Big|_0^4 - 24$$

$$EC = \left[42(4) - \frac{5}{2}(8)^2 - \frac{1}{3}(4)^2\right] - 217.6$$

$$EC = (168 - 40 - 21.3) - 24$$

$$EC = 82.6\, u^2$$



6. **Dada la función de demanda $q = 64p^{-2}$. Obtener el excedente del consumidor si el precio de equilibrio es de 4 um.**

---

Cómo ya se conoce el precio de equilibrio, se obtiene la cantidad correspondiente

$$q = \frac{64}{4^2} \quad \rightarrow \quad q = \frac{64}{16} \quad \rightarrow \quad q = 4$$

La cantidad demandada de equilibrio es de 4 unidades

Se requiere la función inversa de la demanda

$$q = \frac{64}{p^2} \quad \rightarrow \quad p^2 = \frac{64}{q} \quad \rightarrow \quad p = \frac{8}{\sqrt{q}}$$

$$(q + 9)(q - 4) = 0 \qquad \rightarrow \quad q = -9, \quad q = 4$$

Con ello, el excedente del consumidor

$$EC = \int_0^{q^+} \left(\frac{8}{\sqrt{q}}\right) dq - pq^*$$

$$EC = \int_0^{4} \left(\frac{8}{\sqrt{q}}\right) dq - (4)(4)$$

$$EC = 16q^{1/2}\Big|_0^4 - 16$$

$$EC = 16(4)^{1/2} - 16$$

$$EC = 32 - 16$$

$$EC = 16\, u^2$$

**7. Si una empresa monopólica con costos marginales constantes de 8 pesos enfrenta una demanda $Q = 100 - 2P$, ¿Qué tan grande es la pérdida de bienestar del monopolio?**

Para determinar el beneficio que obtiene el monopolio requerimos la función inversa de demanda, la cual es

$$Q_m = 100 - 2P_m$$
$$P_m = 50 - 0.5Q_m$$

De tal forma que los beneficios obtenidos son:

$$\pi_m = IT - CT$$
$$\pi_m = (50 - 0.5Q_m)Q_m - 8Q_m$$
$$\pi_m = 42Q_m - 0.5{Q_m}^2$$

Para determinar los valores óptimos se deriva la función anterior

$$\frac{d\pi_m}{dQ_m} = 42 - Q_m = 0 \rightarrow Q_m = 42$$

Con lo cual el precio y los beneficios serán:

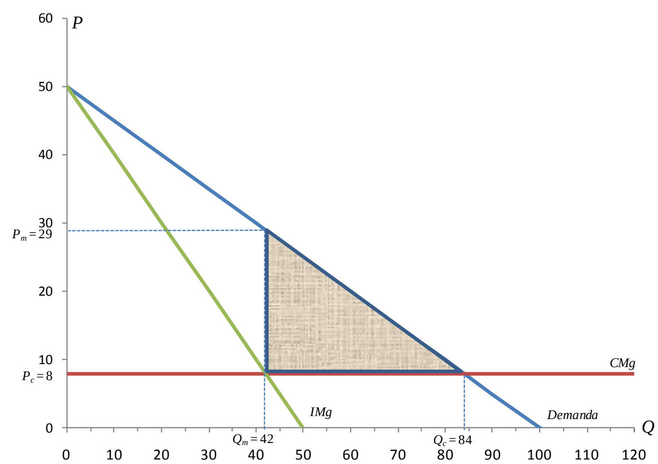
$$P_m = 50 - 0.5(42) \rightarrow P_m = 29$$
$$\pi_m = IT_m - CT_m = (29)(42) - 8(42) \rightarrow \pi_m = 882$$

Por otro lado, para obtener el nivel de producción en términos competitivos se aplica la condición $P = CMg$

$$P_c = 50 - 0.5Q_c = 8 = CMg$$

Con lo cual

$$Q_c = \frac{42}{0.5} \rightarrow Q_c = 84$$




Con ello, la pérdida irrecuperable será:

$$\frac{1}{2}(29 - 8)(84 - 42) = 441$$

O bien, aplicando la fórmula

$$PB = \frac{(a - CMg)^2}{8b}$$

, donde los términos a y b se toman de la función inversa de la demanda

$$P = a - bQ \Rightarrow P_m = \underbrace{50}_{a} - \underbrace{0.5}_{b}Q_m$$

$$PB = \frac{(50-8)^2}{8(0.5)} \rightarrow PB = 441$$

**8. La función de costo marginal de una empresa a un nivel de producción $x$ es**

$$CMg(x) = 23.5 - 0.01x$$

**Calcule el incremento en el costo total cuando el nivel de producción se incrementa de 1,000 a 1,500 unidades.**

El incremento en el costo total está dado por

$$\int_{1,000}^{1,500} CMg(x)dx = \int_{1,000}^{1,500} (23.5 - 0.01x)dx$$

$$\int_{1,000}^{1,500} CMg(x)dx = \left[23.5x - 0.01\left(\frac{x^2}{2}\right)\right]_{1,000}^{1,500}$$

$$\int_{1,000}^{1,500} CMg(x)dx = [23.5(1,500) - 0.005(1,500^2)] - [23.5(1,000) - 0.005(1,000^2)]$$

$$\int_{1,000}^{1,500} CMg(x)dx = 35,250 - 11,250 - [23,500 - 5,000] = 5,500$$

El incremento en el costo es por consiguiente de \$5,500

9. **Para cierto país, la propensión marginal al consumo está dada por**

$$\boldsymbol{\frac{dC}{dI} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2\sqrt{3I}}}$$

**Donde el consumo C es una función del ingreso nacional I. Aquí, I se expresa en grandes denominaciones de dinero. Determinar la función de consumo para el país, si se sabe que el consumo es de 10, cuando I = 12**

---

Como la propensión marginal al consumo es la derivada de C, se tiene

$$C = C(I) = \int \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2\sqrt{3I}}\right) dI = \int \frac{3}{4} dI - \frac{1}{2}\int (3I)^{-1/2} dI$$

$$C = C(I) = \int \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2\sqrt{3I}}\right) dI = \frac{3}{4} I - \frac{1}{2}\int (3I)^{-1/2} dI$$

Si se establece que $u = 3I$, entonces $du = 3dI = d(3I)$ y

$$C = C(I) = \int \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2\sqrt{3I}}\right) dI = \frac{3}{4} I - \frac{1}{2}\frac{1}{3}\int (3I)^{-1/2} d(3I)$$

$$C = C(I) = \int \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2\sqrt{3I}}\right) dI = \frac{3}{4} I - \frac{1}{6}\frac{(3I)^{-1/2}}{\frac{1}{2}} + k$$

$$C = \frac{3}{4} I - \frac{\sqrt{3I}}{3} + k$$

Cuando I= 12, C = 10, por lo que

$$C = \frac{3}{4}(12) - \frac{\sqrt{3(12)}}{3} + k$$

$$C = 9 - 2 + k$$

Así, $k = 3$ y la función de consumo es

$$C = \frac{3}{4} I - \frac{\sqrt{3I}}{3} + 3$$

**10. La función de costo marginal de un fabricante es**

$$\boldsymbol{\frac{dc}{dq} = 0.6q + 2}$$

**Si la producción actual es $q$ = 80 unidades por semana, ¿Cuánto más costará incrementar la producción a 100 unidades por semana?**

---

La función de costo total es $c = c(q)$ y se desea encontrar la diferencia $c(100) - c(80)$.
La razón de cambio de $c$ es $\frac{dc}{dq}$, entonces tendremos

$$c(100) - c(80) = \int_{80}^{100} \frac{dc}{dq} dq = \int_{80}^{100} (0.6q + 2) dq$$

$$c(100) - c(80) = \int_{80}^{100} \frac{dc}{dq} dq = \left[\frac{0.6q^2}{2} + 2q\right]_{80}^{100}$$

$$c(100) - c(80) = \int_{80}^{100} \frac{dc}{dq} dq = [0.3q^2 + 2q]_{80}^{100}$$

$$c(100) - c(80) = \int_{80}^{100} \frac{dc}{dq} dq = [0.3(100)^2 + 2(100)] - [0.3(80)^2 + 2(80)]$$

$$c(100) - c(80) = \int_{80}^{100} \frac{dc}{dq} dq = 3{,}200 - 2{,}080 = 1{,}120$$

Sí c está en pesos, entonces el costo de incrementar la producción de 80 a 100 unidades es de $1,120

# BIBLIOGRAFÍA

- Arya, Lardner e Ibarra (2009). Matemáticas Aplicadas  la administración y a la economía. Pearson, 5ª ed. México

- Budnick, F. (2007). Matemáticas Aplicadas para la administración, economía y Ciencias sociales. McGraw Hill, 4ª ed. México

- Haeusseler, E. F., y Paul, R. S. (2008). *Matemáticas para administración y economía.*  México: Ed. Pearson- Prentice Hall.

- Knut S. y Hammond M. (2012). *Matemáticas para el análisis Económico*, Prentice Hall, Madrid España

- Salas, M. (2018). Matemáticas para el estudio d la microeconomía. Editorial comares. España

- Stewart (2012) Cálculo de varias variables, Cengagelearning. México

- Stewart, Redlin y Watson (2012). Precálculo, Matemáticas para el cálculo 5.a ed. Cengage learning, México.

- Swokowski, E. (1989) *Cálculo con geometría analítica.* Iberoamerica.

- Swokowski, E. y Cole J. (2012). Algebra y trigonometría con geometría analítica, Cengage, 13 ed. México

- Tan, S. (2018). Matemáticas aplicadas a los negocios, las ciencias sociales y de la vida, 6ª ed. Cengage