

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

**I GIOCHI MATEMATICI
COME STRUMENTO
DIDATTICO**

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Marilena Barnabei

Presentata da:
Elia Faglioni

Sessione
Anno Accademico

Ai ragazzi di seconda media con la speranza che in un periodo di crescita così critico riescano comunque a crescere un amore per una materia. E che questo amore li possa seguire per tutta la vita...

Introduzione

Sarebbe molto facile pensare che i giochi matematici non siano nient'altro che una verifica di matematica più difficile rispetto alle altre, ma i giochi matematici possono fare di più. Al contrario di una verifica un gioco matematico non va a valutare la conoscenza di un ragazzo del programma ministeriale bensì va a valutare la sua capacità di pensare spesso fuori dagli schemi, di superare un ostacolo mentale, ma soprattutto permette ad un docente di vedere bene le mancanze nel pensiero logico dei suoi studenti.

In questa tesi è stato fatto un lavoro prima creativo e poi pratico di tipologia didattica. Prima di tutto sono avvenuti degli incontri a Parma nei quali ho imparato a scrivere i giochi matematici confrontandomi con degli esperti. A questo lavoro è seguita la creazione di una prova a cui sottoporre degli studenti delle medie. E con le conoscenze ottenute dagli incontri ho creato un compito composto da 7 esercizi con lo scopo di valutare ma soprattutto stimolare ogni parte del ragionamento matematico in un ragazzo.

A questo lavoro è poi seguito quello in classe dove sono stati dati i compiti e poi è stata fatta la correzione insieme alle classi e infine la raccolta dati e il commento. Con anche l'aiuto delle insegnanti che mi hanno coinvolto nell'attività sia durante l'attività didattica che successivamente fornendo il quadro completo della classe

La tesi è strutturata in tre parti: nel primo capitolo farò un'introduzione storica e filosofica sulla matematica e in particolare sui giochi matematici nelle scuole, spiegando nel dettaglio che cosa mi ha portato a svolgere questo lavoro.

Nel secondo capitolo invece parlerò del compito stesso, di come è stato concepito con particolare attenzione nei singoli quesiti.

Infine nel terzo capitolo discuterò dei risultati ottenuti dagli studenti, guardando le percentuali di esercizi corretti e dedicando l'ultima sezione agli errori più comuni.

Indice

Introduzione	i
1 I giochi matematici nelle scuole	3
1.1 La matematica nella scuola	3
1.2 I giochi matematici	5
1.3 I processi cognitivi del ragionamento matematico	6
2 Creazione del compito	9
2.1 Imparare a scrivere i giochi matematici	9
2.2 Il Compito Presentato	11
2.3 Commento del Compito	15
3 L'esperienza in classe	19
3.1 Condizioni della prova	19
3.2 I risultati registrati	21
3.3 Commento dei risultati	25
3.4 Gli errori	27
Conclusioni	29
Bibliografia	31

Capitolo 1

I giochi matematici nelle scuole

1.1 La matematica nella scuola

La prima questione che ci vogliamo porre è quale sia il compito principale dell'insegnamento della matematica agli alunni della scuola media inferiore e più in generale ai preadolescenti e adolescenti. Purtroppo nel sentire comune la matematica si riduce ad un insieme di simboli e di concetti a sé stanti avulsi dal contesto concreto. Questo enorme pregiudizio è responsabile della diffusa diffidenza verso la matematica, spesso vissuta come una disciplina noiosa, frustrante, e per molti ragazzi ostica. La si pensa come una materia nella quale si studiano solo numeri e figure, di cui si calcola l'area o il volume attraverso ricette preconfezionate da memorizzare. A volte, quando va meglio, la si vive come un insieme di giochini da settimana enigmistica, mancando completamente il valore profondo, complesso e anche la bellezza della matematica e della sua importanza nella nostra società. Niente di quello che abbiamo raggiunto attraverso il progresso tecnologico sarebbe stato possibile senza l'avanzamento straordinario della matematica nel XVIII e XIX secolo, che ci ha regalato il calcolo differenziale, che poi ha permesso alla fisica e le altre scienze applicate di realizzare la prima rivoluzione industriale.

Quand'anche si raggiungesse la consapevolezza dell'importanza storica di questa materia e del suo studio, immediatamente per la maggior parte degli studenti seguirebbe una disaffezione dovuta alla percezione errata che si tratti di un binario morto, che nell'era della Rivoluzione Industriale 4.0, la matematica sia inutile.

In un articolo de "L'Unità" del 14 Aprile 2000, M. Emmer si chiede appunto questo e cioè "se la matematica, nell'era dei computer, serve ancora". Tuttavia è indispensabile capire che oggi non sono più concepibili un'educazione e una formazione accettabili, se non comportano una parte, sempre più grande, di matematica, non volta a formare necessariamente dei professionisti della matematica, ma persone con un senso critico in grado,

indipendentemente dalla specializzazione prescelta, di saper utilizzare in modo rigoroso e corretto gli strumenti matematici appresi. Persino letterati (grammatici, linguisti), storici (storia quantitativa), geografi (cambiamenti climatici), sociologi (sociologia sperimentale), economisti (econometria) hanno bisogno di saper maneggiare lo strumento matematico molto bene e ragionare in modo matematico, per poter svolgere un tipo di attività intellettuale, caratteristico della matematica.

Più in generale, come afferma il famoso pedagogo francese Mialeret, una buona preparazione alla vita non si può raggiungere senza il ricorso ad una formazione matematica seria.

”Una formazione matematica [...] conferisce all’individuo un arricchimento concettuale che nessun’altra disciplina può dargli. Il concetto di numero, quello d’operazione, di verità matematica, di rapporto e di proporzionalità... fanno parte dell’equipaggiamento mentale dell’uomo moderno. Così pure una formazione matematica abitua gli allievi a superare la realtà concreta per esprimerla in un nuovo linguaggio purificato e più astratto, capace di rendere evidenti le somiglianze fra situazioni apparentemente ben lontane le une dalle altre” (Mialeret, 1969) [6]

Studiare matematica in modo corretto significa imparare a ragionare e a prendere coscienza del proprio ragionamento. Dunque non si deve soltanto chiedere ai ragazzi di acquisire le abitudini di un ragionamento corretto, ma bisogna incoraggiare gli studenti a prendere coscienza degli stessi processi del loro pensiero.

La formazione del pensiero logico è la manifestazione più alta delle capacità umane: formarlo e svilupparlo è un dovere degli insegnanti di ogni ordine e grado, indipendentemente dalla loro formazione umanistica o scientifica, andando oltre le sterili contrapposizioni che hanno tanto danneggiato le discipline dell’uno o dell’altro fronte nel passato.

Nei Programmi di matematica della scuola primaria leggiamo:

”L’educazione matematica contribuisce alla formazione del pensiero nei suoi vari aspetti: di intuizione, di immaginazione, di progettazione, di ipotesi e deduzione, di controllo e quindi di verifica o smentita. Essa tende a sviluppare, in modo specifico, concetti, metodi e atteggiamenti utili a produrre le capacità di ordinare, quantificare e misurare fatti e fenomeni della realtà e a formare le abilità necessarie per interpretarla criticamente e per intervenire consapevolmente su di essa. [...] si favorirà così la formazione di un atteggiamento positivo verso la matematica intesa sia come valido strumento di conoscenza e di interpretazione critica della realtà sia come affascinante attività del pensiero umano”. [5]

Dunque si afferma la matematica come linguaggio simbolico e codifica di modelli astratti per favorire i processi mentali e la costruzione logica del ragionamento.

1.2 I giochi matematici

I giochi matematici, e cioè problemi creati e proposti a gruppi e/o classi di ragazzi, rispondono alla necessità del potenziamento di quelle abilità mentali preposte all'acquisizione di processi di modellizzazione ed applicazione delle competenze matematiche al fine di rappresentare e controllare la realtà. Qualcuno potrebbe sorprendersi all'affermazione che la matematica potenzia l'intuizione e l'immaginazione, soprattutto quegli studenti che hanno avuto solo un contatto superficiale con lo studio della matematica come memorizzazione di definizioni e acquisizione di tecniche preconfezionate. Nulla però è più lontano dalla realtà ed è proprio il compito dei giochi matematici rendere i ragazzi consapevoli anche di questo fatto cruciale. Chi ha intrapreso ed è già arrivato a buon punto di questo percorso di apprendimento sa bene come l'intuizione sia il punto di partenza irrinunciabile per l'astrazione e la modellizzazione dei problemi, dai più concreti ai più astratti. La sfida personale dello studente è di potersi mettere alla prova e risolvere questo tipo problemi, più impegnativo e difficile di quanto comunemente proposto in classe. La sfida del docente, altrettanto importante e cruciale, è di concepire e proporre problemi che riescano a stimolare queste capacità. Non è infatti produttivo porsi in un atteggiamento di creatività irrazionale, come ci dice il grande matematico Polya (1979):

” Uno sciocco può porre più domande di quante non ne sappiano risolvere nove saggi” [3]

E d'altra parte Polya stesso (1887-1985) in un altro passo riporta la sensazione di euforia che ogni docente vorrebbe che i suoi studenti provassero almeno una volta durante la risoluzione corretta di un problema, magari semplice, ma significativo, dove i ragazzi devono andare oltre la formula preconfezionata e attraverso il ragionamento matematico arrivare ad una soluzione non ovvia del quesito proposto.

” Una grande scoperta risolve un grande problema, ma nella soluzione di qualsiasi problema c'è un pizzico di scoperta. Il tuo problema può essere modesto, ma se stimola la tua curiosità, tira in ballo la tua inventiva e lo risolvi con i tuoi mezzi, puoi sperimentare la tensione e gioire del trionfo della scoperta ” [3]

Più recentemente però il matematico Edward Frenkel ha commentato sul metodo di insegnamento della matematica nelle scuole in un'intervista in risposta alla domanda ”cosa c'è che non va con il modo in cui la maggior parte di noi è introdotta alla matematica?” e Frenkel risponde

”Il modo in cui viene insegnata la matematica è simile ad un corso di arte dove agli studenti è insegnato come pitturare una staccionata, ma non gli vengono mai mostrati i dipinti dei grandi maestri. Quando, più avanti nella loro vita, la matematica viene inserita in un discorso, la maggior parte delle persone scuote la testa e dice ”Non ero bravo in matematica”. Cosa stanno davvero dicendo è ”Non ero bravo a pitturare la staccionata” [1]

Nel preparare i problemi che ho proposto a quattro classi (94 studenti in totale) della seconda classe della scuola media inferiore, mi sono ispirato ai principi che ho esposto qui di sopra e alle parole di Frenkel e Polya in particolare, che parlano ai docenti di ogni ordine e grado un linguaggio che sentiamo nostro e dovrebbe ispirare il loro lavoro quotidiano.

In particolare nella mia proposta di problemi per questi ragazzi ho insistito che venissero proposti all'intera classe e non ad una elite come spesso avviene per i giochi matematici: rifiuto categoricamente l'idea che la matematica sia qualcosa per "iniziati", per alcuni particolarmente dotati o con una passione più forte degli altri.

La matematica è per tutti, come ho esposto nella sezione precedente, è un linguaggio universale che ci accomuna attraverso frontiere e ci diversifica dal resto degli essere viventi. Ci ha portato ad un benessere senza precedenti, ci ha reso migliori, non può essere qualcosa per pochi, ma il ragionamento matematico deve essere per tutti.

1.3 I processi cognitivi del ragionamento matematico

In questa sezione esponiamo parte del lavoro di Anderson et al. che spiega come i processi cognitivi che ogni insegnante vede sperimentalmente mentre una classe di ragazzi risolve dei problemi matematici proposti, siano effettivamente riscontrabili in modo scientifico e incontrovertibile attraverso la tecnica del MVPA (multivoxel pattern analysis) di una scannerizzazione MRI (magnetic resonance imaging) del cervello umano durante la formazione del pensiero logico.

MVPA può efficacemente essere utilizzata per riconoscere i vari percorsi cerebrali, che si verificano nei diversi stadi durante la risoluzione di un problema matematico. Prima però di riuscire ad identificare tali stadi è necessario affrontare il problema della loro durata altamente variabile sia per un singolo individuo a seconda del problema, che all'interno di una popolazione studentesca necessariamente variegata.

Nella sua ricerca, Anderson prende in considerazione un insieme di partecipanti ai quali viene proposta la risoluzione di alcuni problemi. Tipicamente i partecipanti hanno impiegato da un paio di secondi a 30 secondi per risolvere i quesiti proposti. Anderson affronta il problema di identificare gli stadi diversi ed associarli agli schemi cerebrali corrispondenti, tuttavia attraverso il nuovo metodo che ha sviluppato insieme ai suoi collaboratori è in grado di individuare simultaneamente stadi e schemi cerebrali, creando i presupposti per un'azione ancora più efficace di proposte e risoluzione per chi, come me, vuole rendere i quesiti il più possibile significativi.

Capitolo 2

Creazione del compito

2.1 Imparare a scrivere i giochi matematici

Scrivere giochi matematici non è semplice quanto scrivere degli esercizi. Un gioco matematico ha tipicamente bisogno di una intuizione per essere risolto e quindi è naturalmente necessaria una intuizione anche per scriverlo. Per imparare a comporre uno di questi problemi mi sono rivolto a tre docenti che con la loro esperienza nel campo sono stati fondamentali per la stesura del compito.

Laura Branchetti è la docente di Didattica della matematica nel corso di laurea magistrale nell'università degli studi di Parma. Nel 2012 fatto un progetto che coinvolgeva una classe di scuola secondaria di primo grado di Riccione nella quale sono stati presentati dei giochi matematici e poi risolti insieme per allenare i vari momenti della deduzione matematica. Ha spiegato come la risoluzione di un problema di tipo matematico avviene in 3 fasi. La prima è l'intuizione, la fase nella quale lo studente sviluppa una teoria sulla quale possa essere trovata una soluzione basandosi sui dati. Poi avviene la creazione di un modello, processo nel quale lo studente crea una regola che gli permetta di raggiungere la soluzione del problema. Infine avviene la verifica del modello, dove lo studente valuta se il suo modello funziona anche nei casi dati o nei casi banali. La docente ha spiegato come ogni problema può valutare in misure diverse queste tre componenti: si deve quindi fare attenzione al tipo di abilità che vengono richieste per risolvere i problemi. La docente mi ha inoltre invitato a inserire all'interno del compito un problema controintuitivo o apparentemente impossibile per riuscire a mantenere alto l'interesse degli studenti meno appassionati alla materia durante la correzione

Gli insegnamenti della professoressa Branchetti sono stati molto utili nello scrivere i problemi in quanto se il proprio scopo è valutare il ragionamento di uno studente allora utilizzando le conoscenze sopra citate ci si può accorgere di quanto esercizi apparente-

mente simili valutino parti diverse del ragionamento.

Francesco Morandin è un docente di statistica e probabilità nel corso di laurea di matematica che dal 2004 contribuisce all'organizzazione e alla formazione del programma delle Olimpiadi della matematica, inoltre fino al 2011 ha scritto i problemi che venivano usati dalle scuole medie della zona (in particolare quindi nelle province di Modena e Parma) come allenamento per la squadra di giochi matematici. Tuttavia non ha mai effettivamente scritto i giochi matematici che sono apparsi all'interno delle prove perché se ciò fosse avvenuto non avrebbe potuto parteciparvi, cosa che Morandin non era disposto a fare vista la sua profonda passione per questo tipo di competizioni. Morandin ha reso disponibili i giochi da lui proposti come allenamento dall'anno 2008 al 2011: questi giochi matematici sono poi stati il punto di partenza per la creazione del compito. Dalle sue parole è anche stato chiaro quanto fosse grave trascurare quanto un quesito valutasse lo studente dal punto di vista della comprensione del testo, e che fosse importante che anche questo aspetto venisse valutato da un gioco matematico

Morandin ha anche consigliato di inserire almeno un problema che fosse alla portata di tutti gli studenti, anche quelli meno abili in matematica, perché uno studente che trova il coraggio o la forza di buttarsi in un progetto di questo tipo potrebbe avere una potenziale passione per la matematica, che verrebbe compromessa se non riuscisse a svolgere neanche un esercizio. Per quanto nella scrittura vi sia stato impegno nel seguire questo ultimo consiglio è stato molto difficile rendersi davvero conto di quanto facile dovesse essere un problema perché la maggioranza riuscisse a farlo.

Alberto Saracco è invece il docente di Geometria 2 del corso di laurea in matematica a Parma. Ha fatto da giudice e organizzatore alla Coppa Galois dal 2014, la competizione avrebbe poi cambiato nome nel 2016 diventando la Coppa Nash. Queste sono state delle competizioni a squadre tra le scuole dove il gruppo che era in grado di risolvere i problemi in modo corretto e rapido si aggiudicava la coppa che poi veniva tenuta nella scuola fino all'anno successivo, quando avrebbero dovuto difenderla ripetendo la competizione. Contrariamente a Morandin, Saracco scriveva proprio i problemi che venivano usati nella competizione e quindi ha potuto dare consigli più specifici per quanto riguarda il processo creativo. Dopo aver parlato con la professoressa Branchetti e il professor Morandin ho presentato a Saracco alcuni dei problemi che avrebbero composto parte del compito. Saracco mi informò su come la geometria fosse fondamentale per valutare l'astrazione di uno studente e mi aiutò a capire quali calcoli sarebbero stati troppo complessi da richiedere ad uno studente di seconda media. Infine Saracco fu fondamentale per capire come creare un gioco matematico degno di una prova ufficiale: spiegò che non esiste un metodo o un algoritmo per creare un problema logico interessante ma che il modo più efficace è scrivere decine e decine di problemi, anche brutti o banali, e poi per ogni 10 eliminare i 9 più brutti. Un consiglio estremamente importante.

2.2 Il Compito Presentato

La Vecchia Fattoria

Testo

In una fattoria ci sono solo galline e mucche.

Il contadino conta 36 teste e 96 zampe.

Quante sono le galline?

Soluzione

Un modo semplice per risolverlo è partire dal caso in cui tutte le teste appartengono a galline, in questo caso si avrebbero 72 zampe. Da qui cominciare a sostituire le galline con le mucche aggiungendo 2 zampe per ogni mucca sostituita e contare quante ne servono per arrivare a 96 zampe

Esperimento Fallito

Testo

Nella classe di Giovanni stanno studiando dei batteri, un giorno la classe va in laboratorio per provare a vedere come si moltiplicano.

Giovanni é però maldestro e si sbaglia nel sistemare l'esperimento. I suoi compagni ottengono i seguenti dati:

<i>MINUTO</i>	<i>ESEMPLARI</i>
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
<i>etc.</i>	<i>etc.</i>

Mentre per Giovanni i batteri aumentano di due al minuto partendo da 1 al minuto 1. Quando l'esperimento si ferma Giovanni si accorge che i suoi compagni hanno 49 batteri in più dei suoi.

Quanto tempo è durato l'esperimento?

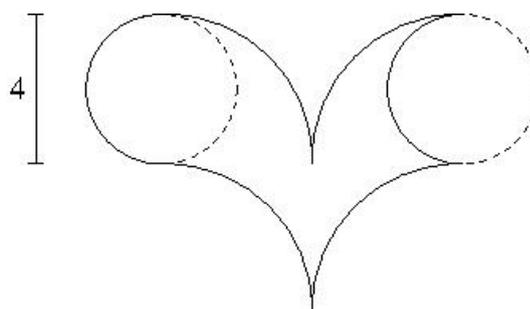
Soluzione

Per risolvere questo quesito basta scrivere i batteri di Giovanni in una tabella e poi aggiungere 49 in ogni casella. Infine si può controllare in quali minuti si ha un quadrato perfetto, in quanto solo questi sono possibili risultati del resto della classe. Così facendo ci si accorge che il primo risultato plausibile è 8 minuti, che è anche il risultato corretto.

Quasi un cuore

Testo

Calcolare l'area della seguente figura



Soluzione

Basta notare che tagliando la semicirconferenza a sinistra e incastrandola a destra e tagliando la spina verso il basso e incastrandola sopra si ottiene un rettangolo di base 8 e altezza 4, quindi l'area è 32

Mezzogiorno di fuoco

Testo

Lo sceriffo corre in piazza e trova i 4 gemelli McLain: Albert, Bart, Carl e Daniel, che si puntano la pistola a vicenda. Hanno riscosso la taglia di un fuorilegge ma uno di loro se l'è intascata.

"È stato Bart" Afferma Albert

"Non é vero, ho visto Carl che prendeva i soldi" Si difende Bart

"Ma cosa dici? Ho visto che te li eri presi tu!" Risponde Carl

"L'unica cosa certa è che non sono stato io" Dice Daniel ridacchiando

Lo scheriffo sa che tre gemelli possono solo mentire mentre uno dice sempre la verità, ma sono identici, quindi si dimentica sempre qual è dei quattro che non mente.

Chi si è intascato i soldi?

Soluzione

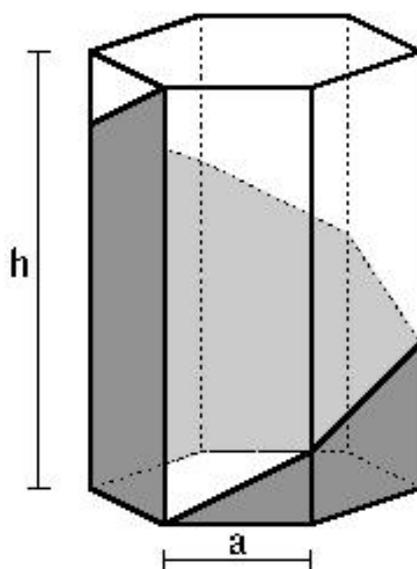
Dato che Daniel fa un'affermazione che contiene più informazioni dei suoi fratelli conviene cominciare il ragionamento da lui. Se Daniel mente, e quindi se si è preso i soldi, significa che uno degli altri tre deve per forza stare dicendo la verità, ma nessuno di loro accusa Daniel quindi questo significherebbe che ci sono due colpevoli: Daniel e l'accusato da chi sta dicendo la verità. Questo significa che Daniel sta dicendo la verità e che gli altri tre fratelli mentono. Bart e Carl si accusano a vicenda quindi se fosse stato uno di loro vorrebbe dire che l'altro nell'accusarlo starebbe affermando il vero, che

è impossibile per quanto affermato prima. Quindi per esclusione deve essere stato Albert.

Una strana area

Testo

Calcolare l'area della superficie colorata sul prisma a base esagonale regolare sapendo che $h=6$ unità e $a=2$ unità



Soluzione

Ci sono due metodi principali. Il primo consiste nell'accorgersi che aprendo il prisma e schiacciandolo contro un piano l'area che viene richiesta è un triangolo di base 12 e altezza 6, quindi di area 36. Per il secondo invece si può notare come la parte colorata della prima faccia del prisma è grande quanto la parte non colorata dell'ultima faccia, questo vale anche per le altre facce e così facendo si arriva al fatto che l'area è metà della superficie del prisma, quindi 36.

Un falco impossibile

Testo

Un treno viaggia alla velocità costante di 10 km/h verso una stazione che dista 10 km. Un falco parte dalla testa del treno e viaggia verso la stazione però al doppio della velocità del treno. Quando il falco arriva alla stazione, istantaneamente cambia direzione e senza cambiare la sua velocità torna verso il treno. Appena arriva alla testa del treno allo stesso modo fa dietro front e torna verso la stazione. Continua ad andare avanti e indietro tra la testa del treno e la stazione finché il treno arriva alla stazione.

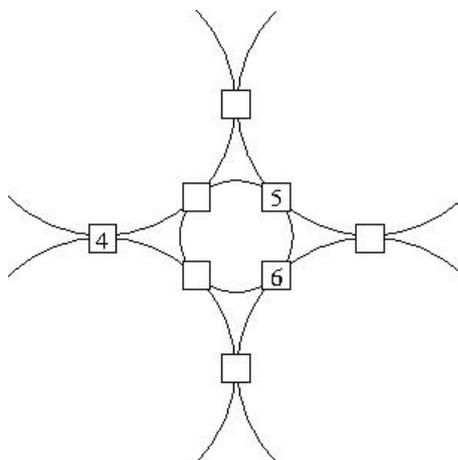
Quanti chilometri percorre il falco?

Soluzione

Il falco si muove a 20km/h e il treno ci mette un'ora ad arrivare alla stazione. Non importa quante volte viene fatto avanti e indietro dal falco, i chilometri percorsi sono sempre 20.

Cerchi incastrati*Testo*

Che numeri vanno messi nelle scatole vuote per fare in modo che la somma dei numeri nelle scatole su ogni circonferenza sia uguale a 20?

*Soluzione*

Nel cerchio centrale si hanno due numeri quindi conviene partire da lì. Sappiamo che la somma dei due numeri nelle scatole è 9, da qui si deve andare per tentativi. Verificare che 1 e 8 non vanno bene è immediato dovendo mettere sopra o sotto 15 che non vanno d'accordo con il 5 e il 6, continuando a testare dopo al massimo 8 tentativi (ma con una piccola intuizione molto meno) si arriva a posizionare il 4 a sinistra del 5 e da lì si ricostruiscono gli altri numeri

2.3 Commento del Compito

In questa parte voglio spiegare brevemente la ragione della presenza di ogni esercizio nel compito. Non avendo i mezzi mi è impossibile vedere esattamente quali parte della mente ogni esercizio effettivamente stimola, ma posso dire qual era il mio scopo con ogni esercizio

La Vecchia Fattoria

Il primo quesito è stato scritto pensando agli studenti con più difficoltà. Il problema può essere risolto anche contando con le dita con abbastanza pazienza. Questo fa sì che qualunque studente con buona volontà potesse risolverlo senza problemi.

Lo scopo del quesito non è di valutare nello studente la capacità di creare un modello che risolva il problema. Questo perché il problema è poco complesso e quindi creare un modello per la risoluzione sarà semplice a prescindere dalla correttezza del modello, salvo casi eccezionali. Il quesito invece valuta la capacità di controllare se una soluzione è corretta, in quanto questo passo spesso fondamentale richiede più passaggi.

Esperimento Fallito

Il secondo quesito vuole essere un passo avanti rispetto al primo creando una situazione più complessa ma sempre risolvibile senza bisogno di troppi calcoli in più. Uno studente ordinato, determinato e attento può risolverlo senza problemi anche se magari non ha grandi capacità dal punto di vista di intuito matematico.

Il problema infatti valuta la capacità di creare un modello e la comprensione del testo. Lo studente deve capire in che modo prosegue la tabella e farne una anche per l'esperimento di Giovanni in modo da poterla confrontare. Inoltre non leggendo il testo correttamente sarebbe facile limitarsi a guardare la tabella e capire quando comparirà un 49 portando ad una risposta sbagliata.

Quasi un cuore

Nel terzo quesito viene introdotta la sfida vera e propria, questo è il primo quesito creato appositamente affinché non tutti gli studenti lo riescano a risolvere. Un ragazzo che non è abituato a fare esercizi con figure geometriche si può trovare molto in difficoltà nel trovare la risposta

Quesiti di questo tipo sono solitamente caratterizzati dalla richiesta di una intuizione complessa, in questo caso l'intuizione di poter tagliare e incastrare i pezzi della figura, per poi richiedere sforzo minimo per giungere alla soluzione

Mezzogiorno di fuoco

Dopo la difficoltà del terzo esercizio vi era necessità nel quarto di mettere un quesito che fosse facilmente risolvibile da parte di chiunque. Un problema di logica matematica ricopre il ruolo in modo bilanciato visto che non richiede conoscenze preliminari.

Questo è il primo quesito che vuole valutare in modo completo tutti e tre i processi principali: per risolverlo bisogna prima avere l'intuizione che il quarto sta dicendo la verità, poi bisogna fare uno schema, quindi costruire un modello e infine ragionare sul modello e verificare che sia corretto. Nonostante valuti i tre stadi in modo più completo paradossalmente il quesito non è difficile da risolvere quanto il precedente perchè l'intuizione richiesta è più facile da raggiungere, e l'intuizione è sempre la parte più difficile.

Una strana area

Dopo il quarto esercizio è stato messo un altro esercizio che aumenta la sfida dopo che per quest'ultimo è stata abbassata. Questo richiede una conoscenza della formula dell'area del triangolo senza la quale per quanto si possa arrivare alla soluzione il problema diventa decisamente più complicato.

Anche questo problema come l'ultimo ha come scopo quello di valutare intuizione, creazione del modello e utilizzo del modello in modo completo. L'intuizione consiste nell'accorgersi che il problema diventa molto più semplice aprendo il prisma su un piano, il modello è trovare un modo per disegnare l'area colorata sulla figura aperta sul piano e infine l'utilizzo del modello deriva dal calcolo dell'area una volta disegnato.

Un falco impossibile

Questo problema è stato pensato deliberatamente come il più difficile, preso da un quesito presentato nel corso di fisica matematica 1. Questo problema sembra all'apparenza avere una domanda impossibile per uno studente di seconda media, tuttavia pensando in modo diretto e usando la definizione di velocità la risposta è immediata.

Dato che il problema vuole essere una sfida è difficile parlare di che parti del ragionamento va ad allenare. Nella gran parte dei problemi difficili l'aspetto più complesso è l'intuizione ma non è così per questo nello specifico. Infatti la difficoltà di questo quesito deriva dal fatto che cercare di creare un modello porta ad accorgersi che il falco viaggia infinite volte e quindi a confondere uno studente di seconda media che non ha ancora la più pallida idea di cosa sia l'infinito. In altre parole il problema vuole valutare se lo studente è effettivamente in grado di allontanarsi dallo schema matematico formato di intuizione, modello e risoluzione ma è in grado di cogliere una risposta quando vi è una strada più diretta.

Cerchi incastrati

C'è stata l'intenzione di chiudere il compito con una nota positiva per mantenere il morale della classe soprattutto durante la correzione. L'ultimo esercizio infatti è anche uno dei più semplici insieme al primo, inserito perchè anche lo studente con il voto più basso della classe con un poco di buona volontà riuscisse a risolverlo. Anche se uno studente non riuscisse a formulare un ragionamento logico provando per tentativi dopo una decina al massimo il risultato viene raggiunto se non vengono sbagliate più operazioni semplici di somma consecutivamente. Naturalmente con un breve ragionamento logico si possono

escludere molti casi e quindi ridurre il numero di tentativi necessari a raggiungere la soluzione.

Questo esercizio non ha uno scopo specifico dal punto di vista della valutazione del ragionamento. Per quanto ci sia un modo più rapido e un modo più lento di risolverlo non è possibile vedere a posteriori che ragionamento è stato usato dallo studente se si limita a scrivere la soluzione. Ho quindi lasciato questo esercizio come un semplice bonus per chi volesse usufruirne.

Concludo con le aspettative per i punteggi ottenuti nel compito. Nello scriverlo l'aspettativa era che la media della classe si sarebbe aggirata attorno ai 3 esercizi corretti per studente, con la maggior parte se non quasi tutti in grado di fare il primo e l'ultimo e per ogni ragazzo che non riuscisse ad eseguirli entrambi ce ne fosse uno che ne facesse almeno 4

Capitolo 3

L'esperienza in classe

3.1 Condizioni della prova

L'attività è stata proposta a quattro seconde della scuola secondaria di primo grado Lanfranco, di sede Modena. La scelta della scuola era avvenuta a causa di una personale esperienza, avendo fatto da assistente per due anni al corso per l'allenamento della squadra della scuola per i giochi matematici.

L'attività è stata strutturata in modo non solo valutativo ma anche costruttivo per gli studenti. All'inizio della prima ora gli è stato consegnato il compito e dati chiarimenti sul testo nei punti che potevano risultare poco chiari. Dopodichè il tempo dato per completare la prova è stato di 1 ora e 20 minuti. Finita la prova, per il resto della seconda ora, si è eseguita la correzione del compito con alta partecipazione degli studenti e infine, una volta chiarito ogni esercizio e spiegatone il funzionamento, è stato fatto un discorso più approfondito sull'esercizio 6 che comprendesse anche un accenno a cosa voglia dire la parola "infinito" e al paradosso di Zenone. Questa ultima parte dell'attività, tipicamente svolta negli ultimi 10 minuti, aveva lo scopo di incuriosire e affascinare gli studenti invitandoli così a voler vedere cosa si nasconde dietro alle semplici operazioni che hanno visto fino a quel momento. Questa ultima parte dell'attività è stata sorprendentemente gradita ai ragazzi, che anche al suono della campanella in due classi su quattro sono stati disposti a sacrificare il loro intervallo per sentire la spiegazione completa. Prima di presentare le classi è però necessario un breve discorso sulle sigle che vengono attribuite ad alcuni studenti

DSA: Disturbo Specifico dell'Apprendimento. Comprende dislessia, discalculia, disortografia, disgrafia

BES: Bisogni Educativi Speciali. Indica ragazzi che a causa di problemi di famiglia o di ambiente di crescita hanno bisogno di attenzioni particolari all'interno della classe.

H: Handicap, sono studenti che devono seguire un programma diverso dagli altri con un insegnante di sostegno che segue il loro percorso spesso in un'altra aula

La prima classe è stata la **seconda D**. In questa classe ci sono 25 studenti di cui 5 DSA o BES, inoltre 2 studenti sono classificati H e durante l'attività erano fuori dalla classe. La docente dice che la classe è lenta dal punto di vista cognitivo rispetto ad altre seconde a cui ha fatto da docente, affermando che sono ad un livello medio-basso. Afferma inoltre che quest'anno le seconde non sono brillanti dal punto di vista matematico

La seconda classe è stata la **seconda B**. La classe è composta da 25 studenti di cui uno H e una cinese con ancora una scarsa conoscenza dell'italiano, purtroppo questi due studenti non hanno potuto affrontare la prova. Erano presenti anche 5 studenti con DSA o BES. La docente afferma che all'interno della classe si sono creati due gruppi uno del quale è assolutamente disinteressato alla materia, il gruppo in questione è di composizione prevalentemente femminile e fa sì che l'avanzamento del programma risulti difficoltoso. Questo fenomeno fa anche sì che la distribuzione dei voti della classi sia molto estrema, con la maggior parte degli studenti o con valutazioni molto alte o molto basse e con pochi elementi nel mezzo. Importante è inoltre specificare che nonostante gli studenti sapessero già come calcolare l'area di un rettangolo non avevano ancora svolto l'argomento delle aree creando quindi più difficoltà negli esercizi 3 e 5.

La terza classe è stata la **seconda A**. Questa è composta anche essa da 25 studenti ma 7 tra ragazzi con DSA o BES. La docente descrive la classe come una normale e nella media e riesce a rimanere in pari con il suo programma. Aggiunge poi successivamente che forse alla classe manca un poco di determinazione e un senso di sfida nei confronti del superamento di problemi matematici che invece la docente aveva riscontrato in altre sue classi. Da evidenziare è che anche in questa classe non erano ancora state introdotte agli studenti le formule per calcolare le aree, non perché fossero indietro con il programma ma perché la docente aveva scelto un ordine diverso per gli argomenti dell'anno, concentrandosi prima sull'algebra. Questo però una difficoltà in più negli esercizi 3 e 5

La quarta classe è la **seconda E**. Quest'ultima classe è composta da 27 studenti di cui 5 ragazzi certificati DSA o BES. La docente giudica la classe difficoltosa lamentando che le dimensioni dell'aula non sono adeguate al numero di studenti superiore alla media. Questo fatto in qualche modo crea difficoltà di concentrazione agli studenti.

3.2 I risultati registrati

Nelle seguenti tabelle ogni riga rappresenta uno studente, inoltre le caselle vuote indicano che l'esercizio non è stato svolto oppure non è corretto, mentre una casella con una "X" invece indica che l'esercizio è stato svolto correttamente:

<i>2D</i>	<i>Es1</i>	<i>Es2</i>	<i>Es3</i>	<i>Es4</i>	<i>Es5</i>	<i>Es6</i>	<i>Es7</i>
		X			X	X	X
				X			
		X		X			
					X		
	X						
						X	
	X	X				X	
	X		X				
				X			
				X			
	X	X	X	X	X	X	X
	X	X		X			
	X	X			X		
		X					

<i>2B</i>	<i>Es1</i>	<i>Es2</i>	<i>Es3</i>	<i>Es4</i>	<i>Es5</i>	<i>Es6</i>	<i>Es7</i>
	<i>X</i>	<i>X</i>			<i>X</i>		<i>X</i>
	<i>X</i>						<i>X</i>
		<i>X</i>			<i>X</i>		
		<i>X</i>				<i>X</i>	
							<i>X</i>
			<i>X</i>				
							<i>X</i>
	<i>X</i>				<i>X</i>		<i>X</i>
	<i>X</i>					<i>X</i>	
					<i>X</i>		<i>X</i>
	<i>X</i>						
	<i>X</i>						

<i>2A</i>	<i>Es1</i>	<i>Es2</i>	<i>Es3</i>	<i>Es4</i>	<i>Es5</i>	<i>Es6</i>	<i>Es7</i>
							<i>X</i>
	<i>X</i>						<i>X</i>
	<i>X</i>	<i>X</i>				<i>X</i>	
							<i>X</i>
	<i>X</i>	<i>X</i>					<i>X</i>
	<i>X</i>						<i>X</i>
	<i>X</i>			<i>X</i>		<i>X</i>	<i>X</i>
							<i>X</i>
							<i>X</i>
						<i>X</i>	
		<i>X</i>		<i>X</i>		<i>X</i>	<i>X</i>
		<i>X</i>				<i>X</i>	<i>X</i>
		<i>X</i>					<i>X</i>

<i>2E</i>	<i>Es1</i>	<i>Es2</i>	<i>Es3</i>	<i>Es4</i>	<i>Es5</i>	<i>Es6</i>	<i>Es7</i>
				X			
							X
	X						
	X						
	X	X		X	X		
		X			X	X	
						X	X
					X		
	X	X	X				X
				X			
				X			
		X		X			
				X			

Media esercizi svolti per studente 2D: 1,34

Media esercizi svolti per studente 2B: 1,33

Media esercizi svolti per studente 2A: 1,16

Media esercizi svolti per studente 2E: 0,88

Purtroppo non tutti i ragazzi DSA hanno voluto esplicitare questa condizione sul compito anche se gli è stato ricordato più volte di farlo, presumibilmente per disagio o per tutelare la propria privacy. Tra gli 8 che si sono identificati tali vi sono stati un totale di 2 esercizi corretti

3.3 Commento dei risultati

I punteggi finali si sono rivelati essere molto più bassi di quelli attesi, soprattutto per quanto riguarda gli esercizi 1 e 7 per i quali la aspettativa era che gran parte della classe riuscisse a svolgerli senza problemi. Una successiva discussione con due delle docenti mostra che anche loro si aspettavano un punteggio molto più alto nel primo esercizio soprattutto per il fatto che in una delle classi esercizi simili erano stati proposti nell'anno precedente mostrando come molti studenti non abbiano fatto propri i concetti imparati nell'anno precedente.

l'1 e il 7 restano comunque gli esercizi a cui hanno risposto più ragazzi, in contrapposizione con il 3, che come previsto è stato uno dei più difficili con solo 5 studenti in tutte le classi che sono riusciti a rispondere correttamente. Per dare una prospettiva presento una tabella:

<i>Esercizio</i>	<i>Corretti</i>	<i>Percentuale</i>
<i>Es.1</i>	21	22,34%
<i>Es.2</i>	20	21,27%
<i>Es.3</i>	5	5,31%
<i>Es.4</i>	15	15,95%
<i>Es.5</i>	12	12,76%
<i>Es.6</i>	14	14,89%
<i>Es.7</i>	23	24,46%

Importantissimo è però sottolineare che in questa tabella mi sono limitato a scrivere solo se l'esercizio ha risposta giusta oppure no senza valutare il ragionamento fatto. Seguire un ragionamento sbagliato per giungere ad una soluzione corretta si rivela essere una criticità molto presente di cui parlerò nella prossima sezione in particolare nell'esercizio 4.

Alle classi 2A e 2E è stato inoltre richiesto che tutti scrivessero sui loro compiti quale fosse per loro l'esercizio più facile e quale il più difficile, 4 ragazzi non hanno seguito questa consegna ma nella tabella sotto sono riportati i risultati degli altri. Quest'ultimo

dato è stato raccolto solo in due classi rispetto al totale di quattro perché inizialmente non vi era un'intenzione di fare un'analisi anche della percezione di difficoltà degli esercizi ma in seguito ad una prima visione dei risultati ottenuti dalle prime due classi si è ritenuto necessario raccogliere anche quelli.

<i>Esercizio</i>	<i>Facile</i>	<i>Difficile</i>
<i>Es.1</i>	15, 21%	8, 69%
<i>Es.2</i>	30, 43%	2, 17%
<i>Es.3</i>	0%	34, 78%
<i>Es.4</i>	6, 52%	15, 21%
<i>Es.5</i>	6, 52%	10, 86%
<i>Es.6</i>	4, 34%	19, 56%
<i>Es.7</i>	36, 95%	6, 52%

Aggiungo inoltre però che nel 71,7% dei casi l'esercizio che viene segnalato dallo studente come il più facile non è un esercizio corretto nello svolgimento del compito. Per quanto questa percentuale sia molto alta penso che il dato di quale esercizio sia risultato più facile o più difficile sia comunque importante. È vero che in alcuni casi la percezione della facilità di un esercizio può essere data dal fatto di aver completamente frainteso il metodo per affrontarlo (e in alcuni casi ciò è molto evidente), ma nella maggior parte dei casi quando uno studente segnala come facile un esercizio che non ha eseguito correttamente lui stesso sa che lo ha sbagliato, ma cionostante è convinto che per un ragazzo più abile di lui quell'esercizio sarebbe stato il più semplice.

È stato inoltre richiesto anche alle docenti di stabilire un ordine per gli esercizi, a partire da quello che ritenevano che i loro studenti avessero più probabilità di riuscire a fare andando fino a quello che secondo loro meno ragazzi sarebbero riusciti a completare correttamente. Senza sorprese l'esercizio 3 è stato segnalato da tutti come il più difficile ma una notevole discrepanza dalla percezione degli studenti si nota in particolare negli esercizi 1 e 4, entrambi considerati dalle insegnanti molto più facili di quanto abbiano percepito gli studenti.

3.4 Gli errori

In questa sezione spiegherò gli errori più comuni fatti dagli studenti nei vari esercizi.

La vecchia fattoria

L'errore di gran lunga più comune nell'esercizio 1 è stato quello di ignorare il dato sul numero delle zampe presenti. Gran parte degli studenti ha preso il numero di teste e ha cercato di trovare il numero di mucche a partire solo da quello ottenendo così la risposta più comune che è stata "le mucche sono 18 in quanto probabilmente ci sono metà mucche e metà galline e $18+18=36$ " oppure nei casi più fantasiosi "ogni mucca ha una testa e ci sono 36 teste quindi ci sono 36 mucche". Questo errore denota che ancora in seconda media gli studenti fanno fatica ad utilizzare tutti i dati che gli vengono forniti.

Esperimento Fallito

Un errore molto comune in questo esercizio è stato quello di rispondere che l'esperimento si ferma dopo 7 minuti. Questo deriva dal fatto che se la tabella viene proseguita quando si arriva al settimo minuto ci si accorge che i compagni di Giovanni hanno 49 batteri e molti studenti raggiunto il numero che era presente nella domanda si fermano senza andare oltre e accorgersi che viene chiesta la differenza tra i batteri della classe e quelli di Giovanni, non solo i batteri della classe.

Quasi un cuore

Una risposta molto popolare ma errata al quesito 3 è stata che l'area corrispondeva a 36. Non sono sicuro di come siano arrivato a questo risultato, da quello che hanno scritto sulla prova sembra che abbiano diviso la figura in tre cerchi e poi abbiano teorizzato che l'area di ogni cerchio fosse 12.

Mezzogiorno di fuoco

Certamente il problema più interessante, questo quesito ha messo in luce due criticità dell'insegnamento delle scuole medie: l'assenza di logica matematica nei programmi e la poca attenzione alle abilità argomentative. Questo fatto fa sì che molti studenti non si rendano conto di quanto la matematica sia logica e ci si avvicinano come se non lo fosse. Le risposte a questo quesito sono state le più variegata, riporto solo le più comuni.

"È stato Daniel perché ridacchia mentre parla"

"È stato Daniel perché si cerca di tirare fuori dalla discussione, cosa che farebbe una persona colpevole"

"È stato Albert perché è il primo a puntare il dito e gallina che canta ha fatto l'uovo"

"È stato Bart perché è quello accusato da più persone"

Sono stato molto sorpreso dal basso numero di ragazzi che si sono messi a ragionare per esclusione e a immaginare chi poteva essere a dire la verità.

Una strana area

Questo esercizio è stato quello nel quale gli studenti hanno mostrato più ragionamento logico, anche negli errori. Alcuni non sapendo l'area del triangolo si sono riusciti a calcolare solo la superficie laterale del prisma, altri una faccia sola, però con mia grande sorpresa quasi tutti sono riusciti a capire che per risolvere il problema si doveva proiettare

la superficie su un piano, mostrando più capacità di astrazione tridimensionale di quanto anticipato.

Un falco impossibile

L'errore più comune in questo caso è stato quello di perdersi contando il numero di volte che il falco va avanti e indietro tra la testa del treno e la stazione raggiungendo per forza un numero errato e dopodiché moltiplicare quel numero per 20. Sembra quindi che molti studenti non abbiano considerato che il treno si stesse muovendo nel problema.

Cerchi incastrati

Forse per la ripetizione della parola scatole nel testo o forse per una poco attenta lettura del problema, nel problema 7 una grande quantità di studenti ha risposto mettendo un 1 in ogni scatola. Questo perché così facendo la somma di tutti i numeri presenti sulla pagina diventava esattamente 20. Una minoranza ha fatto degli errori di calcolo senza poi verificarli.

Conclusioni

Questo lavoro mi ha fatto capire quanto ci sia bisogno nelle scuole di un progetto che alleni la logica. Un progetto che riesca ad appassionare i ragazzi alla sensazione di risoluzione, o con le parole di Polya citate nel primo capitolo "Gioire nel trionfo della scoperta". Tuttavia questo non è possibile durante le già scarse ore di matematica che, come le docenti fanno presente, vengono già ridotte per progetti di vario tipo.

Le nostre scuole devono ricordare però che per quanto attività di sensibilizzazione e incoraggiamento alle arti di ogni tipo siano importantissime lo è anche l'addestramento logico che per quanto storicamente meno piacevole se trascurato crea sul lungo periodo interi gruppi di persone con scarsa fede nella scienza o senso critico.

Questa tesi è per me solo l'inizio di un progetto più grande, continuerò ad andare nelle scuole con problemi più facili, pensando anche a giochi di tipo competitivo che richiedano abilità logiche e matematiche. Se qualcuno di loro riuscisse a vedere la bellezza di questo tipo di ragionamento all'interno di un gioco è probabile che lo riproponga a casa o con gli amici. Per questo cercherò di creare un laboratorio di giochi matematici pomeridiano che non vada a interferire con le ore di lezione, inizialmente verranno solo ragazzi che partecipano alle competizioni ma ho fiducia e speranza che con il passare del tempo e lo spargersi della voce con l'aiuto di giochi avvincenti quanto didattici si riesca a migliorare l'esperienza dello studente senza intaccare la sua preparazione teorica.

Bibliografia

- [1] FRENKEL E., Amore e matematica. Il cuore della realtà nascosta, Torino, Codice. 2014
- [2] Annali della pubblica istruzione, indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione, 2012
- [3] POLYA G., Come risolvere i problemi di matematica. Logica ed euristica nel metodo matematico, Milano, Feltrinelli. 1976
- [4] JOHN R. ANDERSON, Hidden Stages of Cognition Revealed in Patterns of Brain Activation.
- [5] I programmi della Scuola Elementare, D.P.R. 12 febbraio 1985, n 104 Psychological Science, volume 27. 2016
- [6] MIALERET G., L'apprendimento della matematica. Saggio di psicopedagogia, Roma, Armando. 1969
- [7] POLYA G., La scoperta matematica, capire, imparare e insegnare a risolvere i problemi, volume 1, 1979

Ringraziamenti

Voglio ringraziare prima di tutto la mia relatrice prof. Marilena Barnabei che oltre ad essere stata molto disponibile e presente per correzioni ha anche fatto sentire la sua presenza in momenti di sconforto dovuto al fatto di stare presentando una tesi didattica ad una laurea triennale. Ringrazio inoltre mia madre che ha aiutato nella stesura del primo capitolo guidandomi attraverso le parti più discorsive, sempre state critiche per me. Ringrazio anche Anna de Girolami che ha allietato le mie giornate passate a scrivere questa tesi con la sua chitarra.

Ringrazio anche Matteo Silimbani, Laura Branchetti, Francesco Morandin, Alberto Saracco per i loro fondamentali consigli senza i quali questa tesi sarebbe stata assolutamente fallimentare. Ringrazio Delmina Martini, Daniela Reggiani, Sonia Linari e Maria Giberini che con la loro disponibilità mi hanno permesso di sottoporre le loro classi al compito. Ringrazio infine il mio gruppo di Dungeons and Dragons che nei momenti più stressanti mi ha fatto divertire e rilassare.