DE

GEOMETRIA ACVSTICA

NEC NON

DE RATIONE o : o

CEV BASI CALCVLI DIFFERENTIALIS

DISSERTATIO II.

QVAM

PRO LOCO

PROFESSIONIS MATHESEOS ORDINARIAE
SECVNDVM STATVTA ACADEMICA
RITE SIBI VINDICANDO

PVBLICE TVEBITVR

IOANNES SCHVLTZ

S. R. M. A CONC. AVLIC.

RESPONDENTE

IOANNE BENIAMIN IACHMANN
REG. BORVSS. MED. CVLT.

OPPONENTIBVS

IOANNE FRIDER. GENSICHEN, DRIES. NEOM. S.S. THEOL. ET MATH. CVLT.
FRIDERICO WOLFF, LISSA-POLON. I. V. CVLT.
CHRIST. GOTTL. ZIMMERMANN, REG. BOR. S.S. THEOL. ET MATH. CVLT.

ANNO MDCCLXXXVII DIE XV. FEBRVARII

HORIS LOCOQVE SOLITIS

CVM FIGVRIS.

REGIOMONTI,

TYPIS SACR. REG. MAIEST. ET VNIVERS. TYPOGR. G. L. HARTVNGII.

4.

Prooemium.

In dissertatione, quam anno 1775 edidi et publice defendi, de *Geometria acustica* i. e. de methodo, ex sola differentia temporum, quibus idem sonus e loco incognito A (Fig. 1.) proficiscens in tribus saltem locis B, C, D auditur, distantiam et situm loci A inuestigandi, agere coepi. Quum motus soni, experientia teste, aequabilis sit; data temporum, quibus sonus in A ortus in locis B, C auditur, differentia, rectarum quoque AB, AC differentia AC—AB innotescit. Ponamus enim, sonum vno minuto secundo percurrere 1083 pedes Paris. , et sonum in loco A ortum *m* minutis secundis serius audiri in C, quam in B, et *n* minutis secundis serius in D, quam in B; per se patet, fore AC—AB = 1083 m ped. , et AD — AB = 1038 n ped. Paris. . Quodsi igitur locus quaesitus A cum locis cognitis B, C, D in eodem plano positus sit; omnis disquisitio eo redit, vt ostendatur, quomodo datis in tetragono ABCD lateribus BC, CD, cum angulo intercepto BCD, et rectarum AB, AC, AD differentiis hae rectae ipsae inueniri queant. Hoc problema tetragonometricum soluendi duplicem tunc exposui methodum. Prima a cel. *Iona Melderkreuz* (*) e Geome-

(*) Abhandlungen der Königl. Schwedischen Akademie der Wissenschaften. Dritter Band, S. 82—87, nach der Kästnerschen Uebersetzung.

Geometria ſublimiori deſumta, quam l. c. §. 15. illuſtraui, conſtructione duarum hyperbolarum GO, HF (Fig. 1.) ſe inuicem in A ſecantium abſoluitur, quarum altera GO, aſſumto axe transuerſo GI=AC—AB, circa focum B, altera vero HF, facto axe transuerſo HK=AD—AC, circa focum C deſcribitur. Secunda, quam, nutum cel. *Kaeſtneri* ſequutus, l. c. §. 22. ex principiis trigonometricis erui, in hoc conſiſtit:

Sit

BC = m   ſinus totus = 1
CD = n   anguli BCD ſinus = p
AC—AB = b   eius coſinus = q
AD—AB = c

$$m(n^2+b^2-c^2)=g$$
$$n(m^2+b^2)=h$$
$$2m(b-c)=k$$
$$m^2-b^2=l$$
$$(g+hq)^2+n^2p^2l^2=\beta$$
$$2n^2p^2bl-(g+hq)(k+2bnq)=\gamma$$
$$4n^2p^2l-(k+2bnq)^2=\delta;$$
$$\text{erit } AB=\frac{-\gamma\pm\sqrt{(\beta\delta+\gamma^2)}}{\delta}$$

Quum vero accurata hyperbolarum, qualem prima methodus requirit, conſtructio, multum incommodi habeat, calculus contra, quem ſecunda praeſcribit, admodum moleſtus ſit; tertiam methodum Geometriae tantum elementaris principiis innixam, ſimulque reliqua, quae Geometriam acuſticam ſpectant, data opportunitate tradere pollicebar. Vt igitur promiſſis ſtem, materiam iſtam in hac diſſertatione finiam, eo quidem ordine, vt *primo* dictum problema generale noua methodo ſoluam, *deinde* viam aperiam, diſtantiam et ſitum loci A inueniendi, etiamſi ille vel ſupra vel infra planum BCD poſitus ſit, *denique* diſquiram, quatenus Geometriae acuſticae, cuius theoria adeo elegans eſt, vſus etiam ſperari poſſit practicus, *tandem* Coronidis loco Scholio quodam celeberrimae aequationis $\frac{0}{0}=x$

in

in dissertatione hac obuiae, cui tota Analysis infinitorum superstructa est, veram indagabo indolem.

§. 1.

Problema 1.

Datis in tetragono ABCD (Fig. 2.) lateribus BC, CD, cum angulo intercepto BCD, et differentiis AC—AB, AD—AB ipsas rectas AB, AC, AD inuenire.

Solutio. Demittatur ad rectam BD perpendicularis CL, et ad rectam CF, quae rectae BL parallela est, perpendicularis AF; erit NF=CL, et FC=NL. Quum porro datis in triangulo BCD lateribus BC, CD et angulo intercepto BCD, etiam ipsius basis BD, altitudo CL cum recta BL facile reperiantur, rectas hasce pro cognitis accipiamus.

Sit igitur $BD = m$

$BL = n$

$CL = NF = r$

$AC - AB = b$

$AD - AB = c$

et $AB = x$;

erit $AC = x + b$

$AD = x + c$

$FC = NL = n - BN$

et $ND = m - BN$.

Quum igitur $AB^2 - BN^2 = AD^2 - ND^2$;

erit $x^2 - BN^2 = x^2 + 2cx + c^2 - m^2 + 2m.BN - BN^2$

ergo $\dfrac{m^2 - c^2 - 2cx}{2m} = BN$.

Ponatur breuitatis caussa $m^2 - c^2 = h$

erit $BN = \dfrac{h - 2cx}{2m}$

hinc

hinc $FC = n - \frac{h - 2cx}{2m}$

$$FC = \frac{2mn - h + 2cx}{2m}.$$

Porro est $AN^2 = AB^2 - BN^2$

hinc $AN^2 = x^2 - \frac{h^2 - 4chx + 4c^2x^2}{4m^2}$

$$= \frac{4m^2x^2 - h^2 + 4chx - 4c^2x^2}{4m^2}$$

$$= \frac{4hx^2 + 4chx - h^2}{4m^2}$$

$$AN = \frac{1}{2m}\sqrt{(4hx^2 + 4chx - h^2)}$$

Iam vero $AF = NF + AN$,

hinc $AF = r + \frac{1}{2m}\sqrt{(4hx^2 + 4chx - h^2)}$

$$AF^2 = r^2 + \frac{4hx^2 + 4chx - h^2}{4m^2} + \frac{r}{m}\sqrt{(4hx^2 + 4chx - h^2)}$$

ergo $AF^2 = \frac{4m^2r^2 - h^2 + 4hx^2 + 4chx + 4mr\sqrt{(4hx^2 + 4chx - h^2)}}{4m^2}$

Sed simul est

$AF^2 = AC^2 - FC^2$

hinc $AF^2 = x^2 + 2bx + b^2 - \frac{(2mn - h + 2cx)^2}{4m^2}$

$$AF^2 = x^2 + 2bx + b^2 - \frac{(2mn - h)^2 + 4(2mn - h)cx + 4c^2x^2}{4m^2}$$

$$AF^2 = \frac{4m^2x^2 + 8m^2bx + 4m^2b^2 - (2mn - h)^2 - 4(2mnc - ch)x - 4c^2x^2}{4m^2}$$

AF²

$$AF^2 = \frac{4hx^2 + 4(2m^2b - 2mnc + ch)x + 4m^2b^2 - 4m^2n^2 + 4mnh - h^2}{4m^2}$$

Breuitatis ergo ponatur $2(mb - nc) = l$;

$$\text{erit } AF^2 = \frac{4hx^2 + 4mlx + 4chx + 4m^2b^2 - 4m^2n^2 + 4mnh - h^2}{4m^2}$$

Hinc

$$4m^2r^2 + 4mr\sqrt{(4hx^2 + 4chx - h^2)} = 4mlx + 4m^2b^2 - 4m^2n^2 + 4mnh$$

$$mr^2 + r\sqrt{(4hx^2 + 4chx - h^2)} = lx + mb^2 - mn^2 + nh$$

$$r\sqrt{(4hx^2 + 4chx - h^2)} = lx + m(b^2 - n^2 - r^2) + nh$$

Ponatur $m(b^2 - n^2 - r^2) + nh = g$

erit $r\sqrt{(4hx^2 + 4chx - h^2)} = lx + g$

$$4r^2hx^2 + 4r^2chx - r^2h^2 = l^2x^2 + 2glx + g^2$$

$$(4r^2h - l^2)x^2 + 2(2r^2ch - gl)x = r^2h^2 + g^2$$

$$x^2 + \frac{2(2r^2ch - gl)}{4r^2h - l^2}x = \frac{r^2h^2 + g^2}{4r^2h - l^2}$$

Ponatur tandem $2r^2ch - gl = u$

$r^2h^2 + g^2 = v$

$4r^2h - l^2 = t$;

erit $x^2 + \frac{2u}{t}x = \frac{v}{t}$

Ergo $x = \dfrac{-u \pm \sqrt{(u^2 + vt)}}{t}$

§. 2.

Tertiam hanc, quam nunc inuenimus, problematis nostri solutionem vniuersalem, quamuis pro sublimiori quaestionis indole satis adhuc prolixa sit, multo tamen breuiorem et faciliorem esse secunda, in aprico est. Vt autem et natura et vsus eius eo luculentius pateat, notandum est:

 1) Aequa-

1) Aequationem pro x seu AB inuentam haud immutari, etiamsi vel perpendicularis AF extra BL, vt Fig. 3. 4, vel apex A extra angulum BCD, vt Fig. 5, cadat. Si enim AF cadat extra BL sinistram versus (Fig. 3.); omnis mutatio, quam solutio hoc casu patitur, haec est, vt BN negatiua adeoque $BN = -\frac{h - 2cx}{2m}$ euadat. Sed quum hic simul $FC = n + BN$ fiat; hoc casu rursus erit $FC = n - \frac{h - 2cx}{2m}$, adeoque aequatio pro x eadem prodit cum illa, quam supra inuenimus. Si porro AF extra BL dextram versus cadat, vt Fig. 4, omnis mutatio in eo consistit, vt FC negatiua euadat. Quum vero *in solutione non nisi quadratum* FC^2, quod semper positiuum est, occurrat; aequatio pro x *inuenta* nec hoc casu vllam mutationem patitur. Si tandem apex A cadat extra angulum BCD (Fig. 5.), denuo BN negatiua et $FC = n + BN$ euadit, adeoque rursus $FC = n - \frac{h - 2cx}{2m}$ manet. Iam quidem porro hoc casu $AF = AN - FN$, adeoque $r = FN$ negatiua *fit*. Sed quum *in aequatione* inuenta non ipsa r, sed tantum eius quadratum r^2 occurrat, quod semper positiuum est; aequatio pro x inuenta etiam hoc casu eadem manet. Tali modo constat, solutionem, quam dedimus, vniuersalissimam esse atque omnes casus possibiles in se comprehendere.

2) Ex hoc vero apparet, eam problematis esse indolem, vt ex ipso valore rectae quaesitae AB *inuento* nullo modo diiudicari possit, num apex A intra angulum BCD, an extra illum ponendus sit, siue hic valor positiuus, siue negatiuus reperiatur. Haec igitur ambiguitas ex aliis circumstantiis tollenda est, et si problema hoc ad Geometriam acusticam applicatur, facile solo soni auditu tolli potest.

3) Quum aequatio pro x inuenta *quadratica* sit, haec vero semper

duas

duas radices habeat, adeo vt eodem iure

$$x = \frac{-u + \sqrt{(u^2 + vt)}}{t}, \text{ ac}$$

$$x = \frac{-u - \sqrt{(u^2 + vt)}}{t}$$ ponere liceat; pro recta quaesita AB duo semper valores reperiuntur, quorum vterque quaestioni propositae satisfacit. Si igitur problema ad Geometriam acusticam applicatur, vera distantia verusque situs loci quaesiti A per se ancipites sunt, nec nisi ex aliis circumstantiis diiudicari potest, quinam inter duos valores pro x inuentis in quolibet casu locum habeat. In multis autem casibus id immediate cognoscitur, quia ex *obseruationibus soni in* locis B, C, D institutis notum est, quaenam rectarum AB, AC, AD sit *maxima*.

4) Si calculus institutus summam $u^2 + vt$ negatiuam tradat, ita vt

$$x = \frac{-u \pm \sqrt{-a}}{t}$$ reperiatur; valor pro x inuentus mere imaginarius est, ergo in hoc casu quaestio proposita absurda est, nec vllum quadrangulum ex datis conditionibus construi potest. In Geometria acustica hic *casus nunquam locum habet, dummodo momenta*, quibus sonus auditur, rite obseruentur.

5) Posito AC < AB, quantitas b *negatiua*, et posito AD < AB, quantitas c *negatiua* fit. Quodsi ergo sonus in C ocyus auditur, quam in B, valor b negatiuus, et si in D ocyus auditur, quam in B, valor c negatiuus poni debet.

§. 3.

Vt eo melius intelligatur, quomodo calculus in quolibet casu dato instituendus sit, rem vno saltim exemplo illustrare iuuabit. Experientia comprobatum est sonum per vnum milliare circiter 20 minutis secundis ferri, adeoque centesimam partem milliaris tempore $\frac{2}{10}$ minutorum secundorum seu 12 minutis tertiis absoluere. Ponamus igitur, sonum rectam

ctam AC 96 minutis *tertiis*, et rectam AD 3 minutis *secundis* tardius percurrere, quam rectam AB; erit $b = AC - AB = 8$, et $c = AD - AB = 15$ partibus centesimis milliaris. Iam ponamus $BD = m = 30$, $BL = n = 10$, et $LC = r = 6$ eiusmodi partibus; erit $h = m^2 - c^2 = 675$, $l = 2(mb - nc) = 180$, $g = m(b^2 - n^2 - r^2) + nh = 4590$,

$$\begin{array}{lll} 2r^2ch = 729000, & r^2h^2 = 16402500, & 4r^2h = 97200 \\ -gl = -826200, & +g^2 = +21068100, & -l^2 = -32400 \\ \hline u = -97200, & v = 37470600, & t = 64800 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} vt = 2428094880000, & \pm\sqrt{(u^2 + vt)} = \pm 1561263 \\ +u^2 = +9447840000, & -u = +97200 \\ \hline u^2 + vt = 2437542720000, & -u + \sqrt{(u^2 + vt)} = 1658463 \\ & -u - \sqrt{(u^2 + vt)} = -1464063 \end{array}$$

$$\frac{-u + \sqrt{(u^2 + vt)}}{t} = \frac{1658463}{64800} = 25\frac{38463}{64800}$$

Ergo 1) $\left.\begin{array}{l} AB = x = 25{,}593 \\ AC = x + b = 33{,}593 \\ AD = x + c = 40{,}593 \end{array}\right\}$ partibus milliaris centesimis.

Sed porro

$$\frac{-u - \sqrt{(u^2 + vt)}}{t} = -\frac{1464063}{64800} = -22\frac{38463}{64800}$$

Ergo 2) $\left.\begin{array}{l} AB = x = -22{,}593 \\ AC = x + b = -14{,}593 \\ AD = x + c = -7{,}593 \end{array}\right\}$ partibus milliaris centesimis.

Quodsi iam veritatem valorum, quos inuenimus, explorare velis, duc rectam $BD = 30$, $BL = 10$, ac erige perpendicularem $LC = 6$. Sic habes triangulum BCD. Nunc super basi BC primo loco describe triangulum BAC rectis $AB = 25{,}593$, et $AC = 33{,}593$, atque reperies $AD = 40{,}593$, et apex A talem situm habebit, vt perpendicularis AN inter B et L cadat. Deinde super eadem basi BC aliud triangulum describe assum-

assumtis rectis AB $=$ 22,593 et AC $=$ 14,593, atque reperies AD $=$ 7,593, hic vero apex A hunc situm habebit, vt perpendicularis AN dextram versus in prolongatam LD cadat. Hoc modo apparet, vtrumque rectarum AB, AC, AD valorem inuentum problemati satisfacere, adeoque quaesitum apicem A in duobus diuersis locis poni posse. In proposita autem quaestione acustica, quum locus A, ex quo sonus ad loca B, C, D peruenit, vnicus tantum sit, alia ratione decidendum est, quinam valorum inventorum in exemplo nostro verus sit, idque ex hac circumstantia, quod sonus loca C, D serius attigerit, quam locum B, facile constat. Ex hoc enim per se patet, inuentos valores negatiuos hic locum non habere, dum ceteroquin sonus serius audiri debuisset in B, quam in C et D. Ergo vera loci A distantia AB continet 25,593 partes milliaris centesimas. Sumtis igitur pro milliari 24000 pedibus, erit AB $=$ 6142 pedibus. Quodsi sonus in loco B 96 minutis tertiis serius auditus fuisset, quam in C, valor b foret negatiuus, ergo $b = -8$ ponendus, ceterum vero calculus eodem prorsus modo instituendus foret. Hoc exemplum ipso simul intuitu docet, *calculum instituendum, vtut prolixum, haud tamen adeo onerosum esse, vt Arithmeticis peritis horrorem incutiat.* Quum vero calculus in multis casibus admodum abbreuiari possit, praecipue si obseruatoribus soni stationes B, C, D pro lubitu adsignare liceat; non minus vtile ac iucundum videtur, solutionem, quam inuenimus, generalem ad praecipuos casus speciaiores applicare.

§. 4.

Ponamus igitur 1) stationes B, C, D (Fig. 2.) tales esse, vt BC ad BD perpendicularis sit; punctum B cadet in L, hinc BL $= n = o$, et BC $=$ LC $= r$, adeoque erit $g = m\,(b^2 - r^2)$ et $l = 2\,mb$. Vnde apparet, calculum hoc casu parum abbreuiari.

§. 5.

Ponamus 2) sonum a singulis obseruatoribus in B, C, D *eodem momento* percipi; erit $b=o$, et $c=o$, hinc $h=m^2$, $g=nm^2-mn^2-mr^2$ $=m(mn-n^2-r^2)$, $l=o$, $u=o$, $v=m^4r^2+m^2(mn-n^2-r^2)^2$, $t=4m^2r^2$, $x=\frac{\pm\sqrt{vt}}{t}$, $x^2=\frac{vt}{t^2}=\frac{v}{t}$, adeoque

$$x^2=\frac{m^2r^2+(mn-n^2-r^2)^2}{4r^2}, \text{ ergo}$$

$$x=\frac{1}{2r}\sqrt{(m^2r^2+(mn-n^2-r^2)^2)}.$$

Si in hoc casu simul BC ad BD perpendicularis sit (*Fig. 6.*); erit quoque $n=o$, ergo $x=\frac{1}{2r}\sqrt{(m^2r^2+r^4)}=\frac{1}{2}\sqrt{(m^2+r^2)}=\frac{1}{2}CD$. Ergo hoc casu locus A in media recta CD erit. Nam demissa perpendiculari AE, erit $DA:AC=DE:EB$, hinc $DE=EB$, ergo $AB=AD=AC$.

§. 6.

Ponantur 3) stationes B, C, D in eadem recta BCD, vt Fig. 7; punctum L (Fig. 2.) hic cadet in C, hinc erit $BL=n=BC$, $LC=r=o$, $g=m(b^2-n^2)+n(m^2-c^2)$, $u=-gl$, $v=g^2$, $t=-l^2$, $u^2+vt=o$, idcirco $x=-\frac{u}{t}=\frac{-g}{l}=\frac{-m(b^2-n^2)-n(m^2-c^2)}{2(mb-nc)}$.

$$\text{Ergo } x=\frac{m(n^2-b^2)-n(m^2-c^2)}{2(mb-nc)}, \text{ i. e.}$$

$$AB=\frac{BD(BC^2-b^2)-BC(BD^2-c^2)}{2(b.BD-c.BC)}$$

§. 7.

Ponantur 4) stationes B, C, D non solum in eadem recta, sed quoque

que $BC = CD$, erit $BD = 2\,BC$, hinc $m = 2n$, adeoque per §. 6,

$$x = \frac{2n(n^2 - b^2) - n(4n^2 - c^2)}{2n(2b - c)},$$

hinc $$x = \frac{-2(n^2 + b^2) + c^2}{2(2b - c)},$$

Ergo $$x = \frac{2(n^2 + b^2) - c^2}{2(c - 2b)}, \text{ i. e. } AB = \frac{2(BC^2 + b^2) - c^2}{2(c - 2b)}.$$

§. 8.

Quum aequationes §§. 6. 7. exhibitae non solum satis breues, sed etiam, quia *primi gradus sunt*, non nisi vnicum valorem pro AB admittant; positio stationum B, C, D in eadem recta, praecipue si simul $BC = CD$ assumitur, in Geometria acustica omnibus reliquis merito anteferenda est, vt in dissertatione priori iam monui. Si porro in his aequationibus rectas BC, BD iisdem litteris designes, quibus in diss. priori vsus sum, i. e. si $BC = m$, $CD = n$, adeoque $BD = m + n$ ponas; reperies per §. 6. $AB = \frac{(m+n)(mn + b^2) - mc^2}{2(mc - (m+n)b)}$, aequationem, quae plane eadem est, quam in diss. priori §. 40. pro hoc casu inuenimus. Sed comparatio harum aequationum ceteroquin prorsus congruentium simul docet, eam, quam nunc §. 6. exhibuimus, illa, quam diss. prior exhibet, multo concinniorem esse.

§. 9.

Assumatur 5) stationibus B, C, D in eadem recta positis (Fig. 7.) $c = 0$, adeoque $AD = AB$, erit per §. 6,

$$x = \frac{m(n^2 - b^2) - nm^2}{2mb} = \frac{n^2 - b^2 - nm}{2b}. \text{ Ergo}$$

$$x = \frac{n(m - n) + b^2}{-2b}.$$ Hoc casu *x* quidem negatiua videtur, sed

 quum

quum triangulum BAD aequicrurum ſit, hic ſemper eſt AC $<$ AB, adeoque b negatiua. Ergo x reuera poſitiua eſt.

§. 10.

Aſſumamus 6) ſtationibus B, C, D in eadem recta poſitis non ſolum eſſe $c = o$, ſed quoque $b = o$; erit, per §. 9, $x = \frac{n(m - n)}{o} = \infty$.

Ergo in hoc caſu diſtantia AB infinite magna eſt. Hic igitur caſus, re rigoroſe ſumta, numquam accidere poteſt, i. e. nullum triangulum BAD (Fig. 7.) conſtrui poteſt, in quo $AB = AC = AD$ ſit, ſeu, quod idem eſt, in triangulo aequicruro BAD nulla recta AC duci poteſt, quae cruribus AB, AD aequalis ſit, alias enim BA foret infinite magna.

§. 11.

Tandem ponamus 7) ſtationibus B, C, D in eadem recta aſſumtis, ex obſeruationibus ſoni reperiri $b = BC = n$, et $c = BD = m$, erit $n^2 - b^2 = o$, $m^2 - c^2 = o$, $mb - nc = mn - nm = o$; ergo per §. 6. $x = \frac{o}{o}$. Quid haec expreſſio *ſignificet*, in Scholio, quod infra addemus, *docebitur.*

§. 12.

Suppoſuimus hucusque, locum quaeſitum A cum ſtationibus B, C, D in *eodem* plano eſſe, adeoque rectis, quibus iunguntur, tetragonum ABCD terminari, cuius diagonalis ſit AC. Quid vero, ſi locus A extra planum BCD ponatur, ita vt A ſit vertex pyramidis, quae triangulis BCD, ABC, ACD, ABD terminatur, adeoque, ad ſitum loci A explorandum, eius non ſolum diſtantia AB, ſed etiam altitudo ſupra planum BCD quaerenda ſit? Hoc caſu tres ſtationes B, C, D non ſufficere, facile intelligitur. Vidimus enim in prooemio, locum A (Fig. 1.) in interſectione hyperbolarum GO, HF deprehendi. Si igitur A cum locis B, C, D in eodem plano eſt, ad interſectionem hanc reperiendam non requiritur, niſi vt hyperbolae istae in plano BCD construantur. Si vero locus A extra planum BCD ponitur, inclinatio planorum ABC, ACD ad planum BCD ignoratur, adeoque plana ABC, ACD, in quibus hyperbolae GO, HF construi debent, plane incognita manent. Vnde patet, ad locum A hoc casu explorandum quatuor certe obseruationibus soni in stationibus B, C, D, E opus fore. Hac autem ratione ex differentiis temporum, quibus sonus in illis obseruatur, differentiae rectarum AB, AC, AD, AE innotescunt, et locus A est vertex pyramidis quadrangularis, quae basi BCDE et lateribus, AB, AC, AD, AE determinatur. Quodsi ergo quaestionem: quomodo loci A extra planum, in quo obseruatores soni sunt, positi cum distantia tum altitudo et verus situs explorari possit, vniuersalissime solutam velis; clarum est, *illam sequenti*, quod iam soluere volumus, problemate niti.

§. 13.

Problema 2.

In pyramide quadrangulari (Fig. 1.), cuius vertex in A est, datis baseos lateribus BC, CD, DE cum angulis BCD, CDE, et differentiis laterum AB, AC, AD, AE, haec latera ipsa et altitudinem ac situm verticis A inuenire.

Solutio. Posito $AC - AB = a$, $AD - AC = b$, $AE - AD = c$, fac $BG = CI = \frac{1}{2}(BC - a)$, $CH = DK = \frac{1}{2}(CD - b)$, $DL = EN = \frac{1}{2}(DE - c)$, ac describe circa focum B ex vertice G hyperbolam GO, circa focum C ex vertice H hyperbolam HF, circa focum D ex vertice L hyperbolam LM. Hasce tres hyperbolas GO, HF, LM rota circa axes suos GB, HC, LD, donec se omnes in vnico puncto A intersecant: habebis verticem A, atque latera quaesita AB, AC, AD, AE, et demissa ex A ad planum BCDE recta perpendicularis dat simul altitudinem pyramidis.

Demonstratio Quum $BG = CI$; erit $GI = BC - 2BG$ axis transuersus hyperbolae GO. Iam vero $BC - a = 2BG$ (p. constr.), hinc

 BC

BC — 2 BG = a, id est, axis transuersus GI = AC — AB, ergo vertex A in hyperbola GO erit. Pari modo patet, hyperbolae HF axem transuersum HK = AD — AC, et hyperbolae LM axem transuersum LN = AE — AD esse, adeoque verticem A quoque esse in hyperbolis HF, LM. Ergo vertex A in intersectione omnium trium hyperbolarum erit.

§. 14.

Haec problematis vniuersalis solutio omnium quidem breuissima est, sed quia non nisi tentando institui potest, ad solutiones tantum mechanicas pertinet. Praeter haec vero ista tentatio, quippe quae simultanea trium hyperbolarum rotatione circa diuersos axes nititur, tanta simul laborat difficultate, vt absque summa molestia vix peragi possit. Vnde simul apparet, problema hoc iam inter maxime intricata referendum esse, et quamvis nullum dubium sit, quin illud vel geometrice aut trigonometrice variis forte modis solui possit, facile tamen est praeuisu, huiusmodi solutiones adeo prolixas et difficiles fore, vt eas rimari vix operae pretium sit. (*) Quod

(*) Haec mihi scribenti sequens problema hoc trigonometrice soluendi in mentem venit methodus. Ex pyramidis apice A (*Fig.* 8.) demitte ad planum BCDE perpendicularem AI, atque duc rectas BI, CI, DI, EI, quae cum AI efficiunt angulos rectos. Ponatur sinus totus $= 1$, sin. ABI $= u$, sin. ACI $= v$, sin. ADI $= w$, sin. AEI $= z$, $AC - AB = a$, $AD - AB = d$, $AE - AB = e$; erit $AI = ux = v(x + a) = w(x + d) = z(x + e)$, hinc $v = \frac{ux}{x + a}$, $w = \frac{ux}{x + d}$, $z = \frac{ux}{x + e}$.
Porro est $BI = x\sqrt{(1 - u^2)}$, $CI = (x + a)\sqrt{(1 - v^2)}$, $DI = (x + d)\sqrt{(1 - w^2)}$, $EI = (x + e)\sqrt{(1 - z^2)}$. Iam quaere cos. BCI ex lateribus BC, BI, CI, cos. ICD et cos. CDI ex lateribus CD, CI, DI, atque cos. IDE ex lateribus DE, DI, EI. Porro ex reperto cos. BCI et dato cos. BCD quaere cos. ICD, tunc duae istae aequationes pro cos. ICD inuentae dabunt quantitatem u per incognitam x et meras cognitas expressam. Tandem ex reperto cos. CDI et dato cos. CDE quaere cos. IDE; tunc istae duae aequationes pro cos. IDE repertae dabunt quantitatem x per solas cognitas expressam, adeoque problema solutum erit.

Ex hac autem methodo satis apparet, aequationem pro x non nisi molestissimis operationibus algebraicis eruendam maxime complicatam fore. Vnde sufficit, viam monstrasse iis, qui solutionem problematis reuera periclitari volunt.

Quod vero Geometriam acusticam attinet, problemate hoc generalissime proposito non opus est, sed locus quaesitus A, etiamsi extra planum obseruatorum ponatur, multo commodius explorari potest, nempe si tres stationes B, C, D (Fig. 9.) in eadem recta, et quarta E extra illam eligantur. Haec procedendi ratio id simul commodi habet, vt methodum maxime generalem praebeat, loci quaesiti veram distantiam verumque situm in omnibus possibilibus explorandi casibus. Disquiramus igitur, qua via hic incedendum sit.

§. 15.

Problema 3.

Mediante sono, qui e loco A proficiscitur, loci huius distantiam et situm inuenire, vbicunque ille positus sit (Fig. 9.).

Solutio. In plano BDE constituantur quatuor obseruatores ita, vt tres in B, C, D sint in eadem recta BD, quartus vero in E extra illam. Quilibet horum probe notet temporis momentum, quo sonum ex loco A *propagatum percipit. Ita ex differentiis temporum, quibus sonus quatuor loca B, C, D, E attigit,* inueniri possunt differentiae AC—AB, AD—AB, AE—AB. Ex repertis differentiis AC—AB et AD—AB quaere (per § 6.) distantiam quaesitam AB, sic simul habes distantias AC, AD, AE. Ex lateribus sic cognitis AB, AD, BD trianguli BAD quaere per Trigonometriam planam angulum BDA, et ex cognitis lateribus AD, AE, DE trianguli DAE angulum ADE. Quodsi summa repertorum angulorum BDA, ADE aequalis est angulo dato BDE, inde elucet, locum quaesitum A cum stationibus B, C, D, E in eodem plano esse; ergo hoc casu angulus inuentus BDA simul verum loci A situm indicat. Si vero summa angulorum BDA, ADE maior sit angulo dato BDE; inde patet, locum A non esse in plano BDE, sed vel supra vel infra illud positum. Hoc autem casu altitudo loci A sequenti modo inuenitur:

Demittatur ex A ad planum BDE recta perpendicularis AI, et in eodem

eodem plano ducatur recta DI; erit AI altitudo loci A, et planum ADI ad planum BDE perpendiculare. Iam fiat DF = DG = DB, et ex centro D ducantur arcus circulares BF, BG, FG; orietur triangulum sphaericum BGF, cuius latera BF, BG, FG mensurae sunt angulorum cognitorum BDA, BDE, ADE, atque erit DH = DG = DF. Ducatur itaque porro ex centro D arcus circularis FH; orietur alterum triangulum sphaericum FHG, cuius latera HG, FH mensurae sunt angulorum HDG, ADI, et quum planum ADI ad planum BDG perpendiculare sit; angulus sphaericus FHG est rectus. Hinc

1) in triangulo sphaerico BGF ex cognitis tribus lateribus BF, BG, FG, seu angulis planis BDA, BDE, ADE quaere angulum sphaericum BGF, posito sinu toto = r, inferendo:

$$\text{sin. } BDE \times \text{sin. } ADE : r \times r =$$
$$\text{sin.} \tfrac{1}{2}(BDA + BDE - ADE) \times \text{sin.} \tfrac{1}{2}(BDA + ADE - BDE) : \text{sin.} \tfrac{1}{2} BGF \times \text{sin.} \tfrac{1}{2} BGF$$

2) in triangulo sphaerico rectangulo FHG, ex angulo reperto BGF et latere FG seu angulo plano ADE quaere latera FH et GH, seu angulos planos ADI et EDI, inferendo:

primo, $r : \text{sin. } ADE = \text{sin. } BGF : \text{sin. } ADI$

secundo, $\text{tang. } BGF : \text{tang. } ADI = r : \text{sin. } EDI$

3) tandem in triangulo plano rectangulo AID infer:

$$r : AD = \text{sin. } ADI : AI.$$

Sic non solum distantias loci a stationibus B, C, D, E sed quoque altitudinem eius AI, et verum situm habes.

§. 16.

Haec problematis propositi solutio generalis abunde docet, quam commoda et egregia Geometriae acusticae sit Theoria. Neque minus superfluum duco, de vtilitate disserere, quae inde in permultis casibus potissimum in bello enasceretur, si loca vel valde remota, vel ob siluas, colles aut vrbes interiacentes visui non obuia ope auditus explorare Geodaetae valerent. Palmaria potius, quae hic oritur, quaestio haec est: an an ſperari poſſit, theoriam hanc actu applicabilem fore? Quae vero quum ſatis tuto non aliter niſi ipſis experimentis hunc in finem inſtitutis decidi poſſit, ad eam decidendam me quidem obſtrictum non video, commodam, quae ad haec experimenta inſtituenda requiritur, theoriam Geodaetis praebuiſſe contentus.

Interim ad illam quodammodo ſaltim diiudicandam pauca addere iuuat. Quae Geodaeſiae acuſticae fauent, ſunt 1) quod motus ſoni aequabilis, 2) celeritas eius ſat fere cognita eſt, nempe ea, vt äere quieto quouis minuto ſecundo circiter 1038 pedes Pariſ. abſoluat, 3) quod illa non variatur in ſono magis aut minus forti, tempore ſereno aut pluuio, noctu aut *interdiu*, *diſtantiis* paruis aut magnis, diuerſa directione tormenti, differenti terrarum interiectarum diſpoſitione, diuerſa äeris denſitate, nec vento, cuius directio ad rectam quae locum, in quo ſonus oritur, et locum, in quo auditur, iungit, perpendicularis eſt; 4) quod ventus quidem aduerſus ſonum retardet, ſecundus acceleret, ea tamen quantitate pedum, quam ventus ipſe abſoluit, quae vel ope Anemometri vel aliis modis haud aegre explorari poteſt. Haec omnia compluribus experimentis in diuerſis regionibus, inprimis iis, quae Academia ſcientiarum Pariſina magna cura inſtituit, confirmata ſunt (*), ac etiamſi forte quaedam ex circumſtantiis allatis celeritatem ſoni reuera variarent, hoc tamen noſtro caſu vix in cenſum venire videtur. Quod contra praxi Geometriae acuſticae maxime obſtare videtur, eſt difficultas, momentorum, quibus ſonus in diuerſis ſtationibus auditur, interualla ſatis exacte determinandi, quum tamen leuis error in his definiendis commiſſus inſignem errorem in calculo, quem theoria praeſcribit, gignere poſſit. Quum enim ſonus quouis minuto ſecundo 1038, adeoque quolibet minuto tertio 17,3 pedes Pariſ. percurrat; patet, in Geodaeſia acuſtica horologiis, quae ſingula *minuta tertia* rite indicant, opus eſſe. Haec vero difficultas iam feliciter remota videtur, dum tale horologium a peritiſſimo Klindworth

(*) Conf. Kraftii praelectiones in Phyſicam theoreticam, part. III. §. 300.

worth confectum iam actu existit, quo cel. Kaestnerus et alii viri docti in Obseruatorio Goettingensi anno 1778 die 15. Octobr vsi, varias parui cuiusdam tormenti explosiones in locis, quorum alter tantum 1649,2, alter 2218,8 ped. Paris. ab Obseruatorio distat, institutas obseruando, tempora, quibus sonus has exiguas distantias absoluit, adeo exacte definiuere, vt ratione primi loci vix 6, et respectu secundi vix 4 minut. tert. inter se discreparent, soni vero celeritas ex comparatione omnium harum obseruationum elicita quoad secundum locum 4 pedibus, quoad primum autem vno tantum pede minor, quam Parisina supra allata reperiretur (*). Si igitur Obseruator in statione C (Fig. 7. 9.) constitutus eiusmodi horologio instructus sit; ad interualla temporum, quibus *sonus ad diuersas stationes* peruenit, rite obseruanda illi nulla alia re opus *est*, *nisi vt* singuli reliqui, eodem momento, quo in sua quisque statione sonum audit, id lucido quodam signo denotent. Fateor quidem, ad hoc rite peragendum summam requiri attentionem et alacritatem. Haec vero an humanas vires plane excedat, tentandum erit Geodaetis; ego decidere non ausim, quum Astronomi recentiores nobis exemplo sint, quam incredibilis in obseruando attentionis et alacritatis gradus ingenio et studio hominum tandem adquiri queat. Mihi quidem sufficiat, ardua quaedam ac elegantiora Geometriae problemata soluisse, et Geodaetis theoriam suppeditasse, qua vtantur, qui velint et possint.

Scholion.

Aequatio $x = \frac{0}{0}$, quam §. 11. *inuenimus*, curatiori indagine digna est, quippe qua memorabilior vel grauioris momenti in vniuersa Mathesi vix deprehenditur. In aequatione $x = \dfrac{m(n^2 - b^2) - n(m^2 - c^2)}{2(mb - nc)}$ §. 6. stabilita, quae posito $b = n$, et $c = m$ dat $x = \frac{0}{0}$, quantitates m, n, id est, rectae stationariae BC, BD pro *constantibus* assumuntur, quas in qualibet

(*) Vid. Göttingsche Anzeigen, 142. Stück, 1778.

libet soni obseruatione easdem manere ponimus, quantitates vero x, b, c *variabiles* sunt, quia pro vario situ loci A, quantitatibus *m*, *n*, iisdem manentibus, semper variantur. Si igitur more Analystarum variabiles b, c, litteris vltimis y, z exprimamus, erit $x = \frac{m(n^2 - y^2) - n(m^2 - z^2)}{2(my - nz)}$, adeoque *x* talis functio quantitatum y, z, vt positis y = n, et z = m, $x = \frac{0}{0}$ euadat. Huiusmodi functiones, vbi pro certo variabilium valore $x = \frac{0}{0}$ reperitur, innumerae in Analysi occurrunt. Praeter has complures quoque dantur aequationes, quae, certo quantitatis variabilis valore posito, modo $\frac{0}{0} = a$, id est, quantitati cuidam finitae cognitae aequalem, modo $\frac{0}{0} = 0$, modo $\frac{0}{0} = \infty$ exhibent. Sic v. g. semper est $\frac{144 - x^2}{12 - x} = 12 + x$, qualemcunque numerum x denotet, et posito $x = 12$, oritur $\frac{0}{0} = 24$. Porro semper est $\frac{1 - 2x + x^2}{1 - 3x + 3x^2 - x^3} = \frac{1}{1 - x}$, atque posito $x = 1$, prodit $\frac{0}{0} = \frac{1}{0} = \infty$. Pari modo semper est $\frac{1 - 3x + 3x^2 - x^3}{1 - 2x + x^2} = \frac{1 - x}{1}$, *atque posito* $x = 1$, *oritur* $\frac{0}{0} = \frac{0}{1} = 0$.

Nunc *primo*, si posito certo valore variabilium, vt in exemplo nostro, reperitur $x = \frac{0}{0}$, quaeritur: quid fractio $\frac{0}{0}$ adeoque *x* hoc casu significet, dum modo vidimus, mox $\frac{0}{0} = a$, mox $\frac{0}{0} = 0$, mox $\frac{0}{0} = \infty$ esse? Haec quaestio ab Analystis ex parte quidem iam soluta est. Methodum enim, illo casu, quando *x* vnius *tantum variabilis functio* est, quaesitum eius valorem ope calculi differentialis explorandi, iam Ioh. Bernoulli, in suis Oper. Tom. I. p. 401, detexit, quam Eulerus, in Institut. Calculi Differentialis Part. II. Cap. XV., compluribus illustrauit exemplis. Ast methodo vniuersali, valorem $x = \frac{0}{0}$ rimandi, etiamsi x functio sit variabilium duarum y, z, vt in exemplo nostro, vel quotcunque plurium, quantum ego quidem ſcio, adhuc caremus. Itaque in exemplo noſtro valorem x ope Analyſeos explorare quidem non poſſumus, ſed eo facilius ex *ipſa* problematis natura eruitur. Quum enim ponatur $y = b = n$, hoc eſt, (Fig. 7.) $AC - AB = BC$, adeoque $AC = AB + BC$; per ſe patet, punctum A hoc caſu cum locis B, C, D in eadem recta eſſe, nempe in prolongata BF. In hac vero pone punctum A, vbicunque velis, vel in ipſo puncto B, vbi $AB = 0$ euadit, vel in quolibet puncto G, vbi $AB = GB$ eſt, vel etiam in diſtantia infinita, vbi $AB = \infty$ foret; in omnibus hisce caſibus non ſolum $AC - AB = BC$, i. e. $b = n$, ſed etiam $AD - AB = BD$, i. e. $c = m$ deprehenditur. Ergo in caſu noſtro AB, ſeu $x = \frac{0}{0}$ reuera quemlibet cogitabilem valorem denotat, ita vt non *ſolum* x cuilibet rectae finitae GB aequalis, ſed quoque $x = 0$, et $x = \infty$ *ſit*, quum contra in tribus iſtis *exemplis*, quae paulo ante adduximus, fractioni $\frac{0}{0}$ ſemper vnicus modo valor competat.

Ex his vero iam ſecunda, quae recentiorum Mathematicorum ingenia haud parum exercuit, exoritur quaeſtio: qua nempe ratione fieri poſſit, vt $\frac{0}{0} = a$, aut $\frac{0}{0} = 0$, aut $\frac{0}{0} = \infty$ cenſeatur? Qui tale quid contendit, nonne is eo *ipſo* contendere *videtur*, quod *cyphra numeratoris* in caſu primo *a* vicibus *maior*, in tertio *infinities maior* et in ſecundo infinities *minor* ſit cyphra denominatoris? Quid vero quaeſo abſurdius? Huius difficultatis ſolutionem, quam iam in ſe ſpectatam grauiſſimi momenti eſſe nemo facile negabit, quilibet ſane eo magis neceſſariam ducet, dummodo perpendat, fractionem ſ. potius rationem Geometricam $\frac{0}{0}$ veram eſſe baſin, cui integra ſic dicta Analyſis infinitorum ſeu calculus differentialis et integralis innititur. Vt haec eo clarius pateant, atque tyronibus Matheſeos data hac occaſione ſimul prima ſaltim calculi differentialis idea ſuppeditetur, ponamus v. g. eſſe $x = yy$; erit x talis functio variabilis y, vt creſcente y ſimul creſcat x. Creſcat igitur y incremento quodam quantumlibet magno vel paruo, quod Y nominare volumus, adeo vt loco y

iam

iam ponamus $y + Y$; hoc facto ſimul creſcet x incremento, quod X nuncupare lubet. Tali modo iam habebimus

$$x + X = (y + Y)(y + Y)$$
$$= y^2 + 2yY + Y^2$$

Sed $x = y^2$ (p. hyp.);

Ergo erit $X = 2yY + Y^2$, i. e. quando y creſcit quantitate Y; x creſcit quantitate $2yY + Y^2$.

vnde $\frac{X}{Y} = 2y + Y$

Iam, quantumuis paruum accipias incrementum Y, nunquam tamen euadere poteſt $\frac{X}{Y} < 2y$, aſt quo magis decreſcit Y, eo minus $\frac{X}{Y}$ ſuperat valorem $2y$, et quando incrementum Y prorſus rurſum tollis, atque $Y = 0$ ponis, tunc demum actu euadit $\frac{X}{Y} = 2y$. Quum itaque exponens $2y$ omnium, quos ratio geometrica $\frac{X}{Y}$ habere poteſt, minimus ſit, ille non indicat, niſi quanta incrementorum X, Y ſit ratio *vltima*, ſ. *prima*, vel, quod eodem redit, quanta eorum ſit ratio *initialis* i. e. ea, in qua ſunt, dum variabilis y creſcere *incipit*. Incrementa X, Y in hoc ſtatu *initiali* ſ. in ratione *vltima* conſiderata ab Analyſtis *differentialia* quantitatum x, y vocantur et per litteras dx, dy exprimuntur, ita vt loco $\frac{X}{Y} = 2y$ iam ſcribatur $\frac{dx}{dy} = 2y$, ex quo porro fluit

$$dx = 2y\,dy.$$

Vti autem ex aequatione $\frac{X}{Y} = 2y + Y$ patet, non fieri $\frac{X}{Y} = 2y$, niſi vere ſit $Y = 0$; ita etiam ex aequatione praecedenti $X = 2yY + Y^2$ apparet, poſito $Y = 0$, ſimul $X = 0$ poni. Quare manifeſtum eſt, differentiarentialia dx, dy vere esse *cyphras*, nempe $dx=o$, $dy=o$, adeoque $\frac{dx}{dy}=\frac{o}{o}=2y$, atque aequationem differentialem $dx=2ydy$ vero *sensu* nil aliud exprimere, nisi: $o=2y\times o$. Hoc modo euidens est, totum calculum differentialem reuera niti aequatione $\frac{o}{o}=a$, vbi *a* generaliter vel o, vel quamlibet quantitatem finitam vel infinitam denotare potest, adeoque summam quaestionis, quomodo id absque contradictione statui queat, grauitatem ex his eo magis elucere.

Ad Gordium hunc nodum soluendum Analystae huc quidem confugerunt, vt differentialia dx, dy ceu quantitates *infinite paruas* considerent, in formanda autem *infinite parui* notione ad hunc vsque diem insigniter proh dolor! dissentiunt. Plurimi, imo tantum non omnes per *infinite parua* quantitates intelligunt *omni assignabili* s. *finita minores*, quae tamen non pro absolute nihilo habendae sed *verae* quantitates sint. Ita, quum quaeuis linea motu puncti continuo describi concipiatur, pone, punctum quoddam P describere lineam quantumuis paruam sed finitam BD (Fig. 4.), illud non perueniet ad D, nisi antea innumerorum, quae inter B et D posita sunt, punctorum quodlibet salutauerit, atque ex primo puncto B ad proximum L, ex hoc ad proximum N et sic porro transierit. Quum vero linea inter puncta sibi proxima duo, tria, vel plura, dummodo eorum numerus finitus sit, haud adsignari queat; in qualibet linea finita quantumlibet exigua innumerae *lineae* concipiendae videntur *omni adsignabili* s. *finita minores*, quas ideo *infinite paruas* vocant, ex quo deinde prono quoque alueo fluit, lineas infinite paruas inter se quidem comparatas inaequales esse posse, finitam vero, cui vel addantur vel auferantur, nec augere nec minuere, atque simul *curuam infinite paruam* iure pro linea *recta* haberi. Si iam differentialia dx, dy hoc sensu pro quantitatibus infinite paruis accipiantur, vltro apparet, non solum dx, dy inaequales, adeoque $\frac{dx}{dy}=a$ poni licere, sed quoque sensu rigoroso $y\pm dy=y$, $a\pm dy=a$, $y\pm dx=y$ etc. esse, adeoque hac ratione

totam

totam difficultatem, de qua ſupra monuimus, plane euaneſcere. Non diffitendum eſt, huic infinite paruorum conceptui nos non modo praeſtantiſſimam illam calculi differentialis inuentionem actu acceptam ferre, ſed eum quoque menti noſtrae adeo infixum et familiarem eſſe, vt illo non in Geometria ſolum ſed potiſſimum in Mechanica prorſus abſtinere vix valeat. Nec magis diffitendum eſt, ſolutiones problematum difficillimas huius conceptus auxilio mirum in modum non minus faciliores, quam breuiores reddi, adeoque illum in vniuerſa Matheſi maximo uſui eſſe. Dolendum vero, conceptum hunc vtut vtilem mere tamen eſſe imaginarium ſ. contradictorium.

Nam quum *quantitas*, quae omni aſſignabili minor eſt, ipſa iam *adſignabilis* non ſit, multo minus vlla eius pars adſignabilis erit, adeoque eſt quantitas, de qua prorſus nihil adſignari poteſt. Sed de eiusmodi quantitate etiam nihil plane cogitabile eſt, adeoque notio eius non quantitatem, ſed potius omnis quantitatis *defectum* innuit. Ergo quantitas omni aſſignabili minor ſ. infinite parua ceu *quantitas* conſiderata conceptus contradictorius ſ. mere imaginarius eſt. Vis huius argumenti eo *magis eluceſcit*, ſi notionem infinite parui ad quantitates ſpeciales applicemus. Quid enim quaeſo cogitas ſub numero, qui omni numero aſſignabili $\frac{1}{n}$ minor eſt? an verum numerum? ſane nil aliud niſi meram cyphram ſeu o. Pone enim, poſſibilem eſſe numerum, qui minor ſit quolibet fracto $\frac{1}{n}$, cuius denominator numerus integer quantumlibet magnus eſt; per ſe patet, illum non alium eſſe poſſe, niſi fractum $\frac{1}{\infty}$. Quum vero $\infty = 1+1+1+1+\ldots\ldots\ldots \sim$; diuide 1 per numerum infinitum

$$\begin{array}{r|l} & 1 \;\{\; 1 - 1 \\ 1+1+1+1+\ldots\sim) & \underline{1+1+1+1+\ldots\ldots\sim} \\ & -1-1-1-\ldots\ldots\sim \\ & \underline{-1-1-1-\ldots\ldots\sim} \\ & \qquad 0 \end{array}$$

Ergo fictus hic numerus omni fracto $\frac{1}{n}$ minor ſ. infinite paruus $\frac{1}{\infty} = 1 - 1 = 0$.

Quod

Quod de numeris valet, id de quantitatibus geometricis, v. g. de lineis, quibus notio infinite parui genesin suam potissimum debet, eo magis conspicuum est. Quum enim punctum non *pars* sed *terminus* lineae sit, omnis linea ita comparata erit, vt vel quaelibet eius pars iterum linea sit, vel nullis plane partibus constet. Ponamus iam lineam, quae nullas partes habeat; illa prorsus indiuisibilis erit (quales lineas olim Democritus et Leucippus statuere et seculo praecedenti *Bonauentura Caualerius*, in *Geometria indiuisibilibus continuorum noua quadam ratione promota*, *Bononiae* 1653, ad demonstrationes et inuentiones Mathematicas subleuandas, adsumebat) adeoque inter duo ipsius puncta extrema nullum tertium erit, in quo diuidi possit, hinc linea *ista duobus tantum* terminis extensionis constans extensione ipsa prorsus carebit, i. e. erit linea *non extensa*. Quum vero haec sibi ipsa repugnent; linea indiuisibilis reuera est Non-Ens, ergo quaelibet cuiusuis lineae pars denuo linea sit necesse est. Igitur quaeuis linea non ipsa modo diuisibilis est, sed quaelibet eius pars iterum diuidi potest, i. e. quaeuis linea diuisibilis est in infinitum. Iam vero lineam in duas partes diuidere non est, nisi punctum commune adsignare, quod vtramque partem terminat, adsignato autem hoc puncto vtraque simul pars ipsa adsignatur. Igitur quaeuis linea innumeris partibus adsignabilibus constat, adeoque et ipsa ceu totum, adsignabilis sit necesse est. Ergo linea infinite parua s. omni assignabili minor est linea, quae non est linea, i. e. ens mere imaginarium. Quum vero quantitates infinite paruas iam in se mere imaginarias esse euictum sit; eo magis varii infinite paruorum ordines pro meris fictionibus habendi erunt.

Optime haec iam Leibnitius et Wolfius cognouere. Ille enim (*) de infinite paruorum vsu loquens ait: "commoditati expressionis seu breviloquio mentali inseruimus, sed non nisi *toleranter vera* loquimur, quae *explicatione rigidantur*." Hic vero (**) non idem solum asseuerat, sed disertis verbis infinite parua eorumque ordines pro mere imaginariis et fictio-

(*) Vid. Acta Erud. Lips. A. 1712. pag. 168.

(**) Wolfii Elementa Mathes. Tom. V. cap. IV. §. 33, et commentat. de studio Mathematico recte instituendo cap. IV. §. 231.

fictionibus declarat. Vt igitur difficultatem in aequatione $\frac{dx}{dy} = a$ obviam remouerent magni illi viri, quos ipse quoque Segnerus sequitur, per quantitates infinite paruas eas intelligebant, quae vere quidem *finitae* adeoque *in se* non sunt nihilum, sed tantummodo *respectu aliarum* pro nihilo habentur, vt v. g. diameter puluisculi respectu altitudinis montis, haec respectu diametri terrae, haec respectu distantiae stellarum fixarum pro nihilo haberi potest (*). Sed si differentialia dx, dy pro vere finitis habenda sint; per se patet, sensu rigoroso poni non posse $a + dx = a$, multo autem minus $a^2 + bdx = a^2$, si *b* numerum insigniter magnum, *a* vero fractionem admodum paruam denotet. Quum igitur id quod infinite paruum vocari solet, nec quantitas finita, relatiue tantum pro *o* habita, nec media quaedam s. pons inter finitam et *o* esse possit; sponte sequitur, illud neutiquam esse quantitatem, sed vero et absoluto sensu *Nihilum* i. e. plenarium quantitatis defectum.

Primus, qui hoc publice profitebatur, *Eulerus* erat, in Instit. calcul. diff. tam praefatione, quam Cap. III. repetitis vicibus diserte docens, quae infinite parua s. omni dabili minora vocantur, adeoque et differentialia dx, dy reuera esse $= 0$. Quae vero quum ita sint, difficultatem, ad quam soluendam primi Analystae ideam infinite parui eiusqe innumerorum ordinum effinxerant, qui nempe $\frac{0}{0} = a$ esse possit, in summo suo vigore reuiuiscere intuens vir summus l. c. Cap. III. §. 84. statuit, rationem quidem arithmeticam inter binas quasque cyphras esse aequalitatis, non vero rationem geometricam. "Facillime, inquit, hoc perspicietur ex hac proportione geometrica $2 : 1 = 0 : 0$, in qua terminus quartus est $= 0$, vti tertius. Ex natura autem proportionis, cum terminus primus duplo sit maior, quam secundus, necesse est, vt et *tertius duplo maior sit quam quartus*." Vnde porro concludit, infinite paruorum, quan-

(*) Act. Erud. Lipf. A. 1712. pag. 168, nec non Wolf. Elem. Math. Tom. V. in commentat. de stud. Math. cap. IV. §. 226, et Tom. I. in Elem. Analys. infinit. cap. I. §. 5.

quanquam per se sunt $= 0$, in ratione geometrica consideratorum nihilo minus innumeros dari posse ordines, quare etiam in ipsis Calculi differentialis principiis tradendis morem communem tum temporis receptum retinuit Quae quum duriuscula et certitudinem Analyseos infinitorum magis suspectam reddere, quam firmare viderentur; *Kaestnerus* et *Karstenius* fundamenta huius scientiae ita iacere conati sunt, vt infinite paruis vel prorsus carere possimus, vel, si quis illis compendii caussa vti velit, verus eiusmodi locutionum sensus cuiuis pateat. Quem ad scopum attingendum omnia ad celebrem illam, qua Newtonus in principiis suis Philosoph. naturalis mathematicis vsus erat, methodum rationum *primarum* et *vltimarum*, s. *limitum* rationum reduxere, quorum inuentionem verum omnemque calculi differentialis finem esse ipse Eulerus l. c. luculentissime ostendit. Hinc per rationem differentialem $\frac{dx}{dy}$ non intelligunt nisi eam rationem plerumque finitam v. g. $\frac{2y}{1}$, ad quam ratio incrementorum v. g. $\frac{X}{Y} = 2y + Y$ eo propius accedit, quo magis incrementa X, Y decrescunt, et cui perfecte aequalis sit, si Y et X euanescunt, quam igitur rationem, vt in nostro casu $\frac{2y}{1}$ *limitem* rationis incrementorum $\frac{X}{Y}$ vocant. Hunc limitem Kaestnerus communiter breuissime eo determinat, quod ostendat, incrementum Y omni dabili minus fieri *posse*, Karstenius vero in illo explorando potissimum *methodo exhaustionis* veterum vtitur. Gratissima sane mente cuiuis solidioris cognitionis amanti fatendum est, principia Analyseos infinitorum ab eximiis his viris ad summum rigoris fastigium euecta esse. Verumtamen, si, quae mihi quidem videntur, aperire liceat, sola illa difficultas, qui $\frac{0}{0} = a$ esse possit, hic quoque remanet, nec intelligi potest, quid Regia Academia scientiarum Prussica in Analysi horum virorum desiderare, et qua igitur ratione basin calculi differentialis pro contradictoria declarare potuerit, nisi huius forte difficultatis solutio-hanc difficultatem euitandam rem inuertit, et ex indubia omnium cyphrarum aequalitate concludit, omnem inter eas comparationem plane cessare, adeoque, quando incrementa X, Y vere ponantur $=$ o, non amplius quaeri, *quaenam* inter illa intercedat *ratio*, sed ad solum *limitem* (v. g. $\frac{2y}{1}$) s. *vltimum valorem Exponentis* $\frac{X}{Y}$, qui nihilo minus] determinari possit, respici. Hac vero explicatione rem non enodari sed *rigidari* facile est intellectu. Etenim ex propria ipsius definitione *limes* nil aliud est, nisi ille rationis $\frac{X}{Y}$ Exponens v. g. $2y$, qui tum demum obtinetur, quando incrementa X, Y reuera ponuntur $=$o. Si igitur, vti adserit, hoc casu inter X, Y *nulla* comparatio, adeoque nec *ratio* possibilis sit; quo modo, *ratione* ipsa penitus sublata, eius tamen *Exponens* s. limes remanere et adsignari queat, ego quidem vt videam tantum abest, vt inde potius concluderem, limitem hunc aeque impossibilem et mere imaginarium esse, ac ipsam rationem $\frac{o}{o}$, cuius Exponens est, i. e. in aequatione $\frac{X}{Y} = 2y + Y$ valorem $2y$ ad rationem $\frac{X}{Y}$ quidem semper propius accedere, *nunquam vero illam aequare posse, dum* hoc casu ratio $\frac{X}{Y}$ conceptus imaginarius fiat. Eodem fere modo nuper se expedire tentarunt cel. de Stamford (*) et de Massebach (**), qui cum Eulero quidem fatentur, differentialia dx, dy vere esse o, nihilo tamen secius $\frac{dx}{dy} = \frac{o}{o}$ *quantitatem* s. *rationem* esse prorsus negant, et hanc expressionem pro mero *signo* rationis illius, quae quantitatum x, y incrementis $=$o positis obtinebatur, venditant. Generos. de Massebach l. c. in praefatione diserte dicit: "So oft dU, dx, dy u. s. w. vorkommen; so bedeuten diese Aus-

(*) Vid. Berlinisches Magazin der Wißenschaften und Künste. Zweiten Bandes erstes Stück 784. S. 1—7.

(**) Anfangsgründe der Differenzial- und Integral-Rechnung, zum Gebrauch des Ingenieurs und Artilleristen, von einem Königl. Preuß. Offizier. Halle 1784.

tionem adhuc desiderauerit. Quum enim v. g. ratio incrementorum $\frac{X}{Y} = 2y + Y$ limitem $\frac{2y}{1}$ tum demum attingat, quando vere fit $Y = 0$, adeoque etiam $X = 0$, hoc vero casu ratio illa in hanc abeat $\frac{0}{0} = \frac{2y}{1}$; nonne ei, qui, vt fas est, rigorem Geometricum quaerit, omnino suspicio enasci debet, num limes iste $\frac{2y}{1}$, qui non aliter nisi aequatione *apparenter saltim contradictoria* obtineri potest, vere possibilis sit, anne potius tota limitum s. rationum primarum et vltimarum methodus, quatenus pro basi calculi differentialis adsumitur, inter mere imaginaria et efficticia referri debeat? Quae sane suspicio penitus nunquam euanescet, nisi ante enodatum fuerit, an et quo modo ratio cyphrarum aequalium $\frac{0}{0}$ rationi inaequalitatis $\frac{2y}{1}$ aequalis esse possit. Ne quis obiiciat, hac suspicione mota certitudinem antiquissimae methodi *exhaustionis*, quae tamen omnium consensu rigorosissima est, simul infringi, adeoque illam nimium probare conantem nihil probare. Ii enim limites, ad quos determinandos Archimedes et alii veterum methodo exhaustionis vsi sunt, rationes vltimae non solum quantitatum finitarum, sed quoque rationes *aequalitatis* sunt, ideoque in his omnis contradictorii suspicio plane corruit. Sic v. g. polygonum regulare circulo *inscriptum* et simile sibi *circumscriptum*, si circulum ceu limitem suum attingunt, ambo coincidunt, adeoque ratio illorum vltima non solum ratio finitorum, sed etiam ratio aequalitatis est. Aliter vero res se habet, si methodus exhaustionis ad eiusmodi casus applicetur, vbi ratio vltima non ratio finitorum, sed cyphrarum, eaque simul *rationi inaequalitatis* aequalis est; in his enim casibus iure quaeritur, an ista methodus revera applicabilis sit, quamdiu non ostensum fuerit, quomodo ratio aequalium rationi inaequalium aequalis esse possit. Karstenius quidem (*) ad

 hanc

(*) Karstens Anfangsgründe der mathematischen Analysis und höhern Geometrie 1786 II. Abschnitt, §. 27.

Ausdrücke Null. Nun ist man aber übereingekommen, solche Ausdrücke, wie $\frac{dU}{dx}$, $\frac{dU}{dy}$ u. s. w. obgleich sie auch nichts weiter als Null sind, als Zeichen anzunehmen, wodurch das Daseyn gewißer Größen angedeutet wird. Der Ausdruck $x\frac{dU}{dx}$ zeigt also keinesweges $x\frac{o}{o}$ an, sondern man will damit so viel sagen, daß x mit einer gewißen Größe, welche man durch das Zeichen $\frac{dU}{dx}$ anzeigt, multiplizirt worden sey. Hingegen ist der Ausdruck $dx\frac{dU}{dy}$ weiter nichts, als Null." Vltima haec propositio omnino vera est, reliquae contra totidem contradictiones sunt. Nam contendere 1) quod $dU = o$, $dx = o$, verumtamen non $\frac{dU}{dx} = \frac{o}{o}$ sit, 2) quod semper $\frac{dU}{dx} = o$, nihilo vero minus $\frac{dU}{dx} = a$, i. e. $o = a$ sit, 3) quod calculus differentialis ex *pacto* tantum verus sit, quid quaeso id aliud est, nisi totidem contradictoria contendere?

Quum, his omnibus rite perpensis, extra omnem dubitationis aleam positum sit, quamlibet rationem differentialem verissimo sensu rationem *cyphrarum* esse, nempe $\frac{dx}{dy} = \frac{o}{o}$, licet omnes cyphrae sibi aequales sint; iure suspicamur, contradictionem inter has duas propositiones *mere apparentem* fore. Agedum itaque id dilucide euincamus. Vt supra adducto exemplo Euleri vtar, quaero: vnde probas, in proportione $2:1 = o:o$ priorem cyphram duplo *maiorem* esse posteriori? Inde, ipse Eulerus respondet, quia, cum terminus primus duplo sit maior, quam secundus, necesse est, vt et *tertius duplo maior sit, quam quartus*. Ast haec propositio in nostro exemplo, me quidem iudice, admodum sinistre applicatur. Quod vt pateat, respiciamus ad *demonstrationem*, qua veritas huius propositionis nititur. Ponamus igitur, in proportione $a:b = c:d$ Exponentem rationis $a:b$ esse $= n$; erit $a = nb$, $c = nd$. Iam sit $a > b$; erit $n > 1$, consequenter $nd > d$, ergo $c > d$. Atqui manifestum est, propositionem: posito $n > 1$ erit $nd > d$, vniuersalissime quidem veram esse, si d veram *quantitatem* denotet, neutiquam vero, si $d = 0$ ponitur, quia enim semper $n.0 = 1.0$, quemcunque numerum n designet, hoc casu $nd = d$, ergo et $c = d$ erit. Ex ipso itaque demonstrationis neruo apparet, in proportione $a:b = 0:0$, per ipsam proportionis naturam, priorem cyphram posteriori semper aequalem esse, quidquid litterae a, b denotent, istamque proportionem, posita $a = nb$, *proprie* ita exprimendam esse $a:b = n.0:1.0 = n:1$. En igitur singularem sed vnicum licet latissime patentem casum, quo absque vlla contradictione ratio inaequalium rationi aequalium aequalis esse potest. Perperam itaque Analystae veriti sunt, ne cum Eulero cyphrarum inaequalitas statui deberet, si differentialia dx, dy pro veris cyphris, et expressionem $\frac{0}{0}$ (vnico casu, vbi $\frac{0}{0} = 1$ ponitur, excepto) pro vera ratione geometrica declararent.

Quamquam breuissima haec rei dilucidatio totam difficultatem, quomodo $\frac{0}{0} = a$ esse possit, tam facile tollit, vt nodum in scirpo quaesiuisse viderer, nisi prolixa eius historia praemissa doceret, quantopere illa Analystas torserit; non tamen inutile erit, grauissimae huius expressionis $\frac{0}{0}$ naturam propius adhuc indagare. Duplici haec modo considerari potest, vel vt *quotus*, s. fractio, vel vt *ratio geometrica*. Consideretur itaque *primo* vt ratio geometrica $0:0$, sequitur

1) $0 : 0 = a : b$

2) $0 : 0 = \infty : 1$

3) $0 : 0 = 0 : a$

Nam quum $b.0 = a.0$, $1.0 = \infty.0$, $a.0 = 0.0$, adeoque in singulis tribus proportionibus productum extremorum producto mediorum aequale sit; singulae istae tres proportiones verae sunt. Ergo est vel $\frac{0}{0} = \frac{a}{b}$ vel $\frac{0}{0} = \infty$, vel $\frac{0}{0} = 0$.

Secun-

Secundo si $\frac{o}{o}$ consideretur vt quotus; denuo erit vel $\frac{o}{o} = \frac{a}{b}$, vel $\frac{o}{o} = \infty$, vel $\frac{o}{o} = o$, quia singulis his casibus, si quotus vel $\frac{a}{b}$, vel ∞, vel o per diuisorem o multiplicetur, diuidendus o prodit.

E quibus patet, rationem $\frac{o}{o}$ expressionem *indeterminatam* eamque omnium *vniuersalissimam* esse, quae non *omnes* solum *possibiles quantitates finitas* et *infinitas*, sed *ipsam* quoque *o* sub se comprehendit, adeo vt summa Matheseos in euolutione solius rationis $\frac{o}{o}$ consistere iure dicatur, caussam vero, cur ratio $\frac{o}{o}$ tam infiniti ambitus sit, hanc esse, quoniam $o = o.o = 1.o = a.o = \infty.o$ est. Quando igitur $\frac{o}{o} = \frac{a}{b}, \frac{o}{o} = \infty, \frac{o}{o} = o$ ponitur, id proprie hunc sensum habet: $\frac{a.o}{b.o} = \frac{a}{b}, \frac{\infty.o}{1.o} = \frac{\infty}{1}, \frac{o.o}{1.o} = \frac{o}{1}$, eodem modo, quo dicimus: $\frac{ax}{bx} = \frac{a}{b}, \frac{\infty.x}{1.x} = \frac{\infty}{1}, \frac{o.x}{1.x} = \frac{o}{1}$. Diserte quoque haec confirmantur exemplis supra adductis. Si enim aequatio $\frac{144 - x^2}{12 - x} = 12 + x$, posito $x = 12$, in hanc abit: $\frac{o}{o} = 24$; vltro patet, hanc aequationem *proprie* expressam esse $\frac{24.o}{1.o} = \frac{24}{1}$. Nam $\frac{144 - x^2}{12 - x} = \frac{(12 + x)(12 - x)}{1\,(12 - x)}$; vnde posito $x = 12$ euadit $\frac{144 - x^2}{12 - x} = \frac{24.o}{1.o} = \frac{24}{1}$. Simili modo id de reliquis exemplis facile ostendi potest. Idem quoque de aequatione differentiali supra allata $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{1}$, quae ex aequatione $\frac{X}{Y} = 2y + Y$ eliciebatur, patet. Quum enim $X = (2y + Y)\,Y$; erit $\frac{(2y + Y)\,Y}{1\,.\,Y} = \frac{2y + Y}{1}$, hinc posito $Y = o$, obtinetur $\frac{2y.\,o}{1.\,o} = \frac{2y}{1}$. Quamuis itaque $2y.\,o = 1.\,o$, adeoque cyphrae dx, dy prorſus *aequales* i. e. *quantitate* eaedem ſint, quia quantitas vtriusque nulla eſt, illae tamen *qualitate* ſ. modo conſiderandi plane diuerſae ſunt, quoniam per naturam functionis x cyphra *dx* talis eſt, vt *2y vicibus* ſumenda ſit, dum cyphra dy *ſemel* ſumitur, quare cyphras iſtas, quas Analyſtae per dx, dy exprimunt, nullatenus ſibi ſubſtituere ſ. inter ſe confundere licet. Neutiquam igitur, vti de Maſſebach arbitratur, a pacto quodam Analyſtarum pendet, cyphras iſtas, quas differentialia vocamus, certis ſignis v. g. dx, dy a ſe inuicem diſtinguere, ſed neceſſario id exigit ipſa calculi indoles. Quum porro ratio incrementorum finitorum $\frac{X}{Y}$, quippe quae mutationem indicat, quam functio *x* patitur, quando variabilis y actu mutatur, naturam functionis *x* diſtincte explicando inſeruiat, idem quoque de ratione horum incrementorum vltima $\frac{dx}{dy}$, quae oritur, dum incrementa X, Y in *o* abeunt, eo magis valet. *Haec enim pro quauis functione data* x *conſtantem* ſ. *inuariatum* exponit *limitem*, ad quem ratio incrementorum finitorum $\frac{X}{Y}$ ſemper quidem magis accedere, nunquam vero actu peruenire poteſt. Ita in aequatione $x = y^2$, ſi y actu creſcit quantitate finita Y quantumuis exigua; functio x ea quantitate X creſcit, vt ratio $\frac{X}{Y}$ limitem $2y = \frac{dx}{dy}$ ſemper ſuperet, eo tamen minus, quo minor eſt Y. Si v. g. Y centillioneſima tantum pars quantitatis y eſt, X eum valorem habebit, vt $\frac{X}{Y}$ limitem 2y adhuc centillioneſima parte quantitatis y excedat. Quum igitur limes iſte ſ. ratio $\frac{dx}{dy} = \frac{o}{o}$ nullo modo a varietate incremencrementorum X, Y pendeat, sed pro quauis data functione x *constans* et *inuariata* sit, licet alia functio x alium quoque limitem $\frac{dx}{dy}$ det, praeter haec vero ratio $\frac{dx}{dy}$ semper multo breuior et concinnior sit, quam ratio incrementorum finitorum $\frac{X}{Y}$; nihil sane ad naturam cuiuscunque functionis euoluendam aptius excogitari potest, quam ratio differentialis $\frac{dx}{dy} = \frac{o}{o}$, quae, quum omnes *possibiles* quantitates sub se contineat, iam per se calculum praebet, quo vniuersalior nullus est. Et hic quidem calculi differentialis finis primarius ac vnicus est, nempe naturam cuiusuis functionis breuissime ac vniuersalissime euoluendi. Tandem quum $\frac{dx}{dy} = \frac{o}{o}$ cuilibet quantitati v. g. 2y aequalis esse possit; per se patet, differentialia dx, dy, *licet cyphrae sint*, denuo *differentiari posse*, atque ddx, ddy rursum cyphras esse. Ita si $\frac{dx}{dy} = \frac{o}{o} = 2y$ sit, erit $dx = 2ydy$, hinc $ddx = 2yddy + 2dydy$, ergo $\frac{ddx}{ddy} = 2y + \frac{2dy^2}{d^2y} = 2y + \frac{o}{o}$, vbi, per superiora, $\frac{o}{o}$ rursus vel quaelibet quantitas, vel etiam o esse potest, consequenter $\frac{ddx}{ddy}$ non minus ac $\frac{dx}{dy}$ quamlibet quantitatem designare poterit. Hoc luculentius patet, si dy ceu *constans* consideretur, quae nullum differentiale habet, tum enim erit $ddx = 2dy^2$, hinc $\frac{d^2x}{dy^2} = 2$. Itaque apparet, ddx, ddy denuo differentiari posse, adeoque infinitos altiores ordines differentialium v. g. d^2x, d^3x, d^4x etc. dari, licet quoduis differentiale reuera $= o$ sit.

Ex his omnibus iam ſequentes deducimus propoſitiones:

1) Quum omnia differentialia tam prima, quam altiora merae cyphrae ſint; calculus differentialis proprie non eſt niſi *calculus cyphrarum* (die eigentliche Nullenrechnung), qui eo tendit, vt ratio incrementorum vltima exponatur, cuius ope natura cuiusuis functionis breuiſſime explicatur, adeoque via ad quoduis problema mathematicum ſoluendum paretur maxime commoda.

2) Hinc infinite parua, eorumque ordines, qui merae fictiones ſunt, calculum differentialem nullo modo adficiunt, verum ex illo prorſus profligari debent, quare etiam ſcientia, quae vſum calculi differentialis concernit et vulgo *Analyſis infinitorum* audit, potiori iure, vti iam Karſtenius monuit, Analyſis *ſublimior* vocanda eſt.

3) Calculus hic cyphrarum, quum ſecundum regulas communes inſtituatur, non minus, quam calculus realium quantitatum, *ſummo rigore* gaudet, nec igitur in eius applicatione prolixiori demum methodo exhauſtionis opus eſt, ſed ſimulac ratio incrementorum finitorum e data functione deducta eſt, illa ſtatim ſine ambagibus in o conuerti poſſunt, id quod, fortunante Deo, alibi vberius monſtrabo.

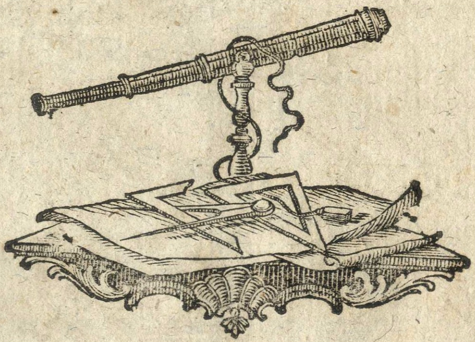
THESES

VBERIORIS DISPVTANDI MATERIAE PRAEBENDAE CAVSSA ADIECTAE.

1) Spatium non eſt obiectum extra nos exiſtens, ſed *forma ſenſus noſtri externi*, ſ. conditio *ſubiectiua*, ſub qua ſola res externas nobis repraeſentare valemus, ergo non notio vniuerſalis ſeu abſtracta, ſed *intuitus*, isque non empiricus i. e. a ſenſationibus demum genitus, verum *purus*.

2) Geometria eſt ſcientia *a priori*, eaque plane *ſynthetica*.

3) Aſtronomia ideam immenſae maieſtatis Dei optimo colluſtrat lumine.



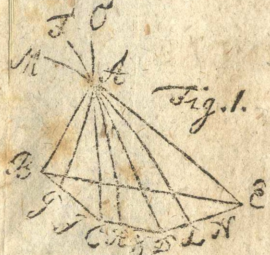


Fig. 1.

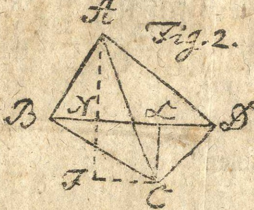


Fig. 2.

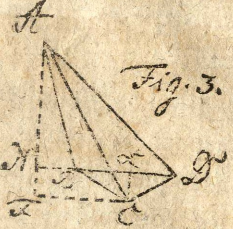


Fig. 3.

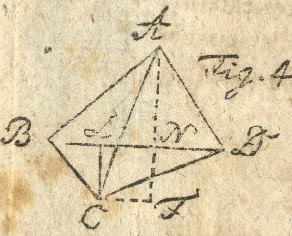


Fig. 4

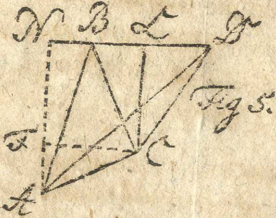


Fig. 5.

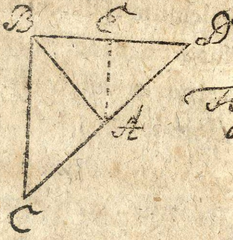


Fig. 6.

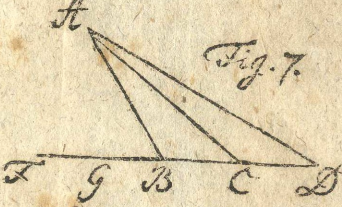


Fig. 7.

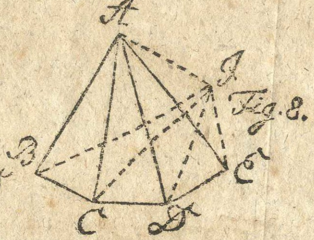


Fig. 8.

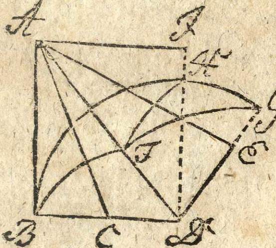


Fig. 9.

CORRIGENDA.

pag. 1. lin. 6. pro *reclarum* lege *rectarum*.
— — lin. 8. 10 — 1083 — 1038.