CARACTERIZACIONES DEL CONCEPTO DE MÉTRICA

Otilio Mederos Anoceto, Rita Roldán Inguanzo,
Boris Jesús Mederos Madrazo, Gustavo Daniel Oyervides Balderas
omederosa@gmail.com, rroldan@matcom.uh.cu,
borismadrazo@gmail.com, goyervides@gmail.com
Universidad Autónoma de Coahuila, Universidad de La Habana, Cuba,
Universidad Autónoma de Juárez, Universidad Autónoma de Coahuila
Avance de investigación
Superior

Resumen

En este trabajo se propone un conjunto de tareas didácticas, que a juicio de los autores, son necesarias para que los estudiantes participen en el aprendizaje del concepto de caracterización conceptual y se construyen, a modo de ejemplo de aplicación de tales tareas, catorce caracterizaciones del concepto de métrica.

1. INTRODUCCIÓN

En nuestra práctica docente de pregrado y de posgrado, hemos observado que los estudiantes no saben aplicar correctamente las operaciones conceptuales, entre otras, la definición, la generalización y la clasificación. Incluso, muchos de los estudiantes de carreras de matemáticas, al llegar a los años superiores no han adquirido el concepto de caracterización conceptual, ni han resuelto tareas preparadas para su comprensión.

Los objetivos de este trabajo son:

1. Presentar una definición de caracterización de un concepto y un conjunto de tareas para que los estudiantes participen en la formación y desarrollo de este concepto;

2. Mostrar cómo pueden aplicarse las tareas para realizar caracterizaciones del concepto de métrica.

2. SOBRE EL CONCEPTO DE CONCEPTO

En (Ausubel, Novak y Hanesian, 2000, p. 86) se señala “Para nuestros propósitos, definiremos a los conceptos como objetos, acontecimientos, situaciones o propiedades que *poseen atributos de criterios* y que están diseñados en cualquier cultura dada mediante algún signo o símbolo aceptado. *Casa, triángulo, guerra y verdad* son algunos de los conceptos culturalmente aceptados que emplearemos.” En esta definición hay dos elementos que consideramos muy importantes: *los atributos de criterios y la utilización de signos o símbolos para designarlos*.

Todo concepto tiene dos características muy importantes, su extensión y su contenido. Se denomina extensión de un concepto al conjunto E de todos los objetos que corresponden a ese concepto y contenido a una colección de propiedades $C=\{p_i,\ i\in I\}$, donde I es un conjunto, que cumplen todos los elementos de C y solo estos elementos. En este trabajo, teniendo en cuenta las necesidades al operar con los conceptos, se indica un concepto por el par (E, C), o simplemente por E.

La operación definición científica sobre la colección de conceptos parte de un concepto definido *(E, C)* y agregándole propiedades a la colección *C*, sustituyendo algunas de las propiedades de *C* por propiedades más fuertes o debilitando *C*, se obtiene una nueva colección de propiedades C_1 a la que corresponde una subcolección E_1 de *E*. Si se cumple que C_1 implica *C*, *C* no implica C_1 y E_1 es una subcolección propia de *E;* se tiene un nuevo concepto *(*E_1, C_1) definido a partir de *(E, C).*

3. CARACTERIZACIONES DE UN CONCEPTO

En la práctica docente, no siempre se presta la atención debida al trabajo con diferentes caracterizaciones de un mismo concepto. Cuando esto ocurre, si se le pregunta a los estudiantes, e incluso a los graduados, de una carrera, el significado del concepto de caracterización de un concepto, por lo general, no pueden explicarlo satisfactoriamente.

3.1 SOBRE EL CONCEPTO DE CARACTERIZACIÓN

Dado el concepto ya formado (E_1, C_1) que se ha definido a partir del concepto *(E, C)*, pueden encontrarse diferentes colecciones *P* de propiedades que sólo cumplen los elementos de E_1. Cualquier otra colección *P*, por la cual pueda sustituirse C_1 sin alterar E_1, recibe el nombre de caracterización del concepto (E_1, C_1). Esto es posible cuando las colecciones de propiedades *P* y C_1 son equivalentes, en el sentido de que cada una se puede obtener de la otra.

Si se parte de otro conjunto *(F, D)* para definir (E_1, C_1) y al imponer a los elementos de *F* las propiedades que forman C_1 se obtiene la extensión E_1, se dice que los conceptos definidos a partir de *(E, C) y* de *(F, D)* respectivamente, son equivalentes. Se puede afirmar entonces que el concepto (E_1, C_1), definido a partir *(F, D)*, es una caracterización del concepto (E_1, C_1), definido a partir de *(E, C)*.

3.2. TIPOS DE TAREAS QUE SE PRESENTAN EN MATEMÁTICAS

1. Dados un concepto (E_1, C_1) y un conjunto de propiedades *P*; determinar si *P* es una caracterización del concepto (E_1, C_1).

2. Dado un concepto (E_1, C_1), obtener una o varias caracterizaciones del mismo.

3. Si se dispone de un concepto (E_1, C_1) y varias caracterizaciones del mismo, determinar de dónde es más útil partir al realizar una acción, si de una caracterización o del contenido del concepto.

4. Hacer uso de diferentes definiciones de un mismo concepto, dejando fijo el concepto de partida y utilizando diferentes caracterizaciones del concepto como contenido.

5. Utilizar diferentes tipos de definiciones de un mismo concepto, dejando fijo el contenido y variando el conjunto de partida de la definición.

Para dar cumplimiento a una tarea del tipo 1, hay que probar que una condición necesaria suficiente para que se cumplan las propiedades de C_1 es que se cumplan las propiedades de *P*. Las tarea 2 es compleja y para darle cumplimiento hay que tener cierto nivel de desarrollo en matemáticas. La tarea 3 es quizás la tarea más importante para el aprendizaje de los estudiantes, pero pocas veces en el proceso de enseñanza aprendizaje se les presentan problemas que exijan la realización de este tipo de tarea. Las tareas 4 y 5 suelen resultar muy útiles para que los estudiantes comprendan la relatividad del conjunto de propiedades que se toma como contenido y el conjunto de partida del concepto que se define. Para ello se debe ejercitar a los estudiantes en el uso de diferentes definiciones de un mismo concepto, dejando fijo el concepto de partida y variando el contenido, o dejando fijo el contenido y variando el conjunto de partida.

4. EL CONCEPTO DE MÉTRICA Y DE ESPACIO MÉTRICO

Dado un conjunto M se denomina métrica sobre M a toda aplicación $m: M\times M \to [0, +\infty)$ que verifica para todos los elementos $x, y, z \in M$ las propiedades siguientes:

m_1) Si $x = y$, entonces $m(x, y) = 0$. *(Propiedad de identidad)*

m_2) $m(x, y) = m(y, x)$. (*Propiedad de simetría*)

m_3) $m(x, y) \leq m(x, z) + m(z, y)$. (*Propiedad triangular o de subaditividad*)

m_4) Si $m(x, y) = 0$, entonces $x = y$. *(Propiedad de definitoreidad)*.

Para dos elementos cualesquiera $x, y \in M$ el número no negativo $m(x, y)$ se denomina distancia de x a y, y si hay posibilidades de confusión m-distancia de x a y. La propiedad m_{14}: $m(x, y)=0$ si, y solo si $x=y$, que resulta de considerar las propiedades m_1 *y* m_4 juntas se denomina *identidad de indiscernibles*.

El concepto de donde se parte para definir el concepto de métrica en la definición anterior es (F_M, C), donde F_M es la colección de todas las funciones con dominio $M\times M$ y codominio $[0, +\infty)$, que satisfacen las propiedades de $C=\{f_1, f_2\}$, tal que

f_1: para todo elemento $(x, y)\in M\times M$ existe un $r \in [0, +\infty)$ tal que $((x,y), r)$ pertenece al grafo de m;

f_2: si $((x,y), r_1)$ y $((x,y), r_2)$ pertenecen al grafo de m; entonces $r_1=r_2$.

La colección $C_1=\{m_i\}$, $i=1:4$, constituye el contenido del concepto de métrica (M_M, C_1). La colección M_M, la forman los elementos de F_M que satisfacen las propiedades de C_1.

Antes de pasar a estudiar caracterizaciones del concepto de métrica, conviene determinar en qué casos, en dependencia de la cardinalidad del conjunto M, resulta de interés tal estudio. Es evidente que el caso $M=\varnothing$ no resultan de interés. Si $M=\{a\}$, entonces M_M, sólo contiene a la función idénticamente nula, por lo que tal caso tampoco resulta de interés.

Si $M=\{a,b\}$, entonces $M_M=\{m_r\}_{r\in[0,+\infty)}$, donde

$$m_r(a,a)= m_r(b,b)=0 \quad y \quad m_r(a,b)= m_r(b,a)=r, \tag{1}$$

y trivialmente se tiene que $F_M \backslash M_M \neq\varnothing$, o sea, $\varnothing \subset M_M \subset F_M$. Más aún, en Mederos y Roldán (2010) se demuestra que $[M_M]=[F_M\backslash M_M]= [IR]$.

Si M tiene más de dos elementos, entonces la colección $\{m_r\}_{r\in[0,+\infty)}$ está estrictamente contenida en M_M. Obviamente, existen infinitos elementos de F_M que no pertenecen a M_M. Luego, $\varnothing \subset M_M$

$\subset F_M$ y en [Med2010] se demuestra que si M tiene cardinal infinito $[M_M]=c$ $[M_M]=[F_M \backslash M_M]=[IR]$, entonces $[M_M]=[F_M \backslash M_M]=2^c$, para lo cual se definen las métricas

$$m_N(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ 1 & (x,y)=(a,b)\ \ o\ \ (x,y)=(b.a),\\ 2 & \{x,y\}\nsubseteq\{a,b\}\end{cases} \qquad (2)$$

siendo a,b dos elementos diferentes cualesquiera de M.

5. CARACTERIZACIONES DEL CONCEPTO DE MÉTRICA

Por la simple observación del contenido del concepto de métrica, se deduce fácilmente que las propiedades m_1 y m_4 equivalen a la propiedad m_{14}, ya definida anteriormente como *identidad de indiscernibles*, dada por

m_{14}) $m(x, y)=0$ si, y solo si $x=y$.

De esta manera el conjunto de propiedades $P_1=\{m_{14}, m_2, m_3\}$ constituye una caracterización del concepto de métrica.

También es evidente la equivalencia de la propiedad m_{14}, con la propiedad m'_{14}, definida por

m'_{14}) $m(x, y)>0$ si, y solo si $x\neq y$,

de lo cual se deduce que $P_2=\{m'_{14}, m_2, m_3\}$ es también una caracterización del concepto de métrica. Estas dos caracterizaciones del concepto de métrica constituyen ejemplos de aplicación de la tarea 2 del epígrafe 3.2.

Siguiendo la misma idea, la aplicación consecutiva de las propiedades m_3 y m_2 permite concluir la validez de la propiedad

m_{23}) $m(x, y) \leq m(x, z) + m(z, y)$ para todos $x, y, z \in M$.

Sin embargo, la demostración del recíproco (m_{23} implica m_2 y m_3), aunque sencilla, no es tan inmediato para los estudiantes, pues se obtiene al dar a z los valores x e y, intercambiando los papeles de estos últimos en m_{23}, cuando ello es necesario. Con ello se comprueba que la colección de condiciones $C=\{m_i, i=1:4\}$ de la definición de métrica es equivalente a la colección $P_3=\{m_1, m_{23}, m_4\}$, la cual es entonces una nueva caracterización del concepto de métrica. Nótese aquí la combinación posible de las tareas 1 y 2 del epígrafe 3.2. Tal caracterización fue presentada por Lindenbaum (1926) como concepto de métrica y en su artículo se muestran ejemplos, en los que es más útil utilizar la caracterización del concepto que el concepto propiamente dicho, con lo que se ejemplifica la aplicación de las tareas 3 y 4 del epígrafe 3.2.

Combinado las caracterizaciones anteriores, se obtienen directamente las caracterizaciones $P_4=\{m_{14}, m_{23}\}$ y $P_5=\{m'_{14}, m_{23}\}$.

Por otra parte, resulta sencillo comprobar que las propiedades m_2, m_3 y m_{23} siempre se cumplen en el caso $x=y$. Ello conduce a plantear las nuevas propiedades m'_2, m'_3 y m'_{23} considerándolas solo para los casos en que x, y, z son diferentes dos a dos; es decir,

m'_2) $m(x, y)= m(y,x)$ para todos $x, y \in M$ con $x \neq y$;

m'_3) $m(x, y) \leq m(x, z) + m(z, y)$ para todos $x, y, z \in M$ diferentes dos a dos;

m'_{23}) $m(x, y) \leq m(z, x) + m(z, y)$ para todos $x, y, z \in M$ diferentes dos a dos.

A partir de estas propiedades se obtienen las caracterizaciones del concepto de métrica dadas por las colecciones $P_6=\{m_{14}, m'_2, m_3\}$, $P_7=\{m_{14}, m_2, m'_3\}$, $P_8=\{m_{14}, m'_2, m'_3\}$, $P_9=\{m'_{14}, m'_2, m_3\}$, $P_{10}=\{m'_{14}, m_2, m_3\}$, $P_{11}=\{m'_{14}, m'_2, m'_3\}$, $P_{12}=\{m_1, m'_{23}, m_4\}$, $P_{13}=\{m_{14}, m'_{23}\}$ y $P_{14}=\{m'_{14}, m'_{23}\}$.

Los casos particulares de las ternas de colecciones (P_6, P_7, P_8) y (P_9, P_{10}, P_{11}) constituyen ejemplos sencillos de aplicación de la tarea 3 del epígrafe 3.2, al considerar que las colecciones P_8 y P_{11} son más útiles en la práctica como caracterizaciones del concepto de métrica que las restantes de sus respectivas ternas. Ello se debe a que no tiene mucho sentido considerar solo una de las propiedades m_2 o m_3 reducida al caso en que x, y, z son diferentes dos a dos.

La no negatividad de m es una consecuencia de las condiciones m_2 y m_3. Consecuentemente, se obtienen catorce caracterizaciones del concepto de métrica m sobre M considerando una función de MxM en IR que cumple cualesquiera de las colecciones de propiedades $C, P_i, i=1:14$, tales que

$P_1=\{m_{14}, m_2, m_3\}$,	$P_2=\{m'_{14}, m_2, m_3\}$,
$P_3=\{m_1, m_{23}, m_4\}$,	$P_4=\{m_{14}, m_{23}\}$,
$P_5=\{m'_{14}, m_{23}\}$,	$P_6=\{m_{14}, m'_2, m_3\}$,
$P_7=\{m_{14}, m_2, m'_3\}$,	$P_8=\{m_{14}, m'_2, m'_3\}$,
$P_9=\{m'_{14}, m'_2, m_3\}$,	$P_{10}=\{m'_{14}, m_2, m_3\}$,
$P_{11}=\{m'_{14}, m'_2, m'_3\}$,	$P_{12}=\{m_1, m'_{23}, m_4\}$,
$P_{13}=\{m_{14}, m'_{23}\}$,	$P_{14}=\{m'_{14}, m'_{23}\}$.

Estas catorce caracterizaciones del concepto de métrica se pueden utilizar para dar cumplimiento a las tareas de la 1 a la 5 del epígrafe 3.2.

6. CONCLUSIONES

A partir de definir el concepto de concepto y de caracterización conceptual en este trabajo se presentó un conjunto de tareas didácticas necesarias para que los estudiantes participen en el aprendizaje del concepto de caracterización conceptual.

Como ejemplo de aplicación de dichas tareas se presentaron además catorce caracterizaciones del concepto de métrica.

7. REFERENCIAS

Ausubel, D. P., Novak J. D. y H. Hanesian. (2000). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.

Lindenbaum, A. (1926). Contributions à l'etude de l'espace métrique. I, *Fundamenta Mathematicae*, 8, 209-222.

Mederos, O.B. y Martínez, M.A. (1988). Clasificación de las funciones elementales. *Revista Cubana de Educación Superior*, VIII, 3.

Mederos, O. B. y Martínez, A. (1997). Las operaciones generalización y restricción de conceptos. *Boletín de Matemática*. Universidad Nacional de Colombia. Volumen IV, Número 2.

Mederos, O. B. Mederos, B. J. (2009). Los ejemplos y contraejemplos como herramientas para facilitar el proceso de generalización conceptual. En P. Lestón (Ed.). *Acta Latinoamericana de matemática educativa*, 22, 257-266.

Mederos, O. B. y Roldán, R. A. (2010). Caracterizaciones y generalizaciones del concepto de métrica. *Revista Ciencias Matemáticas*, 25, único, 2009-2010, 29-39.

Menger, K. (1927). Bemerkungen zur zweiten Untersuchung Äuber allgemeine Metrik. Proc. Amsterdam, 30, 710-714.

Menger, K. (1931). Beiträge zur Gruppentheory I. Über einen Abstand in Gruppen. *Math. Zeitschrift*, 33, 396-418.

Menger, K. (1931). Bericht über metrische Geometrie. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 40, 201-219.