

AVALIAÇÃO DO COMPORTAMENTO DE ESTABILIDADE DE VIGAS DE AÇO COM SECÇÃO EM I USANDO UM ELEMENTO FINITO GEOMETRICAMENTE EXATO

Rodrigo Gonçalves^a

^a *CERIS e Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Ciências e Tecnologia,
Universidade Nova de Lisboa*

Resumo. Este artigo tem dois objetivos: (i) divulgar os chamados “elementos finitos de barra geometricamente exatos” e (ii) reportar os resultados de um estudo efetuado com este tipo de elementos, relativo ao comportamento não-linear e resistência de vigas com secção em I. Apresenta-se um elemento finito geometricamente exato, o qual é utilizado para realizar um estudo paramétrico envolvendo vigas com três condições de apoio/carregamento. Para além de secções com valores da relação altura/largura *standard*, são também analisadas secções com banzos largos. Mostra-se que, para estas últimas, a trajetória de pós-encurvadura é bastante rígida e a resistência é superior à fornecida pelo Eurocódigo 3.

1. Introdução

No caso do Eurocódigo 3 (EC3) [1], as disposições relativas à encurvadura lateral por flexão-torção (LT) de vigas foram significativamente revistas nos últimos anos. Na versão pr-EN do EC3 eram fornecidas apenas duas curvas de encurvadura e o valor recomendado para o fator parcial γ_{M1} era 1,1. No contexto da preparação da versão EN da norma foram realizados vários estudos no âmbito do Comité Técnico 8 (Estabilidade) da ECCS [2], os quais conduziram a dois métodos de cálculo: (i) o “caso geral” (CG) da cláusula 6.3.2.2 e (ii) o “caso especial” (CE) para seções em I laminadas ou soldadas equivalentes, cláusula 6.3.2.3. Além de se ter aumentado o número de curvas de encurvadura, recomenda-se agora $\gamma_{M1} = 1,0$ e é possível modificar (aumentar) o fator de redução obtido com o CE através de um fator f , função da forma do diagrama de momentos entre contraventamentos laterais (apesar de este efeito estar também refletido no momento crítico e , portanto, na esbelteza normalizada).

Após a publicação da versão EN do EC3, têm sido apresentados vários estudos para avaliar as novas disposições regulamentares e/ou propor alterações (e.g., [3-7]), mostrando que em alguns casos existem diferenças significativas entre os valores da resistência obtidos numericamente e pelo EC3. Estes resultados numéricos são obtidos com base em análises geometricamente e materialmente não-lineares, incluindo imperfeições geométricas e tensões residuais (geralmente designadas por “GMNIA”). No entanto, em geral, estas análises são realizadas utilizando elementos finitos *de casca*, o que é computacionalmente dispendioso, mesmo para secções compactas [8,9]. De facto, se a encurvadura local ou distorcional não for relevante, é preferível recorrer a elementos finitos *de barra*, dado que fornecem resultados suficientemente precisos com um custo computacional muito menor e permitem obter diretamente esforços, o que é mais útil para o utilizador. Infelizmente, muitos dos programas de análise estrutural comerciais não possuem elementos finitos de barra capazes de efetuar GMNIAs, principalmente se ocorrerem moderados a grandes deslocamentos. Embora alguns estudos recentes utilizem elementos de barra adequados, como os fornecidos no ABAQUS [10] ou ANSYS [11], tal não constitui a regra geral. Acresce referir que, para um estudo que envolva cálculos complexos (como o apresentado neste artigo), existem vantagens em recorrer a um programa desenvolvido pelo próprio utilizador: (i) maior controle sobre as hipóteses simplificativas e métodos numéricos adotados, e (ii) mais fácil introdução de alterações para adaptar o programa ao problema em análise (tais ajustes geralmente não são possíveis num programa comercial).

A chamada “teoria de barras geometricamente exata”, desenvolvida por Reissner [12] e Simo [13], deve seu nome ao facto de manter a sua validade independentemente da magnitude dos deslocamentos e rotações. Esta teoria tem contado com inúmeras contribuições, as quais permitiram considerar, entre outros efeitos, o empenamento associado à torção [14-16] e a deformação arbitrária da secção [17-19].

Este artigo possui dois objetivos. O primeiro consiste em mostrar que elementos finitos de barra geometricamente exatos podem ser utilizados para efetuar, com precisão e eficiência computacional, análises GMNIA de perfis de aço com secção compacta. Para o efeito, é apresentado um elemento de dois nós (Secção 2). De seguida, na Secção 3, o elemento é utilizado para investigar o comportamento de encurvadura (LT) de vigas com secção em I (o segundo objetivo). Em particular, investiga-se a influência da relação altura/largura da secção no comportamento de pós-encurvadura elástico e elastoplástico. São considerados três casos de carga/apoio e quatro secções transversais. Na Secção 4 são apresentadas as conclusões do estudo efetuado.

2. Um elemento finito de barra geometricamente exato

2.1 Formulação e implementação

A formulação do elemento proposto encontra-se detalhada em [20], embora no presente caso não se utilizem esforços de casca (o que quer dizer que é necessário efetuar a integração na espessura), são consideradas tensões residuais e configurações iniciais arbitrárias (e.g. curvas). Assim, neste artigo, apresentam-se apenas os aspetos gerais do elemento finito. Grandezas escalares são representadas em *itálico* e tensores de 2ª ordem, vetores e matrizes são identificados em ***negrito itálico***. A matriz identidade é representada por **1** e variações virtuais e incrementais/iterativas são indicadas por δ e Δ , respetivamente.

A Fig. 1 mostra as várias configurações possíveis do elemento. Estabelece-se um referencial ortonormal direto com coordenadas X_i e vetores de base \mathbf{E}_i , onde X_3 corresponde ao eixo da barra, cuja intersecção com cada secção transversal define o centro arbitrário C . A configuração atual é mapeada por

$$\mathbf{x} = \mathbf{r}_0 + \hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{\Lambda}_0\mathbf{l}, \quad \mathbf{l} = \bar{\mathbf{L}}_A + \mathbf{R}(X_1\mathbf{E}_1 + X_2\mathbf{E}_2) + (\bar{\omega} + X_1\psi)p\mathbf{E}_3, \quad (1)$$

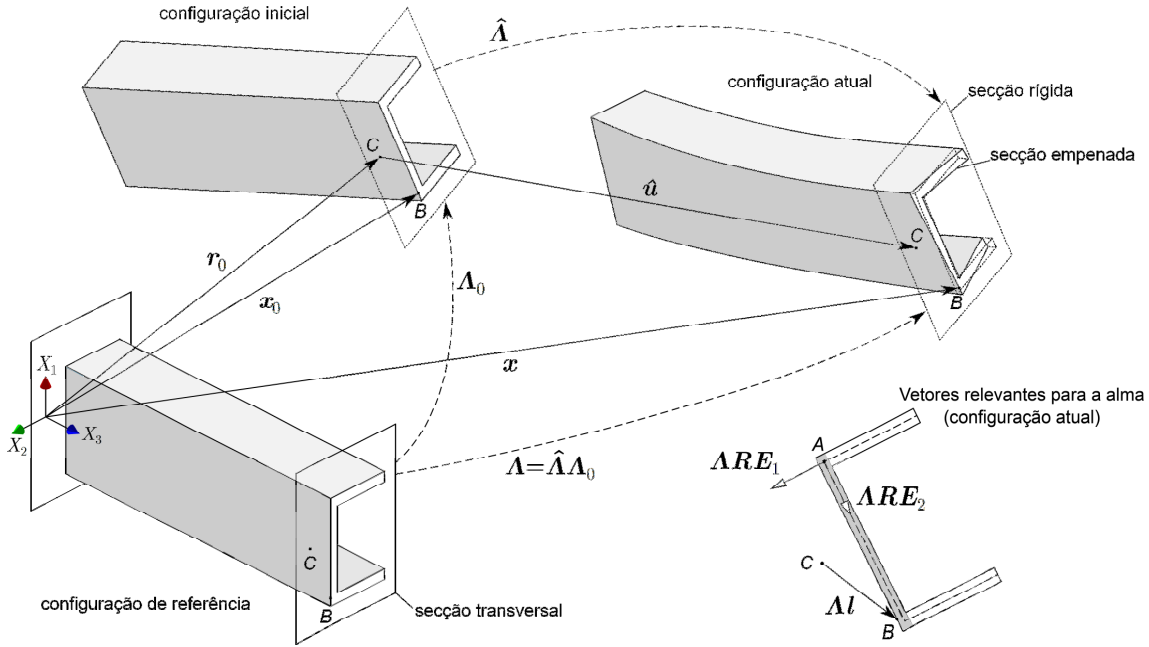


Fig. 1: Descrição cinemática da barra

onde \mathbf{r}_0 define o eixo inicial da viga, $\hat{\mathbf{u}}$ é o vetor deslocamento de C , $\hat{\Lambda}$ e Λ_0 são tensores de rotação da secção entre as várias configurações (parametrizadas com os vetores de rotação $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ e $\boldsymbol{\theta}_0$, respetivamente [21,22]), $\bar{\mathbf{L}}_A$ é um vetor no plano da secção transversal que referencia a origem da linha média da parede correspondente, \mathbf{R} é um tensor de rotação (parametrizado com o vetor de rotação $\varphi \mathbf{E}_3$) tal que $\mathbf{R}\mathbf{E}_1$ e $\mathbf{R}\mathbf{E}_2$ acompanham as direções da linha média e da espessura, respetivamente, $\bar{\omega}$ e ψ são as funções de empenamento na linha média e na espessura para uma torção unitária em torno de C e p é a respetiva função de peso. Com esta descrição cinemática, é necessário interpolar apenas $\hat{\mathbf{u}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ e p .

Admite-se que a transformação entre as configurações de referência e inicial não introduz deformação, pelo que a retro-rotação da deformação de Green-Lagrange para a configuração de referência resulta em

$$\hat{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{F}}^T \hat{\mathbf{F}} - \mathbf{1}) \quad \rightarrow \quad \hat{\mathbf{E}}^{\Lambda_0} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}), \quad (2)$$

onde $\mathbf{F} = \nabla \mathbf{x}$ é o gradiente de deformação. Utilizando o princípio dos trabalhos virtuais, escrito em termos de deformações de Green-Lagrange e 2^{as} tensões de Piola-Kirchhoff (o que permite capturar os efeitos de Wagner), as equações de equilíbrio escrevem-se

$$\delta W_{int} + \delta W_{ext} = 0 \quad \rightarrow \quad -\int_V \delta \hat{\mathbf{E}}^{\Lambda_0} : \hat{\mathbf{S}}^{\Lambda_0} dV + \delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{Q} + \delta \boldsymbol{\varpi} \cdot \mathbf{M} = 0, \quad (3)$$

onde, por uma questão de simplificação, consideraram-se apenas forças e momentos concentrados (\mathbf{Q} e \mathbf{M} , respetivamente), e $\delta \boldsymbol{\varpi}$ é o spin espacial [22].

A matriz de rigidez tangente é obtida através da linearização da equação de equilíbrio na direção de uma variação incremental/iterativa (Δ) da configuração. Utilizando notação de Voigt para os tensores de 2^a ordem, tem-se agora

$$\Delta \delta W = -\int_V (\Delta \delta \hat{\mathbf{E}}^{\Lambda_0} \cdot \hat{\mathbf{S}}^{\Lambda_0} + \delta \hat{\mathbf{E}}^{\Lambda_0} \cdot \mathbf{C}_t \Delta \hat{\mathbf{E}}^{\Lambda_0}) dV + \Delta \delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{Q} + \Delta \delta \boldsymbol{\varpi} \cdot \mathbf{M}, \quad (4)$$

onde \mathbf{C}_t é a matriz constitutiva tangente. Para o caso elastoplástico, assumem-se pequenas deformações, adota-se a função de cedência de von Mises, sem endurecimento e lei de escoamento associada. Utiliza-se o algoritmo de retorno de Euler à retaguarda e a respetiva matriz constitutiva tangente [15].

No caso elástico, a integração numérica na secção transversal é exata com três pontos de Gauss na linha média da parede e dois pontos de Gauss na espessura. O elemento possui dois nós e funções de interpolação lineares (14 GDL), pelo que se utiliza um único ponto de integração no comprimento, para evitar *locking*. Para o caso elastoplástico são consideradas tensões residuais convertendo-as em deformações residuais, as quais são adicionadas às deformações compatíveis. As equações de equilíbrio são resolvidas com controle de carga/deslocamento. O procedimento incremental/iterativo foi implementado em MATLAB [23].

2.2 Exemplos ilustrativos

Para efeitos ilustrativos analisam-se os exemplos das Figs. 2 e 3. O primeiro exemplo pretende demonstrar a eficácia do elemento finito de barra (EFB) proposto na modelação de geometrias curvas e fenómenos complexos de flexão-torção. O segundo exemplo, inicialmente proposto em [15], mostra que o elemento captura corretamente flexão-torção elastoplástica.

No primeiro exemplo (Fig. 2) são comparados os resultados obtidos com o EFB proposto, com três níveis de discretização, e dois modelos de elementos finitos de casca (EFC) MITC-4 [24]. As trajetórias de equilíbrio mostram que os dois modelos de EFC produzem resultados ligeiramente distintos, com o modelo refinado evidenciando um comportamento mais flexível, dado que captura melhor a distorção da secção perto do apoio (ver figura). Com 20 EFB já se obtêm excelentes resultados e 50 elementos melhoram ainda a solução. Foram utilizados até 100 elementos, mas os resultados não sofrem alterações, dado que não permitem capturar a distorção da secção. Ao comparar as soluções obtidas com 50 EFB e o modelo refinado de EFC, as diferenças na força aumentam com o deslocamento lateral da extremidade da seguinte forma: (i) 2,9% a 1 m, (ii) 4,9% a 2 m e (iii) 8,5% a 3 m.

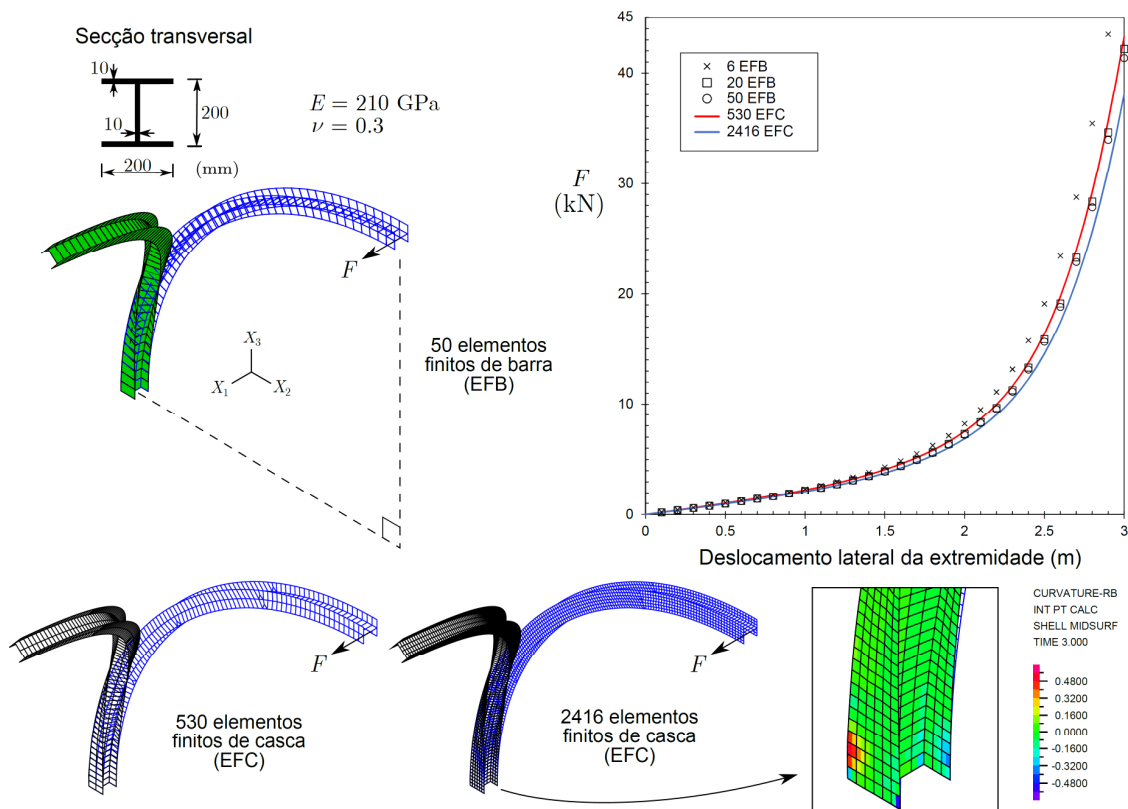


Fig. 2: Consola em arco com 90°

No que se refere ao segundo exemplo (Fig. 3), os resultados obtidos com o EFB proposto são comparados com os fornecidos em [15], os quais correspondem a um EFB de dois nós com interpolação dos diretores da secção transversal e uma discretização da secção transversal em 44 retângulos. A mesma discretização longitudinal é utilizada em ambos os modelos (30 elementos). Os resultados elásticos são praticamente coincidentes, mesmo usando apenas 2/3 pontos Gauss na espessura/linha média de cada parede no EFB proposto (a diferença máxima é inferior a 2% e ocorre para o deslocamento máximo considerado). Para o caso elastoplástico é necessário aumentar a integração da secção, mas 5/3 pontos Gauss já conduzem a uma excelente correspondência com a solução de [15]. Em particular, com o elemento proposto, a carga máxima obtida com 5/3 ou 11/5 pontos é apenas 1% inferior à fornecida em [15].

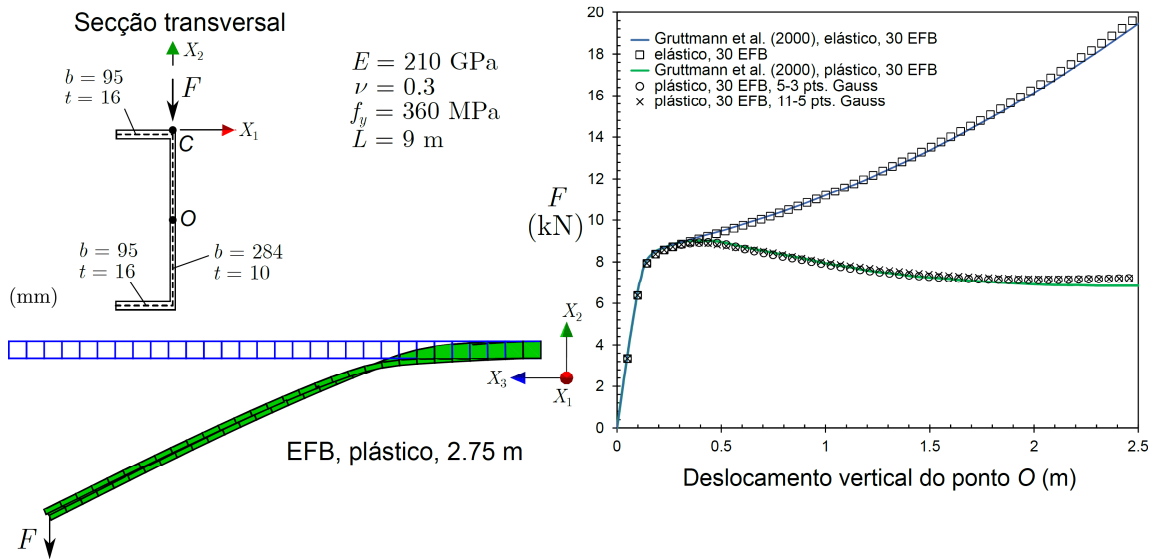


Fig. 3: Consola com secção em C

3. Comportamento de estabilidade de vigas com secção em I

Nesta secção utiliza-se o EFB proposto para investigar o comportamento de estabilidade de vigas de aço com secção em I. Consideram-se três casos de carga/apoio: (Caso 1) vigas simplesmente apoiadas (apoios “forquilha”) sujeitas à flexão pura, (Caso 2) vigas simplesmente apoiadas com uma força a 1/2 vão, aplicada no centro de corte, e (caso 3) consolas com uma força na extremidade livre, aplicada também no centro de corte. Além disso, consideram-se as quatro secções da Fig. 4, todas elas da classe 1, com exceção da secção 2, cujo banzo é da classe 2. Estas secções foram escolhidas com base nas proporções altura/largura e I_z/I_y , sendo que C1 e C2 têm proporções padrão. A figura mostra ainda os valores do parâmetro [25]

$$\beta = 1/\sqrt{\left(1 - \frac{I_z}{I_y}\right)\left(1 - \left(GJ + \frac{\pi^2 EI_\omega}{L^2}\right)/2EI_y\right)}, \quad (5)$$

onde J é a constante de torção de St. Venant e I_ω é a constante de empenamento, o qual permite calcular o momento crítico para o Caso 1 tendo em conta os deslocamentos de pré-encurvadura: $M_{cr}^{ANLE} = \beta M_{cr}^{ALE}$, onde “ANLE” e “ALE” designam análises não-lineares/lineares de estabilidade, respetivamente. Para secções I, a expressão (5) depende essencialmente de I_z/I_y ($\beta = \infty$ para $I_z = I_y$). Convém referir que esta expressão foi obtida admitindo rotações/deformações pequenas e deslocamentos moderados, mas será mostrado que pode ser utilizada para estimar M_{cr}^{ANLE} para grandes deslocamentos e outros casos de carga/apoio.

Em todos os casos as análises são realizadas com 30 elementos finitos de igual comprimento. Para os casos elastoplásticos, utilizam-se 11/3 pontos de Gauss na espessura/linha média de cada parede. Consideram-se imperfeições geométricas laterais na forma de uma meia-onda sinusoidal de amplitude e_0 . No caso GMNIA, usa-se $e_0 = L/1000$, as tensões residuais da Fig. 4 e uma lei material elástica-perfeitamente plástica com as propriedades indicadas na figura.

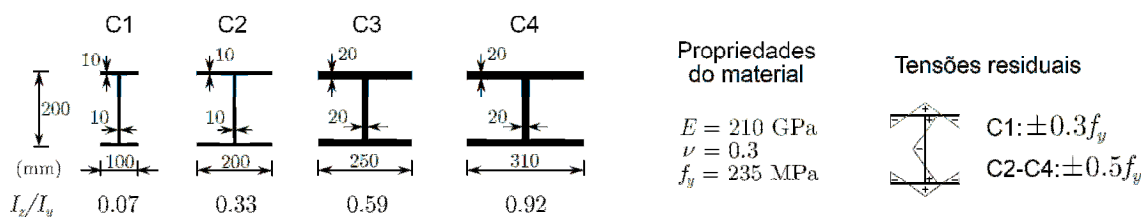


Fig. 4: Seções transversais, propriedades do material e tensões residuais

Embora as trajetórias elásticas de pós-encurvadura sejam calculadas até os grandes deslocamentos, deve-se mencionar que em alguns casos tal não é realista, dado que a formulação recorre a várias hipóteses simplificativas (por exemplo, não se considera a encurvadura local). No entanto, estas trajetórias são essenciais para compreender o fenómeno analisado.

Na Fig. 5 representam-se as trajetórias de equilíbrio elásticas (com imperfeições muito pequenas) e GMNIA para cada caso considerado. Na Tabela 1 indicam-se os comprimentos das barras, os valores de β numéricos e os fatores de redução obtidos. Nos gráficos, o eixo vertical é normalizado em relação a M_{cr}^{ANLE} e o eixo horizontal é normalizado de modo a que o deslocamento numa análise linear seja igual a 1 quando $M = \alpha M_{cr}^{ANLE}$, considerando um fator de escala $\alpha = 4$. Estes resultados permitem tirar as seguintes conclusões:

- Para o Caso 1, obtém-se sempre um valor numérico de β que não dista mais de 0,6% do valor teórico (não indicado), o que é notável tendo em conta que alguns casos envolvem grandes deslocamentos de pré-encurvadura. Para os restantes casos as diferenças são maiores (<4% para o Caso 2, <5% para o Caso 3 exceto para a secção C4, com 17%), mas ainda assim bastante reduzidas notando que (5) foi desenvolvida apenas para o Caso 1.
- Em todos os casos, a rigidez de pós-encurvadura elástica aumenta à medida que I_z/I_y aumenta. Para as seções transversais não-convencionais (C3 e C4) a rigidez é significativa, principalmente para a secção C4, observando-se que em alguns casos é superior à elástica linear, em virtude dos grandes deslocamentos (note-se que, como $I_z \approx I_y$, não há diferença significativa de rigidez de flexão quando a secção C4 sofre torção).
- As trajetórias GMNIA mostram que as inclinações (em geral negativas) pós-pico estão de certa forma relacionadas com as suas congéneres elásticas, sendo tanto mais rígidas quanto mais rígidas forem estas últimas.
- As trajetórias elásticas permitem prever que, para a mesma esbelteza, pode-se esperar $\chi_{LT,i} > \chi_{LT,j}$ para as secções C_i e C_j , se $i > j$. Isto está de acordo com o EC3, que indica uma curva de encurvadura superior (χ_{LT} superiores) para seções em I com $h/b \leq 2$.
- A análise dos fatores de redução apresentados na Tabela 1 mostra que, em geral, para as secções C1 e C2, com o CE obtém-se valores muito próximos dos GMNIA, conforme esperado, dadas as proporções *standard* destas secções. Para as secções C3 e C4, os fatores de redução do EC3 subestimam significativamente os GMNIA, principalmente com o CG, o que se deve ao facto de para estas secções a rigidez de pós-encurvadura elástica ser significativa (e estas secções não foram consideradas nos estudos de base do EC3). É ainda interessante observar que, para o caso da consola, a utilização do fator f no cálculo de χ_{LT} (os segundos valores em cada célula da tabela) conduz a melhores resultados, apesar de, em rigor, só poder ser utilizado para casos em que ambas as extremidades estão contraventadas lateralmente.

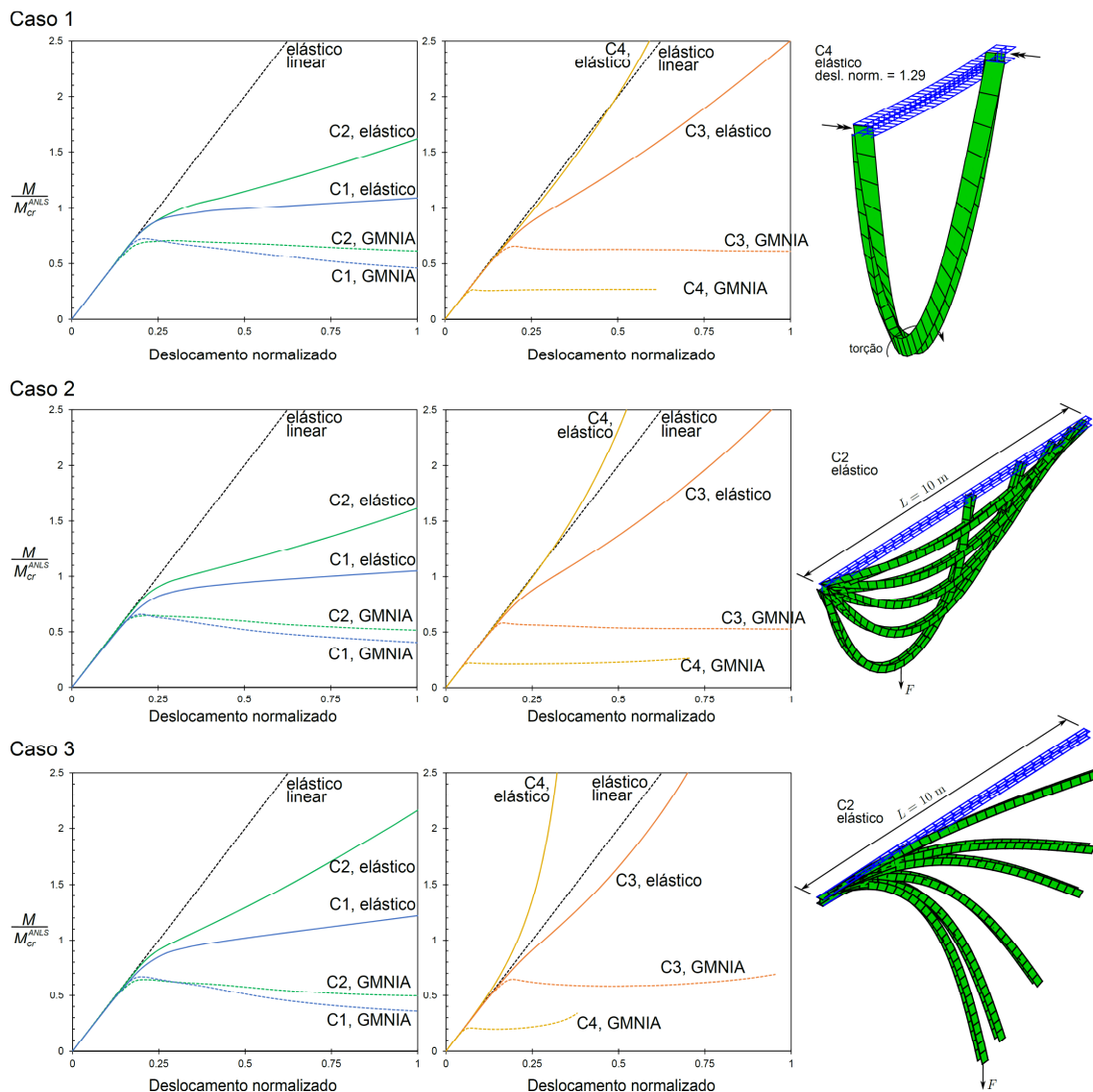


Fig. 5: Trajetórias de equilíbrio

Tabela 1: Fatores de redução obtidos com o EC3 e as análises GMNIA

Caso	Secção	L (m)	β	$\bar{\lambda}_{LT}$	χ_{EC3}^{CG}	χ_{EC3}^{CE}	χ_{GMNIA}
1	C1	4	1,04	1,109	0,59	0,63	0,62
	C2	10	1,22	1,234	0,51	0,56	0,56
	C3	25	1,57	1,233	0,51	0,56	0,68
	C4	25	3,62	1,106	0,59	0,63	0,79
2	C1	4	1,07	0,953	0,75	0,78	0,77
	C2	10	1,23	1,061	0,66	0,70	0,71
	C3	25	1,60	1,065	0,66	0,70	0,82
	C4	25	3,77	0,955	0,75	0,78	0,90
3	C1	4	1,04	0,880	0,75/0,85	0,77/0,88	0,90
	C2	10	1,28	0,986	0,68/0,76	0,71/0,80	0,85
	C3	25	1,61	1,061	0,62/0,70	0,66/0,74	0,93
	C4	25	4,33	0,944	0,70/0,80	0,73/0,83	1,00

Como foi concluído que o EC3 fornece resistências muito do lado da segurança para as secções C3 e C4, estudam-se estes casos com maior detalhe, variando a esbelteza. A Fig. 6 compara os resultados GMNIA com as curvas do EC3, em função da esbelteza, para os três casos considerados. Observa-se que os resultados GMNIA estão em geral bem acima das curvas do EC3, particularmente para o Caso 3 e para a secção C4. Conclui-se assim que o aumento da resistência se torna mais significativo à medida que I_z/I_y aumenta. Observa-se que alguns resultados estão mesmo acima da curva de Euler, um aspeto que foi já reportado por outros autores, para

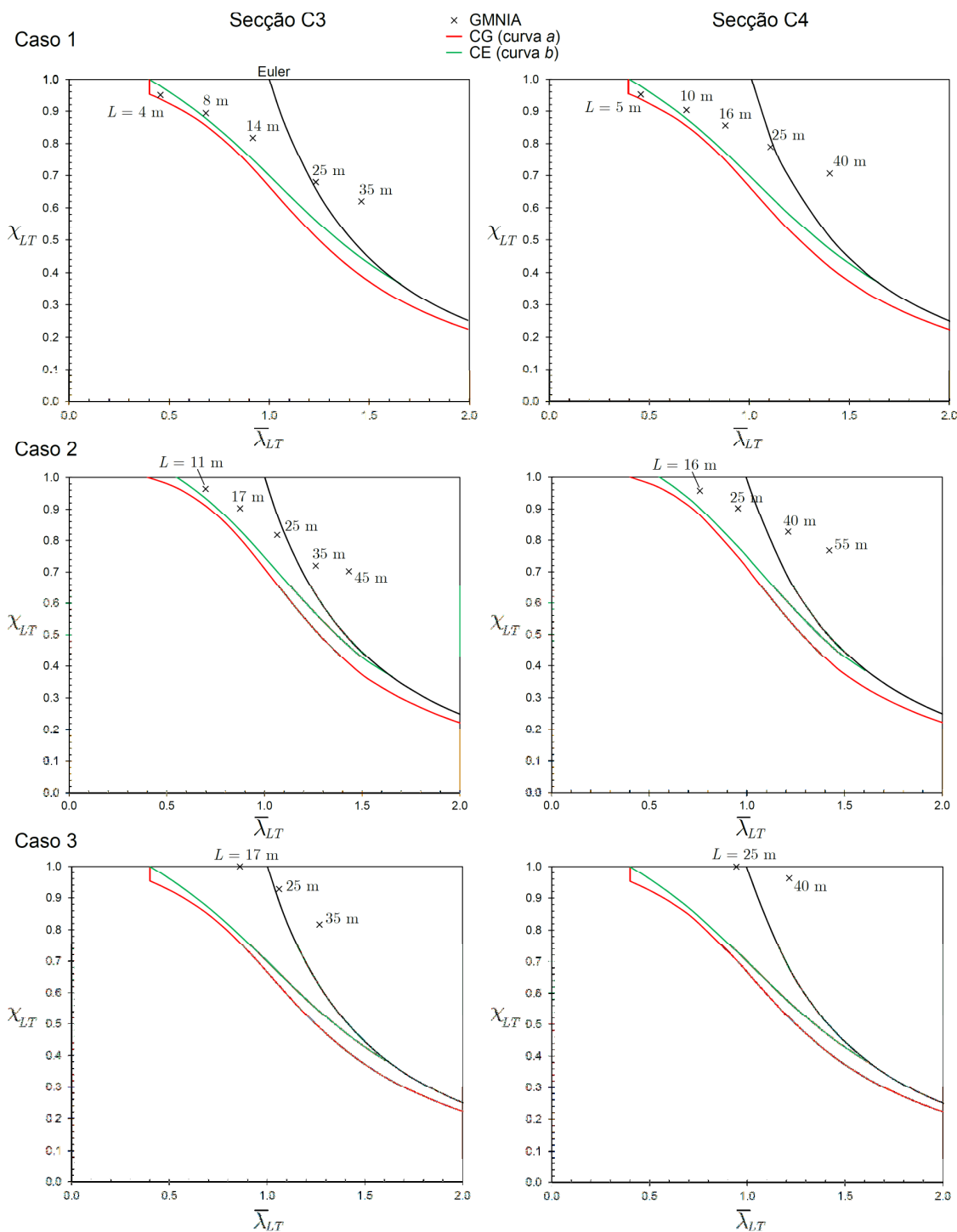


Fig. 6: Fatores de redução e curvas de dimensionamento para as secções C3 e C4

o Caso 1 [10]. No entanto, este incremento da resistência está associado a grandes deslocamentos, o que significa que o estado limite de serviço será condicionante.

É ainda de referir que, à medida que a esbelteza diminui, os resultados GMNIA tornam-se mais próximos da curva de encurvadura do CE e, para o Caso 1, são até inferiores a esta curva. Este resultado também foi já relatado por outros autores, e.g., [5] (obtem-se $\chi < 1$ para esbeltezas $\bar{\lambda}_{LT} < 0,4$, mesmo considerando o endurecimento do material).

4. Conclusões

Neste artigo propôs-se um elemento finito de barra geometricamente exato que permite efetuar análises não-lineares com grande rigor e eficiência computacional. É possível considerar configurações iniciais arbitrárias, plasticidade, imperfeições geométricas e tensões residuais. O elemento foi utilizado para estudar o comportamento de encurvadura lateral de vigas com três condições de carga/apoio e quatro secções transversais, com banzos curtos a largos.

Os resultados do estudo efetuado mostram que a relação I_z/I_y pode ser usada para caracterizar o comportamento de encurvadura destas vigas, muito embora as condições de apoio e carregamento também desempenhem um papel relevante. Em particular, à medida que a relação I_z/I_y aumenta: (i) a trajetória de pós-encurvadura elástica torna-se mais rígida e (ii) a resistência (GMNIA) para o mesmo valor da esbelteza aumenta, sendo em geral superior à resistência dada pelas curvas de encurvadura do EC3. Assim, os resultados obtidos sugerem que podem ser utilizadas curvas de encurvadura mais “altas” para secções em I com valores elevados de I_z/I_y .

Presentemente estão a ser realizados estudos para avaliar outros casos, nomeadamente outros tipos de secções transversais.

Referências

- [1] CEN. *EN 1993-1-1:2005 Eurocode 3: Design of Steel Structures - Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings*, Bruxelas: CEN, 2005.
- [2] Boissonnade N, Greiner R, Jaspart J, Lindner J. *Rules for member stability in EN 1993-1-1. Background documentation and design guidelines*, Bruxelas: ECCS, 2006.
- [3] Snijder H, Hoenderkamp J, “Buckling curves for lateral torsional buckling of unrestrained beams”, *Proceedings of the Hommages à René Maquoi Birthday Anniversary* (Eds.: V. de Goyet, J.-P. Jaspart, J. Rondal), Luik, Bélgica, 239-248, 2007.
- [4] Rebelo C, Lopes L, Simões da Silva L, Nethercot D, Vila-Real P. “Statistical evaluation of the lateral-torsional buckling resistance of steel I-beams part 1: variability of the Eurocode 3 resistance model”, *Journal of Constructional Steel Research*, 65(4), 818-831, 2009.
- [5] Taras A, Greiner R. “New design curves for lateral-torsional buckling: proposal based on a consistent derivation”, *Journal of Constructional Steel Research*, 66(5), 648-663, 2010.
- [6] Kucukler M, Gardner L, Macorini L. “Lateral-torsional buckling assessment of steel beams through a stiffness reduction method”, *Journal of Constructional Steel Research*, 109, 87-100, 2015.
- [7] Snijder H, van der Aa R, Hofmeyer H, van Hove B. “Lateral torsional buckling design imperfections for use in non-linear FEA”, *Steel Construction*, 11(1), 49-56, 2018.
- [8] Snijder H, Hoenderkamp J, Bakker M, Steenbergen H, de Louw C. “Design rules for lateral torsional buckling of channel sections subject to web loading”, *Stahlbau* 77(4), 247-256, 2008.

- [9] Taras A. “Derivation of DSM-type resistance functions for in-plane global buckling of steel beam-columns”, *Journal of Constructional Steel Research*, 125, 95-113, 2016.
- [10] Taras A, Greiner R, “Development of consistent buckling curves for torsional and lateral-torsional buckling”, *Steel Construction*, 1(1), 42-50, 2008.
- [11] Gonçalves R, Camotim D. “A system-based approach for the design of laterally unbraced multi-span steel columns and beams”, *Engineering Structures*, 135, 10-20, 2017.
- [12] Reissner E. “On one-dimensional large-displacement finite-strain beam theory”, *Studies in Applied Mathematics*, 52, 87-95, 1973.
- [13] Simo J. “A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem. Part I”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 49(1), 55-70, 1985.
- [14] Simo J, Vu-Quoc L. “A geometrically-exact rod model incorporating shear and torsion-warping deformation”, *International Journal of Solids and Structures*, 27(3), 371-393, 1991.
- [15] Gruttmann F, Sauer R, Wagner W. “Theory and numerics of three-dimensional beams with elastoplastic material behaviour”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48(12), 1675-1702, 2000.
- [16] Atluri S, Iura M, Vasudevan S. “A consistent theory of finite stretches and finite rotations, in space-curved beams of arbitrary cross-section”, *Computational Mechanics*, 27(4), 271-281, 2001.
- [17] Pimenta P, Campello E. “A fully nonlinear multi-parameter rod model incorporating cross-sectional in-plane changes and out-of-plane warping”, *Latin American Journal of Solids and Structures*, 1(1), 119-140, 2003.
- [18] Gonçalves R, Ritto-Corrêa M, Camotim D. “A large displacement and finite rotation thin-walled beam formulation including cross-section deformation”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(23-24), 1627-1643, 2010.
- [19] Gonçalves R, Ritto-Corrêa M, Camotim D. “Incorporation of wall finite relative rotations in a geometrically exact thin-walled beam element”, *Computational Mechanics*, 48(2), 229-244, 2011.
- [20] Gonçalves R. “A shell-like stress resultant approach for elastoplastic geometrically exact thin-walled beam finite elements”, *Thin-Walled Structures*, 103, 263-272, 2016.
- [21] Cardona A, Geradin M. “A beam finite element non-linear theory with finite rotations”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26(11), 2403-2438, 1988.
- [22] Ritto-Corrêa M, Camotim D. “On the differentiation of the Rodrigues formula and its significance for the vector-like parameterization of Reissner-Simo beam theory”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 55(9), 1005-1032, 2002.
- [23] The MathWorks. *MATLAB, version 7.10.0*, Massachusetts, 2010.
- [24] Bathe KJ. *ADINA System*, ADINA R&D Inc., 2018.
- [25] Pi Y, Trahair N. “Prebuckling deflections and lateral buckling. II: Applications”, *Journal of Structural Engineering*, 118(11), 2967-2985, 1992.