BANCO DE ESPAÑA

CONTRASTES DE RAICES UNITARIAS PARA SERIES MENSUALES. UNA APLICACION AL IPC

María de los Llanos Matea

SERVICIO DE ESTUDIOS
Documento de Trabajo nº 9214

BANCO DE ESPAÑA

CONTRASTES DE RAICES UNITARIAS PARA SERIES MENSUALES. UNA APLICACION AL IPC (*)

María de los Llanos Matea

(*) Estoy agradecida a Antoni Espasa, por haberme motivado para realizar este estudio. También estoy en deuda con Juan José Dolado, por sus comentarios y sugerencias, así como con Isabel Argimón y José María Bonilla.

SERVICIO DE ESTUDIOS
Documento de Trabajo nº 9214

El Banco de España al publicar esta serie pretende facilitar la difusión de estudios de interés que contribuyan al mejor conocimiento de la economía española.

Los análisis, opiniones y conclusiones de estas investigaciones representan las ideas de los autores, con las que no necesariamente coincide el Banco de España.

ISBN: 84-7793-163-1

Depósito legal: M-19041-1992

Imprenta del Banco de España

0. Introducción

Los modelos ARIMA tienen la ventaja de que son fáciles de construir y proporcionan buenas predicciones a corto plazo, aunque no están libres de ciertos problemas.

En algunas ocasiones, se presentan problemas con determinadas series estadísticas en las que el orden de diferenciación no es fácil de determinar. Por ejemplo, una variable puede necesitar una diferencia de carácter estacional, que al introducirla, hace aparecer una media móvil estacional no invertible. Este resultado sugiere la existencia de un componente estacional determinístico que, no obstante, no elimina estos problemas.

Ante esta situación, se plantea la necesidad de disponer de algún tipo de estacionalidad estocástica con efectos permanentes, pero que evite el problema de un tratamiento excesivo a través de una diferencia estacional.

Los contrastes de raices unitarias en las frecuencias estacionales permiten abordar este tipo de problema, ofreciendo una herramienta con la que discernir en que frecuencias estacionales la serie tiene raíces unitarias. A su vez, ello lleva a plantearse modelos en los cuales utilizar filtros algo más complejos de los que son habituales en series temporales.

Unido a lo anterior, el análisis por separado de las distintas raíces unitarias de las frecuencias estacionales puede ayudar a conocer más a fondo las características del largo plazo de las series.

El objetivo del presente trabajo consiste en presentar los contrastes de raíces unitarias para series mensuales propuestos por Franses (1991), pero con la variante de incorporar la posibilidad de que la parte estacionaria no sea ruido blanco, sino que siga un proceso ARMA.

El documento comienza con una descripción de los contrastes de raíces unitarias para series mensuales (apartado 1), que se completa con una aplicación a los componentes del índice de precios al consumo (apartado 2), dejando para el apéndice los contrastes de raíces unitarias bajo la hipótesis nula de requerirse tanto una diferencia regular como una estacional, para transformar la serie analizada en estacionaria.

1. Contrastes de raíces unitarias para series mensuales

En el caso de múltiples raíces unitarias la mejor estrategia para cifrar su cuantía consiste en ir de lo general a lo particular. Aunque, si las raíces potenciales corresponden a diferentes frecuencias, no hay una única secuencia.

Una serie, con s datos a lo largo de un año, puede ser integrada en cualquiera de sus frecuencias estacionales. Por ejemplo, una diferencia estacional, es decir $(1-B^s)$, donde B es el operador de retardos, se puede descomponer en:

$$(1-B^s) = (1-B).S_{s-1}(B)$$

donde $S_{s-1}(B) = (1 + B + \ldots + B^{s-1})$

$(1-B)$ tiene una raíz unitaria en la frecuencia cero y $S_{s-1}(B)$ posee s-1 raíces en las frecuencias estacionales. Si s es par, estas s-1 raíces incluyen B=-1 y otras s-2 raíces complejas conjugadas con módulo unitario y distribuidas simétricamente en el círculo unidad.

A nivel de notación, se dice que una serie es SI(1) si está integrada en todas sus frecuencias estacionales. Así, si X_t viene generada por un proceso $(1-B^s)X_t=\varepsilon_t$, donde ε_t es ruido blanco, tendremos que X_t es integrada en la frecuencia cero y en las frecuencias estacionales, lo que se denota por $X_t \sim SI(1,1)$, correspondiendo el primer uno a la raíz unitaria de la frecuencia cero y el segundo uno a las s-1 raíces en el circulo unidad de $S_{s-1}(B)$. De igual forma, si X_t sigue un proceso $(1-B)(1-B^s)X_t=\varepsilon_t$, tendremos que $X_t \sim SI(2,1)$.

El número máximo de diferencias que suelen requerir las series mensuales para convertirse en estacionarias son o bien dos diferencias regulares o bien una diferencia regular y otra estacional. Por ello, conviene iniciar el proceso de contraste de las raíces unitarias partiendo de $(1-B)(1-B^{12})$. No obstante, en la exposición, y sin pérdida de generalidad, vamos a prestar mayor atención a la diferencia estacional, dejando como referencias puntuales las modificaciones que supone el trabajar a la vez con una diferencia regular y otra estacional[1].

Los contrastes de raíces unitarias sobre series mensuales han sido tratados por Franses (1991), que básicamente aplica la metodología desarrollada para series trimestrales por Hyllerberg et al. (1990). Además, una aportación importante de Franses consiste en generar por el método de Monte Carlo los valores críticos para contrastar las raíces unitarias de series mensuales. Sin embargo, las tablas han sido elaboradas a partir de un número de réplicas relativamente pequeño[2], por lo que los resultados a los que pueden llevar deben tomarse con cautela.

---

[1] En el apéndice se ofrece el esquema a seguir para los contrastes de raíces unitarias cuando se supone que se requieren tanto una diferencia regular como una estacional para transformar la serie en estacionaria.

[2] Franses realizó tan sólo 5.000 réplicas de Monte Carlo para obtener los valores críticos que aparecen en Franses (1991).

Aquí tan sólo se van a recoger las lineas básicas para construir los contrastes de raíces unitarias.

Como es bien sabido, el polinomio $(1-B^{12})$ se puede descomponer en los siguientes operadores:

$$(1-B^{12}) = (1-B)\ (1+B)\ (1+B^2)\ (1+B\sqrt{3}+B^2)\ (1-B\sqrt{3}+B^2)\ (1+B+B^2)\ (1-B+B^2)$$

donde cada término a la derecha del igual posee una raíz en el círculo unidad, si es real, o bien dos raíces complejas conjugadas en el círculo unidad. En el cuadro adjunto se ofrecen dichas raíces:

CUADRO 1. RAÍCES DE $(1-B^{12})$

OPERADOR	**RAÍZ(CES)**	**FRECUENCIA(*)**	**PERÍODO**
$(1-B)$	1	0	-
$(1+B)$	-1	6	2
$(1-B\sqrt{3}+B^2)$	$(\sqrt{3}\pm i)/2$	1,11	12
$(1-B+B^2)$	$(1\pm i\sqrt{3})/2$	2,10	6
$(1+B^2)$	$\pm i$	3,9	4
$(1+B+B^2)$	$(-1\pm i\sqrt{3})/2$	4,8	3
$(1+B\sqrt{3}+B^2)$	$(-\sqrt{3}\pm i)/2$	5,7	12/5

(*) Los números proporcionan las frecuencias en meses.

Antes de proseguir, resulta interesante ofrecer la idea intuitiva de la forma en que se opera el contraste. Esto es, se regresa la serie diferencia por el máximo orden posible de integración, por ejemplo $(1-B^{12})$, sobre unas determinadas transformaciones de la serie original, y que básicamente consisten cada una de ellas en la serie desfasada un periodo y transformada por todos los operadores en que se descompone $(1-B^{12})$, pero exceptuando uno de ellos en cada caso. De esta forma esas transformaciones eliminan las raíces unitarias de todas las frecuencias excepto una de ellas cada vez. Consecuentemente, de la estimación de la regresión tendremos que aquellos coeficientes que sean significativos indicarán que la raíz que no se ha utilizado para formar la transformación que acompañan, por no incluir el operador asociado, no está presente en la serie original.

Un ejemplo puede servirnos para ilustrar el procedimiento. Supongamos que tenemos una serie mensual y queremos comprobar si es SI(1,1) y sólo nos interesa analizar la presencia de (1-B) y/o $S_{11}(B)$. En tal situación, una forma de contrastar lo anterior consistirá en realizar la regresión siguiente:

$$(1-B^{12})X_t = \alpha_1 S_{11}(B)\, X_{t-1} + \alpha_2(1-B)\, X_{t-1} + \varepsilon_t$$

donde ε_t se supone ruido blanco.

Si el estimador de α_1 es significativamente distinto de cero, pero no así el de α_2, tendremos que tras eliminar de las variables explicativas $(1-B)X_{t-1}$ quedará:

$$(1-B^{12})X_t = \hat{\alpha}_1 S_{11}(B)X_{t-1} + \hat{\varepsilon}_t$$

donde $(\hat{.})$ indica estimado

Operando llegamos a:

$$S_{11}(B)\,[1 - (1+\hat{\alpha}_1)B]X_t = \hat{\varepsilon}_t$$

donde ahora $1+\hat{\alpha}_1 \neq 1$ y $\hat{\alpha}_1<0$[3], y por tanto, se descarta la existencia de una raíz unitaria en la frecuencia cero, mientras que no se podría refutar la existencia de las once raíces unitarias de $S_{11}(B)$.

Volviendo al argumento general, hay que matizar que en el caso de que una variable explicativa se haya formado eliminando uno de los operadores con raíces complejas, esta variable aparece otra vez, como explicativa, pero desfasada esta vez dos períodos.

Con todo ello la regresión queda como sigue:

$$\begin{aligned}(1-B^{12})X_t = {} & \alpha_1 Y_{1,t-1} + \alpha_2 Y_{2,t-1} + \alpha_3 Y_{3,t-1} + \alpha_4 Y_{3,t-2} + \alpha_5 Y_{4,t-1} + \alpha_6 Y_{4,t-2} \\ & + \alpha_7 Y_{5,t-1} + \alpha_8 Y_{5,t-2} + \alpha_9 Y_{6,t-1} + \alpha_{10} Y_{6,t-2} + \alpha_{11} Y_{7,t-1} \\ & + \alpha_{12} Y_{7,t-2} + \varepsilon_t \qquad (1)\end{aligned}$$

---

[3] Si no se cumple esta segunda condición, es decir si $\hat{\alpha}_1>0$, entonces $S_{11}(B)X_t$ no será un proceso estacionario.

donde: $Y_{1,t} = (1+B)\ (1+B^2)\ (1+B\sqrt{3}+B^2)\ (1-B\sqrt{3}+B^2)\ (1+B+B^2)$
$(1-B+B^2)X_t$

$Y_{2,t} = -(1-B)\ (1+B^2)\ (1+B\sqrt{3}+B^2)\ (1-B\sqrt{3}+B^2)\ (1+B+B^2)$
$(1-B+B^2)X_t$

$Y_{3,t} = -(1-B)\ (1+B)\ (1+B\sqrt{3}+B^2)\ (1-B\sqrt{3}+B^2)\ (1+B+B^2)$
$(1-B+B^2)X_t$

$Y_{4,t} = -(1-B)\ (1+B)\ (1+B^2)\ (1-B\sqrt{3}+B^2)\ (1+B+B^2)\ (1-B+B^2)X_t$

$Y_{5,t} = -(1-B)\ (1+B)\ (1+B^2)\ (1+B\sqrt{3}+B^2)\ (1+B+B^2)\ (1-B+B^2)X_t$

$Y_{6,t} = -(1-B)\ (1+B)\ (1+B^2)\ (1+B\sqrt{3}+B^2)\ (1-B\sqrt{3}+B^2)$
$(1-B+B^2)X_t$

$Y_{7,t} = -(1-B)\ (1+B)\ (1+B^2)\ (1+B\sqrt{3}+B^2)\ (1-B\sqrt{3}+B^2)$
$(1+B+B^2)X_t$

En otras palabras, en las anteriores transformaciones tenemos que, de los operadores que forman $(1-B^{12})$,:

1) Y_1 no incluye el operador $(1-B)$, y por tanto, el coeficiente asociado contrasta la raíz 1 en X_t.

2) Y_2 no incluye el operador $(1+B)$, es decir, sirve para contratar la raíz -1 en X_t.

3) Y_3 no incluye el operador $(1+B^2)$, por lo que permite contrastar las raíces $\pm i$ en X_t.

4) Y_4 excluye el operador $(1+B\sqrt{3}+B^2)$, y por tanto, se utiliza para contrastar las raíces $(-\sqrt{3}\pm i)/2$ en X_t.

5) Y_5 no incluye el operador $(1-B\sqrt{3}+B^2)$, es decir, permite contrastar las raíces $(\sqrt{3}\pm i)/2$ en X_t.

6) Y_6 excluye el operador $(1+B+B^2)$, y por tanto, sirve para contrastar las raíces $(-1\pm i\sqrt{3})/2$ en X_t.

7) Y_7 no incluye el operador $(1-B+B^2)$, por lo que se utiliza para contrastar las raíces $(1\pm i\sqrt{3})/2$ en X_t.

Si en lugar de haber tan sólo una raíz unitaria en la frecuencia cero cabe la posibilidad de que existan dos raíces unitarias en esta frecuencia, se aplicará la misma regresión que antes, pero con la salvedad de que ahora tanto las variables independientes como la dependiente se filtrarán por una diferencia regular adicional (véase el Apéndice) y, únicamente en el caso de no aceptar la presencia de la raíz unitaria correspondiente a la frecuencia cero se volvería a la ecuación (1).

Para contrastar las raíces reales se utiliza el estadístico t, acudiendo a las tablas elaboradas por Franses (1991). En esta misma referencia se encuentran los valores críticos para verificar, a partir de los pares de conjugadas, con un estadístico F, la presencia de las raíces complejas; así como para contrastar conjuntamente la existencia de todas las raíces complejas. Análogamente a como sucede con los contrastes de raíces unitarias en la frecuencia cero, los valores críticos se ven afectados cuando se introducen componentes determinísticos en la regresión.

Si contrastamos la existencia de raíces unitarias asumiendo que la parte estacionaria es ruido blanco cuando realmente no es así, nos podemos encontrar con problemas debido a la falta de potencia de estos contrastes. Por ejemplo, en una situación en la cual el verdadero modelo sea $(1-B^{12})X_t = (1-\Theta_{12}B^{12})\varepsilon_t$ y donde el parámetro de la media móvil está próximo a la unidad, cabe la posibilidad de que no podamos refutar la hipótesis de que X_t es estacionaria.

Como todo proceso de medias móviles invertible, se puede representar por un proceso autorregresivo de orden infinito, que en la práctica se puede aproximar por un AR(p), en la literatura se ha tratado la falta de potencia de los contrastes de raíces unitarias suponiendo que la parte estacionaria en el verdadero modelo es un AR(p) con $p \leq \sqrt[3]{T}$, siendo T el tamaño muestral[4]. No obstante, lo más frecuente con series mensuales, dada la longitud de las muestras con las que se trabaja, será que con la restricción $p \leq \sqrt[3]{T}$ no evitemos que

---

[4] Said y Dickey (1984) muestran que el contraste es asintóticamente válido si p aumenta con el tamaño muestral, en la proporción $\sqrt[3]{T}$.

en los residuos siga habiendo un $MA(1)_{12}$, si este era el caso antes de aplicarle el AR(p), pues p será menor que 12. De hecho, se requeriría una muestra con 1.728 observaciones para permitir un $AR(1)_{12}$, lo cual tampoco sería suficiente si el parámetro de la media móvil está próximo a la unidad.

Para eludir en lo posible este inconveniente el procedimiento que se propone consiste en comprobar que los residuos de la serie, una vez diferenciada y aplicado un modelo $AR(m)xAR(n)_{12}$, son ruido blanco. Esta solución es intuitiva y más parsimoniosa que la incorporación de un proceso autorregresivo aditivo, pero se desconoce como puede afectar a los valores críticos de los contrastes de raíces unitarias e incluso cómo determinar los órdenes del proceso autorregresivo multiplicativo. Es razonable pensar que en la parte estacional se requerirá al menos un $AR(2)_{12}$ para capturar posibles medias móviles estacionales con parámetros elevados.

Con el fin de incorporar la posibilidad de que la parte estacionaria no sea ruido blanco, Ilmakunnas (1990), para series trimestrales, enriquece la ecuación equivalente a la (1) utilizando el contraste de Dickey, Hasza y Fuller (1984). Si aplicamos la misma filosofía a series mensuales la ecuación[5] resultante queda como sigue:

$$(1-B^{12})X_t = \alpha_1 Y^*_{1,t-1} + \alpha_2 Y^*_{2,t-1} + \alpha_3 Y^*_{3,t-1} + \alpha_4 Y^*_{3,t-2} + \alpha_5 Y^*_{4,t-1} + \alpha_6 Y^*_{4,t-2}$$

$$+ \alpha_7 Y^*_{5,t-1} + \alpha_8 Y^*_{5,t-2} + \alpha_9 Y^*_{6,t-1} + \alpha_{10} Y^*_{6,t-2} + \alpha_{11} Y^*_{7,t-1} + \alpha_{12} Y^*_{7,t-2}$$

$$+ \sum_{j=1}^{m+n} \beta j \, (1-B^{12})X_{t-j} + \varepsilon_t \qquad (2)$$

donde ahora las Y^*_i se calculan igual que las Y_i, pero en lugar de sobre X_t, sobre $X_t - \sum_{j=1}^{m+n} \hat{\emptyset}_j X_{t-j}$, donde las $\hat{\emptyset}$ se han estimado al calcular el proceso $AR(m)xAR(n)_{12}$ sobre $(1-B^{12})X_t$.

Resumiendo, los pasos a seguir serian:

1) Estimar para la serie X_t un modelo $AR(m)\times ARI(n,1)_{12}$, cuyos parámetros estimados serán $\hat{\phi}_i$ para i=1,...m e i=12×1, 12×2, ..., 12×n, y donde los resíduos deben ser ruido blanco.

2) Filtrar la serie X_t, por los parámetros estimados en el paso anterior, pero sobre el nivel de la serie. Resultando una serie puente, que denominaremos Z_t, y que consiste en:

[5] Si el contraste se realiza sobre $(1-B)(1-B^{12})$, en lugar de sobre $(1-B^{12})$, la ecuación (2) se ve alterada por introducirse en todos sus elementos el operador (1-B).

$$Z_t = \sum_{k=0}^{m+n} \hat{\phi}_k B^k X_t$$

donde $\sum_{k=0}^{m+n} \hat{\phi}_k = (1-\sum_{j=1}^{m} \hat{\phi}_j B^j)(1-\sum_{i=1}^{n} \hat{\phi}_{12i} B^{12i})$

Es decir, $\hat{\phi}_0=1$, y algunos $\hat{\phi}_k$ intermedios están restringidos a cero.

3) Construir las variables Y_i^* análogamente a como se definen en la ecuación (1) las variables Y_i, pero en lugar de sobre la serie X_t, sobre la serie Z_t.

4) Estimar la ecuación (2), restringiendo a cero los j-ésimos coeficientes ß, de forma que coincidan con las restricciones nulas sobre los ϕ del paso 2.

5) Contrastar, utilizando las tablas de Franses (1991), con un estadístico t los coeficientes correspondientes a Y_1 e Y_2 a una sola cola, y con un estadístico F los pares de coeficientes que acompañan a las $Y^*_{i,t-1}$ e $Y^*_{i,t-2}$ (para i=3,...,7). Así como un contraste conjunto de todas las raíces complejas con un estadístico F de $\alpha_4,\ldots,\alpha_{12}$. En caso

de que el estadístico supere los valores críticos se rechazará la hipótesis nula de que la serie X_t posee la(s) raiz(ces) asociada(s) al operador excluido del filtro $(1-B^{12})$ para formar la variable Y_i^*.

2. Una aplicación: el índice de precios al consumo

Un tema que nos ha preocupado en el estudio del índice de precios al consumo (IPC) español, ha sido el del nivel de desagregación mínimo a partir del cual analizar la inflación. Como se desarrolla en Espasa et al. (1987) hay razones económicas que apuntan la necesidad de estudiar el índice general a partir de lo que denominados sus 5 componentes básicos, a saber:

- Alimentos elaborados
- Alimentos no elaborados
- Bienes industriales no energéticos
- Servicios
- Energía

Ahora bien, es interesante contrastar este resultado desde un punto de vista meramente estadístico. En la referencia citada más arriba, se realiza una aproximación al tratamiento estadístico del problema a partir de un análisis gráfico de los componentes tendenciales de los cinco índices básicos. Para el mismo fin podemos servirnos en estos momentos de los contrastes de raíces unitarias.

A ese nivel no hay que olvidar que todas aquellas perturbaciones sobre los precios que tengan un efecto transitorio no van a ser relevantes, ocurriendo todo lo contrario con aquellas que tengan un efecto permanente. Consecuentemente, esto nos lleva a fijarnos en los elementos tanto estocásticos como determinísticos que tienen repercusiones a largo plazo. En el sentido, de que si los comportamientos a largo plazo son diferentes entre los distintos componentes habría que analizar el IPC a ese nivel de desagregación, pues de lo contrarío estaríamos empobreciendo la interpretación de la situación inflacionista. Ahora bien, esto no seria cierto si existiesen relaciones de cointegración entre los distintos indices, de forma que las alteraciones persistentes en el tiempo de un(os) indice(s) fuesen comunes a otro(s). Desgraciadamente no se han podido realizar contrastes de cointegración, debido a que no están desarrollados estos contrastes para series mensuales con raíces unitarias en las frecuencias estacionales.

En este marco de referencia lo que se ha hecho ha sido analizar los órdenes de integración del logaritmo de los componentes básicos para el período comprendido entre enero de 1977 y diciembre de 1991. Del análisis se ha excluido el índice de energía, por ser este un componente determinístico[6].

Para los contrastes de raíces unitarias se ha partido de una diferencia regular y otra estacional, y se han aplicado procesos $AR(5)xAR(2)_{12}$ para conseguir que los residuos sigan procesos de ruido blanco. Los resultados a los que se ha llegado con este procedimiento se recogen en el cuadro 2.

Antes de entrar a comentar el cuadro 2 queremos señalar un problema que no se ha tratado a pesar de no ser trivial. Nos referimos al hecho de que en las estimaciones de los modelos $ARI(5,1)$ X $ARI(2,1)_{12}$ aparecen valores anómalos en todos los componentes, si exceptuamos al índice de alimentos sin elaborar. Los valores atípicos vuelven a aparecer en las regresiones auxiliares que se utilizan en los contrastes[7]. El problema de los valores atípicos estriba no tan sólo en que un valor anómalo suficientemente grande

---

[6] El índice de precios al consumo de la energía ha recogido históricamente precios administrados, aunque desde mediados de 1990 parte de los precios energéticos empezaron una tímida liberalización, que sin embargo, no justifica su tratamiento estocástico, puesto que tienen un escaso peso dentro del periodo analizado.

[7] En la regresión auxiliar de alimentos elaborados los residuos con más de 3 veces la desviación estándar corresponden a noviembre de 1980 ($4,60\sigma_{\varepsilon}$), agosto de 1981 ($3,63\sigma_{\varepsilon}$) y enero de 1986 ($4,04\sigma_{\varepsilon}$), mientras en la ecuación de bienes industriales no energéticos tan sólo el residuo de enero de 1986 supera 3 veces la desviación estandar ($4,06\sigma_{\varepsilon}$). Por último, en el índice de servicios son los residuos correspondientes a enero de 1986 ($3,83\sigma_{\varepsilon}$), enero de 1987 ($-3,11\sigma_{\varepsilon}$) y enero de 1991 ($4,51\sigma_{\varepsilon}$) los que muestran valores anormalmente altos.

CUADRO 2. CONTRASTES DE RAICES UNITARIAS DE LOS COMPONENTES ESTOCASTICOS DEL IPC

Hipótesis nula: $(1 - \sum_{j=1}^{5} \phi_j B^j)(1-\phi_{12}B^{12} - \phi_{24}B^{24})\Delta\Delta_{12}\log X_t = \varepsilon_t$

Estadístico t	Alimentos elaborados	Alimentos sin elaborar	Bienes industriales no energéticos	Servicios
α_1	-1,43	-0,84	-3,00*	-2,20*
α_2	-1,80	-0,70	-1,06	-0,50
α_3	-2,08*	0,57	0,98	-1,02
α_4	-1,92	-2,32*	-2,54*	-0,83
α_5	-1,56	-1,36	-1,74	-1,86
α_6	-2,53*	-1,40	-2,40*	-2,04
α_7	1,66	1,01	-2,25*	0,40
α_8	-1,84	-0,92	-2,76*	-0,04
α_9	-2,36*	-0,16	-1,44	-1,02
α_{10}	-1,66	-0,45	-3,38*	-1,82
α_{11}	1,42	1,07	1,47	0,65
α_{12}	-2,38*	-1,51	-2,37*	-0,58
Estadístico F				
$\alpha_3=\alpha_4=0$	3,19*	2,25	2,93	0,69
$\alpha_5=\alpha_6=0$	3,26*	0,81	2,45	1,65
$\alpha_7=\alpha_8=0$	1,34	0,40	3,06*	0,21
$\alpha_9=\alpha_{10}=0$	2,33	0,08	4,54*	1,32
$\alpha_{11}=\alpha_{12}=0$	2,26	0,95	2,27	0,20
$\alpha_3=..=\alpha_{12}=0$	2,62*	0,96	3,58*	0,83

* Significativo al 5%: se rechaza la hipótesis nula.

puede hacer que la serie parezca ruido blanco[8] cuando realmente no es así, sino que también puede sesgar las estimaciones. En estos casos se suele acudir al análisis de intervención.

Como puso de manifiesto Perron (1989), los resultados sobre raíces unitarias pueden cambiar sustancialmente cuando se utiliza el análisis de intervención. Pero una vez más nos encontramos con el inconveniente de que los valores críticos de los estadísticos se ven afectados por la introducción del análisis de intervención y desgraciadamente no están disponibles. En la disyuntiva entre abandonar los contrastes en el caso de los índices afectados o llevarlos a cabo, aunque siendo conscientes de la fragilidad de los resultados, nos ha parecido más positivo optar por esta última vía.

Siendo conscientes de las limitaciones con las que nos encontramos volvamos al cuadro 2. Del mismo se deduce que los cuatro componentes estocásticos del IPC muestran comportamientos a largo plazo diferentes. El índice de alimentos sin elaborar necesita una diferencia regular y otra estacional para convertirse en estacionario. Por su parte, para alimentos elaborados se descarta la presencia de una diferencia estacional, aunque por separado no se puede refutar la existencia de la mayor parte de las once raíces de $S_{11}(B)$. En concreto, tan sólo no se aceptan las dos raíces complejas correspondientes a 2 y 4 veces al año.

---

8 A medida que el valor anómalo tiende a infinito la función de autocorrelación tiende a cero.

En el componente de bienes industriales no energéticos no se acepta la presencia en la frecuencia cero de dos raíces unitarias. Por ello, se ha pasado a analizar la serie con una diferencia estacional (véase Cuadro 3). En esta situación, se acepta la existencia de una raíz unitaria en la frecuencia cero, requiriéndose en esta regresión constante. Antes de continuar queremos llamar la atención de lo que significa una constante en una regresión como la del Cuadro 3, y por extensión, el cáracter singular que toma cualquier otro componente deterministico de los barajados en las tablas construidas para los contrastes de raíces unitarias en frecuencias estacionales. En particular, una constante sobre una diferencia estacional de una serie es equivalente a una tendencia escalonada sobre el nivel de la serie, de forma que toma el mismo valor anualmente[9]. Por tanto, el necesitar una constante en

---

[9] Formalmente tendremos que:

$$\frac{\alpha_0 \, C_t}{(1 - B^{12})} = \alpha_0 \, D_t$$

donde $C_t = 1 \ \forall t$

$$D_t = \begin{cases} \dfrac{t}{12} & \text{si t es múltiplo de 12} \\[2ex] \dfrac{t}{12} + 1 & \text{si t no es múltiplo de 12} \end{cases}$$

t es el orden de los residuos del modelo ordenados de menor a mayor.

CUADRO 3. CONTRASTES DE RAICES UNITARIAS DEL IPC DE BIENES INDUSTRIALES NO ENERGETICO

Hipótesis nula: $(1 - \sum_{j=1}^{5} \phi_j B^j)(1 - \phi_{12}B^{12} - \phi_{24}B^{24})\Delta_{12}\log X_t$ = constante + ε_t

Estadístico t	Estimación
α_1	-2,16
α_2	-1,00
α_3	1,17
α_4	-2,55
α_5	-1,79*
α_6	-2,54*
α_7	2,13*
α_8	-2,79*
α_9	-1,49
α_{10}	-3,49*
α_{11}	1,26
α_{12}	-2,44*
Estadístico F	
$\alpha_3=\alpha_4=0$	3,15*
$\alpha_5=\alpha_6=0$	2,81
$\alpha_7=\alpha_8=0$	3,19*
$\alpha_9=\alpha_{10}=0$	4,80*
$\alpha_{11}=\alpha_{12}=0$	2,33
$\alpha_3=\ldots=\alpha_{12}=0$	3,99*

* Significativo al 5%: se rechaza la hipótesis nula.

el índice de bienes industriales no energéticos no es un resultado demasiado satisfactorio, pero que nos hemos visto obligados a introducir para conseguir que los resíduos sean ruido blanco. Retomando los contrastes de raíces unitarias tenemos que este índice no requiere una diferencia estacional para convertirse en estacionario, puesto que las 10 raíces complejas de $S_{11}(B)$ no son conjuntamente significativas, sin embargo, por separado, además de aceptarse la raíz real correspondiente a 2 veces al año, se acepta la presencia de las raíces correspondiente a 12/5 y 6 veces al año.

Respecto al índice de servicios, el resultado no es concluyente, sobre todo si tenemos presente que los valores críticos se deben tomar a título indicativo. Según el Cuadro 2, a un 5% se rechazaría la hipótesis nula de dos raíces unitarias en la frecuencia cero. Sin embargo, finalmente nos hemos decantado hacia la aceptación de esta hipótesis (hipótesis que no se puede refutar al 1%), debido a que los intentos realizados con tan sólo una raíz en la frecuencia cero han sido totalmente infructuosos[10]. Por el contrario, lo que está totalmente fuera de cuestión es la existencia de una diferencia estacional.

---

[10] En la regresión auxiliar del logaritmo del índice de servicios sobre un modelo AR(5) x $ARI(2,1)_{12}$, independientemente de incluir una constante o una tendencia (o ambas), parecía requerirse una diferencia regular para conseguir que los residuos fuesen estacionarios.

En el Cuadro 4 se recopilan las frecuencias en las cuales los 4 componentes estocásticos del IPC presentan raíces unitarias.

Por último, antes de finalizar puede ser interesante comentar las consecuencias que sobre las relaciones de cointegración tienen los resultados de raíces unitarias obtenidos. Por un lado, se puede anticipar que no hay una relación de cointegración completa entre todos los componentes estocásticos del IPC en conjunto, en otras palabras, no existe una relación en niveles de los 4 índices que proporcione unos residuos estacionarios. Por el contrario, es necesario como minimo prefiltrar todas las series por una diferencia regular, si exceptuamos al índice de bienes industriales no energéticos. Por otro lado, si tomamos los índices dos a dos únicamente cabe la posibilidad de que el índice de alimentos sin elaborar y el índice de servicios tengan cointegración completa. No obstante, de las discrepancias en la construcción de ambos índices[11] no parece demasiado aventurado el no esperar comportamientos a largo plazo comunes, al menos en lo que respecta a las raíces de $S_{11}(B)$.

---

[11] En concreto, nos referimos al hecho de que el índice de alimentos sin elaborar incluye bienes estacionales, pero no el índice de servicios.

CUADRO 4. RESULTADOS DE LOS CONTRASTES DE RAICES UNITARIAS	
Componente del IPC	Frecuencias con raíces unitarias(*)
Alimentos elaborados (1)	0,6,1,2,4
Alimentos sin elaborar (1)	0,6,1,2,3,4,5
Bienes industriales no energéticos	0,6,2,5
Servicios (2)	0,6,1,2,3,4,5

(*) Los números proporcionan las frecuencias en meses. Se han suprimido las frecuencias conjugadas.

(1) Presentan dos raíces unitarias en la frecuencia cero.

(2) A pesar de rechazarse, al 5% de significación, dos raíces unitarias en la frecuencia cero se aceptan al 1%.

3. Conclusiones

En el trabajo se han utilizado los contrastes de raíces unitarias en frecuencias estacionales para analizar los componentes del IPC. Del estudio de los 4 componentes estocásticos del IPC se aprecian comportamientos a largo plazo muy diferentes. Así, el indice de precios al consumo de alimentos no elaborados y el de servicios son SI(2,1), el indice de alimentos elaborados es SI(2,0) y finalmente el índice de bienes industriales no energéticos es SI(1,0).

Estos resultados tan sólo constituyen una aproximación inicial al tema de integración, puesto que no se ha utilizado el análisis de intervención cuando parece necesitarse, debido a que se desconoce como afecta el análisis de intervención a las distribuciones asintóticas de los estadísticos. Por tanto, queda abierto todo un campo de investigación que en la profesión no se le ha prestado demasiada atención. Por la misma razón, no se ha llevado a cabo un análisis de cointegración, a pesar de que hubiese sido una extensión muy interesante. Sin embargo, lo que si se puede avanzar en esta dirección es que no existe una relación de cointegración completa entre los 4 componentes estocásticos, puesto que como mínimo se requerirá filtrar todas las series, con la excepción del índice de bienes industriales no energéticos, por una diferencia regular. Además, tomando los componentes dos a dos, únicamente cabría la posibilidad de existir una relación de cointegración completa entre el índice de alimentos sin elaborar y el índice de servicios.

APENDICE: Esquema de los contrastes de las raíces unitarias para $(1-B)\ (1-B^{12})$

Los pasos a seguir para contrastar las raíces unitaria de la diferencia estacional, bajo la hipótesis nula de que X_t sigue el proceso:

$$(1 - \sum_{j=1}^{m} \phi_j B^j)\ (1-\sum_{i=1}^{n} \phi_{12i} B^{12i})\ \Delta\Delta_{12}\ X_t = \varepsilon_t \qquad \text{con } \varepsilon_t \text{ ruido blanco}$$

son los siguientes:

1) Estimar para la serie X_t un modelo ARI(m,1)×ARI(n,1)$_{12}$, cuyos parámetros estimados serán $\hat{\phi}_i$ para i=1...,m e i=12×1, 12×2,...,12×n, y donde los resíduos deber ser ruido blanco.

2) Filtrar la serie X_t, por los parámetros estimados en el paso anterior, pero sobre $(1-B)X_t$. Resultando una serie puente, que denominaremos Z_t, y que consiste en:

$$Z_t = \sum_{k=0}^{m+n} \hat{\partial}_k\ B^k\ \Delta X_t$$

donde $\sum_{k=0}^{m+n} \hat{\partial}_k = (1 - \sum_{j=1}^{m} \hat{\partial}_j B^j)\ (1 - \sum_{i=1}^{n} \hat{\partial}_{12i}\ B^{12i})$

Es decir, $\phi_0=1$, y algunos ϕ_k intermedios están restringidos a cero.

3) Construir las siguientes transformaciones

$$Y^*_{1,t} = (1-B)\ (1+B)\ (1+B^2)\ (1+B\sqrt{3}+B^2)\ (1-B\sqrt{3}+B^2)\ (1+B+B^2)\ (1-B+B^2)Z_t = (1-B^{12})Z_t$$

$$Y^*_{2,t} = -(1-B)\ (1-B)\ (1+B^2)\ (1+B\sqrt{3}+B^2)\ (1-B\sqrt{3}+B^2)\ (1+B+B^2)\ (1-B+B^2)Z_t$$

$$Y^*_{3,t} = -(1-B)\ (1-B)\ (1+B)\ (1+B\sqrt{3}+B^2)\ (1-B\sqrt{3}+B^2)\ (1+B+B^2)\ (1-B+B^2)Z_t$$

$$Y^*_{4,t} = -(1-B)\ (1-B)\ (1+B)\ (1+B^2)\ (1-B\sqrt{3}+B^2)\ (1+B+B^2)\ (1-B+B^2)Z_t$$

$$Y^*_{5,t} = -(1-B)\ (1-B)\ (1+B)\ (1+B^2)\ (1+B\sqrt{3}+B^2)\ (1+B+B^2)\ (1-B+B^2)Z_t$$

$$Y^*_{6,t} = -(1-B)\ (1-B)\ (1+B)\ (1+B^2)\ (1+B\sqrt{3}+B^2)\ (1-B\sqrt{3}+B^2)\ (1-B+B^2)Z_t$$

$$Y^*_{7,t} = -(1-B)\ (1-B)\ (1+B)\ (1+B^2)\ (1+B\sqrt{3}+B^2)\ (1-B\sqrt{3}+B^2)\ (1+B+B^2)Z_t$$

4) Estimar la ecuación:

$$(1-B)\,(1-B^{12})\,X_t = \alpha_1 Y^*_{1,t-1} + \alpha_2 Y^*_{2,t-1} + \alpha_3 Y^*_{3,t-1} + \alpha_4 Y^*_{3,t-2}$$

$$+ \alpha_5 Y^*_{4,t-1} + \alpha_6 Y^*_{4,t-2} + \alpha_7 Y^*_{5,t-1} + \alpha_8 Y^*_{5,t-2}$$

$$+ \alpha_9 Y^*_{6,t-1} + \alpha_{10} Y^*_{6,t-2} + \alpha_{11} Y^*_{7,t-1} + \alpha_{12} Y^*_{7,t-2}$$

$$+ \sum_{j=1}^{m+n} \beta j\,(1-B)\,(1-B^{12})X_{t-j} + \varepsilon_t$$

restringiendo a cero los j-ésimos coeficientes ß, de forma que coincidan con las restricciones nulas sobre los $\hat{\phi}$ del paso 2.

5) Contrastar, utilizando las tablas de Franses (1991), con un estadístico t los coeficientes correspondientes a Y_1 e Y_2 a una sola cola, y con un estadístico F los pares de coeficientes que acompañan a las $Y^*_{i,t-1}$ e $Y^*_{i,t-2}$ (para i=3,...7) -véase el Cuadro A-. Así como un contraste conjunto de todas las raíces complejas con un estadístico F de $\alpha_4,\ldots,\alpha_{12}$. En caso de que el estadístico supere los valores críticos se rechazará la hipótesis nula de que la serie X_t posee la(s) raiz(ces) asociada(s) al operador excluido del filtro (1-B) (1-B^{12}) para formar la variable Y^*_i.

CUADRO A. RAICES CONTRASTADAS CON LOS COEFICIENTES α

Coeficiente	Raíz(ces) contrastada(s)	Frecuencia*
α_1^{**}	1	0
α_2	-1	6
α_3, α_4	$\pm i$	3,9
α_5, α_6	$(-\sqrt{3}\pm i)/2$	5,7
α_7, α_8	$(\sqrt{3}\pm i)/2$	1,11
α_9, α_{10}	$(-1\pm i\sqrt{3})/2$	4,8
α_{11}, α_{12}	$(1\pm i\sqrt{3})/2$	2,10

* Los números proporcionana las frecuencias en meses.

** Con la ecuación del paso 4 se contrasta la existencia de dos raíces unitarias en la frecuencia cero.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Dickey, D.A., Hasza, D.P. y Fuller, W.A. (1984): "Testing for unit roots in seasonal time series". Journal of the American Statistical Association, vol. 79, nº 386, pág. 355-367.

Espasa, A., Manzano, M.C., Matea, M.Ll. y Catasús, V. (1987): "La inflación subyacente en la economía española: estimación y metodología". Banco de España, Boletín Económico de marzo de 1987, pág. 32-51.

Franses, P.H. (1991): "Model selection and seasonality in time series". Tinbergen Institute series, nº 18.

Hylleberg, S., Engle, R.F., Granger, C.W.J. y Yoo, B.S. (1990): "Seasonal integration and cointegration". Journal of Econometrics, 44. pág. 215-238.

Hylleberg, S., Jørgensen, C. y Sørensen, N.K. (1991): "Seasonality in macroeconomic time series". Memo 1991-9. Økonomisk Institut.

Ilmakunnas, P. (1990):"Testing the order of differencing in quarterly data: an ilustration of the testing sequence". Oxford Bulletin of Economics and Statistics, 52. pág. 79-88.

Perron, P. (1989): "The great crash, the oil price shock, and the unit root hypothesis". Econometrica, vol. 57, nº 6, pág. 1361-1401.

Said, S.E. y Dickey, D.A. (1984): "Testing for unit roots in autoregressive-moving average models of unknown order". Biometrika, 71, pág. 599-607.

DOCUMENTOS DE TRABAJO (1)

8901 **Mª de los Llanos Matea Rosa:** Funciones de transferencia simultáneas del índice de precios al consumo de bienes elaborados no energéticos.

8902 **Juan J. Dolado:** Cointegración: una panorámica.

8903 **Agustín Maravall:** La extracción de señales y el análisis de coyuntura.

8904 **E. Morales, A. Espasa y M. L. Rojo:** Métodos cuantitativos para el análisis de la actividad industrial española. (Publicada una edición en inglés con el mismo número.)

9001 **Jesús Albarracín y Concha Artola:** El crecimiento de los salarios y el deslizamiento salarial en el período 1981 a 1988.

9002 **Antoni Espasa, Rosa Gómez-Churruca y Javier Jareño:** Un análisis econométrico de los ingresos por turismo en la economía española.

9003 **Antoni Espasa:** Metodología para realizar el análisis de la coyuntura de un fenómeno económico. (Publicada una edición en inglés con el mismo número.)

9004 **Paloma Gómez Pastor y José Luis Pellicer Miret:** Información y documentación de las Comunidades Europeas.

9005 **Juan J. Dolado, Tim Jenkinson and Simon Sosvilla-Rivero:** Cointegration and unit roots: A survey.

9006 **Samuel Bentolila and Juan J. Dolado:** Mismatch and Internal Migration in Spain, 1962-1986.

9007 **Juan J. Dolado, John W. Galbraith and Anindya Banerjee:** Estimating euler equations with integrated series.

9008 **Antoni Espasa y Daniel Peña:** Los modelos ARIMA, el estado de equilibrio en variables económicas y su estimación. (Publicada una edición en inglés con el mismo número.)

9009 **Juan J. Dolado and José Viñals:** Macroeconomic policy, external targets and constraints: the case of Spain.

9010 **Anindya Banerjee, Juan J. Dolado and John W. Galbraith:** Recursive and sequential tests for unit roots and structural breaks in long annual GNP series.

9011 **Pedro Martínez Méndez:** Nuevos datos sobre la evolución de la peseta entre 1900 y 1936. Información complementaria.

9101 **Javier Valles:** Estimation of a growth model with adjustment costs in presence of unobservable shocks.

9102 **Javier Valles:** Aggregate investment in a growth model with adjustment costs.

9103 **Juan J. Dolado:** Asymptotic distribution theory for econometric estimation with integrated processes: a guide.

9104 **José Luis Escrivá y José Luis Malo de Molina:** La instrumentación de la política monetaria española en el marco de la integración europea. (Publicada una edición en inglés con el mismo número.)

9105 **Isabel Argimón y Jesús Briones:** Un modelo de simulación de la carga de la deuda del Estado.

9106 **Juan Ayuso:** Los efectos de la entrada de la peseta en el SME sobre la volatilidad de las variables financieras españolas. (Publicada una edición en inglés con el mismo número.)

9107 **Juan J. Dolado y José Luis Escrivá:** La demanda de dinero en España: definiciones amplias de liquidez. (Publicada una edición en inglés con el mismo número.)

9108 **Fernando C. Ballabriga:** Instrumentación de la metodología VAR.

9109 **Soledad Núñez:** Los mercados derivados de la deuda pública en España: marco institucional y funcionamiento.

9110 **Isabel Argimón y José Mª Roldán:** Ahorro, inversión y movilidad internacional del capital en los países de la CE. (Publicada una edición en inglés con el mismo número.)

9111 **José Luis Escrivá y Román Santos:** Un estudio del cambio de régimen en la variable instrumental del control monetario en España. (Publicada una edición en inglés con el mismo número.)

9112 **Carlos Chuliá:** El crédito interempresarial. Una manifestación de la desintermediación financiera.

9113 **Ignacio Hernando y Javier Vallés:** Inversión y restricciones financieras: evidencia en las empresas manufactureras españolas.

9114 **Miguel Sebastián:** Un análisis estructural de las exportaciones e importaciones españolas: evaluación del período 1989-91 y perspectivas a medio plazo.

9115 **Pedro Martínez Méndez:** Intereses y resultados en pesetas constantes.

9116 **Ana R. de Lamo y Juan J. Dolado:** Un modelo del mercado de trabajo y la restricción de oferta en la economía española.

9117 **Juan Luis Vega:** Tests de raíces unitarias: aplicación a series de la economía española y al análisis de la velocidad de circulación del dinero (1964-1990).

9118 **Javier Jareño y Juan Carlos Delrieu:** La circulación fiduciaria en España: distorsiones en su evolución.

9119 **Juan Ayuso Huertas:** Intervenciones esterilizadas en el mercado de la peseta: 1978-1991.

9120 **Juan Ayuso, Juan J. Dolado y Simón Sosvilla-Rivero:** Eficiencia en el mercado a plazo de la peseta.

9121 **José M. González-Páramo, José M. Roldán y Miguel Sebastián:** Issues on Fiscal Policy in Spain.

9201 **Pedro Martínez Méndez:** Tipos de interés, impuestos e inflación.

9202 **Víctor García-Vaquero:** Los fondos de inversión en España.

9203 **César Alonso y Samuel Bentolila:** La relación entre la inversión y la «Q de Tobin» en las empresas industriales españolas. (Publicada una edición en inglés con el mismo número.)

9204 **Cristina Mazón:** Márgenes de beneficio, eficiencia y poder de mercado en las empresas españolas.

9205 **Cristina Mazón:** El margen precio-coste marginal en la encuesta industrial: 1978-1988.

9206 **Fernando Restoy:** Intertemporal substitution, risk aversion and short term interest rates.

9207 **Fernando Restoy:** Optimal portfolio policies under time-dependent returns.

9208 **Fernando Restoy and Georg Michael Rockinger:** Investment incentives in endogenously growing economies.

9209 **José M. González-Páramo, José M. Roldán y Miguel Sebastián:** Cuestiones sobre política fiscal en España.

9210 **Angel Serrat Tubert:** Riesgo, especulación y cobertura en un mercado de futuros dinámico.

9211 **Soledad Núñez Ramos:** Fras, futuros y opciones sobre el MIBOR.

9212 **Federico J. Sáez:** El funcionamiento del mercado de deuda pública anotada en España.

9213 **Javier Santillán:** La idoneidad y asignación del ahorro mundial.

9214 **María de los Llanos Matea:** Contrastes de raíces unitarias para series mensuales. Una aplicación al IPC.

(1) Los Documentos de Trabajo anteriores a 1989 figuran en el catálogo de publicaciones del Banco de España.

Información: Banco de España
Sección de Publicaciones. Negociado de Distribución y Gestión
Teléfono: 338 51 80
Alcalá, 50. 28014 Madrid