suma+ 63
Febrero 2010, pp. 7-15

Las elecciones generales de 2008 y el juego del parlamento

En este artículo analizamos el resultado de las elecciones generales desde un punto de vista Teórico de Juegos. Para cuantificar el poder que cada partido tiene en el nuevo Parlamento introducimos tres conceptos, los índices de poder de Shapley-Shubik, de Banzhaf-Penrose y de Deegan-Packel. De esta forma, podemos saber cuál es el partido más decisivo y comparando los resultados obtenidos con los de las elecciones de 2004, qué partidos han aumentado o disminuido más poder. Para terminar se proponen extensiones al modelo propuesto.

Palabras Clave: Teoría de juegos, juegos de mayoría ponderada, índices de poder, elecciones, aplicaciones a las Ciencias Sociales.

The general elections of 2008 and the game of parliament

In this paper we analyze the result of the elections for the Spanish Parliament in a Game Theoretical approach. In order to measure the power each party has in the new Parliament we introduce three concepts, the Shapley-Shubik, Banzhaf-Penrose and Deegan-Packel power indices. In this way, we are able to know which the most decisive party is and comparing the result with the elections of 2004, we conclude which party has gain and which has lost more power. At last, we present different extensions of the proposed model .

Key words: Game Theory, weighted majority games, power indices, elections, applications in Social Sciences.

Introducción

El nueve de marzo de 2008 se celebraron las elecciones generales en las que hemos podido decidir los parlamentarios y senadores que nos representarán los próximos cuatro años. Ellos a su vez fueron los encargados de elegir al gobierno que legislará y gestionará la administración pública hasta las elecciones venideras.

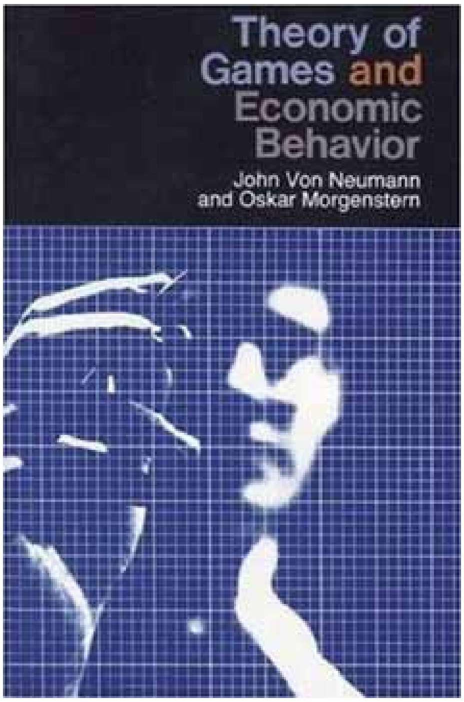
Las matemáticas se emplean como herramienta en muchos campos de conocimiento, incluyendo la política. Durante la campaña electoral, los candidatos a la presidencia de los distintos partidos han tratado de convencernos de lo bien que lo hicieron hasta el momento y de lo mejor que lo harán si llegan a formar gobierno. Con este fin, bombardean a la población con todo tipo de datos estadísticos, muchos referidos a cifras económicas. Cada candidato incluye en su discurso aquellos datos que más le interesan, lo cual por ejemplo hace que mucha gente tenga dificultades en saber si el paro ha subido o bajado. En este sentido, puede parecer que las matemáticas se usan como herramienta para manipular la realidad.

Por el contrario, las matemáticas son útiles esencialmente para entender la realidad y no para manipularla. Con el propósito de resolver problemas que plantean las diferentes actividades humanas, se han desarrollado nuevas disciplinas matemáticas. Gracias a una de esas disciplinas conocida como Teoría de Juegos, existen diversas formas de calcular los llamados *índices de poder*, que básicamente tratan de cuantificar el peso o fuerza que tienen los diferentes partidos políticos partiendo de la cantidad de parlamentarios conseguidos. Este será el objetivo principal de nuestro trabajo.

La Teoría de Juegos es una rama de las Matemáticas que se dedica al estudio de los problemas de decisión en los que interaccionan varios decisores. Muchos sitúan el nacimiento de esta disciplina en 1944 cuando John Von Neumann y Oscar Morgestern publican *Theory of games and economic behaviour*. En este trabajo se sientan las bases de lo que conocemos por jugador racional, jugador que toma decisiones consecuentes ante las alternativas que se le presentan. Dichas

Mikel Álvarez Mozos
José María Alonso Meijide
Universidad de Santiago de Compostela

decisiones son consecuentes con respecto a la función de utilidad, que nos determina el beneficio de cada jugador conociendo la estrategia que cada uno de los decisores adopta. Otro gran avance de la teoría de juegos fue la tesis doctoral de John Nash leída en 1951, en ella se introduce el equilibrio de Nash y se prueba su existencia para juegos finitos. Podríamos decir que ahora, el jugador racional asume la racionalidad de los demás jugadores hasta el punto de coordinar las estrategias de cada uno para alcanzar el equilibrio, en el cual ningún jugador se beneficia al modificar su estrategia unilateralmente.



Hace pocos años, el gran impacto que la Teoría de Juegos ha tenido en el desarrollo de la Economía moderna quedó oficialmente reconocido al ser concedidos tres Premios Nobel de Economía a teóricos de juegos, el primero en 1994 a John Nash, Reinhard Selten y John Harsany, el segundo en 2005 a Robert Aumann y Thomas Schelling y el más reciente en 2007 a Leonid Hurwicz, Eric S. Maskin y Roger B. Myerson. Pero no es la Economía el único ámbito en el que la teoría de Juegos se ha aplicado con éxito, existen aplicaciones en campos tan dispares como la biología, la sociología o la política. En este artículo podrás comprobar la aplicación a la política a través de un ejemplo interesante.

Los diferentes juegos se clasifican en dos grandes grupos, los juegos cooperativos y los no cooperativos. En este artículo nos centraremos en los primeros, juegos que cumplen la propiedad de que el beneficio obtenido por una coalición no puede empeorar si esta aumenta, lo cual quiere decir que la cooperación es beneficiosa o que como mínimo no es perjudicial. Entre los juegos cooperativos tenemos los juegos simples, que se caracterizan por asignar a cada cooperación posible de jugadores un resultado de tipo *victoria* o *derrota,* o equivalentemente, 1 o 0. A pesar de ser juegos simples, son muy útiles, ya que existe una gran cantidad de situaciones que se pueden explicar basándose en ellos.

Un ejemplo de lo dicho es el Parlamento. Podemos ver la situación como un juego en el que el objetivo es el poder, o dicho con otras palabras, la formación de un gobierno con apoyos suficientes para poder legislar. Una vez formado el gobierno, el objetivo sigue siendo contar con los apoyos suficientes para poder aprobar las propuestas que interesen a cada partido. Por lo tanto, en nuestro juego, los jugadores son los partidos políticos con representación parlamentaria, y la regla que nos determina si una coalición de jugadores es ganadora o no, es la regla de la mayoría simple. En consecuencia, y de modo natural nos hacemos la pregunta: ¿cómo medir la fuerza que cada jugador tiene a la hora de cambiar el resultado de una votación? Para responder a esta pregunta recurrimos a los conocidos como *índices de poder*. Existen muchas formas de cuantificar este poder pero en este trabajo nos vamos a centrar en tres que nos parecen más interesantes. Una buena revisión de las distintas herramientas que la Teoría de Juegos aporta al análisis de los parlamentos la podemos encontrar en Owen y Carreras (1995). Otros trabajos en los que se ha empleado la Teoría de Juegos para analizar situaciones en las que las decisiones se toman por votación son Espinel (1999a, 1999b, 2000a, 200b,2002) y Rodríguez y Espinel (2005).

En base a esto, hemos estructurado el resto del artículo en tres apartados: el segundo, *Preliminares*, dedicado a introducir todos los elementos necesarios para entender el tercer apartado, relativo a los *Resultados*, en el que se presenta la situación del Parlamento y se calculan los índices de poder que hemos considerado. En el último apartado, *Conclusiones*, introducimos las extensiones que se podrían hacer al modelo propuesto.

Preliminares

Esta sección la dedicaremos a introducir la notación y los resultados básicos que usaremos en nuestro análisis de la situación en el parlamento.

Para empezar, definimos formalmente un juego cooperativo con utilidad transferible (juego TU), que es un par $G=(N,v)$ donde $N=\{1,2,\ldots,n\}$ es el conjunto de jugadores y $v\colon P(N)\to\mathbb{R}$ la función característica que asigna a cada subconjunto S de N un número real $v(S)$ con la condición de que $v(\varnothing)=0$. Esta función nos da la utilidad que los jugadores de la coalición S pueden obtener del juego si cooperan, independientemente de lo que hagan el resto de los jugadores.

Decimos que un juego TU es un juego simple cuando,

s1) $v(S)\in\{0,1\},\ \forall\ S\subseteq N$

s2) $v(N)=1$

s3) $v(T)\leq v(S), \forall\ T\subseteq S$

En un juego simple, si $v(S)=1$ decimos que S es una coalición ganadora y si $v(S)=0$, que es perdedora. Una coalición ganadora se dice que es minimal ganadora si toda subcoalición propia de S es perdedora, es decir, si todos los jugadores de S son necesarios para que S sea ganadora. Denotaremos por W al conjunto de coaliciones ganadoras y por W_m al conjunto de coaliciones minimales ganadoras. Utilizando esta última notación, un juego simple queda definido dando el par (N,W), así como (N, W_m).

En estos juegos podemos considerar ciertos jugadores especiales. Así, decimos que un jugador i es un dictador si la coalición $\{i\}$ es ganadora y $N\backslash\{i\}$ perdedora. Por otro lado, un jugador i tiene veto, si dada una coalición S a la que no pertenece i, S es una coalición perdedora. Llamamos a i jugador nulo, si no pertenece a ninguna coalición minimal ganadora. Dada una coalición S, decimos que es un swing, si S es ganadora y $S\backslash\{i\}$ perdedora. Esto implica que si en un juego simple tenemos a un dictador, éste será el único jugador swing de cualquier coalición. Por último decimos que dos jugadores i y j son simétricos si para toda coalición S que no contenga a i ni a j se cumple que, $S\cup\{i\}$es ganadora si y solo si $S\cup\{j\}$ lo es.

Una familia muy interesante de juegos simples son los juegos de mayoría ponderada. Un juego de mayoría ponderada es un juego simple en el que cada jugador i, tiene asignado un peso $w_i\geq 0$ y en el que existe una cantidad $q>0$ denominada cuota, de modo que una coalición S es ganadora si su peso, que es la suma de los pesos de los jugadores de S, es igual o superior a la cuota fijada. En esta familia,

- Un jugador i es un dictador si $w_i\geq q$.
- Un jugador i tendrá veto si:

$$\sum_{\substack{j\in N\\ j\neq i}} w_j < q$$

- Un jugador i será nulo si para toda coalición no ganadora S a la que no pertenece i tenemos que:

$$w_i + \sum_{j\in S} w_j < q$$

- Un jugador i es un swing para una coalición ganadora S si:

$$\sum_{j\in S\backslash\{i\}} w_j < q$$

En un juego de mayoría ponderada una coalición es minimal ganadora si su peso es mayor o igual que q y su peso menos el peso del jugador con menor peso (dentro de la coalición) es menor que q. No todos los juegos simples pueden reescribirse como juegos de mayoría ponderada.

Una vez introducidos los juegos de mayoría ponderada, vamos a explicar con algo de detalle lo que se conoce por *índices de poder*. La mayoría de los índices de poder miden el poder o la influencia a-priori del voto individual, estos índices cuantifican el poder que tiene un jugador (partido político) basándose únicamente en su peso (número de parlamentarios) y en la regla de decisión del juego (mayoría simple) e ignoran ciertos factores que pueden influir en la realidad, como por ejemplo, la naturaleza de los asuntos sobre los que se requiere opinar, los intereses o ideología de los partidos, la capacidad de persuasión, las afinidades e incompatibilidades, etc. Tampoco podemos olvidar que en la forma en la que hemos definido el juego, los jugadores solo tienen la posibilidad de votar sí o no, mientras que normalmente suele haber otras alternativas como la abstención. Todas estas cuestiones son extensiones del caso más sencillo que estudiaremos aquí en profundidad, y hablaremos de ellas en el apartado de conclusiones.

Definición: Un índice de poder del jugador i, es una aplicación $\phi_i\colon SG\to\mathbb{R}^+$, es decir, una función real no negativa definida sobre el conjunto de juegos simples.

Felsenthal y Machover (1998) propusieron las siguientes condiciones, como conjunto de propiedades mínimas que todo índice de poder razonable debe cumplir.

i. Iso-invarianza (INV): Sean $G=(N,v)$ y $G'(N',v')$ dos juegos isomorfos, es decir, juegos tales que existe una biyección h de N sobre N' tal que para todo $S\subseteq N$, $v(S)=1$ si y sólo si $v'(h(S))=1$. Entonces $\phi_i(G)=\phi_{h(i)}(G')$.

ii. Ignorar jugadores nulos (IGN): Para todo juego simple $G=(N,V)$ y todo jugador nulo $d\in N$ se tiene que

$\phi_i(G)=\phi_i(G_{-d})$ para todo $i\in N\backslash\{d\}$, dónde G_{-d} se obtiene excluyendo del juego G el jugador d.

iii. Nulidad sólo para jugadores nulos (NSN): Para todo juego simple $G= (N, V)$, $\phi_i(G)=0$ si y sólo si $i\in N$ es un jugador nulo.

La propiedad de INV significa que cualquier reordenamiento de los jugadores no modifica el índice de poder de ninguno de ellos, es decir, que la influencia que un jugador puede tener en el resultado de una votación sólo depende de su peso. Lo que la propiedad IGN implica es que suprimir del juego cualquier jugador cuyo voto no puede influir en el resultado de la votación no cambia el índice del resto de jugadores. Por último, ya sabemos que el índice de poder de un jugador no puede tomar valores negativos, por lo tanto NSN implica que este valor alcanza su límite inferior 0 solo ante jugadores nulos.

Para terminar con este apartado, a continuación introducimos los tres índices que vamos a utilizar para estudiar la composición del parlamento al que dio lugar el resultado de las elecciones generales del nueve de marzo del 2008, que son, el índice de Shapley-Shubik, el de Banzhaf-Penrose y el de Deegan-Packel.

El índice de Shapley-Shubik, propuesto por Lloyd S. Shapley y Martin Shubik (1954) se basa en el Valor de Shapley que introdujo Shapley un año antes. En su trabajo, Shapley y Shubik parten de la idea de aplicar el conocido Valor de Shapley a los juegos simples, para lo que introducen la idea del jugador swing que es un jugador decisivo para que cierta coalición resulte ganadora. El cálculo del índice se basa en todas las posibles permutaciones de los jugadores sobre las que se analizan las posiciones "decisivas" para un jugador i. La suma de todas las posiciones en las que i es "decisivo" se divide por las ordenaciones posibles sobre el conjunto de jugadores, lo que resulta en la siguiente expresión;

$$\phi_i = \sum_{\substack{S\subseteq N \\ i\in S}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}\left[v(S)-v(S\setminus\{i\})\right]$$

donde $s=|S|$.

Cada swing, se pondera por:

$$\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$$

y el índice de i es la media ponderada de todos los swings.

Existen interesantes interpretaciones probabilísticas de ϕ_i. Si denotamos por p_i la probabilidad de que i vote a favor de una propuesta dada, y suponemos que ésta sigue una distribución uniforme en [0,1]. Si además todos los jugadores tienen la misma probabilidad de votar a favor de la propuesta, es decir, si $p_i = p$, para todo jugador i (asunción de homogeneidad) la probabilidad de que el voto del jugador i afecte el resultado de la votación es ϕ_i.

El índice de Shapley-Shubik cumple la propiedad de normalidad, lo que significa que sumando los índices de todos los jugadores obtenemos 1. Esto hace que se pueda comparar fácilmente con otros índices.

La idea que subyace en el valor absoluto de Banzhaf-Penrose fue presentada por L.S. Penrose en su trabajo en 1946 (Penrose, 1946), pero pasó décadas inadvertido hasta que fue redescubierto en los años ochenta. Hoy en día es más conocido como el índice absoluto de Banzhaf. Éste resulta de sumar todos los swings del jugador i y de dividirlo por 2^{n-1};

$$\beta_i = \frac{\sum_{\substack{S\subseteq N \\ i\in S}}\left[v(S)-v(S\setminus\{i\})\right]}{2^{n-1}}$$

El denominador representa el número de coaliciones (tanto ganadoras como perdedoras) de las que i forma parte. Por otro lado podemos ver β_i como el número de coaliciones en las que i es un swing dividido por la cantidad máxima que este número puede alcanzar.

Este índice también tiene una interesante interpretación probabilística. Supongamos que p_i (probabilidad de que i vaya a votar a favor de una propuesta) sigue una distribución uniforme en [0,1] y que la decisión de i no tiene nada que ver con lo que pueda decidir cualquier otro jugador (asunción de independencia), entonces, la probabilidad de que el voto de i sea decisivo sobre el resultado de la votación es β_i.

En este último caso no se cumple la propiedad de normalidad ya que la suma de los índices de todos los jugadores no suma uno, esto se puede solucionar dividiendo la expresión por una cantidad adecuada.

El último índice que vamos a considerar es el que propusieron Deegan y Packel (1979) en su trabajo. Este índice recoge la idea de que el poder de un jugador se basa exclusivamente en su participación en la formación de coaliciones minimales ganadoras, y que, a priori, todas estas coaliciones minimales ganadoras son igualmente plausibles. Para definir este índice de poder, se suponen las siguientes condiciones. La primera es que sólo originan una "victoria" las coaliciones minimales ganadoras. La segunda es que todas las coaliciones minimales ganadoras son equiprobables. Y la última es que los jugadores que constituyen una coalición "victoriosa" se dividen el "botín" a partes iguales. Estas condiciones parecen razonables en muchos casos. La primera condición es aplicable en el sentido de que los jugadores racionales quieren maximizar su poder y, por lo tanto, sólo se formarán coaliciones minimales ganadoras. La segunda condición dice que todas las coaliciones minimales ganadoras juegan el mismo papel y, finalmente, la última propiedad establece que todos los jugadores de una coalición minimal ganadora sean tratados por igual. Estas propiedades dan lugar a la siguiente expresión:

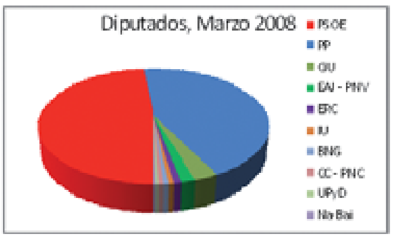
$$\rho_i = \frac{1}{|W_m|} \sum_{S \in W_m(i)} \frac{1}{|S|}$$

donde $W_m(i)=\{S\in W_m: i\in S\}$.

Resultados

Sobre los resultados de todas las elecciones existen interpretaciones y conclusiones para prácticamente todos los gustos. Cada partido hace uso de la cantidad de votos obtenidos, del porcentaje de votos, de la cantidad de diputados o incluso del índice de abstención mostrando, la mayoría de los casos, la interpretación que arroja resultados más favorables a sus intereses. Nosotros en cambio, vamos a intentar medir la fuerza de cada partido a la hora de influir en la toma de decisiones del parlamento y comparar ésta con la que tenían hasta entonces. Este fue el reparto de escaños resultante de las últimas elecciones:

Partido político		Diputados
PSOE		169
PP		154
CiU		10
EA - JPNV		6
ERC		3
IU		2
CC - PNC		2
BNG		2
UP y D		1
Na - Bai		1



Tenemos 10 jugadores, que son, todos los partidos políticos con representación parlamentaria en un juego de mayoría ponderada donde la cuota la fija la mayoría simple, que es en este caso la mitad más un parlamentario, es decir, 176. Ninguno de los jugadores es capaz por su propio peso de alcanzar esta cuota, lo que significa que en este juego no tenemos ningún jugador dictador. Por otro lado, es fácil comprobar que tampoco tenemos ningún jugador con veto, ya que para que esto sucediera necesitaríamos un partido con un mínimo de 175 parlamentarios. En cambio si la regla fuera de 2/3 en lugar de la mayoría simple, el PSOE y el PP serían jugadores con veto. En cuanto a jugadores simétricos, por ahora podemos decir que IU, BNG y CC-PNC por un lado y UPyD y Na-Bai por otro son simétricos ya que tienen exactamente el mismo peso en el juego de mayoría simple.

A continuación se indican las coaliciones minimales ganadoras que se podrían formar, 29. Toda coalición ganadora en la que participe el PP y no el PSOE necesita también el apoyo de CiU y de EAJ-PNV. En esta tabla resumimos todas las combinaciones que dan lugar a coaliciones minimales ganadoras:

PSOE; PP	
PSOE; CiU	PP; CiU; EAJ-PNV; ERC; IU; BNG
PSOE; EAJ-PNV; ERC	PP; CiU; EAJ-PNV; ERC; IU; CC-PNC
PSOE; EAJ-PNV; IU	PP; CiU; EAJ-PNV; ERC; BNG; CC-PNC
PSOE; EAJ-PNV; BNG	PP; CiU; EAJ-PNV; ERC; IU; UPyD
PSOE; EAJ-PNV; CC-PNC	PP; CiU; EAJ-PNV; ERC; IU; Na-Bai
PSOE; EAJ-PNV; UPyD	PP; CiU; EAJ-PNV; ERC; BNG; UPyD
PSOE; EAJ-PNV; Na-Bai	PP; CiU; EAJ-PNV; ERC; BNG; Na-Bai
PSOE; ERC; IU; BNG	PP; CiU; EAJ-PNV; ERC; CC-PNC; UPyD
PSOE; ERC; IU; CC-PNC	PP; CiU; EAJ-PNV; ERC; CC-PNC; Na-Bai
PSOE; ERC; BNG; CC-PNC	PP; CiU; EAJ-PNV; IU; BNG; CC-PNC
PSOE; ERC; IU; UPyD; Na-Bai	PP; CiU; EAJ-PNV; IU; BNG; UPyD; Na-Bai
PSOE; ERC; BNG; UPyD; Na-Bai	PP; CiU; EAJ-PNV; IU; CC-PNC; UPyD; Na-Bai
PSOE; ERC; CC-PNC; UPyD; Na-Bai	PP; CiU; EAJ-PNV; BNG; CC-PNC; UPyD; Na-Bai
PSOE; IU; BNG; CC-PNC; UPyD	
PSOE; IU; BNG; CC-PNC; Na-Bai	

A partir de esta tabla ya empezamos a obtener resultados interesantes, pudiendo observar que el número de coaliciones minimales ganadoras en las que participa el PP es 14 al igual que CiU, además, en 13 de ellas están ambos y en la restante, si sustituyéramos estos dos partidos la correspondiente coalición seguiría siendo minimal ganadora. Esto indica que el PP y CiU son jugadores simétricos en el juego de mayoría ponderada que hemos considerado.

Otro resultado inmediato a la vista de la tabla de coaliciones minimales ganadoras, es el hecho de que todos los partidos, por pequeño peso que tengan, están en alguna coalición minimal ganadora, de aquí concluimos que no existe ningún jugador nulo. Es decir, no tenemos ningún partido cuyo voto vaya a ser siempre irrelevante para el resultado de cualquier votación. Los dos partidos que cuentan únicamente con un parlamentario, UPyD y Na-Bai, están presentes en nada menos que 11 coaliciones minimales ganadoras, lo que implica que son swings de todas ellas.

Para hacernos una idea del poder de cada grupo parlamentario, antes de calcular los correspondientes índices de poder vamos a presentar el número de swings de cada uno de los partidos, es decir, el número de coaliciones ganadoras en las que el jugador en cuestión es decisivo.

Partido político	Swings
PSOE	437
PP	75
CiU	75
EAJ - PNV	73
ERC	35
IU	21
BNG	21
CC - PNC	21
UPyD	11
Na - Bai	11

La tabla confirma lo observado hasta ahora. El PP y CiU son jugadores simétricos por tener el mismo número de swings y no tenemos ningún jugador nulo, ya que todos los partidos son swings de alguna coalición. Asimismo se observa que los dos partidos más pequeños son swings en 11 ocasiones, que resultan de las 11 coaliciones minimales ganadoras listadas anteriormente, esto sucede siempre que el peso de los partidos sea una unidad.

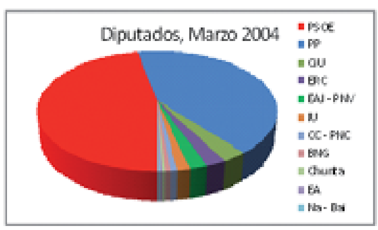
A continuación presentamos en una tabla los tres índices descritos anteriormente, calculados para cada partido:

Esta tabla, confirma la condición de jugadores simétricos de los grupos parlamentarios del PP y de CiU, ya que ambos jugadores tienen los mismos índices de poder. Esto resulta realmente sorprendente ya que entre ambos grupos hay una diferencia de 144 diputados, que representan un 41% del total de parlamentarios. Este hecho es un capricho de la regla de la mayoría. Por otro lado, si nos fijamos en el índice de Deegan-Packel, resulta que EAJ-PNV, con sólo 6 diputados, tiene más poder que CiU y por tanto también que el PP. Esto se explica, si nos fijamos en la tabla de coaliciones minimales ganadoras expuesta con anterioridad, con el hecho de que EAJ-PNV está en un número mayor de coaliciones minimales ganadoras que CiU o PP. Concretamente EAJ-PNV forma parte de 19 y tanto CiU como PP de 14.

	Índices de poder		
Partidos políticos	Shapley-Shubik	Banzhaf-Penrose	Deegan-Packel
PSOE	0,5377	0,8535	0,1638
PP	0,1179	0,1465	0,0895
CiU	0,1179	0,1465	0,0895
EAJ-PNV	0,1040	0,1462	0,1412
ERC	0,0345	0,0684	0,1098
IU	0,0214	0,0410	0,0880
BNG	0,0214	0,0410	0,0880
CC-PNC	0,0214	0,0410	0,0880
UPyD	0,0119	0,0215	0,0711
Na-Bai	0,0119	0,0215	0,0711

Para terminar vamos a comparar estos resultados con la situación del parlamento en la anterior legislatura. Antes de empezar con la comparación, nótese que en el juego que había hasta las últimas elecciones teníamos un jugador más que ahora, 11. Este era el reparto de escaños a los que dieron lugar las elecciones de 2004:

Partido político		Diputados
PSOE		164
PP		148
CiU		10
ERC		8
EAJ - PNV		7
IU		5
CC - PNC		3
BNG		2
Chunta		1
EA		1
Na - Bai		1



A primera vista, se observa que tanto el PSOE como el PP han aumentado su número de diputados en comparación con las anteriores elecciones, el PSOE en cinco y el PP en seis. En consecuencia los partidos minoritarios han pasado de sumar 38 parlamentarios (un 10,86%) a 27 (7,71%). Esto en principio podría resultar en que el poder se concentre más en los dos partidos mayoritarios que hasta ahora.

En la siguiente tabla, se presentan los resultados de calcular los índices de poder a los que da lugar el reparto de parlamentarios.

	Índices de poder		
Partidos políticos	Shapley-Shubik	Banzhaf - Penrose	Deegan-Packel
PSOE	0,4849	0,8301	0,1636
PP	0,1357	0,1699	0,0681
CiU	0,1052	0,1602	0,1101
ERC	0,0770	0,1289	0,1041
EAJ-PNV	0,0639	0,1074	0,0866
IU	0,0460	0,0684	0,0717
CC-PNC	0,0341	0,0566	0,0964
BNG	0,0210	0,0352	0,0798
Chunta	0,0107	0,0176	0,0732
EA	0,0107	0,0176	0,0732
Na-BAi	0,0107	0,0176	0,0732

Si nos fijamos en los índices del PSOE y el PP, vemos que a pesar de que como ya hemos comentado, ambos partidos han aumentado su representación, el PP disminuye sus índices de poder de Shapley-Shubik y Banzhaf-Penrose mientras que el PSOE incrementa los tres índices considerablemente. Esto indica que el PSOE es ahora más decisivo de lo que venía siendo y que la influencia del voto del PP es menor de lo que era hasta el nueve de Marzo.

Por otro lado, la situación que había antes de las últimas elecciones es bastante similar al de ahora en el sentido de que antes tampoco había ningún jugador dictador ni con veto ni tampoco nulo. En cambio la condición de jugadores simétricos que en la actualidad existe entre el PP y CiU ha sido un cambio muy relevante ya que hasta ahora el poder que tenía el PP y el que tenía CiU eran muy diferentes.

En cuanto a los partidos minoritarios, se pueden extraer muchas conclusiones más. En general CiU y EAJ-PNV han aumentado su poder, en el caso de EAJ-PNV considerablemente, en ambos casos a pesar de haber reducido el número de votos. El aumento del poder de estos partidos nacionalistas está estrechamente relacionado con la disminución de la influencia de otros partidos minoritarios como ERC, IU o CC-PNC. En el caso de estos tres, la disminución de sus índices ha ido acompañada de una considerable pérdida del número de escaños. En cambio, si analizamos la influencia que el BNG puede tener sobre el resultado de una votación, concluimos que a pesar de tener el mismo número de diputados en ambas legislaturas, en esta última es un jugador mucho más decisivo de lo que era antes del nueve de marzo, ya que es uno de los tres partidos que ha aumentado todos los índices que estamos considerando. Una situación similar le sucede a la coalición Na-Bai, la cual, a pesar de continuar con los mismos escaños que hasta ahora, ha aumentado su poder de influencia al ser swing de un mayor porcentaje de coaliciones de lo que era antes.

Así pues, como conclusión general, podemos decir para empezar que hay algo más de bipartidismo del que había hasta ahora, ya que la influencia de los partidos minoritarios, en conjunto, ha disminuido. Para continuar, también se concluye que el PSOE ha salido reforzado, ya que aumenta sus índices de poder, sobre todo respecto al PP. Y por último, entre los partidos minoritarios se puede decir que ha habido un flujo de poder hacia CiU y EAJ-PNV ya que ahora es muy probable que el apoyo de alguno de estos grupos determine el resultado de una votación en la que PSOE y PP mantienen posturas enfrentadas.

Conclusiones

Hoy en día, las matemáticas están presentes en prácticamente todas las disciplinas del conocimiento humano. Este trabajo trata sobre las matemáticas electorales o matemáticas en la vida política, que abordan diversos aspectos relacionados con las elecciones y la actividad política desarrollada por un parlamento. En este ámbito, podemos señalar dos situaciones particulares muy conocidas, en donde se aplican herramientas matemáticas. La primera de ellas trata sobre la relación existente entre el número de votos que recibe un partido y el número de representantes que dicho partido va a tener. Algunos de los problemas estudiados son el de la distribución del número de escaños por circunscripción y el del método elegido para asignar estos escaños. La segunda situación, en la que nos hemos centrado en este trabajo, está relacionada con la capacidad que tiene un partido para poder ganar las diferentes votaciones que se plantean en el Parlamento. Se pretende obtener una medida que proporcione una forma de cuantificar la relación existente entre el número de representantes de un partido y la capacidad que tiene dicho partido para ser decisivo en una votación.

En este trabajo hemos empleado la Teoría de Juegos, en particular, los juegos simples, para abordar algunos de los problemas considerados anteriormente. Una de las principales aplicaciones de los juegos simples es que sirven como modelo matemático para representar y analizar diferentes sistemas de votación. El interés de los juegos simples se centra en el estudio del poder que tienen los diferentes agentes en el proceso de toma de decisiones. Para medir este poder, se emplean los denominados índices de poder, que proporcionan diferentes medidas de la capacidad que tiene cada uno de los agentes para convertir una coalición ganadora en perdedora. De los diferentes índices que existen en la literatura hemos presentado las definiciones e interpretaciones de tres de ellos: el índice de Shapley-Shubik, el índice de Banzhaf-Penrose y el índice de Deegan-Packel.

En la segunda sección del trabajo, hemos calculado estos tres índices de poder para los diferentes partidos con representación parlamentaria tras las elecciones legislativas celebradas en España el nueve de marzo de 2008. Con este ejemplo se ha puesto de manifiesto que el poder de los diferentes partidos no es siempre proporcional al número de escaños. Además, hemos comparado los resultados obtenidos con los correspondientes a las anteriores elecciones, celebradas en marzo de 2004.

Resulta evidente que la realidad es más compleja de lo que hemos supuesto en este trabajo. No hemos considerado ni la ideología, ni la capacidad de persuasión de los distintos partidos. Existen diferentes formas de incluir en el modelo matemático información adicional a la proporcionada por el número de escaños, para que refleje de forma más fidedigna la situación real. A su vez, se han definido modificaciones de los diferentes índices, que tienen en cuenta estos condicionamientos exógenos para medir el poder de los jugadores. Comentamos brevemente algunos de los modelos existentes en la literatura.

Los juegos simples con uniones a priori, vienen dados por la terna (N, v, P), en donde P es una partición del conjunto de jugadores, que determina la estructura de cooperación a priori entre los jugadores implicados. En un juego, algunos agentes tendrán propuestas similares a las planteadas por otros, por lo que parece lógico suponer, que en estos casos la cooperación será más fácil que con aquellos otros agentes con los que existan diferencias importantes. En el ejemplo concreto que hemos considerado, la partición de los jugadores podría venir definida por las diferentes ideologías de los partidos.

Los juegos simples con grafo de afinidades (y/o de incompatibilidades) vienen dados por la terna (N, v, g) (o por la cuaterna $(N, v, g1, g2)$ si consideramos conjuntamente un grafo de afinidades y un grafo de incompatibilidades). En este caso, el grafo representa la afinidad (o incompatibilidad) entre los distintos pares de jugadores. De esta forma, si el grafo es de comunicación, determina caminos que unen a aquellos partidos que, en principio, tienen mayor probabilidad de llegar a acuerdos. Si el grafo es de incompatibilidad, cada arco del grafo une jugadores para los que la cooperación es prácticamente imposible. También podrían considerarse situaciones más complejas, representadas por (N, v, P, g) o, incluso, por $(N, v, P, g1, g2)$.

El estudio de estos modelos ha abierto en el campo de la Teoría de Juegos una fructífera línea de investigación, ya que se hace necesario definir las modificaciones adecuadas de los diferentes índices de poder así como estudiar las diferentes propiedades que verifican cada uno de ellos. Al igual que ocurría para los índices originales, el cálculo de estas modificaciones origina un elevado número de operaciones matemáticas, por lo que también se trabaja en diferentes métodos para facilitar el cálculo de estos nuevos índices.

Los índices de poder pueden resultar muy útiles para trabajar con alumnos de secundaria o bachillerato. Los modelos más sencillos de juegos de mayoría ponderada son una buena forma de ver aplicaciones de las matemáticas a las Ciencias Sociales. Un ejercicio interesante podría consistir en analizar el consejo escolar del centro. Para ello en primer lugar necesitaremos conocer la composición de este, es decir, necesitamos saber la cantidad de representantes que cada grupo (profesores, alumnos, PAS, etc.) posee en el citado órgano. Para poder representar cada uno de los grupos por un jugador en el juego tendremos que suponer que cada grupo votará por una enmienda dada en bloque, es decir, supondremos una perfecta disciplina de voto dentro de cada grupo. A continuación se podría aprovechar para ver las diferentes reglas básicas de votación existentes como son, la regla de la mayoría, la de la popularidad o el criterio de Condorcet (ganará aquella alternativa que sea preferida por una mayoría cuando se enfrenta a cada una de las mociones restantes en votaciones dos a dos). Trabajos interesantes en los que se estudian las diferentes reglas de elección son Nortes (2001) y Espinel (2000b). Como primera aproximación del poder se puede calcular el porcentaje de votos que cada grupo posee. A continuación se procederá a calcular los diferentes índices de poder presentados. Cabe resaltar los diferentes conceptos que se trabajan al calcular los índices de Shapley-Shubik, Banzhaf-Penrose y Deegan-Packel, sería interesante introducir en este sentido nociones básicas de combinatoria como son la cantidad de subconjuntos de $N\backslash\{i\}$ con $i \in N$ o el número de posibles ordenaciones de estos subconjuntos. También sería interesante dedicar cierto tiempo a explicar la idea de las coaliciones minimales ganadoras, que constituyen la base del índice de Deegan-Packel. Para finalizar se podrían comparar los índices de poder con el número de representantes y obtener conclusiones interesantes.

Agradecimientos

Los autores quieren agradecer el apoyo económico recibido a través del proyecto ECO2008-03484-C02-02/ECON y el programa FPU del Ministerio de Ciencia e Innovación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Deegan, J. y Packel, E.W. (1979). A New Index of Power for Simple n-Person Games. *International Journal of Game Theory*, 7(2): pp. 113-123.

Espinel Febles, M.C. (1999a). El poder y las coaliciones. *Revista Suma*, 31: pp. 109-117.

Espinel Febles, M.C. (1999b). Sistema de reparto de poder en las elecciones locales. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, 39: pp. 13-19.

Espinel Febles, M.C. (2000a). El poder de las coaliciones en algunas instituciones, *Uno*, 23: pp. 57-67.

Espinel Febles, M.C. (2000b). Elecciones y matemáticas. *Las matemáticas del siglo XX. Números*, 43 y 44: pp. 381-384.

Espinel Febles, M.C. (2002). Formación del profesorado e investigación en educación matemática. "Estudio didáctico de la estructura de algunas instituciones mediante los juegos cooperativos", pp. 143-157.

Felsenthal, D. y Machover, M. (1998). *The Measurement of Voting Power*, Edward Elgar, Cheltenham.

Nortes Checa, A. (2001). Matemáticas electorales: desproporcionalidad y alianzas. *Revista Suma*, 36: pp. 43-50.

Owen, G. y Carreras, F. (1995). Valor coalicional y estrategias parlamentarias. *Revista española de investigaciones sociológicas*, 71-72: pp. 157-176.

Penrose, L.S. (1946). The Elementary Statistics of Majority Voting. *Journal of the Royal Statistical Society*, 109: pp.53-57.

Rodriguez Cruz, R. y Espinel Febles M.C. (2005). Votaciones Y desarrollo de los valores democráticos. *Números*: pp. 25-39.

Shapley, L.S. y Shubik, M. (1954). A Method of Evaluating the Distribution of Power in a Committee System. *American Political Science Review* 48(3): pp. 787-792.

Este artículo fue recibido en *SUMA* en Mayo de 2008 y aceptado en Junio de 2009