

## ESTUDIANDO COMPETENCIAS MATEMÁTICAS EN PROBLEMAS DE CAMBIO Y RELACIONES



Ma. Isabel Nava Cerón, María Guadalupe Cabañas-Sánchez  
 nace\_chave@hotmail.com, gcabanas.sanchez@gmail.com  
 Universidad Autónoma de Guerrero  
 Avance de investigación  
 Medio superior (15-16 años)

### Resumen

El artículo discute resultados parciales de un estudio que analiza las competencias matemáticas desarrolladas por estudiantes de bachillerato, mientras resuelven un problema matemático del contenido *Cambio y relaciones*, de la prueba PISA. Se reporta que ante problemas denominados como rutinarios, los estudiantes apenas si logran interpretar datos del problema de forma adecuada, así como su sustitución en un algoritmo dado. Las respuestas que obtienen son erróneas debido a un uso inadecuado del llamado “despeje” de una variable, y por ello quedan ubicados por debajo del nivel mínimo, que es el uno.

**Palabras clave:** *Competencia matemática, problemas matemáticos, prueba PISA.*

### 1. INTRODUCCIÓN

La presente investigación está relacionada con uno de los temas que en educación ha generado un gran interés tanto a nivel nacional como internacional, la evaluación (Pastrana & Cabañas-Sánchez, 2012). De particular interés, es la evaluación que se realiza a través de la prueba PISA<sup>1</sup>, promovida por la OCDE<sup>2</sup>. Esta evaluación, como bien sabemos, enfoca su atención en las capacidades de los estudiantes para usar sus conocimientos y habilidades al enfrentar los retos de la vida real, más que en saber hasta qué punto dominan los contenidos de un plan de estudio o currículo escolar. Esto es, que en lugar de evaluar los contenidos curriculares, evalúa competencias, específicamente la competencia lectora, la científica y la matemática (Pastrana, 2012). En general, los resultados de esta prueba se reportan mediante datos estadísticos, con los cuales se caracterizan y establecen comparaciones acerca del desarrollo de los países involucrados.

A partir de los resultados obtenidos por los estudiantes que participan en esta prueba, se han evidenciado deficiencias en los sistemas educativos, sin embargo, como lo señala Díaz-Barriga (2006), ocultan el problema de fondo: el desarrollo de los procesos de aprendizaje de los estudiantes. El interés por atender esta problemática, ha derivado en acciones como los procesos de reforma que actualmente se desarrollan en todos los niveles educativos, como es el caso de nuestro país, México. Sin embargo, se reconoce que algunas explicaciones debieran derivarse de las investigaciones. Esta investigación se interesa precisamente en aportar evidencia empírica sobre los resultados de una prueba masiva, PISA. En este trabajo nos interesamos por dos cuestiones: a) comprender los procesos que ponen juego los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos de Cambio y Relaciones planteados en la prueba PISA y; b) por analizar el nivel de competencia en que se ubican los estudiantes que resuelven este tipo de problemas.

<sup>1</sup> *Programme for International Student Assessment.*

<sup>2</sup> Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico, quien propone la medición de competencias a través de la prueba PISA a los estudiantes de países miembros como México.

## 2. ORIENTACIÓN TEÓRICA

Los conceptos de problema y de competencia matemática son fundamentales en nuestra investigación. El primero, lo asumimos en el sentido de Polya (2010) y el segundo, según la OCDE (2009). En Polya (2010) un problema consiste en *buscar conscientemente alguna acción apropiada para lograr una meta claramente concebida pero no inmediata de alcanzar*. En el proceso de resolución de un problema, distingue las fases siguientes: a) Comprender el problema, b) Concebir un plan, c) Ejecución del plan, y d) Visión retrospectiva (revisión del problema y su solución). Estos aspectos, son básicos en el proceso de exploración que llevamos a cabo, a fin de entender mejor, si los estudiantes son capaces de:

- Reconocer la información inicial y la final (lo que se pide), así como de las relaciones que establece entre ellos.
- Los procedimientos que siguió en el proceso de resolución.
- Si llegó a una solución, independientemente de si es correcta o incorrecta.

Por competencia matemática se entiende en el sentido de la OCDE (2009), como:

La capacidad de un individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en contextos distintos. Incluye el razonamiento matemático y el uso de conceptos, herramientas, hechos y procedimientos matemáticos para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a las personas a reconocer el papel que las matemáticas juegan en el mundo, para sostener juicios fundamentados y para utilizar e interesarse por las matemáticas, de forma que responda a las necesidades de la vida de ese individuo como un ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo.

De acuerdo con el proyecto PISA (OCDE, 2009), la competencia matemática se relaciona con un uso amplio y funcional de esa ciencia; el interés incluye la capacidad de reconocer y formular problemas matemáticos en situaciones diversas.

## 3. ASPECTOS METODOLÓGICOS

### a) *Los participantes*

Participaron 5 estudiantes que cursaban el primer semestre de un bachillerato general. La selección de la muestra atendió a los criterios que considera la OCDE en la aplicación de la prueba PISA, que consiste en elegir a aquellos alumnos cuyo rango de edad se encuentra de los 15 años, 3 meses a 16 años, 2 meses.

Llamamos A1 a Josefina, A2 a Guadalupe, A3 a Ricardo, A4 a Rosario y A5 a Marely, estudiantes que participaron en la investigación.

### b) *El instrumento de exploración y su aplicación*

Los datos provienen de las explicaciones escritas presentadas por los participantes mientras resolvieron cinco problemas de los llamados liberados en PISA en el año 2003 (OCDE, 2004), particularmente del contenido *Cambio y Relaciones*. Este tipo de problemas y su solución, involucran las siguientes dimensiones: *procesos, contenido y contexto*, consisten de lo siguiente:

- *Procesos.* Se refiere a las capacidades que pueden activar los estudiantes en el análisis, razonamiento y comunicación efectiva mediante el planteamiento, la formulación y la resolución de problemas matemáticos. Esta dimensión se divide en tres niveles de complejidad: **reproducción, conexión y reflexión.**
- *Contenido.* Tiene que ver con el tema que abordan los problemas y tareas matemáticas. Cuatro son los temas: a) cantidad, b) espacio y forma, c) cambio y relaciones y; d) probabilidad.
- *Contexto.* Alude a los ámbitos en que se sitúan los problemas matemáticos, los cuales se dividen en Personal, Público, Educativo o Laboral y Científico.

Los problemas se presentaron en un ambiente de lápiz y papel, fueron resueltos de manera individual en un tiempo promedio de dos horas.

#### c) *El proceso de resolución de problemas y las competencias matemáticas*

A partir del proceso de resolución de los problemas, indagamos si los estudiantes separan lo dado de lo buscado (datos y lo que se pide), asimismo, acerca de los conocimientos que usan y cómo los relacionan con los datos y lo que se piden en el problema. Esta información fue fundamental a fin de comprender procesos de aprendizaje, más allá de las dificultades. Esto es, qué saben, la calidad de lo que saben y cómo lo usan.

##### c.1) *Criterio de valoración de las competencias*

La valoración —en términos de la respuesta que dan los estudiantes— toma como base los criterios de evaluación planteados por el INECSE (2005), el cual depende del tipo de respuesta de los problemas. De modo que las puntuaciones posibles oscilan entre 0 y 3 puntos por pregunta, siempre en unidades enteras.

- A una respuesta errónea se le asigna la **puntuación de 0.**
- A preguntas de respuesta cerrada se le asigna **1 como puntuación máxima.**
- Las respuestas de preguntas abiertas, reciben una puntuación **máxima de 2** si es correcta y además, sin errores u omisiones decimales o bien ausencia de unidades de medida; y **1 como puntuación parcial**, si es correcta, pero omiten escribir unidades de medida, o bien sin el uso de decimales cuando las respuestas lo requieren.
- Y en un solo caso se contempla como **puntuación máxima 3**, y dos puntuaciones **parciales de 2 y 1 punto.**

La puntuación se asigna a través de códigos, normalmente de una cifra. Los códigos 1, 2 y 3 se caracterizan por pertenecer a respuestas correctas, el código 0 se asigna cuando el estudiante da una respuesta diferente a la esperada y un código 9, cuando no se da respuesta alguna al problema. También se considera el uso de códigos de dos cifras, tales como 03, 12, 31, etc., y se aplican como sigue:

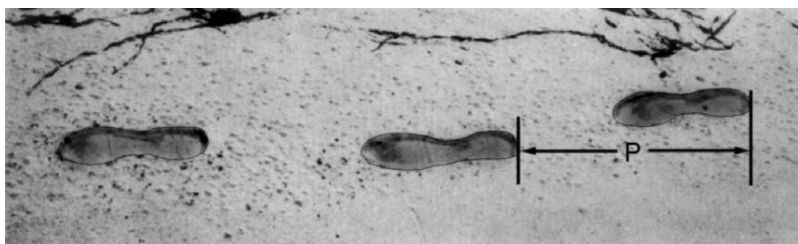
- El primer dígito expresa la puntuación.
- El segundo indica el contenido de la respuesta o el tipo de método de solución usado por el estudiante. La segunda cifra trata de indicar regularidades típicas en las respuestas (como un error habitual o una estrategia concreta utilizada para llegar a la respuesta correcta).

Por cuanto a los niveles de competencia en que se ubica a los estudiantes a partir de las puntuaciones obtenidas, PISA considera seis niveles, los cuales se caracterizan por los procesos o competencias empleados y por el grado de complejidad con que los alumnos los ejecutan al abordar tareas de creciente dificultad. Este rango de puntuaciones se divide en seis niveles de dificultad creciente, cabe mencionar que algunas preguntas son tan sencillas que el nivel de su competencia no llega al nivel 1. El nivel más alto es el 6 y el más bajo el 1 (una explicación más amplia puede verse en INEE, 2010).

#### 4. DISCUSIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Por cuestiones de espacio, presentamos el análisis correspondiente a uno de los problemas, que en PISA, se le conoce como Caminar 1.

El problema: Caminar 1



La foto muestra las huellas del caminar de un hombre. El tamaño de cada paso  $p$  es la distancia entre los talones de dos huellas consecutivas.

Para los hombres, la fórmula  $\frac{n}{p} = 140$ , nos da una relación aproximada entre  $n$  y  $p$  donde,

$n$  = número de pasos por minuto y  $p$  = el tamaño del paso en metros.

- a) Si aplicamos la fórmula a Héctor que da 70 pasos por minuto, ¿cuál es el tamaño de los pasos de Héctor? Muestra tus operaciones.

##### *Descripción de la situación*

El problema se ubica en el contexto personal. Los procesos que se ponen en juego, son de reproducción y por el grado de dificultad PISA ubica el problema en el nivel 5.

La pregunta trata acerca de la relación entre el número de pasos de una persona y la longitud del paso. Su solución implica la sustitución de los datos en una fórmula dada. A partir de ello, se realizan transformaciones algebraicas, en las que espera, que los estudiantes pongan en juego propiedades de los números reales, a fin de determinar el valor de  $p$ , que representa el tamaño de un paso. Una transformación típica del contexto escolar que aparece en el proceso de solución de esta situación, es la que se conoce como “despeje”.

##### *El análisis*

El análisis de las explicaciones escritas presentadas por los estudiantes, da cuenta que los cinco resolvieron sin éxito la situación planteada. No obstante, se observa que A2 y A3 son los que

lograron reconocer a “ $n$ ” como el número de pasos por minuto que da una persona, dato del problema; el cual expresan como  $n = 70$  es el número de pasos que dio Héctor, la persona involucrada en la situación. Se observa además, que utilizaron la fórmula dada, en la que se sustituyeron los datos. A partir de ello, orientaron sus acciones a la determinación del tamaño del paso de Héctor, sin lograrlo, ello debido a errores en el despeje de la variable  $p$  que representa el tamaño de su paso. El resto de los alumnos (A1, A4 y A5) reconocieron como dato que los pasos que da la persona involucrada en el problema equivale a 70, asimismo, que debían determinar el tamaño de sus pasos, aunque no lograron establecer una relación entre las variables  $n$  y  $p$ .

- ¿Cómo procedieron?

Los procedimientos escritos presentados por A1, A4 y A5 muestran que reconocieron como dato que los pasos dados por la persona involucrada en el problema equivale a 70, asimismo, que deben determinar el tamaño de sus pasos (Figura No. 1). Sin embargo, se observa que no relacionan las variables  $n$ , y  $p$  con la fórmula dada, ya que no la usaron. En el proceder de estos alumnos, la variable tiempo en minutos fue determinante en sus acciones, ya que en lugar de usar la fórmula que relaciona el número de pasos ( $n$ ) con el tamaño ( $p$ ), lo que hicieron fue expresar una relación entre los pasos con el tiempo, el cual convirtieron a segundos, es decir,  $\frac{70}{60}$ . La variable tiempo, como se observa en el planteamiento del problema, no era parte del proceso de solución. Se observa además, que A5 comete errores al realizar la división, por ello afirmamos que tampoco es capaz de realizar cálculos rutinarios.

pasos = 70  
 tiempo = 60 segundos  
 $P = \frac{70}{60} = 1.16 \text{ cm}$   
 Tamaño de pasos  
 $R = 1.16 \text{ cm}$

a) Conversión realizada por A1

Actividad 1  
 Pasos = 70  
 tiempo = 60 segundos  
 $\frac{P}{T} = \frac{70}{60} = 1.16 \text{ cm}$   
 Tamaño de pasos  
 $R = 1.16 \text{ cm}$

b) Conversión realizada por A4

$\frac{70}{60} = 1.10 \text{ m. por } \frac{60}{10}$   
 El tamaño de sus pasos de Héctor es de 1.10 m por segundo

c) Conversión realizada por A5

Figura 1: Conversiones de minutos a segundos realizadas por A1, A4, A5.

En el caso de A2 y A3, sus explicaciones evidencian una interpretación adecuada, ya que reconocen los datos y las exigencias del problema. Sin embargo, no tuvieron éxito para arribar a la solución debido a que realizaron de manera incorrecta el despeje de la variable  $p$  (tamaño de pasos), tal como se observa en sus producciones escritas (Figura 2).

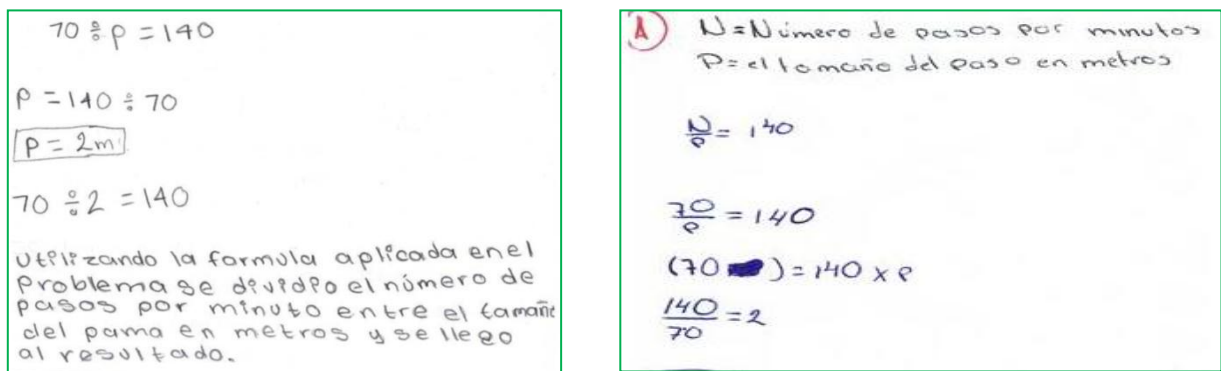


Figura 2: Procedimientos y argumentos presentados por A2 y A3.

- *Valoración del proceso de resolución*

La solución a la pregunta de este problema requirió del uso de una expresión algebraica dada, a fin de determinar el valor de una de las variables involucradas. El procedimiento para llevarlo a cabo se caracteriza como rutinario, puesto que se requiere:

- Una interpretación adecuada del problema, a fin de distinguir cuáles son las condiciones y cuál (es) la (s) exigencia (s).
- Reconocimiento del algoritmo a utilizar: una fórmula;
- Sustitución de los datos en la fórmula, y;
- Determinación del valor de la variable objeto de análisis ( $p$ ).

Una forma resumida de los aspectos anteriores desarrollados por los participantes, se presentan en la tabla 1.

Tabla 1

Alumnos	a)		b)		c)		d)	
	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No
A1		X		X		X		X
A2	X		X		X			X
A3	X		X		X			X
A4		X		X		X		X
A5		X		X		X		X

Con base en el análisis de las explicaciones presentadas por los estudiantes, reconocemos que el 100% dio una respuesta, asimismo, que evidenciaron los procedimientos que llevaron a cabo para obtenerla.



- *Valoración de las competencias*

El problema Caminar 1 está catalogado como de *reproducción*, por los procesos que deben desarrollar los estudiantes durante su resolución. El análisis da cuenta de que aún cuando lo resolvieron, la respuesta que dieron no cumple con las exigencias del problema. Significa, que no resuelven problemas rutinarios.

De acuerdo con los criterios establecidos por el INECSE (2005) para valorar las competencias de los estudiantes con base en el problema Caminar 1, se observa que los cinco se encuentran por debajo del nivel 1, tal como se muestra en la tabla siguiente.

Tabla 2

Alumno	Código	Nivel de competencia
A1	00	Debajo del nivel 1
A2	01	Debajo del nivel 1
A3	01	Debajo del nivel 1
A4	00	Debajo del nivel 1.
A5	00	Debajo del nivel 1

En la tabla se registran además, códigos, los cuales indican si respondieron la pregunta y sí es o no correcta. En este caso los códigos son de dos cifras, la primera es cero, debido a que los estudiantes arriban a una respuesta incorrecta, la segunda cifra indica regularidades típicas en las respuestas, y en el caso de A1, A4 y A5, es cero, debido a una interpretación errónea del problema. Para el caso de A2 y A3 la segunda cifra es 1, debido a que presentan un error habitual al tratar de despejar una variable.

## 5. REFLEXIONES FINALES

El análisis muestra que una minoría de los estudiantes que participaron en el estudio, lograron interpretar datos del problema de forma adecuada, comunicaron por escrito sus ideas y utilizaron el lenguaje simbólico formal. No obstante ello, se evidencia que fueron incapaces de llevar a cabo procedimientos rutinarios, por ello los ubicamos por debajo del nivel uno. Se observó por ejemplo, que aún cuando reconocieron un algoritmo dado en el problema “Caminar 1” y sustituyeron los datos de forma adecuada, la respuesta fue errónea debido a un uso inadecuado del llamado “despeje” de una variable.

Se evidencia además, que para una mayoría, una interpretación inadecuada del problema los condujo a trabajar con variables que no estaban relacionadas con el proceso de resolución, en este caso, la variable tiempo en minutos, la cual fue determinante en sus acciones, y en la obtención de una respuesta errónea de la situación.

## 6. REFERENCIAS

- Díaz-Barriga, A. (2006). Las pruebas masivas. Análisis de sus diferencias técnicas. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 11 (29), 583-615.
- INECSE (2005). *PISA 2003 Pruebas Matemáticas y de Solución de Problemas*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

- INEE (2010). *Información de México sobre PISA 2009*. México: INEE. Recuperado de: [www.revistas.unam.mx/index.php/perfiles/article/download/.../22662](http://www.revistas.unam.mx/index.php/perfiles/article/download/.../22662)
- OCDE (2009). *PISA 2009 Assessment Framework*. Paris: OCDE.
- OCDE (2004). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo de mañana*. Madrid: Santillana.
- Pastrana, F. (2012). *Estrategias desarrolladas por estudiantes de nivel medio superior al resolver problemas matemáticos de la prueba PISA*. (Tesis inédita de maestría). Universidad Autónoma de Guerrero. México.
- Pastrana, F. & Cabañas-Sánchez, G. (2012). Memoria del Segundo Coloquio de Investigación en Matemática Educativa (pp. 14-33). México: Universidad Autónoma de Guerrero.
- Polya, G. (2010). *Como plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas, México, Pp. 18-53.