UN ESTUDIO DEL LÍMITE AL INFINITO EN EL NIVEL SUPERIOR BAJO EL CONTEXTO DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN A LA FUNCIÓN LOGÍSTICA

José Rafael Couoh Noh, María Guadalupe Cabañas Sánchez
jose_rafael_1988@hotmail.com, gcabanas.sanchez@gmail.com
Universidad Autónoma de Guerrero
Superior

Resumen
Se presentan los resultados de la aplicación de una situación de aprendizaje elaborada bajo el marco de la teoría de los registros de representación semiótica de Duval y en el contexto de la resolución de problemas que involucran a la función logística; y cuyo objetivo es que los estudiantes establezcan una definición del límite al infinito usando el lenguaje coloquial y la simbología matemática, en particular, $\lim_{t\to\infty} P(t) = a,\ donde\ a \in \mathbb{R}$. La muestra fue de cuatro estudiantes (20-22 años) voluntarios de una licenciatura en matemáticas de la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. Se aplicó en dos sesiones de 100 minutos cada una, la cuales fueron videograbadas y los estudiantes trabajaron en equipos en un ambiente de lápiz y papel. Los resultados evidencian el logro del objetivo planteado.

Palabras clave: *Límites al infinito, función logística, situación de aprendizaje, nivel superior*.

1. INTRODUCCIÓN

La enseñanza y el aprendizaje de los contenidos básicos del cálculo es un proceso complejo y presenta muchas dificultades a los estudiantes. En ese sentido, Tall (1990) menciona que la matemática contiene conceptos como el límite y el infinito cuyos significados son complejos, por ello pueden interpretarse de manera errónea. Artigue (1995) por su parte, afirma que las concepciones muy dependientes de una “geometría de la forma” no obligan a identificar con claridad sobre cuáles objetos se lleva a cabo el proceso límite. Sostiene que esta dependencia causa dificultades en la percepción del juego sutil entre el cuadro numérico y el cuadro geométrico que subyace el proceso de límite, e introduce o refuerza convicciones erróneas como la creencia en que si “geométricamente” un objeto tiende hacia otro, todas las magnitudes que le están asociadas tendrán por límite valores correspondientes a las magnitudes del objeto límite.

Respecto del concepto de límite, Cornu (1991) afirma que es particularmente difícil, típica del tipo de pensamiento requerido en matemáticas avanzadas, en razón de que ocupa una posición central dentro del Análisis Matemático como un fundamento de la teoría de aproximación, de continuidad, y del Cálculo Diferencial e Integral. Sostiene además, que una de las más grandes dificultades en la enseñanza y aprendizaje del concepto de límite se debe no solamente a su riqueza y complejidad, sino también a que los aspectos cognitivos no pueden ser abordados desde un único punto de vista de la definición matemática (Cornu, 1991).

Por otra parte, Duval (1998, citado en Engler, *et al*, 2009; p. 15) afirma que la formación de conceptos matemáticos implica una coordinación de sistemas de representaciones gráficas, simbólicas y verbales. En ese sentido, en el concepto de límite, el registro numérico se estudia mediante tablas de valores, el gráfico mediante la utilización de los ejes cartesianos, el simbólico sustentado en la simbología matemática adecuada y el verbal, definiendo el concepto utilizando palabras coloquiales (Engler, *et al*, 2009). Artigue (1997), señala que la enseñanza tradicional tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo. A este respecto, varios investigadores coinciden en que los contenidos del cálculo deben abordarse desde diferentes perspectivas buscando estrategias que contribuyan en una mejor comprensión por los estudiantes (e. gr. Engler, *et al*, 2008). Asimismo, Tall (1990) sostiene que no es posible hacer más simple los conceptos complicados del Cálculo, pero se pueden dar experiencias más ricas basadas en contextos. Por ello, las investigaciones actuales relacionadas con la Didáctica del Cálculo proponen una aproximación más intuitiva y una metodología más activa para su enseñanza, ya que para los alumnos es un concepto árido, poco atractivo y demasiado abstracto (Engler, *et a*l, 2008).

Tomando como base estas consideraciones, nos propusimos diseñar y aplicar una situación de aprendizaje del concepto de límites al infinito en el contexto de la resolución de problemas que involucran a la función logística. Ésta es una función matemática que aparece en diversos modelos de crecimiento de poblaciones, propagación de enfermedades epidémicas y difusión en redes sociales. La función logística simple se define mediante la fórmula $P(t) = \frac{1}{1+e^{-t}}$, donde la variable P puede ser considerada como población, donde e es la constante de Euler y la variable t puede ser considerada el tiempo.

Para tal objetivo, se elaboraron problemas en torno a enfermedades epidémicas, teniendo como eje rector a esta función. La idea de trabajar sobre enfermedades epidémicas, es motivada por Díaz (2005), quién presenta varios problemas del contexto en un compendio del tema “Límites y continuidad” en la Universidad de Sonora, México y en la cual uno de ellos trata precisamente sobre el contagio de enfermedades. De allí, nuestro interés por presentar al estudiante universitario, una de las aplicaciones del límite al infinito en la resolución de problemas que involucran a la función logística.

El concepto del límite al infinito es objeto de estudio de manera explícita en la escuela mexicana, desde el Nivel Medio Superior. Sin embargo, es hasta en el Nivel Superior donde se concreta formalmente su estudio. Este concepto matemático es sumamente importante, ya que es fundamental en la introducción de otros conceptos del Cálculo Diferencial e Integral y del Análisis Matemático. Además, se usa ampliamente en la cotidianeidad, de manera intuitiva.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

La teoría de los registros de representación semiótica de Duval

Para Duval (1997), los registros de representación semiótica son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias compulsiones de significado y de funcionamiento. Así, una figura geométrica, un enunciado en lengua natural, una fórmula algebraica, una gráfica, son representaciones semióticas que pertenecen a sistemas semióticos diferentes. Se considera generalmente a las representaciones semióticas como un simple medio de exteriorización de las representaciones mentales para fines de comunicación, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a otros. En ese sentido, los registros de representación semiótica juegan un papel fundamental en la actividad matemática.

Duval (1997) hace hincapié en la importancia porque en la actividad matemática, se movilicen varios registros de representación semiótica (figuras, gráficas, escritura simbólica, lengua natural, etc...) en el transcurso de una misma tarea, o bien cómo elegir un registro en lugar de otro.

Asimismo, señala que la coordinación de varios registros de representación semiótica desde esta perspectiva teórica, aparece como fundamental para una aprehensión conceptual de los objetos, en donde es necesario que el objeto no sea confundido con sus representaciones y que se le reconozca en cada una de ellas. Bajo estas dos condiciones, de acuerdo con Duval (1997), una representación funciona verdaderamente como representación cuando este facilita el acceso al objeto representado.

Por otra parte, este investigador señala que la existencia de varios registros de representación semiótica permite hacer cambios de un registro a otro, cuyo objetivo es efectuar tratamientos de una manera más económica y más potente. Además, menciona que dichos registros se complementan, ya que toda representación es cognitivamente parcial con respecto a lo que ella representa y entonces, de un registro a otro los aspectos del contenido de una situación representados son diferentes. De esta manera, la conceptualización implica una coordinación de registros de representación.

De acuerdo con Duval (1997) la conversión de una representación es la transformación de esta representación en una representación de otro registro conservando la totalidad o una parte solamente del contenido de la representación inicial. Esta transformación, seguiría por sí misma desde el momento en que se es capaz de formar representaciones en registros diferentes y de efectuar tratamientos sobre estas. Se identifican las siguientes conversiones: 1) *ilustración* es la conversión de una representación lingüística en una representación figural; 2) *traducción* es la conversión de una representación lingüística en una lengua dada en una representación lingüística de otra lengua o de otro tipo de lenguaje; y 3) *descripción* es la conversión de una representación no verbal (esquema, figura, gráfica) en una representación lingüística.

Para concluir este apartado, presentamos la caracterización de los distintos registros de representación involucrados en nuestra investigación. De acuerdo con Duval (1998, citado en Dal Bianco, *et al*, 2006; p. 5): El *registro de representación lenguaje coloquial* se da en el lenguaje común y es utilizado para representar situaciones llamadas del mundo real; el *registro de representación analítico* hace referencia a la definición del objeto matemático mediante una expresión algebraica; el *registro de representación tabular* corresponde a los valores numéricos del objeto matemático organizados en tablas de valores; y el *registro de representación gráfico* se refiere a la imagen del objeto en el plano cartesiano.

3. ASPECTOS METODOLÓGICOS

a) Participantes

En el estudio participaron cuatro estudiantes (20 a 22 años) que cursaban el sexto semestre de una licenciatura en matemáticas de la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. Su participación se dió por invitación a la profesora a cargo de una unidad de aprendizaje y fue voluntaria porque de un total de nueve estudiantes matriculados en el curso, sólo cuatro se interesaron por participar y lo hicieron de manera activa. Los antecedentes académicos de quienes participaron, consistieron de conocimientos matemáticos relacionados con funciones, límites, graficación y análisis de datos en tablas. Respecto de su experiencia con el concepto de límite al infinito, cabe señalar que ya había sido objeto de estudio en el primer semestre de su carrera, en la unidad de aprendizaje Cálculo I, una de las materias obligatorias del plan de estudios correspondiente.

b) ***Situación de aprendizaje***

La situación de aprendizaje se elaboró bajo el marco de la teoría de los registros de representación semiótica de Duval, en la que se privilegió la movilización entre los registros de representación tabular, gráfico, lenguaje coloquial y analítico del concepto en cuestión, en el contexto de la resolución de problemas que involucran a la función logística. El objetivo general de la situación es que, en un primer momento, los estudiantes establezcan una definición del límite al infinito usando el lenguaje coloquial y en otro, sustentados de la simbología matemática, en particular, $\lim_{t\to\infty} P(t) = a,\ donde\ a \in \mathbb{R}$. Para ello, se diseñaron cinco actividades agrupadas en dos apartados: Para Aprender y Síntesis. La Tabla 1 describe el propósito de las actividades por apartado, así como los registros de representación que se movilizan.

Apartado	Actividad	Propósito	Registros de representación semiótica movilizadas
Para Aprender	Actividad 1	Analizar los parámetros de la función que modela el comportamiento de una situación.	Analítico, tabular y gráfico.
	Actividad 2	Asociar la expresión analítica de una función con su gráfica.	Analítico y gráfico.
	Actividad 3	Calcular el límite al infinito de una función, que modela un determinado problema contextualizado, a partir de las representaciones algebraica, numérica y gráfica.	Analítico, tabular y gráfico.
	Actividad 4	Movilizar entre los registros de representación gráfico, lenguaje coloquial y analítico del límite al infinito de una función para analizar el comportamiento de cierta situación.	Analítico, gráfico y lenguaje coloquial.
Síntesis	Actividad 5	Escribir una definición del concepto de límite al infinito de una función, utilizando lenguaje común y otra, usando la simbología matemática ($\lim_{t\to\infty} P(t) = a, a \in \mathbb{R}$).	Analítico y lenguaje coloquial.

Tabla 1. Secciones que conforman la situación de aprendizaje, propósito de las actividades y los registros de representación que se movilizan.

Las actividades 1 y 2 son el puente para el desarrollo de la actividad 3, porque con ellas los estudiantes se familiarizan con los parámetros de la función que modela la situación y con sus representaciones analítica, gráfica y tabular.

b.1) ***Descripción de las actividades del apartado Para Aprender***

1. *Actividad 1*. Se presentan la definición de la función logística, la fórmula matemática correspondiente y su aplicación extramatemático. Con base en lo anterior, se muestra la fórmula matemática que modela el contagio de una enfermedad epidémica en una determinada población. Se cuestiona el papel que tienen la variable independiente y la variable dependiente en la fórmula, el valor esperado para la población cuando el tiempo es igual a 0, 5 y 9.5 semanas. Se induce a la reflexión de por qué la fórmula plantea $t \geq 0$ (t es

el tiempo). Finalmente, se pide elaborar una gráfica apoyándose de una tabla de valores elaborada previamente.

2. *Actividad 2.* Se presentan cuatro funciones y cuatro gráficas relativas a la propagación de la enfermedad epidémica en poblaciones diferentes. Se pide al estudiante que relacione las funciones con su respectiva gráfica. Luego, se cuestiona sobre el comportamiento presentado en cada una; el significado, en términos del problema, de la asíntota horizontal en cada caso; y la ecuación de la asíntota horizontal. Finalmente, basados en las fórmulas y las gráficas se pide un análisis del contagio de la enfermedad.

3. *Actividad 3.* Consta de dos secciones. La primera, retoma el trabajo realizado en la actividad 1, pero se cuestiona, con base en la gráfica, sobre el comportamiento que presenta la cantidad de población infectada cuando transcurre considerablemente el tiempo. También se pregunta si existe un valor máximo de la función y se pide describir el comportamiento observado usando lenguaje común y expresión matemática. La segunda, presenta una tabla de valores de la propagación de la enfermedad en cierta población. Se solicita elaborar una gráfica a partir de los datos de la tabla; así también, como identificar el comportamiento que presenta la cantidad de población infectada cuando el tiempo aumenta y expresarla por medio de la simbología matemática.

4. *Actividad 4.* Sintetiza el trabajo realizado por los estudiantes en el apartado *Para Aprender*. Se propone una tabla con información incompleta sobre el contagio de la enfermedad, en tres poblaciones. En cada población, se da un registro de representación del límite al infinito, ya sea el gráfico, el lenguaje coloquial o el analítico. El estudiante debe completar, en cada una, los dos registros de representación faltantes. Por ejemplo, en la primera población se presenta el gráfico que modela el contagio de la enfermedad y se deben completar los registros de representación lenguaje coloquial y analítico. Así, en esta actividad se situó a los estudiantes a movilizarse entre los registros de representación gráfico, lenguaje coloquial y analítico del límite al infinito de una función.

5. *Actividad 5.* Se plantean tres preguntas basadas en las conclusiones a las que arribaron en las actividades anteriores, que condujeran a los estudiantes a escribir una definición del concepto del límite al infinito de una función, utilizando lenguaje común y una simbología matemática ($\lim_{t\to\infty} P(t) = a,\ donde\ a \in \mathbb{R}$). Las preguntas son: 1) Cuando el tiempo aumenta considerablemente, ¿Qué comportamiento presenta la población contagiada?; 2) De manera general y utilizando lenguaje común, describe el comportamiento anterior; y 3) Ahora, utilizando la simbología adecuada, expresa matemáticamente lo anterior.

c) *Desarrollo de la situación de aprendizaje*

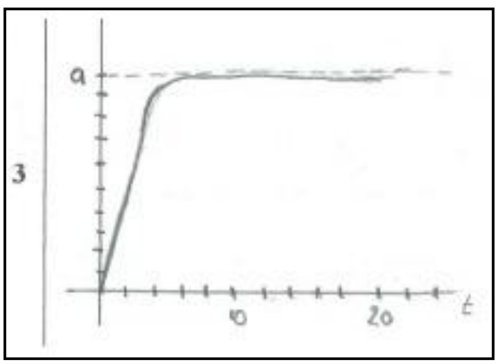
Las actividades se resolvieron en un ambiente de lápiz y papel durante dos sesiones de 100 minutos cada una, las cuales fueron videograbadas. La forma de trabajo de los estudiantes sobre la situación fue en binas. En la primera sesión, los equipos resolvieron las primeras dos actividades y en la segunda, las tres restantes.

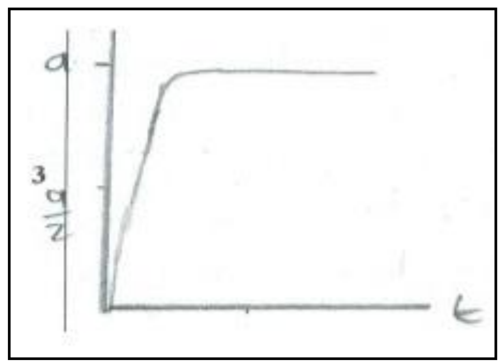
El papel del primer autor, quien desarrolló la situación en esta investigación, consistió en organizar los equipos y en institucionalizar el saber sobre el concepto del límite al infinito. Esta institucionalización consistió en cuestionar a los equipos sobre el objetivo de la situación de aprendizaje, el concepto matemático involucrado, el contexto utilizado y el número de actividades planteadas

4. RESULTADOS

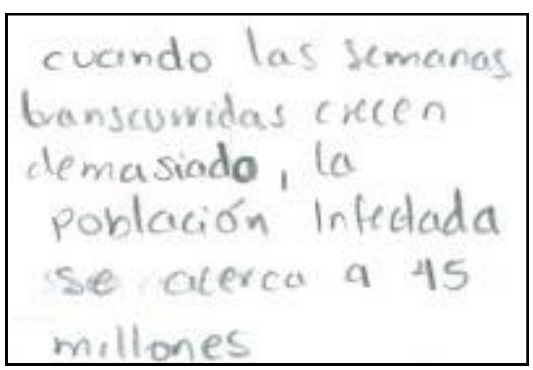
Por cuestiones de espacio, solo se presenta el análisis de los resultados de la actividad 4, la cual ubicó a los estudiantes a movilizarse entre los registros de representación gráfico, lenguaje coloquial y analítico del límite al infinito de una función mientras analizaban el comportamiento del contagio de la enfermedad epidémica en tres poblaciones. Es importante mencionar que los participantes ya tenían un acercamiento de este tipo de registros de representación por su experiencia con tópicos de Cálculo, objeto de estudio en la unidad de aprendizaje Cálculo I. Con base en las producciones de los equipos, se observó:

1. A partir de los registros de representación lenguaje coloquial y analítico, los dos equipos analizaron el comportamiento del contagio de la enfermedad epidémica y reconocieron que la cantidad de personas contagiadas tiende a cierto valor cuando el tiempo aumenta considerablemente. Este hecho se observa en las gráficas siguientes que realizaron ambos equipos, a partir de los registros señalados, en donde: i) usan la asíntota horizontal para indicar que el límite de la función es “a” cuando el tiempo aumenta considerablemente y ii) no utilizan la asíntota, pero por la forma de la gráfica, está tiende al valor “a” cuando “t” aumenta. Ambas soluciones son válidas desde el punto de vista matemático.





2. Con base en el lenguaje gráfico y analítico, ambos equipos reconocieron que cuando el tiempo aumenta, la cantidad de personas contagiadas por la enfermedad epidémica objeto de análisis en el problema, tiende a un valor determinado; esto lo explicaron mediante el lenguaje coloquial (ver Figura).



3. El que los estudiantes (en equipo), movilizaran sus razonamientos entre los registros de representación gráfico y lenguaje coloquial en el análisis del comportamiento de una determinada enfermedad epidémica, contribuyó a que definieran analíticamente ese comportamiento. Ejemplo de ello, es la siguiente expresión, dada por uno de los equipos.

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = 57.5$$

La actividad 4 favoreció que los estudiantes reconocieran que cuando el tiempo aumenta considerablemente, la cantidad de personas contagiadas por una enfermedad epidémica tiende a cierto valor, esto al movilizarse entre los registros de representación gráfico, lenguaje coloquial y analítico del límite al infinito de una función; y en consecuencia establecieron una definición del límite al infinito de una función para casos particulares usando el lenguaje coloquial y la simbología matemática correspondiente.

5. REFLEXIONES FINALES

Como resultado de su intervención en las actividades 1 y 2 de la situación de aprendizaje, ambos equipos construyeron gráficas crecientes. Con base estas gráficas, analizaron el comportamiento de una enfermedad epidémica en un tiempo determinado (actividad 3). En particular, cuando este tiempo transcurre y el número de personas contagiadas tiende a un cierto valor que es creciente pero que llega a estabilizarse. En la 4, como parte de la síntesis, establecieron dos definiciones usando lenguaje coloquial, ambas, válidas desde el punto de vista matemático y coincidieron en la definición analítica del límite al infinito de una función. Asimismo, las actividades planteadas en el primer apartado contribuyeron para que en la síntesis, ambos equipos, establecieran y coincidieran en una definición del límite al infinito de una función usando el lenguaje coloquial y la simbología matemática, en particular, $\lim_{t\to\infty} P(t) = a,\ donde\ a \in \mathbb{R}$, la cual fue objeto de estudio en la unidad de aprendizaje Cálculo I.

Por otra parte, los estudiantes argumentaron que la resolución de problemas relativos a enfermedades epidémicas que involucran a la función logística es adecuado para el estudio del límite al infinito, ya que le encontraron sentido y significado a la matemática, al resolver problemas que para su solución requieren del uso de los límites al infinito, lo cual no sucedió en el estudio que hicieron del concepto en Cálculo I. Además, uno de ellos señaló que la cantidad de actividades planteadas en la situación, la cual hasta cierto punto hace que las resoluciones se vuelvan repetitivas, contribuyen para llegar a una definición del concepto matemático en juego. Asimismo, la intervención del primer autor fue muy importante durante el desarrollo de las actividades, ya que aclaraba las dudas de los estudiantes.

De esta manera, el contexto utilizado y las actividades planteadas en la situación de aprendizaje fueron fundamentales para que los estudiantes se motivaran en su resolución y en consecuencia llegaran al objetivo planteado. Por ello, estamos convencidos del gran valor que tiene la elaboración de situaciones de aprendizaje, ya que al profesor le permite enseñar los conceptos matemáticos con mayor significado y al estudiante lo obliga a poner en juego sus habilidades y conocimientos matemáticos haciendo que reflexione sobre la solución del problema; con esto confirmamos la postura de Tall (1990) y Engler, *et al* (2008) quienes sostienen, respectivamente, la importancia de dar experiencias más ricas basadas en contextos en la enseñanza del Cálculo y en una metodología más activa para su enseñanza. Finalmente, para futuras investigaciones sugerimos la aplicación de la situación de aprendizaje con estudiantes de otras carreras universitarias que contemplen el estudio del límite al infinito y contrastar los resultados que se obtengan con las de este estudio.

6. Referencias

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking.* (pp. 153-166). Dordrecht. Kluwer Academic Publishers.

Dal Bianco, N., Botta Gioda, R., Castro, N., Martinez, S., y Prieto, F. (2005). Descripción bibliográfica de funciones trascendentes y su aplicación en las ciencias biológicas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19,* 4-10.

Díaz, J. (2005). *Límites y continuidad: Problemas resueltos*. Recuperado de http://www.mat.uson.mx/~jldiaz/Documents/Limites/Problemas%20Resueltos%20de%20limites.pdf

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*, 5, 37-65. Traducción: Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En E. Hitt (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Engler, A., Gregorini, M., Vrancken, S., Müller, D., Hecklein, M., y Henzenn, N. (2008). El límite infinito: Una situación didáctica. *Revista Premisa*, *36*, 11-21.

Engler, A., Gregorini, M., Vrancken, S., Müller, D., Hecklein, M., y Henzenn, N. (2009). Una propuesta didáctica para la enseñanza de límite. *Revista Premisa*, *40*, 14-24.

SEP. (2011). *Plan de estudios 2011. Educación básica.* México: DGME/SEP.

Tall, D. (1990). Inconsistencies in the Learning of Calculus and Analysis. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *12*(1), 49-63.

UAG. (2010). *Plan de estudios por competencias de Educación Media Superior.* México: Universidad Autónoma de Guerrero.