

## **INCLUSÃO DA FENDILHAÇÃO E FLUÊNCIA NUM ELEMENTO FINITO BASEADO NA TEORIA GENERALIZADA DE VIGAS**

David Henriques<sup>a,b</sup>, Rodrigo Gonçalves<sup>b,\*</sup>, Carlos Sousa<sup>c</sup> e Dinar Camotim<sup>d</sup>

<sup>a</sup> *TECNORÉM, S.A.*

<sup>b</sup> *CERIS e Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa*

<sup>c</sup> *CONSTRUCT e Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto*

<sup>d</sup> *CERIS, Departamento de Engenharia Civil, Arquitetura e Georrecursos, IST, Universidade de Lisboa*

\* Autor para contacto. Tel.: + 351 212 948 580; Fax: +351 212 948 398; E-mail: rodrigo.goncalves@fct.unl.pt

**Resumo.** Neste artigo introduzem-se os efeitos da fendilhação e da fluência num elemento finito de barra baseado na GBT, com o objetivo de analisar, de forma rápida e com precisão, o comportamento de vigas mistas aço-betão em serviço. Adota-se uma decomposição de deformações betão/fenda, onde a fendilhação segue um modelo de fenda fixa distribuída e a fluência é modelada através de uma lei viscoelástica, considerando uma expansão da função de fluência numa série de Dirichlet. Para demonstrar as potencialidades do elemento finito proposto, apresentam-se alguns exemplos ilustrativos, os quais são validados por comparação com resultados obtidos com modelos de elementos finitos de casca, analisados no programa DIANA.

### **1. Introdução**

A Teoria Generalizada de Vigas (ou GBT, sigla proveniente da sua designação em língua inglesa, *Generalized Beam Theory*), originalmente proposta por Schardt [1], constitui uma extensão da teoria de barras de parede fina de Vlasov que permite considerar a deformação da secção transversal no seu plano e para fora deste (empenamento). Tal é conseguido através do enriquecimento da descrição cinemática da configuração das secções transversais com “modos de deformação”, pré-determinados, cujas amplitudes ao longo do eixo da barra constituem as incógnitas do problema. A determinação dos modos de deformação (e das funções que os representam) pode ser facilmente efetuada recorrendo ao programa GBTUL, disponível em <http://www.civil.ist.utl.pt/gbt/>. A GBT é hoje em dia reconhecida como uma ferramenta extremamente eficiente no contexto da análise estrutural de barras de parede fina (ver, por exemplo,

[2,3]), devido à sua capacidade de permitir (i) incluir/excluir efeitos específicos de uma forma relativamente simples e (ii) extrair conclusões únicas acerca do comportamento estrutural do problema em consideração através da análise da decomposição modal da solução.

A primeira aplicação da GBT a vigas mistas foi apresentada em [4], tendo sido considerados os efeitos (elásticos) da distorção da secção, *shear lag* e flexibilidade da conexão. Neste artigo foram analisados problemas geometricamente lineares, de vibração livre sem amortecimento e de bifurcação (análises lineares de estabilidade). Em [5] propôs-se um elemento finito fisicamente não-linear que inclui a fendilhação/esmagamento do betão de uma forma particularmente simples, *shear lag* na laje e plasticidade no aço. Mostrou-se que o elemento é extremamente eficiente quando comparado como modelos de elementos finitos de casca ou volume. Finalmente, em [6], foi proposto um elemento finito capaz de calcular cargas de bifurcação locais-distorcionais de vigas mistas, tendo em conta a fendilhação do betão, *shear lag* e variações discretas da espessura da alma do perfil de aço. Em particular, o elemento está em acordo com os princípios do “modelo de U invertido” proposto no Eurocódigo 4 [7].

Neste artigo introduz-se o efeito da fendilhação e da fluência num elemento finito de barra baseado na GBT, com o objetivo de permitir analisar, de uma forma computacionalmente muito eficiente, o comportamento em serviço de vigas mistas aço-betão. Para a modelação da fendilhação do betão adota-se um modelo de fenda fixa distribuída com possibilidade de abertura de duas fendas ortogonais. A fluência é modelada através de uma lei viscoelástica linear, efetuando uma expansão da função de fluência numa série de Dirichlet, conforme originalmente proposto em [8]. A combinação da fluência/fendilhação é concretizada através de um modelo com decomposição de deformações betão/fenda. Para demonstrar as potencialidades do elemento finito proposto, apresentam-se dois exemplos ilustrativos. Para efeitos de validação, são apresentados resultados obtidos com modelos de elementos finitos de casca, utilizando o programa DIANA [9], o qual permite adotar modelos constitutivos muito semelhantes aos implementados no elemento proposto.

A notação do artigo segue a previamente apresentada em [10–12]. Em particular, convém referir que as derivadas são indicadas com uma vírgula em índice inferior (e.g.,  $f_{,x} = \partial f / \partial x$ ) e que os índices superiores  $M$  e  $F$  designam termos de membrana e flexão, respetivamente.

## 2. Formulação do elemento finito proposto

### 2.1 Relações cinemáticas e equações de equilíbrio

Consideram-se vigas mistas com a secção transversal-tipo representada na Fig. 1(a). Admitindo a hipótese de Kirchhoff para lajes finas, o deslocamento de cada parede da viga, segundo os eixos locais referentes à respetiva linha média (ver Fig. 1(b)), é dado pelo vetor

$$\mathbf{U}(x, y, z) = \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{bmatrix} = \left( \bar{\boldsymbol{\Xi}}_U^M - z \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \bar{\mathbf{w}}^T \\ \bar{\mathbf{w}}_{,y}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi} \\ \boldsymbol{\phi}_{,x} \end{bmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{\Xi}}_U^M = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \bar{\mathbf{u}}^T \\ \bar{\mathbf{v}}^T & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{w}}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

onde  $\boldsymbol{\phi}(x)$  é um vetor-coluna que contém as funções de amplitude de cada modo de deformação e  $\bar{\mathbf{u}}(y)$ ,  $\bar{\mathbf{v}}(y)$ ,  $\bar{\mathbf{w}}(y)$  são vetores-coluna contendo as funções de deslocamento da linha média da parede associadas a cada modo de deformação, segundo  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , respetivamente.

O tensor das pequenas deformações é expresso em notação de Voigt,  $\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \gamma_{xy}]$ , e pode ser subdividido em componentes de membrana ( $M$ ) e flexão ( $F$ ), da seguinte forma

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \underbrace{(\bar{\boldsymbol{\Xi}}_\varepsilon^M + z \bar{\boldsymbol{\Xi}}_\varepsilon^F)}_{\bar{\boldsymbol{\Xi}}_\varepsilon} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi} \\ \boldsymbol{\phi}_{,x} \\ \boldsymbol{\phi}_{,xx} \end{bmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{\Xi}}_\varepsilon^M = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{u}}^T \\ \bar{\mathbf{v}}_{,y}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{u}}_{,y}^T + \bar{\mathbf{v}}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{\Xi}}_\varepsilon^F = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{w}}^T \\ \bar{\mathbf{w}}_{,yy}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\bar{\mathbf{w}}_{,y}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

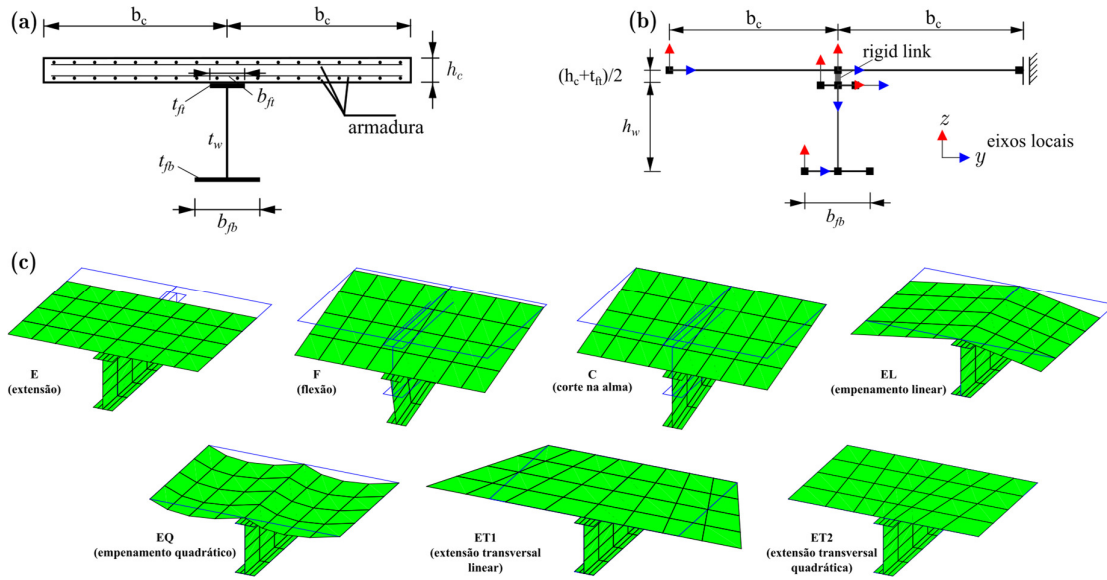


Fig. 1: (a) Secção transversal-tipo, (b) eixos locais e (c) modos de deformação

Assume-se um estado plano de tensão em cada parede, pelo que as componentes não-nulas podem ser agrupadas no vetor  $\boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{xy}]$ , que se relaciona com  $\boldsymbol{\varepsilon}$  através da lei constitutiva adotada em cada caso (elástica, viscoelástica, etc.). As equações de equilíbrio são obtidas através do princípio dos trabalhos virtuais. Para cargas aplicadas na superfície média, dadas pelo vetor  $\bar{\mathbf{q}}^T = [\bar{q}_x \ \bar{q}_y \ \bar{q}_z]$ , tem-se  $\delta W_{\text{int}} + \delta W_{\text{ext}} = 0$ , com

$$\delta W_{\text{int}} = - \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, dV = - \int_V \begin{bmatrix} \delta \phi \\ \delta \phi_{,x} \\ \delta \phi_{,xx} \end{bmatrix}^T \boldsymbol{\Xi}_\varepsilon^T \boldsymbol{\sigma} \, dV, \quad (3)$$

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_\Omega \delta \bar{\mathbf{U}}^T \bar{\mathbf{q}} \, d\Omega = \int_\Omega \begin{bmatrix} \delta \phi \\ \delta \phi_{,x} \end{bmatrix}^T (\bar{\boldsymbol{\Xi}}_U^M)^T \bar{\mathbf{q}} \, d\Omega, \quad (4)$$

onde  $V$  e  $\Omega$  representam o volume e a superfície média da barra, respetivamente.

No presente artigo, tendo em conta que o objetivo é modelar a flexão de vigas mistas com a secção simétrica da Fig. 1(a), considerando fendilhação e *shear lag* na laje, é suficiente considerar os sete modos de deformação representados na Fig. 1(c): (E) extensão axial, essencial para permitir modelar a alteração da posição da linha neutra, (F) flexão vertical (Euler-Bernoulli), (C) corte puro na alma do perfil, (EL-EQ) modos de empenamento lineares e quadráticos, para capturar o efeito de *shear lag*, e (ET1-2) modos de extensão transversal com deslocamentos lineares e quadráticos, para obter componentes  $\varepsilon_{yy}^M$  de ordem polinomial semelhante às restantes e assim capturar corretamente a fendilhação na laje. Estes modos de deformação implicam que as únicas componentes não-nulas de deformação são: (i) todas as componentes de  $\boldsymbol{\varepsilon}^M$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}_{xx}^F$  para a laje, (ii)  $\varepsilon_{xx}^M$  para a armadura longitudinal, (iii)  $\varepsilon_{yy}^M$  para a armadura transversal, (iv)  $\varepsilon_{xx}^M$  e  $\varepsilon_{xx}^F$  para os banzos do perfil e (iv)  $\varepsilon_{xx}^M$  e  $\gamma_{xy}^F$  para a alma do perfil.

## 2.2 Leis constitutivas

### 2.1.1 Aço

O aço é considerado elástico linear. Para o perfil de aço tem-se

$$\boldsymbol{\sigma}_a = \mathbf{C}_a \boldsymbol{\varepsilon}_a, \quad \mathbf{C}_a = \begin{bmatrix} E_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_a \end{bmatrix}, \quad (5)$$

onde  $E_a$  é o módulo de elasticidade e  $G_a$  o módulo de distorção. Para a armadura escreve-se antes

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \mathbf{C}_s \boldsymbol{\varepsilon}_s, \quad \mathbf{C}_s = \begin{bmatrix} E_s & 0 & 0 \\ 0 & E_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

sendo  $E_s$  o módulo de elasticidade da armadura.

### 2.1.2 Fluência e fendilhação do betão

A fluência do betão é modelada utilizando uma lei viscoelástica linear. Tal como proposto em [8], a função de fluência  $J(t, \tau)$  (extensão uniaxial no instante  $t$  para uma tensão uniaxial unitária aplicada no instante  $\tau$ ) é aproximada por uma série de Dirichlet em  $n + 1$  termos,

$$J(t, \tau) = \frac{1}{E_0} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{E_\alpha} \left( 1 - e^{-\frac{t-\tau}{\tau_\alpha}} \right), \quad (7)$$

onde os parâmetros  $E_\alpha$  têm a dimensão do módulo de elasticidade e  $\tau_\alpha$  são tempos de retardação. Admitindo uma variação constante da tensão num intervalo de tempo, a integração da lei constitutiva conduz a

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{E^*} \bar{\mathbf{C}}^{-1} \Delta \boldsymbol{\sigma} + \sum_{\alpha=1}^n \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}} \right) \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^*(t_n), \quad (8)$$

com

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1}{E_0} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{E_\alpha} \left( 1 - \frac{\tau_\alpha}{\Delta t} \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}} \right) \right), \quad (9)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 1 & \nu_c & 0 \\ 1-\nu_c^2 & 1-\nu_c^2 & 0 \\ \nu_c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2(1+\nu_c)} \end{bmatrix} \quad (10)$$

e  $\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^*$  são variáveis de estado, atualizadas após cada intervalo de tempo através de

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^*(t_{n+1}) = e^{-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}} \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^*(t_n) + \frac{\tau_\alpha}{\Delta t E_\alpha} \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}} \right) \Delta \boldsymbol{\sigma}. \quad (11)$$

Para considerar o efeito conjunto da fluência e da fendilhação, adota-se uma decomposição de deformações [13, 14], sendo a deformação total em cada ponto de integração dada pela soma da deformação no betão intacto (“co”, da língua inglesa *concrete*) com a deformação na fenda (“cr”, *crack*). Em termos incrementais tem-se

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{co} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{cr}. \quad (12)$$

Naturalmente, num dado ponto de integração, o estado de tensão nos dois materiais é idêntico e a fluência afeta apenas o betão. A tensão pode ser expressa em função da deformação no betão intacto através de

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = E^* \bar{\mathbf{C}} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{co}, \quad (13)$$

com

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{co} = \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\Gamma} - \mathbf{T}_{cr}^T \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{cr}^l, \quad (14)$$

onde a matriz  $\mathbf{T}_{cr}$  representa a transformação de coordenadas entre os eixos locais da fenda ( $n$ ,  $t$ ) e os eixos do plano médio da parede ( $x$ ,  $y$ ), representados na Fig. 2, e o vetor  $\boldsymbol{\Gamma}$  representa o efeito das variáveis de estado, sendo dado por

$$\boldsymbol{\Gamma} = \sum_{\alpha=1}^n \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^*(t_n) \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}} \right). \quad (15)$$

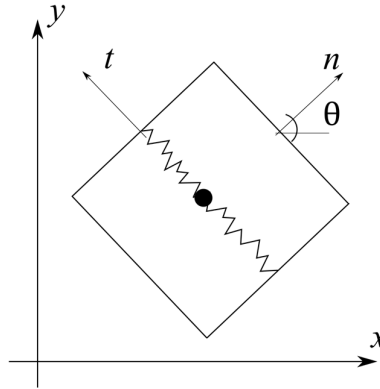
A substituição de (14) em (13) permite obter a lei constitutiva do betão fendilhado, incluindo efeitos da fluência, ou seja,

$$\Delta\sigma = \mathbf{C}_{crco}^{creep}(\Delta\epsilon - \Gamma), \quad (16)$$

com

$$\mathbf{C}_{crco}^{creep} = E^*\bar{\mathbf{C}} - E^*\bar{\mathbf{C}}\mathbf{T}_{cr}^T(\mathbf{C}_{cr} + \mathbf{T}_{cr}E^*\bar{\mathbf{C}}\mathbf{T}_{cr}^T)^{-1}\mathbf{T}_{cr}E^*\bar{\mathbf{C}}, \quad (17)$$

onde  $\mathbf{C}_{cr}$  representa a lei constitutiva para as fendas. No presente caso, considera-se um modelo de fenda fixa, com possibilidade de abrirem duas fendas em direções ortogonais. Para cada uma destas fendas a relação constitutiva na respetiva direção perpendicular é linear, com amolecimento, sendo a tensão de tração máxima dada por  $f_{ct}$  e a extensão máxima dada por  $\epsilon_c$ . Em caso de descarga, a relação constitutiva é secante. Para as tensões tangenciais, a relação constitutiva é dada por  $\beta G_c/(1 - \beta)$ , onde  $\beta$  é o fator de retenção de corte.



**Fig. 2:** Eixos locais da fenda ( $n, t$ ) e eixos do plano médio da parede ( $x, y$ ), num ponto de integração

### 2.3 Formulação de um elemento finito

O elemento finito é obtido interpolando as funções de amplitude dos modos de deformação pela expressão,  $\phi = \Psi d$ , onde a matriz  $\Psi$  agrupa as funções de interpolação e o vetor  $d$  contém as incógnitas do problema (os valores nodais das funções de amplitude e das suas derivadas). São utilizados polinómios cúbicos de Hermite e polinómios lineares/quadráticos hierárquicos de Lagrange, sendo os últimos utilizados para aproximar os modos de deformação que apenas envolvem deslocamentos de empenamento — ver, por exemplo, [11,12]. Com esta interpolação, a matriz de rigidez elementar tangente é dada por

$$\mathbf{K}_t = \int_V \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix}^T \bar{\mathbf{\Xi}}_\epsilon^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{\Xi}}_\epsilon \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix} dV, \quad (18)$$

onde  $\mathbf{C} = \mathbf{C}_a$  para o aço,  $\mathbf{C} = \mathbf{C}_s$  para as armaduras e  $\mathbf{C} = \mathbf{C}_{crco}^{creep}$  para o betão. Por sua vez, o vetor das forças exteriores é dado por

$$\Delta f = \int_\Omega \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \end{bmatrix}^T \bar{\mathbf{\Xi}}_U^T \Delta \bar{q} d\Omega + \int_V \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix}^T \bar{\mathbf{\Xi}}_\epsilon^T E^* \bar{\mathbf{C}} \Gamma dV. \quad (19)$$

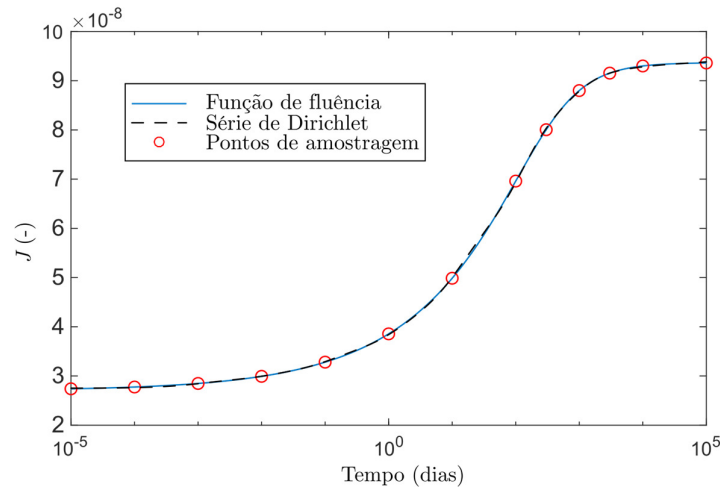
A integração é efetuada recorrendo à quadratura de Gauss, com 3 pontos de integração em  $x$ , 3 pontos em  $y$  e 1 ponto em  $z$ . O processo incremental-iterativo, com controle de deslocamento num único grau de liberdade, foi implementado em MATLAB [15].

### 3. Exemplos de aplicação

Em ambos os exemplos que se apresentam de seguida foi considerada a mesma função de fluência. Esta foi obtida seguindo a formulação proposta no Eurocódigo 2 [16], sendo dada explicitamente por

$$J(t, 0) = \frac{1}{E_c} \left( 1 + 2,47 \left( \frac{t}{345 + t} \right)^{0,3} \right). \quad (20)$$

Como referido anteriormente, esta função é expressa numa expansão em série de Dirichlet. São utilizados doze termos (para além do termo constante), com tempos de retardação iguais a  $10^{-5}, 10^{-4}, \dots, 10^5$  dias. Os termos  $E_\alpha$  são obtidos utilizando o método dos mínimos quadrados, com os pontos de amostragem representados na Fig. 3. Nesta figura também se representa a função dada pela Eq. (20) e a aproximação obtida com a série de Dirichlet (linha a traço interrompido), mostrando que são virtualmente coincidentes.



**Fig. 3:** Função de fluência exata e dada pela série de Dirichlet; pontos de amostragem.

Comparam-se os resultados obtidos com a GBT e o programa DIANA, utilizando no último caso elementos de casca de 9 nós (CQ18M). A escolha do programa DIANA deve-se ao facto de permitir utilizar um modelo constitutivo muito semelhante ao que foi implementado no presente trabalho.

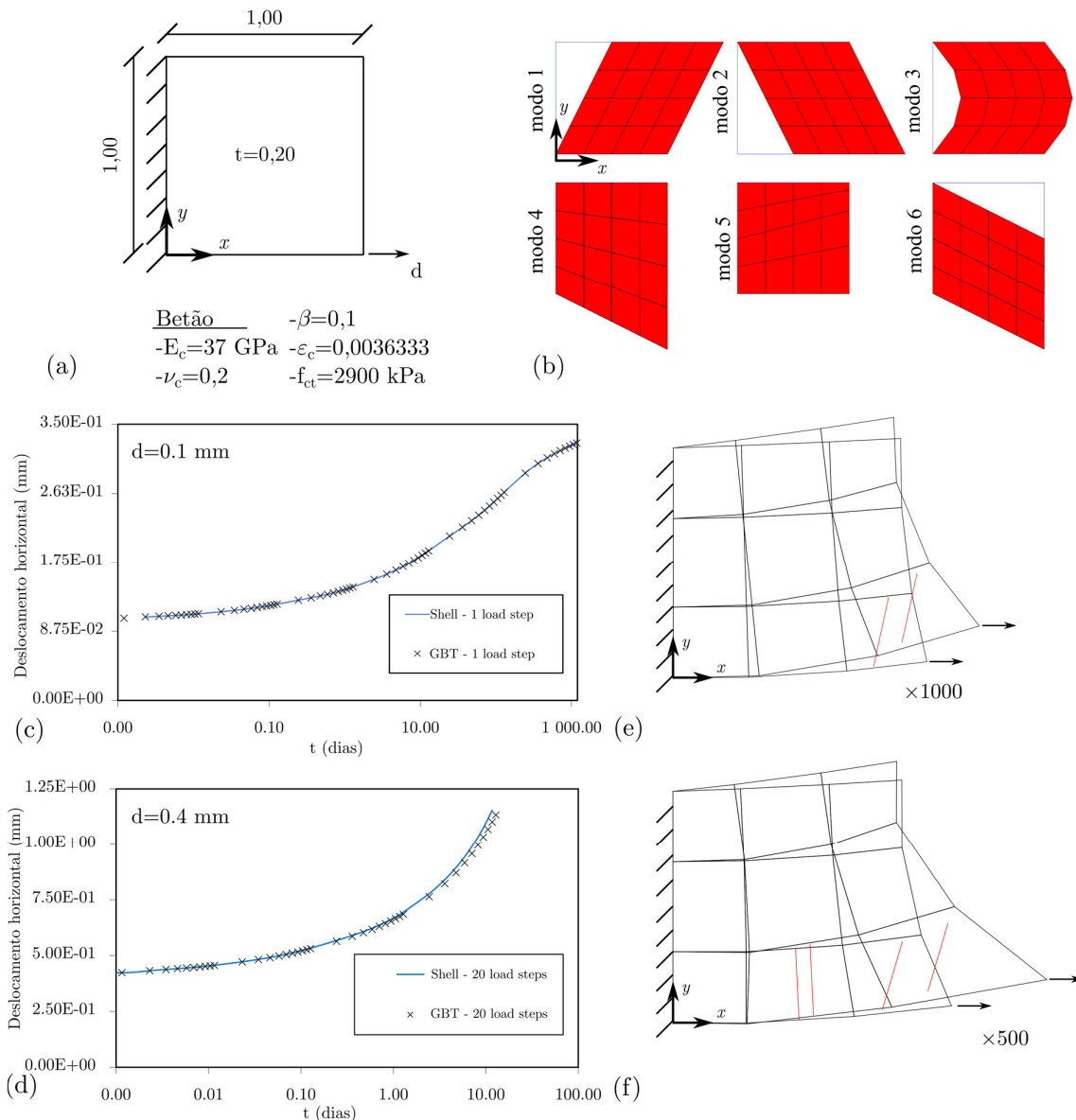
#### 3.1 Consola curta

O primeiro exemplo tem como objetivo validar a lei constitutiva para o betão/fenda. Considera-se uma consola curta, sem armadura, cuja geometria, propriedades materiais e carregamento são apresentados na Fig. 4(a). Na Fig. 4 comparam-se os resultados obtidos com a GBT e o programa DIANA, utilizando em ambos os casos um único elemento finito. No caso da GBT adotam-se os modos de deformação representados na Fig. 4(b), os quais são interpolados apenas com funções quadráticas de Lagrange, para obter uma maior semelhança com a interpolação utilizada no elemento CQ18M. O esquema de integração também é idêntico, com 3 pontos segundo  $x$ , 3 segundo  $y$  e 1 ponto na espessura.

A consola é sujeita a dois carregamentos distintos, correspondentes a um deslocamento horizontal instantâneo, imposto na extremidade inferior direita, igual a 0,1 mm e 0,4 mm, seguindo-se uma análise no tempo para averiguar o efeito da fluência. Nestes exemplos a análise no tempo não provocou o aparecimento de fendas para além daquelas que surgem no instante inicial. Para o menor deslocamento surge apenas uma fenda, enquanto que no segundo desenvolvem-se duas fendas, conforme mostram as Figs. 4(e) e (f), respetivamente (configurações

deformadas iniciais e finais para cada deslocamento imposto). Nestas figuras, cada subdivisão da consola representa a área de influência de cada ponto de integração e as linhas no interior das subdivisões representam as fendas.

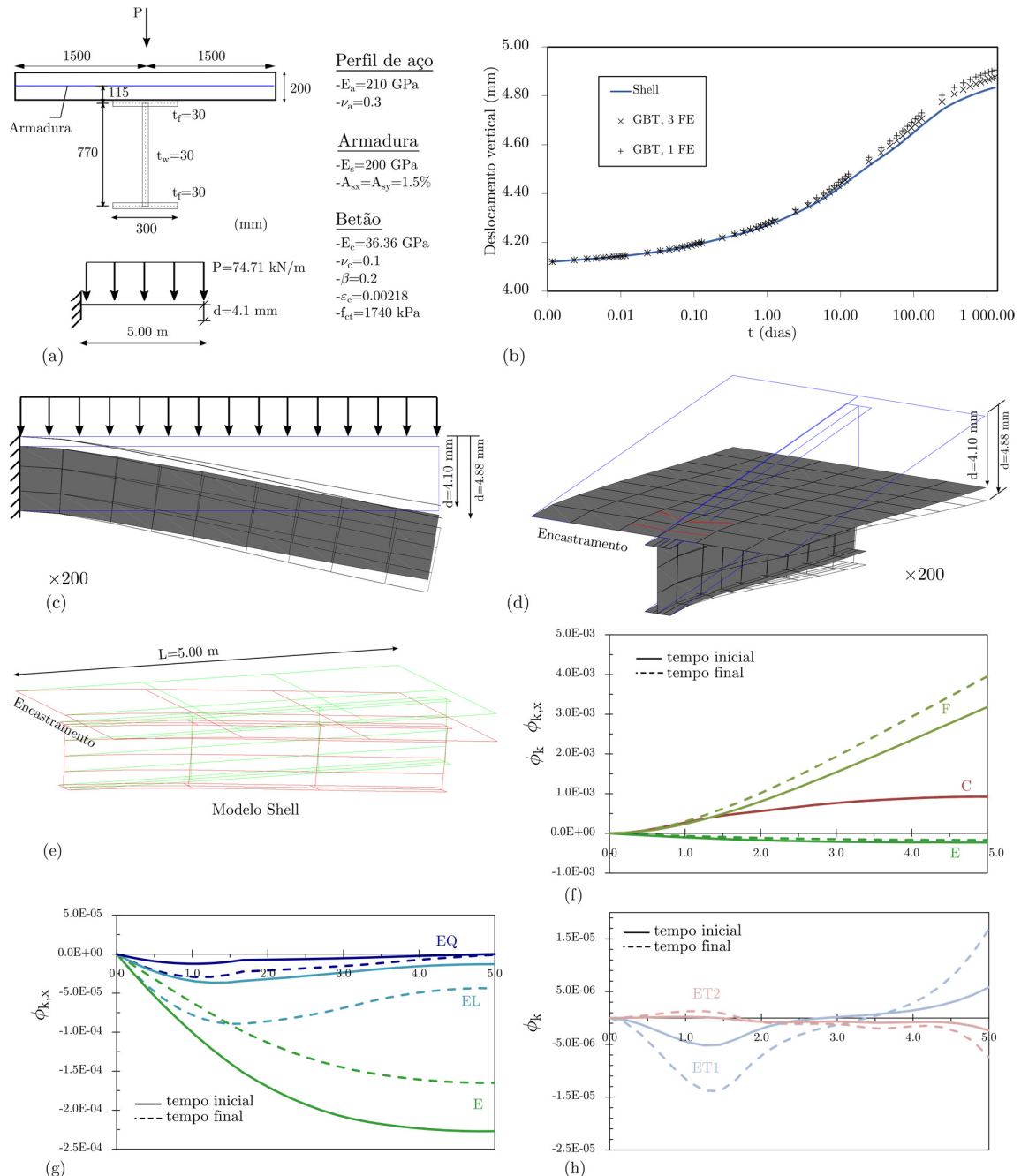
Nas Figs. 4(c) e (d) apresentam-se os gráficos deslocamento-tempo para os dois carregamentos considerados. Para  $d = 0,1$  mm as duas formulações conduzem a resultados virtualmente coincidentes, mesmo aplicando o deslocamento inicial sem sub-incrementação (a diferença máxima é de 0,05% em todo o intervalo de tempo considerado). Para  $d = 0,4$  mm é necessário adotar 20 sub-incrementos no intervalo de tempo inicial para obter resultados satisfatórios, dado que abrem duas fendas – note-se, a este propósito, que não existe armadura e que o fator de escala da Fig. 4(f) é metade do da Fig. 4(e), o que mostra que os deslocamentos para  $d = 0,4$  mm são muito superiores aos obtidos para 0,1 mm. É ainda de referir que para este deslocamento imposto nenhuma das análises (GBT ou DIANA) convergiu para mais de 14 dias.



**Fig. 4:** Consola curta, (a) geometria, carregamento e propriedades do material, (b) modos de deformação, (c-d) evolução do deslocamento com o tempo para os dois deslocamentos impostos e (e-f) respectivas configurações deformadas para o tempo inicial e final.

### 3.2 Viga mista aço-betão

Neste exemplo considera-se a viga mista aço-betão em consola representada na Fig. 5(a), a qual se encontra sujeita a uma carga uniformemente distribuída de 74,64 kN/m, provocando um deslocamento vertical na extremidade livre de 4,1 mm para o tempo inicial. As propriedades dos materiais são as indicadas na figura. Para este carregamento desenvolvem-se quatro fendas perto do apoio, juto da conexão aço-betão, conforme representado na Fig. 5(d).



**Fig. 5:** Fluência e fendilhação em vigas mistas aço-betão, (a) geometria, propriedades dos materiais e carregamento, (b) gráfico deslocamento- tempo, (c-d) deformadas a tempo inicial e a tempo final, (e-g) funções de amplitude dos modos de deformação



Na Fig. 5(e) representa-se o modelo de elementos finitos de casca (DIANA) utilizado para efeitos de comparação, o qual conta com 6 elementos na laje de betão e 24 elementos no perfil de aço.

No caso da GBT são conduzidas análises com 1 e 3 elementos finitos, correspondendo a 14 e 42 GDL, respetivamente. O gráfico da Fig. 5(b) mostra a evolução no tempo do deslocamento vertical na extremidade da consola. A diferença máxima GBT/DIANA verifica-se para 1286 dias e é de apenas 0,85% para 3 elementos finitos da GBT (1,48% considerando 1 único elemento finito da GBT). Nas Figs. 5(c-d) estão representadas as configurações deformadas obtidas com a GBT, para os tempos inicial e final, considerando 3 elementos finitos.

Finalmente, os gráficos das Figs. 5(f-h) mostram as funções de amplitude dos modos de deformação. As funções são representadas por linhas contínuas para o tempo inicial e por linhas a traço interrompido para o tempo final. Conforme esperado, o modo de flexão e o modo de corte na alma são os que mais participam, muito embora todos os modos participem (em escalas diferentes). A participação do modo de flexão aumenta com o tempo, devido ao efeito da fluência, mas o modo de corte na alma mantém-se naturalmente constante (Fig. 5(f)). Relativamente aos modos de empenamento (Fig. 5(g)), o modo de extensão axial e empenamento linear são os que apresentam maior amplitude, sendo de referir que (i) o primeiro está associado à variação da posição da linha neutra devido à fendilhação e *shear lag*, diminuindo neste caso particular com o tempo, e (ii) o segundo aumenta significativamente com o tempo, revelando um incremento do efeito de *shear lag*. Apesar de os modos de extensão transversal terem uma participação muito reduzida (o que atesta a validade da hipótese de extensão transversal de membrana nula utilizada em [5,6]), são essenciais para o correto funcionamento do modelo de fenda implementado.

#### 4. Conclusões

Neste artigo foi apresentado um elemento finito para vigas mistas aço-betão baseado na GBT, capaz de modelar corretamente os efeitos combinados da (i) fendilhação, (ii) fluência e (iii) *shear lag*. Os efeitos da fluência são modelados assumindo uma lei viscoelástica linear e aproximando a função de fluência por uma expansão em série Dirichlet. Para a fendilhação adota-se um modelo de fenda fixa distribuída, com a possibilidade de abertura de duas fendas ortogonais. A combinação da fluência com a fendilhação é obtida através de um modelo de decomposição de deformações, sendo que a fluência afeta apenas o betão intacto. Os exemplos apresentados demonstram claramente que o elemento proposto é capaz de analisar problemas complexos de maneira extremamente precisa e eficiente (são necessários poucos modos de deformação e elementos finitos para obter soluções precisas), dado que os resultados são praticamente coincidentes com os obtidos com modelos de elementos de casca. Além disso, a natureza modal da GBT permite interpretar o comportamento estrutural de vigas mistas através da análise das funções de amplitude dos modos de deformação.

#### Agradecimentos

O primeiro autor agradece à Fundação para a Ciência e Tecnologia o financiamento do trabalho através da bolsa de doutoramento SFRH/BD/139585/2018.

## Referências

- [1] Schardt R. *Verallgemeinerte Technische Biegetheorie*, Berlin: Springer-Verlag 1989.
- [2] Camotim D, Basaglia C, Bebiano R, Gonçalves R, Silvestre N. “Latest developments in the GBT analysis of thin-walled steel structures”, *Proceedings of the International Colloquium on Stability and Ductility of Steel Structures* (Eds.: E. Batista, P. Vellasco, L. Lima), Rio de Janeiro, Brazil, 33-58, 2010.
- [3] Camotim D, Basaglia C, Silva N, Silvestre N. “Numerical analysis of thin-walled structures using generalised beam theory (GBT): recent and future developments”, *Computational Technology Reviews*, vol.1, (Eds.: B. Topping, J. Adam, F. Pallarés, R. Bru, M. Romero), Stirlingshire: Saxe-Coburg, 315-54, 2010.
- [4] Gonçalves R, Camotim D. “Steel-concrete composite bridge analysis using generalised beam theory”, *Steel & Composite Structures*, 10(3), 223-43, 2010.
- [5] Henriques D, Gonçalves R, Camotim D. “A physically non-linear GBT-based finite element for steel and steel-concrete beams including shear lag effects”, *Thin-Walled Structures*, 90, 202-215, 2015.
- [6] Henriques D, Gonçalves R, Camotim D. “GBT-based finite element to assess the buckling behaviour of steel-concrete composite beams”, *Thin-Walled Structures*, 107, 207-220, 2016.
- [7] EN 1994-1-1:2004. *Eurocode 4: Design of Composite Steel and Concrete Structures - Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings*, Bruxelas: CEN, Bélgica, 2004.
- [8] Bazant Z, Wu S. “Dirichlet series creep function for aging concrete”, *Journal of the Engineering Mechanics Division (ASCE)*, 99, 367-387, 1973.
- [9] DIANA, versão 10, Delft, 2015.
- [10] Gonçalves R, Ritto-Corrêa M, Camotim D. “A new approach to the calculation of cross-section deformation modes in the framework of Generalized Beam Theory”, *Computational Mechanics*, 46(5), 759-81, 2010.
- [11] Gonçalves R, Camotim D. “Generalised beam theory-based finite elements for elastoplastic thin-walled metal members”, *Thin-Walled Structures*, 49(10), 1237-45, 2011.
- [12] Gonçalves R, Camotim D. “Geometrically non-linear generalised beam theory for elastoplastic thin-walled metal members”, *Thin-Walled Structures*, 51, 121-9, 2012.
- [13] Bazant Z, Chern J. “Strain softening with creep and exponential algorithm”, *Journal of engineering mechanics*, 111, 391-415, 1985.
- [14] De Borst R. “Smearred cracking, plasticity, creep, and thermal loading—A unified approach”, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 62, 89-110, 1987.
- [15] MATLAB, versão 7.10.0 (R2010a), The MathWorks Inc., Massachusetts, 2010.
- [16] EN 1992-1-1:2004. *Eurocódigo 2: Projecto de estruturas de betão – Parte 1-1: Regras gerais e regras para edifícios*, Bruxelas: CEN, Bélgica, 2004.