CENTRO INTERNACIONAL DE ESTUDOS DE DOUTORAMENTO E AVANZADOS DA USC (CIEDUS)

TESIS DE DOCTORADO

ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN FRACCIONARIO Y APLICACIONES

Jorge Losada Rodríguez

ESCUELA DE DOCTORADO INTERNACIONAL

PROGRAMA DE DOCTORADO EN MATEMÁTICAS

SANTIAGO DE COMPOSTELA

2018

AUTORIZACIÓN DE LOS DIRECTORES DE LA TESIS

Ecuaciones diferenciales de orden fraccionario y aplicaciones

D. Juan José Nieto Roig

D. Iván Carlos Area Carracedo

INFORMA/N:

Que la presente tesis, corresponde con el trabajo realizado por D. ***Jorge Losada Rodríguez****, bajo mi dirección, y autorizo su presentación, considerando que reúne los requisitos exigidos en el Reglamento de Estudios de Doctorado de la USC, y que como director de ésta no incurre en las causas de abstención establecidas en Ley 40/2015.*

En Santiago de Compostela, 5 de octubre de 2018

Fdo. Juan José Nieto Roig

Fdo. Iván Carlos Area Carracedo

DECLARACIÓN DEL AUTOR DE LA TESIS

Ecuaciones diferenciales de orden fraccionario y aplicaciones

D. Jorge Losada Rodríguez

Presento mi tesis, siguiendo el procedimiento adecuado al Reglamento, y declaro que:

1) *La tesis abarca los resultados de la elaboración de mi trabajo.*
2) *En su caso, en la tesis se hace referencia a las colaboraciones que tuvo este trabajo.*
3) *La tesis es la versión definitiva presentada para su defensa y coincide con la versión enviada en formato electrónico.*
4) *Confirmo que la tesis no incurre en ningún tipo de plagio de otros autores ni de trabajos presentados por mí para la obtención de otros títulos.*

En Santiago de Compostela, 5 de octubre de 2018

Fdo. Jorge Losada Rodríguez

Agradecimientos

Quiero expresar mi agradecimiento a los profesores Iván Area Carracedo y Juan José Nieto Roig, directores de esta tesis. Muchas gracias por permitirme vivir una experiencia tan importante para mi formación.

También me gustaría reconocer y agradecer aquí, el apoyo y comprensión de todos mis compañeros de la Facultad de Matemáticas durante estos años.

Finalmente, quiero agradecer a la Consellería de Cultura, Educación e Ordenación Universitaria de la Xunta de Galicia por haber financiado gran parte de mis estudios de doctorado otorgándome una ayuda de apoyo a la etapa predoctoral en el marco del Plan I2C ED481A-2015/272.

Jorge Losada Rodríguez

Índice general

Prefacio

A veces uno tiene la impresión de que nuestra forma de entender y analizar la naturaleza evoluciona de lo *entero o natural*, o algo todavía más particular, hacia lo *fraccionario* o incluso hacia un concepto todavía más general.

Basta recordar que de niños se nos presentan inicialmente los números naturales, pero pronto aparecen —por estricta necesidad— los números enteros. Poco después, cuando ya necesitamos la división, se nos dan a conocer los números racionales o fraccionarios, que junto con los misteriosos irracionales forman el cuerpo de los números reales; sistema de numeración que será posteriormente extendido al conjunto de los números complejos.

Desde un punto de vista geométrico ocurre esencialmente lo mismo. Inicialmente, aparecen los conceptos de punto, curva, superficie y volumen, que están asociados a las dimensiones enteras nula, uno, dos y tres respectivamente. No obstante, los trabajos e ideas de B. Mandelbrot (1924–2010) nos recuerdan la importancia de conceptos ya introducidos previamente, como el de *dimensión de Hausdorff*, que nos permite hablar ya de dimensiones que pueden ser cualquier número real positivo. Así, la geometría, amplía sus horizontes y el concepto de dimensión tiene ahora un nuevo significado, que no deja nunca de ser coherente con los resultados del pasado.

En el cálculo se sigue el mismo camino. Es bien conocido que los conceptos de integral y derivada juegan aquí un papel fundamental y así, las derivadas o integrales sucesivas de una función surgen de modo natural y previsible.

Se trata luego de operadores diferenciales e integrales de orden entero. En cualquier caso, debemos ser conscientes de que estas herramientas tan solo son adecuadas, al menos en principio, para un conjunto selecto de funciones. Esta observación, es el origen o motivación de las exitosas teorías de los matemáticos H. L. Lebesgue (1875-1941) —integral y espacios de Lebesgue—, S. Sobolev (1908–1989) —espacios de Sobolev— y L. Schwartz (1915–2002) —teoría de las distribuciones—, que lograron extender el concepto de integral o derivada a un conjunto mucho mayor de funciones del inicialmente considerado.

Sin embargo, el cálculo fraccionario —disciplina en la que se enmarca esta tesis doctoral– generaliza a los operadores diferenciales e integrales de un modo distinto. Se trata aquí de estudiar la derivación de orden no entero. Tal idea, la de una derivada de orden no necesariamente entero, es tan antigua como la propia idea de derivada, pues apareció cuando en 1695 el marqués de L'Hôpital (1671–1704) planteó a G. W. Leibniz (1646–1716) cuál sería el significado de una derivada de orden 1/2, de ahí el adjetivo *fraccionario* que se mantiene en la actualidad. Una vez superadas las primeras dificultades, poco tiempo sería necesario para que se empezase a hablar de derivadas de orden arbitrario, hecho éste por el que el calificativo *cálculo fraccionario* no es hoy del todo correcto o exacto, pues debería sustituirse por el de *diferenciación e integración de orden arbitrario*, aunque quizás el término *cálculo fractal* también podría ser adecuado.

Empleando estas novedosas, a la vez que clásicas ideas, se puede construir un *cálculo fraccionario* que, sin perder de vista el cálculo diferencial ya tradicional —al que extiende y nunca sustituye—, cuenta con resultados ciertamente novedosos y útiles en diversos ámbitos.

No obstante, hasta no hace mucho tiempo, el cálculo fraccionario era considerado una rama exótica y poco productiva de las matemáticas. La ausencia, aún clara a día de hoy, de interpretaciones físicas o geométricas convincentes, sumado al excesivo número de definiciones propuestas y a la falta de consenso en la comunidad matemática, lastró durante un largo periodo de tiempo el desarrollo del cálculo fraccionario.

Como en cualquier área de las matemáticas, el interés del cálculo fraccionario no se limita únicamente a un campo teórico; sus aplicaciones son muy numerosas, tocando en la actualidad a la mayoría ciencias: química, física, biología, medicina, etc. Así, esta disciplina es a día de hoy una herramienta excepcional para la descripción de procesos en los que juegan un papel fundamental propiedades heredadas o la memoria. Pensemos, por ejemplo, en los novedosos materiales con memoria de forma. Debido a esto, en los últimos años, el cálculo fraccionario se ha mostrado especialmente útil y preciso en la modelización del comportamiento de materiales visco-elásticos y visco-plásticos, pero también podríamos mencionar aportaciones en modelos biológicos, ecológicos o epidemiológicos. Desde un punto de vista más abstracto, las aplicaciones e implicaciones en el estudio de comportamientos caóticos y en diversas cuestiones de la matemática más pura o abstracta, también son más que notables.

Resumen

Esta tesis, que lleva por título *Ecuaciones diferenciales de orden fraccionario y aplicaciones*, contiene una recopilación de los resultados probados por el autor durante su etapa de formación predoctoral. Los contenidos de la misma se enmarcan dentro del conocido como *cálculo fraccionario*, rama del análisis matemático que ha gozado de gran interés durante los últimos años y que tiene como objeto central de estudio a los operadores diferenciales e integrales de orden no necesariamente entero, que debido a su carácter eminentemente no local, podrían ser de gran interés a la hora de modelar ciertos fenómenos y procesos físicos.

El primer capítulo se inicia con una breve introducción histórica; se indican allí los principales hitos del cálculo fraccionario, desde sus inicios —que se remontan al nacimiento del propio cálculo diferencial— hasta los años 70 del pasado sigle XX. A continuación, partiendo de la ecuación integral de Abel, quien fue el primer matemático en mostrar una aplicación real de las derivadas e integrales de orden fraccionario, motivamos la definición de los operadores de diferenciación e integración de orden arbitrario de Riemann-Liouville.

Más adelante, se enumeraran y prueban ciertas propiedades elementales y bien conocidas de los operadores de Riemann-Liouville; esencialmente, se emplean para ello desigualdades de tipo integral y resultados clásicos del análisis. En las últimas secciones de este capítulo, se comentan generalizaciones naturales de las definiciones de Riemann-Liouville que han sido realmente importantes en el desarrollo y evolución del cálculo fraccionario. Por ejemplo, se mencionan los operadores fraccionarios de Liouville y las definiciones propuestas ya bien entrado el siglo XX por Marchaud.

En el segundo capítulo, se estudian operadores diferenciales de orden frac-

cionario más modernos, como por ejemplo la derivada de Caputo, que goza en la actualidad de gran popularidad e interés y que también será considerada posteriormente en los problemas estudiados en los Capítulos 3 y 4. También se empleará en este capítulo la conocida como derivada conformable; más exactamente, en la segunda sección, se estudian algunas ecuaciones diferenciales que involucran a tal derivada. Concretamente, se detallan allí los resultados publicados en [4] y [24].

En las secciones siguientes se discuten dificultades propias de las ecuaciones diferenciales de orden fraccionario; se pone especial interés en los problemas que surgen de la relación entre la regla de Leibniz y los operadores fraccionarios. Uno de los objetivos principales de este epígrafe es aclarar la validez de ciertos resultados relacionados con la ecuación logística fraccionaria; se discuten aquí los resultados publicados en [10].

La quinta y última sección de este capítulo está dedicada a la recientemente introducida derivada de Caputo-Fabrizio. Se estudia, entre otras cuestiones, el operador inverso asociado y se detallan algunos resultados publicados en [56].

El objetivo principal del tercer capítulo es presentar algunos resultados sobre existencia, unicidad y propiedades elementales de soluciones para ciertas ecuaciones diferenciales de orden fraccionario.

En la primera sección se estudia una familia de ecuaciones diferenciales funcionales de orden no entero; el protagonismo recae aquí en el carácter atractor de ciertas soluciones. Para ello, se emplearán teoremas de punto fijo clásicos y técnicas asociadas a medidas de no compacidad. Esencialmente, se presentan detalladamente los resultados publicados en [57].

La segunda sección está dedicada al estudio de ciertas versiones fraccionarias de las ecuaciones diferenciales de K. Pearson.Ttambién se analizan y discuten ciertas generalizaciones al caso fraccionario de propiedades cárácterísticas de ciertas familias de polinomios ortogonales. Se exponen las conclusiones publicadas en [8].

El último capítulo está dedicado al estudio del papel que desempeñan las funciones periódicas en el ámbito del cálculo fraccionario. En el caso clásico de órdenes enteros, el estudio de la existencia de soluciones periódicas para ecuaciones diferenciales es uno de los aspectos más interesantes de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, para el caso fraccionario, la definición del concepto de función periódica es extremadamente exigente y debido a ello, las condiciones que nos permiten garantizar la existencia soluciones periódicas de ciertas ecuaciones diferenciales fraccionarias son demasiado restrictivas. Es por esto que en las últimas décadas se han propuesto y estudiado ciertas generalizaciones del concepto de función periódica.

En la primera sección se estudian propiedades relacionadas con la idea de periodicidad para integrales y derivadas de orden no entero de una función periódica dada. Más exactamente, se analiza el comportamiento oscilatorio de la integral y la derivada fraccionaria de una función periódica; concretamente, se detallan los resultados publicados en [9] y [12].

La segunda y última sección está dedicada al estudio de resultados similares a los de la primera sección, pero ahora nos movemos en el marco del cálculo fraccionario discreto. Se muestran los resultados publicados en [11].

Capítulo 1

Operadores diferenciales e integrales de orden fraccionario

Iniciamos este primer capítulo con una breve introducción histórica que nos permitirá tener una visión amplia y global del cálculo fraccionario.

A continuación, en la segunda sección, hablaremos de la ecuación integral de Abel, que será empleada en la siguiente sección para motivar la definición de los operadores de derivación e integración fraccionaria.

Las secciones cuarta y quinta se dedican a mostrar las propiedades fundamentales y más importantes de los operadores fraccionarios más conocidos e interesantes: las derivadas e integrales de Riemann-Liouville. Las dos últimas secciones se dedican generalizaciones naturales de las definiciones de Riemann-Liouville; hablaremos allí de la integral y derivada fraccionaria de Liouville y de las ideas propuestas por Marchaud.

Salvo el orden escogido y ciertas explicaciones extra en las demostraciones, los resultados mostrados en este capítulo no tienen nada de original; puede consultarse más información sobre ellos y resultados similares en las referencias [17, 54, 63, 67, 70].

1.1. Breve historia del cálculo fraccionario

Estamos ya más que acostumbrados a trabajar con las ideas de derivada e integral; así las notaciones

$$\frac{df}{dx}(x) \equiv D^1 f(x) \qquad \text{ou} \qquad \frac{d^2 f}{dx^2}(x) \equiv D^2 f(x),$$

no suponen para nosotros ningún misterio. Por otra parte, es también sobradamente conocida la importancia de los operadores diferenciales e integrales en el estudio, comprensión y explicación de multitud de procesos y fenómenos físicos y naturales; pero, ¿es posible calcular una derivada de orden 1/2? Esto es, ¿cuál es el significado de la notación

$$\frac{d^{1/2}f}{dx^{1/2}}(x) \equiv D^{1/2}f(x)?$$

Aunque estas cuestiones fueron planteadas originalmente por el marqués de L'Hôpital a Leibniz en 1695, las respuestas a tales preguntas —o simplemente el estudio de estas cuestiones— no se encuentran con facilidad en libros clásicos de análisis. Sin embargo, matemáticos de fama como: Euler, Lagrange, Lacroix, Laplace, Riemann, Fourier, Liouville o Hardy, ocuparon parte de su tiempo en dar respuesta a tan enigmáticos interrogantes.

Así pues, el origen real del cálculo fraccionario se debe en última instancia a la curiosidad matemática, pero conviene tener presente que no se trata —en ningún caso— de un ejercicio estéril de generalización o abstracción matemática.

La primera obra dedicada enteramente al cálculo fraccionario [63] no aparecería hasta el año 1974 y es obra de un físico y matemático (J. Spanier) y un químico con multitud de intereses (Keith B. Oldham). En la actualidad el número de publicaciones dedicadas por completo a esta disciplina es muy elevado. Son referencia obligada [17, 54, 67] y la enciclopédica [70].

Mostramos a continuación, en un eje cronológico, los hitos más importantes relacionados con el cálculo fraccionario hasta el año 1975.

1695 En septiembre de este año Leibniz e L'Hôpital discuten el posible significado de $d^{\frac{1}{2}}/dx^{\frac{1}{2}}$.

1819 Lacroix dedica, en su obra de más de 700 páginas titulada *Traité du Calcul Differential et du Calcul Intégral*, dos hojas escasas al cálculo fraccionario.

1822 Fourier deduce una generalización de los operadores diferenciales e integrales en su célebre tratado *Théorie Analytique de la Chaleur*, pero no aporta ninguna aplicación.

1823 Abel resuelve el problema de la tautócrona de forma extremadamente sencilla y bella; emplea para ello una derivada de orden 1/2. Esta es la primera aplicación conocida del cálculo fraccionario.

1847 Liouville propone a su definición de derivada de orden arbitrario.

1867 Riemann propone a su definición de integral de orden arbitrario.

1868 Grünwald justifica y propone una definición natural y novedosa de derivada e integral de orden narbitrario.

1892 Letnikov investiga sobre la derivada de Grünwald y publica los primeros resultados sobre tal operador.

1895 Hadamard propone nuevas definiciones para los operadores diferenciales e integrales de orden fraccionario.

1917 O. Heaviside indica en su célebre trabajo *Electrical Papers*:

> *...tal resultado es fácil y elemental si consideramos derivadas fraccionarias...pero, presumiblemente el lector no conoce todavía la idea de derivada fraccionaria...*

1922 Weyl propone una nueva definición de operador fraccionario.

1923 Hardy publica *Notes on Some Points in the Integral Calculus* al que siguen otras publicaciones de la mano de Littlewood sobre el cálculo fraccionario.

1923 Lévy publica *Sur le derivation et l'integration géneralisées.*

1939 Erdélyi estudia la relación de las funciones hipergeométricas con el cálculo fraccionario.

1949 M. Riesz inicia el estudio de las ecuaciones diferenciales fraccionarias.

1951 Schwartz, en su obra *Théorie des distributions*, indica que ciertas definiciones de derivada e integral fraccionaria pueden pensarse como un tipo especial de convolución en el sentido de las distribuciones.

1959 J.L. Lions estudia la ecuación de Navier–Stokes adoptando un punto de vista fraccionario.

1964 En la obra *Generalized Functions* de Gel'fand y Shilov, se indica que muchas funciones especiales pueden expresarse como derivadas o integrales de orden fraccionario de ciertas funciones elementales.

1969 Love publica *Fractional Derivatives of Imaginary Order.*

1974 Oldham y Spanier publican *The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order.*

Más información sobre los avances históricos del cálculo fraccionario puede consultarse en [79, 80].

1.2. La ecuación integral de Abel

Para introducir la ecuación integral de Abel, que nos conducirá finalmente a la definición de los operadores de integración fraccionaria, es conveniente introducir antes la noción de función absolutamente continua. Información detallada sobre este concepto puede consultarse, por ejemplo, en [13].

Definición 1.1. *Sea $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo compacto. Una función f se dice absolutamente continua en dicho intervalo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que para toda familia finita de intervalos disjuntos dos a dos $[a_k, b_k] \subset [a,b]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, tal que*

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$$

se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

El espacio de las funciones absolutamente continuas en el intervalo $[a,b]$ se denota por $AC([a,b])$.

Proposicion 1.2. *El espacio $AC([a,b])$ coincide con el espacio de las primitivas de funciones del espacio de Lebesgue $\mathsf{L}^1(a,b)$. Así pues,*

$$f \in AC([a,b]) \Longleftrightarrow f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)\,dt, \quad \text{con } \varphi \in \mathsf{L}^1(a,b) \text{ y } c \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

Sea $0 < \alpha < 1$. La ecuación integral

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt = f(x), \quad x \in [a,b], \quad (1.2)$$

donde f es conocida y φ es la función incógnita a determinar, recibe el nombre de *ecuación integral de Abel*.

Para resolver tal ecuación se procede del modo que indicamos a continuación. Empezamos renombrando la variable x como t y la variable t como s en la ecuación (1.2) de partida. Multiplicando ambos miembros de por $(x-t)^{-\alpha}$ e integrando entre a y x, obtenemos que

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{1}{(x-t)^{\alpha}} \int_a^t \frac{\varphi(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}\,ds\,dt = \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}\,dt.$$

Intercambiando ahora el orden de integración en el primer miembro, deducimos que

$$\int_a^x \varphi(s) \int_s^x \frac{1}{(x-t)^\alpha (1-s)^{1-\alpha}}\, dt\, ds = \Gamma(\alpha) \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}\, dt.$$

Aplicando el cambio de variable $t = s + \tau(x-s)$, concluimos que

$$\begin{aligned}\int_s^x (x-t)^{-\alpha}(t-s)^{\alpha-1}\, dt &= \int_0^1 \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^\alpha\, d\tau \\ &= B(\alpha, 1-\alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha).\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int_a^x \varphi(s)\, ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}\, dt, \tag{1.3}$$

y entonces

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}\, dt. \tag{1.4}$$

Así pues, si la ecuación integral (1.2) admite una solución, entonces tal solución viene dada necesariamente por una función φ de la forma indicada en (1.4) y por tanto, la solución de la ecuación integral (1.2) -en caso de existir- es única.

Estudiaremos entonces, bajo qué condiciones la ecuación integral de Abel (1.2) admite solución. Introducimos para ello la siguiente notación,

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}\, dt. \tag{1.5}$$

Teorema 1.3. *La ecuación integral de Abel (1.2) admite solución en el espacio de funciones* $\mathsf{L}^1(a,b)$ *si y solo si*

$$f_{1-\alpha} \in AC([a,b]) \quad y \quad f_{1-\alpha}(a) = 0. \tag{1.6}$$

Demostración. Empecemos observando que

$$\begin{aligned}\int_a^b |f_{1-\alpha}(x)|\, dx &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^b \Big| \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}\, dt \Big|\, dx \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^b |f(t)| \int_t^b (x-t)^{-\alpha}\, dx\, dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_a^b |f(t)|(b-t)^{1-\alpha}\, dt;\end{aligned}$$

luego si $f \in \mathsf{L}^1(a,b)$, entonces $f_{1-\alpha} \in \mathsf{L}^1(a,b)$.

Supongamos inicialmente que la ecuación integral de Abel (1.2) admite solución $\varphi \in \mathsf{L}^1(a,b)$. En tal caso, se tiene que $f \in \mathsf{L}^1(a,b)$ y así son válidas todas las etapas indicadas al principio de la sección, luego ahora es claro que $f_{1-\alpha} \in AC([a,b])$ y en virtud de la Proposición 1.2 concluimos que $f_{1-\alpha}(a) = 0$.

Supongamos ahora la validez de (1.6). En tal caso, $f'_{1-\alpha} \in \mathsf{L}^1(a,b)$ y así, la función φ introducida en (1.4) está definida en casi todo punto del intervalo (a,b). Mostraremos que $f'_{1-\alpha}$ satisface da ecuación integral de Abel; esto es, probaremos que

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f'_{1-\alpha}(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\, dt = g(x), \quad x \in (a,b), \tag{1.7}$$

con $g = f$ en $\mathsf{L}^1(a,b)$.

La ecuación (1.7) es una ecuación integral de Abel en la que la función $f'_{1-\alpha}$ juega el papel de función incógnita; luego, en virtud de lo visto al principio de la sección,

$$f'_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{g(t)}{(x-t)^{\alpha}}\, dt,$$

o lo que es equivalente, $f'_{1-\alpha} = g'_{1-\alpha}$ en $\mathsf{L}^1(a,b)$. Por hipótesis, $f_{1-\alpha} \in AC([a,b])$; por otra parte, teniendo en cuenta (1.3), $g_{1-\alpha} \in AC([a,b])$. Luego

$$f_{1-\alpha} - g_{1-\alpha} = c$$

para cierta constante real c. Finalmente, dado que por hipótesis $f_{1-\alpha}(a) = 0$, concluimos luego que $c = 0$. Es decir,

$$\int_a^x \frac{g(t) - f(t)}{(x-t)^{\alpha}}\, dt = 0.$$

Nuevamente, estamos ante una ecuación integral de Abel, pero ahora por unicidad de solución, concluimos finalmente que $f = g$ en $\mathsf{L}^1(a,b)$. $\square$

A continuación, mostramos una condición suficiente para la existencia de solución de la ecuación integral de Abel (1.2) en términos únicamente de la función f.

Lema 1.4. *Si $f \in AC([a,b])$ entonces $f_{1-\alpha} \in AC([a,b])$ y además,*

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \Big[f(a)(x-a)^{1-\alpha} + \int_a^x f'(t)(x-t)^{1-\alpha}\, dt \Big].$$

Demostración. Por ser f una función absolutamente continua en el intervalo $[a,b]$, podemos escribir

$$f(t) = f(a) + \int_a^t f'(s)\,ds, \quad \text{para cada } t \in [a,b].$$

Por tanto, teniendo en cuenta (1.5),

$$\begin{aligned} f_{1-\alpha}(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \Big[f(a) + \int_a^t f'(s)\,ds\Big](x-t)^{-\alpha}\,dt \\ &= \frac{f(a)}{\Gamma(2-\alpha)}(x-a)^{1-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \int_a^t \frac{f'(s)}{(x-t)^{\alpha}}\,ds\,dt. \\ &= \frac{f(a)}{\Gamma(2-\alpha)}(x-a)^{1-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_a^x f'(s)(x-s)^{1-\alpha}\,ds \end{aligned}$$

Así, usando que

$$(x-a)^{1-\alpha} = (1-\alpha)\int_a^x (t-a)^{-\alpha}\,dt,$$

en virtud de la Proposición 1.2, concluimos finalmente que $f_{1-\alpha}$ es una función absolutamente continua en $[a,b]$ por ser suma de funciones absolutamente continuas en $[a,b]$ y el resultado enunciado queda probado. □

Corolario 1. *Si $f \in AC([a,b])$, entonces la ecuación integral de Abel (1.2) admite solución única en $\mathsf{L}^1(a,b)$ y tal solución viene dada por*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\Big[\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \int_a^x \frac{f'(s)}{(x-s)^{\alpha}}\,ds\Big], \quad x \in [a,b].$$

1.3. Integrales y derivadas fraccionarias

La definiciones y resultados que mostraremos en esta sección y en la siguiente son a día de hoy clásicos; pueden consultarse resultados más detallados en [17, 70].

Sea $\varphi \in \mathsf{L}^1(a,b)$. Para la integral iterada n veces, la fórmula de integración reiterada de Cauchy

$$\int_a^x \int_a^x \cdots \int_a^x \varphi(x)\,dx = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)\,dt \tag{1.8}$$

se prueba fácilmente aplicando el método de inducción. Dado que $(n-1)! = \Gamma(n)$, es posible extender el proceso de integración reiterada a un número α, no necesariamente natural o entero, de veces. Esto motiva el siguiente concepto ya introducido originalmente por Riemann y Liouville.

Definición 1.5. *Sea $\varphi \in \mathsf{L}^1(a,b)$ y $\alpha > 0$; la función*

$$I_a^\alpha \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\, dt, \quad x > a$$

recibe el nombre de integral fraccionaria de Riemann-Liouville *de orden $\alpha > 0$ de la función φ.*

Sin duda alguna, la propiedad más importante de las integrales fraccionarias es la conocida como *propiedad de semigrupo*:

$$I_a^\alpha I_a^\beta f = I_a^{\alpha+\beta} f, \quad \text{para todo } \alpha, \beta > 0 \text{ y } f \in \mathsf{L}^1(a,b).$$

La prueba no presenta ninguna dificultad; basta aplicar el Teorema de Fubini y efectuar el cambio de variable $t = \tau + s(x-\tau)$,

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha I_a^\beta f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\beta}}\, d\tau\, dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(\tau) \int_a^\tau (x-t)^{\alpha-1}(t-\tau)^{\beta-1}\, dt\, d\tau \\
&= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{f(\tau)}{(x-\tau)^{1-\alpha-\beta}} = I_a^{\alpha+\beta} f(x).
\end{aligned}$$

Una vez introducido el concepto de integral fraccionaria, resulta natural plantearse una definición para la idea o concepto de derivada fraccionaria. Como veremos a continuación, la propiedad de semigrupo de la integral fraccionaria juega un importante papel a la hora introducir el concepto de derivada de orden fraccionario.

Definición 1.6. *Dada una función f definida en el intervalo $[a,b]$ y $0 < \alpha < 1$, la expresión*

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}\, dt$$

recibe el nombre de derivada fraccionaria de Riemann-Liouville *de orden α de la función f.*

Notemos que, a pesar de que hemos definido la integral fraccionaria de orden α para cualquier número real positivo α, la derivada fraccionaria tan solo ha sido introducida para $0 < \alpha < 1$. Además que la derivada fraccionaria de una función f sería -de acuerdo con la Definición 1.6- la derivada ordinaria de la integral fraccionaria de f de orden $1-\alpha$, es decir, $D_a^\alpha = D^1 I_a^{1-\alpha}$.

Así pues, la definición o construcción de la integral fraccionaria de una función dada, y de igual modo el concepto de derivada fraccionaria, está íntimamente relacionada con la ecuación integral de Abel.

Antes de pasar a considerar derivadas fraccionarias de orden $\alpha > 1$, estimamos conveniente indicar una condición suficiente para la existencia de la derivada fraccionaria de una función.

Lema 1.7. *Si $f \in AC([a,b])$ entonces $D_a^\alpha f$ existe para todo $x \in [a,b]$ y para todo $0 < \alpha < 1$. Además, $D_a^\alpha f \in \mathsf{L}^r(a,b)$ para $1 \leq r < 1/\alpha$ y*

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \Big[\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \int_a^x \frac{f'(t)}{(x-t)^\alpha}\, dt \Big].$$

Demostración. La existencia de $D_a^\alpha f$, así como la expresión enunciada, son una consecuencia inmediata del Lema 1.4 anterior. Empleado tal expresión, es inmediato comprobar que $D_a^\alpha f \in \mathsf{L}^r(a,b)$ para $1 \leq r < 1/\alpha$. $\square$

A continuación, introduciremos la definición de derivada fraccionaria de orden $\alpha > 0$ arbitrario. Para ello, emplearemos la notación habitual: $[\alpha]$ será la parte entera de un número y $\{\alpha\}$ la parte fraccionaria, de modo que $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$ para todo $\alpha > 0$.

En lo que sigue, si α es un número entero, entonces D_a^α será entendida como el operador derivada usual iterado α veces. En otro caso, consideraremos

$$D_a^\alpha f = \frac{d^{[\alpha]}}{dx^{[\alpha]}} D_a^{\{\alpha\}} f$$

y así, para $n = [\alpha] + 1$, tendremos que

$$\begin{aligned} D_a^\alpha f(x) &= \frac{d^{[\alpha]+1}}{dx^{[\alpha]+1}} I_a^{n-\alpha} f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}}\, dt. \end{aligned} \tag{1.9}$$

De forma análoga a lo ya indicado para el caso $0 < \alpha < 1$ en el Lema 1.7 anterior, una condición suficiente para la existencia de D^α viene dada por el siguiente resultado, en el que aparece la clase de funciones $AC^n([a,b])$, con $n \in \mathbb{N}$, formada por todas aquellas funciones que tienen derivada de orden $n-1$ continua en el intervalo $[a,b]$ y cuya derivada de orden n es un elemento de $AC([a,b])$.

Lema 1.8. *Dado $\alpha > 0$, una condición suficiente para la existencia de $D_a^\alpha f$ es que*

$$\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\{\alpha\}}}\, dt \in AC^{[\alpha]}([a,b]). \tag{1.10}$$

Nótese que $f \in AC^{[\alpha]}$ implica la veracidad de la condición (1.10).

Lema 1.9. *El espacio $AC^n([a,b])$ está formado exclusivamente por aquellas funciones f que pueden ser expresadas de la forma*

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)\,dt + \sum_{k=0}^{n-1} c_k(x-a)^k, \tag{1.11}$$

donde $\varphi \in \mathsf{L}^1(a,b)$ y c_k, con $1 \le k \le n-1$, constantes reales.

Demostración. Basta tener en cuenta la definición del espacio $AC^n([a,b])$, la caracterización dada en (1.1) y la fórmula (1.8). □

Conviene observar que si en (1.11) escogemos $\varphi(t) = f^{(n)}(t)$, entonces debe ser necesariamente

$$c_k = f^{(k)}(a)/k!, \qquad \text{para cada } 0 \le k \le n-1.$$

En el caso $n = 0$, $AC^0([a,b]) = AC([a,b])$ se tiene precisamente la Proposición 1.2 anterior.

Proposicion 1.10. *Dado $\alpha > 0$, si $n = [\alpha]+1$ y $f \in AC^n([a,b])$, entonces $D_a^\alpha f$ existe en casi todo punto de $[a,b]$ y además*

$$D_a^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(x-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\,dt.$$

Demostración. Dado que por hipótesis $f \in AC^n([a,b])$, tenemos entonces que

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

y así, en virtud de (1.9), concluimos que

$$\begin{aligned} D_a^\alpha f(x) =& \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(n-\alpha)k!}(x-a)^k \frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (t-x)^{-\alpha+n-1}\,dt \\ &+ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)(n-1)!}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x \frac{1}{(t-x)^{\alpha-n+1}}\int_a^t (t-s)^{n-1} f^{(n)}(s)\,ds\,dt \\ =& \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(x-a)^{k-\alpha} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)(n-1)!}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x f^{(n)}(s)\int_s^x (t-x)^{n-\alpha-1}(t-s)^{n-1}\,dt\,ds\\
=&\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(x-a)^{k-\alpha}\\
&+\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)(n-1)!}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x f^{(n)}(s)(x-s)^{2n-\alpha-1}\frac{(n-1)!\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(2n-\alpha)}\,ds\\
=&\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(x-a)^{k-\alpha}\\
&+\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x f^{(n)}(s)(x-s)^{2n-\alpha-1}\frac{1}{\Gamma(2n-\alpha)}\,ds\\
=&\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(x-a)^{k-\alpha}+\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x\frac{f^{(n)}(s)}{(x-s)^{\alpha-n+1}}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Consideremos ahora la función $f(x)=(x-a)^{-\mu}$, con $0<\mu<1$. Tenemos entonces que, para $0<\alpha<1$ arbitrario,

$$
\begin{aligned}
D_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{(t-a)^{-\mu}}{(x-t)^\alpha}\,dt\\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^1 s^{-\mu}(1-s)^{-\alpha}(x-a)^{1-\mu-\alpha}\,dt\\
&= \frac{B(1-\alpha,1-\mu)}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{1-\mu+\alpha}{(x-a)^{\mu+\alpha}}=\frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(1-\alpha-\mu)}(x-a)^{-\mu-\alpha}.
\end{aligned}
$$

En particular,

$$
D_a^\alpha f(x)=0, \qquad \text{para } f(x)=(x-a)^{-(1-\alpha)}.
$$

Así pues, la función $(x-a)^{\alpha-1}$ juega, para el operador D_a^α, el mismo papel que juegan las constantes para el operador derivada clásico. Procediendo de forma totalmente análoga, se prueba que para $\alpha>0$ arbitrario

$$
D_a^\alpha f(x)=0 \quad \text{si} \quad f(x)=(x-a)^{\alpha-k}, \quad \text{para } k=1,2,\ldots,1+[\alpha].
$$

En general, para una función $\varphi(x)$ de la forma $\varphi(x)=(x-a)^\beta$, con $\beta>1$ arbitrario, teniendo en cuenta la definición de la función beta, obtenemos que

$$
I_a^\alpha\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (t-a)^\beta(x-t)^{\alpha-1}\,dt=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha+\beta}\int_0^1 s^\beta(s-1)^{\alpha-1}\,ds
$$

$$=\frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta}. \tag{1.12}$$

Por tanto, para $\alpha > 0$, haciendo $n = [\alpha] + 1$, concluimos que

$$D_a^\alpha \varphi(x) = \frac{d^n}{dx^n} I_a^{n-\alpha}\varphi(x) = \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)} \frac{d^n}{dx^n}(x-a)^{n-\alpha+\beta}$$
$$= \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}.$$

1.4. Integración y derivación fraccionaria

Es sobradamente conocido que los operadores de integración y derivación usuales son inversos si aplicamos la derivada en último lugar; esto es,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x \varphi(t)\,dt = \varphi(x).$$

Sin embargo, en general

$$\int_a^x \varphi'(t)\,dt \neq \varphi(x),$$

ya que en este caso, debemos tener en cuenta, entre otras cuestiones, el valor de la función $\varphi(x)$ en el punto $x = a$. Más generalmente, tenemos realmente que

$$\frac{d^n}{dx^n} I_a^n f(x) = f(x), \quad \text{pero} \quad I_a^n f^{(n)}(x) \neq f(x),$$

diferenciándose estas dos últimas funciones en un polinomio de grado $n-1$. De forma similar, en el caso fraccionario tendremos que $I_a^\alpha D_a^\alpha \varphi = \varphi$, pero no necesariamente será cierto que $D_a^\alpha I_a^\alpha \varphi = \varphi$, diferenciándose ambas funciones en una combinación lineal de las funciones $(x-a)^{\alpha-k}$, con $k = 1, 2, \ldots, [\alpha]+1$.

Definición 1.11. *Sean $1 \leq p < \infty$ y $\alpha > 0$; denotaremos por $I_a^\alpha(\mathsf{L}^p)$ al conjunto formado por aquellas funciones para las que existe $\varphi \in \mathsf{L}^p(a,b)$ de modo que $f = I_a^\alpha \varphi$.*

Teorema 1.12. *Condición necesaria y suficiente para que $f \in I_a^\alpha(\mathsf{L}^1)$ es que*

$$I_a^{n-\alpha} f \in AC^n([a,b]) \quad y \quad f_{n-\alpha}^{(k)}(a) = 0 \quad \text{para } 0 \leq k \leq n-1, \tag{1.13}$$

siendo $n = [\alpha] + 1$.

Demostración. Si $f = I_a^\alpha \varphi$ para cierta función $\varphi \in \mathsf{L}^1(a,b)$ entonces, en virtud de la propiedad de semigrupo, $I_a^{n-\alpha} f = I_a^n \varphi$. Así pues, la necesidad de las condiciones (1.13) se sigue del Lema 1.9 anterior.

Supongamos ahora que se satisfacen las condiciones (1.13) indicadas en el enunciado. En tal caso, en virtud nuevamente del Lema 1.9, podemos expresar $I_a^{n-\alpha} f$ como $I_a^{n-\alpha} f = I_a^\alpha \varphi$ para cierta $\varphi \in \mathsf{L}^1(a,b)$. Por tanto, en virtud de la propiedad de semigrupo,

$$I_a^{n-\alpha} f = I_a^n \varphi = I_a^{n-\alpha} I_a^\alpha \varphi$$

y así, $I_a^{n-\alpha}(f - I_a^\alpha \varphi) = 0$; luego por unicidad de solución de la ecuación integral de Abel, $f = I_a^\alpha \varphi$. □

Es fundamental tener presente que el hecho de que una función $f \in I_a^\alpha(\mathsf{L}^1)$ es independiente de la existencia de la derivada de orden α de tal función. Por ejemplo, la función $f(x) = (x-a)^{\alpha-1}$, con $0 < \alpha < 1$, cuya derivada fraccionaria de orden α es idénticamente nula, no es una función de $I_a^\alpha(\mathsf{L}^1)$ ya que $f_{1-\alpha}(a) \neq 0$. En realidad, podríamos pensar que la función $(x-a)^{\alpha-1}$ es la integral fraccionaria de orden α de la distribución delta de Dirac $\delta(x-a)$ concentrada en a —que como es bien conocido, no está asociada a ninguna función del espacio L^1—.

Supongamos por simplicidad que $0 < \alpha < 1$. Si consideramos la hipótesis $D_a^\alpha f(x) = d/dx I_a^{1-\alpha} f(x)$ existe en casi todo punto de cierto intervalo, entonces deberemos tener en cuenta el siguiente hecho: que una función g admita derivada g' integrable no es condición suficiente para que $\int_a^x g'(t)\,dt = g(x) + c$; basta considerar la función *escalera del diablo*. Luego es claro que la condición *existe y es integrable la derivada fraccionaria de orden α de la función f* no es suficiente para poder asegurar que $f \in I_a^\alpha(\mathsf{L}_1)$. Para evitar estos inconvenientes es necesario trabajar nuevamente con funciones absolutamente continuas.

Definición 1.13. *Dado $\alpha > 0$, diremos que $f \in \mathsf{L}_1(a,b)$ tiene derivada fraccionaria de orden α integrable si $I_a^{n-\alpha} f \in AC^n([a,b])$ con $n = [\alpha] + 1$.*

El siguiente teorema clarifica la relación entre los operadores de integración y derivación fraccionaria.

Teorema 1.14. *Si φ es una función integrable, entonces*

$$D_a^\alpha I_a^\alpha \varphi(x) = \varphi(x). \tag{1.14}$$

Si $\varphi \in I_a^\alpha(\mathsf{L}^1)$, entonces

$$I_a^\alpha D_a^\alpha \varphi(x) = \varphi(x) \tag{1.15}$$

Si $\varphi \in \mathsf{L}^1(a,b)$ es una función con derivada fraccionaria de orden α integrable, entonces

$$I_a^\alpha D_a^\alpha \varphi(x) = \varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)} (I_a^{n-\alpha}\varphi)^{(n-k-1)}(a), \quad \text{con } n = [\alpha]+1. \tag{1.16}$$

Demostración. Efectivamente, pues para el primer resultado enunciado, intercambiando el orden de integración y efectuando el pertinente cambio de variable, obtenemos que para una función φ integrable,

$$\begin{aligned} D_a^\alpha I_a^\alpha \varphi(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{1}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \int_a^t \frac{\varphi(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}\, ds\, dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \varphi(s) \int_s^x (t-s)^{\alpha-1}(x-t)^{n-\alpha-1}\, dt\, ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \varphi(s)(x-s)^{n-1}\, ds = \frac{d^n}{dx^n} I_a^n \varphi(x) = \varphi(x). \end{aligned}$$

Si asumimos ahora como hipótesis que $\varphi \in I_a^\alpha(\mathsf{L}^1)$, entonces (1.15) se sigue fácilmente a partir de (1.14); de hecho, la identidad (1.15) ya había sido probado en la demostración del Teorema 1.12 anterior.

La prueba de (1.16) es completamente análoga a la mostrada para probar la suficiencia de las condiciones del Teorema 1.12. Veamos como proceder, por ser $\varphi \in \mathsf{L}^1(a,b)$ una función con derivada fraccionaria de orden α integrable, teniendo en cuenta la Definición 1.13 y el Lema 1.9, concluimos que podemos expresar la función $I_a^{n-\alpha}\varphi$ como

$$\begin{aligned} I_a^{n-\alpha}\varphi(x) =& \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} \left(I_a^{n-\alpha}\varphi\right)^{(n)}(t)\, dt \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(I_a^{n-\alpha}\varphi)^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\ =& I_a^{n-\alpha} I_a^\alpha D_a^\alpha \varphi\,(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(I_a^{n-\alpha}\varphi)^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \end{aligned}$$

y así,

$$I_a^{n-\alpha}(\varphi - I_a^\alpha D_a^\alpha \varphi)\,(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(I_a^{n-\alpha}\varphi)^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

de donde, aplicando a ambos términos de la igualdad anterior el operador $D_a^{n-\alpha}$, se sigue finalmente que

$$
\begin{aligned}
I_a^\alpha D_a^\alpha \varphi(x) =& \varphi(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(I_a^{n-\alpha}\varphi)^{(k)}(a)}{\Gamma(k-n+\alpha+1)}(x-a)^{k-n+\alpha} \\
=& \varphi(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(I_a^{n-\alpha}\varphi)^{(n-1-k)}(a)}{\Gamma(\alpha-k)}(x-a)^{\alpha-k-1}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Una consecuencia inmediata de la identidad (1.16) probada anteriormente es el siguinete resultado, que nos dá una versión fraccionaria de la serie de Taylor usual.

Corolario 2. *Sea $\alpha > 0$ y $n \in \mathbb{N}$; si f es una función con derivada fraccionaria de orden $\alpha + n$ integrable (en el sentido de la Definición 1.13), entonces*

$$
f(x) = \sum_{j=-[\alpha]-1}^{n-1} \frac{D_a^{\alpha+j} f(a)}{\Gamma(\alpha+j+1)}(x-a)^{\alpha+j} + R_n(x),
$$

donde $R_n(x) = I_a^{\alpha+n} D_a^{\alpha+n} f(x)$.

Demostración. Basta considerar en (1.16) como orden de derivación e integración $\alpha + n$ y tener en cuenta que $[\alpha + n] = n + [\alpha]$. En efecto, pues

$$
\begin{aligned}
I_a^{\alpha+n} D_a^{\alpha+n} f(x) =& f(x) - \sum_{k=0}^{n+[\alpha]} \frac{(x-a)^{n+\alpha-k-1}}{\Gamma(n+\alpha-k)} (I_a^{[\alpha]+1-\alpha} f)^{(n+[\alpha]-k)}(a) \\
=& f(x) - \sum_{k=0}^{n+[\alpha]} \frac{D_a^{n-k-1+\alpha} f(a)}{\Gamma(n+\alpha-k)}(x-a)^{n+\alpha-k-1} \\
=& f(x) - \sum_{j=-[\alpha]-1}^{n-1} \frac{D_a^{\alpha+j} f(a)}{\Gamma(\alpha+j+1)}(x-a)^{\alpha+j}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Nota 1.1. Observemos que para valores de $\alpha \in \mathbb{N}$, obtenemos la clásica fórmula de Taylor con el resto dado mediante la fórmula integral.

1.5. Propiedades de los operadores fraccionarios

Conocer ciertas propiedades elementales de los operadores fraccionarios es ciertamente importante. En esta sección mostramos ciertos resultados sobre acotación de los operadores fraccionarios de Riemann-Liouville que nos permitirán entender como el operador integral mejora ciertas propiedades de las funciones sobre las que actúa. Resultados similares, e incluso más generales, pueden consultarse en [70].

Una familia uniparamétrica de operadores T_α, con $\alpha \geq 0$, actuando en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ se dice que es un *semigrupo* si $T_\alpha T_\beta = T_{\alpha+\beta}$ para todo α, $\beta \geq 0$ y $T_0 x = x$ para todo $x \in X$.

Un semigrupo se dice *fuertemente continuo* si para cada $x \in X$,

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \|T_\alpha x - T_{\alpha_0} x\|_X = x, \quad 0 \leq \alpha_0 < \infty.$$

Hablaremos de semigrupo *uniformemente continuo* si se cumple que

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \|T_\alpha \varphi - T_{\alpha_0} \varphi\| = 0,$$

donde ahora $\|\cdot\|$ denota a la norma en el espacio de operadores lineales y acotados definidos en X y con imagen contenida en X.

Teorema 1.15. *Para $p \geq 1$, los operadores de integración de orden fraccionario $\alpha \geq 0$ de Riemann-Liouville forman un semigrupo en el espacio $\mathsf{L}^p(a,b)$, $1 < p < \infty$; además, tal semigrupo es uniformemente continuo para $\alpha > 0$ y fuertemente continuo para $\alpha \geq 0$.*

Demostración. Comencemos observando que el operador I_a^α es lineal y limitado en $\mathsf{L}^p(a,b)$. En efecto, pues empleando la desigualdad de Hölder, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_a^b \Big| \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\, dt \Big|^p dx &= \int_a^b \Big| \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\, dt \Big|^{p-1} \Big| \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\, dt \Big| \, dx \\
&\leq \int_a^b \Big| \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\, dt \Big|^{p-1} \int_a^x \Big| \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} \Big| \, dt\, dx \\
&= \int_a^b \int_a^x \Big| \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\, dt \Big|^{p-1} \Big| \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} \Big| \, dt\, dx \\
&= \int_a^b \int_t^b \Big| \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\, dt \Big|^{p-1} \Big| \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} \Big| \, dx\, dt \\
&\leq \int_a^b \Big[\int_t^b \Big| \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\, dt \Big|^{(p-1)q} dx \Big]^{1/q} \Big[\int_t^b \Big| \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} \Big|^p dx \Big]^{1/p} dt \\
&\leq \int_a^b \Big[\int_a^b \Big| \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\, dt \Big|^p dx \Big]^{1/q} \Big[\int_t^b \Big| \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} \Big|^p dx \Big]^{1/p} dt. \\
&= \Big[\int_a^b \Big| \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\, dt \Big|^p dx \Big]^{1/q} \int_a^b \Big[\int_t^b \Big| \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} \Big|^p dx \Big]^{1/p} dt.
\end{aligned}$$

Por tanto, pasando dividiendo el primer factor del segundo miembro de la desigualdad anterior al primer miembro y aplicando luego la desigualdad generalizada de Minkowski, obtenemos finalmente que que

$$\begin{aligned}\Big[\int_a^b \Big|\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt\Big|^p dx\Big]^{1/p} &\le \int_a^b \Big[\int_t^b \Big|\frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\Big|^p dx\Big]^{1/p} dt\\ &\le \Big[\int_a^b \int_t^b \Big|\frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\Big|^p dx\,dt\Big]^{1/p}\\ &= \Big[\int_a^b \int_a^x \Big|\frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\Big|^p dt\,dx\Big]^{1/p}\\ &\le \|\varphi\|_{\mathsf{L}^p}\Big[\frac{(b-a)^{\alpha p-p+2}}{(\alpha p-p+1)(\alpha p-p+2)}\Big]^{1/p}. \qquad (1.17)\end{aligned}$$

Ahora la acotación o continuidad del operador I_a^α es clara.

Las propiedades de la definición de semigrupo para el operador I_a^α ya fueron probadas y comentadas anteriormente; centremos entonces nuestros esfuerzos en probar la continuidad uniforme del semigrupo $(I_a^\alpha)_{\alpha\ge 0}$. Para α, $\beta > 0$ arbitrarios, tenemos que

$$\begin{aligned}I_a^\alpha\varphi - I_a^\beta\varphi &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt - \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\beta}}\,dt\\ &= \Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}-\frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} - \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\beta}}\,dt\\ &= A\varphi + B\varphi.\end{aligned}$$

A continuación, estimaremos las cantidades $\|A\varphi\|_{\mathsf{L}^p}$ y $\|B\varphi\|_{\mathsf{L}^p}$ de modo separado. Así, en virtud de (1.17),

$$\|A\varphi\|_{\mathsf{L}^p} \le \Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}-\frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)\Big[\frac{(b-a)^{\alpha p-p+2}}{(\alpha p-p+1)(\alpha p-p+2)}\Big]^{1/p}\|\varphi\|_{\mathsf{L}^p} \qquad (1.18)$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}|B\varphi(x)| &\le \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^x \Big|\frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} - \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\beta}}\Big|\,dt\\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{x-a} |t^{\alpha-1}-t^{\beta-1}|\,|\varphi(x-t)|\,dt\\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{b-a} \frac{|1-t^{\alpha-\beta}|}{t^{1-\beta}}|\varphi(x-t)|\,dt.\end{aligned}$$

y así, teniendo en cuenta la desigualdad de Minkowski generalizada,

$$
\begin{aligned}
\|B\varphi\|_{L^p} &= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big[\int_a^b \Big|\int_0^{b-a} \frac{|1-t^{\alpha-\beta}|}{t^{1-\beta}}\,|\varphi(x-t)|\,dt\Big|^p dx\Big]^{1/p} \\
&\le \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{b-a} \frac{|1-t^{\alpha-\beta}|}{t^{1-\beta}}\Big[\int_a^b |\varphi(x-t)|^p\,dx\Big]^{1/p} dt \\
&\le \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{b-a} \frac{|1-t^{\alpha-\beta}|}{t^{1-\beta}}\,dt\,\|\varphi\|_{L^p} \qquad (1.19)
\end{aligned}
$$

Finalmente, teniendo en cuenta las acotaciones (1.18) y (1.19), llegamos a que

$$
\begin{aligned}
\frac{\|I_a^\alpha\varphi - I_a^\beta\varphi\|_{L^p}}{\|\varphi\|_{L^p}} \le& \Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}-\frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)\Big[\frac{(b-a)^{\alpha p-p+2}}{(\alpha p-p+1)(\alpha p-p+2)}\Big]^{1/p} \\
&+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{b-a}\frac{|1-t^{\alpha-\beta}|}{t^{1-\beta}}\,dt,
\end{aligned}
$$

donde tomando límite cuando $\alpha\to\beta$, concluimos que $\|I_a^\alpha f - I_a^\beta f\|\to 0$ cuando $\alpha\to\beta$. Falta por considerar el caso $\alpha = 0$.

Tenemos que

$$
\begin{aligned}
I_a^\alpha\varphi(x)-\varphi(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x-a} t^{\alpha-1}\varphi(x-t)\,dt - \varphi(x) \\
&= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{x-a}\frac{\varphi(x-t)-\varphi(x)}{t^{1-\alpha}}\,dt + \varphi(x)\Big[\frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}-1\Big] \\
&= F\varphi + G\varphi.
\end{aligned}
$$

La siguiente estimación es clara

$$
\|G\varphi\|_{L^p}^p \le \int_a^b |\varphi(x)|^p\Big|\frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}-1\Big|^p dx
$$

y además, en virtud del Teorema de la convergencia dominada, concluimos que $\|G\varphi\|_{L^p}\to 0$ cuando $\alpha\to 0$. Para acotar la cantidad $\|F\varphi\|_{L^p}$, escogemos primero un polinomio P tal que, dado $\varepsilon>0$, $\|\varphi-P\|_{L^p}<\varepsilon$. Tenemos así que, aplicando nuevamente la desigualdad generalizada de Minkowski,

$$
\begin{aligned}
\|F\varphi\|_{L^p} &\le \|F(\varphi-P)\|_{L^p} + \|FP\|_{L^p} \\
&\le \frac{2(b-a)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\|\varphi-P\|_{L^p} + \frac{\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^{b-a} t^\alpha \max_{t\in[0,b-a]}|P'(t)|\,dt \to 0,
\end{aligned}
$$

cuando $\alpha\to 0$.

Luego ahora es claro que $\|I_a^\alpha\varphi-\varphi\|\to 0$ cuando $\alpha\to 0$. □

Como ya indicamos en el Teorema 1.15 anterior, el operador integral fraccionaria de Riemann-Liouville deja invariante el espacio de Lebesgue $\mathsf{L}^p(a,b)$. No obstante, la integral fraccionaria (en el sentido de Riemann-Liouville) de una función dada tiene ciertas propiedades de regularidad extra de las que puede carecer la función original.

Teorema 1.16. *Sean $0<\alpha<1$ y $1\le p<1/\alpha$. En tal caso, el operador I_a^α es un operador lineal y acotado de L^p en L^r, con $1\le r<q=p/(1-\alpha p)$.*

Demostración. Sea $\varepsilon=(1/r-1/q)/2$; tenemos entonces que

$$I_a^\alpha\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{\varphi(t)^{p/r}\varphi(t)^{1-p/r}}{(x-t)^{1/r-\varepsilon}(x-t)^{1/p'-\varepsilon}}\,dt$$

y así, empleando ahora la desigualdad de Hölder para el caso de tres factores con $p_1=r$, $p_2=rp/(r-p)$ y $p_3=p'$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
|I_a^\alpha\varphi(x)|\le&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left[|\varphi(t)|^{p/r}(x-t)^{\varepsilon-1/r}\right]|\varphi(t)|^{1-p/r}(x-t)^{\varepsilon-1/p'}\,dt\\
\le&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_a^x|\varphi(t)|^p(x-t)^{r\varepsilon-1}\,dt\right]^{1/r}\left[\int_a^x|\varphi(t)|^p\,dt\right]^{1/p-1/r}\\
&\times\left[\int_a^x|\varphi(t)|^p(x-t)^{\varepsilon p'-1}\,dt\right]^{1/p'}\\
\le&c_1\|\varphi\|_{\mathsf{L}^p}^{1-p/r}\left[\int_a^x|\varphi(t)|^p(x-t)^{r\varepsilon-1}\,dt\right]^{1/r},
\end{aligned}$$

siendo c_1 una constante real. Por tanto, concluimos finalmente que

$$\begin{aligned}
\|I_a^\alpha\varphi\|_{\mathsf{L}^r}&\le c_1\|\varphi\|_{\mathsf{L}^p}^{1-p/r}\left[\int_a^b\int_a^x|\varphi(t)|^p(x-t)^{r\varepsilon-1}\,dt\,dx\right]^{1/r}\\
&\le c_1\|\varphi\|_{\mathsf{L}^p}^{1-p/r}\left[\int_a^b|\varphi(t)|^p\int_t^b(x-t)^{r\varepsilon-1}\,dx\,dt\right]^{1/r}\\
&=c_2\|\varphi\|_{\mathsf{L}^p}^{1-p/r}\|\varphi\|_{\mathsf{L}^p}^{p/r}=c_2\|\varphi\|_{\mathsf{L}^p}.
\end{aligned}$$

□

Definición 1.17. *Sea $\lambda>0$. Diremos que una función real f definida en el intervalo $[a,b]\subset\mathbb{R}$ pertenece al espacio de Hölder $H^\lambda([a,b])$ si*

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le A|x_1-x_2|^\lambda\quad\textit{para todo } x_1,\,x_2\in[a,b].$$

El exponente λ recibe habitualmente el nombre de exponente de Hölder.

Los espacios de Hölder H^λ de interés se reducen al caso $0 < \lambda \leq 1$. En efecto, pues para $\lambda > 1$, el espacio $H^\lambda([a,b])$ contiene únicamente funciones constantes en el intervalo $[a,b]$.

Definición 1.18. *Diremos que una función real f definida en el intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ pertenece al espacio de Hölder $h^\lambda([a,b])$ si*

$$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{|x_2 - x_1|^\lambda} = 0 \quad \text{para todo } x_1,\, x_2 \in [a,b].$$

Claramente, para $0 < \lambda \leq 1$, se tiene que $h^\lambda \subset H^\lambda$. Por otra parte, considerando para $f \in H^\lambda([a,b])$,

$$\|f\|_{H^\lambda} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)| + \sup_{\substack{x_1,\, x_2 \in [a,b] \\ x_1 \neq x_2}} \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\lambda},$$

se obtiene una norma y $H^\lambda([a,b])$ es entonces un espacio de Banach.

Como veremos a continuación, los espacios de Hölder juegan un importante papel a la hora de estudiar propiedades elementales de la integral fraccionaria de orden α. Sin embargo, es conveniente tener en cuenta que se trata de espacios de Banach no separables [65]. Luego no es posible aproximar una función arbitraria de H^λ empleando funciones de un subconjunto denso en H^λ y con buenas propiedades, ya que la clausura de tal subconjunto sería h^λ, y no H^λ.

Para el caso $\lambda > 1$, conviene tener presente que existen dos posibles generalizaciones de los espacios de Hölder.

Definición 1.19. *Sea $\lambda = [\lambda] + \{\lambda\} > 1$, con $0 < \{\lambda\} \leq 1$. Diremos que una función real f definida en el intervalo $[a,b]$ pertenece al espacio de Hölder $H^\lambda([a,b])$ si $f \in \mathcal{C}^{[\lambda]}([a,b])$ y $f^{(m)} \in H^{\{\lambda\}}([a,b])$.*

Definición 1.20. *Sea $\lambda = [\lambda] + \{\lambda\} > 1$, con $0 < \{\lambda\} \leq 1$, y $k > 0$. Diremos que una función real f definida en el intervalo $[a,b]$ pertenece al espacio de Hölder $H^{\lambda,k}([a,b])$ si $f \in \mathcal{C}^{[\lambda]}([a,b])$ y existe $A > 0$ tal que*

$$|f^{([\lambda])}(x+h) - f^{([\lambda])}(x)| \leq A\,|h|^{\{\lambda\}} \Big(\ln \frac{1}{|h|}\Big)^k \quad \text{para todo } |h| < \frac{1}{2}.$$

Considerando las normas dadas por

$$\begin{aligned} \|f\|_{H^\lambda} &= \|f\|_{\mathcal{C}^{[\lambda]}} + \|f^{([\lambda])}\|_{H^{\{\lambda\}}} \\ &= \sum_{k=0}^{[\lambda]} \max_{x \in [a,b]} |f^{(k)}(x)| + \|f^{([\lambda])}\|, \end{aligned}$$

$$\|f\|_{H^{\lambda,\,k}} = \|f\|_{\mathcal{C}^{[\lambda]}} + \sup_{\substack{x,\,x+h\in[a,b]\\ |h|<1/2}} \frac{|f^{[\lambda]}(x+h) - f^{[\lambda]}(x)|}{|h|^{\{\lambda\}}\Big(\ln\frac{1}{|h|}\Big)^k};$$

obtenemos nuevamente una estructura de espacio de Banach para los espacios H^λ y $H^{\lambda,\,k}$ respectivamente.

Teorema 1.21. *Sean $\alpha > 0$ y $p > 1/\alpha$. En tal caso, el operador I_a^α es un operador lineal y acotado del espacio $\mathsf{L}^p(a,b)$ en el espacio de Hölder $H^{\alpha-1/p}(a,b)$ si $\alpha - 1/p \notin \mathbb{N}$ y de $\mathsf{L}^p(a,b)$ en $H^{\alpha-1/p,\,1/p'}$ si $\alpha - 1/p \in \mathbb{N}$, siendo p y p' exponentes conjugados.*

Demostración. Consideremos inicialmente el caso $\alpha - 1/p \le 1$. Bajo tal condición, dados x, $x+h \in [a,b]$, tenemos que

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha\varphi(x+h) - I_a^\alpha\varphi(x) =& \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{x+h} \frac{\varphi(t)}{(x+h-t)^{1-\alpha}}\,dt \\
&- \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{x} \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt \\
=& \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^{x+h} \frac{\varphi(t)}{(x+h-t)^{1-\alpha}}\,dt \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{x} [(x+h-t)^{\alpha-1} - (x-t)^{\alpha-1}]\varphi(t)\,dt \\
=& I_1(x) + I_2(x).
\end{aligned}$$

Empleando ahora la desigualdad de Hölder, obtenemos las siguientes estimaciones

$$\begin{aligned}
|I_1(x)| &\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Big[\int_x^{x+h}|\varphi(t)|^p\,dt\Big]^{1/p}\Big[\int_x^{x+h}(x+h-t)^{\alpha p'-p'}\Big]^{1/p'} \\
&\le c\,\|\varphi\|_{\mathsf{L}^p}\,h^{\alpha-1/p}; \qquad c\in\mathbb{R} \qquad (1.20)\\
|I_2(x)| &\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Big[\int_a^{x}|\varphi(t)^p|\,dt\Big]^{1/p}\Big[\int_a^{x}[(x+h-t)^{\alpha-1} - (x-t)^{\alpha-1}]^{p'}\Big]^{1/p'} \\
&= \frac{\|\varphi\|_{\mathsf{L}^p}}{\Gamma(\alpha)}\Big[\int_1^{1+\frac{x-a}{h}}|s^{\alpha-1} - (s-1)^{\alpha-1}|^{p'}\,ds\Big]^{1/p'}h^{\alpha-1/p} \\
&= \frac{\|\varphi\|_{\mathsf{L}^p}}{\Gamma(\alpha)}\Big[\int_0^{\frac{x-a}{h}}|(s+1)^{\alpha-1} - s^{\alpha-1}|^{p'}\,ds\Big]^{1/p'}h^{\alpha-1/p}.
\end{aligned}$$

Si $(x-a)/h \leq 1$, entonces la acotación $|I_2(x)| \leq c_2 \|\varphi\|_{\mathsf{L}^p} h^{\alpha-1/p}$ es obvia. En otro caso, es decir, si $(x-a)/h > 1$, entonces tenemos que

$$
\begin{aligned}
|I_2(x)| &\leq \frac{\|\varphi\|_{\mathsf{L}^p}}{\Gamma(\alpha)} \Big[|\alpha-1|^{p'} \int_0^{\frac{x-a}{h}} s^{(\alpha-2)p'}\, ds\Big]^{1/p'} h^{\alpha-1/p} \\
&\leq \|\varphi\|_{\mathsf{L}^p} \Big[c_1 + c_2 \int_1^{\frac{x-a}{h}} s^{\alpha p'-2p'}\, ds\Big]^{1/p'} h^{\alpha-1/p} \\
&\leq \begin{cases} \|\varphi\|_{\mathsf{L}^p} \Big[c_3 + c_4 \Big(\dfrac{h}{x-a}\Big)^{1-\alpha+1/p}\Big] h^{\alpha-1/p}, & \text{se } \alpha - 1/p < 1, \\ \|\varphi\|_{\mathsf{L}^p} \Big[c_3 + c_4 \Big(\ln \dfrac{x-a}{h}\Big)^{1/p'}\Big] h^{\alpha-1/p}, & \text{se } \alpha - 1/p = 1. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{1.21}
$$

Teniendo en cuenta ahora las acotaciones (1.20) y (1.21), el resultado enunciado es claro bajo la condición inicial $\alpha - 1/p \leq 1$.

Si $\alpha - 1/p > 1$, sea entonces $k \in \mathbb{N}$ tal que $k < \alpha - 1/p \leq k+1$. Teniendo en cuenta lo dicho anteriormente y que

$$\frac{d^k}{dx^k} I_a^\alpha \varphi = I_a^{\alpha-k}\varphi, \quad \text{con } 0 < \alpha - k \leq 1,$$

el resultado enunciado queda probado. □

En realidad, todavía tenemos un resultado bastante más fuerte.

Corolario 3. *Sean $\alpha > 0$ y $p > 1/\alpha$. En tal caso, el operador I_a^α es un operador lineal y acotado del espacio $\mathsf{L}^p(a,b)$ en el espacio de Hölder $h^{\alpha-1/p}(a,b)$ si $0 < 1/p < \alpha < 1 + 1/p$.*

Demostración. Dados $\varepsilon > 0$ y $\varphi \in \mathsf{L}^p$, sea P_ε un polinomio tal que $\|\varphi - P_\varepsilon\| < \varepsilon$. Así, en virtud del Teorema 1.21 anterior tenemos que

$$
\begin{aligned}
|I_a^\alpha \varphi(x+t) - I_a^\alpha \varphi(x)| \leq &|I_a^\alpha P_\varepsilon(x+t) - I_a^\alpha P_\varepsilon(x)| \\
&+ |I_a^\alpha(\varphi - P_\varepsilon)(x+t) - I_a^\alpha(\varphi - P_\varepsilon)(x)| \\
\leq &c_1|t|^\alpha + c_2|t|^{\alpha-1/p}\|\varphi - P_\varepsilon\|_{\mathsf{L}^p} \\
= &o(|t|^{\alpha-1/p}).
\end{aligned}
$$
□

1.6. Operadores fraccionarios de Liouville

Las integrales fraccionarias de Riemann-Liouville consideradas anteriormente para funciones definidas en un intervalo compacto $[a,b] \subset \mathbb{R}$ pueden ser extendidas o generalizadas para el caso de funciones definidas en toda la recta real. Así, para $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, podemos hablar del operador conocido habitualmente con el nombre de *integral fraccionaria de orden α de Liouville*, que vendría dado para $\alpha > 0$, por

$$I_+^\alpha \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\, dt, \quad -\infty < x < \infty.$$

Conviene tener en cuenta, que podemos escribir tal operador como una convolución del modo que se indica a continuación

$$\begin{aligned} I_+^\alpha \varphi(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} t_+^{\alpha-1} \varphi(x-t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{\infty} t^{\alpha-1} \varphi(x-t)\, dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Big[\int_0^1 t^{\alpha-1} \varphi(x-t)\, dt + \int_1^\infty t^{\alpha-1} \varphi(x-t)\, dt \Big], \end{aligned}$$

siendo

$$t_+^{\alpha-1} = \begin{cases} t^{\alpha-1}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Así, dado que

$$\begin{aligned} \Big[\int_{-\infty}^{\infty} \Big| \int_0^1 t^{\alpha-1} \varphi(x-t)\, dt \Big|^p dx \Big]^{1/p} &\leq \\ &\leq \int_0^1 \Big[\int_{-\infty}^{\infty} t^{(\alpha-1)p} |\varphi(x-t)|^p\, dx \Big]^{1/p} dt < \infty \end{aligned}$$

$$\int_a^\infty t^{\alpha-1} \varphi(x-t)\, dt \leq \Big(\int_1^\infty t^{(\alpha-1)q}\, dt \Big)^{1/q} \Big(\int_1^\infty |\varphi(x-t)|^p\, dt \Big)^{1/p} < \infty,$$

concluimos luego que para $0 < \alpha < 1$, el operador de integración fraccionaria de Liouville I_+^α está bien definido para funciones $\varphi \in \mathsf{L}^p(\mathbb{R})$ con $1 \leq p < 1/\alpha$.

Una vez introducidas las integrales de orden fraccionario, resulta natural considerar las correspondientes derivadas fraccionarias. Así pues, procediendo de forma análoga a lo indicado anteriormente para la integral de Riemann-Liouville, obtenemos ahora, para $0 < \alpha < 1$, la derivada fraccionaria de orden α de Liouville, que vendría dada por

$$D_+^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{x} \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}\, dt, \quad -\infty < x < \infty.$$

Para órdenes de derivación $\alpha > 0$ arbitrarios, consideramos naturalmente

$$D_+^\alpha \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_{-\infty}^{x} \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\, dt, \quad -\infty < x < \infty, \tag{1.22}$$

con $n = [\alpha] + 1$.

Es ahora especialmente interesante considerar algunos ejemplos es elementales de integrales fraccionarias de Liouville de ciertas funciones. Por ejemplo, para $\mu > 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}
I_+^\alpha \exp(\mu x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} \exp(\mu t)(x-t)^{\alpha-1}\, dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \exp(\mu(x-t))\, dt \\
&= \frac{\exp(\mu x)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \exp(-\mu t)\, dt = \mu^\alpha \frac{\exp(\mu x)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \exp(-t)\, dt \\
&= \mu^\alpha \exp(\mu x).
\end{aligned}$$

Observemos que si consideramos la integral fraccionaria en el sentido de Riemann-Liouville de la misma función $\exp(\mu x)$, obtenemos un resultado diferente y quizás menos intuitivo.

Para una función del tipo $\varphi(x) = (x-a)^\beta$ si $x > a$ y $\varphi(x) = 0$ en otro caso, con $\beta > 1$, en virtud de (1.12), tenemos que

$$I_+^\alpha \varphi(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (x-a)^{\alpha+\beta}, \quad \text{para } x > a \quad \text{e} \quad I_+^\alpha \varphi(x) = 0 \quad \text{para } x \leq a,$$

coincidiendo ahora sí con el caso del operador de Riemann-Liouville.

El operador integral fraccionaria de Liouville no deja invariante el espacio de Lebesgue $\mathsf{L}^p(\mathbb{R})$. Si queremos considerar un espacio de Banach que quede invariante por el operador I_+^α, debemos considerar espacios de Lebesgue con pesos de tipo exponencial. Así, para $1 \leq p < \infty$ y $w \in \mathbb{R}$, el espacio L_w^p será el conjunto formado por las funciones medibles en $\mathbb{R}$ tales que su norma

$$\|\varphi\|_{\mathsf{L}_w^p} = \Big[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-wt} |\varphi(t)|^p\, dt \Big]^{1/p},$$

es finita. Para el caso $p = \infty$, consideraremos el espacio $\mathcal{C}_w$, formado por aquellas funciones φ tales que la función $t \in \mathbb{R} \longmapsto \exp(-wt)$ es continua y acotada. Así, se tiene que

$$\|\varphi\|_{\mathcal{C}_w} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \exp(-wt) |\varphi(t)| < \infty.$$

Teorema 1.22. *Para $1 \leq p \leq \infty$ y $w \in \mathbb{R}$, el operador I_+^α es lineal y acotado en el espacio $\mathsf{L}_w^p(\mathbb{R})$.*

Demostración. En efecto, pues en virtud de la desigualdad de Minkowski generalizada, para $1 \leq p < \infty$ y $w > 0$, tenemos que

$$\|I_+^\alpha \varphi\|_{\mathsf{L}_w^p} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Big[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-wx} \Big| \int_0^\infty t^{\alpha-1} \varphi(x-t)\, dt \Big|^p dx \Big]^{1/p}$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \Big[\int_{-\infty}^\infty e^{-wx} |\varphi(x-t)|^p \, dx \Big]^{1/p} dt$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-\frac{tw}{p}} \, dt \, \|\varphi\|_{\mathsf{L}^p_w} = \Big(\frac{p}{|w|}\Big)^\alpha \|\varphi\|_{\mathsf{L}^p_w}.$$

Para $p = \infty$, es claro que

$$\begin{aligned} \|I_+^\alpha \varphi\|_{\mathcal{C}_w} &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \exp(-wx) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} |\varphi(x-t)| \, dt \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \exp(-w(x-t))|\varphi(x-t)| \exp(-wt) t^{\alpha-1} \, dt \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \exp(-wx)|\varphi(x)| \frac{1}{|w|\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \Big(\frac{t}{|w|}\Big)^{\alpha-1} \exp(-t) \, dt \qquad (1.23) \\ &= |w|^{-\alpha} \sup_{x\in\mathbb{R}} \exp(-wx)|\varphi(x)|. \end{aligned}$$

Conviene observar además que para el caso $p = 1$, si φ es una función no negativa entonces

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-wx} \Big| \int_0^\infty t^{\alpha-1} \varphi(x-t) \, dt \Big| \, dx = \int_0^\infty t^{\alpha-1} \int_{-\infty}^\infty e^{-wx} \varphi(x-t) \, dx \, dt,$$

luego $\|I_+^\alpha\|_{\mathsf{L}^1_w \to \mathsf{L}^1_w} = |w|^{-\alpha}$. Considerando la función $\exp(wt)$ en (1.23), también se concluye que $\|I_+^\alpha\|_{\mathcal{C}_w \to \mathcal{C}_w} = |w|^{-\alpha}$. □

Teorema 1.23. *Sean $0 < \alpha < 1$ y $0 \leq \lambda \leq 1$. El operador I_+^α es lineal y acotado de H^λ en $H^{\lambda+\alpha}$ si $\lambda + \alpha < 1$; si $\lambda + \alpha = 1$, entonces I_+^α es lineal y continuo de H^λ en $H^{\lambda+\alpha,1}$.*

Demostración. Sea $\varphi \in H^\lambda(a,b)$ arbitraria. Tenemos entonces que

$$I_a^\alpha \varphi(x) = \frac{\varphi(a)}{\Gamma(1+\alpha)}(x-a)^\alpha + \int_a^x \frac{\varphi(t)-\varphi(a)}{(x-t)^{1-\alpha}} \, dt.$$

Sea $\psi(x)$ la función dada por el segundo sumando del segundo miembro de la igualdad anterior. Veremos que $\psi \in H^{\lambda+\alpha}$ si $\lambda + \alpha < 1$ y que si $\lambda + \alpha = 1$, entonces $\psi \in H^{1,1}$

$$\begin{aligned} \psi(x+h) - \psi(x) &= \int_a^{x+h} \frac{\varphi(t)-\varphi(x)}{(x+h-t)^{1-\alpha}} \, dt - \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} \, dt \\ &= -\int_{x-a}^{-h} \frac{\varphi(x-s)-\varphi(a)}{(s+h)^{1-\alpha}} \, ds + \int_{x-a}^0 \frac{\varphi(x-s)-\varphi(a)}{s^{1-\alpha}} \, ds \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-h}^{x-a} \frac{\varphi(x-s)-\varphi(a)}{(s+h)^{1-\alpha}}\, ds + \int_{0}^{x-a} \frac{\varphi(x-s)-\varphi(a)}{s^{1-\alpha}}\, ds\\
&= \int_{-h}^{0} \frac{\varphi(x-s)-\varphi(a)}{(s+h)^{1-\alpha}}\, ds\\
&\quad + \int_0^{x-a} (\varphi(x-s)-\varphi(x)+\varphi(x)-\varphi(a))((s+h)^{1-\alpha}-s^{\alpha-1})\, ds\\
&= \int_{-h}^{0} \frac{\varphi(x-s)-\varphi(a)}{(s+h)^{1-\alpha}}\, ds\\
&\quad + \int_0^{x-a} (\varphi(x-s)-\varphi(x))((s+h)^{1-\alpha}-s^{\alpha-1})\, ds\\
&\quad + (\varphi(x)-\varphi(a)) \int_0^{x-a} (s+h)^{\alpha-1}-s^{\alpha-1}\, ds\\
&= \int_{-h}^{0} \frac{\varphi(x-s)-\varphi(a)}{(s+h)^{1-\alpha}}\, ds\\
&\quad + \int_0^{x-a} (\varphi(x-s)-\varphi(x))((s+h)^{1-\alpha}-s^{\alpha-1})\, ds\\
&\quad + (\varphi(x)-\varphi(a)) \Big[\int_{x-a}^{x-a+h} s^{\alpha-1}\, ds - \int_{-h}^{0} (s+h)^{\alpha-1}\, ds \Big]\\
&= \int_{-h}^{0} \frac{(\varphi(x-s)-\varphi(a))-(\varphi(x)-\varphi(a))}{(s+h)^{1-\alpha}}\, ds\\
&\quad + \int_0^{x-a} (\varphi(x-s)-\varphi(x))((s+h)^{\alpha-1}-s^{\alpha-1})\, ds\\
&\quad + \frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\alpha}((x-a+h)^{\alpha}-(x-a)^{\alpha}) = J_1+J_2+J_3.
\end{aligned}
$$

A continuación, acotaremos cada uno de los sumandos anteriores. Así, para el primero de ellos tenemos que

$$
\begin{aligned}
|J_1| &\leq \int_{-h}^{0} \frac{|(\varphi(x-s)-\varphi(a))-(\varphi(x)-\varphi(a))|}{(s+h)^{1-\alpha}}\, ds\\
&\leq \int_{-h}^{0} \frac{A|x-s-x|^{\lambda}}{(s+h)^{1-\alpha}}\, ds = A\int_{-h}^{0} \frac{|s|^{\lambda}}{(s+h)^{1-\alpha}}\, ds\\
&\leq \frac{Ah^{\lambda}}{\alpha} h^{\alpha} = c_1 h^{\alpha+\lambda}, \quad \text{con } c_1 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Para el caso del segundo sumando, tenemos que

$$
|J_2| \leq \int_0^{x-a} |\varphi(x-s)-\varphi(x)||(s+h)^{\alpha-1}-s^{\alpha-1}|\, ds
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq A \int_0^{x-a} s^\lambda |(s+h)^{\alpha-1} - s^{\alpha-1}|\, ds \\
&= A h^{\lambda+\alpha} \int_0^{\frac{x-a}{h}} s^\lambda |s^{\alpha-1} - (1+s)^{\alpha-1}|\, ds \\
&\leq \begin{cases} A h^{\lambda+\alpha} \displaystyle\int_0^1 s^\lambda |(1+s)^{\alpha-1} - s^{\alpha-1}|\, ds, & \text{si } x-a \leq h; \\ A h^{\lambda+\alpha} \displaystyle\int_0^\infty s^\lambda s^{\alpha-1} \Big|1 - \Big(1+\frac{1}{s}\Big)^{\alpha-1}\Big|\, ds, & \text{si } x-a > h. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Finalmente, para el tercer sumando, también debemos distinguir entre el caso $x-a \leq h$ y $x-a > h$. Así, en el primer caso, se tiene que

$$
\begin{aligned}
|J_3| =& \frac{|\varphi(x) - \varphi(a)|}{\alpha} |(x+h-a)^\alpha - (x-a)^\alpha| \leq 2\frac{A}{\alpha}(x-a)^\lambda (x-a)^\alpha \\
\leq& c h^{\lambda+\alpha}, \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Para el caso $x-a > h$, empleando la desigualdad $(1+t)^\alpha - 1 \leq \alpha t$, concluimos que

$$
\begin{aligned}
|J_3| =& \frac{|\varphi(x) - \varphi(a)|}{\alpha} |(x+h-a)^\alpha - (x-a)^\alpha| \\
&\leq \frac{A(x-a)^{\lambda+\alpha}}{\alpha} \Big| \Big(1 + \frac{h}{x-a}\Big)^\alpha - 1 \Big| \\
&\leq A(x-a)^{\lambda+\alpha} \frac{h}{x-a} \\
&= c h^{\lambda+\alpha}.
\end{aligned}
$$

□

1.7. La derivada fraccionaria de Marchaud

La derivada fraccionaria de Liouville introducida en (1.22) para una función definida en la recta real puede ser expresada de forma más conveniente. Asumamos para ello que f es una función continuamente derivable en $\mathbb{R}$ y tal que $f'(x)$ decrece suficientemente rápido cuando $|x|$ tiende a infinito. En tal caso, para $0 < \alpha < 1$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
D_+^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^\infty t^{-\alpha} f(x-t)\, dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{-\alpha} f'(x-t)\, dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty f'(x-t) \int_t^\infty s^{-\alpha-1}\, ds\, dt \\
&= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty s^{-\alpha-1} \int_0^s f'(x-t)\, dt\, ds \\
&= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{f(x)-f(x-s)}{s^{\alpha+1}}\, ds
\end{aligned}
$$

Empleando entonces la notación

$$
\begin{aligned}
\mathbf{D}_+^\alpha f(x) &= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{f(x)-f(x-t)}{t^{\alpha+1}}\, dt \\
&= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\, dt, \qquad (1.24)
\end{aligned}
$$

concluimos que $D_+^\alpha f = \mathbf{D}_+^\alpha f$ para funciones f suficientemente regulares. Nos referiremos a (1.24) como derivada fraccionaria de Marchaud de orden α de la función f.

Conviene notar que, por ejemplo, si $f \in H^\lambda$, con $\lambda > \alpha$, entonces la funciones construida en (1.24) está bien definida. Así pues, resulta natural preguntarse bajo qué condiciones sobre f se dará la igualdad $D_+^\alpha f = \mathbf{D}_+^\alpha f$. En primer lugar, debemos mencionar que la existencia de $\mathbf{D}_+^\alpha f$ no implica la existencia de $D_+^\alpha f$; en efecto, basta considerar como f una función constante. La cuestión recíproca, esto es, la existencia de $D_+^\alpha f$ partiendo de la existencia de $\mathbf{D}_+^\alpha f$, está relacionada con la inversión de las integrales fraccionarias.

Como veremos a continuación, la igualdad $D_+^\alpha I_+^\alpha \varphi = \varphi$ tan solo será válida para funciones $\varphi \in \mathsf{L}^1(\mathbb{R})$, mientras que la identidad $\mathbf{D}_+^\alpha I_+^\alpha \varphi = \varphi$ es cierta para funciones $\varphi \in \mathsf{L}^p(\mathbb{R})$ con $1 \leq p < 1/\alpha$. Concluimos luego que la derivada fraccionaria de Marchaud es más adecuada que la derivada fraccionaria de Liouville para funciones definidas en $\mathbb{R}$, ya que permite un mayor grado de libertad para el comportamiento de la función en el infinito.

En lo que sigue, la derivada fraccionaria de Marchaud de una función f dada será entendida del siguiente modo. Dado $\varepsilon > 0$, consideramos

$$
\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^\alpha f(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_\varepsilon^\infty \frac{f(x)-f(x-t)}{t^{\alpha+1}}\, dt \qquad (1.25)
$$

y definimos $\mathbf{D}_+^\alpha f$ como

$$
\mathbf{D}_+^\alpha f = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{D}_{+,\varepsilon}^\alpha f,
$$

donde el límite anterior es considerado en el marco de los espacios $\mathsf{L}^p(\mathbb{R})$.

Para probar la fórmula de inversión asociada a la derivada fraccionaria de Marchaud (Teorema 1.25 siguiente), necesitamos inicialmente el siguiente resultado.

Lema 1.24. *Sea $f = I_+^\alpha \varphi$, donde $\varphi \in \mathsf{L}^p(\mathbb{R})$ con $1 \le p < 1/\alpha$. Entonces*

$$\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^\alpha(x) = \int_0^\infty \mathcal{K}(t)\varphi(x-\varepsilon t)\,dt,$$

siendo

$$\mathcal{K}(t) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha t)}{\alpha}\frac{t_+^\alpha - (t-1)_+^\alpha}{t} \in \mathsf{L}^1(\mathbb{R}) \tag{1.26}$$

tal que

$$\mathcal{K}(t) \ge 0, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R} \qquad y \qquad \int_{-\infty}^\infty \mathcal{K}(t)\,dt = 1. \tag{1.27}$$

Demostración. Para $t > 0$ abitrario, tenemos que

$$\begin{aligned} f(x) - f(x-t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Big[\int_0^\infty s^{\alpha-1}\varphi(x-s)\,ds - \int_0^\infty s^{\alpha-1}\varphi(x-t-s)\,ds\Big] \\ &= \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\Big[\int_0^\infty s^{\alpha-1}\varphi(x-ts)\,ds - \int_1^\infty (s-1)^{\alpha-1}\varphi(x-ts)\,ds\Big] \\ &= t^\alpha \int_0^\infty k(s)\varphi(x-ts)\,ds, \end{aligned}$$

siendo

$$k(s) = \begin{cases} s^{\alpha-1}, & 0 < s < 1; \\ s^{\alpha-1} - (s-1)^{\alpha-1}, & s > 1. \end{cases}$$

Así pues, en virtud de (1.25), tenemos ahora que

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{+,\varepsilon}^\alpha f(x) &= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_\varepsilon^\infty \frac{1}{t}\int_0^\infty k(s)\varphi(x-ts)\,ds\,dt \\ &= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_\varepsilon^\infty \frac{1}{t^2}\int_0^\infty k(s/t)\varphi(x-s)\,ds\,dt \\ &= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty \varphi(x-s)\int_\varepsilon^\infty \frac{k(s/t)}{t^2}\,dt\,ds \\ &= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty \frac{\varphi(x-s)}{s}\int_0^{s/\varepsilon} k(r)\,dr\,ds \\ &= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty \frac{\varphi(x-\varepsilon s)}{s}\int_0^s k(r)\,dr\,ds, \end{aligned}$$

cumpliéndose además que

$$\int_0^s k(r)\,dr = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha}s\mathcal{K}(s) \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{1}{s}\int_0^s k(r)\,dr = \mathcal{K}(t). \qquad \square$$

En virtud ahora de las condiciones (1.26) y (1.27), y de un teorema de aproximación de la identidad [75, p. 62-65], podemos afirmar que $\mathbf{D}^{\alpha}_{+,\varepsilon}f$ converge en $\mathsf{L}^p(\mathbb{R})$ cuando $\varepsilon \to 0^+$.

Teorema 1.25. *Sea* $f = I^{\alpha}_{+}\varphi$*, donde* $\varphi \in \mathsf{L}^p(\mathbb{R})$ *con* $1 \leq p < 1/\alpha$*. Entonces* $\varphi = \mathbf{D}^{\alpha}_{+}f$*, siendo*

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{+}f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{D}^{\alpha}_{+,\varepsilon}f(x) \quad \text{en } \mathsf{L}^p(\mathbb{R}).$$

Demostración. En virtud del Lema 1.24 anterior, tenemos que

$$\mathbf{D}_{+,\varepsilon}f(x) - \varphi(x) = \int_0^{\infty} \mathcal{K}(t)(\varphi(x-\varepsilon t) - \varphi(x))\, dt$$

y así, aplicando la desigualdad de Minkowski generalizada y el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue concluimos finalmente que

$$\begin{aligned}\|\mathbf{D}_{+,\varepsilon}f - \varphi\|_p &= \Big[\int_{-\infty}^{\infty}\Big|\int_0^{\infty}\mathcal{K}(t)[\varphi(x-\varepsilon t)-\varphi(x)]\,dt\Big|^p dx\Big]^{1/p}\\ &\leq \int_0^{\infty}\mathcal{K}(t)\|\varphi(x-\varepsilon t)-\varphi(x)\|_p\,dt \to 0. \qquad \square\end{aligned}$$

Capítulo 2

Otros operadores diferenciales fraccionarios

En este capítulo, presentaremos otros operadores diferenciales de orden fraccionario más modernos. Así, hablaremos brevemente de la famosa derivada fraccionaria de Caputo, que será considerada más tarde en diversos problemas de los Capítulos 3 y 4.

También trabajaremos con la conocida como derivada conformable. Más concretamente, la segunda sección de este capítulo estará dedicada a tal operador; detallaremos los resultados publicados en [4, 24].

La tercera y cuarta sección tratan sobre las dificultades propias de las ecuaciones diferenciales de orden fraccionario; veremos pues la relación entre la regla de Leibniz y los operadores fraccionarios. Intentaremos aclarar también ciertos resultados sobre la ecuación logística fraccionaria; pormenorizaremos los resultados publicados en [10].

La quinta y última sección de este capítulo estará dedicada a la recientemente introducida derivada de Caputo-Fabrizio. Hablaremos, por ejemplo, del operador inverso asociado y detallaremos algunos resultados de [56].

2.1. La derivada de Caputo

Para garantizar existencia y unicidad de solución de problemas de valor inicial sencillos asociados al operador de Riemann-Liouville, es preciso indicar las condiciones iniciales de forma que, aún a día de hoy, no tiene una interpretación física o geométrica clara y plenamente aceptada por la comunidad matemática (véase [70, Capítulo 8]).

Así, a finales de los años sesenta del pasado siglo XX, el físico y matemático italiano M. Caputo, motivado por las limitaciones de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville a la hora de modelar y estudiar ciertos problemas físicos, propuso [28, 29] una definición alternativa y quizás más sencilla para la derivada fraccionaria de una función f.

En realidad, muchas de las novedosas ideas propuestas por M. Caputo ya habían sido consideradas anteriormente por en matemático de origen armenio M. M. Dzhrbashyan, quien publicó numerosos y muy interesantes trabajos, todos ellos relacionados de una u otra manera con el cálculo fraccionario, [36, 37]. Sin duda alguna, sus resultados tuvieron poca repercusión en el mundo occidental por motivos obvios.

Definición 2.1. *La* derivada fraccionaria de Caputo *de orden $\alpha > 0$ de una función f dada se define como*

$$^{\mathrm{C}}D_a^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)\, ds \quad t > a,$$

con $n = [\alpha] + 1 \in \mathbb{N}$, esto es, n es la parte entera de α más uno.

Observemos entonces que para definir la derivada fraccionaria de Caputo de orden $\alpha > 0$ de una función f, necesitamos asumir la existencia —en cierto sentido que aclararemos en breve— de la derivada usual de orden $n \geq \alpha$ de la función f.

Conviene notar también que la derivada fraccionaria de Caputo se obtiene como la integral fraccionaria de la derivada, de cierto orden entero de la función. Recordemos que en el caso de Riemann-Liouville, procedíamos en el orden inverso, esto es, la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de una función es la derivada de orden entero de una integral fraccionaria de la propia función.

Veamos, por ejemplo, como obtener la derivada fraccionaria de la función potencia $(t-a)^r$, con $r \geq 0$. En el caso $r \leq n-1$ con $r \in \mathbb{N}$ y $n = [\alpha]+1$, se tiene que la derivada de orden n de la función $(t-a)^r$ es la función constantemente nula. Por tanto, en tal caso, $^{\mathrm{C}}D_a^{\alpha}(t-a)^r = 0$.

Para $r > n-1$, tenemos que

$$\begin{aligned} ^{C}D_a^{\alpha}(t-a)^r =& \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{ds^n}(s-a)^r\, ds \\ =& \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-n+1)\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}(s-a)^{r-n}\, ds. \end{aligned}$$

Así pues, haciendo la substitución $s = a + \tau(t-a)$, concluimos que

$$\begin{aligned}
{}^{\mathrm{C}}D_a^{\alpha}(t-a)^r =& \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-n+1)\Gamma(n-\alpha)}(t-a)^{r-\alpha}\int_0^1 (1-\tau)^{n-\alpha-1}\tau^{r-n}\,d\tau \\
=& \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-n+1)\Gamma(n-\alpha)}(t-a)^{r-\alpha}B(r-n+1, n-\alpha) \\
=& \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-\alpha+1)}(t-a)^{r-\alpha}
\end{aligned}$$

Por tanto, concluimos que

$${}^{\mathrm{C}}D_a^{\alpha}(t-a)^r = 0, \quad \text{para } \ r \in \mathbb{N},\ r \le n-1.$$

y

$${}^{\mathrm{C}}D_a^{\alpha}(t-a)^r = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-\alpha+1)}(t-a)^{r-\alpha}, \quad \text{para } r > n-1, \tag{2.1}$$

que coincide con lo obtenido para la derivada de Riemann-Liouville en (1.12).

Además, ahora se tiene que ${}^{\mathrm{C}}D_a^{\alpha}c = 0$ para toda constante $c \in \mathbb{R}$.

Una consecuencia inmediata de la identidad (2.1) anterior es el siguiente resultado.

Lema 2.2. *Sea $\alpha > 0$ y $n = [\alpha] + 1 \in \mathbb{N}$. Entonces,*

$${}^{\mathrm{C}}D_a^{\alpha}f(t) = 0 \Longleftrightarrow f(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j(t-a)^{n-j},$$

donde para $0 \le j \le n$, $c_j \in \mathbb{R}$.

Nota 2.1. Conviene tener en cuenta que si $f \in AC^n([a,b])$, entonces se tiene que

$$D_a^{\alpha}f(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}f^{(k)}(a) + {}^{\mathrm{C}}D_a^{\alpha}f(t).$$

En particular, para $0 < \alpha < 1$, tenemos que

$$D_a^{\alpha}f(t) = \frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}f(a) + {}^{\mathrm{C}}D_a^{\alpha}f(t).$$

Por tanto, si $f^{(k)}(a) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$, $0 \le k \le n-1$, entonces

$${}^{\mathrm{C}}D_a^{\alpha}f = D_a^{\alpha}f.$$

A veces, cuando no sea relevante el punto base $a \in \mathbb{R}$ que escogemos para definir las integrales o derivadas fraccionarias, emplearemos la notación D^{α}, ${}^{\mathrm{C}}D^{\alpha}$ e I^{α} para referirnos a los operadores derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, derivada fraccionaria de Caputo e integral fraccionaria de Riemann-Liouville respectivamente.

2.2. La derivada conformable

Motivados por las dificultades propias de los operadores de orden fraccionario, los autores de [51], introducen la siguiente definición.

Definición 2.3. *Sean* $f\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $0 < \alpha \leq 1$. *La* derivada conformable *de orden* α *de la función* f *en un punto* $t > 0$ *viene dada, en caso de existir, por el valor del límite*

$$D_c^\alpha f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}.$$

Si el límite anterior existe, diremos entonces que f *admite derivada conformable de orden* α *en el punto* t. *Si la función* f *admite derivada conformable de orden* α *en cierto intervalo* $(0,a)$, *con* $a > 0$ *y existe* $\lim_{t\to 0^+} D_c^\alpha f(t)$, *definimos entonces*

$$D_c^\alpha f(0) = \lim_{t \to 0^+} D_c^\alpha f(t).$$

Dada una función $f\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $t > 0$, la derivada usual de f en el punto t viene dada, en caso de existir, por el valor del límite

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t+\varepsilon) - f(t)}{\varepsilon}.$$

Así, en particular, tenemos que si $f(t) = t^n$, entonces $f'(t) = nt^{n-1}$ para $n \in \mathbb{N}$. Conviene luego indicar que si, para $t > 0$, definimos $f(t) = t^p$ con $p > 0$, entonces $D_c^\alpha f(t) = pt^{p-\alpha}$ para todo $t > 0$. Por tanto, para ciertas funciones potencia, la derivada conformable y la derivada Riemann-Liouville coinciden salvo una constante multiplicativa.

Observemos además, que para el caso $\alpha = 1$, la derivada fraccionaria conformable coincide con la definición clásica de derivada.

Proposicion 2.4. *Sean* $f\colon [0,\infty)$ *y* $0 < \alpha \leq 1$. *Si* f *admite derivada conformable de orden* α *en cierto punto* $t_0 > 0$, *entonces la* f *es continua en* t_0.

Demostración. Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, tenemos que

$$f(t_0 + \varepsilon {t_0}^{1-\alpha}) - f(t_0) = \frac{f(t_0 + \varepsilon {t_0}^{1-\alpha}) - f(t_0)}{\varepsilon}\varepsilon,$$

luego haciendo $h = \varepsilon {t_0}^{1-\alpha}$ y tomando límite cuando $\varepsilon \to 0$ en ambos miembros de la igualdad anterior, concluimos que

$$\lim_{h \to 0} f(t_0 + h) - f(t_0) = D_c^\alpha f(t_0)\, 0 = 0,$$

es decir, la continuidad de f en el punto t_0. □

Recogemos en la siguiente proposición otras propiedades importantes de la derivada fraccionaria conformable.

Proposicion 2.5. *Sean f, $g\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones que admiten derivada conformable de orden $0<\alpha\leq 1$ en cierto punto $t>0$. Tenemos entonces que:*

a) $D_c^\alpha(af+bg)(t) = a\,D_c^\alpha f(t) + b\,D_c^\alpha g(t)$ *para todo* $a,b\in\mathbb{R}$*;*

b) dado $p>0$*, si* $f(s)=s^p$ *para* $s>0$*, entonces* $D_c^\alpha f(t) = pt^{p-\alpha}$*;*

c) si $f(t)=c\in\mathbb{R}$ *para todo* $t>0$*, entonces* $D_c^\alpha f = 0$*;*

d) $D_c^\alpha(fg)(t) = f(t)D_c^\alpha g(t) + g(t)D_c^\alpha f(t)$*;*

e) si $g(t)\neq 0$*, entonces* $D_c^\alpha(f/g)(t) = \dfrac{f(t)D_c^\alpha g(t)+g(t)D_c^\alpha f(t)}{g(t)^2}$*;*

f) si f *es derivable en el punto* $t>0$*, entonces* $D_c^\alpha f(t) = t^{1-\alpha}f'(t)$*.*

Demostración. Las tres primeras propiedades enunciadas son completamente triviales a partir de la Definición 2.3. Pasemos entonces a mostrar la prueba de la regla de Leibniz. Se tiene que, de modo completamente análogo al caso usual,

$$
\begin{aligned}
D_c^\alpha(fg)(t) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)g(t)}{\varepsilon}\\
&=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})+f(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)g(t)}{\varepsilon}\\
&=\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)}{\varepsilon}g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})\Big)+f(t)\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-g(t)}{\varepsilon}\\
&=g(t)D_c^\alpha f(t)+f(t)D_c^\alpha g(t).
\end{aligned}
$$

La fórmula para el cociente de dos funciones se prueba de modo similar.

Para probar lo enunciado en f), basta tener en cuenta que haciendo $h=\varepsilon t^{1-\alpha}$,

$$
\begin{aligned}
D_c^\alpha f(t) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)}{\varepsilon} = \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{ht^{1-\alpha}}\\
&= t^{1-\alpha}\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = t^{1-\alpha}f'(t). \qquad \square
\end{aligned}
$$

Por tanto, la derivada conformable de ciertas funciones elementales se puede calcular ahora fácilmente. Por ejemplo, se tiene que: $D_c^\alpha(t^\alpha/\alpha)=t$, $D_c^\alpha(\operatorname{sen} cx) = cx^{1-\alpha}\cos(cx)$ y $D_c^\alpha(\cos cx) = -cx^{1-\alpha}\operatorname{sen}(cx)$ para todo $c\in\mathbb{R}$.

Conviene también notar que, como no, una función puede admitir derivada conformable de cierto orden $0<\alpha\leq 1$ en $t=0$ y no ser derivable en el sentido usual en tal punto. Basta considerar la función $f(t) = \sqrt{t}$, para la que $D_c^{1/2} f(t) = 2$ para todo $t > 0$, siendo luego $D_c^{1/2} f(0) = 2$.

Empleando el concepto de derivada conformable, también se pueden obtener versiones ciertamente curiosas de algunos resultados clásicos del análisis matemático.

Proposicion 2.6 (Teorema de Rolle). *Sea $a > 0$ y $f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función dada tal que:*

a) f es continua en el intervalo $[a,b]$;

b) f admite derivada conformable de orden $0 < \alpha \leq 1$ en el intervalo (a,b);

c) $f(a) = f(b)$.

Luego existe $c \in (a,b)$ tal que $D_c^\alpha f(c) = 0$.

Demostración. Es una consecuencia del Teorema de Rolle clásico. □

Proposicion 2.7 (Teorema del valor medio). *Sean $a > 0$, $0 < \alpha \leq 1$ y $f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función dada tal que:*

a) f es continua en el intervalo $[a,b]$;

b) f es derivable en el intervalo (a,b).

Entonces existe $c \in (a,b)$ de modo que

$$D_c^\alpha f(c) = \frac{f(b) - f(a)}{\dfrac{b^\alpha}{\alpha} - \dfrac{a^\alpha}{\alpha}}.$$

Demostración. Basta aplicar la Proposición 2.6 anterior a la función

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\dfrac{b^\alpha}{\alpha} - \dfrac{a^\alpha}{\alpha}} \Big(\frac{x^\alpha}{\alpha} - \frac{a^\alpha}{\alpha} \Big), \quad x \in [a,b],$$

y tener en cuenta que $D_c^\alpha (x^\alpha / \alpha) = 1$. □

El operador inverso asociado a la derivada conformable se obtiene fácilmente.

Definición 2.8. *Dados $0 < \alpha < 1$, $a > 0$ y $f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definimos*

$$I_c^\alpha f(t) = I^1(t^{\alpha-1} f)(t) = \int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}}\, dx.$$

En tal caso, se tiene que $D_c^\alpha I_c^\alpha f = f$. En efecto, pues

$$\begin{aligned} D_c^\alpha I_c^\alpha f\,(t) &= t^{1-\alpha}\frac{d}{dt} I_c^\alpha f\,(t) = t^{1-\alpha}\frac{d}{dt}\int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}}\,dx \\ &= t^{1-\alpha}\frac{f(t)}{t^{1-\alpha}} = f(t), \quad t \in [a,b]. \end{aligned}$$

Observemos entonces que para $\alpha > 0$ y $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq -\alpha$, tenemos que para $f(t) = t^\beta$, $I_c^\alpha f(t) = t^{\alpha+\beta}/(\beta+\alpha)$. Luego empleando la densidad de los polinomios en el espacio de las funciones continuas definidas sobre un conjunto compacto (Teorema de Weierstrass), podemos concluir por ejemplo que la integral conformable de orden 1/2 de la función coseno viene dada por

$$I_c^\alpha \cos(t) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n t^{2n+1/2}}{(2n+1)(2n)!} = \frac{\operatorname{sen}(t)}{\sqrt{t}}.$$

Para el caso $\alpha > 1$, tenemos la siguiente definición de derivada conformable de orden α.

Definición 2.9. *Sean $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (n, n+1]$ y $f\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función n-veces derivable en cierto punto $t > 0$. Diremos que f admite derivada conformable de orden α en el punto t si existe el siguiente límite,*

$$D_c^\alpha f(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f^{(n)}(t+\varepsilon t^{n+1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}.$$

Notemos entonces que $D_c^\alpha f(t) = t^{n+1-\alpha} f^{(n)}(t)$ para $t > 0$.

2.2.1. Un problema de frontera

En esta sección presentaremos los resultados probados en [24], en donde se estudia una clase de ecuaciones diferenciales, en las que interviene la derivada conformable antes presentada, junto con ciertas condiciones de frontera. Un problema similar a este ha sido estudiado en [25].

Más exactamente, se trata de estudiar la existencia y unicidad de soluciones para el problema

$$\begin{cases} D_c^\alpha (D+\lambda)x(t) = f(t,x(t)), \quad t \in [0,1], \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad x(1) = \beta x(\eta); \end{cases} \tag{2.2}$$

donde D_c^α es la derivada conformable de orden $\alpha \in (1,2]$, D es el operador derivada usual, $f\colon [0,1]\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua conocida y $\lambda > 0$, $\eta \in (0,1)$ y β son números reales dados.

Como ya dijimos anteriormente, para $\alpha \in (0,1]$, se tiene que $D_c^\alpha I_c^\alpha x\,(t) = x(t)$; como resulta previsible, para $\alpha > 0$ arbitrario tal resultado también es válido. En esta sección nos restringiremos al caso $\alpha \in (1,2]$.

Lema 2.10. *Dados $\alpha \in (1,2]$ y una función continua $x(t)$, se tiene que $D_c^\alpha I_c^\alpha x(t) = x(t)$ para todo $t > 0$.*

Demostración. En efecto, pues dado que x es una función continua, $I_c^\alpha x$ es una función dos veces derivable y así,

$$\begin{aligned} D_c^\alpha I_c^\alpha x\,(t) &= t^{2-\alpha}\frac{d^2}{dt^2}\int_0^t\int_0^t x(s)s^{\alpha-2}\,ds\,dt \\ &= t^{2-\alpha}\frac{d}{dt}\int_0^t x(s)s^{\alpha-2}\,ds \\ &= t^{2-\alpha}x(t)t^{\alpha-2} = x(t), \quad t>0, \end{aligned}$$

quedando luego probado el resultado enunciado. □

Lema 2.11. *Dados $\alpha \in (1,2]$ y $x\colon [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable, se tiene que $D_c^\alpha x(t) = 0$ para todo $t \geq 0$ si, y solo si, $x(t) = c_1 + c_2 t$ con c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata de la Proposición 2.7. □

Empezaremos por estudiar el problema lineal correspondiente, esto es,

$$D_c^\alpha(D+\lambda)x(t) = \sigma(t), \quad t \in [0,1], \tag{2.3}$$

con $1 < \alpha \leq 2$ y $\sigma \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Obtendremos la función de Green asociada.

Proposicion 2.12. *Sea*

$$\beta \neq \frac{\lambda + \exp(-\lambda) - 1}{\lambda\eta + \exp(-\lambda\eta) - 1}.$$

En tal caso, la única solución de (2.3) sujeta a las condiciones indicadas en (2.2) viene dada por

$$\begin{aligned} x(t) = &\int_0^t \exp(-\lambda(t-s))\int_0^s \sigma(u)u^{\alpha-2}(s-u)\,du\,ds \\ &+ A(t)\Big[\beta\int_0^\eta \exp(-\lambda(\eta-s))\int_0^s \sigma(u)u^{\alpha-2}(s-u)\,du\,ds \\ &\qquad - \int_0^1 \exp(-\lambda(1-s))\int_0^s \sigma(u)u^{\alpha-2}(s-u)\,du\,ds\Big], \end{aligned} \tag{2.4}$$

siendo

$$A(t) = \frac{\lambda + \exp(-\lambda t) - 1}{\Delta} \tag{2.5}$$

y

$$\Delta = \lambda + \exp(-\lambda) - 1 - \beta(\lambda\eta + \exp(-\lambda\eta) - 1) \neq 0.$$

Demostración. Integrando la ecuación diferencial de (2.3), obtenemos que

$$(D + \lambda)x(t) = I_c^\alpha \sigma(t) + c_1 t + c_2 t. \tag{2.6}$$

Así pues, en virtud de los Lemas 2.10 y 2.11, toda solución de (2.6) es solución de la ecuación diferencial (2.3).

Sea ahora $y(t) = \exp(\lambda t)x(t)$. En tal caso, la ecuación (2.6) puede ser reescrita como

$$Dy(t) = y'(t) = (I^\alpha \sigma(t) + c_1 t + c_2)\exp(\lambda t).$$

Luego integrando entre 0 y t, concluimos que

$$\begin{aligned} x(t) =& \frac{c_1}{\lambda^2}(\lambda t - 1 + \exp(-\lambda t)) + \frac{c_2}{\lambda}(1 - \exp(-\lambda t)) + c_3 \\ &+ \int_0^t \exp(-\lambda(t-s)) \int_0^t \sigma(u)u^{\alpha-2}(s-u)\,du\,ds. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Teniendo en cuenta ahora las condiciones indicadas en (2.2), deducimos finalmente que debe ser $c_3 = 0$, $c_2 = 0$ y

$$\begin{aligned} c_1 =& \frac{\lambda^2}{\Delta}\Big[\beta \int_0^\eta \exp(-\lambda(\eta - s)) \int_0^s \sigma(u)u^{\alpha-2}(s-u)\,du\,ds \\ &- \int_0^1 \exp(-\lambda(1-s)) \int_0^s \sigma(u)u^{\alpha-2}(s-u)\,du\,ds\Big]. \end{aligned}$$

Finalmente, teniendo en cuenta los valores de c_1, c_2 y c_3 en (2.7), obtenemos la identidad (2.4) enunciada. □

Pasamos ahora a obtener la función de Green correspondiente al problema antes mencionado. Comenzamos indicando que intercambiando el orden de integración

$$\begin{aligned} &\int_0^t \exp(-\lambda(t-s)) \int_0^s \sigma(u)u^{\alpha-2}(s-u)\,du\,ds = \\ &\qquad = \int_0^t \int_u^t \exp(\lambda(s-t))(s-u)\,ds\sigma(u)u^{\alpha-2}\,du; \end{aligned}$$

luego la solución (2.7) con $c_2 = c_3 = 0$, es de la forma

$$x(t) = \frac{c_1}{\lambda^2}(\lambda t - 1 + \exp(-\lambda t)) + \int_0^t k(t,s)\sigma(s)s^{\alpha-2}\,ds$$

donde

$$k(t,s) = \int_s^t \exp(\lambda(u-t))(u-s)\,du = \frac{\exp(\lambda(s-t)) - \lambda s - 1 + \lambda t}{\lambda^2}.$$

Finalmente, teniendo en cuenta la condición de $x(1) = \beta x(\eta)$, concluimos que

$$c_1 = \frac{\lambda^2}{\Delta}\Big(\beta \int_0^\eta k(\eta,s)\sigma(s)s^{\alpha-2}\,ds - \int_0^1 k(1,s)\sigma(s)s^{\alpha-2}\,ds\Big).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} x(t) =& \frac{A(t)}{\Delta}\Big(\beta \int_0^\eta k(\eta,s)\sigma(s)s^{\alpha-2}\,ds - \int_0^1 k(1,s)\sigma(s)s^{\alpha-2}\,ds\Big) \\ &+ \int_0^t k(t,s)\sigma(s)s^{\alpha-2}\,ds. \end{aligned}$$

Esto es, hemos obtenido el resultado que se indica a continuación.

Teorema 2.13. *La única solución de la ecuación diferencial (2.3) satisfaciendo las condiciones indicadas en (2.2) viene dada por*

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s)\sigma(s)s^{\alpha-2}\,ds,$$

siendo

$$G(t,s) = \begin{cases} -k(1,s)\psi(t), & si\ \ 0 \leq \max\{\eta,t\} < s \leq 1, \\ -k(1,s)\psi(t) + k(t,s), & si\ \ 0 \leq \eta < s < t \leq 1, \\ (\beta k(\eta,s) - k(1,s))\psi(t), & si\ \ 0 \leq t < s \leq \eta \leq 1, \\ (\beta k(\eta,s) - k(1,s))\psi(t) + k(t,s), & si\ \ 0 \leq s < \min\{\eta,t\} \leq 1; \end{cases}$$

con $\psi(t) = A(t)/\Delta$ para cada $t \in [0,1]$.

Nota 2.2. En otras palabras, $G(t,s)$ es la función de Green del problema homogéneo (2.3) junto con las condiciones requeridas en (2.2).

Nota 2.3. Notemos también que $G(t,s)$ es independiente de $1 < \alpha \leq 2$, pero obviamente la solución $x(t)$ sí depende de α.

Sea $\mathcal{C}$ el espacio de Banach formado por las funciones continuas definidas en el intervalo compacto $[0,1] \subset \mathbb{R}$ en el que consideramos la norma de la convergencia uniforme dada por

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(t)|\colon t \in [0,1]\}.$$

Por conveniencia y simplicidad, emplearemos la notación

$$B = \frac{1 + A_1(|\beta|\eta^\alpha(1-\exp(-\lambda\eta)) + 1 - \exp(-\lambda))}{\lambda\alpha(\alpha-1)}, \tag{2.8}$$

siendo

$$A_1 = \sup\{|A(t)|\colon t \in [0,1]\}$$

con $A(t)$ como en (2.5).

En virtud del Lema 2.11 anterior, podemos transformar el problema (2.2) en el problema de punto fijo

$$x = Tx, \quad \text{con } \ x \in \mathcal{C}, \tag{2.9}$$

donde $T\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ es el operador dado por

$$\begin{aligned} Tx\,(t) = &\int_0^t \exp(-\lambda(t-s)) \int_0^s f(u,x(u))u^{\alpha-2}(s-u)\,du\,ds \\ &+ A(t)\Big[\beta \int_0^\eta \exp(-\lambda(\eta-s)) \int_0^s f(u,x(u))u^{\alpha-2}(s-u)\,du\,ds \\ &\qquad - \int_0^1 \exp(-\lambda(t-s)) \int_0^s f(u,x(u))u^{\alpha-2}(s-u)\,du\,ds\Big]. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Teorema 2.14. *Sea $f\colon [0,1]\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que*

$$|f(t,v) - f(t,w)| \leq L|v-w|, \quad \textit{para todo } \ t \in [0,1] \ \textit{ y } \ v,w \in \mathbb{R}.$$

En tal caso, si $B < 1/L$, siendo B la constante introducida en (2.8), el problema (2.2) admite una única solución.

Demostración. Inicialmente, para el operador T introducido en (2.10), mostraremos que para $r > 0$ suficientemente grande, $T(B[0,r]) \subset B[0,r]$, siendo $B[0,r] = \{x \in \mathcal{C}\colon \|x\|_\infty \leq r\}$ la bola cerrada de centro el origen y radio $r > 0$ en el espacio de Banach $\mathcal{C}$. En efecto, para $x \in B[0,r]$ y

$$r > \frac{MB}{1-LB},$$

tenemos que

$$
\begin{aligned}
\|Tx\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} \Big| & \int_0^t \exp(-\lambda(t-s)) \int_0^s f(u,x(u))u^{\alpha-2}(s-u)\,du\,ds \\
& + A(t)\Big[\beta \int_0^\eta \exp(-\lambda(\eta-s)) \int_0^s f(u,x(u))u^{\alpha-2}(s-u)\,du\,ds \\
& \quad - \int_0^1 \exp(-\lambda(1-s)) \int_0^s f(u,x(u))u^{\alpha-2}(s-u)\,du\,ds\Big]\Big| \\
\le & \sup_{t\in[0,1]} \int_0^t \exp(-\lambda(t-s)) \int_0^s (|f(u,x(u))-f(u,0)|+|f(u,0)|)u^{\alpha-2}(s-u)\,du\,ds \\
& + \sup_{t\in[0,1]} |A(t)|\Big[|\beta| \int_0^\eta e^{-\lambda(\eta-s)} \int_0^s (|f(u,x(u))-f(u,0)|+|f(u,0)|)u^{\alpha-2}(s-u)\,du\,ds \\
& \quad + \int_0^1 \exp(-\lambda(1-s)) \int_0^s (|f(u,x(u))-f(u,0)|+|f(u,0)|)u^{\alpha-2}(s-u)\,du\,ds\Big] \\
\le & \sup_{t\in[0,1]} \int_0^t \exp(-\lambda(t-s)) \int_0^s (L|x(u)|+|f(u,0)|)u^{\alpha-2}(s-u)\,du\,ds \\
& + A_1\Big[|\beta| \int_0^\eta \exp(-\lambda(\eta-s)) \int_0^s (L|x(u)|+|f(u,0)|)u^{\alpha-2}(s-u)\,du\,ds \\
& \quad + \int_0^1 \exp(-\lambda(1-s)) \int_0^s (L|x(u)|+|f(u,0)|)u^{\alpha-2}(s-u)\,du\,ds\Big] \\
\le & (Lr+M)\Big\{ \sup_{t\in[0,1]} \int_0^t \exp(-\lambda(t-s)) \int_0^s u^{\alpha-2}(s-u)\,du\,ds \\
& \quad + A_1\Big[|\beta| \int_0^\eta \exp(-\lambda(\eta-s)) \int_0^s u^{\alpha-2}(s-u)\,du\,ds \\
& \quad\quad + \int_0^1 \exp(-\lambda(1-s)) \int_0^s u^{\alpha-2}(s-u)\,du\,ds\Big]\Big\} \\
\le & \frac{Lr+M}{\alpha(\alpha-1)}\Big\{ \sup_{t\in[0,1]} \int_0^t \exp(-\lambda(t-s))s^\alpha\,ds \\
& \quad + A_1\Big(|\beta| \int_0^\eta \exp(-\lambda(\eta-s))s^\alpha\,ds + \int_0^1 \exp(-\lambda(1-s))s^\alpha\,ds\Big)\Big\} \\
\le & (Lr+M)\frac{1+A_1(|\beta|\eta^\alpha(1-\exp(-\lambda\eta))+1-\exp(-\lambda))}{\lambda\alpha(\alpha-1)} \\
= & (Lr+M)B \le r.
\end{aligned}
$$

Por otra parte, para $x, y \in \mathcal{C}$ arbitrarios se tiene que

$$
\begin{aligned}
\|Tx - Ty\|_\infty &= \sup_{t\in[0,1]} |Tx(t) - Ty(t)| \\
&\le \sup_{t\in[0,1]} \Big\{ \int_0^t \exp(-\lambda(t-s)) \int_0^s |f(u,x(u)) - f(u,y(u))| u^{\alpha-2}(s-u)\, du\, ds \\
&\qquad + A(t)\Big[|\beta| \int_0^\eta e^{-\lambda(\eta-s)} \int_0^s |f(u,x(u)) - f(u,y(u))| u^{\alpha-2}(s-u)\, du\, ds \\
&\qquad + \int_0^1 e^{-\lambda(1-s)} \int_0^s |f(u,x(u)) - f(u,y(u))| u^{\alpha-2}(s-u)\, du\, ds\Big]\Big\} \\
&\le \|x-y\|_\infty \Big\{ \sup_{t\in[0,1]} \int_0^t \exp(-\lambda(t-s)) \int_0^s u^{\alpha-2}(s-u)\, du\, ds \\
&\qquad + \sup_{t\in[0,1]} A(t)\Big[|\beta| \int_0^\eta \exp(-\lambda(\eta-s)) \int_0^s u^{\alpha-2}(s-u)\, du\, ds \\
&\qquad + \int_0^1 \exp(-\lambda(1-s)) \int_0^s u^{\alpha-2}(s-u)\, du\, ds\Big]\Big\} \\
&\le L\, \frac{1 + A_1(|\beta|\eta^\alpha(1-\exp(-\lambda\eta)) + 1 - \exp(-\lambda))}{\lambda\alpha(\alpha-1)} \|x-y\| \\
&= BL\|x-y\|.
\end{aligned}
$$

Así pues, si $BL < 1$, en virtud del Teorema de punto fijo de Banach, podemos concluir que la ecuación (2.9) admite un único punto fijo y de ello se deduce el resultado sobre la unicidad de solución para el problema (2.2) enunciado. □

Por supuesto, también podemos emplear otros resultados de la teoría de punto fijo para obtener información sobre la existencia de solución para el problema 2.2. A continuación, deduciremos la existencia de solución para el problema (2.2) a partir del siguiente resultado debido a M. Krasnoselskii [74, Teorema 4.4.1].

Teorema 2.15. *Sea M un conjunto cerrado, convexo y no vació de cierto espacio de Banach X y T_1, $T_2 \colon M \longrightarrow X$ dos aplicaciones tales que:*

a) $T_1x + T_1y \in M$ para todo $x, y, \in M$;

b) T_1 es continua en y $T_1(M)$ está contenido en un conjunto compacto de X;

c) T_2 es una contracción.

Luego existe $z \in M$ tal que $z = T_1z + T_2z$.

Teorema 2.16. *Sea $f\colon [0,1]\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función continua que satisface las siguientes condiciones:*

$$
\begin{aligned}
&|f(t,v)-f(t,w)|\le L\,|v-w| \quad \textit{para todo}\;\; t\in[0,1]\;\; \textit{y}\;\; v,w\in\mathbb{R}; &(2.11)\\
&|f(t,v)|\le \mu(t) \quad \textit{para todo}\;\; (t,v)\in[0,1]\times\mathbb{R}, \quad \textit{con}\;\; \mu\in\mathcal{C}. &(2.12)
\end{aligned}
$$

En tal caso, si además

$$
A_1\frac{|\beta|\eta^{\alpha}(1-\exp(-\lambda\eta))+(1+\exp(-\lambda))}{\lambda\alpha(\alpha-1)}<1, \tag{2.13}
$$

entonces el problema (2.2) admite cuando menos una solución en el espacio $\mathcal{C}$.

Demostración. Sea $r>0$ de modo que

$$
r\ge \frac{1+A_1(|\beta|\eta^{\alpha}(1-\exp(-\lambda\eta))+(1+\exp(-\lambda)))}{\lambda\alpha(\alpha-1)}\|\mu\|_{\infty} \tag{2.14}
$$

y consideremos luego los operadores T_1 y T_2 definidos, para $x\in B[0,r]\subset\mathcal{C}$ como sigue:

$$
\begin{aligned}
T_1x\,(t)=&\int_0^t \exp(-\lambda(t-s))\int_0^s f(u,x(u))u^{\alpha-2}(s-u)\,du\,ds;\\
T_2x\,(t)=&A(t)\Big[\beta\int_0^{\eta}\exp(-\lambda(\eta-s))\int_0^s f(u,y(u))u^{\alpha-2}(s-u)\,du\,ds\\
&\qquad+\int_0^1\exp(-\lambda(1-s))\int_0^s f(u,y(u))u^{\alpha-2}(s-u)\,du\,ds\Big].
\end{aligned}
$$

Así pues, en virtud de (2.14), para $x,y\in B[0,r]$ arbitrarios tenemos que

$$
\|T_1x-T_2y\|_{\infty}\le A_1\frac{|\beta|\eta^{\alpha}(1-\exp(-\lambda\eta))+(1+\exp(-\lambda))}{\lambda\alpha(\alpha-1)}\le r.
$$

Es decir, para $x,y\in B[0,r]$ se tiene que $T_1x+T_2y\in B[0,r]$.

Por otra parte, la condición (2.13) implica que la aplicación T_2 es una contracción. Luego para poder aplicar el Teorema de Krasnoselskii tan solo falta probar la condición *b*) del Teorema 2.15 anterior.

Para probar la compacidad de T_1 emplearemos el Teorema de Ascoli-Arzela. La linealidad de T_1 es clara y para $x\in B[0,r]$ arbitraria, se tiene que

$$
\|T_1x\|_{\infty}=\sup_{t\in[0,1]}\Big|\int_0^t\exp(-\lambda(t-s))\int_0^s f(u,x(u))u^{\alpha-2}(s-u)\,du\,ds\Big|
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \|\mu\|_\infty \sup_{t\in[0,1]} \int_0^t \exp(-\lambda(t-s)) \int_0^s u^{\alpha-2}(s-u)\,du\,ds \\
&= \frac{\|\mu\|_\infty}{\alpha(\alpha-1)} \int_0^t \exp(-\lambda(t-s)) s^\alpha\,ds \\
&\leq \|\mu\|_\infty \frac{1-\exp(-\lambda)}{\lambda\alpha(\alpha-1)};
\end{aligned}
$$

lo cual prueba la continuidad de T_1. Por otra parte, haciendo

$$
M_r = \sup\{|f(t,x)| \colon t \in [0,1],\ x \in B[0,r]\},
$$

obtenemos que, para $0 < t_1 < t_2 < 1$,

$$
\begin{aligned}
|T_1 x(t) - T_1 x\,(t_2)| = \Big| &\int_0^{t_1} \exp(-\lambda(t_1-s)) \int_0^s f(u,x(u)) u^{\alpha-2}(s-u)\,du\,ds \\
&- \int_0^{t_2} \exp(-\lambda(t_2-s)) \int_0^s f(u,x(u)) u^{\alpha-2}(s-u)\,du\,ds\Big| \\
\leq &\frac{M_r}{\alpha(\alpha-1)} (\exp(\lambda t_1) - \exp(\lambda t_2))(\exp(-\lambda t_1){t_1}^\alpha - \exp(-\lambda t_2){t_2}^\alpha),
\end{aligned}
$$

acotación esta última independiente de x y que converge hacia 0 cuando $t_1 \to t_2$. Por tanto, la equicontinuidad de $T(B[0,r])$ es ahora clara.

El resultado enunciado se sigue ahora del Teorema 2.15 anterior. $\square$

Como ejemplo de aplicación de los resultados anteriores, podemos considerar el problema

$$
\begin{cases}
D_c^{3/2}(D+4)x(t) = L\,(t^2 + \cos t + \arctan x(t)), \quad t \in [0,1], \\
x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad x(1) = \beta x(1/2);
\end{cases}
\tag{2.15}
$$

Luego en este caso, tenemos que: $f(t,v) = L\,(t^2 + \cos t + \arctan v)$, $\lambda = 4$, $\beta = 1$ y $\eta = 1/2$. Además,

$$
\begin{aligned}
|f(t,v) - f(t,w)| &\leq L\,|\arctan v - \arctan w| \leq Lv - w||; \\
A_1 &= \frac{4 + \exp(-4) - 1}{4 + \exp(-4) - 1 - (2 + \exp(-2) - 1)} \approx 1.6029; \\
B &= \frac{1 + A_1(0.5^{2/3}(1-\exp(-2)) + 1 - \exp(-4))}{3} \approx 1.0212.
\end{aligned}
$$

Por tanto, en virtud del Teorema 2.14 anterior, para $L < 0.9792$, el problema (2.15) admite una única solución.

2.3. La regla de Leibniz y las derivadas fraccionarias

Como ya hemos visto, existen numerosas definiciones de derivada fraccionaria. Desafortunadamente, los operadores diferenciales de Caputo y Riemann-Liouville no satisfacen la regla de Leibniz clásica: $(fg)' = f'g + fg'$. Para el caso de la derivada de orden fraccionario de Riemann-Liouville es bien conocido [70, Teorema 15.1] que si f y g son funciones analíticas, entonces

$$D^{\alpha}(fg)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)} [D^{\alpha-k} f]\,[D^k g], \tag{2.16}$$

fórmula ya conocida por Liouville.

Identidades como (2.16) dificultan notablemente la solución de ciertas ecuaciones diferenciales fraccionarias que, en el caso de órdenes de derivación entera, no presentan grandes dificultades. Tal hecho, ha motivado la introducción de nuevos tipos de derivadas fraccionarias —como por ejemplo, la derivada fraccionaria conformable—, que intentan superar tales inconvenientes.

Es por ello que conviene resaltar el importante resultado probado en [78], donde se afirma que si un operador lineal $\mathbb{D}^{\alpha}$ satisface la regla de Leibniz usual, entonces puede ser expresado como $\mathbb{D}^{\alpha} = a(x)D^1$, donde $a(x) = \mathbb{D}^{\alpha}x$; es decir, no es posible definir una derivada verdaderamente fraccionaria que satisfaga la regla de Leibniz.

A pesar de ello, derivadas *fraccionarias* como la derivada conformable siguen gozando de cierto interés y popularidad en la actualidad [53, 71, 84].

2.3.1. La ecuación logística fraccionaria

La función exponencial, $\exp(t)$, juega un papel fundamental en las matemáticas y es realmente útil, por ejemplo, en el estudio de numerosas ecuaciones diferenciales. En el caso de los operadores diferenciales e integrales de orden fraccionario, la función exponencial pierde muchas de sus interesantes propiedades. Así, en el caso de órdenes no enteros, las funciones de Mittag-Leffler podrían pensarse como substitutas naturales de la función exponencial.

A continuación, recordamos su definición y ciertas propiedades elementales.

Definición 2.17. *Para $\alpha > 0$, la función $E_{\alpha}(z)$ recibe su nombre en honor del matemático sueco Gösta Mittag-Leffler (1846-1927), quien la definió como la serie de potencias dada por*

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Así, la función de Mittag-Leffler E_α es una generalización de la función exponencial ya que $E_1(z) = \exp(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Definición 2.18. *La función de Mittag-Leffler de dos parámetros $\alpha, \beta > 0$ viene dada por*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Durante las primeras décadas del pasado siglo XX, las funciones de Mittag-Leffler no gozaron de gran interés por parte de la comunidad matemática. Sin embargo, recientemente matemáticos, físicos e ingenieros han mostrado gran interés por esta familia de funciones e incluso hay quien se refiere a tal función como la *reina* del cálculo fraccionario. En la actualidad, disponemos de monografías de estilo enciclopédico sobre las funciones de Mittag-Leffler, como por ejemplo [39]; en [59], puede consultarse más información detallada sobre esta familia de funciones especiales y su relación con el cálculo fraccionario.

De las dos definiciones anteriores, se sigue por ejemplo que

$$\begin{aligned} E_{1,1}(z) &= \exp(z), & E_{2,1}(z^2) &= \cosh(z), \\ E_{1,2}(z) &= \frac{\exp(z)-1}{z}, & E_{2,2}(z^2) &= \frac{\operatorname{senh}(z)}{z}, \\ E_{1,3}(z) &= \frac{\exp(z)-1-z}{z^2}, & E_{2,2}(z^2) &= \cos(z); \end{aligned}$$

fórmulas que ponen da manifiesto la importancia de las funciones de Mittag-Leffler.

Además, dado que para $\beta > -1$, $\beta \neq 0$ y $\alpha > 0$ se tiene que

$$\left(D_0^\alpha x^\beta\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} t^{\beta-\alpha}, \quad t > 0,$$

concluimos luego fácilmente que la función $f(t) = E_\alpha(\lambda t^\alpha)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, es una autofunción no trivial para el operador derivada fraccionaria de Caputo de orden $\alpha > 0$ introducido al inicio del presente capítulo.

En el pasado reciente, algunos autores [48, 47] cometieron errores ciertamente graves al emplear, entre otras, falsas identidades como

$$E_\alpha(a(t+s)^\alpha) = E_\alpha(at^\alpha)E_\alpha(as^\alpha), \quad t, s > 0, \tag{2.17}$$

que únicamente es válida para los casos $\alpha = 1$ (caso de la función exponencial, ver [10]) o $a = 0$. El artículo [66] es de gran interés para más información sobre el producto de funciones de Mittag-Leffler e identidades similares a la considerada en (2.17).

A continuación, partiendo de cierta propiedad de las funciones de Mittag-Leffler, concluiremos que la función recientemente propuesta en [88] como solución exacta de la ecuación fraccionaria logística no es tal. Esto pone de manifiesto la dificultad real a la hora de obtener soluciones exactas de ciertas ecuaciones diferenciales -bastante sencillas- de orden no entero; al mismo tiempo, muestra que a pesar de que las funciones de Mittag-Leffler comparten numerosas propiedades con la función exponencial, debemos ser cautelosos a la hora de substituir funciones exponenciales por funciones de Mittag-Leffler.

En el año 1838, el matemático belga P. F. Verhulst introdujo un término no lineal en la ecuación de crecimiento; por aquel momento, Verhulst estaba interesado en modelos de poblaciones y pretendía evitar las catastróficas predicciones de T. Malthus, quien ya había empleado la ecuación de crecimiento exponencial para predecir el aumento fatídico de la población humana sobre la Tierra. De este modo, Verhulst acabó proponiendo, para $k \in \mathbb{R}$ dado, la ecuación diferencial

$$u'(t) = k\, u(t)(1 - u(t)), \quad t \geq 0, \tag{2.18}$$

a la que hoy es habitual referirse como *ecuación diferencial logística.*

La ecuación diferencial (2.18) es una de las pocas ecuaciones diferenciales no lineales para las que se conocen sus soluciones exactas. En este caso, las soluciones viene dadas por funciones de la forma

$$u(t) = \frac{u_0}{u_0 + (1 - u_0)\exp(-kt)}, \quad t \geq 0, \tag{2.19}$$

donde $u_0 \in \mathbb{R}$ sería la condición inicial, que en el caso de un modelo de poblaciones se correspondería con $u_0 = u(0) = N(0)/N_{\text{máx}}$, siendo $N(0)$ el número de individuos en el instante inicial y $N_{\text{máx}}$ la capacidad de carga del ecosistema. En la actualidad, ya superados modelos de poblaciones tan simples, la ecuación logística así como diversas generalizaciones de la misma han mostrado cierta utilidad en la modelización de otras situaciones física y biológicas.

La ecuación fraccionaria logística, esto es, dados $k \in \mathbb{R}$ y $0 < \alpha < 1$, encontrar una función u tal que

$$^{\mathrm{C}}D_0^{\alpha} u(t) = k\, u(t)(1 - u(t)), \quad t \geq 0, \tag{2.20}$$

ha sido estudiada recientemente, pero hasta el momento su solución exacta no es conocida. Sin embargo, en [88], se afirma que la solución exacta de (2.20) vendría dada por

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{u_0 - 1}{u_0}\Big)^n E_{\alpha}(-nk^{\alpha}\, t), \quad t \geq 0. \tag{2.21}$$

Observemos que para $\alpha = 1$, obtenemos que

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{u_0 - 1}{u_0} \exp(-nt)\Big)^k = \frac{u_0}{u_0 + (1-u_0)\exp(-kt)} \quad t \geq 0,$$

coincidiendo así con el caso ordinario considerado en (2.19).

La solución (2.21) habría sido obtenida empleando la técnica del embebimiento de Carleman, muy útil a la hora de resolver ciertas ecuaciones diferenciales de orden entero no lineales sencillas, pero que depende de la regla de Leibniz.

En lo que sigue, supondremos que la función introducida en (2.21) es efectivamente una solución exacta de la ecuación diferencial (2.20); llegaremos a una contradicción.

Proposicion 2.19. *Si la función introducida en (2.21) fuese una solución exacta de la ecuación (2.20), tendríamos entonces que, para todo* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$(n+1)E_\alpha(-nk^\alpha t^\alpha) = \sum_{j=0}^{n} E_\alpha(-(n-j)k^\alpha t^\alpha)E_\alpha(-jk^\alpha t^\alpha), \quad t \geq 0.$$

Demostración. Sea, para cada $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$a_j(t) = \Big(\frac{u_0 - 1}{u_0}\Big)^j E_\alpha(-(n-j)k^\alpha t^\alpha)E_\alpha(-jk^\alpha t^\alpha), \quad t \geq 0.$$

Así, para la función $u(t)$ introducida en (2.21) tenemos que

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t), \quad t \geq 0.$$

Además, para $0 < \alpha < 1$, teniendo en cuenta la propiedad de autofunción de la función $f(t) = E_\alpha(\lambda t^\alpha)$ respecto de la derivada de Caputo de orden α, concluimos que

$${}^{\mathrm{C}}D_0^\alpha \Big[\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{u_0 - 1}{u_0}\Big)^n E_\alpha(-nk^\alpha s^\alpha)\Big](t) = -k^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{u_0 - 1}{u_0}\Big)^n nE_\alpha(-nk^\alpha t^\alpha).$$

Por tanto, efectuando ahora el producto de Cauchy de las series que representan respectivamente a las funciones $u(t)$ y $1 - u(t)$, obtenemos que

$$u(t)(1-u(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{u_0 - 1}{u_0}\Big)^n E_\alpha(-nk^\alpha t^\alpha) \Big(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{u_0 - 1}{u_0}\Big)^n E_\alpha(-nk^\alpha t^\alpha)\Big)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{u_0 - 1}{u_0}\right)^n E_\alpha(-nk^\alpha t^\alpha) - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} a_j(t)\, a_{n-j}(t).$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{u_0 - 1}{u_0}\right)^n \Big[E_\alpha(-nk^\alpha t^\alpha) - \sum_{j=0}^{n} E_\alpha(-(n-j)k^\alpha t^\alpha)E_\alpha(-jk^\alpha t^\alpha)\Big].$$

Ahora bien, dado que como por hipótesis estamos asumiendo que ${}^{\mathrm{C}}D_0^\alpha u(t) = k\, u(t)(1-u(t))$, concluimos finalmente que para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$(n+1)E_\alpha(-nk^\alpha t^\alpha) = \sum_{j=0}^{n} E_\alpha(-(n-j)k^\alpha t^\alpha)E_\alpha(-jk^\alpha t^\alpha), \quad t \geq 0;$$

esto es, el resultado antes enunciado. □

En las condiciones de la Proposición 2.19 anterior, se tendría que

$$E_\alpha(-2kt^\alpha) = E_\alpha(-k^\alpha t^\alpha)E_\alpha(-k^\alpha t^\alpha), \quad t \geq 0. \tag{2.22}$$

En efecto, basta considerar $n = 2$ en la Proposición 2.19 anterior para concluir la identidad anterior. No obstante, en virtud de resultados elementales sobre la función exponencial y la función de Mittag-Lefler, la igualdad (2.22) es falsa para $0 < \alpha < 1$. También es posible obtener una prueba directa de tal hecho.

Proposicion 2.20. *La igualdad (2.22) de la Proposición 2.19 anterior tan solo es válida si* $\alpha = 1$.

Demostración. En virtud de la Definición 2.17 anterior, tenemos que

$$E_\alpha(-2k^\alpha t^\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2k^\alpha t^\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha+1)}, \quad t \geq 0. \tag{2.23}$$

Además, efectuando el producto de Cauchy correspondiente, obtenemos que

$$\begin{aligned} E_\alpha(-k^\alpha t^\alpha)E_\alpha(-k^\alpha t^\alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} \frac{(-k^\alpha t^\alpha)^{n-j}(-k^\alpha t^\alpha)^j}{\Gamma((n-j)\alpha+1)\Gamma(j\alpha+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-k^\alpha t^\alpha)^n \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\Gamma((n-j)\alpha+1)\Gamma(j\alpha+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-2k^\alpha t^\alpha)^n \sum_{j=0}^{n} \frac{2^{-n}}{\Gamma((n-j)\alpha+1)\Gamma(j\alpha+1)} \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-2k^\alpha t^\alpha)^n b_n \quad t \geq 0 \tag{2.24}$$

donde

$$b_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{2^{-n}}{\Gamma((n-j)\alpha+1)\Gamma(j\alpha+1)}.$$

La validez de (2.22) implicaría la coincidencia de los coeficientes de las series (2.23) y (2.24). En particular, para $n = 2$, tendríamos que

$$\frac{1}{4}\Big(\frac{2}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}\Big) = \frac{1}{\Gamma(2\alpha+1)},$$

o equivalentemente,

$$\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{4\Gamma(\alpha+1)^2} = \frac{1}{2}.$$

No obstante, para $0 < \alpha < 1$, se tiene que $\Gamma(2\alpha+1) < \Gamma(3) = 2$ y $\Gamma(\alpha+1)^2 > 4\Gamma(1) = 4$; luego ahora es claro que la identidad (2.22) tan solo es válida para $\alpha = 1$. $\square$

Nota 2.4. Derivando ambos miembros de la igualdad (2.22) obtenemos que la la igualdad

$$E_{\alpha,\alpha}(-2k^\alpha t^\alpha) = E_{\alpha,\alpha}(-k^\alpha t^\alpha) E_\alpha(-k^\alpha t^\alpha)$$

tan solo es válida para $\alpha = 1$.

Empleando Mathematica podemos constatar los resultados obtenidos anteriormente. En la Figura 2.3.1 se muestran algunas gráficas comparando las funciones consideradas en la Proposición 2.20. Observemos que cuando α está próximo a 1 la diferencia entre ambas funciones se hace cada vez más pequeña.

2.4. La ecuación logística fraccionaria y series de potencias

Considerando el problema de valor inicial asociado a la ecuación logística usual dado por

$$\begin{cases} u'(t) = u(t) - u^2(t), \\ u(0) = 1/2; \end{cases} \tag{2.25}$$

obtenemos que su solución viene dada por la función

$$u(t) = \frac{\exp(t)}{1+\exp(t)}, \quad t \geq 0, \tag{2.26}$$

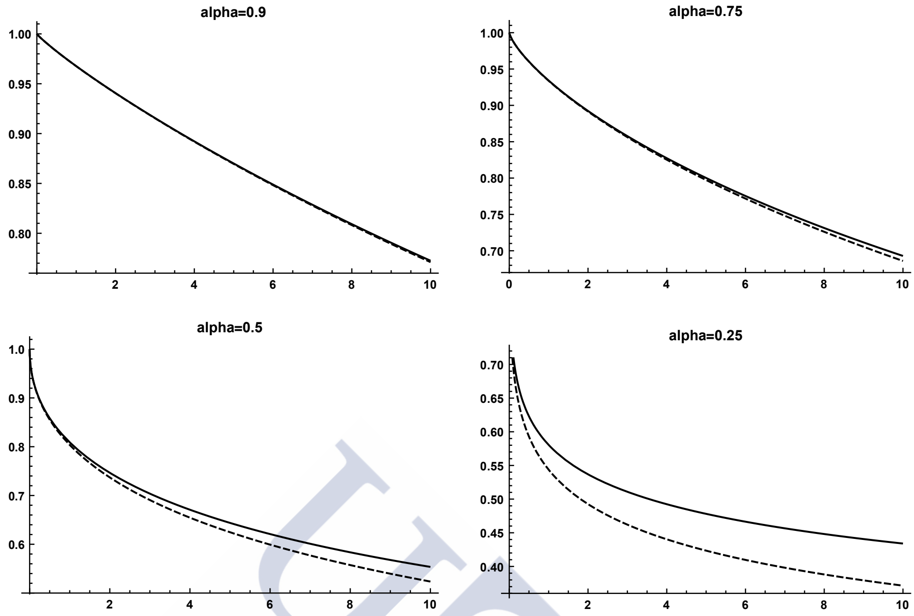

Figura 2.1: Comparación para diferentes valores de α ($\alpha = 0.9, 0.75, 0.5, 0.25$) entre las gráficas de la función $E_\alpha\left(-2k^\alpha t^\alpha\right)$ (línea continua) y el producto $E_\alpha\left(-k^\alpha t^\alpha\right) E_\alpha\left(-k^\alpha t^\alpha\right)$ (línea discontinua).

para la que se tiene que

$$u(x) = \frac{\exp(t)}{1+\exp(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} E_k \frac{t^k}{k!}, \quad |t| < \pi, \tag{2.27}$$

(el radio de convergencia es π ya que la función presenta una singularidad en $i\pi$) donde los coeficientes E_k, $k \in \mathbb{N}$, satisfacen la siguiente ley de recurrencia:

$$E_0 = 1/2, \qquad E_1 = E_0 - E_0^2 = 1/4 \tag{2.28}$$

y, para $k \in 2\mathbb{N}$,

$$E_{k+1} = -\sum_{n=0}^{k} \frac{k!}{n!(k-n)!} E_n E_{k-n}, \tag{2.29}$$

mientras que $E_{\alpha,k} = 0$ para $k \in 2\mathbb{N}$.

Nota 2.5. A diferencia de los que se afirma en [35], los coeficientes E_k de la serie de potencias (2.27) no están, al menos en un principio, directamente relacionados con los números de Euler [83, 72]. Basta decir que la función cuyos coeficientes de Taylor son los números de Euler es

$$f(t) = \frac{2}{\exp(t) + \exp(-t)}, \quad t \geq 0.$$

Para mayor claridad, indicamos a continuación el valor de algunos de los coeficientes E_k, $k \in \mathbb{N}$,

$$E_3 = -\frac{1}{8}, \quad E_4 = 0, \quad E_5 = \frac{1}{4}, \quad E_6 = 0,$$
$$E_7 = -\frac{17}{16}, \quad E_8 = 0, \quad E_9 = \frac{31}{4}, \quad E_{10} = 0.$$

Sin embargo, sí es cierto que tales coeficientes A_k están relacionados con los polinomios de Euler; véase, por ejemplo [73]. Más concretamente, se sabe que si $a_0 = 1$ y

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} a_{n-1-k} a_k, \qquad \text{para } \; n > 0,$$

entonces se tiene que $a_n = P_n(-1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $P_n(x)$ es el n-ésimo polinomio Euleriano, que viene dado por

$$P_n(x) = x(1-x)\, P_{n-1}^{'}(x) + P_{n-1}(x)\,(1 + (n-1)\,x), \qquad \text{para } \; n \geq 1,$$

siendo $P_0 = 1$. Cambiando los valores iniciales de (2.28) por $E_0 = 1$ y $E_1 = 1$, obtendríamos que $a_n = E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Consideremos ahora la serie dada por

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} E_{\alpha,\,k} \frac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \tag{2.30}$$

donde

$$E_{\alpha,\,0} = 1/2, \qquad E_{\alpha,\,1} = E_{\alpha,\,0} - E_{\alpha,\,0}^2 = 1/4 \tag{2.31}$$

y, para $k \in 2\mathbb{N}$,

$$E_{\alpha,\,k+1} = -\sum_{n=0}^{k} \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{\Gamma(\alpha n + 1)\Gamma(\alpha(k-n) + 1)} E_{\alpha,\,n} E_{\alpha,k-n}, \tag{2.32}$$

mientras que $E_{\alpha,\,k} = 0$ para $k \in 2\mathbb{N}$.

Nota 2.6. Observemos la analogía entre (2.28)–(2.29) y (2.31)–(2.32).

Para saber en qué puntos del semieje positivo la serie (2.30) anterior define una función, sería necesario estudiar el comportamiento asintótico de la sucesión $(E_{\alpha,k}/\Gamma(\alpha k+1))_{k\in\mathbb{N}}$. No obstante tal tarea no es nada sencilla, pues debemos notar que los coeficientes $|E_{\alpha,k}|$ vienen dados por una ley de recurrencia que ya de por si involucra números reales de distinto signo y cocientes de la función Gamma evaluada, para $0<\alpha<1$, en valores no naturales.

Sí es posible intuir ciertas expresiones más o menos generales para los coeficientes $E_{\alpha,k}$, $k\in\mathbb{N}$, en función únicamente del dato inicial $E_{\alpha,1}$. Como por ejemplo las que se indican en [35] y reproducimos a continuación:

$$\begin{aligned}
E_{\alpha,3} &= -\,\Gamma(2\alpha+1)\Big(\frac{E_{\alpha,1}}{\Gamma(\alpha+1)}\Big)^2,\\
E_{\alpha,5} &= 2\,\Gamma(4\alpha+1)\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(3\alpha+1)}\Big(\frac{E_{\alpha,1}}{\Gamma(\alpha+1)}\Big)^3,\\
E_{\alpha,7} &= -\,4\,\Gamma(6\alpha+1)\Big(-\frac{\Gamma(4\alpha+1)\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(5\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)}+\frac{1}{4}\frac{\Gamma(2\alpha+1)^2}{\Gamma(3\alpha+1)^2}\Big)\Big(\frac{E_{\alpha,1}}{\Gamma(\alpha+1)}\Big)^4,\\
E_{\alpha,9} &= 8\,\Gamma(8\alpha+1)\Big(\frac{\Gamma(6\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(7\alpha+1)\Gamma(5\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)}+\frac{1}{2}\frac{\Gamma(4\alpha+1)\Gamma(2\alpha+1)^2}{\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)^2}\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{4}\frac{\Gamma(6\alpha+1)\Gamma(2\alpha+1)^2}{\Gamma(7\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)^2}\Big)\Big(\frac{E_{\alpha,1}}{\Gamma(\alpha+1)}\Big)^5.
\end{aligned}$$

Sin embargo, de las expresiones anteriores no puede deducirse que

$$\begin{aligned}
&\frac{E_{\alpha+1,k}}{\Gamma((\alpha+1)k+1)}\le\\
&\qquad\le\frac{(-2)^{n/2}}{2}\Big(\frac{E_{\alpha,1}}{\Gamma(\alpha+1)}\Big)^{n/2+1}\Big(\prod_{j=1}^{(n-2)/2}\frac{\Gamma(2j\alpha+1)}{\Gamma((2j+1)\alpha+1)}+R_n\Big),\quad n\ge 2,
\end{aligned}$$

con

$$R_n\le\prod_{j=1}^{(n-2)/2}\frac{\Gamma(2j\alpha+1)}{\Gamma((2j+1)\alpha+1)}.$$

Basta tener en cuenta que para $\alpha=1$

$$\frac{\Gamma(6\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(7\alpha+1)\Gamma(5\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)}\approx 0.00952381$$

mientras que

$$\frac{1}{2}\frac{\Gamma(4\alpha+1)\Gamma(2\alpha+1)^2}{\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)^2}+\frac{1}{4}\frac{\Gamma(6\alpha+1)\Gamma(2\alpha+1)^2}{\Gamma(7\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)^2}\approx 0.0111119.$$

Nota 2.7. Conviene también indicar que, a medida que aumenta n, aumenta también el número de sumandos que deben aparecer en R_n. Este hecho complica enormemente, el estudio asintótico de la sucesión formada por los coeficientes de la serie (2.30).

Debido a lo comentado anteriormente, para obtener una posible solución de la ecuación logística fraccionaria es necesario suponer que la serie (2.30) converge uniformemente en cierto intervalo $[0, a_\alpha] \subset \mathbb{R}$, con $a_\alpha > 0$.

Teorema 2.21. *Sea $0 < \alpha \leq 1$ fijo. Si la serie introducida en (2.30) converge uniformemente el el intervalo $[0, a_\alpha] \subset \mathbb{R}$, $a_\alpha > 0$, entonces la función $u(t)$ definida como*

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} E_{\alpha,k} \frac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad t \in [0, a_\alpha],$$

es la solución del problema de Cauchy fraccionario

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{C}}D_0^\alpha u(t) = u(t) - u^2(t), \\ u(0) = 1/2. \end{cases}$$

Demostración. Empecemos por calcular la derivada de Riemann-Liouville de orden α de la función $u(t)$. En virtud de la convergencia uniforme de la serie (2.30) en el intervalo $[0, a_\alpha]$, tenemos que

$$D_0^\alpha u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} E_{\alpha,k} \frac{t^{\alpha(k-1)}}{\Gamma(\alpha(k-1)+1)} = E_{\alpha,0}\, t^{-\alpha} - \sum_{k=1}^{\infty} E_{\alpha,k} \frac{t^{\alpha(k-1)}}{\Gamma(\alpha(k-1)+1)}.$$

Así pues, teniendo en cuenta ahora la relación entre las derivadas de Caputo y de Riemann-Liouville, concluimos que

$${}^{\mathrm{C}}D_0^\alpha u(t) = D^\alpha (u - u(0))\,(t) = \sum_{k=0}^{\infty} E_{\alpha,k+1} \frac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad t \in [0, a_\alpha]. \tag{2.33}$$

Por otra parte, haciendo el producto de Cauchy de la serie que define a la función $u(t)$ y recordando que $E_{\alpha,2k} = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, llegamos a que

$$\begin{aligned} u(t) - u(t)^2 &= \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E_{\alpha,k} \frac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{k} E_{\alpha,n} E_{\alpha,k-n} \frac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha n + 1)\Gamma(\alpha(k-n)+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} t^{\alpha k} \Big(\frac{E_{\alpha,k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} - \sum_{n=0}^{k} E_{\alpha,n} E_{\alpha,k-n} \frac{1}{\Gamma(\alpha n + 1)\Gamma(\alpha(k-n)+1)} \Big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{k=0\\k\in 2\mathbb{N}}}^{\infty} t^{\alpha k}\frac{E_{\alpha,\,k+1}}{\Gamma(\alpha k+1)}\\
&\quad + \sum_{\substack{k=0\\k\notin 2\mathbb{N}}}^{\infty} t^{\alpha k}\Big(\frac{E_{\alpha,\,k}}{\Gamma(\alpha k+1)} - \sum_{n=0}^{k} E_{\alpha,\,n}E_{\alpha,\,k-n}\frac{1}{\Gamma(\alpha n+1)\Gamma(\alpha(k-n)+1)}\Big)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E_{\alpha,\,k+1}\frac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)}, \quad t\in[0,a_\alpha]. \qquad (2.34)
\end{aligned}
$$

El resultado enunciado se sigue finalmente de (2.33) y (2.34). □

Nota 2.8. Por supesto, para $\alpha = 1$, recuperamos la solución clásica (2.26) del problema de valor inicial (2.25), solución que estaría definida en el intervalo $[0,\pi]$.

En la Figura 2.4 se muestran aproximaciones numéricas para distintos valores de $0 < \alpha < 1$ de los resultados que acabamos de obtener. Tal y como era predecible, se observa cuanto menor es $\alpha \in (0,1)$, menor parece ser la longitud del intervalo $(0,a) \subset \mathbb{R}$ en el que la serie (2.30) es convergente.

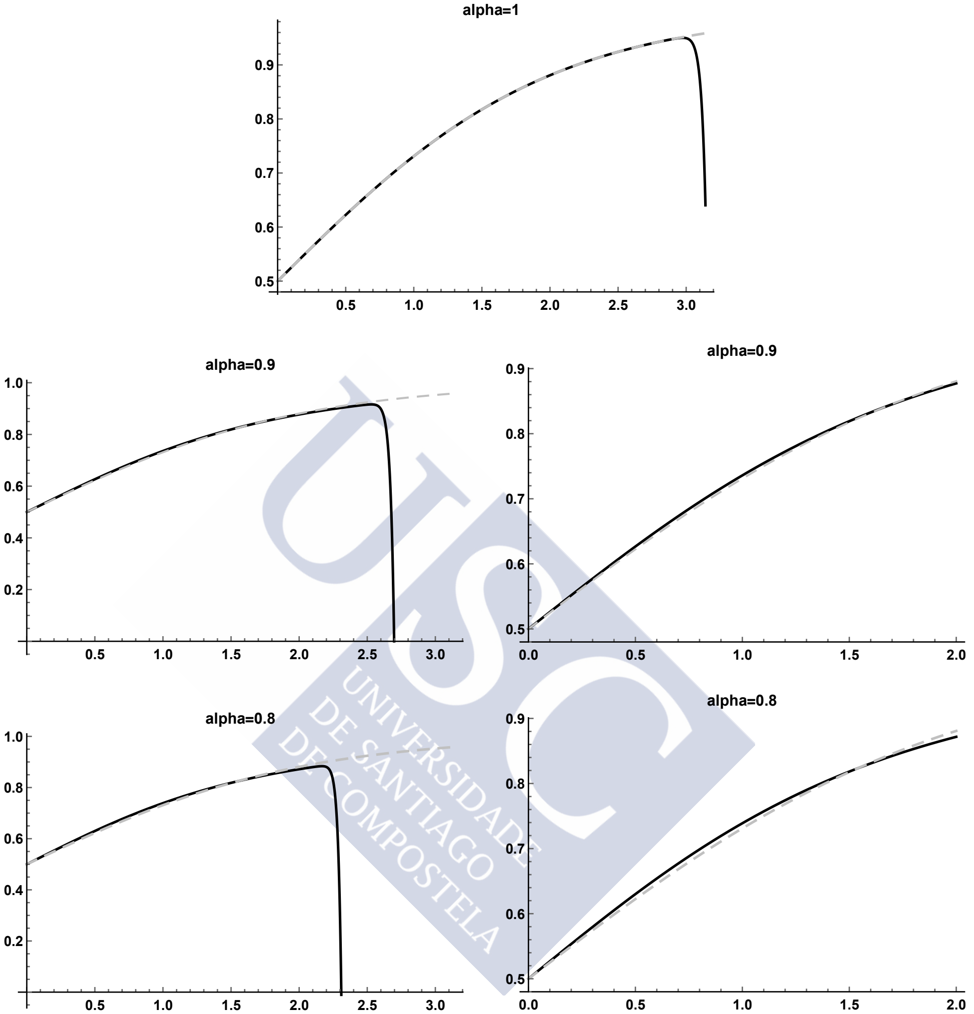

Figura 2.2: Comparación para diferentes valores de α ($\alpha = 1, 0.9, 0.8$) entre las gráficas de la función

$$u(t) \approx \sum_{k=0}^{100} E_{\alpha,\,k} \frac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \text{(línea continua)},$$

aproximación de la solución de (2.25), y la función $\exp(t)/(1 + \exp(t))$, (línea discontinua), solución de la ecuación logística clásica.

2.5. La derivada de Caputo-Fabrizio

En [30], M. Caputo y M. Fabrizio proponen una nueva definición de derivada fraccionaria. Esencialmente, para $0 < \alpha < 1$, proponen sustituir el núcleo integral $(t-s)^{-\alpha}$ presente en la definición clásica de la derivada fraccionaria de Caputo, por la función $\exp(-\alpha(t-s)/(1-\alpha))$ y la constante multiplicativa $1/\Gamma(1-\alpha)$ por $M(\alpha) \in \mathbb{R}$, donde $M(\alpha)$ es un parámetro dependiente de α de modo que $M(0) = M(1) = 1$. Se obtiene así, para una función f suficientemente regular, la derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio.

Definición 2.22. *Sea $0 < \alpha < 1$ y $f\colon [0,\infty) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ un función suficientemente regular, se define entonces la derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio de orden α de f como*

$$ {}^{\mathrm{CF}}D_0^{\alpha} f\,(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t f'(s) \exp(-\alpha(t-s)/(1-\alpha))\, ds, \quad t \geq 0. $$

Nota 2.9. Conviene notar entonces que, al igual que ocurría en el caso de la derivada fraccionaria de Caputo, la derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio de una función constante es nula. Sin embargo, en el caso de la definición de Caputo-Fabrizio, el núcleo integral ya no presenta ninguna singularidad en $t = s$.

Observemos además que si, para $0 < \alpha < 1$, consideramos $\sigma = (1-\alpha)/\alpha$, entonces la derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio de una función f dada puede escribirse como

$$ {}^{\mathrm{CF}}D_a f\,(t) = \frac{N(\sigma)}{\sigma} \int_a^t f'(s) \exp(-(t-s)/\sigma)\, ds, $$

donde $\sigma \in [0,\infty)$ y $N(\sigma)$ es la correspondiente normalización del factor $M(\alpha)$; observemos que se cumple que $N(0) = 0$ y $N(\sigma) \to 1$ cuando $t \to +\infty$.

Además, dado que $\sigma \to 0$ cunado $\alpha \to 1$ y

$$ \lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{\sigma} \exp\left(\frac{-(t-s)}{\sigma} \right) = \delta(t-s), $$

siendo $\delta(x)$ la distribución delta de Dirac centrada en $x \in \mathbb{R}$, concluimos entonces que

$$ \begin{aligned} \lim_{\alpha \to 1} {}^{\mathrm{CF}}D_a^{\alpha} f(t) &= \lim_{\alpha \to 1} \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t f'(s) \exp(-\alpha(t-s)/\sigma)\, ds \\ &= \lim_{\sigma \to 0} \frac{N(\sigma)}{\sigma} \int_a^t f'(s) \exp(-(t-s)/\sigma)\, ds = f'(t). \end{aligned} $$

Por otra parte, cuando $\alpha \to 1$, se tiene que $\sigma \to 0$. Así pues,

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to 0} {}^{\mathrm{CF}}D_0^{\alpha} f(t) &= \lim_{\alpha\to 0} \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t f'(s) \exp(-\alpha(t-s)/\sigma)\, ds \\ &= \lim_{\sigma\to+\infty} \frac{N(\sigma)}{\sigma} \int_a^t f'(s) \exp(-(t-s)/\sigma)\, ds = f(t) - f(0).\end{aligned}$$

Para $n+\alpha > 1$ con $0 < \alpha < 1$ y $n \in \mathbb{N}$, la derivada de Caputo-Fabrizio de orden $n+\alpha$ de una función f estaría definida como

$$ {}^{\mathrm{CF}}D_a^{n+\alpha} f(t) = {}^{\mathrm{CF}}D_a^{\alpha} f^{(n)}(t).$$

Proposicion 2.23. *Sea $0 < \alpha < 1$, si $f\colon [0,\infty) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase $\mathcal{C}^{n+1}$ tal que $f^{(k)}(0) = 0$, para todo $1 \leq k \leq n$, entonces se tiene que*

$$D^n\, {}^{\mathrm{CF}}D_0^{\alpha} f(t) = {}^{\mathrm{CF}}D_a^{\alpha} f^{(n)}(t), \quad t \geq 0.$$

Demostración. Una vez probado el caso $n = 1$, la situación general se deduce fácilmente; supongamos luego que $n = 1$. Así pues, integrando por partes y teniendo en cuenta que, por hipótesis $f'(0) = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}\left({}^{\mathrm{CF}}D_0^{\alpha} f'\right)(t) &= \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_0^t f''(s) \exp\left(-\frac{\alpha(t-s)}{1-\alpha}\right) ds \\ &= \frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\left[f'(t) - \frac{\alpha}{1-\alpha}\int_0^t f'(s)\exp\left(-\frac{\alpha(t-s)}{1-\alpha}\right) ds\right], \quad t \geq 0. \quad (2.35)\end{aligned}$$

Por otra parte, tenemos que

$$\begin{aligned}D\left({}^{\mathrm{CF}}D_0^{\alpha} f\right)(t) &= \frac{d}{dt}\left[\frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\int_0^t f'(s)\exp\left(-\frac{\alpha(t-s)}{1-\alpha}\right) ds\right] \\ &= \frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\left[f'(t) - \frac{\alpha}{1-\alpha}\int_0^t f'(s)\exp\left(-\frac{\alpha(t-s)}{1-\alpha}\right) ds\right], \quad t \geq 0. \quad (2.36)\end{aligned}$$

El resultado enunciado se deduce luego teniendo en cuenta (2.35) y (2.36). □

Para estudiar ciertas propiedades de la derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio será de gran utilidad la transformada de Laplace. Empecemos por estudiar la relación entre la transformada de Laplace y la derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio de una función suficientemente regular. Por simplicidad, en lo que sigue asumiremos que $M(\alpha) = 1$.

Proposicion 2.24. *Sean $0 < \alpha < 1$ y $n \in \mathbb{N}$; si $f\colon [0,\infty) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase $\mathcal{C}^n$, se tiene entonces que*

$$\mathcal{L}\Big[{}^{\mathrm{CF}}D_0^{n+\alpha} f(t)\Big](s) = \frac{s^{n+1}\mathcal{L}[f(t)](s) - s^n f(0) - s^{n-1} f'(0) - \cdots - f^{(n)}(0)}{s + \alpha(1-s)},$$

siendo $\mathcal{L}[f(t)]$ la transformada de Laplace de la función f.

Demostración. Teniendo en cuenta ciertas propiedades elementales de la transformada de Laplace, nn virtud de la propiedad de convolución, tenemos que para $0 < \alpha < 1$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\Big[{}^{\mathrm{CF}}D_0^{\alpha} f(t)\Big](s) =& \mathcal{L}[f'(t)](s)\mathcal{L}\Big[\exp\Big(-\frac{\alpha t}{1-\alpha}\Big)\Big].\\ =& \frac{s^2\mathcal{L}[f(t)](s) - sf(0) - f'(0)}{s+\alpha(1-s)}.\end{aligned}$$

De modo similar se prueba que para $n \in \mathbb{N}$ y $0 < \alpha < 1$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\Big[{}^{\mathrm{CF}}D_0^{n+\alpha} f(t)\Big](s) =& \mathcal{L}[f^{(n+1)}(t)](s)\mathcal{L}\Big[\exp\Big(-\frac{\alpha t}{1-\alpha}\Big)\Big].\\ =& \frac{s^{n+1}\mathcal{L}[f(t)](s) - s^n f(0) - s^{n-1} f'(0) - \cdots - f^{(n)}(0)}{s + \alpha(1-s)}. \square\end{aligned}$$

2.5.1. El operador integral asociado

Nuevamente, una vez visto el concepto de derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio, es natural preguntarse por la integral fraccionaria asociada. Esta cuestión ha sido resuelta en [56].

Sea $0 < \alpha < 1$; si para una función suficientemente regular $u\colon [0,\infty) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ consideramos la ecuación diferencial

$${}^{\mathrm{CF}}D_0^{\alpha} f(t) = u(t), \quad t \geq 0, \tag{2.37}$$

tendremos entonces que

$$\mathcal{L}\Big[{}^{\mathrm{CF}}D_0^{\alpha} f(t)\Big](s) = \mathcal{L}[u(t)](s), \quad s \geq 0.$$

Por tanto, en virtud de la Proposición 2.24 anterior, tendremos que

$$\frac{(2-\alpha)M(\alpha)}{2(s+\alpha(1-s))}\big(s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0)\big) = \mathcal{L}[u(t)](s), \quad s \geq 0,$$

o equivalentemente,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)](s) =& \frac{f(0)}{s} + \frac{2\alpha}{s(2-\alpha)M(\alpha)}\mathcal{L}[u(t)](s) \\ &+ \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)}\mathcal{L}[u(t)]\,(s), \quad s \geq 0. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Considerando ahora la transformada de Laplace inversa en ambos miembros de (2.38) y teniendo en cuenta que si $\mathcal{L}^{-1}[G(s)](t) = g(t)$, entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{G(s)}{s}\Big](t) = \int_0^t g(\tau)\,d\tau, \quad t \geq 0,$$

obtenemos finalmente que

$$f(t) = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)}u(t) + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)}\int_0^t u(\tau)\,d\tau + f(0), \quad t \geq 0, \tag{2.39}$$

es decir,

$$f(t) = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)}u(t) + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)}\int_0^t u(\tau)\,d\tau + c, \quad t \geq 0,$$

siendo $c \in \mathbb{R}$ una constante, es una solución de la ecuación diferencial (2.37).

Por otra parte, conviene observar también que podemos reescribir la ecuación diferencial (2.37) como

$$\frac{(2-\alpha)M(\alpha)}{2(1-\alpha)}\int_0^t \exp\Big(-\frac{\alpha(t-s)}{1-\alpha}\Big)f'(s)\,ds = u(t), \quad t \geq 0$$

o equivalentemente,

$$\int_0^t \exp\Big(\frac{\alpha s}{1-\alpha}\Big)f'(s)\,ds = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)}\exp\Big(\frac{\alpha t}{1-\alpha}\Big)u(t), \quad t \geq 0.$$

Derivando ahora en ambos términos de la expresión anterior, concluimos que

$$f'(t) = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)}\Big(u'(t) + \frac{\alpha}{1-\alpha}u(t)\Big), \quad t \geq 0.$$

Por tanto, integrando ahora entre 0 y t, obtenemos en concordancia con (2.39) que

$$f(t) = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)}u(t) + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)}\int_0^t u(\tau)\,d\tau + f(0), \quad t \geq 0.$$

Como consecuencia de lo expuesto anteriormente, parece razonable definir la integral fraccionaria de orden $0 < \alpha < 1$ de Caputo-Fabrizio del siguiente modo.

Definición 2.25. *Sea* $0 < \alpha < 1$ *fijo y* $f\colon [0,\infty) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función dada, la integral fraccionaria de orden* α *de la función* f *según Caputo-Fabrizio vendría dada por*

$$^{\mathrm{CF}}I_0^\alpha f(t) = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} f(t) + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t f(s)\, ds, \quad t \geq 0.$$

Nota 2.10. Conviene enfatizar entonces que la integral fraccionaria de Caputo-Fabrizio de orden $0 < \alpha < 1$ de una función f dada es una media ponderada —en función de α— de la propia función f y una primitiva de f.

Así pues, exigiendo que

$$\frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} = 1 \quad \text{para cada } \alpha \in [0,1],$$

obtenemos una fórmula explícita para $M(\alpha)$,

$$M(\alpha) = \frac{2}{2-\alpha}, \quad \text{para } \alpha \in [0,1].$$

Motivados por lo expuesto anteriormente, podríamos reescribir la Definición 2.22 anterior como sigue.

Definición 2.26. *Sea* $0 < \alpha < 1$ *y* $f\colon [0,\infty) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *un función suficientemente regular, se define entonces la derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio de orden* α *de* f *como*

$$^{\mathrm{CF}}D_0^\alpha f\,(t) = \frac{1}{1-\alpha} \int_a^t f'(s) \exp\left(-\frac{\alpha(t-s)}{1-\alpha} \right) ds, \quad t \geq 0.$$

2.5.2. Algunas ecuaciones diferenciales lineales

En este epígrafe estudiaremos algunas ecuaciones diferenciales sencillas que involucran al operador de Caputo-Fabrizio.

Lema 2.27. *Sea* $0 < \alpha < 1$ *fijo y* f *una solución de la siguiente ecuación diferencial*

$$^{\mathrm{CF}}D_0^\alpha f(t) = 0, \quad t \geq 0. \tag{2.40}$$

Luego f *es una función constante.*

Demostración. En virtud de (2.39), concluimos que toda solución de (2.40) debe satisfacer que $f(t) = f(0)$ para todo $t \geq 0$. Luego es claro que f debe ser una función constante. $\square$

Proposicion 2.28. *Sea $0 < \alpha < 1$ fijo. La única solución del problema de valor inicial*

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{CF}}D_0^{\alpha} f(t) = \sigma(t), \quad t \geq 0, \\ f(0) = f_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.41}$$

viene dada por

$$f(t) = f_0 + a_\alpha(\sigma(t) - \sigma(0)) + b_\alpha \int_0^t \sigma(\tau)\, d\tau, \quad t \geq 0, \tag{2.42}$$

donde a_α y b_α son constantes reales que vienen dadas por

$$a_\alpha = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)}, \quad b_\alpha = \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)}. \tag{2.43}$$

Demostración. Supongamos que el problema de valor inicial (2.41) admite dos soluciones f_1 y f_2. En tal caso, tenemos que

$${}^{\mathrm{CF}}D_0^{\alpha} f_1(t) -{}^{\mathrm{CF}} D_0^{\alpha} f_2(t) = {}^{\mathrm{CF}}D_0^{\alpha}(f_1 - f_2)(t) = 0 \quad \text{y} \quad (f_1 - f_2)(0) = 0.$$

Por tanto, en virtud del Lema 2.27 anterior, concluimos que $f_1(t) = f_2(t)$ para todo $t \geq 0$.

Por otra parte, en virtud de lo discutido en el epígrafe 2.5.1 anterior, la función definida en (2.42) es solución de la ecuación diferencial de (2.41) y satisface que $f(0) = f_0$. □

Nota 2.11. Como ya indicamos anteriormente, el recíproco del Lema 2.27 anterior también es cierto.

Consideremos ahora la siguiente familia de ecuaciones diferenciales:

$${}^{\mathrm{CF}}D_0^{\alpha} f(t) = \lambda f(t) + u(t), \quad t \geq 0, \tag{2.44}$$

siendo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, y $u \in \mathcal{C}([0,\infty))$ una función dada. En virtud de la Proposición 2.28 anterior, sabemos que obtener una solución de la ecuación diferencial (2.44) es equivalente a encontrar una función f tal que

$$f(t) = f_0 + a_\alpha\big(\lambda(f(t) - f_0) + u(t) - u(0)\big) + b_\alpha \int_0^t (\lambda f + u)(\tau)\, d\tau, \quad t \geq 0$$

donde las constante reales a_α y b_α vienen dadas por (2.43). Esto es, tenemos que encontrar una función f tal que

$$(1 - \lambda a_\alpha) f(t) - \lambda b_\alpha \int_0^t f(\tau)\, d\tau$$

$$= (1-\lambda a_\alpha) f_0 + a_\alpha (u(t) - u(0)) + b_\alpha \int_0^t u(\tau)\, d\tau, \quad t \geq 0.$$

Para $\lambda a_\alpha = 1$, obtenemos que

$$f(t) = -\frac{a_\alpha}{\lambda b_\alpha} u'(t) - \frac{b_\alpha}{\lambda} u(t), \quad t \geq 0.$$

En otro caso, es decir si $\lambda a_\alpha \neq 1$, tenemos entonces que

$$f(t) - \frac{\lambda b_\alpha}{1-\lambda a_\alpha} \int_0^t f(\tau)\, d\tau = \tilde{\sigma}(t), \quad t \geq 0, \tag{2.45}$$

siendo

$$\tilde{\sigma}(t) = f_0 + \frac{a_\alpha}{1-\lambda a_\alpha}(u(t) - u(0)) + \frac{b_\alpha}{1-\lambda a_\alpha} \int_0^t u(\tau)\, d\tau, \quad t \geq 0.$$

Así pues, dado que $\lambda \neq 0$, podemos reescribir (2.45) como

$$f(t) - \tilde{\lambda} \int_0^t f(\tau)\, d\tau = \tilde{\sigma}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $\tilde{\lambda} = \lambda b_\alpha / (1 - \lambda a_\alpha)$ y concluimos finalmente que $f'(t) = \tilde{\lambda} f(t) + \tilde{\sigma}(t)$ para $t \geq 0$, ecuación diferencial ordinaria que para una condición inicial dada admite una única solución.

En consecuencia, hemos probado el siguiente resultado.

Proposicion 2.29. *Sean $0 < \alpha < 1$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ fijos. Entonces, el problema de valor inicial*

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{CF}}D_0^\alpha f(t) = \lambda f(t) + u(t), \quad t \geq 0, \\ f(0) = f_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

admite una única solución.

2.5.3. Ecuaciones diferenciales no lineales

Finalmente, en este epígrafe estudiaremos algunas ecuaciones diferenciales no lineales que involucran al operador de Caputo-Fabrizio.

Teorema 2.30. *Sean $0 < \alpha < 1$ y $T > 0$ fijos y $\varphi \colon [0, T] \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua para la que existe $L > 0$ de modo que, para todo $t \in [0, T]$,*

$$|\varphi(t, s_1) - \varphi(t, s_2)| \leq L|s_1 - s_2|, \quad \textit{para todo } s_1, s_2 \in \mathbb{R}$$

Si $(a_\alpha + b_\alpha T)L < 1$*, entonces el problema de valor inicial*

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{CF}}D_0^\alpha f(t) = \varphi(t, f(t)), \quad t \in [0,T], \\ f(0) = f_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.46}$$

admite una única solución en el espacio $\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})$ *formado por las funciones continuas en* $[0,T] \subset \mathbb{R}$ *que toman valores reales.*

Demostración. En el espacio $\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})$, consideremos la norma dada por

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,T]} |f(t)|, \quad f \in \mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}),$$

y definamos el operador $T\colon \mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})$ dado, para cada $f \in \mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})$, por

$$Tf(t) = c + a_\alpha + b_\alpha \int_0^t \varphi(\tau, f(\tau))\, d\tau,$$

siendo $c = -a_0\varphi(0, f_0) + f_0 \in \mathbb{R}$.

En virtud de (2.39), encontrar una solución del problema de valor inicial (2.46) es equivalente a encontrar un punto fijo del operador T.

No obstante, dado que para $f_1, f_2 \in \mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})$ arbitrarias y $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned} |TF_1(t) - Tf_2(t)| =& \Big| a_\alpha(\varphi(t, f_1(t)) - \varphi(t, f_2(t))) \\ & \quad + b_\alpha\Big(\int_0^t \varphi(\tau, f_1(\tau))\, d\tau - \int_0^t \varphi(\tau, f_2(\tau))\Big)\Big| \\ \leq& a_\alpha|\varphi(t, f_1(t)) - \varphi(t, f_2(t))| \\ & \quad + b_\alpha \int_0^t |\varphi(\tau, f_1(\tau)) - \varphi(\tau, f_2(\tau))|\, d\tau \\ \leq& a_\alpha L|f_1(t) - f_2(t)| + b_\alpha L \int_0^t |f_1(\tau) - f_2(\tau)|\, d\tau \\ \leq& (a_\alpha + b_\alpha T)L\|f_1 - f_2\|_\infty, \end{aligned}$$

concluimos que el operador T es una contracción en $\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})$. Luego el resultado enunciado se sigue en virtud del Teorema de punto fijo de Banach. $\square$

Capítulo 3

Algunas ecuaciones diferenciales de orden fraccionario

Tanto la derivada como la integral de orden fraccionario de una función involucran a un operador integral; debido a ello, las ecuaciones diferenciales a las que dan lugar estos operadores están directamente relacionadas con principios de causalidad que podrían jugar un importante papel en la modelización de ciertos procesos o fenómenos físicos, pues tales principios de causalidad o memoria serían ignorados al trabajar con ecuaciones diferenciales de orden entero. Este hecho es bien conocido desde la publicación de los importantes resultados obtenidos Bagley y Torvik [81, 16].

La referencia más conocida sobre ecuaciones diferenciales fraccionarias, ya clásica en la actualidad, es el libro de Podlubny [67]. No obstante, en los últimos años, la teoría de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario ha sido objeto de novedosos e interesantes estudios (véanse, por ejemplo, los artículos [2, 5, 7, 55, 86, 90]).

El objetivo de este capítulo es presentar algunos resultados sobre existencia, unicidad y propiedades de soluciones para ciertas ecuaciones diferenciales de orden fraccionario.

La primera sección será dedicada al estudio de una familia de ecuaciones diferenciales funcionales de orden no entero; pondremos especial interés en el carácter atractor de ciertas soluciones, que serán estudiadas empleado teoremas de punto fijo y medidas de no compacidad; esencialmente, presentaremos los resultados publicados en [57].

La segunda sección, será dedicada al estudio de ciertas versiones fraccionarias de las ecuaciones diferenciales de K. Pearson, también se plantearán allí ciertas propiedades de familias de casi-polinomios ortogonales; nos limitaremos a mostrar los resultados obtenidos en [8].

3.1. Ecuaciones diferenciales fraccionarias funcionales

En esta sección estudiaremos ciertas propiedades de problemas de valor inicial en los que aparece una ecuación diferencial funcional de orden fraccionario. Más exactamente, consideramos

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{C}}D^{\alpha}u(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} {}^{\mathrm{C}}D^{\alpha_i} f_i(t, u_t) + f_0(t, u_t), \quad t > t_0, \\ u(t) = \varphi(t), \end{cases} \tag{3.1}$$

donde ${}^{\mathrm{C}}D^{\alpha}$ es la derivada fraccionaria de Caputo de orden $0 < \alpha < 1$, σ es una constante positiva, $\varphi \in \mathcal{C}([t_0 - \sigma, t_0], \mathbb{R})$ y para cada $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq m$, ${}^{\mathrm{C}}D^{\alpha_i}$ es la derivada fraccionaria de Caputo de orden $0 < \alpha_i < \alpha$ y cada $f_i\colon I \times \mathcal{C}([-\sigma, 0], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función dada siendo $I = [t_0, \infty)$. Además, para cada $t \in I$, la función

$$u_t\colon [-\sigma, 0] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

está definida como $u_t(s) = u(t + s)$ para cada $s \in [-\sigma, 0]$. Observemos que las soluciones de (3.1) está definidas en $[t_0 - \sigma, \infty)$.

Estamos especialmente interesados en el estudio de la existencia de soluciones que satisfagan ciertas propiedades de atracción en el sentido de las definiciones que se indican a continuación. Tales definiciones ya habían sido consideradas en trabajos previos de otros autores, como por ejemplo en [18, 32].

Definición 3.1. *Una solución $u = u(t)$ del problema de valor inicial (3.1) se dice atractora si se verifica que existe una constante $b_0 > 0$ tal que si $|\varphi(s)| \leq b_0$ para todo $[t_0 - \sigma, t_0]$, entonces*

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = 0.$$

Definición 3.2. *Una solución $u = u(t)$ del problema de valor inicial (3.1) se dice globalmente atractora si se verifica que*

$$\lim_{t \to +\infty} (u(t) - v(t)) = 0$$

para toda solución $v = v(t)$ del problema de valor inicial (3.1).

3.1.1. Soluciones atractoras empleando el Teorema de punto fijo de Schauder

Empleando el Teorema de punto fijo de Schauder [74, Teorema 4.1.1], cuyo enunciado recordamos a continuación, mostraremos que el problema de valor inicial admite, bajo ciertas hipótesis extra, soluciones globalmente atractoras en el sentido de la Definición 3.1 anterior.

Teorema 3.3 (Teorema de punto fijo de Schauder)**.** *Sea U un conjunto no vacío y convexo de un espacio vectorial normado $\mathcal{B}$ y $T\colon U \subset \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ una aplicación continua tal que $K = T(U) \subset \mathcal{B}$ es un conjunto compacto. Entonces T tiene un punto fijo.*

Como ya dijimos, necesitaremos ciertas hipótesis para probar la existencia de soluciones atractoras de (3.1). Más concretamente, asumiremos que:

(H_0) para cada $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \leq i \leq m$, la función $f(t,\psi)$ es Lebesgue-medible respecto de la variable $t \in [0,\infty)$ y $f(t,\psi)$ es una función continua respecto de $\psi \in \mathcal{C}([-\sigma,0],\mathbb{R})$;

(H_1) existe una función $\mathcal{H}\colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ estrictamente decreciente y que se anula en el infinito de modo que, para todo $t \in [0,\infty)$,

$$\left|\varphi(t_0) + \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha_i)} \int_t^{t_0} (t-s)^{\alpha-\alpha_i-1} f_i(s,u_s)\, ds\right)\right| \leq \mathcal{H}(t-t_0);$$

(H_2) existe una constante $\beta \in \mathbb{R}$ tal que para cada $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq m$, se tiene que $f_i \in \mathsf{L}^{1/\beta}(I, \mathcal{C}([-\sigma,0]),\mathbb{R})$, con

$$0 < \beta < \min_{0\leq i\leq m} \alpha - \alpha_i.$$

Bajo la condición (H_0), podemos reescribir el problema de valor inicial (3.1) como

$$u(t) = \begin{cases} \varphi(t_0) + \displaystyle\sum_{i=0}^{m} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha_i)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-\alpha_i-1} f_i(s,u_s)\, ds, & t > t_0, \\ \varphi(t), & t_0 - \sigma \leq t \leq t_0, \end{cases} \tag{3.2}$$

donde $\alpha_0 = 0$ y $0 < \alpha_i < \alpha$ para cada $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq m$. Consideremos entonces el operador $\mathcal{F}\colon \mathcal{C}([t_0-\sigma,\infty),\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}([t_0-\sigma,\infty),\mathbb{R})$ definido, para cada $u \in \mathcal{C}([t_0-\sigma,\infty),\mathbb{R})$, como

$$(Tu)(t) = \begin{cases} \varphi(t_0) + \displaystyle\sum_{i=0}^{m} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha_i)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-\alpha_i-1} f_i(s,u_s)\, ds, & t > t_0, \\ \varphi(t), & t_0-\sigma \le t \le t_0. \end{cases}$$

Tenemos entonces que $u = u(t)$ es solución del problema de valor inicial (3.1) si es un punto fijo del operador $\mathcal{F}$. Teniendo en cuenta las condiciones asumidas anteriormente, podemos enunciar y probar el siguiente resultado.

Lema 3.4. *Si para cada $i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $1 \le i \le m$, las funciones f_i de (3.1) satisfacen las condiciones (H_0)-(H_2), entonces el problema de valor inicial (3.1) admite al menos una solución en el espacio $\mathcal{C}([t_0-\sigma,\infty),\mathbb{R})$.*

Demostración. Consideremos el conjunto $S \subset \mathcal{C}([t_0-\sigma,\infty),\mathbb{R})$ dado por

$$S = \{u\colon u \in \mathcal{C}([t_0-\sigma,\infty),\mathbb{R}) \ \text{ y } \ |u(t)| \le \mathcal{H}(t-t_0) \ \text{ para todo } t \ge t_0\}.$$

El conjunto S es un subconjunto no vacío, cerrado, acotado y convexo de $\mathcal{C}([t_0-\sigma,\infty),\mathbb{R})$. Como ya indicamos anteriormente, para probar que el problema de valor inicial admite una solución, basta mostrar que el operador $\mathcal{F}$ mantiene un punto fijo en el conjunto S.

Empezaremos por observar que el conjunto S queda invariante por el operador $\mathcal{F}$; esto es una consecuencia de la hipótesis (H_1) asumida anteriormente.

Para probar la continuidad del operador $\mathcal{F}$, sea $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones del conjunto S tales que $u^n \to u$ cuando $n \to \infty$. En tal caso, en virtud de la continuidad de las funciones f_i respecto de su segunda variable, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} f_i(t,{u_t}^n) = f_i(t,u_t), \quad \text{para todo } \ t > t_0 \ \text{ y } \ i = 0,1,\ldots,m.$$

Dado ahora $\varepsilon > 0$, puesto que la función $\mathcal{H}$ es estrictamente decreciente, existe $T > t_0$ tal que

$$\mathcal{H}(t-t_0) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para todo } \ t > T. \tag{3.3}$$

Por otra parte, para $t_0 < t \le T$, tenemos que

$$|(\mathcal{F}u^n)(t) - (\mathcal{F}u)(t)| \le$$
$$\le \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha_i)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-\alpha_i-1} |f_i(s,{u^n}_s) - f_i(s,u_s)|\, ds$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha_i)} \Big(\int_{t_0}^{t} (t-s)^{\frac{\alpha-\alpha_i-1}{1-\beta}}\, ds \Big)^{1-\beta} \Big(\int_{t_0}^{t} |f_i(s,u^n{}_s) - f_i(s,u_s)|^{1/\beta}\, ds \Big)^{\beta} \\
&\leq \sum_{i=0}^{m} \frac{(1-\beta)^{1-\beta}(T-t_0)^{\alpha-\alpha_i-\beta}}{\Gamma(\alpha-\alpha_i)(\alpha-\alpha_i-\beta)^{1-\beta}} \Big(\int_{t_0}^{T} |f_i(s,u^n{}_s) - f_i(s,u_s)|^{1/\beta}\, ds \Big)^{\beta} \\
&\leq \sum_{i=0}^{m} \frac{(1-\beta)^{1-\beta}(T-t_0)^{\alpha-\alpha_i}}{\Gamma(\alpha-\alpha_i)(\alpha-\alpha_i-\beta)^{1-\beta}} \sup_{t_0<t\leq T} |f_i(s,u^n{}_s) - f_i(s,u_s)|,
\end{aligned}
$$

donde conviene observar que el segundo miembro de la última desigualdad se anula cuando $n \to \infty$. Por otra parte, dado que S es invariante para el operador $\mathcal{F}$, en virtud de (3.3) concluimos que

$$
|(\mathcal{F}u^n)(t) - (\mathcal{F}u)(t)| \leq 2\mathcal{H}(t-t_0) < \varepsilon, \quad \text{para todo } \ t > T.
$$

Por tanto, para $t > t_0$, deducimos finalmente que

$$
|(\mathcal{F}u^n)(t) - (\mathcal{F}u)(t)| \to 0 \quad \text{cuando } \ n \to \infty.
$$

Si $t \in [t_0-\sigma, t_0]$, entonces es obvio que $|(\mathcal{F}u^n)(t) - (\mathcal{F}u)(t)| = 0$. Luego la continuidad de $\mathcal{F}$ queda probada.

A continuación mostraremos que $\mathcal{F}(S)$ es una familia de funciones equicontinua. Sea luego $\varepsilon > 0$ dado y $t_0 < t_1 < t_2 < T$, donde $T > 0$ es escogido de acuerdo con (3.3); tenemos luego que, en virtud de la condición (H_2) asumida anteriormente,

$$
\begin{aligned}
&|(\mathcal{F}u)(t_2) - (\mathcal{F}u)(t_1)| \\
&\quad \leq \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha_i)} \Big| \int_{t_0}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-\alpha_i-1} f_i(s,u_s)\, ds - \int_{t_0}^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-\alpha_i-1} f_i(s,u_s)\, ds \Big| \\
&\quad \leq \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha_i)} \Big[\int_{t_0}^{t_1} |(t_2-s)^{\alpha-\alpha_i-1} - (t_1-s)^{\alpha-\alpha_i-1}| |f_i(s,u_s)|\, ds \\
&\qquad\qquad + \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-\alpha_i-1} |f_i(s,u_s)|\, ds \Big] \\
&\quad \leq \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha_i)} \Big[\Big(\int_{t_0}^{t_1} |(t_1-s)^{\alpha-\alpha_i-1} - (t_2-s)^{\alpha-\alpha_i-1}|^{\frac{1}{1-\beta}}\, ds \Big)^{1-\beta} \\
&\qquad\qquad \times \Big(\int_{t_0}^{t_1} |f_i(s,u_s)|^{\frac{1}{\beta}}\, ds \Big)^{\beta} \\
&\qquad\qquad + \Big(\int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\frac{\alpha-\alpha_i-1}{1-\beta}}\, ds \Big)^{1-\beta} \Big(\int_{t_1}^{t_2} |f_i(s,u_s)|^{\frac{1}{\beta}}\, ds \Big)^{\beta} \Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\le \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha_i)} \Big[\Big(\int_{t_0}^{t_1} |(t_1-s)^{\frac{\alpha-\alpha_i-1}{1-\beta}} - (t_2-s)^{\frac{\alpha-\alpha_i-1}{1-\beta}}| \, ds \Big)^{1-\beta} \\
&\qquad\qquad \times \Big(\int_{t_0}^{t_1} |f_i(s,u_s)|^{\frac{1}{\beta}} \, ds \Big)^{\beta} \\
&\qquad\qquad + \Big(\int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\frac{\alpha-\alpha_i-1}{1-\beta}} \, ds \Big)^{1-\beta} \Big(\int_{t_1}^{t_2} |f_i(s,u_s)|^{\frac{1}{\beta}} \, ds \Big)^{\beta} \Big] \\
&\le \sum_{i=0}^{m} \frac{(1-\beta)^{1-\beta}}{\Gamma(\alpha-\alpha_i)(\alpha-\alpha_i-\beta)^{1-\beta}} \Big[(t_2-t_1)^{\alpha-\alpha_i-\beta} \Big(\int_{t_0}^{T} |f_i(s,u_s)|^{\frac{1}{\beta}} \, ds \Big)^{\beta} \\
&\qquad\qquad + \big(|t_2-t_1|^{\frac{\alpha-\alpha_i-\beta}{1-\beta}} + |(t_1-t_0)^{\frac{\alpha-\alpha_i-\beta}{1-\beta}} - (t_2-t_0)^{\frac{\alpha-\alpha_i-\beta}{1-\beta}}| \big)^{1-\beta} \\
&\qquad\qquad \times \Big(\int_{t_0}^{T} |f_i(s,u_s)|^{\frac{1}{\beta}} \, ds \Big)^{\beta} \Big],
\end{aligned}
$$

que converge a 0 cuando $t_1 \to t_2$. Supongamos ahora que t_1, t_2 son tales que $t_1, t_2 > T$; teniendo luego en cuenta que $\mathcal{F}(S) \subset S$ y (3.3), concluimos que

$$
\begin{aligned}
|(\mathcal{F}u)(t_2) - (\mathcal{F}u)(t_1)| \le \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha_i)} \Big| \int_{t_0}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-\alpha_i-1} f_i(s,u_s) \, ds \\
- \int_{t_0}^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-\alpha_i-1} f_i(s,u_s) \, ds \Big| \\
\le \mathcal{H}(t_1-t_0) - \mathcal{H}(t_2-t_0) < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Notemos que para el caso $t_0 < t_1 < T < t_2$, se tiene que

$$
t_1 \to t_2 \Rightarrow t_1 \to T \ \text{ y } \ t_2 \to T,
$$

lo cual junto con las desigualdades anteriores implica que,

$$
|(\mathcal{F}u)(t_2) - (\mathcal{F}u)(t_1)| \le |(\mathcal{F}u)(t_2) - (\mathcal{F}u)(T)| + |(\mathcal{F}u)(T) - (\mathcal{F}u)(t_1)| \to 0,
$$

cuando $t_1 \to t_2$.

Concluimos por tanto que $\mathcal{F}(S)$ es una familia equicontinua de funciones en todo intervalo compacto $[t_0, T] \subset \mathbb{R}$ con $T > 0$. Además, dado que $\mathcal{F}(S) \subset S$ y teniendo en cuenta la definición de S, deducimos que

$$
\lim_{T \to \infty} \sup_{u \in \mathcal{F}(S)} \sup\{|u(t)| \colon t > T\} = 0.
$$

Es decir, $\mathcal{F}(S)$ es un conjunto relativamente compacto en $\mathcal{C}([t_0 - \sigma, \infty), \mathbb{R})$ y se cumplen entonces todas las hipótesis del Teorema de punto fijo de Schauder; luego el operador $\mathcal{F} : S \longrightarrow S$ admite al menos un punto fijo, esto es, el problema de valor inicial (3.1) admite una solución en S. $\square$

Por tanto, ahora podemos formular el resultado principal sobre existencia de solución para el problema (3.1).

Teorema 3.5. *Supongamos que se satisfacen las hipótesis* (H_0)*-*(H_1) *indicadas anteriormente. El problema de valor inicial (3.1) admite el menos una solución atractora en el sentido de la Definición 3.1 anterior.*

Demostración. En virtud de Lema 3.4 probado anteriormente, existe al menos una solución de la ecuación diferencial presente en (3.1) perteneciente al conjunto S. Por otra parte, para probar que tal solución es atractora, teniendo en cuenta la propiedad indicada en (H_1) de la función $\mathcal{H}$, concluimos que todas la funciones del conjunto S deben anularse en el infinito y así, la solución en $u \in S$ de (3.1) cuya existencia ya teníamos garantizada previamente, cumple que $u(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. □

Nota 3.1. Conviene indicar que la tesis del Teorema 3.5 anterior no implica la existencia de una solución globalmente atractora para (3.1) en el sentido de la Definición 3.2 anterior.

3.1.2. Soluciones localmente atractoras empleando medidas de no compacidad

Este epígrafe está dedicado al estudio de la existencia de soluciones del problema de valor inicial (3.1) en el espacio de Banach $\mathcal{BC}(\mathbb{R}_{t_0-\sigma})$ formado por aquellas funciones reales definidas en el intervalo $[t_0-\sigma,\infty)$ que son continuas y acotadas. Para ello, emplearemos técnicas que harán uso de medidas de no compacidad.

Así, bajo ciertas hipótesis ligeramente distintas respecto de las consideradas anteriormente para las funciones involucradas en (3.1), lograremos asegurar la existencia de soluciones atractoras (em un sentido que ya precisaremos más adelante) para (3.1) en el espacio $\mathcal{BC}(\mathbb{R}_{t_0-\sigma})$.

Empezaremos por introducir notación y ciertos conceptos que emplearemos más adelante. Si $(E,\|\cdot\|)$ es un espacio de Banach y $X \subset E$ es un subconjunto de E, $\bar{X}$ y $\operatorname{conv}(X)$ denotarán respectivamente a la clausura topológica de X y la envolvente convexa de X. Además, denotaremos por $\mathcal{M}_E$ a la familia formada por todos los conjuntos no vacíos y acotados de E; $\mathcal{N}_E$ será la subfamilia de $\mathcal{M}_E$ formada por todos los subconjuntos relativamente compactos en E. Por otra parte, $B(x,r)$ será la bola cerrada de centro $x \in E$ y radio $r > 0$; emplearemos la notación B_r para referirnos a la bola $B(0,r) \subset E$ centrada en $0 \in E$ y de radio $r > 0$.

Recordemos ahora el concepto de medida de no compacidad, introducido inicialmente en [19] en el año 1980.

Definición 3.6. *Una aplicación $\mu\colon \mathcal{M}_E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ se dice que es una medida de no compacidad si satisface las siguientes condiciones:*

(a) *la familia* $\ker(\mu) = \{X \in \mathcal{M}_E\colon \mu(X) = 0\}$ *es no vacía y* $\ker(\mu) \subset \mathcal{N}_E$*;*

(b) $X \subset Y$ *implica que* $\mu(X) \leq \mu(Y)$*, para todo* $X, Y \subset E$*;*

(c) $\mu(\bar{X}) = \mu(X)$ *para todo* $X \subset E$*;*

(d) $\mu(\operatorname{conv}(X)) = \mu(X)$ *para todo* $X \subset E$*;*

(e) *para todo* $\lambda \in [0, 1]$ *se tiene que*

$$\mu(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda\mu(X) + (1 - \lambda)\mu(Y);$$

(f) *si* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de conjuntos cerrados de la familia* $\mathcal{M}_E$ *tal que*

$$X_{n+1} \subset X_n \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N} \qquad y \qquad \lim_{n\to\infty} \mu(X_n) = 0,$$

entonces se tiene que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \neq \emptyset.$$

La familia $\ker(\mu)$ *descrita en (a) recibe habitualmente el nombre de núcleo de la medida de no compacidad* μ*.*

Definición 3.7. *Sea* μ *una medida de no compacidad en un espacio de Banach* $(E, \|\cdot\|)$*. Una aplicación* $T\colon C \subset E \longrightarrow E$ *se dice que es una* μ_E*-contracción si existe* $k \in (0, 1)$ *tal que*

$$\mu(T(W)) \leq k\mu(W), \quad \textit{para todo conjunto cerrado y acotado } W \subset C.$$

El siguiente resultado, conocido habitualmente como Teorema de Darbo-Sadovskii nos será de gran utilidad.

Teorema 3.8. *[19] Sea* C *un subconjunto no vacío, acotado, cerrado y convexo contenido en un espacio de Banach* $(E, \|\cdot\|)$ *y sea* $T\colon C \longrightarrow C$ *una* μ_E*-contracción. Luego* T *tiene como mínimo un punto fijo en* C*.*

Más exactamente,emplearemos el siguiente resultado, que ha sido recientemente probado en [3].

Teorema 3.9. *Sea C un subconjunto no vacío, acotado, cerrado y convexo contenido en un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$ y sea $T\colon C \longrightarrow C$ una aplicación continua tal que*

$$\mu(T(W)) \leq \varphi(\mu(W)), \quad \textit{para todo } W \subset C,$$

donde μ es una medida de compacidad y $\varphi\colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ es una función monótona creciente (pero no necesariamente continua) tal que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^n(t) = 0, \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{R}^+.$$

Luego T tiene al menos un punto fijo en C.

En lo que sigue, trabajaremos en el espacio de funciones $\mathcal{BC}(\mathbb{R}_{t_0-\sigma})$, donde t_0 y σ coinciden con los considerados en (3.1). En tal espacio funcional consideraremos la normal habitual, que viene dada por

$$\|u\| = \sup\{|u(t)|\colon t \geq t_0 - \sigma\}, \quad u \in \mathcal{BC}(\mathbb{R}_{t_0-\sigma}).$$

Para alcanzar nuestros propósitos ya comentados anteriormente, necesitamos definir una medida de no compacidad en el espacio $\mathcal{BC}(\mathbb{R}_{t_0-\sigma})$. Procederemos de modo completamente análogo a lo indicado en [3, Capítulo 2] para el espacio $\mathcal{BC}(\mathbb{R}^+)$.

Sean entonces B un subconjunto limitado de $\mathcal{BC}(\mathbb{R}_{t_0-\sigma})$ y $T > t_0 - \sigma$. Para $u \in B$ y $\varepsilon > 0$, denotaremos por $\omega^T_{t_0-\sigma}$ el módulo de continuidad de la función u en el intervalo $[t_0 - \sigma, t_0]$, esto es,

$$\omega^T_{t_0-\sigma}(u, \varepsilon) = \sup\{|u(t) - u(s)|\colon t, s \in [T - \sigma_0, T],\ |t - s| \leq \varepsilon\}.$$

Consideraremos también

$$\begin{aligned}
\omega^T_{t_0-\sigma}(B, \varepsilon) &= \sup\{\omega^T_{t_0-\sigma}(u, \varepsilon)\colon u \in B\},\\
\omega^T_{t_0-\sigma}(B, \varepsilon) &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \omega^T_{t_0-\sigma}(B, \varepsilon),\\
\omega_{t_0-\sigma}(B) &= \lim_{T\to\infty} \omega^T_{t_0-\sigma}(B).
\end{aligned}$$

Para $t \geq t_0 - \sigma$, emplearemos la notación $B(t) = \{u(t)\colon u \in B\} \subset \mathbb{R}$ y definiremos

$$\dim B(t) = \sup\{|u_1(t) - u_2(t)|\colon u_1, u_2 \in B\}.$$

Finalmente, consideraremos la aplicación $\mu\colon \mathcal{M}_{\mathcal{BC}(\mathbb{R}_{t_0-\sigma})} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida como

$$\mu(B) = \omega_{t_0-\sigma}(B) + \limsup_{t\to\infty} \dim B(t). \tag{3.4}$$

De modo prácticamente idéntico a como se define una medida de compacidad en el espacio $\mathcal{BC}(\mathbb{R}^+)$ —ver [3, Capítulo 2]—, se prueba que (3.4) define una medida de no compacidad en el espacio $\mathcal{BC}(\mathbb{R}_{t_0-\sigma})$.

Como veremos más adelante, tener información sobre $\ker(\mu)$ será especialmente útil. Em este momento, mencionaremos únicamente que $\ker(\mu)$ está formado en este caso por conjuntos X no vacíos y acotados tales que las funciones pertenecientes a X son localmente equicontinuas en $\mathbb{R}^+$ y

$$\lim_{t\to\infty} X(t) = 0.$$

Sea ahora $\Omega \subset \mathcal{BC}(\mathbb{R}_{t_0-\sigma})$ un conjunto no vacío y $Q\colon \Omega \subset \mathcal{BC}(\mathbb{R}_{t_0-\sigma}) \longrightarrow \mathcal{BC}(\mathbb{R}_{t_0-\sigma})$ un operador dado. Consideremos entonces la siguiente ecuación

$$x(t) = [Qx](t), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}_{t_0-\sigma}. \tag{3.5}$$

Definición 3.10. *Se dice que las soluciones de (3.5) son localmente atractoras si existe una bola cerrada $B(u_0, r)$ en el espacio $\mathcal{BC}(\mathbb{R}_{t_0-\sigma})$ tal que si $u = u(t)$ y $v = v(t)$ son dos soluciones arbitrarias de (3.5), entonces*

$$\lim_{t\to\infty} (u(t) - v(t)) = 0.$$

Si el límite anterior es uniforme respecto del conjunto $B(u_0, r) \cap \Omega$; esto es, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $T > 0$ tal que

$$|u(t) - v(t)| < \varepsilon \quad \text{para todo } u, v \in B(u_0, r) \cap \Omega \quad y \quad t \geq T,$$

diremos entonces que las soluciones de (3.5) son uniformemente localmente atractoras.

Nota 3.2. Tal y como ha sido mostrado en [20], conviene tener en cuenta que las soluciones globalmente atractoras siempre son localmente atractoras, pero —en general— pueden existir soluciones localmente atractoras que no sean globalmente atractoras.

Nota 3.3. Por otra parte, en el espacio $\mathcal{BC}(\mathbb{R}_{t_0-\sigma})$ el concepto de solución uniformemente localmente atractora es equivalente al de solución asintóticamente estable considerado en [21, 22]; por tanto, podemos emplear ambos conceptos indiferentemente.

En lo que sigue de epígrafe, asumiremos las siguientes condiciones:

(H_3) para cada $i \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq i \leq m$, la función $f_i\colon \mathbb{R}_{t_0-\sigma} \times \mathcal{C}([t_0-\sigma, t_0], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y existe una función continua $h_i\colon \mathbb{R}_{t_0-\sigma} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que

$$|f_i(t,u) - f_i(t,v)| \leq h_i(t)\mathcal{H}(\|u-v\|), \quad \text{para toda } u, v \in \mathcal{C}([t_0-\sigma, t_0], \mathbb{R}),$$

donde $\mathcal{H}\colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ es una función subaditiva, esto es,

$$\mathcal{H}(a+b) \leq \mathcal{H}(a) + \mathcal{H}(b), \quad \text{para todo } \ a, b \geq 0;$$

(H_4) para cada $i \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq i \leq m$, se tiene que

$$A_i = \sup_{t \in [t_0, +\infty)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha - \alpha_i - 1} h_i(s)\, ds < \infty,$$

$$B_i = \sup_{t \in [t_0, +\infty)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha - \alpha_i - 1} |f_i(s, 0)| < \infty$$

y además,

$$\lim_{n \to \infty} {\lambda_A}^n\, \mathcal{H}^n(t) = 0, \quad \text{para todo } \ t > 0,$$

siendo

$$\lambda_A = \sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{\Gamma(\alpha - \alpha_i)} < 1;$$

(H_5) existe una solución positiva de la desigualdad

$$\sup_{t \in [t_0 - \sigma, t_0]} |\varphi(t)| + \lambda_A \mathcal{H}(r) + \lambda_B \leq r, \tag{3.6}$$

donde

$$\lambda_B = \sum_{i=0}^{m} \frac{B_i}{\Gamma(\alpha - \alpha_i)}.$$

Ahora podemos enunciar el resultado principal de la sección.

Teorema 3.11. *Bajo las condiciones (H_3)–(H_5) indicadas anteriormente, el problema de valor inicial (3.1) admite al menos una solución en el espacio $\mathcal{BC}(\mathbb{R}_{t_0-\sigma})$. Además, todas la soluciones de (3.1) son uniformemente localmente atractoras.*

Demostración. Consideremos el operador $\mathcal{F}$ definido mediante la siguiente fórmula

$$[\mathcal{F}u](t) = \begin{cases} \varphi(t_0) + \displaystyle\sum_{i=0}^{m} \frac{1}{\Gamma(\alpha - \alpha_i)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha - \alpha_i - 1} |f_i(s, u_s)|\, ds, & t > t_0, \\ \varphi(t), & t_0 - \sigma \leq t \leq t_0, \end{cases}$$

para cada $u \in \mathcal{BC}(\mathbb{R}_{t_0-\sigma})$. Conviene notar, que en virtud de las hipótesis (H_3)–(H_5), la función $\mathcal{F}u$ es continua en $\mathbb{R}_{t_0-\sigma}$. Además, se tiene que el conjunto $\mathcal{BC}(\mathbb{R}_{t_0-\sigma})$ es invariante por $\mathcal{F}$.

En efecto, pues para $u \in \mathcal{BC}(\mathbb{R}_{t_0-\sigma})$ y $t > t_0$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
|[\mathcal{F}u](t)| \leq |\varphi(t_0)| + \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha_i)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-\alpha_i-1} |f_i(s,u_s)|\, ds \\
\leq & |\varphi(t_0)| + \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha_i)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-\alpha_i-1} (|f_i(s,u_s) - f_i(s,0)| + |f_i(s,0)|)\, ds \\
\leq & |\varphi(t_0)| + \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha_i)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-\alpha_i-1} h_i(s) \mathcal{H}(\|u_s\|)\, ds \\
& + \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha_i)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-\alpha_i-1} |f_i(s,0)| \\
\leq & |\varphi(t_0)| + \lambda_A \mathcal{H}(\|u\|) + \lambda_B,
\end{aligned}
$$

lo cual muestra que $\mathcal{F}u$ es una función acotada en $I = [t_0, \infty)$. Teniendo en cuenta que $\varphi \in \mathcal{C}([t_0-\sigma, t_0], \mathbb{R})$, concluimos finalmente que $\mathcal{F}u \in \mathcal{BC}(\mathbb{R}_{t_0-\sigma})$; luego el operador $\mathcal{F}$ deja invariante el espacio funcional $\mathcal{BC}(\mathbb{R}_{t_0-\sigma})$.

Por otra parte, teniendo en cuenta la hipótesis (H_5), sabemos que existe $r_0 > 0$ de modo que se satisface (3.5). En tal caso, tenemos que $\mathcal{F}(B_{r_0}) \subset B_{r_0} \subset \mathcal{BC}(\mathbb{R}_{t_0-\sigma})$. Sean ahora $X \subset B_{r_0}$ un conjunto no vacío y $x, y \in B_{r_0}$ arbitrarios. Para $t > t_0$, tenemos luego que

$$
\begin{aligned}
|[\mathcal{F}u](t) - [\mathcal{F}v](t)| \leq & \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha_i)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-\alpha_i-1} |f_i(s,u_s) - f_i(s,v_s)|\, ds \\
\leq & \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha_i)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-\alpha_i-1} h_i(s) \mathcal{H}(\|u_s - v_s\|)\, ds \\
\leq & \lambda_A \mathcal{H}(\|u-v\|),
\end{aligned}
$$

de donde se sigue que

$$
\limsup_{t\to+\infty} \dim\left(\mathcal{F}(X)\right)(t) \leq \lambda_A \mathcal{H}\Big(\limsup_{t\to+\infty} \dim X(t) \Big). \tag{3.7}
$$

Sean ahora $T > t_0$ fijo, $\varepsilon > 0$ dado, $u \in X$ y $t_1 < t_2 \in (t_0, T]$ tales que $|t_1 - t_2| < \varepsilon$. Así pues, teniendo en cuenta nuestras hipótesis, concluimos que

$$
\begin{aligned}
& |[\mathcal{F}u](t_2) - [\mathcal{F}u](t_1)| \leq \\
& \qquad \leq \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha_i)} \Big| \int_{t_0}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-\alpha_i-1} f_i(s,u_s)\, ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad\qquad - \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-\alpha_i-1} f_i(s,u_s)\, ds \Big| \\
&\le \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha_i)} \Big[\int_{t_0}^{t_1} |(t_1 - s)^{\alpha-\alpha_i-1} - (t_2 - s)^{\alpha-\alpha_i-1}| |f_i(s,u_s)|\, ds \\
&\qquad\qquad + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-\alpha_i-1} |f_i(s,u_s)|\, ds \Big] \\
&\le \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha_i)} \Big[\int_{t_0}^{t_1} |(t_1 - s)^{\alpha-\alpha_i-1} - (t_2 - s)^{\alpha-\alpha_i-1}| |f_i(s,u_s)|\, ds \\
&\qquad\qquad + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-\alpha_i-1} \big(h_i(s)\mathcal{H}(\|u_s\|) + |f_i(s,0)|\big)\, ds \Big] \\
&\le \sum_{i=0}^{m} \frac{\omega_1^T(t_i,\alpha_i,\varepsilon) + \omega_2^T(f_i,\alpha_i,\varepsilon)}{\Gamma(\alpha-\alpha_i)} + \lambda_A \mathcal{H}\Big(\omega_{t_0-\sigma}^T(u,\varepsilon)\Big),
\end{aligned}
$$

para cada $u \in X \subset B_{r_0}$, donde hemos empleado la siguiente notación:

$$
\begin{aligned}
\omega_1^T(f_i,\alpha_i,\varepsilon) &= \sup \Big\{ \int_{t_0}^{t_1} |(t_1 - s)^{\alpha-\alpha_i-1} - (t_2 - s)^{\alpha-\alpha_i-1}| |f_i(s,u_s)|\, ds : \\
&\qquad\qquad t_1, t_2 \in [t_0 - \sigma, T],\ |t_1 - t_2| < \varepsilon,\ \|u\| \le r_0 \Big\}, \\
\omega_2^T(f_i,\alpha_i,\varepsilon) &= \sup \Big\{ \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-\alpha_i-1} \big(h_i(s)\mathcal{H}(\|u_s\|) + |f_i(s,0)|\big)\, ds : \\
&\qquad\qquad t_1, t_2 \in [t_0 - \sigma, T],\ |t_1 - t_2| < \varepsilon \Big\}.
\end{aligned}
$$

Teniendo en cuenta ahora que, para $i \in \mathbb{N}_0$, $0 \le i \le m$, la función $f_i(s,u_s)$ es uniformemente continua en el conjunto $[t_0 - \sigma, t_0] \times B_{r_0}$, deducimos que

$$
\omega_{t_0-\sigma}^T(\mathcal{F}(X)) \le \lambda_A \mathcal{H}\big(\omega_{t_0-\sigma}^T(X)\big),
$$

desigualdad que junto con (3.7) y la condición de subaditividad sobre la función $\mathcal{H}$, nos permite concluir que

$$
\begin{aligned}
\mu(\mathcal{F}(X)) &= \omega_{t_0-\sigma}(\mathcal{F}(X)) + \limsup_{t\to+\infty} \operatorname{dim}(\mathcal{F}(X))(t) \\
&\le \lambda_A \mathcal{H}(\omega_{t_0}(X)) + \lambda_A \mathcal{H}\Big(\limsup_{t\to+\infty} \operatorname{dim}(\mathcal{F}(X))(t) \Big) \\
&\le \lambda_A \mathcal{H}(\mu(X)). \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

Ahora bien, dado que la aplicación μ considerada en (3.4) define una medida de no compacidad en el conjunto $\mathcal{BC}(\mathbb{R}_{t_0-\sigma})$, la desigualdad anterior junto con el Teorema 3.9 nos permiten afirmar la existencia de al menos una solución del problema de valor inicial (3.1) en el espacio $\mathcal{BC}(\mathbb{R}_{t_0-\sigma})$.

Para probar que todas las soluciones del problema de valor inicial (3.1) son uniformemente localmente atractoras en el sentido de la Definición 3.10 anterior, sea $B_{r_0}^1 = \operatorname{conv}\mathcal{F}(B_{r_0})$, $B_{r_0}^2 = \operatorname{conv}\mathcal{F}(B_{r_0}^2)$ y así sucesivamente, donde B_{r_0} es la bola cerrada de centro $0 \in \mathcal{BC}(\mathbb{R}_{t_0-\sigma})$ y radio r_0. Observemos entonces que $B_{r_0}^1 \subset B_{r_0}$ y $B_{r_0}^{n+1} \subset B_{r_0}^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, siendo $(B_{r_0}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos cerrados, convexos y no vacíos. Además, en virtud de (3.8), tenemos que

$$\mu(B_{r_0}^n) \leq {\lambda_A}^n \,\mathcal{H}(\mu(B_{r_0})), \quad \text{para todo } \ n \in \mathbb{N}.$$

Teniendo ahora en cuenta la hipótesis (H_4) y que $\mu(B_{r_0}) \geq 0$, deducimos finalmente que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_{r_0}^n) = 0.$$

Por tanto, de acuerdo con la condición (f) de la Definición 3.6 anterior, el conjunto

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{r_0}^n$$

debe ser no vacío, acotado, cerrado y convexo. Además, el conjunto B es invariante por el operador $\mathcal{F}$, que es continuo en tal conjunto.

Así pues, teniendo en cuenta que $B \in \ker(\mu)$ y recordando la caracterización de $\ker(\mu)$, concluimos finalmente que todas las soluciones del problema de valor inicial (3.1) son uniformemente localmente atractoras en el sentido de la Definición 3.10 anterior. $\square$

Nota 3.4. El Teorema 3.11 que acabamos de probar asegura la existencia de soluciones atractoras en el sentido de la Definición 3.2 anterior para el problema de valor inicial (3.1).

3.1.3. Algunos ejemplos concretos

Finalizaremos esta sección mostrando un par de ejemplos concretos que ilustrarán los resultados teóricos obtenidos anteriormente.

Consideremos en primer lugar el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{C}}D^{1/2}u(t) = {}^{\mathrm{C}}D^{1/3}\big((s+1)^{-1/2}\exp(-\operatorname{sen} u(s-1))\big)(t) & \\ \qquad\qquad + \operatorname{sen}\dfrac{u(t-1)}{3}\big(|u(t-1)|+t+1\big)^{-4/5}, & t > 0, \\ u(t) = t\exp(-t), & t \in [-1,0]. \end{cases} \tag{3.9}$$

La hipótesis (H_0) se satisface claramente. Veamos que también se cumple (H_1). En efecto, dado que $u(0)=0$, para $t>0$ tenemos que

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_0^t (t-s)^{-1/2}\operatorname{sen}\frac{u(s-1)}{3}\left(|u(s-1)|+s+1\right)^{-4/5}ds\\
&+\frac{1}{\Gamma(1/6)}\int_0^t (t-s)^{-5/6}(s+1)^{-1/2}\exp(-\operatorname{sen}u(s-1))\,ds\Big| \leq\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_0^t (t-s)^{-1/s}s^{-4/5}\,ds+\frac{1}{\Gamma(1/6)}\int_0^t (t-s)^{-5/6}s^{-1/2}\,ds\\
&= \frac{t^{-3/10}}{\Gamma(1/2)}\int_0^1 (1-s)^{-1/2}s^{-4/5}\,ds+\frac{t^{-1/3}}{\Gamma(1/6)}\int_0^1 (1-s)^{-5/6}s^{-1/2}\,ds. \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Por otra parte, recordando la definición de la función Beta [1], para $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^+$, se tiene que

$$\int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)^{\beta-1}\,ds=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

identidad que junto con (3.10) implica que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_0^t (t-s)^{-1/2}\operatorname{sen}\frac{u(s-1)}{3}\left(|u(s-1)|+s+1\right)^{-4/5}ds\\
&\quad+\frac{1}{\Gamma(1/6)}\int_0^t (t-s)^{-5/6}(s+1)^{-1/2}\exp(-\operatorname{sen}u(s-1))\,ds\leq\mathcal{H}(t),
\end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{H}(t)=\frac{\Gamma(1/5)}{\Gamma(7/10)}t^{-3/10}+\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(2/3)}t^{-1/3},\quad \text{para cada } t>0,$$

es una función estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^+$; luego ahora es claro que se satisface la hipótesis (H_1).

Finalmente, veamos que también se cumple la condición (H_2). Sea para ello $\beta\in(0,\min\{1/2,1/6\})$. Tenemos luego que

$$\int_0^\infty\left(\operatorname{sen}\frac{u(s-1)}{3}\left(|u(s-1)|+s+1\right)^{-4/5}\right)ds\leq\int_0^\infty (s+1)^{-8}\,ds=\frac{1}{7},$$

lo cual prueba que

$${}_0(s,u_s)=\operatorname{sen}\frac{u(s-1)}{3}\left(|u(s-1)|+s+1\right)^{-4/5}\in\mathsf{L}^{1/\beta}([0,+\infty),\mathcal{C}([-1,0],\mathbb{R})).$$

De modo similar, para $f_1(s,u_s) = (s+1)^{-1/2}\exp(-\operatorname{sen} u(s-1))$, se prueba que

$$\int_0^{\infty} \Big((s+1)^{-1/2}\exp(-\operatorname{sen} u(s-1))\Big)^{1/\beta} ds \leq \int_0^{\infty} (s+1)^{-5}\, ds = \frac{1}{4},$$

lo cual prueba que $f_1(s,u_s) \in \mathsf{L}^{1/\beta}([0,\infty), \mathcal{C}([-1,0],\mathbb{R}))$.

Por tanto, se satisfacen todas la hipótesis del Teorema 3.5 anterior, luego podemos asegurar la existencia de al menos una solución atractora para el problema de valor inicial (3.9).

En lo que sigue, indicaremos un ejemplo de ecuación diferencial multi-término que muestra la utilidad del Teorema 3.11 anterior. Consideremos el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{C}}Du(t) = {}^{\mathrm{C}}D^{1/3}\Big(\dfrac{\operatorname{sen} u(s-\pi/2)}{2\pi(s+3)^{2/3}}\Big)(t) \\ \qquad\qquad + {}^{\mathrm{C}}D^{1/2}\Big(\dfrac{\cos(u-\pi/2)}{2\pi(s+2)^{1/2}}\Big)(t), \quad t>0, \\ u(t) = \dfrac{t}{(t+3)^2}, \qquad\qquad\qquad t\in[\pi/2,0]. \end{cases} \tag{3.11}$$

La condición (H_3) se cumple claramente. En efecto, basta considerar

$$h_1(t) = \frac{t^{-2/3}}{2\pi}, \quad h_2(t) = \frac{t^{-1/2}}{2\pi} \quad \text{y} \quad \mathcal{H}(t) = t.$$

Para probar que la condición (H_4) también se satisface, basta observar que

$$A_1 = \sup_{t\in[0,+\infty)} \frac{1}{2\pi}\int_0^t (t-s)^{-1/2}s^{-2/3}\, ds = \frac{\Gamma(1/3)\Gamma(2/3)}{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{3}} < \infty,$$
$$A_2 = \sup_{t\in[0,+\infty)} \frac{1}{2\pi}\int_0^t (t-s)^{-1/2}s^{-1/2}\, ds = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/2)}{2\pi} = \frac{1}{2} < \infty.$$

Luego tenemos que

$$\lim_{n\to+\infty} {\lambda_A}^n\, \mathcal{H}^n(t) = \lim_{n\to+\infty} {\lambda_A}^n\, t = 0, \quad \text{para todo } t>0,$$

donde

$$\lambda_A = \frac{1}{\sqrt{3}\Gamma(2/3)} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \approx 0.7084 < 1.$$

Finalmente, para la condición (H_5), se tiene que

$B_1 = 0 \quad$ y

$$B_2 = \sup_{t\in[0,+\infty)} \int_0^t \frac{(t-s)^{-1/2}}{2\pi(s+2)^{1/2}}\, ds \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{t\in[0,+\infty)} \int_0^t (t-s)^{-1/2} s^{-1/2}\, ds = \frac{1}{2},$$

de donde se sigue que existe $r_0 > 0$ tal que

$$\sup_{t\in[-1,0]} \left| \frac{t}{(t+3)^2} \right| + \lambda_A r_0 + \lambda_B \leq 0.25 + 0.8 r_0 + 0.5 \leq r_0;$$

basta considerar $r_0 \geq 3.75$.

Por tanto, dado que se cumplen todas las hipótesis del Teorema 3.11, podemos concluir la existencia de solución uniformemente localmente atractora para el problema de valor inicial (3.11).

Nota 3.5. Conviene notar que concluir la existencia de solución para el problema de valor inicial (3.11) empleando el Teorema 3.5 parece una ardua tarea, pues encontrar una función $\mathcal{H}$ estrictamente decreciente que se anule en el infinito de modo que se cumpla (H_1) no es, en principio, sencillo.

3.2. Ecuaciones fraccionarias de Pearson

En 1895, K. Pearson [64] identificó cuatro tipos de distribuciones (numeradas de I a IV), que se sumaban a la distribución normal (originalmente conocida como Tipo V). Sus investigaciones estaban motivadas por la búsqueda de una familia de curvas con aplicaciones en la teoría de evolución.

Una densidad de Pearson ρ es cualquier solución de la ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$\frac{1}{\rho(x)} \rho'(x) = -\frac{a+x}{c_0 + c_1 x + c_2 x}.$$

En [46] puede consultarse información detallada sobre densidades de Pearson. El grafo de las soluciones de la ecuación diferencial anterior varía notablemente en función de los parámetros reales a, c_0, c_1 y c_2. No obstante, K. Pearson clasificó tales soluciones en distintos tipos. En el trabajo original de Pearson [64] o en referencias más modernas como [46], puede consultarse más información sobre tal clasificación.

Algunas soluciones ρ de la ecuación diferencial anterior han sido ampliamente estudiadas. En particular, la distribución normal

$$\rho_N(x) = \frac{\exp(-x^2)}{\sqrt{\pi}}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.12}$$

la distribución gamma

$$\rho_G(x,a) = \frac{x^\alpha \exp(-x)}{\Gamma(a+1)}, \quad a > -1,\ x > 0, \tag{3.13}$$

y la distribución beta

$$\rho_B(x,a,b) = \frac{x^a(1-x)^b\Gamma(a+b+2)}{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}, \quad a,\, b > -1,\ x \in (-1,1), \tag{3.14}$$

gozan de numerosas aplicaciones en diversas áreas de las matemáticas, especialmente en estadística y probabilidad.

Las tres densidades mencionadas anteriormente tienen momentos finitos de cualquier orden; esto es,

$$\int_I x^n \rho(x)\, dx < \infty, \quad \text{para todo } \ n \in \mathbb{N}_0,$$

donde $I \subset \mathbb{R}$ es el conjunto soporte respectivo. Por otra parte, en el ámbito de la Teoría de polinomios ortogonales de una variable [33, 45, 77], la ecuación de Pearson para la función de peso $\rho(x)$ viene dada por (véase [62, Capítulo 1])

$$\left(\sigma \cdot \rho\right)'(x) = \tau(x)\rho(x), \tag{3.15}$$

donde σ y τ son polinomios de grado, a lo sumo, uno y dos respectivamente. Para los casos mencionados anteriormente, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\rho_N'(x)}{\rho_N(x)} &= -2x, \quad \sigma(x) = 1, \quad \tau(x) = -2x; \\ \frac{\rho_G'(x)}{\rho_G(x)} &= \frac{a-x}{a}, \quad \sigma(x) = x, \quad \tau(x) = a+1-x; \\ \frac{\rho_B'(x,a,b)}{\rho_B(x,a,b)} &= \frac{a-(a+b)x}{x(1-x)}, \quad \sigma(x) = x(1-x), \quad \tau(x) = 1+a-(a+b+2)x. \end{aligned}$$

Por otra parte, también son conocidas propiedades de transición límite entre las distribuciones mencionadas anteriormente. Así, para la las densidades beta y gamma, se tiene que

$$\lim_{b\to\infty} \frac{1}{b}\rho_B(x/b,a,b) = \rho_G(x,a); \tag{3.16}$$

mientras que para las densidades normal y gamma, es cierto que

$$\lim_{a\to\infty} \sqrt{a}\,\rho_G(a + x\sqrt{2a}, a) = \rho_N(x). \tag{3.17}$$

Las identidades (3.16) y (3.17) anteriores también están relacionadas con propiedades de transición límite entre familias de polinomios ortogonales. De hecho, en la literatura matemática uno puede encontrar diferentes pruebas de los resultados indicados anteriormente: basadas en el estudiando la ecuación diferencial (3.15), empleando la función generadora de momentos, partiendo del estudio asintótico de las funciones especiales involucradas, o empleando simplemente series de potencias. Notemos, por ejemplo, que la función $\rho_G(a+z\sqrt{2a},a)$ puede ser expresada como una serie de potencias del como

$$\rho_g(a+x\sqrt{2a},a)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}\frac{2^{n/2}a^{a-n/2}{}_1F_1(-n,a-n+1,a)}{\exp(a)\Gamma(a+1)}x^n$$

y dado que

$$\lim_{a\to\infty}\sqrt{a}\binom{a}{n}\frac{2^{n/2}a^{a-n/2}{}_1F_1(-n,a-n+1,a)}{\exp(a)\Gamma(a+1)}=\frac{(-1)^{n/2}((-1)^n+1)}{2\sqrt{2\pi}(n/2)!}$$

concluimos la veracidad de (3.17).

En esta sección estaremos interesados en resolver tres ecuaciones diferenciales de orden fraccionario de la forma

$$A(x^\alpha)^{\mathrm{C}}D^\alpha\rho(x)=B(x^\alpha)\rho(x),\quad 0<\alpha<1, \tag{3.18}$$

para ciertos polinomios $A(x)$ y $B(x)$ dados. Obtendremos así ciertas generalizaciones de las distribuciones beta, gamma y normal. Notemos inicialmente que la ecuación diferencial de orden fraccionario (3.18) anterior converge formalmente a la ecuación diferencial ordinaria (3.15) cuando $\alpha\to 1^-$.

3.2.1. Densidades fraccionarias de Pearson

Densidad normal fraccionaria

Estudiemos inicialmente la siguiente ecuación fraccionaria de Pearson

$${}^{\mathrm{C}}D^\alpha\rho(a,\alpha)=-2x^\alpha\,\rho(x,\alpha),\quad 0<\alpha<1,\;\; x>0. \tag{3.19}$$

Considerando entonces la serie formal de potencias

$$\rho(x,\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\alpha)x^{n\alpha},\quad x>0,$$

tenemos que

$${}^{\mathrm{C}}D^\alpha\rho(x,\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}x^{n\alpha}\frac{\Gamma(1+\alpha(n+1))}{\Gamma(1+n\alpha)}.$$

Por tanto, obtenemos la siguiente fórmula de recurrencia para los coeficientes a_n, $n \in \mathbb{N}_0$

$$a_n = -2a_{n-2}\frac{\Gamma(\alpha(n-1)+1)}{\Gamma(\alpha n+1)}, \quad \text{para cada } \ n \in \mathbb{N}, \tag{3.20}$$

que puede resolverse fácilmente teniendo en cuenta las condiciones iniciales $a_{-1} = 0$ y $a_0 = 1$. Concretamente, se obtiene que para $x > 0$,

$$\rho(x,\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2}(-2)^{n/2}x^{n\alpha}\frac{\prod_{j=0}^{n/2-1}\Gamma(1+\alpha(1+2j))}{\prod_{j=0}^{n/2}\Gamma(1+2\alpha j)}. \tag{3.21}$$

Para $x < 0$, definimos $\rho(x,\alpha)$ por simetría. Observemos entonces que si hacemos $\alpha \to 1^-$ en la relación de recurrencia anterior, obtenemos que

$$a_n = -2\frac{a_{n-2}}{n}, \quad \text{para cada } \ n \in \mathbb{N}; \tag{3.22}$$

esto es, la relación de recurrencia para los coeficientes de la expansión en serie de potencias

$$\rho_N(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

donde $\rho_N(x)$ viene dada por (3.12). Notemos además que la relación de recurrencia (3.22) admite otra solución, que daría lugar a la función

$$g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\exp(-x^2)\operatorname{erfi}(x), \quad x \in \mathbb{R};$$

en nuestro caso la unicidad de solución es una consecuencia de la condición inicial $\rho(0) = 1$ propia del caso gaussiano. De forma similar, en el caso fraccionario la relación de recurrencia (3.20) podría dar lugar a otra solución distinta de la mostrada anteriormente.

Densidad gamma fraccionaria

En este epígrafe asumiremos siempre que $a > 0$. En tal caso, la solución de la ecuación diferencial fraccionaria

$$x^{\alpha\,\mathrm{C}}D^{\alpha}\rho(x,a,\alpha) = \left(\frac{\Gamma(1+a)}{\Gamma(1+a-\alpha)} - x^{\alpha}\right)\rho(x,a,\alpha), \quad x > 0, \tag{3.23}$$

puede ser obtenida considerando la siguiente serie formal de potencias

$$\rho(a,a,\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(a,\alpha)x^{n\alpha+a}.$$

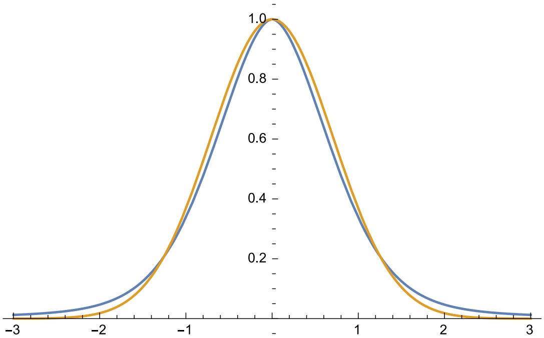

Figura 3.1: Gráficas de la suma parcial considerada a partir de (3.21) y definida para $x < 0$ por simetría con 100 sumandos y $\alpha = 9/10$ (azul) y de la función $\exp(-x^2)$ (en color naranja) para $x \in [-3, 3]$.

Así, a partir de la ecuación diferencial (3.23), obtenemos la siguiente fórmula de recurrencia para los coeficientes $b_n(a, \alpha)$,

$$b_n(a,\alpha) = \frac{b_{n-1}(a,\alpha)}{\dfrac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(1+a-\alpha)} - \dfrac{\Gamma(1+a+n\alpha)}{\Gamma(1+a+(n-1)\alpha)}}. \tag{3.24}$$

Resolviendo ahora la relación de recurrencia anterior, obtenemos la siguiente fórmula explícita para los coeficientes $b_n(a, \alpha)$

$$b_n(a,\alpha) = \frac{b_0(\alpha)}{\prod_{j=1}^{n} \dfrac{\Gamma(1+a)}{\Gamma(1+a-\alpha)} - \dfrac{\Gamma(1+a+j\alpha)}{\Gamma(1+a+(j-1)\alpha)}}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, obtenemos finalmente que

$$\rho(x,a,\alpha) = \tag{3.25}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_0(a,\alpha)}{\prod_{j=1}^{n} \dfrac{\Gamma(1+a)}{\Gamma(1+a-\alpha)} - \dfrac{\Gamma(1+a+j\alpha)}{\Gamma(1+a+(j-1)\alpha)}} x^{n\alpha+a}, \quad x > 0.$$

Conviene indicar que si en la relación de recurrencia (3.24) anterior hacemos $\alpha \to 1^-$, obtenemos entonces

$$b_n(a) = -\frac{b_{n-1}(a)}{n},$$

que es la relación de recurrencia que define los coeficientes b_n de la serie de potencias

$$\rho_G(x,a) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+a},$$

donde $\rho_G(x)$ viene dada por (3.13). Notemos también que la ecuación diferencial fraccionaria (3.23) converge formalmente a la ecuación diferencial ordinaria

$$x\, y'(x) = (a-x)y(x)$$

cuando $\alpha \to 1^-$, ecuación diferencial de la que $\rho_G(x)$ es solución.

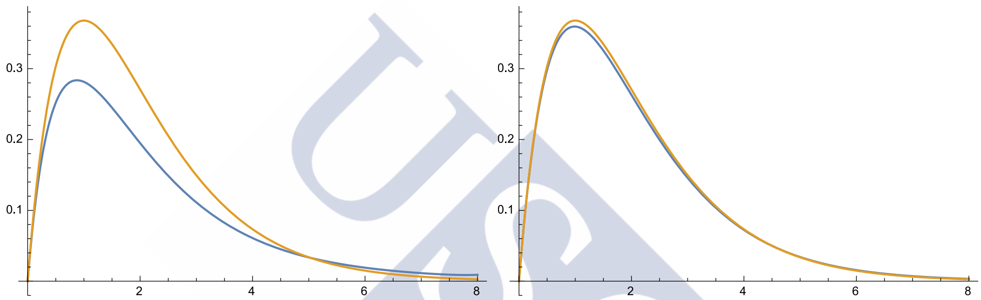

Figura 3.2: Gráficas de las sumas parciales definidas a partir de (3.25) con 30 sumandos (en azul) y de la función $x^a \exp(-x)$ (en color naranja) para $x \in [0,8]$, $a = 1$, y $b_0(a;\alpha) = 1$. En la figura de la izquierda se considera $\alpha = 9/10$, mientras que para la figura de la derecha $\alpha = 99/100$.

Densidad beta fraccionaria

Asumamos ahora que $a, b > 0$. En tal caso, la solución de la ecuación diferencial fraccionaria

$$x^\alpha(1-x^\alpha)\,{}^{\mathrm{C}}D^\alpha \rho(x,a,b,\alpha) = \\ = \Big(\frac{\Gamma(a+b+1)}{\Gamma(a-\alpha+1)} - \frac{\Gamma(a+b+1)}{\Gamma(a-\alpha+b+1)}x^\alpha\Big), \quad x>0 \tag{3.26}$$

puede ser obtenida partiendo de la serie formal de potencias

$$\rho(x,a,b,\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(a,b,\alpha) x^{n\alpha+a} \tag{3.27}$$

Obtenemos luego, la siguiente relación de recurrencia para los coeficientes $c_n(a,b,\alpha)$ de la serie anterior,

$$c_n(a,b,\alpha) = c_{n-1}(a,b,\alpha)\frac{\Gamma(a-\alpha+1)\Gamma(a+\alpha(n-1)+1)}{\Gamma(a-\alpha+b+1)\Gamma(a+\alpha(n-2)+1)}$$
$$\times \frac{\Gamma(a+b+1)\Gamma(a+\alpha(n-2)+1) - \Gamma(a-\alpha+b+1)\Gamma(a+\alpha(n-1)+1)}{\Gamma(a+1)\Gamma(a+\alpha(n-1)+1) - \Gamma(a-\alpha+1)\Gamma(a+\alpha n+1)}$$

que cuando $\alpha \to 1^-$ converge a

$$c_n(a,b) = \frac{1}{n}(n-b-1)c_{n-1}(a,b), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N},$$

es decir, la relación de recurrencia que satisfacen los coeficientes de la serie de potencias

$$x^a(1-x)^b = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(a,b)x^n.$$

Nuevamente, conviene indicar que, cuando $\alpha \to 1^-$, la expresión (3.26) converge formalmente hacia la ecuación diferencial ordinaria que define a la densidad beta indicada en (3.14).

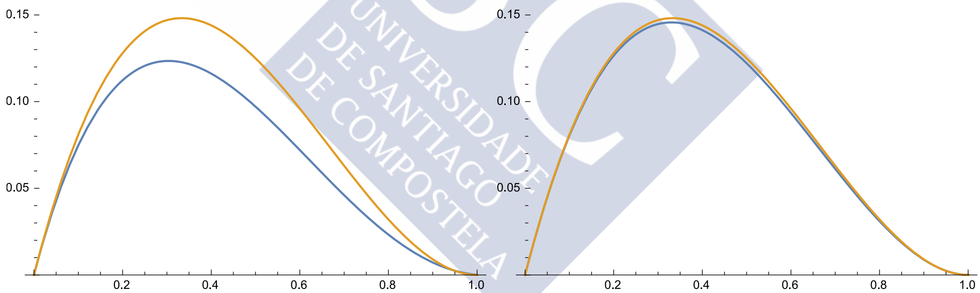

Figura 3.3: Gráficas de las sumas parciales definidas a partir de (3.27) con 30 sumandos (en azul) y de la función $x^a(1-x)^b$ (en color naranja) para $x \in [0,1]$ y $a = 1$, $b = 2$. En la figura de la derecha se considera $\alpha = 9/10$, mientras que la de la izquierda $\alpha = 99/100$.

3.2.2. Transiciones límite

En este epígrafe mostraremos transiciones límite entre las densidades fraccionarias de Pearson previamente presentadas. Obtendremos así propiedades análogas a las mencionadas (3.16) en (3.17).

Teniendo en cuenta las expresiones obtenidas para los coeficientes $c_n(a,b,\alpha)$ y $b_n(a,\alpha)$ respectivamente, concluimos la siguiente identidad

$$\lim_{b\to\infty} b^\alpha \, \rho\Big(\frac{x}{b}, a, b, \alpha\Big) = \rho(x,a,\alpha), \tag{3.28}$$

que relaciona la densidad beta fraccionaria de orden $\alpha \in (0,1)$ con la densidad gamma fraccionaria de orden $\alpha \in (0,1)$. Claramente, la igualdad anterior es una generalización al caso fraccionario de la propiedad (3.16).

Teniendo en cuenta la identidad (3.17), es natural considerar la siguiente modificación de la densidad gamma

$$\tilde{\rho}(x,a) = \rho_G(a, +\sqrt{2a}\,x) = \frac{(a+\sqrt{2a}\,x)^a \exp(-a-\sqrt{2a}\,x)}{\Gamma(a+1)}.$$

En tal caso, los coeficientes de la serie de potencias

$$\tilde{\rho}(x,a) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{b}_n(a) x^n$$

vienen dados por

$$\tilde{b}_n(a) = \binom{a}{n} \frac{2^{n/2} a^{a-n/2} \exp(-a)}{\Gamma(a+1)} \, {}_1F_1(-n, 1+a-n, a), \tag{3.29}$$

de forma que

$$\lim_{a\to\infty} \sqrt{a}\,\tilde{b}_n(a) = a_n, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N},$$

donde, de acuerdo con (3.17), a_n es el n-ésimo coeficiente de la serie de potencias

$$\rho(x) = \frac{\exp(-x^2)}{\sqrt{2\pi}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{\sqrt{2\pi}\, n!}.$$

Observemos que los tres primeros coeficientes en (3.29), vienen dados por

$$\tilde{b}_0(a) = \frac{a^a \exp(-a)}{\Gamma(a+1)}, \quad \tilde{b}_1(a) = 0 \quad \text{y} \quad \tilde{b}_2(a) = -\frac{a^a \exp(-a)}{\Gamma(a+1)}.$$

Por otra parte, la función $\tilde{\rho}(x,a)$ es solución de la siguiente ecuación diferencial de Pearson

$$(\sqrt{a} + \sqrt{2}\,x) \frac{d}{dx} \tilde{\rho}(x,a) = -2\sqrt{a}\,x\,\tilde{\rho}(x,a).$$

Motivados por tal hecho, planteamos la siguiente ecuación diferencial de orden fraccionario

$$\Big(\frac{\Gamma(\sqrt{a}+1)}{\Gamma(-\alpha+\sqrt{a}+1)}+\sqrt{2}\,x^{\alpha}\Big)\,{}^{\mathrm{C}}D^{\alpha}\tilde{\rho}(x,a,\alpha) = -\frac{2\Gamma(\sqrt{a}+1)}{\Gamma(-\alpha+\sqrt{a}+1)}\,x^{\alpha}\,\tilde{\rho}(x,a,\alpha) \tag{3.30}$$

y consideramos la serie de potencias de una de sus soluciones

$$\tilde{\rho}(x,a,\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{b}_n(a,\alpha)x^{n\alpha}.$$

En tal caso, partiendo de la condición inicial

$$\tilde{b}_0(a,\alpha)=\frac{a^a\,\exp(-a)}{\Gamma(a+1)},$$

así escogida con el objetivo de simplificar cierto paso al límite cuando $\alpha\to 1^-$ posterior, concluimos que los primeros términos de la sucesión $(\tilde{b}_n(a,\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ vienen dados por

$$\begin{aligned}
\tilde{b}_0(a,\alpha)&=\frac{a^a\,\exp(-a)}{\Gamma(a+1)},\\
\tilde{b}_1(a,\alpha)&=0,\\
\tilde{b}_2(a,\alpha)&=-\frac{2a^a\,\exp(-a)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(a+1)\Gamma(2\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

Además, se satisface la siguiente relación de recurrencia

$$\begin{aligned}
\tilde{b}_n(a,\alpha)=&-\frac{\Gamma(\alpha(n-1)+1)}{\Gamma(\alpha n+1)}\\
&\times\Big(\frac{\sqrt{2}\,\tilde{b}_{n-1}(a,\alpha)\Gamma(-\alpha+\sqrt{a}+1)\Gamma(\alpha(n-1)+1)}{\Gamma(\sqrt{a}+1)\Gamma(\alpha(n-2)+1)}+2\tilde{b}_{n-2}(a,\alpha)\Big).
\end{aligned}$$

con $\tilde{b}_1(a,\alpha)=0$ y siendo $\tilde{b}_0(a,\alpha)$ una constante normalizadora.

Ahora es fácil probar por inducción que

$$\lim_{\alpha\to 1^-}\tilde{b}_n(a,\alpha)=\tilde{b}_n(a),\quad \text{par todo } n\in\mathbb{N}.$$

Finalmente, también es sencillo concluir la siguiente relación entre los coeficientes $\tilde{b}_n(a,\alpha)$ y $\tilde{a}_n(\alpha)$,

$$\lim_{a\to\infty}\sqrt{a}\,\tilde{\rho}(x,a,\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,a_n(\alpha),$$

donde el factor $1/\sqrt{2\pi}$ puede ser ignorado simplemente redefiniendo el coeficiente inicial $\tilde{b}_0(a,\alpha)$. Por tanto, obtenemos la siguiente relación límite entre las funciones $\tilde{\rho}(x,a,\alpha)$ solución de (3.30) y la densidad normal fraccionaria $\rho(a,\alpha)$ introducida en (3.21),

$$\lim_{a\to\infty} \sqrt{a}\,\tilde{\rho}(x,a,\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\rho(x,\alpha),$$

que es la generalización de (3.17) en el caso fraccionario.

3.2.3. Casi-polinomios ortogonales y densidades fraccionarias

Definición 3.12. *Sea $\beta > 0$. Nos referiremos a un polinomio en x^β,*

$$P_n(x^\beta) = P_{n,\beta} = \sum_{i=0}^{n} a_{n,i} x^{i\beta}, \quad x \in \mathbb{R},$$

como un casi-polinomio *de orden $n \in \mathbb{N}$ con potencia β.*

Para $\alpha \in (0,1]$, en [68] se ha estudiado el problema de la evaluación numérica de

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 f(s)(1-s)^{\alpha-1}\,ds$$

empleando el concepto de ortogonalidad en el siguiente sentido

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 P_{n,\beta}(s,\alpha)P_{m,\beta}(s,\alpha)(1-s)^{\alpha-1}\,ds = 0, \qquad n \neq m.$$

Sea $\rho(x,\alpha)$ la densidad gamma fraccionaria o la densidad beta fraccionaria. A continuación, presentamos un algoritmo que nos permitirá obtener la sucesión de casi-polinomios ortogonales respecto de $\rho(x,\alpha)$ en el soporte correspondiente $I \subset \mathbb{R}$; esto nos permitirá generalizar los resultados recientemente presentados en [76] al caso fraccionario. Más exactamente, en el caso de la densidad gamma fraccionaria se tiene que $\rho(x,\alpha) = \rho(x,a,\alpha)$ e $I = [0,\infty)$, mientras que para el caso de la densidad beta fraccionaria será $\rho(x,\alpha) = \rho(x,a,b,\alpha)$ e $I = (0,1)$.

Definamos

$$\mathrm{X}_n(\beta) = (1, x^\beta, x^{2\beta}, \ldots, x^{n\beta})^T, \quad \text{para cada } \ n \geq 0,$$

y

$$m_n(\alpha,\beta) = \int_I x^{n\beta}\rho(x,\alpha)\,dx, \quad \text{para cada } \ n \geq 0.$$

Introducimos también la matriz $\mathrm{M}_n(\alpha,\beta)$ simétrica y definida positiva, dada por

$$\mathrm{M}_n(\alpha,\beta) = \int_I \mathrm{X}_n(\beta)(\mathrm{X}_n(\beta))^T \rho(x,\alpha)\,dx, \quad n \geq 0.$$

Conviene indicar que la matriz $\mathrm{M}_n(\alpha,\beta)$ es una matriz real de dimensiones $(n+1)\times(n+1)$. Sea ahora

$$\mathrm{M}_n(\alpha,\beta) = \mathrm{L}_n(\alpha,\beta)(\mathrm{L}_n(\alpha,\beta))^T$$

la descomposición de Cholesky [43] de $\mathrm{M}_n(\alpha,\beta)$, donde $\mathrm{L}_n(\alpha,\beta)$ es una matriz triangular inferior con entradas no negativas en su diagonal. Definamos además

$$\mathrm{T}_n(\alpha,\beta) = (\mathrm{L}_n(\alpha,\beta))^{-1} \tag{3.31}$$

y sea $\mathrm{P}_n(\alpha,\beta)$ el vector de $n+1$ casi-polinomios dado por

$$\mathrm{P}_n(\alpha,\beta) = \mathrm{T}_n(\alpha,\beta)\mathrm{X}_n(\beta). \tag{3.32}$$

Tenemos entonces el siguiente resultado.

Teorema 3.13. *El vector formado por $n+1$ polinomios $\mathrm{P}_n(\alpha,\beta)$ introducido en (3.32) satisface que*

$$\int_I \mathrm{P}_n(\alpha,\beta)(\mathrm{P}_n(\alpha,\beta))^T \rho(x,\alpha)\,dx = \mathrm{I}_{n+1}, \tag{3.33}$$

donde I_n es la matriz identidad de dimensión $n\times n$.

Demostración. Dado que

$$\begin{aligned}
&\int_I \mathrm{P}_n(\alpha,\beta)(\mathrm{P}_n(\alpha,\beta))^T \rho(x,\alpha)\,dx \\
&\qquad = \int_I \mathrm{T}_n(x,\alpha)\mathrm{X}_n(\beta)(\mathrm{X}_n(\beta))^T(\mathrm{T}_n(\alpha,\beta))^T \rho(x,\alpha)\,dx \\
&\qquad = \mathrm{T}_n(\alpha,\beta)\Big(\int_I \mathrm{X}_n(\beta)(\mathrm{X}_n(\beta))^T \rho(x,\alpha)\,dx\Big)(\mathrm{T}_n(\alpha,\beta))^T \\
&\qquad = \mathrm{T}_n(\alpha,\beta)\mathrm{M}_n(\alpha,\beta)(\mathrm{T}_n(\alpha,\beta))^T \\
&\qquad = \mathrm{T}_n(\alpha,\beta)\mathrm{L}_n(\alpha,\beta)(\mathrm{L}_n(\alpha,\beta))^T(\mathrm{T}_n(\alpha,\beta))^T
\end{aligned}$$

el resultado enunciado se concluye a partir de (3.31). □

Ejemplos numéricos y conjeturas sobre los ceros de los casi-polinomios

Consideremos ahora la función peso $\rho(x,a,b,\alpha)$ definida en (3.27) para el caso particular $\alpha = 1/2$, $a = 1$ y $b = 2$ y normalizada de modo que

$$\int_0^1 \rho(x,1,2,1/2)\,dx = 1.$$

Sea además $\beta = 1/2$ fijo. En tal caso, podemos aproximar la matriz

$$\mathrm{M}_3(1,2,1/2,1/2) = \mathrm{M}_3(1/2,1/2)$$

por

$$\mathrm{M}_3(1,2,1/2,1/2) = \begin{pmatrix} 1. & 0.522651 & 0.305996 & 0.194547 \\ 0.522651 & 0.305996 & 0.194547 & 0.131658 \\ 0.305996 & 0.194547 & 0.131658 & 0.0935493 \\ 0.194547 & 0.131658 & 0.0935493 & 0.0691131 \end{pmatrix},$$

con factor de Cholesky $\mathrm{L}_3(1,2,1/2,1/2) = \mathrm{L}_3(1/2,1/2)$

$$\mathrm{L}_3(1,2;1/2,1/2) = \begin{pmatrix} 1. & 0. & 0. & 0. \\ 0.522651 & 0.181198 & 0. & 0. \\ 0.305996 & 0.191053 & 0.0390292 & 0. \\ 0.194547 & 0.165443 & 0.061751 & 0.00893294 \end{pmatrix}.$$

Tenemos luego que el vector $\mathrm{P}_3(1,2,1/2,1/2) = \mathrm{P}_3(1/2,1/2)$ viene dado por

$$\mathrm{P}_3(1,2,1/2,1/2) = \begin{pmatrix} 1. \\ 5.51883\sqrt{x} - 2.88442 \\ 25.6218x - 27.0154\sqrt{x} + 6.27942 \\ 111.945x^{3/2} - 177.117x + 84.5384\sqrt{x} - 11.7656 \end{pmatrix},$$

satisface la relación de ortogonalidad indicada en (3.33).

De modo similar, se tiene que

$$\mathrm{P}_3(1,2,0.4,1/2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5.41862\sqrt{x} - 2.66051 \\ 24.7858x - 25.0858\sqrt{x} + 5.49757 \\ 107.31x^{3/2} - 164.694x + 75.4371\sqrt{x} - 9.92172 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathrm{P}_3(1,2,0.6,1/2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5.61306\sqrt{x} - 3.07125 \\ 26.3874x - 28.6843\sqrt{x} + 6.95742 \\ 116.164x^{3/2} - 188.006x + 92.4758\sqrt{x} - 13.4001 \end{pmatrix}.$$

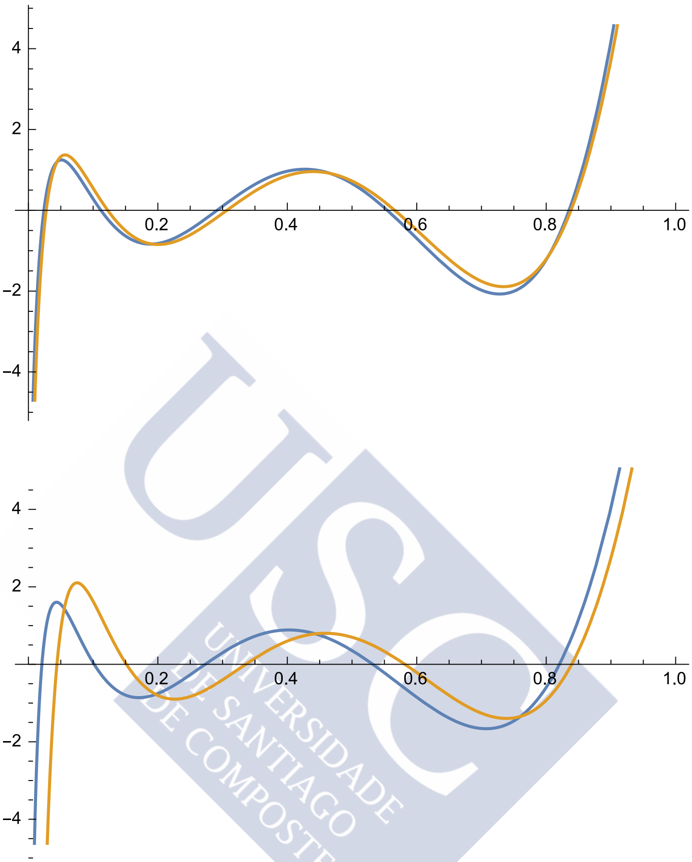

Figura 3.4: Gráficas de los casi-polinomios ortogonales respecto de la densidad beta fraccionaria con $n = 5$, $a = 1$ y $b = 2$.
En la figura de la izquierda, se considera $\alpha = \beta = 0.5$ (en azul) y $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.6$ (en naranja). Las raíces de los casi-polinomios anteriores son: 0.0208402, 0.101603, 0.273096, 0.532213 y 0.820418 para $\alpha = \beta = 0.5$; mientras que para $\alpha = 0.5$ y $\beta = 0.6$ son: 0.0275359, 0.122522, 0.306668, 0.566053 y 0.838286.
En la figura de la derecha, se considera $\alpha = 0.4$ y $\beta = 0.6$ (en azul) y $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.6$ (en naranja). Las raíces para $\alpha = 0.4$ y $\beta = 0.6$ son 0.0239517, 0.112001, 0.291514, 0.55457 y 0.835314.

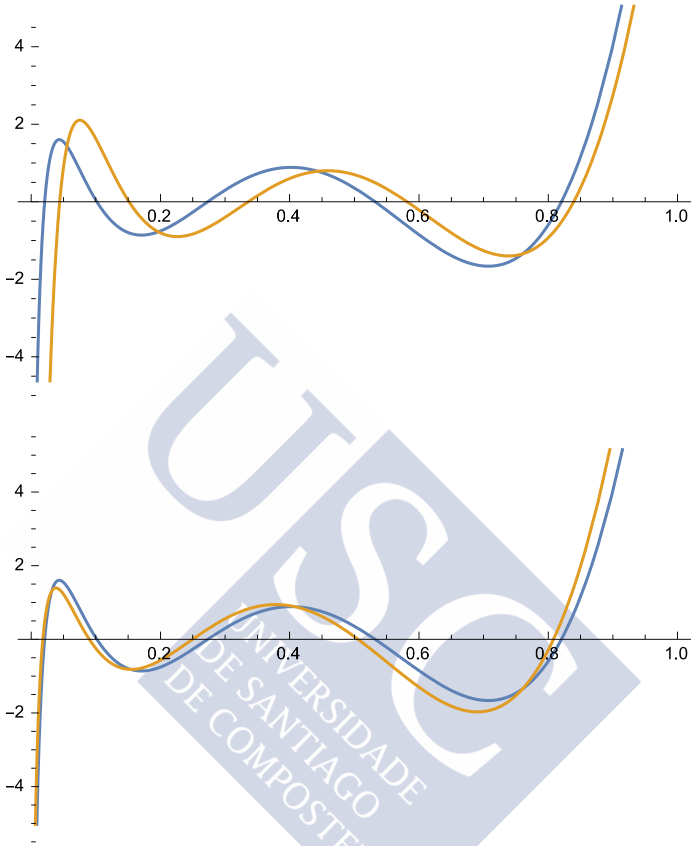

Figura 3.5: Gráficas de los casi-polinomios ortogonales respecto de la densidad beta fraccionaria con $n = 5$, $\alpha = \beta = 1/2$.
En la figura de la izquierda, se considera $a = 1$, $b = 2$ (en azul) y $a = 2$, $b = 2$ (en naranja). Las raíces de estos casi-polinomios son: 0.0208402, 0.101603, 0.273096, 0.532213, y 0.820418 para $a = 1$, $b = 2$; mientras que para $a = b = 2$ son: 0.0440961, 0.151432, 0.335739, 0.581802 y 0.839372.
En la figura de la derecha, se considera $a = 1$, $b = 2$ (en azul) y $a = 1$, $b = 3$ (en color naranja). Las raíces para $a = 1$ y $b = 3$ son 0.018028, 0.0899672, 0.249686, 0.505895, 0.808125.

Sea, para $m, n \in \mathbb{N}$ con $n \geq m$,

$$P_m(x, \alpha, \beta) = (\mathrm{P}_n(\alpha, \beta))_m.$$

Empleando los mismo argumentos que en [76] y el Teorema 3.13 anterior, concluimos que $P_m(x, \alpha, \beta)$ tiene exactamente m ceros reales distintos en I.

Empleando Mathematica [44] hemos realizado numerosos experimentos numéricos con el objetivo de aproximar los ceros de $P_m(x, \alpha, \beta)$. Para $\alpha, \beta \in (0, 1)$ las siguientes conjeturas podrían ser investigadas en trabajos futuros:

- los ceros de $P_m(x, \alpha, \beta)$ son funciones crecientes de α,
- los ceros de $P_m(x; \alpha, \beta)$son funciones crecientes de β;
- para la densidad beta fraccionaria:

  los ceros de $P_m(x, a, b; \alpha, \beta) = P_m(x; \alpha, \beta)$ son funciones crecientes de a,

  los ceros de $P_m(x; a, b; \alpha, \beta)$son funciones decrecientes de b;
- Para la densidad gamma fraccionaria, los ceros del casi-polinomio

  $$P_m(x; a; \alpha, \beta) = P_m(x; \alpha, \beta)$$

  son funciones crecientes de a.

Capítulo 4

Cálculo fraccionario y funciones periódicas

Las funciones periódicas juegan un papel fundamental en las matemáticas desde los importantes trabajos realizados por J. B. Fourier a principios del pasado siglo XIX. Así, en la actualidad, el estudio de la existencia de soluciones periódicas para ciertas ecuaciones diferenciales es uno de los temas o aspectos más interesantes de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales. Esto es debido, en parte, a las importantes implicaciones que tales soluciones tienen en diversas áreas de las matemáticas, desde las más puras hasta las más aplicadas; pero también al gran número de aplicaciones que de ellas se derivan, tanto en la física como en muchas otras disciplinas científicas.

Sin embargo, la definición del concepto de función periódica es extremadamente exigente y debido a ello, las condiciones que nos permiten garantizar la existencia soluciones periódicas de ciertas ecuaciones diferenciales también son bastante fuertes. Debido a esto, en las últimas décadas, algunos autores [41, 42, 61] han propuesto y estudiado ciertas generalizaciones del concepto de función periódica que se han mostrado ciertamente interesantes y útiles.

Es un hecho sobradamente conocido que la derivada de una función periódica —si es que existe— es nuevamente una función periódica con el mismo periodo. Además, la primitiva de una función periódica —cuando ésta existe– también puede ser en muchos caso una función periódica del mismo periodo: pensemos, por ejemplo, en la función $-\cos(t)$ como primitiva de $\text{sen}(t)$. Sin embargo, cuando uno considera derivadas o integrales de orden fraccionario no entero las propiedades que acabamos de mencionar no son ciertas. En la literatura matemática podemos encontrar diversos trabajos en los que se relacionan las funciones periódicas con el cálculo fraccionario [9, 49, 52, 58].

En la primera sección de este capítulo, estudiaremos propiedades relacionadas con la idea de periodicidad para integrales y derivadas fraccionarias de orden no entero de una función periódica dada. Mostraremos así los resultados publicados en [12], donde para los operadores fraccionario de Riemann-Liouville y Caputo, se considera la integral y derivada fraccionaria de una función periódica.

La segunda y última sección de este capítulo está dedicada al estudio de resultados similares a los de la primera sección en el marco del cálculo fraccionario discreto. Presentaremos allí los resultados publicados en [11], donde se muestran propiedades relacionas con el comportamiento periódico de la suma o diferencia fraccionaria de una función periódica dada.

4.1. Integrales y derivadas de orden fraccionario

En este último capítulo emplearemos la notación $\mathcal{C}_b([0,\infty),\mathbb{R})$ para referirnos al espacio formado por todas las funciones definidas en el intervalo $[0,\infty)$ que tomando valores en $\mathbb{R}$ son continuas y acotadas; en tal espacio consideraremos la norma de la convergencia uniforme $\|\cdot\|_\infty$ ya considerada en capítulos anteriores. Trabajaremos también con los subespacios $\mathcal{C}_0([0,\infty),\mathbb{R})$ y $\mathcal{C}_T([0,\infty),\mathbb{R})$ de $\mathcal{C}_b([0,\infty),\mathbb{R})$ definidos, cada uno de ellos, como:

$$\mathcal{C}_0([0,\infty),\mathbb{R}) = \{x \in \mathcal{C}_b([0,\infty),\mathbb{R})\colon \lim_{t\to\infty} |x(t)| = 0\},$$
$$\mathcal{C}_T([0,\infty),\mathbb{R}) = \{x \in \mathcal{C}_b([0,\infty),\mathbb{R})\colon x \text{ es una función } T\text{-periódoca}\}.$$

4.1.1. El concepto de función periódica

Empezamos recordando algunas definiciones más generales que la de función periódica; estas definiciones serán de gran importancia tanto en la presente como en la segunda y última sección de este capítulo. La primera de todas ellas fue introducida originalmente por el matemático A. S. Besicovitch en [26]; las dos restantes son mucho más recientes.

Definición 4.1. *Una función $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ se dice casi-periódica si para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto relativamente denso $H(\varepsilon, f) \subset \mathbb{R}$ tal que*

$$|f(t+s) - f(t)| < \varepsilon, \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{R} \textit{ y todo } s \in H(\varepsilon, f).$$

Nota 4.1. Recordemos que un conjunto $E \subset \mathbb{R}$ se dice relativamente denso si existe $\ell > 0$ tal que tal que todo intervalo de longitud ℓ contiene al menos un elemento de E.

Definición 4.2. *Una función $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ se dice asintóticamente casi-periódica si existe una función casi-periódica g y $\varphi \in \mathcal{C}_0([0,\infty), \mathbb{R})$ tal que*

$$f(t) = g(t) + \varphi(t), \quad \text{para todo } t \in [0,\infty). \tag{4.1}$$

Si g es en realidad una función T-periódica, diremos entonces que f es asintóticamente T-periódica.

Definición 4.3. *Una función $f \in \mathcal{C}_b([0,\infty), \mathbb{R})$ se dice S-asintóticamente periódica si existe $T > 0$ tal que*

$$\lim_{t\to\infty} \big(f(t+T) - f(t)\big) = 0.$$

En tal caso, diremos que T es un periodo asintótico de la función f y que f es S-asintóticamente T-periódica.

Es especialmente importante comprender el significado de las definiciones 4.2 y 4.3 anteriores, pues a pesar de lo que se afirma en [40], existen ejemplos de funciones que siendo S-asintóticamente periódicas no son asintóticamente periódicas. Los siguiente ejemplos, originalmente propuestos en [61] ayudan a entender la diferencia entre ambas definiciones.

Ejemplo 1. Sea $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión de números reales tal que satisface las siguientes propiedades:

(1) $b_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$,

(2) $\lim\limits_{t\to\infty} b_n = 0$,

(3) la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, por

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} b_i$$

es acotada y no convergente.

Observemos que bajo tales condiciones se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - a_{n-1}) = 0.$$

Sea ahora $f\colon [0,\infty) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(n) = a_n$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$ y

$$f(t) = a_{n+1} + (a_{n+1} - a_n)(t - n - 1), \quad t \in [n, n+1], \ \ n \in \mathbb{N}_0.$$

Es decir, el grafo de la función f está formado por los segmentos que unen los puntos del conjunto $\{(n, a_n)\colon n \in \mathbb{N}_0\} \subset \mathbb{R}^2$.

En estas condiciones f es una función acotada en $[0, \infty)$ y además, dado que

$$|f(t) - f(s)| \leq \max_{k \geq n} |a_{k+1} - a_k||t - s|, \quad \text{para todo} \ \ t, s \in [n, \infty),$$

concluimos luego que f es uniformemente continua el el intervalo $[0, \infty) \subset \mathbb{R}$ y

$$\lim_{t \to \infty} f(t + T) - f(t) = 0, \quad \text{para todo} \quad > T > 0;$$

esto es, f es una función S-asintóticamente periódica para todo $T > 0$.

Sin embargo, f no es asintóticamente 1-periódica ya que si fuese cierto que $f = g + \varphi$, con $g \in \mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R})$ una función 1-periódica y $\varphi \in \mathcal{C}_0([0, \infty), \mathbb{R})$, tendríamos entonces que

$$a_n = f(n) = g(n) + \varphi(n) = g(0) + \varphi(n) \to g(0), \quad \text{cuando} \ \ n \to \infty,$$

hecho que contradice la elección de la sucesión $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Ejemplo 2. Sea $f\colon [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(t) = \operatorname{sen}(\ln(t + 1)), \quad \text{para cada} \ \ t \in [0, \infty).$$

Tenemos entonces que

$$f'(t) = \frac{\cos(\ln(t + 1))}{t + 1}, \quad \text{para cada} \ \ t \in [0, \infty);$$

así pues, en virtud del Teorema del valor medio, se tiene que para $t, T > 0$,

$$f(t + T) - f(T) = f'(t + \sigma T)\, T, \quad \text{con} \ \ 0 < \sigma < 1,$$

lo cual implica que

$$\lim_{t \to \infty} f(t + T) - f(t) = 0.$$

Por tanto, f es una función S-asintóticamente T-periódica para todo periodo $T > 0$.

Sin embargo, como veremos a continuación, f no es una función asintóticamente T-periódica para ciertos periodos $T > 0$. Supongamos inicialmente que f si puede ser expresada como en (4.1); llegaremos a una contradicción.

Dados $\varepsilon \in (0, 1/2)$ y $T > 0$, sea $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande como para que se cumplan las siguientes condiciones:

$$\exp(2k\pi) + T < \exp(2k\pi + \pi/2), \tag{4.2}$$
$$t \geq \exp(2k\pi) - 1 \Longrightarrow |\varphi(t)| < \varepsilon. \tag{4.3}$$

Teniendo en cuenta que f es una función creciente en el intervalo $[\exp(2k\pi) - 1, \exp(2k\pi + \pi/2) - 1] \subset \mathbb{R}$, concluimos entonces en virtud de (4.2) que

$$g([\exp(2k\pi) - 1, \exp(2k\pi) - 1 + T]) \subset g([\exp(2k\pi) - 1, \exp(2k\pi + \pi/2) - 1]).$$

Por otra parte, la condición (4.3) implica que

$$g([\exp(2k\pi) - 1, \exp(2k\pi + \pi/2) - 1]) \subset (-\varepsilon, 1 + \varepsilon);$$

así pues, se tiene que

$$g([\exp(2k\pi) - 1, \exp(2k\pi) - 1 + T]) \subset (-\varepsilon, 1 + \varepsilon).$$

Sin embargo, dado que

$$g(\exp(2k\pi + 3\pi/2) - 1) < -1 + \varepsilon < -\varepsilon,$$

deducimos que $g(\exp(2k\pi + 3\pi/2) - 1) \notin (-\varepsilon, 1 + \varepsilon)$. Tendríamos entonces que

$$\mathrm{Im}\,(g) \setminus g([t, t + T]) \neq \emptyset, \quad \text{para } t = \exp(2k\pi) - 1,$$

hecho que impide la T-periodicidad de la función g.

4.1.2. Algunos resultados previos

Para obtener las conclusiones que mostraremos más adelante sobre el comportamiento periódico de la integral y la derivada fraccionaria de una función periódica, necesitamos antes algunos resultados previos. En este epígrafe, mencionaremos algunos de los hechos que emplearemos en la siguiente sección.

Teorema 4.4. *Sea $f\colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ una función no idénticamente nula y T-periódica tal que $f \in \mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Luego la integral fraccionaria $I^\alpha f$ no es una función T-periódica.*

En la literatura matemática podemos encontrar distintas pruebas del Teorema 4.4 anterior. Los autores de [49] lograron probar tal hecho empleando la transformada de Mellin; por otra parte, en [85] se muestra una prueba más sencilla de tal hecho empleando la transformada de Laplace.

También es relativamente sencillo mostrar que si f es una función T-periódica, entonces $I^\alpha f$ no puede ser una función $\tilde{T}$-periódica para ningún periodo $\tilde{T} > 0$. Una prueba de tal hecho puede consultarse en [9].

Lema 4.5. *Sean $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función periódica con periodo $T > 0$ y $0 < \alpha < 1$. Tenemos entonces que, para todo $t > 0$,*

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathbb{N}}} \int_{t-nT}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathbb{N}}} \int_{-nT}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds.$$

Demostración. Es claro que

$$\left| \int_{-nT}^{t-nT} (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds \right| \leq \int_{-nT}^{t-nT} (t-s)^{\alpha-1} |f(s)|\, ds \leq t\,(nT)^{\alpha-1}\, \|f\|_\infty;$$

así pues, dado que $\alpha \in (0,1)$, concluimos que para $t > 0$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathbb{N}}} \int_{-nT}^{t-nT} (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds = 0.$$

El resultado enunciado se sigue ahora teniendo en cuenta que

$$\int_{t-nT}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds = \int_{-nT}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds - \int_{-nT}^{t-nT} (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds. \qquad \square$$

Los tres resultados que mostraremos a continuación serán especialmente útiles a la hora de probar que la integral fraccionaria de una función periódica no es una función casi-periódica.

Lema 4.6. *[42, Lemma 3.1] Sea $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función S-asintóticamente T-periódica y $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tal que $t_n \to +\infty$ cuando $n \to +\infty$. Si $f_{t_n}(t) = f(t+t_n)$ es tal que $f_{t_n} \to F$ uniformemente en todo subconjunto compacto de $\mathbb{R}^+$, entonces tenemos que $F \in \mathcal{C}_T(\mathbb{R},\mathbb{R})$.*

Demostración. Es claro que F es una función continua. Por otra parte, dados $T \geq 0$ y $\varepsilon > 0$, escogemos $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\begin{aligned} |F(s) - f(s+t_n)| &\leq \varepsilon, \qquad s \in [t, t+T], \\ |f(t+t_n) - F(t)| &\leq \varepsilon, \qquad t \geq 0, \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$. Por tanto, para $n \geq n_0$ arbitrario, tenemos que

$$\begin{aligned} |F(t+T) - F(t)| \leq{}& |F(t+T) - f(t+T+t_n)| + |f(t+T+t_n) - f(t+t_n)| \\ &+ |f(t+t_n) - F(t)| \leq 3\,\varepsilon, \end{aligned}$$

lo cual implica que $F(t+T) = F(t)$. Por tanto, queda probado el resultado enunciado. $\square$

Proposicion 4.7. *[42, Proposition 3.4] Sea $f\colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ una función S-asintóticamente T-periódica y asintóticamente casi-periódica. Luego f es una función asintóticamente T-periódica.*

Demostración. Por hipótesis, podemos expresar la función f como $f = f_1 + f_2$, donde f_1 es una función casi-periódica y $f_2 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Ahora, teniendo en cuenta resultados conocidos propios de la teoría genérica de funciones casi-periódicas [26], se sabe que existe una sucesión de números reales $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $t_n \to +\infty$ cuando $n \to +\infty$ y $f_{1_{t_n}}(t) = f_1(t + t_n)$ satisface que $f_{1_{t_n}} \to f_1$ uniformemente en $\mathbb{R}^+$ cuando $n \to +\infty$.

Por tanto, $f_{1_{t_n}} \to f_1$ uniformemente en $\mathbb{R}^+$ cuando $n \to +\infty$ y, en virtud del Lema 4.6, concluimos que $f_1 \in \mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ lo cual ahora implica que la función f es asintóticamente T-periódica. □

Proposicion 4.8. *Sea $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función S-asintóticamente T-periódica y casi-periódica. Luego f es una función T-periódica.*

Demostración. Como ya indicamos anteriormente, por ser f una función casi-periódica, sabemos que existe una sucesión de números reales $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de modo que $t_n \to +\infty$ y $f_{t_n} \to f$ uniformemente en $\mathbb{R}^+$ cuando $n \to +\infty$. Teniendo en cuenta ahora el Lema 4.6 anterior, concluimos finalmente que $f \in \mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. □

La integral fraccionaria de Weyl

En esta sección será de especial utilidad la integral fraccionaria de Weyl, ideal para consideraciones relativas a funciones periódicas debido, principalmente, a que su definición está motivada a partir de consideraciones sobre series de Fourier. De acuerdo con [70, Capítulo 4, Sección 19], la integral fraccionaria de Weyl de orden $\alpha \in (0, 1)$ de una función f dada, se define como

$$^{\mathrm{W}}I^{\alpha} f\,(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-s)g(s)\,ds,$$

donde, para $0 \le s \le 2\pi$,

$$g(s) = \frac{2\pi}{\Gamma(\alpha)} s^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{n\to\infty}\left[2\pi\sum_{m=1}^{n}(s+2\pi m)^{\alpha-1} - \frac{(2\pi n)^{\alpha}}{\alpha}\right].$$

Emplearemos también el siguiente hecho (véase [70, Lemma 19.3]), si $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función T-periódica, $f \in \mathsf{L}^1(0, T)$ y es tal que

$$\int_0^T f(t)\,dt = 0, \tag{4.4}$$

entonces, para $\alpha \in (0,1)$,

$$ {}^{\mathrm{W}}I^{\alpha} f\,(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s)\,ds, \tag{4.5} $$

siempre y cuando la integral impropia del segundo miembro de la identidad anterior sea entendida como condicionalmente convergente, esto es, como

$$ \int_{-\infty}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s)\,ds = \lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in\mathbb{N}}} \int_{t-nT}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s)\,ds. $$

4.1.3. Principales resultados

El objetivo principal de la presente sección es estudiar si la integral (o derivada) fraccionaria de una función periódica satisface ciertas propiedades de periodicidad. Más concretamente, responderemos a las siguientes cuestiones: si $f \in \mathcal{C}_T(\mathbb{R},\mathbb{R})$,

1.- ¿es entonces $I^{\alpha} f$ una función acotada?

2.- ¿es entonces $I^{\alpha} f$ una función S-asintóticamente T-periódica?

3.- ¿es entonces $I^{\alpha} f$ asintóticamente T-periódica?

4.- ¿es entonces $I^{\alpha} f$ una función casi-periódica?

Mostraremos también resultados similares para derivadas fraccionarias, tanto en el sentido de Caputo, como en el de Riemann-Liouville.

Iniciamos luego este epígrafe con un resultado sobre funciones S-asintóticamente periódicas e integrales fraccionarias. Pasaremos a centrar nuestro interés en el concepto de periodicidad asintótica.

Lema 4.9. *Si $f \in \mathcal{C}_T(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ y $\alpha \in (0,1)$ entonces $I^{\alpha} f$ satisface la siguiente propiedad de T-periodicidad asintótica:*

$$ \lim_{t\to+\infty} \left[I^{\alpha} f\,(t+T) - I^{\alpha} f\,(t) \right] = 0. $$

Demostración. Efectivamente, dado que f es una función T-periódica, tenemos que para $t \geq 0$

$$ \begin{aligned} & I^{\alpha} f\,(t+T) - I^{\alpha} f\,(t) = \\ & \quad = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Big(\int_0^{t+T} (t+T-s)^{\alpha-1} f(s)\,ds - \int_0^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s)\,ds \Big) \\ & \quad = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Big(\int_0^{t+T} (t+T-s)^{\alpha-1} f(s)\,ds - \int_T^{t+T} (t-r+T)^{\alpha-1} f(r-T)\,dr \Big) \end{aligned} $$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Big(\int_0^{t+T}(t+T-s)^{\alpha-1}f(s)\,ds - \int_T^{t+T}(t-s+T)^{\alpha-1}f(s)\,ds\Big).$$

Así pues,

$$I^\alpha f\,(t+T) - I^\alpha f\,(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (t+T-s)^{\alpha-1}f(s)\,ds,$$

lo cual implica que

$$|I^\alpha f\,(t+T) - I^\alpha f\,(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\,T\,\|f\|_\infty\, t^{\alpha-1} \leq T\,\|f\|_\infty\, t^{\alpha-1},$$

ya que $0 < 1/\Gamma(\alpha) < 1$ para $0 < \alpha < 1$. El resultado enunciado se sigue ahora fácilmente. $\square$

Nota 4.2. Conviene observar que, en ningún caso, hemos probado que la integral fraccionaria $I^\alpha f$ es una función S-asintóticamente T-periódica, pues $I^\alpha f$ podría ser una función no acotada.

Teorema 4.10. *Sea $f \in \mathcal{C}_T\,(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ tal que $I^\alpha f$, con $\alpha \in (0,1)$, es una función acotada. Luego $I^\alpha f$ es una función S-asintóticamente T-periódica.*

Demostración. Obvio si tenemos en cuenta el Lema 4.9 y la Nota 4.2. $\square$

Lema 4.11. *Sea $f \in \mathcal{C}_T\,(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ una función absolutamente continua. Luego para $\alpha \in (0,1)$, ${}^{\mathrm{C}}D^\alpha f$ satisface la siguiente propiedad de T-periodicidad asintótica,*

$$\lim_{t\to\infty}\big({}^{\mathrm{C}}D^\alpha f\,(t+T) - {}^{\mathrm{C}}D^\alpha f\,(t)\big) = 0.$$

Demostración. El resultado enunciado se deduce fácilmente teniendo en cuenta la definición de la derivada fraccionaria de Caputo y el Lema 4.9 anterior, ya que la derivada usual de una función T-periódica también es una función T-periódica. $\square$

Nota 4.3. Nuevamente, procede hacer el siguiente comentario: hasta el momento, no hemos probado que ${}^{\mathrm{C}}D^\alpha f$ sea una función S-asintóticamente T-periódica, pues de momento no sabemos si ${}^{\mathrm{C}}D^\alpha f$ es una función acotada.

Teorema 4.12. *Sea $f \in \mathcal{C}_T\,(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ una función absolutamente continua y $\alpha \in (0,1)$. Luego, si ${}^{\mathrm{C}}D^\alpha f$ es una función acotada, entonces ${}^{\mathrm{C}}D^\alpha f$ es una función S-asintóticamente T-periódica.*

Demostración. Obvio a partir del Lema 4.11 anterior y la Nota 4.3. $\square$

Nota 4.4. Si suponemos que f es una función tal que $f^{(n-1)}$ es absolutamente continua ($f \in AC^n$) entonces, si ${}^{\mathrm{C}}D^\alpha f$ con $\alpha \in (n-1, n)$ es acotada, tenemos que ${}^{\mathrm{C}}D^\alpha f$ es una función S-asintóticamente T-periódica.

Probaremos ahora resultados análogos a los anteriores, pero para el operador de Riemann-Liouville.

Teorema 4.13. *Sea f una función tal que $f \in \mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y $f \in AC^n(\mathbb{R})$. Luego si $D^\alpha f$, con $\alpha \in (n-1, n)$, es una función acotada, entonces $D^\alpha f$ es una función S-asintóticamente T-periódica.*

Demostración. Sea f una función en las condiciones del enunciado, pero tal que $D^\alpha f$ no es S-asintóticamente T-periódica. Consideremos en tal caso la función $\tilde{f} = f - f(0)$; es entonces obvio que $\tilde{f} \in \mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y $\tilde{f} \in AC^n(\mathbb{R})$. Teniendo en cuenta que en tal caso ${}^{\mathrm{C}}D^\alpha \tilde{f}\,(t) = D^\alpha f\,(t)$, concluimos así que ${}^{\mathrm{C}}D^\alpha \tilde{f}$ no es una función S-asintóticamente T-periódica, lo cual es necesariamente falso. $\square$

En el siguiente teorema, cuya demostración está motivada por los resultados publicados en [40], asumiremos que $I^\alpha f$ es una función acotada.

Teorema 4.14. *Sea $f \in \mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que $I^\alpha f$, con $\alpha \in (0, 1)$, es una función acotada. Tenemos entonces que $I^\alpha f$ es una función asintóticamente T-periódica.*

Demostración. Por comodidad y brevedad emplearemos la notación

$$\varphi(t) = I^\alpha f\,(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds, \qquad t > 0.$$

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos las siguientes funciones: $\varphi_n(t) = \varphi(t + nT)$ y $\Phi_n(t) = \sup_{k \geq n} \varphi_k(t)$ con $t \geq 0$. Dado que $I^\alpha f$ es una función acotada, φ_n y Φ_n también son funciones continuas y acotadas en $\mathbb{R}^+$. Además, tenemos que $\Phi_{n+1}(t) \leq \Phi_n(t)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $t \in \mathbb{R}^+$. Por otra parte, empleando la hipótesis de T-periodicidad sobre la función f, concluimos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty} \Phi_n(t) &= \lim_{n \to \infty} \left[\sup_{k \geq n} \varphi(t + kT) \right] = \limsup_{n \to \infty} \varphi(t + nT) \\
&= \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t+nT} (t + nT - s)^{\alpha-1} f(s)\, ds \\
&= \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-nT}^{t} (t - r)^{\alpha-1} f(r + nT)\, dr \\
&= \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t-nT}^{t} (t - s)^{\alpha-1} f(s)\, ds,
\end{aligned}$$

donde hemos empleado el Lema 4.5 anterior.

Teniendo en cuenta ahora que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\Big| \int_{t-nT}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds - \int_{t-(n+1)T}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds \Big|$$
$$= \Big| \int_{t-(n+1)T}^{t-nT} (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds \Big| \leq T\,(nT)^{\alpha-1}\, \|f\|_\infty,$$

concluimos que, para cada $t \in \mathbb{R}^+$, la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada para cada $n \in \mathbb{N}$ por

$$a_n = \int_{t-nT}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds,$$

es una sucesión de casi-Cauchy en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ con un único punto de acumulación (véase [27]). Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(t) = \Phi(t) \in \mathbb{R}, \quad \text{for all } t \geq 0$$

y en virtud de (4.5), tenemos que

$$\Phi(t) \equiv {}^{\mathrm{W}}I^{\alpha} f\,(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds, \qquad t \geq 0, \tag{4.6}$$

es la integral fraccionaria de Weyl (íntimamente relacionada con la integral fraccionaria de Liouville) de orden α de la función f. Conviene observar en este momento de la prueba que estamos considerando $f \in \mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, pero no necesariamente con media nula.

Es decir, hasta el momento sabemos que $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones que converge puntualmente a la función continua dada por (4.6).

Así pues, se satisfacen todas las hipótesis del Teorema de Dini [23, 69] y podemos concluir entonces que $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a la función Φ en todo subintervalo cerrado de $\mathbb{R}^+$.

A continuación, mostraremos que Φ es una función T-periódica. En virtud del Lema 4.9 anterior y del Teorema de Heine, sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\varphi(t+nT+T) - \varphi(t+nT)\right) = 0$$

y así

$$\begin{aligned} \Phi(t+T) - \Phi(t) &= \lim_{n\to\infty} \Big(\Phi_n(t+T) - \Phi_n(t)\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \Big(\sup_{k\geq n} \varphi(t+T+kT) - \sup_{k\geq n} \varphi(t+kT)\Big) \end{aligned}$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \Big(\varphi(t+T+nT) - \varphi(t+nT)\Big)$$
$$= \lim_{n\to\infty} (\varphi(t+T+nT) - \varphi(t+nT)) = 0.$$

Por tanto, concluimos que Φ es una función T-periódica. Tal hecho coincide para lo mencionado cuando f tiene media nula en [70, p. 348], esto es, cuando se satisface la condición (4.4).

La siguiente etapa de la prueba consiste en mostrar que la sucesión de funciones $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a la función Φ en $\mathbb{R}^+$.

Sean para cada m, $n \in \mathbb{N}$, $I_n = [n\,T, (n+1)T]$ y

$$A_{m,\,n} = \sup_{t\in I_m} |\Phi_n(t) - \Phi(t)|\,.$$

Teniendo en cuenta ahora que Φ es una función T-periódica,obtenemos que

$$A_{m,\,n} = \sup_{t\in I_m} \Big|\sup_{k\geq n} \varphi_k(t) - \Phi(t)\Big| = \sup_{t\in I_m} \Big|\sup_{k\geq n} \varphi(t+kT) - \Phi(t)\Big|$$
$$= \sup_{t\in I_0} \Big|\sup_{k\geq n+m} \varphi(t+kT) - \Phi(t)\Big| = A_{0,\,m+n}.$$

Dado que por hipótesis $I^\alpha f$ es una función acotada, es entonces claro que $\lim_{s\to\infty} A_{0,\,s} = 0$. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq N$,

$$A_{0,\,k} = \sup_{t\in I_0} |\Phi_k(t) - \Phi(t)| < \varepsilon. \tag{4.7}$$

Dado ahora $t \in \mathbb{R}^+$ arbitrario, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $t \in I_m$ y en virtud de (4.7), para $n \geq N$, tenemos que

$$A_{m,\,n} = A_{0,\,m+n} = \sup_{t\in I_m} |\Phi_n(t) - \Phi(t)| < \varepsilon.$$

Esto es, para $n \geq N$, debe ser necesariamente

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} |\Phi_n(t) - \Phi(t)| < \varepsilon,$$

o lo que es equivalente, la sucesión de funciones $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a la función Φ en $\mathbb{R}^+$.

Si en lugar de φ_n consideramos para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\Psi_n(t) = \inf_{k\geq n} \varphi_k(t) = \inf_{k\geq n} \varphi(t+kT),$$

podemos entonces probar de modo análogo a lo mostrado antes, que $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también converge uniformemente a la función Φ en el conjunto $\mathbb{R}^+$.

A continuación, probaremos que

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) - \Phi(t) = 0.$$

Dado que

$$\Psi_n(t) = \inf_{k\geq n} \varphi_k(t) \leq \varphi_n(t) \leq \sup_{k\geq n} \varphi_k(t) = \Phi_n(t)$$

y teniendo en cuenta que $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a Φ en $\mathbb{R}^+$, concluimos que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también converge uniformemente Φ en $\mathbb{R}^+$.

Así pues, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$,

$$|\varphi_n(t) - \Phi(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{para todo } \ t \in \mathbb{R}^+,$$

y tenemos así que

$$|\varphi(t) - \Phi(t)| \leq |\varphi(t) - \varphi_n(t)| + |\varphi_n(t) - \Phi(t)| < |\varphi(t) - \varphi_n(t)| + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.8}$$

En virtud ahora del Lema 4.9, para el $\varepsilon > 0$ fijado anteriormente, existe $S > 0$ tal que si $t > S$ entonces

$$|\varphi(t+T) - \varphi(t)| < \frac{\varepsilon}{2N}.$$

Teniendo en cuenta esto último, concluimos que para $t > S$,

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - \varphi(t+nT)| &\leq |\varphi(t) - \varphi(t+T)| + |\varphi(t+T) - \varphi(t+2T)| \\ &\quad + \cdots + |\varphi(t+NT) - \varphi(t+(N-1)T)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2N} N = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Por tanto, teniendo en cuenta (4.8) y (4.9), concluimos que, para $t > S$

$$|\varphi(t) - \Phi(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

y entonces

$$\lim_{t\to\infty} (\Phi(t) - \varphi(t)) = 0.$$

El resultado enunciado se sigue ahora a partir de la identidad obvia $\varphi(t) = \Phi(t) + (\varphi(t) - \Phi(t))$. $\square$

Teorema 4.15. *Sea $\alpha > 0$, $\alpha \in [n-1, n)$ con $n \in \mathbb{N}$. Si $f \in \mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f \in AC^n(\mathbb{R})$ y la integral fraccionaria $I^{n-\alpha} f$ es una función acotada entonces ${}^{\mathrm{C}}D^{\alpha} f$ es una función asintóticamente T-periódica.*

Demostración. Teniendo en cuenta la definición de la derivada fraccionaria de Caputo y el Teorema 4.14 anterior, el resultado enunciado es claro; en efecto, pues la derivada de orden entero de una función T-periódica es nuevamente una función T-periódica. □

A continuación, enunciamos y probamos un resultado análogo para la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville

Teorema 4.16. *Si $f \in \mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y la integral fraccionaria $I^{1-\alpha}$, con $\alpha \in (0, 1)$, es una función acotada, entonces $D^{\alpha} f$ es una función asintóticamente T-periódica.*

Demostración. Teniendo en cuenta que $D^{\alpha} f\,(t) = D^1 \left(I^{1-\alpha} f \right)\,(t)$ y el Teorema 4.14 anterior, podemos escribir

$$D^{\alpha} f\,(t) = D^1\,(f_1 + f_2)\,(t) = {f_1}'(t) + {f_2}'(t),$$

donde $f_1 \in \mathcal{C}_T(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ y $f_2 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

Dado que ${f_1}' \in \mathcal{C}_T(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ y $D^{\alpha} f$ es una función acotada, tenemos entonces que

$$\max \left\{ \limsup_{t \to +\infty} |{f_2}'(t)|, \liminf_{t \to +\infty} |{f_2}'(t)| \right\} < +\infty.$$

Si

$$\limsup_{t \to +\infty} {f_2}'(t) = \liminf_{t \to +\infty} {f_2}'(t) = \lim_{t \to +\infty} {f_2}'(t) = d \in \mathbb{R},$$

entonces $D^{\alpha} f\,(t) = ({f_1}'(t) + d) + ({f_2}'(t) - d)$, y el teorema estaría probado. En otro caso, esto es, si

$$d_1 = \limsup_{t \to +\infty} {f_2}'(t) > \liminf_{t \to +\infty} {f_2}'(t) = d_2,$$

podemos escribir entonces $D^{\alpha} f\,(t) = ({f_1}'(t) + f_3(t)) + ({f_2}'(t) - f_3(t))$, de modo que $f_3 \in \mathcal{C}_T(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ y

$$d_1 = \limsup_{t \to +\infty} f_3(t), \qquad d_2 = \liminf_{t \to +\infty} {f_2}'(t),$$

finalizando así la prueba del resultado enunciado. □

Los resultados mostrados anteriormente muestran la importancia de conocer cuando la integral fraccionaria de orden $\alpha \in (0,1)$ de una función T-periódica es una función acotada. En lo que sigue, abordaremos tal cuestión.

Teorema 4.17. *Sean $f \in \mathcal{C}_T(\mathbb{R},\mathbb{R})$ y $\alpha \in (0,1)$. Entonces, $I^\alpha f$ es una función acotada si, y solo si,*

$$\int_0^T f(t)\,dt = 0. \tag{4.10}$$

Demostración. Supongamos inicialmente que $I^\alpha f$ es una función acotada.

Dado que f es una función T-periódica, en virtud de ciertas propiedades elementales de la transformada de Laplace [89], se tiene que

$$s\,\mathcal{L}\left[I^\alpha f\right](s) = \frac{s}{s^\alpha}\mathcal{L}[f](s),$$

donde $\mathcal{L}\left[I^\alpha f\right]$ y $\mathcal{L}[f]$ denotan respectivamente a las transformadas de Laplace de las funciones $I^\alpha f$ y f. Por tanto, en virtud ahora del Teorema 4.14 anterior y [38, Theorem 1], tenemos que

$$\lim_{s\to 0^+} s\,\mathcal{L}\left(I^\alpha f\right)(s) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \lim_{s\to 0^+}\frac{1}{s^\alpha}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt.$$

Por tanto, ahora es claro que si la integral fraccionaria $I^\alpha f$ es una función acotada, entonces debe satisfacerse (4.10).

Supongamos ahora que (4.10) es cierto, probaremos que en tal caso $I^\alpha f$ es una función acotada. En virtud de (4.5), tenemos que

$$I^\alpha f\,(t) = {}^{\mathrm{W}}I^\alpha f\,(t) - \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathbb{N}}}\int_{-nT}^0 (t-s)^{\alpha-1} f(s)\,ds. \tag{4.11}$$

Dado que la integral de Weyl de una función T-periódica que satisface (4.10) es nuevamente una función T-periódica (véase [70, p. 348]), concluimos que el primer sumando del segundo miembro de (4.11) es una función acotada. Además, para el segundo sumando se tiene que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\int_{-nT}^0 (t-s)^{\alpha-1} f(s)\,ds &= \sum_{j=1}^n \int_{-jT}^{(1-j)T} (t-s)^{\alpha-1} f(s)\,ds \\
&= \sum_{j=1}^n \int_0^T (t-r+jT)^{\alpha-1} f(r-jT)\,dr = \sum_{j=1}^n \int_0^T (t-r+jT)^{\alpha-1} f(r)\,dr \\
&= \sum_{j=1}^n \int_0^T (t-r+jT)^{\alpha-1} f^+(r)\,dr - \sum_{j=1}^n \int_0^T (t-r+jT)^{\alpha-1} f^-(r)\,dr
\end{aligned}$$

$$\leq c\left(\sum_{j=1}^{n}(t+(j-1)T)^{\alpha-1}-\sum_{j=1}^{n}(t-jT)^{\alpha-1}\right)=c\,t^{\alpha-1}, \tag{4.12}$$

donde

$$c=\int_0^T f^+(t)\,dt=\int_0^T f^-(t)\,dt>0. \tag{4.13}$$

Análogamente, para cada $n\in\mathbb{N}$, se puede probar que

$$\int_{-nT}^{0}(t-s)^{\alpha-1}f(s)\,ds\geq -c\,t^{\alpha-1}. \tag{4.14}$$

Así pues, teniendo en cuenta (4.12) y (4.14), deducimos que

$$-c\,t^{\alpha-1}\leq\int_{-nT}^{0}(t-s)^{\alpha-1}f(s)\,ds\leq c\,t^{\alpha-1}$$

y así, empleando finalmente el teorema del emparedado, concluimos que

$$\lim_{t\to\infty}\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in\mathbb{N}}}\int_{-nT}^{0}(t-s)^{\alpha-1}f(s)\,ds=0.$$

Por tanto, hemos mostrado que $I^\alpha f$ es una función acotada. Esto finaliza la prueba del resultado enunciado. □

Nota 4.5. Conviene observar que en la segunda parte de la prueba del Teorema 4.17 anterior, hemos probado que si $f\in\mathcal{C}_T(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\alpha\in(0,1)$ y se cumple (4.10), entonces la integral fraccionaria $I^\alpha f$ es una función asintóticamente T-periódica. Observemos también que en la primera parte de la prueba del Teorema 4.17, hemos empleado la tesis del Teorema 4.14 anterior.

Nota 4.6. En [85], los autores estudian resultados similares a los previamente aquí mostrados. En cualquier caso, conviene notar que a la hora de probar afirmaciones similares a la tesis del Teorema 4.17, debemos ser especialmente cuidadosos al hablar de $\lim_{t\to\infty} I^\alpha f(t)$, pues in general, tal límite no tiene por qué existir. Por ejemplo, para $\alpha\in(0,1)$, $\lim_{t\to\infty} I^\alpha \operatorname{sen}(t)$ no existe tal límite (véase la Figura 4.1).

Nota 4.7. Para $\alpha>1$ no es posible afirmar nada sobre la acotación de la integral fraccionaria $I^\alpha f$. En efecto, pues por ejemplo por para $\alpha\in(1,2)$ tenemos que,

$$I^\alpha \operatorname{sen}(t)=I^{\alpha-1}I^1\operatorname{sen}(t)=I^{\alpha-1}\left(-\cos s+1\right)(t),$$

que es claramente una función no acotada en $\mathbb{R}^+$. Sin embargo,

$$I^\alpha \cos(t) = I^{\alpha-1} I^1 \cos(t) = I^{\alpha-1} \operatorname{sen}(t).$$

Luego, $I^\alpha \cos$ si sería una función acotada en $\mathbb{R}^+$.

Corolario 4. *Sea $\alpha \in (0,1)$ fijo. Si $f \in \mathcal{C}_T(\mathbb{R},\mathbb{R})$ es tal que no satisface (4.10), entonces*

$$\lim_{t\to\infty} I^\alpha f(t) = \operatorname{sgn}\Big(\int_0^T f(t)\,dt\Big)\infty.$$

Demostración. Consideremos $\tilde{c} = c/T$, donde c viene dado por (4.13), y definamos la función $\tilde{f}$ como $\tilde{f} = f - \tilde{c}$. Tenemos entonces que $\tilde{f} \in \mathcal{C}_T(\mathbb{R},\mathbb{R})$ y que (4.10) es cierto para $\tilde{f}$. Así pues, dado que

$$I^\alpha f(t) = I^\alpha \tilde{f}(t) + I^\alpha \tilde{c}(t) = I^\alpha \tilde{f}(t) + \frac{\tilde{c}}{\Gamma(1+\alpha)}\, t^\alpha,$$

el resultado enunciado es ahora claro. □

Consideremos ahora la casi-periodicidad de la integral fraccionaria de una función periódica dada. Por claridad emplearemos la siguiente notación: AAP denotará al conjunto de las funciones casi-asintóticamente periódicas, S$-AP_T$ será el conjunto de las funciones S-asintóticamente T-periódicas y AP_T será el conjunto formado por las funciones casi-periódicas.

En virtud de la Proposición 4.7 anterior, sabemos que $AAP \cap \mathrm{S}{-}AP_T \subset AP_T$. Por otra parte, es fácil probar que la inclusión $AP_T \subset \mathrm{S}{-}AP_T$ es cierta (pero $AP_T \neq \mathrm{S}{-}AP_T$, véase [42, 61]) y es trivial que $AP_T \subset AAP$. Por tanto, tenemos que

$$AAP \cap SAP_T = AP_T.$$

Pero, en virtud de la Proposición 4.8 anterior, podemos afirmar que

$$AP \cap SAP_T = P_T, \tag{4.15}$$

donde $P_T(\mathbb{R})$ denota al conjunto de las funciones T-periódicas.

Así, teniendo en cuenta las observaciones anteriores, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.18. *Si $f \in \mathcal{C}_T(\mathbb{R},\mathbb{R})$ y $I^\alpha f$, con $\alpha \in (0,1)$, es una función acotada, entonces $I^\alpha f$ no es una función casi-periódica.*

Demostración. Supongamos que la integral fraccionaria $I^{\alpha} f$ fuese una función casi-periódica. Por otra parte, en virtud del Teorema 4.10 anterior, $I^{\alpha} f$ es una función S-asintóticamente T-periódica. Por tanto, en virtud de (4.15), la función $I^{\alpha} f$ sería una función T-periódica, lo cual contradice el Teorema 4.4 anterior. $\square$

Nota 4.8. Razonando de forma similar a lo mostrado antes, podemos obtener resultados análogos para las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville y Caputo de orden $\alpha \in (0,1)$.

4.1.4. Un ejemplo esclarecedor

Sea, para cada $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \operatorname{sen}(t)$ y consideremos la integral fraccionaria de f de orden $\alpha > 0$. Teniendo en cuenta que

$$\operatorname{sen}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

y que para $\eta(t) = (-1)^n t^{2n+1}/(2n+1)!$, se tiene que

$$I^{\alpha} \eta\,(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \frac{(-1)^n s^{2n+1}}{(2n+1)!} ds = \frac{(-1)^n t^{\alpha+2n+1}}{\Gamma(\alpha+2n+2)};$$

deducimos que,

$$\begin{aligned} I^{\alpha} f\,(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds = \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{4^{-j} \left(-t^2\right)^j}{\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)_j \left(\frac{\alpha+3}{2}\right)_j} \\ &= \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} \, {}_1F_2\Big(1, \frac{\alpha}{2}+1, \frac{\alpha}{2}+\frac{3}{2}, -\frac{t^2}{4}\Big), \end{aligned}$$

para $t > 0$, donde $(A)_j = A\,(A+1)\cdots(A+j-1)$, $(A)_0 := 1$ denota al símbolo Pochhammer y ${}_2F_1$ es una función hipergeométrica generalizada [1].

Para $\alpha = 1/2$ la expansión en serie de potencia en el infinito viene dada por

$$I^{1/2} f\,(t) \sim \frac{\sqrt{\frac{1}{t}}}{\sqrt{\pi}} + \frac{\operatorname{sen}(t) - \cos(t)}{\sqrt{2}},$$

por lo que tenemos que $I^{1/2} f$ es una función acotada.

Sin embargo, para $\alpha = 3/2$ se tiene que

$$I^{3/2} f\,(t) \sim \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} - \frac{\operatorname{sen}(t) + \cos(t)}{\sqrt{2}},$$

luego $I^{3/2}f$ es una función no acotada.

Dado que para $\alpha > 0$ arbitrario el primer sumando de la serie de potencias mencionada anteriormente es

$$\frac{t^{\alpha-3}\left(-(\alpha-3)\alpha+t^2-2\right)}{\Gamma(\alpha)}$$

concluimos que, $I^\alpha f$ es una función acotada si y solo si $\alpha \in (0,1]$.

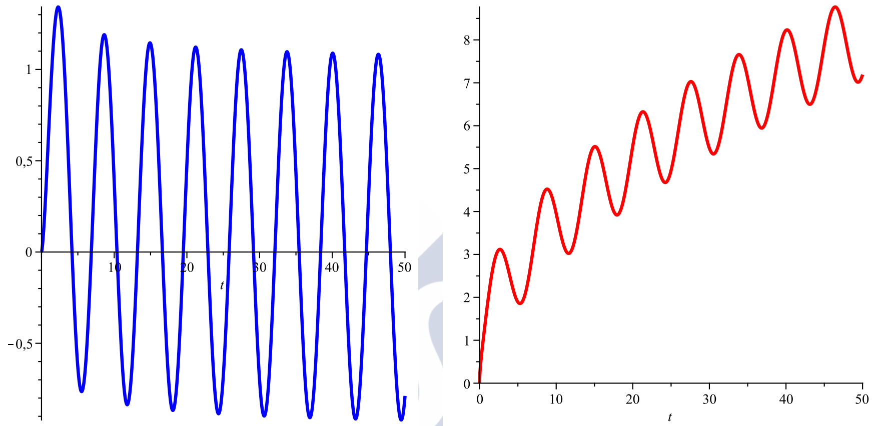

Figura 4.1: Gráfica comparativa de las funciones $I^{1/2}\,\mathrm{sen}\,(t)$ (izquierda) y $I^{1/2}\left(\mathrm{sen}(r)+1\right)(t)$ (derecha) para $t \in [0,50]$.

En resumen, para $\alpha \in (0,1)$ la integral fraccionaria $I^\alpha\,\mathrm{sen}\,(t)$ es una función acota y S-asíntóticamente 2π-periódica. Además, bajo tales condiciones, $I^\alpha\,\mathrm{sen}\,(t)$ es una función asintóticamente 2π-periódica, pero no es una función casi-periódica.

Hemos obtenido que para $\alpha \in (0,1)$, la integral fraccionaria $I^\alpha f$ de una función T-periódica es una función acotada si, y solo si, la media de f es nula. Por otra parte, también hemos enunciado y probado condiciones suficientes sobre f para que $I^\alpha f$ sea una función S-asintóticamente periódica y/o asintóticamente periódica. Los resultados que involucran a integrales fraccionarias son además muy útiles a la hora de probar hechos análogos o similares para el caso de derivadas de orden fraccionario en el sentido de Caputo o Riemann-Liouville. También cabe indicar que los resultados probados en esta sección podrían ser útiles a la hora de entender el comportamiento de ciertos fenómenos modelados empleando ecuaciones diferenciales de orden fraccionario como los considerados, por ejemplo en [87, 49].

4.2. Sumas y diferencias de orden fraccionario

En la actualidad, el cálculo fraccionario discreto, que involucra a sumas y diferencias de orden fraccionario, se encuentra mucho menos desarrollado que su versión continua.

Podríamos decir que el interés moderno por el cálculo fraccionario discreto se inició con [60]. En [6] es posible consultar información detalla sobre definiciones y propiedades de los operadores fraccionarios discretos. Por otra parte, en [14, 15, 82, 31, 34] se han estudiado también cuestiones relacionadas con el cálculo fraccionario discreto.

4.2.1. Algunas definiciones y resultados elementales

En este epígrafe asumiremos la propiedad de suma vacía; esto es, si $a > b$ entonces

$$\sum_{t=a}^{b} f(t) = 0. \tag{4.16}$$

Por otra parte, dado $t \in \mathbb{R}$, emplearemos la notación $\mathbb{N}_t = \{t, t+1, t+2, \dots\}$.

A continuación, presentamos las definiciones de diferencia y suma de orden fraccionario, que fueron introducidas originalmente en [60].

Definición 4.19. *Sea $\alpha > 0$, la suma fraccionaria de f orden α con punto base $a \in \mathbb{Z}$ se define como*

$$\Delta_a^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=a}^{t-a} (t-s-1)^{(\alpha-1)} f(s), \quad t = (a+\alpha) \mod 1, \tag{4.17}$$

donde f es una función definida para $s = a \mod 1$ y la función factorial decreciente está definida, para $\alpha \in \mathbb{R}$, como

$$t^{(\alpha)} = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-\alpha)}, & t+1-\alpha \notin \{\dots,-3,-2,-1\}, \\ 1, & \alpha = 0 \\ 0, & t+1-\alpha \in \{\dots,-3,-2,-1\}. \end{cases}$$

Conviene observar que $\Delta_a^{-\alpha}(t)$ está definida para $t = (a+\alpha) \mod 1$. En particular, la imagen por $\Delta_a^{-\alpha}$ de una función definida en $\mathbb{N}_a$ es otra función cuyo dominio es $\mathbb{N}_{a+\alpha}$.

Nota 4.9. El origen de la Definición 4.19 anterior se encuentra en una generalización de la fórmula discreta de Cauchy que expresa la suma iterada m veces, con $m \in \mathbb{N}$, como una única suma

$$\sum_{k_1=a}^{t} \sum_{k_2=a}^{k_1} \cdots \sum_{k_m=a}^{k_{m-1}} f(k_m) = \frac{1}{\Gamma(m)} \sum_{k=a}^{t} (t-k+1)^{(m-1)} f(k),$$

donde t, k_i y a son números enteros tales que $a \leq k_i \leq k_{i-1} \leq t$. Conviene indicar entonces que la expresión anterior juega el papel análogo de la fórmula de Cauchy para las integrales iteradas.

Otra justificación de la Definición 4.19 anterior puede consultarse en [60], donde los autores consideran ecuaciones en diferencias lineales y estudian la función de Green asociada.

Ahora, después de la noción de suma fraccionaria de orden $\alpha > 0$, la idea de diferencia fraccionaria de orden arbitrario (es decir, no necesariamente entero) aparece de modo natural. Al igual que en el caso continuo, uno podría sentir la tentación de cambiar directamente α en (4.17) por $-\alpha$. Sin embargo, para obtener una definición de interés, es necesario proceder con más cuidado.

Sea, para $n \in \mathbb{N}$, Δ^n el operador en diferencias progresivas de orden n, esto es,

$$\Delta^n f(s) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(s+k).$$

A continuación, presentamos dos posibles definiciones del operador en diferencias progresivas de orden fraccionario. Puede consultarse más información sobre estos operadores puede consultarse en, por ejemplo, [34].

Definición 4.20. *Sea $\alpha > 0$ tal que $n-1 < \alpha \leq n$, con $n \in \mathbb{N}$. El operador diferencia de Caputo de orden α de f está definido como*

$$\begin{aligned} {}^{\mathrm{C}}\Delta_a^{\alpha} f(t) &= \Delta_a^{-(n-\alpha)} \Delta^n f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{s=a}^{t-n+\alpha} (t-s-1)^{(n-\alpha-1)} \Delta^n f(s), \quad t \in \mathbb{N}_{a+\alpha}. \end{aligned}$$

Definición 4.21. *Sea $\alpha > 0$ tal que $n-1 < \alpha \leq n$, con $n \in \mathbb{N}$. El operador diferencia de Riemann-Liouville de orden α de f está definido como*

$$^{\mathrm{RL}}\Delta_a^{\alpha} f(t) = \Delta^n \Delta_a^{-(n-\alpha)} f(t), \quad t \in \mathbb{N}_{a+\alpha}.$$

Nota 4.10. Obviamente, para $\alpha \in \mathbb{N}$, las diferencias fraccionarias de Caputo y Riemann-Liouville coinciden con el operador en diferencias progresivas usual de orden n.

Conviene también resaltar que hemos empleado el mismo símbolo para referirnos a las sumas y a las diferencias: Δ. Así pues, emplearemos la notación $\Delta_a^{-\alpha}$ para referirnos a la suma fraccionaria de orden $\alpha > 0$, mientras que reservaremos la notación Δ_a^{α} (sin el signo menos) para las diferencias fraccionarias de orden $\alpha > 0$

Continuamos ahora enunciando algunos resultados útiles que relacionan las definiciones anteriores. Emplearemos estos resultados en razonamientos posteriores.

Como en el caso continuo, son bien conocidos ciertos resultados sobre la composición de sumas fraccionarias.

Teorema 4.22. *Sean $f\colon \mathbb{N}_a \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha, \beta > 0$. Tenemos que*

$$\Delta_a^{-\alpha}\Delta_a^{-\beta} f(t) = \Delta_a^{-(\alpha+\beta)} f(t) = \Delta_a^{-\beta}\Delta_a^{-\alpha} f(t), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{N}_{a+\alpha+\beta}.$$

La siguiente transformada, junto con el Lema 4.24 siguiente, presentados originalmente en [14], también nos será de gran utilidad más adelante.

Definición 4.23. *La transformada discreta R_a de una función $f\colon \mathbb{N}_a \longrightarrow \mathbb{R}$ viene dada por*

$$R_a\big[f(t)\big](s) = \sum_{t=a}^{\infty} \left(\frac{1}{s+1}\right)^{t+1} f(t), \quad s > 0. \tag{4.18}$$

Lema 4.24. *Para $\alpha > 0$ y $f\colon \mathbb{N}_a \longrightarrow \mathbb{R}$, se tiene que*

$$R_{a+\alpha}\big[\Delta_a^{-\alpha} f(t)\big](s) = s^{-\alpha}\, R_a\big[f(t)\big]\,(s), \quad \text{para todo } s > 0.$$

Por supuesto, para funciones definidas en conjuntos de la forma $\mathbb{N}_a$, con $a \in \mathbb{R}$, también podemos considerar los conceptos de función S-asintóticamente (Definición 4.3 anterior) periódica y función asintóticamente periódica (Definición 4.2 anterior).

Definición 4.25. *Diremos que una función $f\colon \mathbb{N}_a \longrightarrow \mathbb{R}$ es asintóticamente periódica si podemos expresarla como $f = f_1 + f_2$, donde f_1 es una función periódica en $\mathbb{N}_a$ y*

$$\lim_{\substack{t\to\infty \\ t\in\mathbb{N}_a}} f_2(t) = 0.$$

Definición 4.26. *Diremos que una función $f\colon \mathbb{N}_a \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada es S-asintóticamente periódica si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\lim_{\substack{t\to\infty \\ t\in\mathbb{N}_a}} \big(f(t+N) - f(t)\big) = 0.$$

En tal caso, diremos que f es S-asintóticamente N-periódica.

4.2.2. Resultados sobre periodicidad y periodicidad S-asintótica

Los siguientes resultados muestran propiedades relacionadas con la periodicidad de la suma y diferencia de orden fraccionario de una función $f\colon \mathbb{N}_a \longrightarrow \mathbb{R}$.

Teorema 4.27. *Sean $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, y $f\colon \mathbb{N}_a \longrightarrow \mathbb{R}$ una función no idénticamente nula N-periódica, con $N \in \mathbb{N}$. Entonces la función $\Delta_a^{-\alpha}$ no es M-periódica para ningún período $M \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Consideremos inicialmente $a = 0$ y $0 < \alpha < 1$. Supongamos que existe una función N-periódica $f\colon \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\Delta_0^{-\alpha} f$ es una función $\tilde{N}$-periódica. Esto es, asumamos que

$$u(t) = \Delta_0^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=0}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} f(s), \quad t \in \mathbb{N}_\alpha,$$

es una función $\tilde{N}$-periódica. Considerando ahora la transformada $R_{\alpha-1}$ introducida en (4.18), concluimos que

$$\begin{aligned} R_{\alpha-1}\big[u(t)\big](z) &= R_{\alpha-1}\big[\Delta_0^{-\alpha} f(t)\big](z) \\ &= \sum_{t=\alpha-1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+1}\right)^{t+1} \Delta_0^{-\alpha} f(t), \quad z > 0. \end{aligned}$$

Además, en virtud de la propiedad (4.16) de suma vacía, tenemos que

$$\Delta_0^{-\alpha} f(\alpha-1) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=0}^{-1} (t-s-1)^{(\alpha-1)} f(s) = 0,$$

podemos escribir $R_{\alpha-1}\big[u(t)\big] = R_\alpha\big[u(t)\big]$ y en virtud del Lema 4.24 anterior, concluimos que

$$R_\alpha\big[u(t)\big](z) = z^{-\alpha} R_0\big[f(t)\big](z), \quad \text{para todo } z > 0.$$

Por tanto, hemos probado que

$$\sum_{t=\alpha}^{\infty}\left(\frac{1}{z+1}\right)^{t+1}\Delta_0^{-\alpha}f(t) = z^{-\alpha}\sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z+1}\right)^{t+1}f(t), \quad \text{para todo} \ \ z>0. \tag{4.19}$$

Teniendo en cuenta ahora las hipótesis de N-periodicidad sobre la función f y $\tilde{N}$-periodicidad sobre la función $u=\Delta_0^{-\alpha}f$, podemos reescribir la identidad (4.19) anterior como

$$\sum_{t=\alpha}^{\alpha+\tilde{N}-1}\Delta_0^{-\alpha}f(t)\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z+1}\right)^{t+\tilde{N}r} = z^{-\alpha}\sum_{t=0}^{N-1}f(t)\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z+1}\right)^{t+1+Nr},$$

o equivalentemente,

$$\begin{aligned}\frac{(z+1)^{\tilde{N}}}{(z+1)^{\tilde{N}}-1}&\sum_{t=\alpha}^{\alpha+\tilde{N}-1}\left(\frac{1}{z+1}\right)^{t+1}\Delta_0^{-\alpha}f(t) = \\ &= \frac{(z+1)^{N}}{(z+1)^{N}-1}z^{-\alpha}\sum_{t=0}^{N-1}\left(\frac{1}{z+1}\right)^{t+1}f(t)\end{aligned}$$

y así, para $z>0$ tenemos que

$$\begin{aligned}z^{\alpha}&\sum_{t=\alpha}^{\alpha+\tilde{N}-1}\left(\frac{1}{z+1}\right)^{t+1}\Delta_0^{-\alpha}f(t) = \\ &= (z+1)^{N-\tilde{N}}\frac{(z+1)^{\tilde{N}}-1}{(z+1)^{N}-1}\sum_{t=0}^{N-1}\left(\frac{1}{z+1}\right)^{t+1}f(t).\end{aligned} \tag{4.20}$$

Considerando ahora para cada $z>0$,

$$P(z)=\sum_{t=\alpha}^{\alpha+\tilde{N}-1}\left(\frac{1}{z+1}\right)^{t+1}\Delta_0^{-\alpha}f(t) \quad \text{y} \quad Q(z)=\sum_{t=0}^{N-1}\left(\frac{1}{z+1}\right)^{t+1}f(t),$$

podemos reescribir la identidad (4.20) anterior como

$$z^{\alpha}P(z) = (z+1)^{N-\tilde{N}}\frac{(z+1)^{\tilde{N}}-1}{(z+1)^{N}-1}Q(z), \quad z>0,$$

esto es,

$$z^{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty}p_j z^j = (z+1)^{N-\tilde{N}}\frac{(z+1)^{\tilde{N}}-1}{(z+1)^{N}-1}\sum_{j=0}^{\infty}q_j z^j, \quad 0<z<1. \tag{4.21}$$

Haciendo $z \to 0^+$ en ambos miembros de la identidad (4.21) anterior y empleando la regala de L'Hôpital, concluimos que $q_0 = 0$. Así pues,

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j z^j = (z+1)^{N-\tilde{N}} \frac{(z+1)^{\tilde{N}} - 1}{(z+1)^N - 1} \sum_{j=1}^{\infty} q_j z^{j-\alpha}, \quad 0 < z < 1,$$

y haciendo nuevamente $z \to 0^+$, deducimos ahora que $p_0 = 0$. Observemos aquí la importancia de la condición inicial $0 < \alpha < 1$.

Por tanto, repitiendo este mismo argumento, concluimos que $p_j = q_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}_0$ y luego debe ser $P(z) = Q(z)$ para todo $0 < z < 1$. Esto es,

$$\sum_{t=\alpha}^{\alpha+\tilde{N}-1} \left(\frac{1}{z+1}\right)^{t+1} \Delta_0^{-\alpha} f(t) = \sum_{t=0}^{N-1} \left(\frac{1}{z+1}\right)^{t+1} f(t) = 0, \quad \text{para todo } 0 < z < 1,$$

es decir, $\Delta_0^{-\alpha} f(t) = 0$ y $f(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{N}_\alpha$ y todo $t \in \mathbb{N}_0$ respectivamente.

La demostración para $a \in \mathbb{R}$ y $\alpha > 0$ arbitrarios se sigue ahora fácilmente. $\square$

Corolario 5. *Sea $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, y $f\colon \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función N-periódica. La diferencia fraccionaria de orden α de f, ${}^{\mathrm{C}}\Delta_0^{\alpha} f$, no es una función $\tilde{N}$-periódica para ningún periodo $\tilde{N} \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Teniendo en cuenta que para cada $n \in \mathbb{N}$ la diferencia progresiva de orden n de una función N-periódica es nuevamente una función N-periódica, el resultado enunciado se sigue fácilmente teniendo en cuenta el Teorema 4.27 anterior y la Definición 4.20. $\square$

Por otra parte, teniendo en cuenta [34, Theorem 3.2], podemos enunciar el siguiente resultado.

Teorema 4.28. *Sean $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$, $N > 1$ y $f\colon \mathbb{N}_a \longrightarrow \mathbb{R}$ una función N-periódica. Se tiene que*

$$\lim_{t \to +\infty} \left(\Delta_a^{-\alpha} f(t+N) - \Delta_a^{-\alpha} f(t) \right) = 0.$$

Empleando ahora el Teorema 4.28 anterior, podemos obtener el siguiente resultado.

Corolario 6. *Sean $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$, $N > 1$ y $f\colon \mathbb{N}_a \longrightarrow \mathbb{R}$ una función N-periódica. Se tiene que*

$$\lim_{t \to +\infty} \left({}^{\mathrm{C}}\Delta_a^{-\alpha} f(t+N) - {}^{\mathrm{C}}\Delta_a^{-\alpha} f(t) \right) = 0.$$

Demostración. Basta tener en cuenta que para cada $n \in \mathbb{N}$ el operador diferencia progresiva de orden n de una función N-periódica es nuevamente una función N-periódica y aplicar Teorema 4.27 anterior. $\square$

Teorema 4.29. *El enunciado del Corolario 6 anterior también es válido para el operador diferencia fraccionaria de Riemann-Liouville de orden $\alpha > 0$.*

Demostración. Probaremos que si $u = \Delta^n \Delta_a^{-(n-\alpha)} f$, con $n = \lceil \alpha \rceil \in \mathbb{N}$ entonces

$$\lim_{t\to\infty} u(t+N) - u(t) = 0.$$

Empleando la hipótesis de N-periodicidad de la función f, se tiene que

$$\begin{aligned}
u(t+N)-u(t) = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \Delta_a^{-(n-\alpha)} f(t+N+k) \\
&\quad - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \Delta_a^{-(n-\alpha)} f(t+k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{s=a}^{t+N+k-n+\alpha} (t+N+k-s-1)^{(n-\alpha-1)} f(s) \\
&\quad - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{s=a}^{t+k-n+\alpha} (t+k-s-1)^{(n-\alpha-1)} f(s) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{s=a-N}^{t+k+n+\alpha} (t+k-s-1)^{(n-\alpha-1)} f(s) \\
&\quad - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{s=a-N}^{a-1} (t+k-s-1)^{(n-\alpha-1)} f(s).
\end{aligned}$$

El resultado enunciado se sigue ahora de modo completamente similar a lo mostrado en [34, Theorem 3.2]. $\square$

Nota 4.11. Para poder afirmar que las funciones $\Delta_a^{-\alpha} f$, ${}^{\mathrm{C}}\Delta_a^{\alpha} f$ o ${}^{\mathrm{RL}}\Delta_a^{\alpha} f$ son S-asintóticamente periódicas, es necesario (de a cuerdo con la Definición 4.26 anterior) que tales funciones son acotadas. Es decir, los resultados anteriores no afirman la propiedad de S-periodicidad asintótica para ninguna de ellas.

4.2.3. Resultados sobre periodicidad asintótica

En el siguiente resultado, asumiremos que $\Delta_a^{-\alpha} f$ es una función acotada, siendo f una función periódica.

Teorema 4.30. *Sea $f\colon \mathbb{N}_a \longrightarrow \mathbb{R}$ una función N-periódica, con $N \in \mathbb{N}$, $N > 1$. Si $\Delta_a^{-\alpha}$, con $0 < \alpha < 1$, es una función acotada, entonces $\Delta_a^{-\alpha} f$ es una función asintóticamente N-periódica.*

Demostración. Por brevedad y comodidad emplearemos la siguiente notación,

$$\varphi(t) = \Delta_a^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=a}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} f(s), \quad t \in \mathbb{N}_{a+\alpha}.$$

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos las siguientes funciones

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &= \varphi(t+nN), \quad t \in \mathbb{N}_{a+\alpha}; \\ \Phi_n(t) &= \sup_{k \geq n} \varphi_k(t), \quad t \in \mathbb{N}_{a+\alpha}. \end{aligned}$$

Dado que φ es, por hipótesis, una función acotada, las funciones φ_n y Φ_n también son funciones acotadas en $\mathbb{N}_{a+\alpha}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Además, teniendo en cuenta la hipótesis de N-periodicidad de la función f, obtenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \Phi_n(t) &= \lim_{n\to+\infty} \left[\sup_{k\geq n} \varphi(t+kN) \right] = \limsup_{n\to+\infty} \varphi(t+nN) \\ &= \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=a}^{t+nN-\alpha} (t+nN-s-1)^{(\alpha-1)} f(s) \\ &= \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=a-nN}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} f(s+nN) \\ &= \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=a-nN}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} f(s). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta ahora que

$$\left| \sum_{a=a-nN}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} f(s) - \sum_{s=a-(n+1)N}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} f(s) \right| =$$

$$= \sum_{s=a-(n+1)N}^{a-nN-1} (t-s-1)^{(\alpha-1)} f(s) \leq N \|f\|_\infty (t-a+(n+1)N)^{(\alpha-1)}$$

$$=N\|f\|_\infty \frac{\Gamma(t-a+(n+1)N+1)}{\Gamma(t-a+(n+1)N+2-\alpha)},$$

concluimos que para cada $t \in \mathbb{N}_{a+\alpha}$, la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$a_n = \sum_{s=a-nN}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} f(s), \quad \text{para cada } \ n \in \mathbb{N},$$

es una sucesión de casi-Cauchy en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ (véase [27]). No obstante, teniendo en cuenta la hipótesis sobre la acotación de la función $\Delta_a^{-\alpha} f$, concluimos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de casi-Cauchy con un único punto de acumulación en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Por tanto, podemos considerar

$$\Phi(t) = \lim_{n\to+\infty} \Phi_n(t) \in \mathbb{R}, \quad \text{para todo } \ t \in \mathbb{N}_{a+\alpha}.$$

Así pues, hemos probado que para todo $t \in \mathbb{N}_{a+\alpha}$,

$$\Phi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{n\to\infty} \sum_{s=a-nN}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} f(s) \in \mathbb{R}. \tag{4.22}$$

A continuación, probaremos que la función Φ definida en (4.22) es una función N-periódica. En virtud del Teorema 4.28 anterior y del Teorema de Heine, tenemos que

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi(t+nN+N) - \varphi(t+nN) = 0.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\Phi(t+N) - \Phi(t) &= \lim_{n\to+\infty} \Phi_n(t+N) - \Phi_n(t) \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big(\sup_{k\geq n} \varphi(t+N+kN) - \sup_{k\geq n} \varphi(t+kN) \Big) \\
&= \limsup_{n\to+\infty} \varphi(t+N+nN) - \varphi(t+nN) \\
&= \lim_{n\to\infty} \varphi(t+N+nN) - \varphi(t+nN) = 0.
\end{aligned}$$

Ahora es claro que Φ es una función N-periódica.

Es decir, hemos probado que $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones que converge puntualmente a la función Φ introducida en (4.22).

A continuación, mostraremos que, en realidad, la sucesión de funciones $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a la función Φ en $\mathbb{N}_{a+\alpha}$. Para ello, dados $n, m \in \mathbb{N}$, consideraremos el conjunto

$$I_n = \{a+\alpha+nN, a+\alpha+nN+1, \ldots, a+\alpha+(n+1)N\}$$

y definimos

$$A_{m,n} = \sup_{t\in I_m} |\Phi_n(t) - \Phi(t)| \in \mathbb{R}.$$

Teniendo en cuenta ahora que Φ es una función N-periódica, deducimos que

$$\begin{aligned} A_{m,n} &= \sup_{t\in I_m} \left| \sup_{k\geq n} \varphi_k(t) - \Phi(t) \right| = \sup_{t\in I_m} \left| \sup_{k\geq n} \varphi(t+kN) - \Phi(t) \right| \\ &= \sup_{t\in I_0} \left| \sup_{k\geq m+n} \varphi(t+kN) - \Phi(t) \right| = A_{0,m+n}. \end{aligned}$$

Dado que, por hipótesis, la función $\Delta_a^{-\alpha} f$ es acotada, es claro ahora que

$$\lim_{s\to\infty} A_{0,s} = 0.$$

Por tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $M_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k \geq M_1$ tenemos que

$$A_{0,k} = \sup_{t\in I_0} |\Phi_k(t) - \Phi(t)| < \varepsilon. \tag{4.23}$$

Así pues, dado $t \in \mathbb{N}_{a+\alpha}$ arbitrario, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $t \in I_m$ y entonces, en virtud de (4.23), para $k \geq M_1$, tenemos que

$$A_{m,n} = A_{0,m+n} = \sup_{t\in I_m} |\Phi_n(t) - \Phi(t)| < \varepsilon.$$

Es decir, para $n \geq M_1$,

$$\sup_{t\in \mathbb{N}_{a+\alpha}} |\Phi_n(t) - \Phi(t)| < \varepsilon,$$

o equivalentemente, $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a la función Φ en el conjunto $\mathbb{N}_{a+\alpha}$.

Si en lugar de Φ_n consideramos, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\Psi_n(t) = \inf_{k\geq n} \varphi_k(t) = \inf_{k\geq n} \varphi(t+kN),$$

podemos probar entonces de modo similar a lo visto anteriormente que la sucesión de funciones $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también converge uniformemente a la función Φ en el conjunto $\mathbb{N}_{a+\alpha}$.

Finalmente, probaremos que

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) - \Phi(t) = 0.$$

Dado que

$$\Psi_n(t) = \inf_{k\geq n} \varphi_k(t) \leq \varphi_n(t) \leq \sup_{k\geq n} \varphi_k(t) = \Phi_n(t), \quad \text{para todo } \; n \in \mathbb{N},$$

y las sucesiones $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergen uniformemente a la función Φ en el conjunto $\mathbb{N}_{a+\alpha}$, concluimos que la sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también converge uniformemente a la función Φ en $\mathbb{N}_{a+\alpha}$. Así pues, dado $\varepsilon > 0$ existe $M_2 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq M_2$

$$\varphi_n(t) - \Phi(t) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para todo } \; t \in \mathbb{N}_{a+\alpha},$$

y tenemos entonces que

$$|\varphi(t) - \Phi(t)| \leq |\varphi(t) - \varphi_n(t)| + |\varphi_n(t) - \Phi(t)| \leq |\varphi(t) - \varphi_n(t)| + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.24}$$

En virtud ahora del Teorema 4.28 anterior, existe $T > 0$ tal que si $t > T$ y $t \in \mathbb{N}_{a+\alpha}$, entonces

$$|\varphi(t+N) - \varphi(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Teniendo en cuenta ahora la última desigualdad, para $t > T$ tenemos que

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - \varphi(t+nN)| \leq & |\varphi(t) - \varphi(t+N)| + |\varphi(t+N) - \varphi(t+2N)| \\ & + \cdots + |\varphi(t+nN) - \varphi(t+(n-1)N)| \\ \leq & \frac{\varepsilon}{2n} n = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Por tanto, teniendo en cuenta (4.24) y (4.25), concluimos finalmente que para $t > T$,

$$|\varphi(t) - \Phi(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto es,

$$\lim_{t\to+\infty} \Phi(t) - \varphi(t) = 0$$

El resultado enunciado se sigue ahora teniendo en cuenta la identidad $\varphi(t) = \Phi(t) + (\varphi(t) - \Phi(t))$. □

Corolario 7. *Sea $f \colon \mathbb{N}_a \longrightarrow \mathbb{R}$ una función N-periódica y $\alpha > 0$. Si ${}^{\mathrm{C}}\Delta_a^\alpha f$ es una función acotada, entonces ${}^{\mathrm{C}}\Delta_a^\alpha f$ es una función asintóticamente N-periódica.*

Demostración. Teniendo en cuenta que para $n \in \mathbb{N}$ la diferencia progresiva de orden $n \in \mathbb{N}$ de una función N-periódica es nuevamente una función N-periódica, el resultado enunciado se sigue a partir del Teorema 4.30 teniendo en cuenta la Definición 4.20. □

Corolario 8. *Sea* $f\colon \mathbb{N}_a \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función* N*-periódica y* $0 < \alpha < 1$*. Si la función* $\Delta_a^{-(1-\alpha)}$ *es acotada, entonces la suma fraccionaria* ${}^{\mathrm{RL}}\Delta_a^{\alpha} f$ *es una función asintóticamente* N*-periódica.*

Demostración. Teniendo en cuenta que ${}^{\mathrm{RL}}\Delta_a^{\alpha} f = \Delta^1 \Delta_a^{-(1-\alpha)} f$ y el Teorema 4.30 anterior, tenemos que

$$^{\mathrm{RL}}\Delta_a^{\alpha} f(t) = \Delta^1(f_1 + f_2)(t), \quad t \in \mathbb{N}_{a+\alpha},$$

donde f_1 es una función N-periódica y f_2 es tal que

$$\lim_{t\to+\infty} f_2(t) = 0.$$

Dado que $\Delta^1 f_1$ es una función N-periódica y $\Delta_a^{-(1-\alpha)} f$ es una función acotada, tenemos que

$$\max\left\{ \limsup_{t\to+\infty} |\Delta^1 f_2(t)|, \liminf_{t\to+\infty} |\Delta^1 f_2(t)| \right\} < \infty.$$

Así pues, si

$$\limsup_{t\to+\infty} \Delta^1 f_2(t) = \liminf_{t\to+\infty} \Delta^1 f_2(t) = \lim_{t\to+\infty} \Delta^1 f(t) = d \in \mathbb{R},$$

entonces ${}^{\mathrm{RL}}\Delta_a^{\alpha} f(t) = (\Delta^1 f_1(t) + d) + (\Delta^1 f_2(t) - d)$, y entonces el resultado enunciado estaría probado. En otro caso, esto es, si

$$d_1 = \limsup_{t\to+\infty} \Delta^1 f_2(t) > \liminf_{t\to+\infty} \Delta^1 f_2(t) = d_2,$$

entonces podemos escribir ${}^{\mathrm{RL}}\Delta_a^{\alpha} f(t) = (\Delta^1 f(t) + f_3(t)) + (\Delta^1 f_2(t) - f_3(t)$, siendo f_3 una función N-periódica de modo que

$$d_1 = \limsup_{t\to+\infty} f_3(t) \quad \text{y} \quad d_2 = \liminf_{t\to+\infty} f_3(t).$$

Esto finaliza la prueba del resultado enunciado. $\square$

4.2.4. Acotación de sumas y diferencias fraccionarias

A la vista de los resultados mostrados en el epígrafe anterior, resulta importante conocer cuando la suma fraccionaria de orden $0 < \alpha < 1$ de una función periódica es una función acotada. Tal problema será objeto de estudio en lo que sigue.

Para ello, inicialmente, necesitamos probar dos resultados relacionados con la transformada R_a. Los teoremas que siguen deberían recordarnos al Teorema del valor final para la transformada de Laplace.

Teorema 4.31. *[Teorema del valor final para la transformada R_a] Consideremos $f\colon \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ una función arbitraria, se tiene luego que*

$$\lim_{s\to 0^+} R_a\big[f(t)\big](s) = \lim_{n\to+\infty} f(a+n), \tag{4.26}$$

siempre y cuando el límite del segundo miembro exista.

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned}
R_a\Big[\Delta f(t)\Big](s) &= \sum_{t=a}^{\infty}\Big(\frac{1}{s+1}\Big)^{t+1}\Delta f(t) = \sum_{t=a}^{\infty}\Big(\frac{1}{s+1}\Big)^{t+1}(f(t+1)-f(t))\\
&= \sum_{t=a}^{\infty}\Big(\frac{1}{s+1}\Big)^{t+1}f(t+1) - \sum_{t=a}^{\infty}\Big(\frac{1}{s+1}\Big)^{t+1}f(t) \qquad (4.27)\\
&= \sum_{t=a+1}^{\infty}\Big(\frac{1}{s+1}\Big)^{t}f(t) - \sum_{t=a}^{\infty}\Big(\frac{1}{s+1}\Big)^{t+1}f(t)\\
&=(s+1)\sum_{t=a+1}^{\infty}\Big(\frac{1}{s+1}\Big)^{t+1}f(t) - \sum_{t=a}^{\infty}\Big(\frac{1}{s+1}\Big)^{t+1}f(t)\\
&=s\sum_{t=a+1}^{\infty}\Big(\frac{1}{s+1}\Big)^{t+1}f(t) + \sum_{t=a+1}^{\infty}\Big(\frac{1}{s+1}\Big)^{t+1}f(t) - \sum_{t=a}^{\infty}\Big(\frac{1}{s+1}\Big)^{t+1}f(t)\\
&=s\,R_{a+1}\big[f(t)\big](s) + \lim_{n\to+\infty}\Big[\sum_{t=a+1}^{a+n}\Big(\frac{1}{s+1}\Big)^{t+1}f(t) - \sum_{t=a}^{a+n}\Big(\frac{1}{s+1}\Big)^{t+1}f(t)\Big]\\
&=s\,R_{a+1}\big[f(t)\big](s) - \Big(\frac{1}{s+1}\Big)^{a+1}f(a). \qquad (4.28)
\end{aligned}$$

Así pues, en virtud de (4.27), concluimos que

$$\begin{aligned}
&\lim_{s\to 0^+} R_a\big[\Delta f(t)\big](s)\\
&\qquad= \lim_{s\to 0^+}\lim_{n\to+\infty}\Big[\sum_{t=a}^{a+n}\Big(\frac{1}{s+1}\Big)^{t+1}f(t+1) - \sum_{t=a}^{a+n}\Big(\frac{1}{s+1}\Big)^{t+1}f(t)\Big]\\
&\qquad= \lim_{n\to\infty}\Big[\sum_{t=a}^{a+n}f(t+1) - \sum_{t=a}^{a+n}f(t)\Big]\\
&\qquad= \lim_{n\to+\infty} f(a+n+1) - f(a), \qquad (4.29)
\end{aligned}$$

mientras que (4.28) implica que

$$\lim_{s\to 0^+} R_a\big[\Delta f(t)\big](s) = \lim_{s\to 0^+} s\,R_{a+1}\big[f(t)\big](s) - f(a). \tag{4.30}$$

El resultado enunciado se deduce ahora teniendo en cuenta las identidades (4.29) y (4.30). □

Nota 4.12. De forma similar a lo mostrado en el Teorema 4.31 anterior, se puede probar un Teorema del valor inicial para la transformada R_a.

Para una función periódica no constante f, la identidad (4.26) anterior no tiene ninguna utilidad, ya que no existe tal límite. Sin embargo, en tal caso, se sabe (véase [38] para la transformada de Laplace en el caso continuo) que el segundo miembro de (4.26) proporciona importante información sobre la función f.

Sea $f\colon \mathbb{N}_a \longrightarrow \mathbb{R}$ una función N-periódica arbitraria con $N \in \mathbb{N}$, $N > 1$. Tenemos entonces que

$$R_a\big[f(t)\big](s) = \frac{(s+1)^N}{(s+1)^N - 1} \sum_{t=a}^{a+N-1} f(t)\Big(\frac{1}{s+1}\Big)^{t+1}$$

y por tanto, en virtud de la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{s\to 0^+} s\,\frac{(s+1)^N}{(s+1)^N - 1} \sum_{t=a}^{a+N-1} f(t)\Big(\frac{1}{s+1}\Big)^{t+1} = \frac{1}{N}\sum_{t=a}^{a+N-1} f(t).$$

Luego concluimos finalmente que

$$\lim_{s\to 0^+} s\,R_a\big[f(t)\big](s) = \frac{1}{N}\sum_{t=a}^{a+N-1} f(t). \tag{4.31}$$

Para funciones asintóticamente periódicas tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.32 (Teorema del valor final generalizado)**.** *Sea $f\colon \mathbb{N}_a \longrightarrow \mathbb{R}$ una función asintóticamente N-periódica con $N \in \mathbb{N}$, $N > 1$. Tenemos entonces que*

$$\lim_{s\to 0^+} s\,R_a\big[f(t)\big](s) = \frac{1}{N}\sum_{t=a}^{a+N-1} f_1(t),$$

siendo $f = f_1 + f_2$, con f_1 una función N-periódica en el conjunto $\mathbb{N}_a$ y f_2 tal que $\lim_{t\to\infty} f_2(t) = 0$.

Demostración. Dado que la transformada R_a es un operador lineal, tenemos que

$$\lim_{s\to 0^+} s\,R_a\Big[f(t) - f_1(t)\Big](s) = \lim_{s\to 0^+} s\,R_a\big[f_2(t)\big](s) = \lim_{n\to+\infty} f_2(a+n) = 0$$

y así, podemos concluir ahora que

$$\lim_{s\to 0^+} s\,R_a\big[f(t)\big](s) = \frac{1}{N}\sum_{t=a}^{a+N-1} f_1(t). \qquad \square$$

Teorema 4.33. *Sean $0<\alpha<1$ y $f\colon \mathbb{N}_a \longrightarrow \mathbb{R}$ una función N-periódica no nula con $N\in\mathbb{N}$, $N>1$. La suma fraccionaria $\Delta_a^{-\alpha} f$ es una función acotada si y solo si*

$$\sum_{k=a}^{a+N-1} f(k) = 0. \tag{4.32}$$

Demostración. Empecemos asumiendo que la suma fraccionaria $\Delta_a^{-\alpha} f$ es una función acotada. En tal caso, empleando el Lema 4.24 anterior y la hipótesis de N-periodicidad sobre la función f, tenemos que

$$\begin{aligned} s\,R_{a+\alpha}\big[\Delta_a^{-\alpha} f(t)\big](s) =& \frac{s}{s^\alpha} R_a\big[f(t)\big](s) \\ =& \frac{s}{s^\alpha}\frac{(s+1)^N}{(s+1)^N-1}\sum_{k=a}^{a+N+1} f(k)\Big(\frac{1}{s+1}\Big)^{k+1}. \end{aligned}$$

Así pues, aplicando ahora la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{s\to 0^+} s\,R_{a+\alpha}\big[\Delta_a^{-\alpha} f(t)\big](s) = \lim_{s\to 0^+}\frac{1}{s^\alpha}\frac{1}{N}\sum_{k=a}^{a+N-1} f(k). \tag{4.33}$$

Dado que, por hipótesis, $\Delta_a^{-\alpha} f$ es una función acotada, en virtud del Teorema 4.30 anterior, $\Delta_a^{-\alpha} f$ es una función asintóticamente N-periódica. Por tanto, podemos aplicar ahora el Teorema del valor final generalizado (Teorema 4.32 anterior) y concluir que

$$\lim_{s\to 0^+} s\,R_{a+\alpha}\big[\Delta_a^{-\alpha} f(t)\big](s) = \frac{1}{N}\sum_{k=a}^{a+N-1} f(k). \tag{4.34}$$

Por tanto, teniendo en cuenta (4.33) y (4.34), es ahora claro que si $\Delta_a^{-\alpha} f$ es una función acotada entonces debe satisfacerse (4.32).

Supongamos ahora que (4.32) es cierto y veamos entonces que $\Delta_a^{-\alpha} f$ es una función acotada. Partimos inicialmente de la identidad

$$\Delta_a^{-\alpha} f(t) = \Phi - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lim_{n\to+\infty}\sum_{t=a-nN}^{a-1}(t-s-1)^{(\alpha-1)} f(s)$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a-1)^{(\alpha-1)}f(a),$$

donde Φ es la función considerada en (4.22). Así, en virtud del Teorema 4.30, dado que se cumple (4.32), sabemos que el primer sumando de la expresión anterior es una función acotada (ya que es una función periódica). Además, para el segundo sumando, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{s=a-nN}^{a-1}(t-s-1)^{(\alpha-1)}f(s) = & \sum_{j=1}^{n}\sum_{s=a-jN}^{a-1+(1-j)N}(t-s-1)^{(\alpha-1)}f(s) \\
= & \sum_{j=1}^{n}\sum_{s=a}^{a-1+N}(t-s+jN-1)^{(\alpha-1)}f(s-jN) \\
= & \sum_{j=1}^{n}\sum_{s=a}^{a-1+N}(t-s+jN-1)^{(\alpha-1)}f(s) \\
= & \sum_{j=1}^{n}\sum_{s=a}^{a-1+N}(t-s+jN-1)^{(\alpha-1)}f^{+}(s) \\
& -\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=a}^{a-1+n}(t-s+jN-1)^{(\alpha-1)}f^{-}(s) \\
\leq & c\left[\sum_{j=1}^{n}(t-a+jN-1)^{(\alpha-1)}-\sum_{j=1}^{n}(t-a+(j-1)N-1)^{(\alpha-1)}\right] \\
= & c\big[(t-a+nN-1)^{(\alpha-1)}-(t-a-1)^{(\alpha-1)}\big] \\
\leq & \frac{c\Gamma(t-a+nN)}{\Gamma(t-a+nN+1-\alpha)},
\end{aligned} \tag{4.35}$$

siendo

$$c=\sum_{s=a}^{a-1+N}f^{+}(s)=\sum_{s=a}^{a-1+N}f^{-}(s)>0, \tag{4.36}$$

con $f^{+}=\max\{f,0\}$ y $f^{-}=\max\{-f,0\}$. Análogamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\sum_{s=a-nN}^{a-1}(t-s-1)^{(\alpha-1)}f(s) \geq -\frac{c\,\Gamma(t-a+nN)}{\Gamma(t-a+nN+1-\alpha)}. \tag{4.37}$$

Por tanto, en virtud de (4.35) y (4.37), deducimos que

$$-\frac{c\,\Gamma(t-a+nN)}{\Gamma(t-a+nN+1-\alpha)} \leq \sum_{s=a-nN}^{a-1}(t-s-1)^{(\alpha-1)}f(s)$$
$$\leq \frac{c\,\Gamma(t-a+nN)}{\Gamma(t-a+nN+1-\alpha)}$$

y así, por el teorema del emparedado, debe ser

$$\lim_{t\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\sum_{s=a-nN}^{a-1}(t-s-1)^{(\alpha-1)}f(s)=0.$$

Dado que para $0<\alpha<1$,

$$\lim_{t\to+\infty}(t-a-1)^{(\alpha-1)}f(a)=0,$$

hemos probado entonces que $\Delta_a^{-\alpha}f$ es una función acotada. □

Nota 4.13. Conviene observar que la segunda parte de la prueba del Teorema 4.33 nos permite afirmar ahora que si f es una función N-periódica no idénticamente nula, $\alpha\in(0,1)$ y se satisface (4.32), entonces $\Delta_a^{-\alpha}f$ es una función asintóticamente N-periódica.

Notemos también que la primera parte de la prueba del Teorema 4.33 depende de la tesis del Teorema 4.30.

Corolario 9. *Sean $\alpha\in(0,1)$ y $f\colon\mathbb{N}_a\longrightarrow\mathbb{R}$ una función N-periódica, con $N\in\mathbb{N}$ y $N>1$, tal que no se satisface (4.32). Tenemos entonces que*

$$\lim_{t\to+\infty}\Delta_a^{-\alpha}f(t)=\operatorname{sgn}\Big(\sum_{k=a}^{a+N-1}f(k)\Big)\infty.$$

Demostración. Sean

$$\tilde{c}=\frac{1}{N}\sum_{k=a}^{a+N-1}f(k)\quad\text{y}\quad\tilde{f}=f-\tilde{c};$$

luego $\tilde{f}$ es una función periódica que satisface (4.32); por tanto, tenemos que

$$\Delta_a^{-\alpha}f(t)=\Delta_a^{-\alpha}\tilde{f}(t)+\frac{\tilde{c}}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=a}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)},$$

donde el primer sumando es una función asintóticamente periódica. Además, para $t = n + a + \alpha$ con $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{s=a}^{t-\alpha}(t - s-1)^{(\alpha-1)} = & \sum_{s=a}^{n+a}(n + a + \alpha - s - 1)^{(\alpha-1)} \\ = & \sum_{s=0}^{n}(n + \alpha - s - 1)^{(\alpha-1)} \\ = & \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+1)} + \frac{\Gamma(n-1+\alpha)}{\Gamma(n)} + \cdots + \Gamma(\alpha) \\ > & \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \Gamma(\alpha),\end{aligned}$$

donde hemos empleado la desigualdad

$$\frac{n\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+1)} > \frac{n\Gamma(n)}{\Gamma(n+1)} = 1, \quad \text{para todo } \ n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad \alpha \in (0,1).$$

Dado que la serie armónica es divergente, el resultado queda probado. □

Nota 4.14. Consideremos ahora $\alpha \in (1,2)$ y una función f no idénticamente nula y N-periódica con media nula. En tal caso, asumiendo $a = 0$, tenemos que

$$\Delta_0^{-\alpha} f(t) = \Delta_0^{-(\alpha-1)} \Delta_0^{-1} f(t), \quad t \in \mathbb{N}_\alpha.$$

Dado que $\Delta_a^{-1} f$ es una función N-periódica, en virtud del Teorema 4.33 anterior, tenemos que $\Delta_0^{-\alpha}$ es una función acotada siempre y cuando

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta_0^{-\alpha} f(t) = (N-1)f(0) + (N-2)f(2) + \cdots + f(N-2) = 0.$$

Conviene también recordar aquí que la integral fraccionaria de orden $1 < \alpha < 2$ de una función periódica de media nula puede también ser acotada o no acotada.

4.2.5. Integrales fraccionarias *vs* sumas fraccionarias

Trabajando con el operador diferencia del conocido como h-cálculo, podríamos estar tentados a aproximar integrales fraccionarias empleando sumas fraccionarias. Para más información sobre el h-cálculo puede consultarse [82].

Sin embargo, si consideramos sumas fraccionarias de orden $1 < \alpha < 2$, tenemos que

$${}_h\Delta_0^{-\alpha} \cos(t) = {}_h\Delta_0^{-(\alpha-1)} {}_h\Delta_0^{-1} \cos(t), \quad t \in \{h\alpha, 2h\alpha, \dots\},$$

donde (véase [50, Theorem 2.5])

$$ {}_h\Delta_0^{-1}\cos(t) = \frac{\operatorname{sen}(t-h/2)}{2\operatorname{sen}(h/2)} + \frac{1}{2}, \quad t \in \{h, 2h, \dots\}. $$

En realidad, nos gustaría tener que, para $t \in \{h\alpha, 2h\alpha, \dots\}$,

$$ \left[I_0^\alpha \cos(s)\right](t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\cos(s)\,ds \approx h\,{}_h\Delta_0^{-\alpha}\cos(t), $$

pero $I_0^\alpha \cos(t)$ es una función acotada, mientras que $h\,{}_h\Delta_0^{-\alpha}\cos(t)$ no lo es.

Bibliografía

[1] M. Abramowitz e I. A. Stegun. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, volume 55 of *National Bureau of Standards Applied Mathematics Series*. U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1964.

[2] R. P. Agarwal, Asma, V. Lupulescu y D. O'Regan. L^p-solutions for a class of fractional integral equations. *J. Integral Equations Appl.*, 29(2):251–270, 2017.

[3] A. Aghajani y E. Pourhadi. Application of measure of noncompactness to ℓ_1-solvability of infinite systems of second order differential equations. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 22(1):105–118, 2015.

[4] B. Ahmad, J. Losada y J. J. Nieto. On antiperiodic nonlocal three-point boundary value problems for nonlinear fractional differential equations. *Discrete Dyn. Nat. Soc.*, Art. ID 973783, 7 pp., 2015.

[5] E. Alvarez-Pardo y C. Lizama. Mild solutions for multi-term time-fractional differential equations with nonlocal initial conditions. *Electron. J. Differential Equations*, 39, 10 pp., 2014.

[6] G. A. Anastassiou. Discrete fractional calculus and inequalities, 2009. https://arxiv.org/abs/0911.3370

[7] A. Anguraj, P. Karthikeyan, M. Rivero y J. J. Trujillo. On new existence results for fractional integro-differential equations with impulsive and integral conditions. *Comput. Math. Appl.*, 66(12):2587–2594, 2014.

[8] I. Area, J. Losada y A. Manintchap. On some fractional Pearson equations. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 18(5):1164–1178, 2015.

[9] I. Area, J. Losada y J. J. Nieto. On fractional derivatives and primitives of periodic functions. *Abstr. Appl. Anal.*, Art. ID 392598, 8 pp., 2014.

[10] I. Area, J. Losada y J. J. Nieto. A note on the fractional logistic equation. *Phys. A*, 444:182–187, 2016.

[11] I. Area, J. Losada y J. J. Nieto. On quasi-periodic properties of fractional sums and fractional differences of periodic functions. *Appl. Math. Comput.*, 273:190–200, 2016.

[12] I. Area, J. Losada y J. J. Nieto. On quasi-periodicity properties of fractional integrals and fractional derivatives of periodic functions. *Integral Transforms Spec. Funct.*, 27(1):1–16, 2016.

[13] K. B. Athreya y S. N. Lahiri. *Measure theory and probability theory*. Springer Texts in Statistics. Springer, New York, 2006.

[14] F. M. Atici y P. W. Eloe. A transform method in discrete fractional calculus. *Int. J. Difference Equ.*, 2(2):165–176, 2007.

[15] F. M. Atici y P. W. Eloe. Initial value problems in discrete fractional calculus. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 137(3):981–989, 2009.

[16] R. L. Bagley y J. TORVIK. Fractional calculus-a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures. *AIAA journal*, 21(5):741–748, 1983.

[17] D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas y J. J. Trujillo. *Fractional calculus*, volume 5 of *Series on Complexity, Nonlinearity and Chaos*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2017.

[18] D. Baleanu, S. Z. Nazemi y S. Rezapour. Attractivity for a k-dimensional system of fractional functional differential equations and global attractivity for a k-dimensional system of nonlinear fractional differential equations. *J. Inequal. Appl.*, 2014:31, 14 pp., 2014.

[19] J. Banaś y K. Goebel. *Measures of noncompactness in Banach spaces*, volume 60 of *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1980.

[20] J. Banaś y D. O'Regan. On existence and local attractivity of solutions of a quadratic Volterra integral equation of fractional order. *J. Math. Anal. Appl.*, 345(1):573–582, 2008.

[21] J. Banaś y B. Rzepka. An application of a measure of noncompactness in the study of asymptotic stability. *Appl. Math. Lett.*, 16(1):1–6, 2003.

[22] J. Banaś y B. Rzepka. On existence and asymptotic behavior of solutions of infinite systems of differential equations. *PanAmer. Math. J.*, 14(1):105–115, 2004.

[23] R. G. Bartle y D. R. Sherbert. *Introduction to real analysis.* John Wiley & Sons, Inc., New York, segunda edición, 1992.

[24] H. Batarfi, J. Losada, J. J. Nieto y W. Shammakh. Three-point boundary value problems for conformable fractional differential equations. *J. Funct. Spaces*, Art. ID 706383, 6pp., 2015.

[25] B. Bayour y D. F. M. Torres. Existence of solution to a local fractional nonlinear differential equation. *J. Comput. Appl. Math.*, 312:127–133, 2017.

[26] A. S. Besicovitch. *Almost periodic functions.* Dover Publications, Inc., New York, 1955.

[27] D. Burton y J. Coleman. Quasi-Cauchy sequences. *Amer. Math. Monthly*, 117(4):328–333, 2010.

[28] M. Caputo. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent. *Geophysical Journal International*, 13(5):529–539, 1967.

[29] M. Caputo. *Elasticità e dissipazione.* Zanichelli, 1969.

[30] M. Caputo y M. Fabrizio. A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Progr. Fract. Differ. Appl*, 1(2):1–13, 2015.

[31] F. Chen, X. Luo y Y. Zhou. Existence results for nonlinear fractional difference equation. *Adv. Difference Equ.*, Art. ID 713201, 12 pp., 2011.

[32] F. Chen, J. J. Nieto y Y. Zhou. Global attractivity for nonlinear fractional differential equations. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 13(1):287–298, 2012.

[33] T. S. Chihara. *An introduction to orthogonal polynomials.* Gordon and Breach Science Publishers, New York-London-Paris, 1978. Mathematics and its Applications, Vol. 13.

[34] J. Diblík, M. Fečkan y M. Pospíšil. Nonexistence of periodic solutions and S-asymptotically periodic solutions in fractional difference equations. *Appl. Math. Comput.*, 257:230–240, 2015.

[35] M. D'Ovidio y P. Loreti. Solutions of fractional logistic equations by euler's numbers. *Phys. A*, 506:103–108, 2018.

[36] M. M. Džrbašjan. A generalized Riemann-Liouville operator and some applications of it. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 177:767–770, 1967.

[37] M. M. Džrbašjan. An extension of the Denjoy-Carleman quasianalytic classes. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 180:782–785, 1968.

[38] E. Gluskin. Let us teach this generalization of the final-value theorem. *European Journal of Physics*, 24(6):591, 2003.

[39] R. Gorenflo, A. A. Kilbas, F. Mainardi y S. V. Rogosin. *Mittag-Leffler functions, related topics and applications.* Springer Monographs in Mathematics. Springer, Heidelberg, 2014.

[40] G. Haiyin, W. Ke, W. Fengying y D. Xiaohua. Massera-type theorem and asymptotically periodic logistic equations. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 7(5):1268–1283, 2006.

[41] H. R. Henríquez. Asymptotically periodic solutions of abstract differential equations. *Nonlinear Anal.*, 80:135–149, 2013.

[42] H. R. Henríquez, M. Pierri y P. Táboas. On S-asymptotically ω-periodic functions on Banach spaces and applications. *J. Math. Anal. Appl.*, 343(2):1119–1130, 2008.

[43] R. A. Horn y C. R. Johnson. *Matrix analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, segunda edición, 2013.

[44] W. R. Inc. SystemModeler, Version 5.1.

[45] M. E. H. Ismail. *Classical and quantum orthogonal polynomials in one variable*, volume 98 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[46] N. L. Johnson, S. Kotz y N. Balakrishnan. *Continuous univariate distributions. Vol. 2*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Applied Probability and Statistics. John Wiley & Sons, Inc., New York, segunda edición, 1995.

[47] G. Jumarie. An approach to differential geometry of fractional order via modified Riemann-Liouville derivative. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 28(9):1741–1768, 2012.

[48] G. Jumarie. On the fractional solution of the equation $f(x+y) = f(x)f(y)$ and its application to fractional Laplace's transform. *Appl. Math. Comput.*, 219(4):1625–1643, 2012.

[49] E. Kaslik y S. Sivasundaram. Non-existence of periodic solutions in fractional-order dynamical systems and a remarkable difference between integer and fractional-order derivatives of periodic functions. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 13(3):1489–1497, 2012.

[50] W. G. Kelley y A. C. Peterson. *Difference equations*. Harcourt/Academic Press, San Diego, CA, segunda edición, 2001.

[51] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef y M. Sababheh. A new definition of fractional derivative. *J. Comput. Appl. Math.*, 264:65–70, 2014.

[52] K. N. Khan, W. Lamb y A. C. McBride. Fractional calculus of periodic distributions. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 14(2):260–283, 2011.

[53] M. A. Khan, T. Ali, S. S. Dragomir y M. Z. Sarikaya. Hermite–Hadamard type inequalities for conformable fractional integrals. *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM*, 112(4):1033–1048, 2018.

[54] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava y J. J. Trujillo. *Theory and applications of fractional differential equations*, volume 204 of *North-Holland Mathematics Studies*. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

[55] F. Li y J. Zhang. Existence of mild solutions to fractional integrodifferential equations of neutral type with infinite delay. *Adv. Difference Equ.*, Art. ID 963463, 15 pp., 2011.

[56] J. Losada y J. J. Nieto. Properties of a new fractional derivative without singular kernel. *Progr. Fract. Differ. Appl*, 1(2):87–92, 2015.

[57] J. Losada, J. J. Nieto y E. Pourhadi. On the attractivity of solutions for a class of multi-term fractional functional differential equations. *J. Comput. Appl. Math.*, 312:2–12, 2017.

[58] E. R. Love. Fractional Integration, and Almost Periodic Functions. *Proc. London Math. Soc. (2)*, 44(5):363–397, 1938.

[59] F. Mainardi y R. Gorenflo. On Mittag-Leffler-type functions in fractional evolution processes. *J. Comput. Appl. Math.*, 118(1-2):283–299, 2000.

[60] K. S. Miller y B. Ross. Fractional difference calculus. In *Univalent functions, fractional calculus, and their applications (KBoriyama, 1988)*, Ellis Horwood Ser. Math. Appl., 139–152. Horwood, Chichester, 1989.

[61] S. H. J. Nicola y M. Pierri. A note on S-asymptotically periodic functions. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 10(5):2937–2938, 2009.

[62] A. F. Nikiforov, S. K. Suslov y V. B. Uvarov. *Classical orthogonal polynomials of a discrete variable.* Springer Series in Computational Physics. Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[63] K. B. Oldham y J. Spanier. *The fractional calculus.* Academic Press, New York-London, 1974.

[64] K. Pearson. Contributions to the mathematical theory of evolution. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A*, 185:71–110, 1894.

[65] J. Peetre, S. Nikol'skii, L. Kudryavtsev, V. Maz'ya y S. Nikol'skii. *Analysis III: Spaces of Differentiable Functions.* Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Springer Berlin Heidelberg, 2013.

[66] J. Peng y K. Li. A note on property of the Mittag-Leffler function. *J. Math. Anal. Appl.*, 370(2):635–638, 2010.

[67] I. Podlubny. *Fractional differential equations*, volume 198 of *Mathematics in Science and Engineering.* Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1999.

[68] M. R. Rapaić, T. B. Šekara y V. Govedarica. A novel class of fractionally orthogonal quasi-polynomials and new fractional quadrature formulas. *Appl. Math. Comput.*, 245:206–219, 2014.

[69] W. Rudin. *Principles of mathematical analysis.* McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, tercera edición, 1976. International Series in Pure and Applied Mathematics.

[70] S. G. Samko, A. A. Kilbas y O. I. Marichev. *Fractional integrals and derivatives*. Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon, 1993.

[71] S. Sitho, S. K. Ntouyas, P. Agarwal y J. Tariboon. Noninstantaneous impulsive inequalities via conformable fractional calculus. *J. Inequal. Appl.*, 2018:261 p., 2018.

[72] N. J. A. Sloane. Sequence A001970. *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*.

[73] N. J. A. Sloane. Sequence A155585. *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*.

[74] D. R. Smart. *Fixed point theorems*. Cambridge University Press, London-New York, 1974. Cambridge Tracts in Mathematics, No. 66.

[75] E. M. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton Mathematical Series, No. 30. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

[76] P. J. Szabł owski. A few remarks on orthogonal polynomials. *Appl. Math. Comput.*, 252:215–228, 2015.

[77] G. Szegő. *Orthogonal polynomials*. American Mathematical Society, Providence, R.I., cuarta edición, 1975.

[78] V. E. Tarasov. No violation of the Leibniz rule. No fractional derivative. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 18(11):2945–2948, 2013.

[79] J. A. Tenreiro Machado, V. Kiryakova y F. Mainardi. A poster about the old history of fractional calculus. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 13(4):447–454, 2010.

[80] J. A. Tenreiro Machado, V. Kiryakova y F. Mainardi. A poster about the recent history of fractional calculus. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 13(3):329–334, 2010.

[81] P. J. Torvik y R. L. Bagley. On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials. *Journal of Applied Mechanics*, 51(2):294–298, 1984.

[82] J. Čermák y T. Kisela. Note on a discretization of a linear fractional differential equation. *Math. Bohem.*, 135(2):179–188, 2010.

[83] D. C. Vella. Explicit formulas for Bernoulli and Euler numbers. *Integers*, 8:A01, 7, 2008.

[84] H. Vu, D. O'Regan y N. V. Hoa. Regularization and error estimates for an inverse heat problem under the conformable derivative. *Open Math.*, 16:999–1011, 2018.

[85] J. Wang, M. Fečkan y Y. Zhou. Nonexistence of periodic solutions and asymptotically periodic solutions for fractional differential equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 18(2):246–256, 2013.

[86] J. Wang, Y. Zhou y M. Fečkan. Abstract Cauchy problem for fractional differential equations. *Nonlinear Dynam.*, 71(4):685–700, 2013.

[87] Y. Wang y C. Li. Does the fractional brusselator with efficient dimension less than 1 have a limit cycle? *Physics Letters A*, 363(5-6):414–419, 2007.

[88] B. J. West. Exact solution to fractional logistic equation. *Phys. A*, 429:103–108, 2015.

[89] D. V. Widder. *The Laplace Transform.* Princeton Mathematical Series, v. 6. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1941.

[90] Z. Zhang, Q. Ning y H. Wang. Mild solutions of fractional evolution equations on an unbounded interval. *Adv. Difference Equ.*, 2014:27, 10 pp., 2014.