Boletín de Estadística e Investigación Operativa
Vol. 25, No. 3, Octubre 2009, pp. 206-217

Investigación Operativa

Generating functions: a useful tool for computing power indices

José Mª Alonso Meijide and Balbina Casas Méndez
Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Santiago de Compostela
✉ josemaria.alonso@usc.es, balbina.casas.mendez@usc.es

Abstract

In the theory of simple games, the study of power indices plays an important role. One of the main difficulties with these indices is that computation generally requires the sum of a very large number of terms. The generating functions are efficient tools to make more easy this computation. In this paper, we provide a revision of the main elements of this method when we use it to compute the Shapley-Shubik and the Banzhaf-Coleman power indices. Further, we provide a new method to compute the Banzhaf-Coleman index.

Keywords: simple games, power indices, generating functions.
AMS Subject classifications: 91-08, 91A12, 91F10.

1. Preliminares

El objetivo de este trabajo es revisar la técnica de las funciones generatrices y su aplicación en el cálculo de los índices de poder de Shapley-Shubick (1954) y Banzhaf-Coleman (Banzhaf 1965 y Coleman 1971). Asimismo, se muestra un método proporcionado por Taylor (1995) que permite obtener una nueva función generatriz para determinar el índice de Banzhaf-Coleman. Comenzamos revisando algunos conceptos básicos.

En un juego cooperativo con utilidad transferible, también llamado juego TU, los jugadores disponen de mecanismos que les permiten establecer acuerdos vinculantes. La utilidad derivada de la cooperación de un conjunto de jugadores puede ser transferida y dividida de cualquier forma entre ellos. Uno de estos juegos queda definido conociendo el conjunto de jugadores participantes, N, y la denominada función característica del juego, v, que asigna a cada coalición la utilidad que sus miembros pueden obtener del juego, independientemente de la forma de actuar del resto de jugadores. Uno de los principales objetivos de la teoría de juegos cooperativos es el estudio de valores, es decir, reglas de reparto que asignan a cada juego un vector, de tal forma, que cada coordenada del vector representa el pago asignado a cada uno de los jugadores. Existen numerosas soluciones, dos de las cuales, muy utilizadas, son el valor de Shapley (Shapley, 1953) y el de Banzhaf (Banzhaf, 1965).

Una importante familia de juegos cooperativos con utilidad transferible es la formada por los juegos simples, que tienen numerosas aplicaciones, especialmente en el campo de la ciencia política. En un juego simple, la función característica es una función monótona, no nula, que sólo toma dos valores, 0 y 1.

Dado un juego simple (N, v), una coalición S se denomina ganadora si $v(S) = 1$. En caso contrario se dice que S es una coalición perdedora. Se denotará por W el conjunto de todas las coaliciones ganadoras, es decir, $W = \{S \subseteq N / v(S) = 1\}$. Como la función es no nula y monótona, es evidente que N es un elemento de W y que si $S \in W$ y $S \subseteq T$, entonces $T \in W$. Una coalición ganadora es minimal si no contiene a ninguna otra coalición ganadora. Se denotará por W^m el conjunto de todas las coaliciones ganadoras minimales, es decir, $W^m = \{S \in W / v(T) = 0, \text{ para todo subconjunto } T \subset S\}$. Un juego simple puede caracterizarse dando el conjunto de coaliciones ganadoras, o también, dando el conjunto de coaliciones ganadoras minimales. Por lo tanto, para definir un juego simple bastará proporcionar el par (N, W) o el par (N, W^m). Dentro de la familia de juegos simples, que pasaremos a denotar por $SI(N)$, los juegos de mayoría ponderada desempeñan un papel importante.

Definición 1.1. *Un juego $(N, v) \in SI(N)$ se dice que es de mayoría ponderada si existe un conjunto de pesos $w_1, w_2, ..., w_n$ para los jugadores, con $w_i \geq 0$, $1 \leq i \leq n$, y una cantidad $q \in \mathbb{R}^+$ tales que $S \in W$ si y sólo si $\sum_{i \in S} w_i \geq q$. A la cantidad q se le denomina mayoría del juego.*

Habitualmente un juego de mayoría ponderada se representa por

$$[q; w_1, w_2, ..., w_n].$$

Un parlamento puede verse como un juego de mayoría ponderada, en el que los jugadores son los partidos políticos, los pesos son el número de escaños de los que dispone cada partido y la mayoría del juego coincide con el número mínimo de votos necesarios para ganar una votación. Si el criterio es la mayoría simple, $q = E(t) + 1$, donde t es la mitad del número total de escaños del parlamento (si $x \in \mathbb{R}$, $E(x)$ denotará la parte entera de x). Otros ejemplos de juegos de mayoría ponderada son el Consejo de Seguridad de las Naciones Unidas o el Consejo de Ministros de la Unión Europea.

1.1. Índices de poder

Cuando se trabaja con juegos simples, en lugar de hablar de valor, se suele utilizar el término índice de poder, ya que los juegos simples se emplean normalmente como modelos de organismos de decisión en los que los acuerdos suelen tomarse por votación. El interés de estos juegos suele centrarse en conocer el poder o influencia que tiene un jugador sobre el resultado final del mismo. Si bien puede emplearse cualquier concepto de solución definido en el contexto de los juegos TU, existen otros de aplicabilidad exclusiva a este ámbito. De hecho, inicialmente, el valor de Banzhaf se planteó sólo para juegos simples, hasta que Owen (Owen, 1975) extendió este concepto a la familia de juegos TU. Numerosos trabajos en teoría de juegos están dedicados a la definición, al estudio y a las aplicaciones de los índices de poder. Una revisión reciente sobre este tema se encuentra en el libro de Laruelle y Valenciano (2008).

Definición 1.2. *Un índice de poder sobre $SI(N)$ es una aplicación*

$$f : SI\left(N\right) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

que a cada juego $(N,v) \in SI\left(N\right)$ le hace corresponder un vector de $\mathbb{R}^n$, donde la componente i-ésima del vector proporciona una medida del poder o influencia que tiene el jugador i.

El valor de Shapley, φ, denominado en el contexto de los juegos simples índice de poder de Shapley-Shubik (Shapley y Shubik, 1954), asigna a un jugador i, la media aritmética de las contribuciones que dicho jugador hace a las coaliciones formadas por los jugadores que preceden a i en las $n!$ permutaciones posibles de los jugadores. Como para juegos simples $v\left(S\right) = 1$ si $S \in W$ y $v(S) = 0$ en otro caso, se tiene que $v(S \cup \{i\}) - v(S) = 1$ si el jugador i hace ganadora a S, siendo $v(S \cup \{i\}) - v(S) = 0$ en cualquier otro caso. Por lo tanto:

$$\varphi_i\left(N,v\right) = \sum_{S \in S(i)} \frac{s!\left(n-s-1\right)!}{n!},$$

donde $S\left(i\right) = \left\{S \subseteq N \backslash \left\{i\right\} / S \notin W \text{ } y \text{ } S \cup \left\{i\right\} \in W\right\}.$

El conjunto de pares de coaliciones $(S, S \cup \{i\})$ donde $S \in S\left(i\right)$, se denomina conjunto de "swings" para el jugador i; es decir, un swing para un jugador i es un par de coaliciones $(S, S \cup \{i\})$ donde $S \subseteq N \backslash \{i\}$ es tal que S es perdedora mientras que $S \cup \{i\}$ es ganadora.

Definición 1.3. *Sea (N,v) un juego simple y σ una permutación de N. Para $i \in N$, se dice que i es un pívot para σ si $\Pr\left(i,\sigma\right) \notin W$ y $\Pr\left(i,\sigma\right) \cup \{i\} \in W$ donde $\Pr\left(i,\sigma\right)$ denota el conjunto de jugadores j tales que $\sigma\left(j\right) < \sigma\left(i\right)$*[1]*.*

Utilizando el concepto de pívot, se tiene que el índice de poder de Shapley-Shubik de un jugador i es la probabilidad de que dicho jugador sea pívot, suponiendo una distribución uniforme sobre el conjunto de todas las permutaciones del conjunto de jugadores N.

[1]Si σ es una permutación de N e $i \in N$, $\sigma(i)$ denota la posición de i en la permutación σ

El valor de Banzhaf, β, denominado en este contexto índice de poder de Banzhaf-Coleman (Banzhaf, 1965 y Coleman, 1971), asigna a un jugador i, la media aritmética de las contribuciones que dicho jugador hace a las coaliciones a las que se puede unir. De forma similar a la considerada anteriormente para el índice de poder de Shapley-Shubik, se tiene que el índice de poder de Banzhaf-Coleman de un jugador i en el juego simple (N, v) es:

$$\beta_i\left(N, v\right) = \sum_{S \in S(i)} \frac{1}{2^{n-1}}.$$

El índice de poder de Banzhaf-Coleman de un jugador i se corresponde con el número de swings para el jugador i, normalizado por el número de coaliciones a las que se puede unir.

1.2. Funciones generatrices

Los índices de poder de Shapley-Shubik y de Banzhaf-Coleman pueden obtenerse de manera exacta o aproximada utilizando diferentes herramientas. Dos de las más utilizadas son las denominadas extensiones multilineales y las funciones generatrices. Ésta última, para el caso de juegos de mayoría ponderada, se basa en la utilización de una técnica del análisis combinatorio. Hablando a grosso modo, una función generatriz es un polinomio que permite enumerar el conjunto de posibles coaliciones, mientras hace el seguimiento de sus respectivos pesos. Es muy útil porque permite obtener el valor exacto de los índices incluso en juegos con muchos jugadores. Esta técnica fue empleada por David G. Cantor (1962) (aparece en Lucas (1983)) para el cálculo del índice de poder de Shapley y por Brams y Affuso (1976) para el cálculo del índice de poder de Banzhaf. Fernández et al. (2002) estudian la distribución del poder en el Consejo de Ministros de la Unión Europea restringido por una estructura de comunicación. Algaba et al. (2003) usaron el mismo método para calcular índices de poder para juegos de doble y triple mayoría. Alonso-Meijide y Bowles (2005) estudiaron la distribución del poder de los diferentes países que constituyen el Fondo Monetario Internacional. Algaba et al. (2007) y Alonso-Meijide et al. (2009) analizaron la distribución del poder de las naciones en la Unión Europea usando esos métodos para las reglas de votación dadas por el Tratado de Niza de Diciembre de 2000 y las nuevas reglas propuestas por el Consejo de la Unión Europea en Junio de 2007. A continuación, se explican brevemente los fundamentos del método de las funciones generatrices.

A cada sucesión de números reales $a = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ puede hacérsele corresponder la serie

$$f_a\left(t\right) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j.$$

Esta serie, $f_a\left(t\right)$, se denomina función generatriz de la sucesión a, y puede ser finita o infinita. Notemos que en esta serie, la variable t no tiene significado propio y sólo sirve para identificar a_j como el coeficiente correspondiente a t^j en el desarrollo de $f_a(t)$. Por este motivo, aunque en la mayoría de los problemas combinatorios la serie $f_a(t)$ es finita, la cuestión relativa a la convergencia de la serie no es una cuestión relevante si t se interpreta como una variable formal. Para facilitar la comprensión de este concepto, se proporcionan dos ejemplos. El primero se corresponde con una sucesión finita.

Ejemplo 1.1. *Considérese el producto finito de binomios lineales*

$$\prod_{r=1}^{n}(1+x_r t)=\sum_{r=0}^{n} a_r t^r,$$

donde $a_o=1$ *y para* $r>0$, a_r *está dado por*

$$a_r=\sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_r\leq n} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_r}.$$

Los coeficientes a_r *son funciones simétricas de la variables* $x_1,x_2,\ldots,x_n$. *El número de sumandos del coeficiente* a_r *coincide con el número de combinaciones de* r *elementos de un conjunto formado por* n *elementos. Si todos los valores* x_r *son iguales a* 1 *se tendrá que*

$$(1+t)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}t^r.$$

Por lo tanto, la función $f(t)=(1+t)^n$ *es la función generatriz de la sucesión*

$$a=\left\{\binom{n}{r}/r=0,1,\ldots,n\right\}.$$

Ejemplo 1.2. *Considérese ahora la sucesión infinita de números reales* $\{1,1,\ldots\}$. *La función generatriz de esta sucesión es la serie*

$$f_a(t)=1+t+t^2+t^3+\ldots=\sum_{r=0}^{\infty}t^r,$$

que es convergente a la función $f(t)=\dfrac{1}{1-t}$, *cuando* $|t|<1$. *Por lo tanto, la función* $f(t)=\dfrac{1}{1-t}$ *es la función generatriz de la sucesión* $\{1,1,\ldots\}$, *porque su desarrollo en serie de potencias permite asociar los coeficientes numéricos de los infinitos sumandos con los elementos de la sucesión.*

Las funciones generatrices proporcionan un método para el recuento del número de elementos $c(r)$ de un conjunto finito, cuando estos elementos tienen una configuración que depende de una característica r. Así, en el primer ejemplo se vio que los coeficientes binomiales $\binom{n}{r}$ pueden obtenerse mediante la función $(1+t)^n$, ya que coinciden con los coeficientes de la serie formal.

Se pueden emplear funciones generatrices de varias variables, por ejemplo

$$S(x,y,z) = \sum_{k\geq 0}\sum_{j\geq 0}\sum_{l\geq 0} c(k,j,l)\, x^k y^j z^l,$$

donde $c(k,j,l)$ son números reales que dependen de k, j y l.

Para un estudio más detallado de los fundamentos teóricos de las funciones generatrices y otros métodos de análisis combinatorio, puede consultarse el libro de Ríbnikov (1988).

2. Funciones generatrices y juegos de mayoría ponderada

Como se vio anteriormente, un juego de mayoría ponderada es un juego simple que puede representarse abreviadamente por $[q; w_1, w_2, ..., w_n]$. Se denotará por $w(S)$ a la cantidad $\sum_{i\in S} w_i$ y se hará la suposición de que los pesos son enteros.

2.1. Funciones generatrices y el índice de Banzhaf-Coleman

La siguiente proposición determina el número de swings de un jugador i en un juego simple de mayoría ponderada.

Proposición 2.1. *Sea (N,v) un juego simple de mayoría ponderada dado por $[q; w_1, w_2, ..., w_n]$. Entonces el número de swings del jugador $i \in N$ es igual a*

$$\eta_i(v) = \sum_{k=q-w_i}^{q-1} b_k^i,$$

siendo b_k^i el número de coaliciones $S \subseteq N$ tales que $i \notin S$ y $w(S) = k$.

El índice de poder de Banzhaf-Coleman de un jugador $i \in N$ en un juego (N,v) es igual a $\beta_i(N,v) = \eta_i(v)/2^{n-1}$. El siguiente resultado debido a Brams y Affuso (1976) proporciona una función generatriz que permite el cálculo de los números $\left\{b_k^i\right\}_{k\geq 0}$.

Proposición 2.2. *Sea (N,v) un juego simple de mayoría ponderada dado por $[q; w_1, w_2, ..., w_n]$. Entonces para un jugador $i \in N$, la función generatriz de los números $\left\{b_k^i\right\}_{k\geq 0}$, definidos anteriormente, viene dada por*

$$B_i(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \left(1 + x^{w_j}\right).$$

Se va a ilustrar con un ejemplo la utilidad de esta proposición para el cálculo del índice de poder de Banzhaf-Coleman.

Ejemplo 2.1. *Consideremos un juego simple de mayoría ponderado dado por* $[30; 28, 16, 5, 4, 3, 3]$.

Para calcular el número de swings del jugador 1*, considérese la función:*

$$\begin{aligned}&B_1(x) = \left(1+x^{16}\right)\left(1+x^5\right)\left(1+x^4\right)\left(1+x^3\right)^2\\&= x^{31}+2x^{28}+x^{27}+x^{26}+x^{25}+2x^{24}+2x^{23}+x^{22}+x^{21}+x^{20}+2x^{19}\\&+x^{16}+x^{15}+2x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+2x^8+2x^7+x^6+x^5+x^4+2x^3\\&+1.\end{aligned}$$

Entonces, se eligen los coeficientes de los monomios de la variable x *en los que el exponente es* k*, para* k *entre 2 y 29 y se obtiene que* $\eta_1(v) = \sum_{k=2}^{29} b_k^1 = 30$*. De forma similar se tiene que* $\eta_2(v) = \eta_3(v) = \eta_4(v) = \eta_5(v) = \eta_6(v) = 2$ *y el índice de poder de Banzhaf-Coleman es igual a*

$$\beta(N,v) = (15/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16).$$

2.2. Funciones generatrices y el índice de Shapley-Shubik

Se analizará ahora el índice de poder de Shapley-Shubik. Este índice en un juego simple (N,v) es igual a:

$$\varphi_i(N,v) = \sum_{S\in S(i)} \frac{s!\,(n-s-1)!}{n!}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{j!\,(n-j-1)!}{n!} d_j^i,$$

donde d_j^i representa el número de swings para el jugador i en coaliciones de tamaño j. Siguiendo un razonamiento similar al que se hizo anteriormente, se tiene que, para cualquier valor de j entre 0 y $n-1$,

$$d_j^i = \sum_{k=q-w_i}^{q-1} a_{kj}^i,$$

siendo a_{kj}^i el número de coaliciones $S \subseteq N$ formadas por j jugadores tales que $i \notin S$ y $w(S) = k$. El siguiente resultado, debido a David G. Cantor (1962), proporciona una función generatriz que permite el cálculo de los números $\left\{a_{kj}^i\right\}_{k\geq 0, j\geq 0}$.

Proposición 2.3. *Sea* (N, v) *un juego simple de mayoría ponderada dado por* $[q; w_1, w_2, ..., w_n]$. *Entonces, para un jugador* $i \in N$, *la función generatriz de los números* $\left\{a_{kj}^i\right\}_{k\geq 0, j\geq 0}$, *definidos anteriormente, viene dada por*

$$S_i(x, z) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} (1 + x^{w_j} z).$$

A partir de esta proposición, se deduce que

$$S_i(x, z) = \sum_{j=0}^{n-1} \left[\sum_{k=0}^{w(N)} a_{kj}^i x^k\right] z^j.$$

Para determinar el índice de poder de Shapley-Shubik es necesario calcular los valores d_j^i que pueden identificarse por un polinomio de la forma

$$g_i(z) = \sum_{j=0}^{n-1} d_j^i z^j,$$

y como $d_i^j = \sum_{k=q-w_i}^{q-1} a_{kj}^i$, se tiene que

$$g_i(z) = \sum_{j=0}^{n-1} d_j^i z^j = \sum_{j=0}^{n-1} \left[\sum_{k=q-w_i}^{q-1} a_{kj}^i\right] z^j.$$

Por tanto, para determinar los coeficientes de $g_i(z)$ es suficiente con seleccionar los coeficientes de los monomios $x^k z^j$ en los que el exponente k de la variable x tome valores entre $q - w_i$ y $q - 1$.

Ilustramos este procedimiento con el Ejemplo 2.1.

Ejemplo 2.2. *Partimos del mismo juego simple de mayoría ponderada considerado en el ejemplo anterior:* $[30; 28, 16, 5, 4, 3, 3]$.

En este caso, se va a calcular el índice de poder de Shapley-Shubik correspondiente al jugador 2*; para ello, se considera la función:*

$$S_2(x, z) = \left(1 + x^{28}z\right)\left(1 + x^5 z\right)\left(1 + x^4 z\right)\left(1 + x^3 z\right)^2$$

$$= x^{43}z^5 + 2x^{40}z^4 + x^{39}z^4 + x^{38}z^4 + x^{15}z^4 + x^{37}z^3 + 2x^{36}z^3$$

$$+2x^{35}z^3 + x^{34}z^3 + 2x^{12}z^3 + x^{11}z^3 + x^{10}z^3 + x^{33}z^2 + x^{32}z^2$$

$$+2x^{31}z^2 + x^9 z^2 + 2x^8 z^2 + 2x^7 z^2 + x^6 z^2 + x^{28}z + x^5 z + x^4 z + 2x^3 z + 1.$$

Se eligen ahora los coeficientes de los monomios $x^k z^j$ *en los que el exponente* k *de la variable* x *tome valores entre* 14 *y* 29 (*en este caso son sólo dos* $x^{15}z^4$ *y* $x^{28}z$), *por lo que*

$$g_2(z) = \sum_{j=0}^{5} d_j^2 z^j = z^4 + z,$$

y finalmente, el índice de poder de Shapley-Shubik del jugador 2 *es igual a*

$$\varphi_2(N,v) = \sum_{j=0}^{5} \frac{j!\,(n-j-1)!}{n!} d_j^2 = \frac{4!(6-4-1)!}{6!}1 + \frac{1!(6-1-1)!}{6!}1 = \frac{1}{15}.$$

De modo similar, se obtendría el índice de poder de Shapley-Shubik de los restantes jugadores $\varphi(N,v) = (2/3, 1/15, 1/15, 1/15, 1/15, 1/15)$.

2.3. Una nueva función generatriz para el índice de Banzhaf-Coleman

Para completar este trabajo, presentamos un método alternativo que nos permite calcular el número de swings de cada jugador. Este procedimiento está basado en el siguiente resultado, introducido en Taylor (1995), cuya demostración se incluye.

Proposición 2.4. *Sea* (N,v) *un juego simple de mayoría ponderada dado por* $[q; w_1, w_2, ..., w_n]$. *Entonces para un jugador* $i \in N$, *el número de swings viene dado por* $\eta_i(v) = 2|W(i)| - |W|$, *donde* $W(i)$ *denota el conjunto de coaliciones ganadoras que contienen a* i.

Demostración El número de swings para un jugador $i \in N$ coincide con el número de coaliciones en las que es decisivo. Esto es, coaliciones S tales que: a) $i \in S$; b) $S \in W$ y c) $S \setminus \{i\} \notin W$. Las coaliciones ganadoras de un juego W pueden dividirse en tres conjuntos disjuntos:

$A = \{$Coaliciones ganadoras a las que no pertenece $i\}$.
$B = \{$Coaliciones del tipo anterior a las que se une el jugador $i\}$.
$C = \{$Restantes coaliciones$\}$.

Es inmediato ver que el cardinal de las coaliciones de los tipos A y B es el mismo y que el número de coaliciones del tipo C se corresponden con el número de swings para el jugador i. Se tiene entonces que,

$$|W| = |A| + |B| + |C|, \tag{2.1}$$

siendo

$$|A| = |B|. \tag{2.2}$$

Además, también tenemos que

$$|W(i)| = |B| + |C|. \tag{2.3}$$

Si en la igualdad (2.1) sumamos $|C|$ en los dos lados, obtenemos que $|W| + |C| = |A| + |B| + |C| + |C|$. Empleando (2.2) y (2.3) obtenemos el resultado propuesto. □

Del resultado anterior se deduce que para calcular el número de swings para un jugador i sólo es necesario conocer el número de coaliciones ganadoras del juego y, de éstas, cuántas contienen al jugador i. En el siguiente resultado, se propone un nuevo método empleando funciones generatrices para calcular los números $|W|$ y $|W(i)|$ que determinan el valor de Banzhaf.

Proposición 2.5. *Sea (N, v) un juego simple de mayoría ponderada dado por $[q; w_1, w_2, ..., w_n]$. Entonces podemos calcular el índice de poder de Banzhaf de todos los jugadores a partir de la siguiente expresión:*

$$B(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = \prod_{j=1}^{n} (1 + x_j z^{w_j}).$$

A partir de la función anterior, el número de coaliciones ganadoras $|W|$ se corresponde con el número de términos donde la potencia de la variable z es mayor o igual que la cuota del juego q. Las cantidades $|W(i)|$ se corresponden con el número de términos, entre los anteriores, en los que aparece la variable x_i.

La función generatriz que nos proporciona la Proposición 2.5 para determinar el índice de poder de Banzhaf-Coleman es más complicada que cada una de las dadas en la Proposición 2.2 con el mismo fin, ya que ahora depende de $n+1$ variables. Sin embargo ahora, una única función es suficiente para poder calcular el índice de poder de todos los jugadores. Ilustramos de nuevo el método con el mismo ejemplo utilizado en los apartados anteriores.

Ejemplo 2.3. *Partimos del juego simple de mayoría ponderado dado por*

$$[30; 28, 16, 5, 4, 3, 3].$$

Ahora, se considera la función:

$$
\begin{aligned}
&B(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,z)\\
&=\left(1+x_1z^{28}\right)\left(1+x_2z^{16}\right)\left(1+x_3z^{5}\right)\left(1+x_4z^{4}\right)\left(1+x_5z^{3}\right)\left(1+x_6z^{3}\right)\\
&=x_1x_2x_3x_4x_5x_6z^{59}+x_1x_2x_3x_4x_5z^{56}+x_1x_2x_3x_4x_6z^{56}+x_1x_2x_3x_5x_6z^{55}\\
&+x_1x_2x_4x_5x_6z^{54}+x_1x_3x_4x_5x_6z^{43}+x_2x_3x_4x_5x_6z^{31}+x_1x_2x_3x_4z^{53}\\
&+x_1x_2x_3x_5z^{52}+x_1x_2x_4x_5z^{51}+x_1x_3x_4x_5z^{40}+x_2x_3x_4x_5z^{28}+x_1x_2x_3x_6z^{52}\\
&+x_1x_2x_4x_6z^{51}+x_1x_3x_4x_6z^{40}+x_2x_3x_4x_6z^{28}+x_1x_2x_5x_6z^{50}+x_1x_3x_5x_6z^{39}\\
&+x_2x_3x_5x_6z^{27}+x_1x_4x_5x_6z^{38}+x_2x_4x_5x_6z^{26}+x_3x_4x_5x_6z^{15}+\ldots+1.
\end{aligned}
$$

Entonces, contando el número de términos donde la potencia de z *es mayor que* 30 *y, de ellos, cuántos contienen a las variables* $x_1, x_2, \ldots, x_6$*, se obtiene que* $|W| = 32, |W(1)| = 31$, $|W(2)| = |W(3)| = |W(4)| = |W(5)| = |W(6)| = 17$ *y el índice de poder de Banzhaf-Coleman es igual a*

$$\beta(N,v) = (15/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16).$$

Agradecimientos

Los autores agradecen los comentarios realizados por la Profesora A. Meca Martínez. Agradecen asimismo el apoyo económico del *Ministerio de Innovación y Ciencia* a través del proyecto ECO2008-03484-C02-02.

Referencias

[1] Algaba E., Bilbao J. M., Fernández J. R. y López J. J. (2003). Computing power indices in weighted multiple majority games. *Math. Soc. Sci.*, **46**, 63-80.

[2] Algaba E., Bilbao J. M. y Fernández J. R. (2007). The distribution of power in the European Constitution. *Eur. J. Oper. Res.*, **176**, 1752-1766.

[3] Alonso-Meijide J. M. y Bowles C. (2005). Generating functions for coalitional power indices: An application to the IMF. *Ann. of Oper. Res.* **137**, 21–44.

[4] Alonso-Meijide J. M, Bilbao J. M., Casas-Méndez B. y Fernández J. R. (2009). Weighted multiple majority games with unions: Generating functions and applications to the European Union. *Eur. J. Oper. Res.*, **198**, 530-544.

[5] Banzhaf III J. F. (1965). Weighted voting does not work: A mathematical analysis. *Rutgers Law Rev.*, **19**, 317-343.

[6] Brams S. F. y Affuso P. J. (1976). Power and size: A new paradox. *Theory Decis.*, **7**, 29-56.

[7] Coleman J. (1971). Control of collectivities and the power of a collectivity to act. En: *B. Lieberman (Ed.), Social Choice*, Gordon and Breach, 269-300.

[8] Fernández J.R., Algaba E., Bilbao J.M., Jiménez A., Jiménez N. y López, J.J. (2002). Generating functions for computing the Myerson value. *Ann. of Oper. Res.* **109**, 143–158.

[9] Laruelle A. y Valenciano F. (2008). *Voting and Collective Decision Making. Bargaining and Power*, Cambridge University Press, New York.

[10] Lucas W. F. (1983). Measuring power in weighted voting system. En: *S. Brams (Ed.), Political and Related Models*, Springer-Verlag.

[11] Owen G. (1975). Multilinear extensions and the Banzhaf value. *Nav. Res. Logist. Q.*, **22**, 741-750.

[12] Ríbnikov K. (1988). *Análisis Combinatorio*, Editorial Mir.

[13] Shapley L. S. (1953). A value for n-person games. En: *A. W. Tucker y H. Kuhn (Eds.), Annals of Mathematical Studies, Vol. 28*, Princeton University Press, 307-317.

[14] Shapley L. S. y Shubik M. (1954). A method for evaluating the distribution of power in a committee system. *Am. Political Science Review*, **48**, 787-792.

[15] Taylor A. D. (1995). *Mathematics and Politics : Strategy, Voting, Power and Proof*, Springer-Verlag, New York.

Acerca de los autores

José María Alonso Meijide es Profesor Titular de Universidad del Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Univesidad de Santiago de Compostela. Su principal línea de investigación es el estudio de los juegos cooperativos.

Balbina Casas Méndez es Profesora Titular de Universidad del Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Univesidad de Santiago de Compostela. Su principal línea de investigación es el estudio de los juegos cooperativos.