Tampereen yliopisto

Joni Rintala

Lukion oppikirjojen lukujono- ja summatehtävät matemaattisen osaamisen ja tiedon kategorioissa

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Pro gradu -tutkielma
Huhtikuu 2020

Tiivistelmä

Joni Rintala: Lukion oppikirjojen lukujono- ja summatehtävät matemaattisen osaamisen ja tiedon kategorioissa
Pro gradu -tutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Huhtikuu 2020

Tutkielma koostuu kahdesta osasta. Tutkielmassa tarkastellaan ensin lukujonoja, sarjoja ja summia teoreettisista lähtökohdista ja tämän jälkeen siirrytään käsittelemään empiirisesti lukion oppikirjojen lukujonoihin ja summiin liittyvissä tehtävissä vaadittua matemaattista osaamista ja tietoa.

Teoreettinen tarkastelu tuo esille lukujonojen, sarjojen ja summien perusominaisuudet sekä sarjojen suppenemisen ja hajaantumisen käsitteet. Tutkielmassa esitellään lukiostakin tutut geometrinen ja aritmeettinen lukujono sekä näiden summat että näiden kaavojen teoreettiset perusteet. Suppenemisen käsitettä käytetään Taylorin lauseen ja Binomilauseen todistuksissa, jotka myös käsitellään tutkielman teoreettisessa osuudessa. Teoreettinen osuus tuo esille geometrisen summan Taylorin sarjojen erikoistapauksena ja lisäksi näyttää joitain geometrisen ja aritmeettisen summan talousmatematiikan sovelluksia kuten tasaerälainan tasaerän laskemisen kaavan.

Empiirisessä osuudessa tutkitaan lukion matematiikan oppikirjojen lukujono- ja summatehtävissä vaadittua matemaattista osaamista ja tietoa. Tähän tarkoitukseen muodostetaan Wilsonin taksonomian ja David R. Krathwolin uudistetun Bloomin taksonomian perusteella uudenlainen luokittelumalli, joka ottaa huomioon myös matemaattisen osaamisen ja tiedon kategorioihin luokiteltujen tehtävien prosentuaaliset frekvenssit kaikista tehtävistä tehdyistä havainnoista. Tämän jälkeen vertaillaan kaavioita, jotka on muodostettu jokaiselle kirjalle erikseen ja tutkitaan millaisia samankaltaisuuksia ja eroja kirjoissa ja niitä vastaavissa kursseissa on tehtävien luokitteluissa matemaattisen osaamisen ja tiedon kategorioihin sekä millaisia yhteyksiä tiedon ja osaamisen kategorioilla on keskenään sisällöllisesti ja määrällisesti. Matemaattisen osaamisen ja tiedon kategoria on tilastollisena muuttujana luokitteluasteikoltaan sanallinen, joten käytetään kaavioiden keskilukuna moodia ja hajontalukuna variaatiosuhdetta.

Avainsanat: matemaattinen osaaminen, matemaattinen tieto, geometrinen summa, Taylorin lause, kategoria

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

Sisältö

1 Johdanto

Tämä Pro gradu -tutkielma koostuu kahdesta osasta. Tutkielman alussa on lukujonojen, sarjojen ja summien matemaattiseen teoriaan keskittyvä osa. Tämän jälkeen siirrytään tutkielman empiiriseen osaan, jossa tutkitaan lukion matematiikan kirjojen lukujonoihin ja summiin liittyvissä tehtävissä vaadittavaa matemaattista osaamista ja tietoa, erityisesti MAY1 -kurssia ja MAB6 -kurssia vastaavista kirjoista.

Tutkielman teoreettisen osan tarkoituksena on tuoda esille lukiossa käsiteltävien lukujonojen ja summien matemaattista teoriaa hieman syvemmin kuin lukiossa käsitellään. Teoriassa esitellään lukujonojen peruskäsitteet, jonka jälkeen määritellään joitakin lukiostakin tuttuja lukujonoja. Teoriasta käy selväksi lukujonojen ja sarjojen yhteys, kun sarja on äärettömän lukujonon kaikkien termien summa.

Esitellään geometrisen ja aritmeettisen summan käsitteet alussa määriteltyjen geometrisen ja aritmeettisen lukujonon käsitteiden avulla ja näytetään, miten geometrisen ja aritmeettisen summan lausekkeet muodostetaan summanotaatiosta.

Sarjojen suppenemisen ja hajaantumisen käsitteet kuuluvat myös tutkielman teoreettiseen osuuteen ja näiden osoittamisen apuvälineeksi esitellään joitakin menetelmiä kuten majoranttiperiaate ja hajaantumistarkastin. Sarjan suppenemisen käsite on hyödyllinen todistettaessa esimerkiksi Taylorin lausetta ja Binomilausetta. Taylorin lause, Binomilause ja Binomisarjat esitellään tutkielmassa teoreettisina käsitteinä, mutta tuodaan myös esille niiden teknisiä ja teoreettisia sovelluksia funktion approksimoinnin ja pinta-alojen laskemisen apuvälineenä.

Teoreettisessa osassa tuodaan vielä esille, että geometrinen summa on itse asiassa Taylorin sarjojen erikoistapaus. Toisaalta näytetään, geometristen ja aritmeettisten summien soveltuminen talousmatematiikan tehtävien ratkaisemiseen, sekä joitain geometrisen ja aritmeettisen summan avulla muodostettuja tai johdettuja talousmatemaattisia kaavoja kuten annuiteettilainan tasaerän laskentakaava, tasalyhenteisen lainan maksusuoritusten laskentakaava ja koronkoron sekä diskonttauksen laskentaperiaate.

Tutkielman empiirisessä osassa tutkitaan millaista matemaattista osaamista ja matemaattista tietoa vaaditaan lukion matematiikan lukujonoihin ja summiin liittyvien tehtävien ratkaisemisessa. Matemaattisesta osaamisesta ja matemaattisesta tietämisestä on muodostettu useita teorioita. Tässä tutkielmassa näitä käsitteitä lähestytään Wilsonin taksonomian ja David R. Krathwolin uudistetun Bloomin taksonomian pohjalta. Näiden pohjalta muodostetaan uudenlainen tehtävissä vaadittavan matemaattisen osaamisen ja matemaattisen tiedon luokitteluun soveltuva malli, joka ottaa myös huomioon tiettyä osaamista ja tietoa vaativien tehtävien prosentuaaliset frekvenssit kaikista tehtävistä tehdyistä havainnoista.

Empiirisessä osuudessa tutkittavaksi valikoitui lopulta neljä lukion matematiikan kirjaa Otavan ja Sanoma Pron kirjasarjoista. Molemmista kirjasarjoista toinen kirja vastaa lukion matematiikan yhteistä kurssia MAY1 ja toinen kirja vastaa lyhyen matematiikan talousmatematiikan kurssia MAB6. Näistä kirjoista valittiin ne kappaleet, joissa esiintyy lukujonoihin ja summiin liittyviä tehtäviä. Kappaleita, joissa esiintyi hyvin vähän lukujonoihin ja summiin liittyviä tehtäviä ei otettu mukaan tutkimukseen.

Tämän jälkeen luokiteltiin näiden kappaleiden tehtävät niissä vaaditun matemaattisen osaamisen ja matemaattisen tiedon kategorioihin. Luokittelu tehtiin jokaiselle kirjalle erikseen ja kirjassa jokaiseen tiettyyn vaaditun matemaattisen osaamisen ja tiedon kategoriaan luokiteltujen tehtävähavaintojen lukumäärää verrattiin kirjan kaikkien havaintojen lukumäärään. Tällöin saatiin prosentuaaliset frekvenssit, miten suuri osuus kirjan tehtävistä luokiteltiin kuhunkin vaaditun matemaattisen osaamisen ja tiedon kategoriaan.

Tarkoituksena oli saada selville, millaisia tehtäviä vaaditun matemaattisen osaamisen tai matemaattisen tiedon suhteen kirjoissa on, ja kuinka suuri osuus tehtävistä kuuluu kuhunkin kategoriaan. Kullekin kirjalle muodostettiin kaavio, jossa näkyy tehtävien prosentuaaliset osuudet kussakin kategoriassa. Tämän jälkeen vertailtiin millaisia yhteyksiä tiedon ja osaamisen kategorioilla on keskenään sekä millaisia samankaltaisuuksia tai eroja on eri kirjojen tai kurssien välillä tehtävien jakautumisessa matemaattisen osaamisen ja tiedon kategorioihin. Pohdittiin myös prosentuaalisten osuuksien erojen merkitsevyyttä ja mistä ne mahdollisesti johtuvat. Matemaattisen osaamisen ja tiedon kategoria on tilastollisena muuttujana luokitteluasteikoltaan sanallinen, joten käytetään kaavioiden keskilukuna moodia ja hajontalukuna variaatiosuhdetta.

2 Lukujonoja ja sarjoja

Tarkastellaan ensin joitakin tunnettuja lukujonoja, sarjoja ja summia. Lukujonojen sekä sarjojen suppenemisen käsitteiden kautta saadaan käyttöön menetelmiä, joilla voidaan osoittaa sarjan suppeneminen johonkin äärelliseen raja-arvoon tai sarjan hajaantuminen. On tärkeää erottaa sarjan ja summan käsitteet toisistaan sekä ymmärtää, että summat voidaan nähdä sarjojen rajoittumina. Myöhemmin Taylorin sarjojen yhteydessä voidaan mahdollisesti osoittaa, esittääkö jokin funktio tiettyä sarjaa. Tämän osoittamisessa sarjan suppenemisen käsite on tärkeässä osassa.

2.1 Lukujonoja

Määritellään ensin lukujonojen perusominaisuudet. [6, s. 23]

Määritelmä 2.1. *Lukujono* $\{a_k\}_{k=0}^{n}$ on lukujen

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

muodostama jono, missä $a_k \in \mathbb{R}$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Joissain yhteyksissä oletetaan, että indeksointi alkaa luvusta 1, jolloin tämä yleensä selviää asiayhteydestä tai määritellään erikseen. Mikäli $n \to \infty$, lukujono on *ääretön* ja merkitään

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$$

Lukujonoa

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \dots,$$

missä $n_1, n_2, \dots \in \mathbb{N}$ ja $n_1 < n_2 < \dots$ sanotaan lukujonon $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ *osajonoksi*

Esimerkki 2.2. Lukujonon $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ osajono voi olla esimerkiksi jono $\{a_k\}_{k=1}^{3}$, jota vastaa jono

$$a_1, a_2, a_3.$$

Esimerkki 2.3. Lukujonon $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ osajono voi olla myös esimerkiksi jono

$$a_1, a_3, a_5, \dots.$$

Esimerkin 2.3 lukujono on ääretön lukujono, vaikka se onkin osajono. Tarkastellaan seuraavaksi joitain tunnettuja lukujonoja. [7, s. 35-36]

Määritelmä 2.4. Lukujonon $\{a_k\}_{k=1}^{n}$, missä $a_k = a_1 + (k-1)d$, $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$ ja $d = a_k - a_{k-1}$, sanotaan olevan *aritmeettinen lukujono*.

Aritmeetisessa lukujonossa kahden edellisen termin erotus d on vakio.

Määritelmä 2.5. Lukujonoa $\{a_k\}_{k=1}^{n}$, missä $a_k = a_1 q^{k-1}$, $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$ ja $q = \frac{a_k}{a_{k-1}}$, kutsutaan *geometriseksi lukujonoksi*.

Geometrisessa lukujonossa kahden peräkkäisen termin osamäärä q pysyy vakiona. Lukujono määritellään usein rekursiivisesti, jolloin lukujonosta annetaan ensimmäiset jäsenet ja määritellän yleinen jäsen. Seuraava lukujono on rekursiivisesti määritelty [16, s. 610].

Määritelmä 2.6. Lukujonossa $\{a_k\}_{k=0}^{n}$ kaksi ensimmäistä jäsentä ovat $a_0 = 1$ ja $a_1 = 1$. Yleinen jäsen $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$, kun $k \in \{2, 3, 4, \ldots\}$. Tätä lukujonoa kutsutaan *Fibonaccin lukujonoksi*.

Fibonaccin lukujonossa kaksi ensimmäistä jäsentä on annettu. Lukujonon muut jäsenet saadaan kahden edellisen jäsenen summana.

2.2 Summat ja sarjat

Lukujonon $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ *summaa* merkitään seuraavasti

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = S_n.$$

Summan indekseinä voidaan käyttää, mitä tahansa kirjaimia. Yllä oleva summa on *äärellinen*. Mikäli lukujonossa, josta summa muodostetaan on äärettömän monta termiä, tilannetta voidaan lähteä tarkastelemaan seuraavasti *osasummien* S_n kautta, jolloin

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{k=1}^{1} = a_1 \\
S_2 &= \sum_{k=1}^{2} = a_1 + a_2 \\
S_3 &= \sum_{k=1}^{3} = a_1 + a_2 + a_3 \\
&\ldots \\
S_n &= \sum_{k=1}^{n} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Määritelmä 2.7. Jonoa $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ vastaavaa osasummien jonoa $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ kutsutaan *sarjaksi* ja merkitään

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots .$$

Sarjassa on siis laskettu äärettömän lukujonon kaikki termit yhteen [16, s. 632-635]. Tarkastellaan aritmeettisesta ja geometrisesta lukujonosta muodostettuja summia ja sarjoja [7, s. 35-36].

Määritelmä 2.8. Aritmeettista lukujonoa vastaa sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_1 + (k-1)d),$$

jota kutsutaan *aritmeettiseksi sarjaksi.*

Aritmeettisen sarjan osasumma on *aritmeettinen summa.*

Lause 2.9. *Aritmeettinen summa*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(a_1 + (k-1)d),$$

voidaan kirjoittaa muodossa

$$S_n = n\frac{a_1 + a_n}{2}.$$

Todistus. Todistetaan lause induktiolla. Valitaan $n = 1$, jolloin saadaan $a_1 = a_1$, joten perusaskel on osoitettu. Oletetaan sitten, että lause on tosi n:lle. Osoitetaan sitten induktioaskeleella, että lause on tosi $(n+1)$:lle. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1} &= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + a_{n+1} \\
&= n\frac{a_1 + a_n}{2} + a_{n+1} \\
&= n\frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2} + a_1 + (n+1-1)d \\
&= \frac{2na_1 + n^2 d - nd}{2} + a_1 + nd \\
&= \frac{2na_1}{2} + a_1 + \frac{n^2 d - nd + 2nd}{2} \\
&= a_1(n+1) + \frac{n(n+1)}{2}d \\
&= (n+1)\left(a_1 + \frac{nd}{2}\right) \\
&= (n+1)\left(\frac{2a_1 + nd}{2}\right) \\
&= (n+1)\left(\frac{a_1 + (a_1 + (n+1-1)d}{2}\right) \\
&= (n+1)\left(\frac{a_1 + a_{n+1}}{2}\right).
\end{aligned}$$

Väite on siis tosi myös $(n+1)$:lle, joten väite on tosi. □

Määritelmä 2.10. Geometrista lukujonoa vastaa sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1},$$

jota kutsutaan *geometriseksi sarjaksi.*

Geometrisen sarjan osasummaa kutsutaan *geometriseksi summaksi*.

Lause 2.11. *Geometrinen summa*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1}$$

voidaan kirjoittaa muodossa

$$S_n = a_1 \frac{(1-q^n)}{1-q}, \quad q \neq 1.$$

Todistus. Lisätään toisella rivillä yhtälön oikealle puolelle termit $a_1 q^n$ ja $-a_1 q^n$.

$$\begin{aligned}
&S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} \\
\Rightarrow &S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n - a_1 q^n, \\
\Rightarrow &S_n = S_n q + a_1 - a_1 q^n \\
\Rightarrow &S_n - S_n q = a_1(1-q^n) \\
\Rightarrow &S_n(1-q) = a_1(1-q^n) \\
\Rightarrow &S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}.
\end{aligned}$$

Termien yhdistämisen ja uudelleenjärjestelyn jälkeen saadaan päättelyketjun viimeisellä rivillä oleva geometrisen summan kaava. □

2.3 Sarjojen suppeneminen ja hajaantuminen

Sarjan suppenemisen tai hajaantumisen selvittämien on hyödyllistä silloin, kun halutaan tietää, mitä arvoa sarjan arvo lähestyy tai onko tällaista arvoa olemassa ollenkaan. Suppeneminen tai hajaantuminen on hyödyllistä selvittää myös silloin, kun halutaan selvittää esittääkö sarja jotain funktiota. Käsitellään ensin *lukujonon raja-arvon* käsite [16, s. 595-592].

Määritelmä 2.12. (Lukujonon raja-arvo) Jos jokaista lukua $\epsilon > 0$ on olemassa positiivinen kokonaisluku K siten että, jos $n \geq K$, niin $|a_n - L| < \epsilon$, kirjoitetaan

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L,$$

ja lukujonolla $\{a_n\}$ sanotaan olevan raja-arvo L.

Esimerkki 2.13. Lukujonolle $\{a_n\}$, missä $a_n = a_1 \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$ ja $a_1 > 0$, pätee

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

Todistus. Valitaan nyt jokin mielivaltainen $\epsilon > 0$ ja positiivinen kokonaisluku K siten, että $K > lg\frac{a_1}{\epsilon} + 1$. Tällöin

$$\begin{aligned} K-1 &> lg\frac{a_1}{\epsilon} \\ (K-1)lg10 &> lg\frac{a_1}{\epsilon} \\ lg10^{K-1} &> lg\frac{a_1}{\epsilon} \\ 10^{K-1} &> \frac{a_1}{\epsilon} \\ \epsilon &> a_1\left(\frac{1}{10}\right)^{K-1}. \end{aligned}$$

Valitaan nyt $n \geq K$, jolloin

$$\begin{aligned} |a_n - 0| &= a_n \\ &= a_1\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \\ &< a_1\left(\frac{1}{10}\right)^{K-1} \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Siis lukujonolla a_n on raja arvo 0. □

Määritelmä 2.14. Jonon, jolla on raja-arvo, sanotaan olevan *suppeneva*. Mikäli raja-arvoa ei ole, jonon sanotaan olevan *hajaantuva*.

Huomautus. [3, s. 89] Oletetaan seuraavissa tarkasteluissa tunnetuksi, että geometrinen lukujono $a_k = q^k$

i. lähestyy raja-arvoa nolla, kun $|q| < 1$

ii. lähestyy raja-arvoa 1, kun $q = 1$

iii. hajaantuu muulloin.

Myös sarja voivat supeta tai hajaantua. Määritellään seuraavaksi perusominaisuudet sarjan suppenemisen ja hajaantumisen käsitteille.[16, s. 634-635] [3]

Määritelmä 2.15. Jos sarjan osasummien jono $\{S_n\}$ suppenee äärelliseen raja-arvoon S, toisin sanoen jonon $\{S_n\}$ termille S_n pätee

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

niin kirjoitetaan

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = S$$

ja sanotaan, että *sarja*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

suppenee kohti raja-arvoa S. Tällöin sanotaan, että S on *sarjan summa*. Jos osasummien jono hajaantuu, sanotaan, että *sarja*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

hajaantuu

Huomautus. Sarjan osasummien jono on lukujono, joten sen suppeneminen voidaan osoittaa esimerkiksi lukujonon raja-arvon määritelmän 2.12 perusteella.

Seuraavan lauseen avulla voidaan osoittaa sarjan hajaantuminen. [3, s. 88-89]

Lause 2.16. *(Hajaantumistarkastin). Jos sarja* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *suppenee, niin* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *Täten, jos* $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$*, niin sarja* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hajaantuu.*

Todistus. Olkoon $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Koska sarja suppenee, sen osasummien lukujono suppenee raja-arvoon S, jolloin osasummat S_n ja S_{n-1} lähestyvät samaa raja-arvoa. Toisaalta selvästi $a_n = S_n - S_{n-1}$, joten

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$

□

Nyt siis jos $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, sitä vastaava sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ei voi supeta, joten sen täytyy hajaantua. Hajaantumistarkastimella voidaan osoittaa ainoastaan sarjan hajaantuminen. Se, että $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ei ole riittävä ehto sille, että sarja suppenee vaan siitä, että sarja suppenee seuraa $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Esimerkki 2.17. [3, s. 89] Koska huomautuksen 2.3 mukaiset asiat oletetaan tunnetuksi voidaan sanoa, kun $|q| \geq 1$, että $\lim_{k\to\infty} q^k \neq 0$. Tällöin hajaantumistarkastimen nojalla geometrinen sarja$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ hajaantuu. Kun $|q| < 1$, sarjan $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ osasumma saadaan lauseen 2.11 mukaan, jolloin

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Nyt, kun $n \to \infty$, niin $q^{n+1} \to 0$, joten sarjan osasummien jonon termi S_n lähestyy äärellistä raja-arvoa $\frac{1}{1-q}$.

Siis määritelmän 2.15 mukaisesti sarja suppenee kohti raja-arvoa $\frac{1}{1-q}$ ja

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Sarjoille on olemassa erilaisia suppenemistarkastimia, joilla voidaan osoittaa sarjan suppeneminen. Yksi tällainen on seuraava tarkastin.

Lause 2.18. *(Majoranttiperiaate). Olkoon $K > 0$, jokin vakio. Oletetaan, että sarjojen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ termit toteuttavat jostakin rajasta n_1 alkaen epäyhtälön $|a_n| \leq Kb_n$ (selvästi $b_n \geq 0$, kun $n \geq n_1$). Tällöin*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad suppenee \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad suppenee.$$

Todistus. Sivuutetaan tässä yhteydessä. [3, s. 96] □

Seuraavilla tarkastimilla voidaan osoittaa sekä sarjan suppeneminen että hajaantuminen. Näitä voidaan käyttää esimerkiksi geometriselle sarjalle, mutta myös muille sarjoille.

Lause 2.19. *(Osamäärätarkastin)*

i. Oletetaan, että on olemassa vakio L, $0 < L < 1$ ja luku $n_1 \in \mathbb{N}$ siten, että sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, missä $a_n \neq 0$, termit toteuttavat epäyhtälön

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq L \quad aina, kun \quad n \geq n_1.$$

Tällöin kyseinen sarja suppenee.

ii. Oletetaan, että on olemassa vakio $L \geq 1$ ja luku $n_1 \in \mathbb{N}$ siten, että sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, missä $a_n \neq 0$, termit toteuttavat epäyhtälön

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq L \quad aina, kun \quad n \geq n_1.$$

Tällöin kyseinen sarja hajaantuu.

Todistus. [3, s. 99] Merkitään kummassakin tapauksessa $A = |a_{n_1}|$. Tällöin $A > 0$. Tapauksessa i. saadaan induktiolla, että $|a_{n_1+k}| \leq AL^k$ aina, kun $k \geq 0$. Näin ollen suppeneva geometrinen sarja $\sum_{k=0}^{\infty} AL^k$ majoroi alkuperäisen sarjan jäännöstermiä $\sum_{n \geq n_1} a_n$. Alkuperäinen sarja suppenee tällöin majoranttiperiaatteen nojalla.

Tapauksessa ii. nähdään induktiolla, että $|a_{n_1+k}| \geq AL^k$. Täten $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ja alkuperäienn sarja hajaantuu hajaantumistarkastimen nojalla. □

Voidaan käyttää myös osamäärätarkastinta, jossa tarkastellaan osamäärän raja-arvoa.

Lause 2.20. *(Osamäärätarkastin) Olkoon a_n ja a_{n+1} termejä sarjassa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ja $a_n \neq 0$. Jos on voimassa*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L,$$

niin tällöin jos $0 < L < 1$, sarja suppenee, ja jos $L > 1$, sarja hajaantuu.

Todistus. [3, s. 99] Olkoon $K = (L+1)/2$ lukujen L ja 1 keskiarvo. Merkitään $\epsilon = |K - L|$. Jos $L < 1$, niin tällöin $L < K < 1$, joten oletuksen perusteella jostakin luvusta $n_1 = n(\epsilon)$ alkaen $|a_{n+1}/a_n| \leq K$, mikä vastaa osamäärätarkastimen ensimmäisen version i. kohtaa. Täten sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppeneminen seuraa osamäärätarkastimen ensimmäisen version nojalla.

Jos $L > 1$, niin tällöin $L > K > 1$, joten oletuksen perusteella jostakin luvusta $n_1 = n(\epsilon)$ alkaen $|a_{n+1}/a_n| \geq K$, mikä vastaa osamäärätarkastimen ensimmäisen version ii. kohtaa. Sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hajaantuminen seuraa siten osamäärätarkastimen ensimmäisen version nojalla. □

On huomattava, että lause 2.20 ei vastaa siihen, mitä tapahtuu, kun $L = 1$. Seuraavassa alaluvussa Taylorin lauseella osoitetaan millainen funktio esittää erästä geometrista sarjaa. Verrattuna esimerkkiin 2.17 on huomattava, että Taylorin sarjojen yhteydessä käsitellään funktiosarjoja, joten esimerkissä 2.17 oleva ei tarkoita aivan samaa kuin Taylorin lauseella saatu tulos.

2.4 Taylorin sarjat

Taylorin sarjat ovat *funktiosarjoja*. Funktiosarjojen termit ovat lukujen sijaan jollakin välillä I määriteltyjä funktioita. Funktiosarjoja kutsutaan myös sarjoiksi. Funktiosarjat suppenevat seuraavan määritelmän mukaisesti.

Määritelmä 2.21. Olkoon I reaalilukuväli. Funktiosta $f_k : I \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ muodostettu funktiosarja

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

suppenee pisteittäin joukossa I kohti summafunktiota $S(x)$, jos jokaisessa pisteessä $x \in I$ lasketusta funktioiden arvoista muodostettu lukujen sarja $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ suppenee kohti raja-arvoa $S(x)$. Osasummalle käytetään merkintää

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x).$$

Taylorin ja Maclaurinin sarjakehitelmien avulla voidaan muodostaa arvioita funktioille sekä niiden derivaatoille ja integraaleille. Joissan tapauksissa ei tarvitse tyytyä pelkästään arvioon, vaan edellä mainitut sarjakehitelmät esittävät täsmälleen jotakin haluttua funktiota. Tarkastellaan seuraavaksi, millaisilla edellytyksillä sarjakehitelmän voidaan sanoa esittävän jotain funktiota.

Kun tutkitaan tarkemmin sarjojen taustalla olevaa teoriaa huomataan, että geometrisen summan lauseke voidaan todistaa myös Taylorin lauseen nojalla ja se on näin ollen Taylorin sarjojen erikoistapaus. Taylorin sarjoissa lähteenä on käytetty teoksia [16, s. 664-696] [3, s. 131-133].

Määritelmä 2.22. Olkoon $x \in]x_0-R, x_0+R[$ ja funktiolla $f(x)$ kaikkien kertalukujen derivaatat annetulla välillä. Tällöin sarjaa

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

kutsutaan funktion $f(x)$ *Taylorin sarjaksi* pisteessä x_0. Maclaurinin sarjat ovat Taylorin sarjojen erikoistapauksia, kun $x_0 = 0$. Sarjojen osasummia kutsutaan vastaavasti *Taylorin polynomeiksi* ja *Maclaurinin polynomeiksi*.

Lause 2.23. *(Taylorin lause) Olkoon funktio $f(x)$ välillä $I =]x_0 - R, x_0 + R[$ derivaattoineen jatkuva kertalukuun $n + 1$ asti. Tällöin välillä I*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

missä osasumma $T_n(x)$ on astetta n oleva Taylorin polynomi ja

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

on Lagrangen jäännöstermi, missä $s \in]x_0, x[$.

Todistus. Kiinnitetään $x \in I$. Jos $x = x_0$, niin $T_n(x_0) = f(x_0)$ ja väite on tosi. Muussa tapauksessa $x - x_0 \neq 0$. Nyt voidaan valita luku K siten, että

$$f(x) = T_n(x) + K(x-x_0)^{n+1}. \tag{2.1}$$

Muodostetaan muuttujan t apufunktio

$$h(t) = f(x) - \left[f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n + K(x-t)^{n+1} \right]$$

Tällöin $h(x) = 0$ ja myös $h(x_0) = 0$, koska K on valittu siten, että yhtälö (2.1) pätee. Käyttämällä oletusta ja tulon derivointikaavaa termeittäin summan sisällä huomataan, että $h(t)$ on derivoituva lukujen x ja x_0 välillä ja sen derivaatta on

$$\begin{aligned}
\frac{dh}{dt} &= -\sum_{k=0}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{f^{(k)}(t)(x-t)^k}{k!} \right) + K(n+1)(x-t)^n \\
&= -f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f^{(k+1)}(t)(x-t)^k - f^{(k)}(t)k(x-t)^{k-1}}{k!} \right) + K(n+1)(x-t)^n \\
&= -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)(x-t)^k}{k!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} + K(n+1)(x-t)^n \\
&= -\frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!}(x-t)^n + K(n+1)(x-t)^n,
\end{aligned}$$

koska muut termit kumoutuvat pareittain. Rollen lauseen ehdot ovat voimassa, joten lukujen x ja x_0 välillä on sellainen kohta $t = s$, että $h'(s) = 0$. Yhtälöstä

$$-\frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!}(x-t)^n + K(n+1)(x-t)^n = 0$$

seuraa, että

$$K = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!},$$

joten K on siis Lagrangen jäännöstermin kerroin. Rollen lauseen lupaama piste s ei ole kumpikaan välin päätepisteistä, joten $x - s \neq 0$. Väite seuraa tästä. □

Nyt jos funktion $f(x)$ kaikkien kertalukujen derivaatat hallitaan riitävän hyvin, voidaan Taylorin lauseen mukaiselle sarjalle $T_n(x) + R_n(x)$ mahdollisesti osoittaa, että pätee $R_n(x) \to 0$, kun $n \to \infty$, jolloin sarja suppenee. Tällöin, kun sarja suppenee, se myös esittää funktiota $f(x)$. Sarjan hajaantuessa ei voida sanoa, että se esittää vastaavaa funktiota. Rollen lause oletetetaan tunnetuksi Taylorin lauseen todistuksessa [16, s. 199-200].

2.4.1 Geometrinen sarja Taylorin sarjojen erikoistapaus

Tarkastellaan seuraavaksi, miten voidaan Taylorin lauseen avulla osoittaa, että funktiota

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

esittää eräs geometrinen sarja. Taylorin lauseen mukaisesti

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x),$$

missä $|x| < 1$. Kun derivoidaan termeittäin, havaitaan, että

$$f^{(k)}(x_0) = k!(1-x_0)^{-(k+1)},$$

joten

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k!(1-x_0)^{-(k+1)}}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x).$$

Kun valitaan $x_0 = 0$, saadaan

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + R_n(x).$$

Koska $|x| < 1$ havaitaan, että kun $n \to \infty$, niin $R_n(x) \to 0$, joten sarja suppenee ja siten esittää funktiota $f(x)$.

2.4.2 Korkolaskut geometrisen sarjan erikoistapaus

Talousmatematiikkassa korkolaskut on soveltamisala, johon erityisesti geometriset sarjat ja lukujonot ovat hyödyllisiä. Lähteinä tässä alaluvussa käytetty teoksia [5], [4, s. 160-175] ja [8, s. 57, 59, 71-93]. Yksinkertainen korko jollekin pääomalle voidaan laskea geometrisen lukujonon kaavaa sopivasti muokkaamalla käyttötarkoitukseen sopivaksi valitsemalla $q = 1 + \frac{p}{100}$, jolloin

$$K = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t,$$

missä K on loppupääoma, k on alkupääoma, p on vuotuinen korkoprosentti ja t on vuosien lukumäärä. Loppupääoman laskemiselle päinvastainen toimenpide on *diskonttaus*. Tällöin ei tiedetä alkupääoman suuruutta, mutta tiedetään loppupääoma, josta tarvittava alkupääoma voidaan laskea kaavalla

$$k = K\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{-t}.$$

Yksinkertaisen korkoa korolle laskun periaatetta käytetään esimerkiksi laskettaessa lainoille lyhennysten tai maksuerien suuruuksia. Näissä täytyy ottaa huomioon korkoa korolle ilmiö ja erilaisissa lainamuodoissa päädytään hieman erilaisiin lopputuloksiin. Lainaa voidaan arvioida myös muuten kuin sen lopullisen hinnan perusteella, kuten lainaan hoitamisen helppouden ja ennakoitavuuden perusteella, jolloin halvin laina ei ole aina sopivin vaihtoehto. Seuraavassa kaksi lainatyyppiä, jotka myös joissain lukion kursseissa esiintyvät. Tarkastellaan hieman tarkemmin teoriaa lainan taustalla.

Tasalyhenteinen laina

Tasalyhenteistä lainaa lyhennetään, jokaisena lainan eräpäivänä yhtä suurella summalla. Lyhennys tapahtuu aina lainan jäljellä olevasta pääomasta. Tämän lisäksi lainasta maksetaan jokaisena eräpäivänä eräpäivään mennessä kertyneen koron osuus. Maksusuoritus koostuu siis lyhennyksestä ja korosta. Tämä johtaa siihen, että aluksi koron osuus maksusuorituksesta on suurempi verrattuna lainan lyhennyksen suuruuteen kuin lainan maksamisen loppuvaiheessa. Maksusuoritus on jokaisella kerralla eri suuruinen. Seuraavassa taulukossa näytetään, miten tasalyhenteisen lainan maksusuoritukset määräytyvät.

Esimerkki 2.24. L =lainan alkupääoma, n =lyhennysten lkm, $K = \frac{L}{n}$ =lyhennyksen suuruus, p =koronmääräytymisajan korkoprosentti, L_n =lainan määrä ennen n. lyhennystä ja M_n =maksusuorituksen suuruus n. maksukerralla Koska $L = nK$, viimeisen maksuerän jälkeen $L - ((n+1) - 1)K = L - nK = 0$.

Huomataan, että jäljellä olevan lainan määrää saadaan aritmeettisen lukujonon kaavalla ja täten myös koron ja maksusuorituksen laskemisessa tarvitaan aritmeettisen lukujonon kaavaa. Tasalyhenteisen lainan maksusuoritusten summa voidaan laskea kaavalla

$$\sum_{k=1}^{n} M_k = \sum_{k=1}^{n}\left(K + L_k\frac{p}{100}\right).$$

Maksukerta	Lainaa jäljellä	Korko	Lyhennys	Maksusuoritus
1	$L_1 = L$	$L_1 \frac{p}{100}$	K	$M_1 = K + L_1 \frac{p}{100}$
2	$L_2 = L - K$	$L_2 \frac{p}{100}$	K	$M_2 = K + L_2 \frac{p}{100}$
3	$L_3 = L - 2K$	$L_3 \frac{p}{100}$	K	$M_3 = K + L_3 \frac{p}{100}$
...	...	...	...	...
n	$L_n = L - (n-1)K$	$L_n \frac{p}{100}$	K	$M_n = K + L_n \frac{p}{100}$

Esimerkki 2.25. Valitaan $L = 60000$ €, $n = 20$, jolloin $K = 3000$ €. Lisäksi $p = 3,5$ %. Nyt saadaan seuraavanlainen taulukko

Maksukerta	Lainaa jäljellä(€)	Korko(€)	Lyhennys(€)	Maksusuoritus(€)
1	60000	2100	3000	5100
2	57000	1995	3000	4995
3	54000	1890	3000	4890
...	...	...	...	...
20	3000	105	3000	3105

Huomataan, että koron osuus maksusuorituksesta, joka ei ole vakio, pienenee lainan loppua kohden ja lyhennys pysyy vakiona koko ajan. Maksusuoritus pienenee lainan loppua kohti. Viimeisen maksusuorituksen jälkeen lainaa on jäljellä 0 €.

Annuiteetti- eli tasaerälaina

Annuiteettilainaa maksetaan jokaisena lainan eräpäivänä takaisin vakiosumma eli tasaerä. Tasaerä koostuu lyhennysosuudesta ja korko-osuudesta, mutta sen laskeminen tapahtuu eri tavalla kuin tasalyhenteisessä lainassa, jotta maksusuoritukset ovat aina yhtä suuria. Myös annuiteettilainassa takaisin maksettavan koron määrä pienenee suhteessa lyhennysosuuteen laina-ajan kasvaessa, koska lainapääoma pienenee.

Tasaerälainan tasaerän suuruuden määräytyminen perustuu siihen, että lainaohjelman mukaan maksettujen tasaerien yhteinen alkuarvo lainanottohetkellä sovitun korkokannan mukaan on lainan suuruinen. Näytetään seuraavaksi, mistä annuiteettilainen tasaerä johtuu.

Esimerkki 2.26. [5] Oletetaan, että L = lainan alkuperäinen pääoma, A = annuiteetti, p = koronmääräytymisajan korkoprosentti, n = eräpäivien lkm ja L_n = lainan määrä n. annuiteetin jälkeen
Nyt lainan määrä 1. annuiteetin jälkeen on

$$L_1 = \left(1 + \frac{p}{100}\right) L - A,$$

2. annuiteetin jälkeen

$$\begin{aligned} L_2 &= \left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(\left(1 + \frac{p}{100}\right) L - A\right) - A \\ &= \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 L - \left(1 + \frac{p}{100}\right) A - A, \end{aligned}$$

ja n. annuiteetin jälkeen

$$\begin{aligned}L_n &= \left(1+\frac{p}{100}\right)\left(\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1}L-\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-2}A-\cdots-A\right)-A\\&=\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n}L-\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1}A-\cdots-\left(1+\frac{p}{100}\right)A-A.\end{aligned}$$

Kun sijoitetaan $q = 1+\frac{p}{100}$, saadaan

$$L_n = Lq^n - Aq^{n-1} - \cdots - Aq - A$$

ja koska $L_n = 0$, saadaan

$$Lq^n = Aq^{n-1} - \cdots - Aq - A.$$

Huomataan, että yhtälön oikea puoli vastaa geometrista summaa, joten

$$Lq^n = A\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Ratkaistaan tästä yhtälöstä tasaerä A, jolloin

$$A = Lq^n\frac{1-q}{1-q^n}. \tag{2.2}$$

Seuraavassa annetaan esimerkki annuiteettilainasta, jota voi verrata esimerkkiin tasalyhenteisestä lainasta.

Esimerkki 2.27. Valitaan $L = 60000$ €, $p = 3,5$ % ja $n = 20$. Lasketaan annuiteetti kaavalla (2.2), jolloin

$$A = 60000\cdot 1,035^{20}\frac{1-1,035}{1-1,035^{20}} = 4221,66460\ldots$$

Nyt lainaa maksetaan 20 kertaa annuiteetin (noin $4221,66$ €) verran, minkä jälkeen lainaa korkoineen on jäljellä 0 €.

Voidaan havaita, että tasalyhenteisestä lainasta maksetaan kokonaisuudessaan vähemmän korkoa kuin annuiteettilainasta samalla alkupääomalla, korkoprosentilla ja maksuajalla. Toisaalta annuiteettilainassa maksusuoritus on aina sama, joten sitä voi olla helpompi ennakoida.

2.5 Binomisarjat

Lähteestä riippuen on useita sarjoja, joista puhutaan binomisarjoina. Tämä johtuu siitä, että sarjassa esiintyvä eksponentti on joissain versioissa positiivinen kokonaisluku ja joissan versioissa mikä tahansa reaaliluku. Yksi lähestymistapa binomisarjoihin saadaan, kun Taylorin lauseen avulla voidaan osoittaa, että on voimassa lause 2.28. Käytetään tässä työssä lauseessa 2.28 esiintyvästä tapauksesta nimitystä *binomilause* ja myöhemmin lauseessa 2.29 esiintyvästä tapauksesta nimitystä *binomisarja*. Tässä luvussa lähteenä on käytetty kirjaa [1, s. 550-552].

Lause 2.28. *(Binomilause) Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$. Silloin*

$$\begin{aligned}(a+x)^n &= a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \cdots + nax^{n-1} + x^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k a^{n-k}.\end{aligned}$$

Todistus. Sovelletaan Taylorin lausetta 2.23. Valitaan $f(x) = (a+x)^n$ ja $x_0 = 0$. Nyt

$$\begin{aligned}f'(x) &= n(a+x)^{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!}(a+x)^{n-1}, \\ f''(x) &= n(n-1)(a+x)^{n-2} = \frac{n!}{(n-1)!}(n-1)(a+x)^{n-2}, \\ &\dots \\ f^{(k)}(x) &= n(n-1)\cdots(n-k+1)(a+x)^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!}(a+x)^{n-k}, \quad (0 \leq k \leq n).\end{aligned}$$

Havaitaan, että

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(n-n)!}(a+x)^{n-n} = n!$$

on vakio, joten $f^{(k)}(x) = 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla, jos $(k > n)$. Kun $0 \leq k \leq n$ ja $x_0 = 0$, pätee

$$f^{(k)}(x_0) = \frac{n!}{(n-k)!}(a+x_0)^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!}a^{n-k}.$$

Nyt voidaan soveltaa Taylorin lausetta, missä Lagrangen jäännöstermille pätee jollekin luvulle s, joka on lukujen 0 ja x välissä

$$\begin{aligned}(a+x)^n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k + \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!}a^{n-k}x^k + 0 \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}x^k.\end{aligned}$$

Koska $x_0 = 0$, huomataan, että kyseessä on Maclaurinin sarja funktiolle $(a+x)^n$. Nyt, kun $n \to \infty$, niin jäännöstermi $R_n(x) \to 0$, joten sarja suppenee kaikilla luvuilla x ja täten kuvaa funktiota $(a+x)^n$ kaikilla luvuilla x. □

Tarkastellaan seuraavaksi tilannetta, jossa funktion $(a+x)^r$ potenssi r on mikä tahansa reaaliluku sen sijaan, että se olisi positiivinen kokonaisluku. Yksinkertaistaaksemme tilannetta valitaan $a = 1$ ja tarkastellaan funktiota $(1+x)^r$. Yleinen tapaus seuraa yhtälön

$$\begin{aligned}(a+x)^r &= a^r \left(1 + r\frac{x}{a} + \frac{r(r-1)}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \cdots + r\left(\frac{x}{a}\right)^{r-1} + \left(\frac{x}{a}\right)^r\right) \\ &= a^r \left(1 + \frac{x}{a}\right)^r\end{aligned}$$

perusteella kaikille $a > 0$. Jos r on mikä tahansa reaaliluku ja $x > -1$, niin k:s derivaatta funktiosta $(1+x)^r$ on

$$r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)(1+x)^{r-k}, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Seuraavassa lauseessa todistetaan, että funktiota $(1+x)^r$ vastaa Maclaurinin sarja

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!} x^k,$$

mitä kutsutaan binomisarjaksi. Osoitetaan seuraavassa lauseessa, että binomisarja suppenee kohti $(1+x)^r$, jos $|x| < 1$.

Lause 2.29. *(Binomisarja) Jos $|x| < 1$ ja $r \in \mathbb{R}$, niin*

$$\begin{aligned}(1+x)^r &= 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3 + \cdots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{n!} x^n.\end{aligned}$$

Todistus. Sovelletaan osamäärätarkastinta sarjaan

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{n!} x^n,$$

jolloin

$$\begin{aligned}L &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)(r-n)}{(n+1)!} x^{n+1}}{\frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{n!} x^n} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{r-n}{n+1} x \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \left(\frac{r}{n+1} - \frac{n}{n+1} \right) x \right| \\ &= |-x| = |x| < 1,\end{aligned}$$

koska $\frac{r}{n+1} \to 0$ ja $\frac{n}{n+1} \to 1$. Siis sarja suppenee. Huomataan myös, että $f(0) = 1$. Nyt täytyy siis vielä näyttää, että $f(x) = (1+x)^r$, kun $|x| < 1$. Sarjoja voidaan derivoida termeittäin, joten $f(x)$:lle saadaan

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1} \tag{2.3}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n)}{n!} x^n. \tag{2.4}$$

Tässä n:n tilalle on sijoitettu $(n+1)$, jotta summan versiosta 2.3 saadaan versio 2.4. Kun lisätään x kertaa versio 2.3 versioon 2.4, saadaan

$$\begin{aligned}(1+x)f'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n)}{n!}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-(n-1))}{(n-1)!}x^n \\ &= r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n[(r-n)+n] \\ &= rf(x).\end{aligned}$$

Käytetään funktioiden osamäärän derivoimissääntöä seuraavan yhtälön vasempaan puoleen, jolloin saadaan

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{(1+x)^r} = \frac{(1+x)^r f'(x) - r(1+x)^{r-1}f(x)}{(1+x)^{2r}}. \tag{2.5}$$

Kun sijoitetaan yhtälöön 2.5 $(1+x)f'(x) = rf(x)$, saadaan

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{(1+x)^r} = \frac{(1+x)^r f'(x) - (1+x)^r f'(x)}{(1+x)^{2r}} = 0$$

kaikilla x, joilla $|x| < 1$. Koska vakion derivaatta on nolla, $f(x)/(1+x)^r$ on vakio tällä välillä. Lisäksi tiedetään, että $f(0) = 1$, joten

$$\frac{f(0)}{(1+0)^r} = 1 = \frac{f(x)}{(1+x)^r},$$

josta $f(x) = (1+x)^r$. □

Binomisarjan esitti ensimmäisen kerran julkisuudessa Isaac Newton vuonna 1676. Tällöin suppenemistarkasteluja ei vielä käytetty, mutta Newtonin binomisarja antoi mahdollisuuden tutkia funktioita äärettömien prosessien avulla. Newton ei päätynyt binomisarjaan yleistämällä binomilausetta vaan tutkimalla Wallisin määrittämien käyrien $y = (1-x^2)^{n/2}$ alle jääviä pinta-aloja, jotka parillisilla n:n arvoilla ovat x:n polynomeja. [12]

3 Lukujonot ja summat LOPS 2015 ja 2019

Tarkastellaan, miten lukujonot ja summat asettuvat lukion matematiikan kursseille Lukion opetussuunnitelman perusteiden 2015 ja 2019 (LOPS 2015 ja 2019) mukaisesti. Tämä on oleellista siksi, että voidaan löytää lukiokurssien oppimateriaaleista sellaiset aihealueet, jotka erityisesti sisältävät lukujono ja summatehtäviä. Näiden tehtävien rakennetta tutkitaan tutkielman myöhemmissä vaiheissa. Tarkastellaan myös hieman minkälaisia muutoksia LOPS 2015 ja LOPS 2019 on toisiinsa verrattuna. Lähteenä luvussa 3 käytetty verkkojulkaisuja [13] ja [14].

3.1 Matematiikan yhteinen kurssi

Lukion opetussuunnitelman perusteet muuttuivat vuonna 2015 ja samalla myös matematiikan kurssien rakenne ja sisällöt muuttuivat. Lukioon tuli ensimmäiseksi matematiikan kurssiksi kaikille pakollinen yhteinen matematiikan kurssi MAY1, jonka jälkeen jatketaan pitkään matematiikkaan tai lyhyeen matematiikkaan.

Opetussuunnitelman perusteiden 2015 mukaan lukujonot ja summat käsitellään yhteisellä matematiikan kurssilla MAY1 ja niitä ei enää esiinny samassa laajuudessa myöhemmillä matematiikan kursseilla. Lukujonoja ja summia sovelletaan monilla myöhemmillä lukion kursseilla. Talousmatematiikan kurssilla niitä käytetään esimerkiksi korko-, laina- ja rahastotehtävissä.

Opetussuunnitelman perusteissa 2019 matematiikan yhteinen kurssi on säilynyt. Siis, se on edelleen kaikille pakollinen yhteinen kurssi, jonka jälkeen suuntaudutaan pitkään tai lyhyeen matematiikkaan. Erona vuoden 2015 opetussuunnitelmaan, lukujonot ja summat eivät enää esiinny yhteisellä matematiikan kurssilla, vaan niiden käsittely on siirretty myöhemmille matematiikan kursseille.

3.2 Pitkä matematiikka

Lukion opetussuunnitelman perusteiden 2015 mukaan lukujonoja ja summia ei enää mainita pitkän matematiikan kurssien keskeisissä sisällöissä opetussuunnitelmassa MAY1 -kurssin jälkeen. Kuitenkin, lukujonot ja summat voivat läheisesti liittyä esimerkiksi, jonkin luonnonilmiön kuten populaation kasvun nopeuden kuvaamiseen, joten lukujonojen ja summien osaaminen on oleellista myös myöhemmillä kursseilla. Pitkän matematiikan kurssilla MAA12, Algoritmit matematiikassa, käsitellään esimerkiksi erilaisia funktion alle jäävän pinta-alan arvioimismenetelmiä, missä lukujono- ja summatehtäviä saattaa ilmetä. [13] Myös määrätyn integraalin teoreettisessa määrittelyssä ja tämän käsitteen ymmärtämisessä voi tulla kysymykseen lukujonojen ja summan käsitteiden ymmärtäminen.

Lukujonot ja summat ovat siirtyneet MAY1 kurssilta käsiteltäviksi myöhemmille matematiikan kursseille Lukion opetussuunnitelman perusteiden 2019 mukaan. Pitkään matematiikkaan on uudessa 2019 opetussuunnitelmassa tullut talousmatematiikan kurssi MAA9, jolla käsitellään lukujonoja sekä summia. Erityisesti aritmeettinen ja geometrinen lukujono sekä niiden summat kuuluvat kurssin sisältöön. Lukujonojen ja summien ominaisuuksia sovelletaan esimerkiksi korkolaskuissa ja nykyarvon määrittämisessä. Edelleen myöskään LOPS 2019 mukaan aritmeettisia ja geometrisia lukujonoja ja summia tai muitakaan lukujonoja ja summia ei mainita muiden pitkän matematiikan kurssien keskeisissä sisällöissä, mutta lukujonoja saatetaan kuitenkin soveltaa kurssien tehtävissä tästä huolimatta. [14]

3.3 Lyhyt matematiikka

MAY1 -kurssin jälkeen Lukion opetussuunnitelman perusteiden 2015 perusteella lyhyessä matematiikassa lukujonoja ja summia käsitellään soveltaen esimerkiksi talousmatematiikan kurssilla MAB6. Talousmatematiikan kurssilla lukujonoja ja summia sovelletaan esimerkiksi korko-, indeksi-, laina-, kustannus, vero- ja rahoituslaskuissa. Tilasto ja todennäköisyys kursseilla summat ovat merkittävässä osassa, kun lasketaan keskihajontoja tai lasketaan binomitodennäköisyyttä jollekin tapahtumaketjulle. [13]

Myös regressiokäsitteen perinpohjaisessa ymmärtämisessä voi tulla kysymykseen pienimmän neliösumman menetelmään tutustuminen tai sen sivuaminen, mikä edellyttää summamerkinnän ja summien käytön ymmärtämistä. Aritmeettiset ja geometriset lukujonot sekä summat, joita myös tämän lopputyön alkuosassa käsitellään, ovat enemmän talousmatematiikan kuin tilastomatematiikan kursseihin liittyviä.

Lukion opetussuunnitelman perusteissa 2019 lukujonot ja summat on siirretty lyhyessä matematiikassa kurssille lausekkeet ja yhtälöt MAB2. Erityisesti käsiteltävänä sisältönä mainitaan aritmeettinen sekä geometrinen lukujono ja summa. Myös muilla lyhyen matematiikan kursseilla käsitellään edelleen lukujonoja ja summia opetussuunnitelman 2019 mukaan. [14] Etenkin talousmatematiikan kurssilla MAB7 lukujonojen ja summien osaaminen on tärkeää, mutta myös muilla lyhyen matematiikan kursseilla lukujonoja ja summia käsitellään. Esimerkiksi tilastolliset ja todennäköisyysjakaumat kurssilla MAB9 lukujonojen ja summien käsitettä sovelletaan erilaisten jakaumien yhteydessä ja niiden keskihajonnoissa.

4 Matemaattinen osaaminen ja tieto

Tässä tutkielmassa matemaattisen osaamisen ja tiedon käsitteiden määrittelyssä käytettävät Wilsonin taksonomia ja Krathwolin uudistettu Bloomin taksonomia pohjautuvat molemmat Bloomin taksonomiaan. Wilsonin taksonomia on kehitetty erityisesti matemaattisen osaamisen tutkimiseen ja Krathwolin taksonomia alun perin erityisesti luokittelemaan, mitä opiskelijoiden voidaan odottaa oppivan tehtävänantojen tai tehtävien ohjeiden perusteella.

Näiden taksonomioiden kategoriat ovat osittain päällekkäisiä ja niissä voidaan nähdä samankaltaisuuksia. Yhdistelemällä ja muokkaamalla taksonomioiden kategorioita muodostetaan uudenlainen luokittelumalli, jota käytetään tässä tutkielmassa lukiomatematiikan lukujono- ja summatehtävien luokitteluun matemaattisen osaamisen ja tiedon kategorioihin. Uudessa mallissa otetaan huomioon tiettyyn kategoriaan luokiteltujen tehtävien prosentuaalinen frekvenssi, mitä ei Wilsonin ja Krathwolin malleissa oteta huomioon. Luvussa 4 käytetään lähteenä teosta [17] ja verkkolähdettä [9].

4.1 Wilsonin taksonomia

Wilsonin taksonomian avulla voidaan käsitellä, millaista matemaattista osaamista opiskelijat ilmentävät tehdessään tehtäviä, joissa on tietynlainen tehtävänanto. Wilson jakaa taksonomiassaan matemaattisen osaamisen pääpiirteissään neljään kognitiivisen osaamisen kategoriaan. Nämä ovat osaamisen vaativuuden mukaan kasvavassa järjestyksessä laskutaito, ymmärtäminen, soveltamien ja analyysi. Lisäksi Wilson käyttää vielä kahta ei-kognitiivista kategoriaa osaamisen arvioinnin tutkimisessa, jotka ovat kiinnostus ja asenne sekä arvostus. Ylemmillä tasoilla toimiminen matemaattisessa osaamisessa edellyttää yleensä myös alempien tasojen hallitsemista. Tasot jakautuvat vielä hienojakoisemmin, jolloin voidaan tarkemmin nähdä millaista osaamista kullekin tasolle pääsemien tai tasolla toimiminen vaatii. Tasoista ja kategorioista kirjoitetaan rinnakkain tutkielmassa. Niiden merkitykset ajatellaan olevan samat. Alaluvussa 4.1 on käytetty lähteenä teosta [17, s. 645-696].

Wilsonin taksonomiassa on myös sisältöulottuvuus. Sisältöulottuvuuden kategorioina on Numerosysteemit (1.0), Algebra (2.0) ja Geometria (3.0). Wilson siis luokittelee tehtävät matematiikan sisältöalueisiin ja sitten tutkii, millaista kognitiivista tai ei-kognitiivista osaamisen kykyä sisältöalueen tehtävien tekeminen ilmentää. Wilson myös antaa esimerkkejä tehtävistä, joiden tekeminen ilmentää tietynlaista osaamista. Wilsonin taksonomian avulla voidaan luokitella esimerkiksi matematiikan tehtävää tehdessä hallittava matemaattinen sisältö ja tehtävän tekemisessä ilmenevän osaamisen taso. [17, s. 649, 657-693]

Laskutaidon taso on vähiten vaativa taso matemaattisessa osaamisessa. Laskutaitotehtävät ovat yksinkertaisia muistiin palauttamista vaativia rutiinitehtäviä, jotka eivät vaadi monimutkaista päätöksentekoa tai monimutkaisia muistiprosesseja vaan yksittäisten faktojen muistamista. Siirryttäessä laskutaidon tasolta ymmärtämisen tasolle tarkastellaan faktojen sijaan käsitteitä. Käsitteiden käyttö vaatii enemmän implisiittistä päätöksentekoa kuin faktojen muistaminen, joten sen voidaan sanoa olevan monimutkaisempaa tai korkeamman tason osaamista kuin laskemisen tasolla. Ymmärtämisen tasolla toimiessaan opiskelijalta edellytetään tietoa periaatteista, säännöistä ja yleistyksistä. Periaatteet, säännöt ja yleistykset, joiden tietämistä vaaditaan ovat kuitenkin sellaisia, joita on opeteltu oppimateriaaleista aikaisemmin. Uusien periaatteiden, sääntöjen ja yleistysten muotoilu tai käyttäminen kuuluu ymmärtämistä korkeamman tason osaamiseen. Matemaattisen rakenteen kuten lukujärjestelmien ja algebrallisten rakenteiden ymmärtäminen sekä kyky seurata tehtävän logiikkaa kuuluvat ymmärtämisen tasolle. Kyky seurata logiikkaa voidaan muotoilla myös kyvyksi lukea tai kuunnella matemaattisia väitteitä. Monesti ymmärtämistason tehtävässä ensimmäisenä pitää pystyä lukemaan ja tunnistamaan ongelma sekä muokkaamaan ongelman osat toiseen muotoon. [17, s. 649, 660-661]

Toimittaessa soveltamisen tasolla täytyy pystyä ratkaisemaan rutiinitehtäviä ja on kyettävä tekemään vertailuja. Rutiinitehtävän ratkaiseminen vaatii algoritmin valitsemista ja sen suorittamista. Tasolla voidaan myös edellyttää ensin tehtävän muokkaamista symboliseen muotoon ja sopivan periaatteen tunnistamista, jonka mukaan valitaan algoritmi, jolla tehtävä ratkeaa. Tälläkin tasolla tehtävät ovat vielä tuttuja esimerkiksi kirjan johdantokappaleessa esiteltyjä. Myös tietoaineiston analysointi ja kyky tunnistaa kuvioita, kaavoja, isomorfismeja ja symmetrioita kuuluu sovellustason osaamiseen. Edellisessä pitää pystyä erottelemaan aineisto olennaisiin komponentteihinsa ja tehdä näkyväksi yhteys jo ratkaistuihin pienempiin tehtävään liittyviin ongelmiin. Jälkimmäisessä täytyy osata palauttaa mieleen oleellista tietoa, muokata ongelman osia ja laittaa ne järjestykseen sekä havaita relaatioita. Kaikissa sovellustason ongelmissa tehtävän osat voidaan laittaa jonoon tai järjestykseen ja järjestystä seuraamalla tehtävä saadaan ratkaistua. Tehtävät aineistot ja kuviot ovat kuitenkin tuttuja. Mikäli täytyy löytää tai todistaa jotain uudenlaisia relaatioita tai ominaisuuksia, joita ei ole opiskeltu aikaisemmin toimitaan analyysitasolla. [17, s. 661-662]

Analyysitasolla tehtävät voivat olla ei-rutiinimaisia, joten opiskelijan on osattava yhdistellä uudessa ympäristössä aikaisemmin oppimaansa tietoa ja mahdollisesti osoittaa tai todistaa jotain uutta. Tällaisessa ongelmanratkaisussa tehtävä pitää purkaa osiin ja tutkia, mitä osista voidaan oppia. Kaikissa tällaisissa tehtävissä opiskelija asetetaan tilanteeseen, jossa algoritmisen ratkaisun käyttö ei ole mahdollista kuten sovellustason tehtävissä ja voidaan tarvita heuristista lähestymistapaa. Opiskelija tekee suunnitelman ratkaisuprosessista, ja vertaillen sekä mahdollisesti pois sulkien vääriä ratkaisuja, määrittää lopullisen ratkaisun. Analyysin tasolla voidaan vaatia löytämään uusia relaatioita. Erona soveltamisen tasoon on, että relaatiot eivät ole analyysin tasolla ennestään tuttuja. Todistusten konstruointi ja niiden kriittinen tarkastelu ovat osa analyysin tasolla toimimista. Todistuksia voidaan myös uudelleen konstruoida, mutta tällainen osaaminen kuuluu enemmän soveltamisen tasoon. Lisäksi aikaisemmin opittuja todistuksia voidaan palauttaa mieleen, mikä on laskutaidon tasoa. Jos todistus tulee opiskelijalle eteen ensimmäistä kertaa, hänen ajatellaan rakentavan todistuksen itse, vaikka todistus olisikin aikaisemmin todistettu jonkun muun toimesta. Tällöin hän toimii analyysin tasolla. Mikäli sama todistustehtävä tulee opiskelijalle eteen uudelleen, hänelle ajatellaan jo syntyneen rutiinia todistuksen

Taulukko 4.1. Wilsonin taksonomian osaamisen kategoriat. [17, s. 647, 660-663]

Kognitiivinen/ ei-kognitiivinen taso	Tarkemmat piirteet
F.0 Arvostus	F.1 Ulkoinen arvostus F.2 Sisäinen arvostus F.3 Toiminnallinen arvostus
E.0 Kiinnostus ja asenne	E.1 Asenne E.2 Kiinnostus E.3 Motivaatio E.4 Into E.5 Henkilökohtainen merkitys
D.0 Analyysi	D.1 Kyky ratkaista ei-rutiini tehtäviä D.2 Kyky löytää relaatio D.3 Kyky rakentaa todistus D.4 Kyky tarkastella todistusta kriittisesti D.5 Kyky muotoilla ja vahvistaa yleistys
C.0 Soveltaminen	C.1 Kyky ratkaista rutiiniongelmia C.2 Kyky tehdä vertailuja C.3 Kyky analysoida tietoaineistoja C.4 Kyky tunnistaa matemaattisia kaavoja
B.0 Ymmärtäminen	B.1 Käsitteiden tietäminen B.2 Periaatteiden, sääntöjen ja yleistysten tietäminen B.3 Matemaattisen rakenteen tietäminen B.4 Kyky lukea ja tunnistaa sekä muokata ongelman osat muodosta toiseen B.5 Tehtävän loogisuuden seuraaminen
A.0 Laskutaito	A.1 Yksittäisten faktojen muistaminen A.2 Terminologian tietäminen A.3 Algoritmien muistaminen ja toteuttaminen

muodostamiseen, ja siksi tällaista todistustehtävää pidetään enemmän soveltamisen tasoon kuuluvana ja siinä katsotaan tarvittavan mieleen palauttamisen taitoa, joka on enemmän laskemisen tason osaamista. Yleistyksen muotoilu ja vahvistaminen muistuttavat hyvin paljon todistamista, mutta niissä ei vaadita aivan yhtä tarkkaa käsittelyä. Yleistyksen muotoilua vaativa tehtävä voisi olla esimerkiksi tehtävä, jossa opiskelijaa pyydetään näyttämään yleistyksen paikkansapitävyys tai muotoilemaan yleistys. [17, s. 661-662]

Taulukossa 4.1 kaksi ylintä kategoriaa ovat ei-kognitiivisia, kun neljä alimmaista ovat kognitiivisia. Ei-kognitiivisia kategorioita ei voida laittaa hierarkkiseen järjestykseen samalla tavoin kuin kognitiivisia kategorioita. Näiden ei-kognitiivisten kategorioiden avulla voidaan erityisesti tarkastella opiskelijoiden kiinnostusta ja asenteita sekä arvostusta matematiikkaa ja sen opiskelua kohtaan. Ulkoinen arvostus käsittelee matematiikan hyödyllisyyttä, kun sisäinen arvostus liittyy matematiikan rakenteeseen, voimaan ja sen kauneuteen. Operationaalinen arvostus nousee matemaattisesta kommunikoinnista muiden kanssa, missä matematiikka on kommunikoinnin objekti. Opiskelijoiden ei-kognitiivista osaamista voidaan mitata tutkimalla opiskelijoiden asenteita, arvostuksia, kiinnostuksia ja kommunikointia. [17, s. 662-663]

4.2 Uudistettu Bloomin taksonomia

David A. Krathwol on muodostanut Bloomin taksonomian pohjalta tavan luokitella, mitä odotamme opiskelijoiden oppivan. Uudistetun Bloomin taksonomian avulla tutkitaan tehtävänantoa tai tehtävän ohjeistusta, minkä jälkeen voidaan sanoa, mitä opiskelijan voidaan odottaa oppivan tehdessään tehtävää. Krathwolin malli on uudistettu versio Bloomin taksonomiasta ja sen avulla luokitellaan tehtävässä vaadittavaa osaamista sekä tiedon tasoa. Tietoulottuvuus koostuu neljästä pääkohdasta; faktatieto, käsitteellinen tieto, proseduraalinen tieto ja metakognitiivinen tieto. Nämä jakautuvat vielä hienojakoisempiin piirteisiin, jotka ovat nähtävillä taulukossa 4.2. Alaluvussa käytetty lähteenä teosta [17, s. 662] ja verkkolähdettä [9, s. 214.218].

Metakognitiivisella tasolla ajatellessaan opiskelijan pitää ymmärtää ja olla tietoinen omasta tietotoiminnastaan yleisellä tasolla. Hänen pitää siis tietää aivojen, hermoston ja kehon sekä tietoverkkojen yhteistoiminnasta sekä, miten kognitio lopulta muodostuu. [9, s. 214, 216-217]

Taulukko 4.2. Krathwolin taksonomian tiedon kategoriat. [9, s. 214]

Tiedon taso	Tarkemmat piirteet
G.0 Metakognitiivinen	G.1 Strateginen tieto G.2 Tieto kognitioista G.3 Itsetietoisuus/-tuntemus
H.0 Proseduraalinen	H.1 Algoritmit H.2 Tekniikat H.3 Määrittelyjen kriteerit
I.0 Käsitteellinen	I.1 Luokittelut I.2 Periaatteet I.3 Teoriat, mallit ja rakenteet
J.0 Faktuaalinen	J.1 Terminologia J.2 Yksittäiset yksityiskohdat

Proseduraalisella tasolla opiskelija tietää toimintaohjeet, tekniikat sekä metodit ja määrittelyjen kriteerit, joiden avulla hän pystyy ratkaisemaan annetun tehtävän. Hän osaa siis muodostaa tehtävän ratkaisemiseen sopivan jonon toimintoja, jotka suorittamalla päästään ratkaisuun. Hän tietää myös millaisia tekniikoita, metodeita ja määrittelyjä toimintoihin pitää sisältyä, jotta ratkaisu saavutetaan. Käsitteellisen tiedon tasolla voidaan hahmottaa suurempia kokonaisuuksia kuten teorioita sekä malleja ja tiedon rakennetta. Käsitteellinen taso sisältää myös tiedon luokitteluista ja kategorioista sekä periaatteista ja yleistyksistä. Käsitteellisellä tasolla ja proseduraalisella tasolla toimiminen vaikuttavat liittyvän hyvin läheisesti yhteen, sillä metodit, tekniikat ja määrittelyjen kriteerit ovat käsitteinä hyvin lähellä luokitteluja, kategorioita, periaatteita yleistyksiä, teorioita ja malleja. Esimerkiksi teoriat väistämättä sisältävät määrittelyjen kriteereitä ja tietoa laskutekniikoista. Jotta voidaan muodostaa tehtävän ratkaisemiseen sopiva algoritmi, täytyy tuntea matemaattista rakennetta ja matemaattisten käsitteiden välisiä suhteita, jotta algoritmin toiminnot osataan suorittaa oikeassa järjestyksessä ja ratkaisuun päästään. Terminologian ja yksittäisten yksityiskohtien tietäminen kuuluu faktuaaliselle tasolle, jolla toimiessaan opiskelija tietää peruskäsitteet, joiden avulla voi ratkaista ongelman. Tällä tasolla muistetaan yksittäisiä faktoja, mutta niiden liittäminen laajempaan kokonaisuuteen ja laajemman kokonaisuuden hahmottaminen ei vielä onnistu. [9, s. 214, 216-217]

Taulukko 4.3. Krathwolin taksonomian kognitiivisen prosessin kategoriat. [9, s. 214-215]

Kognitiivinen prosessi	Tarkemmat piirteet
K.0 Muistaminen	K.1 Tunnistus K.2 Mieleenpalautus
L.0 Ymmärtäminen	L.1 Tulkitseminen L.2 Esimerkkien antaminen L.3 Luokittelu L.4 Yhteenveto L.5 Päättely L.6 Vertailu L.7 Selittäminen
M.0 Soveltaminen	M.1 Toimeenpaneminen M.2 Toteuttaminen
N.0 Analyysi	N.1 Erittely N.2 Organisointi N.3 Ominaisuuksien antaminen
O.0 Arviointi	O.1 Tarkastaminen O.2 Kritisointi
P.0 Luominen	P.1 Generointi P.2 Suunnittelu P.3 Tuottaminen

Erona alkuperäiseen Bloomin taksonomiaan, joka on yksiulotteinen, Krathwolin taksonomia on kaksiulotteinen. Matemaattista osaamista tarkasteleva ulottuvuus on nimetty taksonomiassa kognitiivisen prosessin rakenteeksi. Tämä sisältää kuusi pääkategoriaa; muistaminen, ymmärtäminen, soveltaminen, analyysi, arviointi ja luominen. Kuten tietoulottuvuudenkin kohdalla myös nämä piirteet jakautuvat vielä hienojakoisemmin. Piirteet ovat nähtävillä taulukossa 4.3. [9, s. 214-217]

Muistamista vaativassa tehtävässä vaaditaan tiedon tunnistamista ja palauttamista pitkäkestoisesta muistista työmuistiin, jolloin tehtävän kognitiivinen käsittely muuttuu mahdolliseksi. Kun tehtävässä vaaditaan ymmärtämistä, täytyy osata määrittää ja ymmärtää ohjeiden merkitys ja nähdä ohjeet laajempana kokonaisuutena. Ohjeet voivat olla suullisessa, kirjallisessa tai graafisessa muodossa ja niiden ymmärtäminen voi edellyttää esimerkiksi tiedon luokittelua, vertailua ja selittämistä tai muita taulukossa 4.3 näkyviä toimintoja. Sovellustehtävässä opiskelijan täytyy tunnistaa proseduuri, jota tehtävässä voidaan käyttää ja sitten soveltaa proseduuria annettuun tehtävään. Analyysissä pitää pystyä pilkkomaan tehtävä osiin ja tutkimaan, miten osat liittyvät toisiinsa ja ympäröivään rakenteeseen. [9, s. 214-217]

Arviointi kategoriaan kuuluvassa osaamisessa käytetään kriteereitä sekä standardeja päätöksentekoon; tämä edellyttää tarkastamista ja kriittistä tarkastelua sekä tehtävän ratkaisun edetessä että sen valmistuttua. Luomisen kategoriaan kuuluvassa tehtävässä täytyy muodostaa koherentti kokonaisuus tai alkuperäinen tuote: tämä voi tarkoittaa esimerkiksi todistuksen konstruoimista ensimmäistä kertaa. Suunnittelu ja uuden tiedon tuottaminen kuuluvat olennaisesti luomisprosessiin. Krathwolin taksonomian kognitiivisen prosessin kategoriat muistuttavat paljon Wilsonin taksonomian kognitiivisen osaamisen kategorioita. Arvioinnin ja luomisen kategoriat Krathwolin taksonomiassa voidaan katsoa sisältyvän Wilsonin taksonomian analyysin kategoriaan implisiittisesti. Krathwolin taksonomia ei sisällä ei-kognitiivisia kategorioita kuten Wilsonin taksonomia. Molemmat taksonomiat pohjautuvat Bloomin taksonomiaan. Sekä Wilsonin taksonomia että Krathwolin taksonomian kognitiivisen prosessin ulottuvuus ovat hierarkkisia tapoja luokitella osaamista. Krathwolin taksonomiassa sama tehtävä voidaan luokitella kuuluvaksi samaan aikaan useampaan kuin yhteen osaamisen kategoriaan, joten näin taksonomia ei ole ehdottoman tiukka hierarkioissa. Krathwolin taksonomian tietoulottuvuuden ei lähteessä kerrota olevan hierarkinen luokittelutapa. [9, s. 214-217], [17, s. 662]

4.3 Matemaattinen osaaminen ja tieto LOPS 2015 ja 2019

Lukion opetussuunnitelman perusteissa 2015 ja 2019 kuvaillaan, millaista matemaattista osaamista ja tietoa lukiokoulutuksessa opetetaan. Opetussuunnitelmat eivät yksityiskohtaisesti kerro, millaisia tehtäviä oppikirjoissa tai -materiaaleissa tulee olla, vaan jättävät vapauksia paikallisten opetussuunnitelmien ja kurssien oppimateriaalien laatimiseen sekä valmistamiseen. Tietyt sisällöt, jotka kursseille pitäisi sisältyä, opetussuunnitelma kuitenkin kertoo. Lukion opetussuunnitelman perusteita ei ole muodostettu minkään tietyn tai tiettyjen matemaattisen osaamisen ja tiedon teorian pohjalta.

Opetukselta edellytetään matemaattisiin rakenteisiin ja malleihin tutustuttamista sekä luovan ongelmaratkaisun, mallintamisen ja laskemisen taitojen opettamista. Opiskelijoille tulee tarjota mahdollisuuksia itsenäiseen sekä yhdessä tapahtuvaan oppimiseen. Opiskelijoita tulee rohkaista ilmaisemaan matemaattista osaamistaan monilla eri tekniikoilla sekä teknisillä apuvälineillä ja heidän tulee oppia muuttamaan tietoa yhdestä tiedon esitysmuodosta toiseen. Opetuksen tulee antaa opiskelijalle myös mahdollisuuksia oman persoonansa kehittämisen.

Opettajien tulee arvioinnilla pyrkiä vahvistamaan opiskelijan oppimista ja motivaatiota. Opiskelijan tulee oppia myös itse kriittisesti tarkastelemaan ja arvioimaan omaa oppimistaan, huomaamaan omat vahvuutensa sekä säätelemään omaa motivaatiotaan ja itseluottamustaan.

Vuoden 2019 lukion opetussuunnitelman perusteissa painotetaan lisäksi matematiikan asemaa eettisessä osaamisessa sekä ympäristö- ja hyvinvointiosaamisessa. Näitä voidaan vahvistaa tuomalla esiin matematiikan taitojen sovellettavuutta kestävään kehitykseen ja yhteiskunnallisiin ongelmiin liittyvissä ratkaisuissa. Lisäksi vuoden 2019 LOPS:ssa tuodaan esiin myös opiskelijan ohjaaminen ymmärtämään matematiikan merkitys erilaisissa kulttuureissa, historian kehityksessä ja matematiikan luonne universaalina kielenä.

Vaikka lukion opetussuunnitelman perusteiden matemaattista osuutta ei olekaan muodostettu minkään tietyn tai tiettyjen matemaattisen osaamisen ja tiedon teorioiden pohjalta, voidaan osaamiselle ja tietämiselle asetetuissa tavoitteissa huomata monia samoja piirteitä kuin Wilsonin ja Krathwolin malleissa. Wilsonin ja Krathwolin taksonomioissa ei kuitenkaan varsinaisesti mainita matematiikan asemaa eettisessä osaamisessa tai ympäristö- ja hyvinvointiosaamisessa. Näissä malleissa ei myös tuoda esille matematiikan osaamisen ja tiedon soveltuvuutta kestävään kehitykseen ja yhteiskunnallisiin ongelmiin liittyvissä ratkaisuissa tai näiden merkitystä erilaisissa kulttuureissa ja historian kehityksessä. Kuitenkin edellä mainittujen alojen ja ilmiöiden ymmärtämiseen soveltamiseen ja analysoimiseen tarvitaan matemaattista osaamista ja tietoa. Alaluvussa käytetty lähteenä verkkolähteitä [13] ja [14].

5 Tutkimuksen toteutus

5.1 Tutkimusasetelma

Tutkimuksen empiirinen osuus kuuluu oppimateriaalitutkimuksen tutkimusalaan. Oppimateriaalilla tarkoitetaan materiaalia, joka on sidoksissa yhteen tai useampaan tiettyyn oppiaineeseen [15, s. 345]. Tässä tutkimuksessa oppiaine on matematiikka ja tutkimuksessa tutkitaan erityisesti matematiikan lukio-oppikirjojen lukujonoihin ja summiin liittyviä tehtäviä. Aikaisempi oppimateriaalitutkimus on kohdistunut esimerkiksi oppikirjojen ja opetussuunnitelman välisen yhteyden tutkimiseen, oppimiskäsityksen ilmenemiseen oppikirjoissa, oppikirjojen luettavuuteen ja visuaalisuuteen, saman oppiaineen oppikirjasarjojen väliseen vertailuun sekä oppikirjojen tehtävä- ja käsiterakenteisiin [15, s. 345-346]. Tässä tutkimuksessa keskitytään lukio-oppikirjojen tehtävä- ja käsiterakenteisiin ja saman oppiaineen oppikirjojen väliseen vertailuun.

Erityisesti tutkitaan mihin matemaattisen tiedon ja matemaattisen osaamisen kategoriaan tehtävä kuuluu tehtävänannon ja ajatellun malliratkaisun perusteella. Ajatellussa malliratkaisussa on otettu huomioon millaisia, vaiheita tehtävän ratkaisijan on käytävä tehtävässä läpi ja esitettävä kirjallisesti, jotta hän saa perusteltua ratkaisunsa ja vastauksensa. Tutkimus ei vastaa, millaista matemaattista osaamista ja tietoa opiskelijoilla on vaan se vastaa, millaista matemaattista osaamista ja tietoa voidaan sanoa tehtävän ratkaisemisessa vaadittavan, tehtävänannon rakenteen, sanavalintojen, tehtävänantoon liitettyjen kuvien, alakohtien ja tietoaineistojen perusteella sekä ajatellun malliratkaisun perusteella, kun tehtäviä luokitellaan aikaisemmin tässä tutkielmassa esiteltyjen matemaattista osaamista ja tietoa määrittelevien teorioiden pohjalta muodostetun uuden mallin perusteella käyttäen teoriapohjaista sisällönanalyysiä ja kvantifiointia.

Tuloksena saadaan neljä taulukkoa ja kaaviota, joista näkyy millaista matemaattista osaamista ja matemaattista tietoa kunkin tutkimukseen valitun oppikirjan tehtävien ratkaisemisessa vaaditaan, ja kuinka suuri prosentuaalinen frekvenssi kaikista tietyn kirjan tehtävähavainnoista luokiteltiin kuhunkin osaamisen ja tiedon kategoriaan. Prosentuaalisen frekvenssin laskemisesta kerrotaan lisää tutkimusmenetelmissä.

5.2 Tutkimusmenetelmät

5.2.1 Tehtävien luokittelussa käytettävä malli

Tutkielmassa tutkitaan tehtävissä vaadittua matemaattista osaamista ja matemaattista tietoa lukio-oppikirjojen lukujono- ja summatehtävien tehtävänantojen sekä tehtävien ajateltujen malliratkaisujen ilmentäminä. Tehtävien luokittelemisen apuvälineeksi muodostetaan uudenlainen luokittelumalli Wilsonin taksonomian ja uudistetun Bloomin taksonomian pohjalta. Uudistetun Bloomin taksonomian tietoulottuvuuden kategoriat 4.2 antavat lähtökohdan uuden mallin tietoulottuvuuden kategorioille. Wilsonin taksonomian kognitiivisen osaamisen kategorioita 4.1 hyödynnetään uuden mallin matemaattisen osaamisen kategorioiden muodostamisessa. Täysin uutena ulottuvuutena malliin tulee prosentuaalisen frekvenssin ulottuvuus, joka kertoo kunkin osaamisen ja tiedon kategorian kohdalla, tällaiseen kategoriaan kuuluvien tehtävien prosentuaalisen frekvenssin kaikista kirjan tehtäviin liittyvistä havainnoista. Koska tutkimuksessa tutkitaan, millaista osaamista tehtävän ratkaisemisessa vaaditaan, käytetään Wilsonin taksonomiassa esiintyvän kyky sanan tilalla uudessa mallissa sanaa vaatia. Tutkielmassa puhutaan ajoittain matemaattisen osaamisen ja matemaattisen tiedon tasoista ja kategorioista rinnakkain. Tason ja kategorian merkityksen ajatellaan olevan sama tässä tutkielmassa.

Jokaisen tehtävän kohdalla arvioidaan, mikä on vaativin osaamisen taso, jolla tehtävää ratkaistaessa täytyy toimia ja mihin vaaditun tiedon kategoriaan tai kategorioihin tehtävä kuuluu samaan aikaan valitun osaamisen tason kanssa. Tiedon tasoista voi täyttyä useampi samaan aikaan, mutta osaamisen tasoista valitaan ainoastaan vaativin tehtävän ratkaisemisessa vaadittava osaamisen taso.

Taulukko 5.1. Tässä tutkielmassa matemaattisen osaamisen luokitteluun käytettävät kategoriat ja niiden tarkemmat piirteet.

Osaamisen kategoria	Tarkemmat piirteet
D.0 Analyysi	D.1 Ei-rutiinitehtävän ratkaiseminen, suunnittelu D.2 Relaation löytäminen D.3 Todistuksen rakentaminen, suunnittelu, luominen D.4 Todistuksen kriittinen tarkastelu, arviointi D.5 Yleistyksen muotoilu ja vahvistaminen, tuottaminen
C.0 Soveltaminen	C.1 Rutiiniongelman ratkaiseminen C.2 Vertailujen tekeminen C.3 Tietoaineistojen analysoiminen C.4 Matemaattisten kaavojen tunnistaminen
B.0 Ymmärtäminen	B.1 Käsitteiden tietäminen B.2 Periaatteiden, sääntöjen ja yleistysten tietäminen B.3 Matemaattisen rakenteen tietäminen B.4 Ongelman tunnistaminen tehtävänannosta ja ongelman osien muokkaaminen muodosta toiseen. B.5 Tehtävän loogisuuden seuraaminen
A.0 Laskutaito	A.1 Yksittäisten faktojen muistaminen ja terminologian tietäminen A.2 Algoritmien muistaminen ja toteuttaminen

Krathwolin taksonomiassa esiintyvät osaamisen kategoriat arviointi ja luominen [9]. Näitä ei esiinny omana kategoriana Wilsonin taksonomiassa [17]. Generointia suunnittelua ja tuottamista sekä tarkastamista ja kritisointia vaaditaan kuitenkin analyysin tasolla toimittaessa, joten otetaan mukaan luominen ja arviointi muodostettavan mallin analyysin kategoriaan lisäämällä nämä tarkempiin piirteisiin. Siirretään terminologian tietäminen saman tarkemman piirteen A.1 yhteyteen kuin yksittäisten faktojen muistaminen, jolloin tarkempaa piirrettä A.3 vastaava numerointi poistuu. Täten saadaan taulukossa 5.1 esiteltävät matemaattisen osaamisen kategoriat A.0-D.0 ja niiden hienorakenteet A.1-D.5. Kohdat A.1-D.5 kertovat tarkemmin, millaista osaamista tehtävän ratkaisemisessa vaaditaan. On huomattava, ettei taulukon 5.1 malli ole sama, joka on esitelty taulukossa 4.1.

Tutkielmassa ei tutkita lukiokirjojen tehtäviä arvostuksen eikä kiinnostuksen ja asenteen kategorioissa, koska nämä matemaattisen osaamisen piirteet liittyvät enemmän matematiikan oppijoiden henkilökohtaisiin piirteisiin, ominaisuuksiin ja asenteisiin, joita ei pystytä arvioimaan pelkkien tehtävien perusteella. Tiedon tasojen luokitteluun käytetään taulukossa 5.2 olevia kategorioita, jotka ovat vastaavat kuin Krathwolin taksonomian tietoulottuvuudessa. Tehtävässä voidaan vaatia useampaa

Taulukko 5.2. Tässä tutkielmassa tietoulottuvuuden luokitteluun käytettävät kategoriat ja niiden tarkemmat piirteet.

Tiedon kategoria	Tarkemmat piirteet
G.0 Metakognitiivinen	G.1 Strateginen tieto G.2 Tieto kognitioista G.3 Itsetietoisuus/-tuntemus
H.0 Proseduraalinen	H.1 Algoritmit H.2 Tekniikat H.3 Määrittelyjen kriteerit
I.0 Käsitteellinen	I.1 Luokittelut I.2 Periaatteet I.3 Teoriat, mallit ja rakenteet
J.0 Faktuaalinen	J.1 Terminologia J.2 Yksittäiset yksityiskohdat

kuin yhtä tiedon tasoa samaan aikaan. Aineiston hankinnan osuudessa kerrotaan tarkemmin, miten tehtävä valikoituu tiettyyn vaaditun osaamisen ja tiedon yhteiseen kategoriaan. Esimerkiksi kuvan 6.1 taulukossa on nähtävissä, miten matemaattisen osaamisen ja tiedon yhteiset kategoriat vastaavat rivien ja sarakkeiden risteämiskohdassa olevia taulukon soluja. Taulukon riveillä on matemaattisen tiedon kategoriat ja sarakkeissa osaamisen kategoriat. Nämä muodostavat risteämiskohtaan uuden yhteisen kategorian: esimerkiksi metakognitiivinen analyysin kategoria ja proseduraalinen soveltamisen kategoria. Näitä kategorioita on yhteensä 16 kappaletta kuten taulukosta kuvassa 6.1 näkyy. Tämän voidaan ajatella olevan 16 luokan sanallinen luokitteluasteikko, jonka tilastollisena muuttujana on matemaattisen osaamisen ja tiedon kategoria. Muuttuja on kvalitatiivinen.

5.2.2 Teoriapohjainen sisällönanalyysi

Tutkielmassa aineiston analysoiminen on teoriapohjaista sisällönanalyysia. Tutkittava aineisto on pääosin tekstimuodossa sisältäen kuvia, matemaattisia kuviota ja tietoaineistoja sekä taulukoita. Tutkielmassa sisältää sekä tehtävissä vaaditun matemaattisen osaamisen ja tiedon luokittelua että tutkimuskysymyksien taustalla olevien ilmiöiden kuvaamista tiivistetysti. Aineistosta Excelin avulla muodostetut kaaviot näyttävät ilmiön, jota kuvaillaan sanallisesti tutkielman tekstissä. Tutkielma sisältää sekä määrällistä että laadullista aineiston kuvailua.

5.2.3 Prosentuaaliset frekvenssit

Kun tehtävä luokitellaan kuuluvaksi johonkin 16:sta kategoriasta, muodostuu havainto. Kun luokittelu toistetaan jokaiselle kirjan tutkimukseen valitulle tehtävälle, voidaan laskea kaikkien havaintojen lukumäärä N_h. Voidaan myös laskea tiettyyn kategoriaan luokiteltujen tehtävien lukumäärä N_k. On otettava huomioon, että sama tehtävä voidaan luokitella kuuluvaksi useisiin kategorioihin samanaikaisesti, joten havaintoja voi syntyä enemmän kuin on tutkittavien tehtävien lukumäärä N. Kun lasketaan, miten suuri prosentuaalinen osuus kirjan tehtävistä tehdyistä havainnoista kuuluu tiettyyn kategoriaan, jaetaan kategorian havaintojen lukumäärä kaikkien havaintojen lukumäärällä. Saadaan kaava

$$f\% = \frac{N_k}{N_h} \cdot 100\%,$$

missä $f\%$ on kategoriaa vastaava prosentuaalinen frekvenssi. Jokaista kategoriaa vastaa prosentuaalinen frekvenssi. Kuvien 6.1, 6.2, 6.3 ja 6.4 kaavioissa prosentuaaliset frekvenssit kertovat pylväiden korkeuden. Kategorioiden keskilukuna käytetään moodia. Moodia vastaa se kategoria, jonka frekvenssi on suurin. Jos frekvenssi, joka on suurin, vastaa useita kategorioita ovat kaikki nämä kategoriat moodeja. Hajontalukuna käytetään variaatiosuhdetta v, joka lasketaan kaavalla

$$v = 1 - \frac{\text{havaintojen määrä moodikategoriassa}}{\text{havaintojen määrä}},$$

joka vastaa kaavaa

$$v = 1 - \frac{f\%}{100\%}. \tag{5.1}$$

Mitä lähempänä variaatiosuhde on lukua 1, sitä enemmän tehdyissä havainnoissa on hajontaa. Variaatiosuhde saa arvon 0, jos kaikki havainnot ovat moodikategoriassa.

5.3 Tutkimuskysymykset

Tutkielmassa on tarkoitus tutkia matemaattista osaamista ja tietoa, jota lukion matematiikan oppikirjojen lukujonoihin ja summiin liittyvien tehtävien ratkaisemisessa vaaditaan. Tehtävät luokitellaan niissä vaadittavan matemaattisen osaamisen ja tiedon kategorioihin. Tehtävät jakautuvat siis matemaattisen tiedon ja osaamisen kategorioihin, joita on yhteensä 16. Seuraavassa on esitelty tutkimuskysymykset, jotka määrittelevät tarkemmin, minkälaisiin kysymyksiin tutkielmassa etsitään vastausta.

1. Miten lukiokirjojen lukujonoihin ja summiin liittyvät tehtävät ovat jakautuneet niissä vaadittavan matemaattisen osaamisen ja tiedon kategorioihin tutkimukseen valituissa kirjoissa?

2. Sijoittuvatko kirjojen tehtävät joihinkin kategorioihin useammin kuin toisiin.

   2.a Miten merkitseviä erot ovat?

3. Minkälaisia eroja tai samankaltaisuuksia on eri kirjojen välillä tehtävien jakautumisessa osaamisen ja tiedon kategorioihin?

   3.a Miten merkitseviä erot ja samankaltaisuudet ovat?

4. Minkälaisia eroja tai samankaltaisuuksia on eri kurssien välillä tehtävien jakautumisessa osaamisen ja tiedon kategorioihin?

   4.a Miten merkitseviä erot ja samankaltaisuudet ovat?

Kullekin kirjalle muodostuu luokittelun tuloksena kuvien 6.1, 6.2, 6.3 ja 6.4 mukaiset taulukot ja kaaviot, joissa on 16 matemaattisen osaamisen ja tiedon kategoriaa. Kaavioissa kutakin matemaattisen osaamisen ja tiedon kategoriaa vastaa pylväs, jonka korkeus vastaa prosentuaalista frekvenssiä. Merkitsevyyttä tutkitaan moodin ja variaatiosuhteen avulla ja lisäksi analysoidaan havaittujen frekvenssien sisällöllistä merkitsevyyttä.

5.4 Esimerkkejä tehtävistä ja kvantifioivia piirteitä

5.4.1 Esimerkkejä

Tässä alaluvussa esitellään neljä esimerkkiä tehtävistä, joissa vaaditaan tietynlaista matemaattista osaamista ja tietoa. Esimerkin jälkeen on kerrottu, miten tehtävä luokiteltiin tiettyihin kategorioihin. Esimerkeissä on käytetty samantyyppisiä kysymyksenasetteluja kuin esimerkkien alussa mainittujen lähteiden tehtävissä. Tehtävänannot eivät kuitenkaan ole samoja, vaan niihin on otettu ainoastaan vaikutteita kirjojen tehtävistä.

Esimerkki 5.1. [2, t. 269] Laske jonon kuudes jäsen aritmeettiselle lukujonolle a_n

$$a_n = a_0 + (n-1)d,$$

jonka ensimmäinen termi on 5 ja termien välinen erotus on 3.

Ratkaisu.

Täytyy sijoittaa annetut alkuarvot oikeille paikoilleen ja laskea.

$$\begin{aligned} a_6 &= a_0 + (6-1)3 \\ a_6 &= 5 + 5 \cdot 3 \\ a_6 &= 20 \end{aligned}$$

Jonon kuudes jäsen on siis luku 20.

Yllä olevan esimerkin tehtävä olisi luokiteltu osaamisen kategoriassa laskutaidon kategoriaan ja tiedon kategorioissa faktuaalista tietoa vaativaksi tehtäväksi. Tehtävässä täytyi tietää yksittäisen kaavan jäsenien paikat, sijoittaa ne paikoilleen ja laskea lopputulos.

Esimerkki 5.2. [4, t. 222] Minea laskee, että hänellä jää vuosittain 6500 euroa ylimääräistä rahaa säästöön, joten hän voi lyhentää asuntolainaa vuodessa 6500 eurolla. Minea päättää hakea asuntolainaa. Voiko Minea saada tasaerälainan 73 000 euroa maksavaan asuntoon, jos lainan korko on 3,7 prosenttia ja takaisinmaksuaika on 15 vuotta.

Ratkaisu.

Lasketaan annuiteettilainan kaavasta, minkä suuruinen laina vastaa 6500 euron vuosittaista annuiteettia 15 vuoden maksuajalla ja 3,7 prosentin korolla. Annuiteetti A lasketaan kaavalla

$$A = Lq^n \frac{1-q}{1-q^n}.$$

Ratkaistaan tästä lainan suuruus L, jolloin saadaan

$$L = \frac{A(1-q^n)}{q^n(1-q)}.$$

Sijoitetaan kaavaan annuiteetti A kerroin q sekä laina-aika n ja lasketaan, jolloin

$$\begin{aligned} L &= \frac{6500 \cdot (1-1,037^{15})}{1,037^{15} \cdot (1-1,037)} \\ L &= 73809,4331... \approx 73809,44. \end{aligned}$$

Siis Minea pystyy maksamaan 73809,44 euron lainan, joten hän pystyy maksamaan sellaisen asunnon lainan, jonka hinta on 73000 euroa.

Esimerkki 5.3. [4, t. 203, 204] Pekka sijoitti sijoitusrahastoon 1200 euroa jokaisen vuoden alussa. Pekka jatkoi sijoittamista 9 vuotta. Vuosittaiseksi tuottoprosentiksi arvioitiin sijoittamisen alkaessa 5 prosenttia ja tuotto määrättiin lisättäväksi pääomaan jokaisen vuoden alussa. Seuraavassa joukossa T on lueteltu toteutuneet tuottoprosentit vuosittain järjestyksessä alkaen ensimmäisestä vuodesta. $T = \{2, 3, 5, 5, 7, 8, 6, -1, 6\}$. Onko toteutunut tuotto suurempi vai pienempi kuin arvioitu tuotto, kun arvioitu tuotto on 5 prosenttia vuosittain ja toteutunut tuotto joukon T mukainen. Voit käyttää hyödyksi taulukkolaskentaohjelmistoa.

Ratkaisu.

Lasketaan ensin arvioitu tuotto T_A yhdeksän vuoden aikana geometrisen summan S avulla. Geometrisen summan kerroin on 1,05, vuosien lukumäärä on 9 ja rahastoon sijoitetaan aluksi 1200 euroa. $a_1 = 1200 \cdot 1,05 = 1260$, joten

$$\begin{aligned} S &= 1260 \cdot \frac{1-1,05^9}{1-1,05} \\ &= 13893,4710... \end{aligned}$$

ja arvioitu tuotto T_A saadaan vähentämällä 1200 euroa yhdeksän kertaa summasta S. Siis

$$T_A = S - 1200 \cdot 9 = 13893,4710... - 1200 \cdot 9 = 3093,4710... \approx 3093,47.$$

Lasketaan todellinen tuotto taulukkolaskentaohjelmalla laskemalla ensin seuraavan taulukon mukaisesti kertynyt todellinen pääoma 9 vuoden aikana.

Taulukko 5.3. Taulukko, jossa laskettu pääoma kunkin vuoden 1-9 lopussa.

Vuosi	Kertynyt pääoma vuoden loppuun mennessä (€)
1.	$a_1 = 1200 \cdot 1,02 = 1224$
2.	$a_2 = (1200 + a_1) \cdot 1,03 = 2496,72$
...	...
9 .	$a_9 = (1200 + a_8) \cdot 1,06 = 13708,9568...$

Lasketaan kuinka paljon toteutunutta tuottoa T_T on kertynyt 9 vuoden loppuun mennessä euroina,

$$T_T = a_9 - 1200 \cdot 9 = 2908,9568... \approx 2908,96.$$

Nyt, koska $T_T - T_A < 0$, toteutunut tuotto on pienempi kuin arvioitu tuotto.

Esimerkin 5.3 tehtävä olisi luokiteltu soveltamisen kategoriaan. Tehtävässä täytyy vertailla arvioidun tuoton ja toteutuneen tuoton eroa, luoda tietoaineisto vuoden loppuun kertyneelle pääomalle ja löytää aineistosta olennainen tieto eli vuoden 9 loppuun mennessä rahastoon kertynyt pääoma. Lisäksi tehtävä sisältää rutiinimaisia osia kuten kertyneen pääoman laskeminen ja geometrisen summan kaavan käyttäminen

Tehtävässä pitää tietää lukujonojen ja summien teoriaa ja osata soveltaa geometrisen summan kaavaa. Pitää ymmärtää, että myös toteutunutta tuottoa vastaavasta lukujonoista voidaan muodostaa summa, jolla tehtävässä lasketaan rahastoon kertynyt pääoma 9 vuoden loppuun mennessä. Tehtävässä pitää pystyä muodostamaan toimintamalli, jolla saadaan laskettua arvioitu tuotto ja toteutunut tuotto ja vertaamaan näitä keskenään sekä muodostamaan taulukon 5.3 kaltainen tekniikka, jolla voidaan laskea toteutunut pääoma kunkin vuoden loppuun mennessä. Lisäksi pitää mahdollisesti pystyä käyttämään hyödyksi taulukkolaskentaohjelmiston tekniikoita. Näiden kohtien perusteella tehtävä olisi luokiteltu käsitteellisen ja proseduraalisen tiedon kategoriaan.

Esimerkki 5.4. [8, t. 278] Näytä, että $a_n = -5n + 1$ on aritmeettisen jonon yleinen jäsen ja osoita sitten, että a_n on lukujen a_{n-1} ja a_{n+1} keskiarvo.

Todistus. Tarkastellaan aritmeettista lukujonoa $a_n = -4 + (n - 1) \cdot (-5)$. Nyt

$$
\begin{aligned}
a_n &= -4 + (n-1) \cdot (-5) \\
a_n &= -4 - 5n + 5 \\
a_n &= -5n + 1,
\end{aligned}
$$

joten a_n on aritmeettinen.

Lasketaan seuraavaksi lukujen a_{n-1} ja a_{n+1} keskiarvo.

$$
\begin{aligned}
\frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2} &= \frac{-5(n+1) + 1 + (-5)(n-1) + 1}{2} \\
&= \frac{-5n - 5 + 1 - 5n + 5 + 1}{2} \\
&= \frac{-10n + 2}{2} \\
&= -5n + 1,
\end{aligned}
$$

joten a_n on lukujen a_{n-1} ja a_{n+1} keskiarvo. □

Esimerkin 5.4 tehtävä olisi luokiteltu osaamisen kategorioissa analyysitason tehtäväksi ja tiedon kategorioissa käsitteelliseksi, proseduraaliseksi ja metakognitiiviseksi tehtäväksi.

Tehtävässä täytyy konstruoida todistus ja vahvistaa väitteenä annettu kaava. Todistustehtävä ei ole rutiininomainen, jos tehtävän ratkaisija ei ole tehnyt tehtävää aiemmin ja todistamiseen sisältyy aina kriittinen tarkastelu. Näiden perusteella tehtävä luokitellaan osaamisen kategorioissa analyysitasolle.

Jotta tehtävän ratkaiseminen onnistuu, täytyy tietää aritmeettisen lukujonon määritelmä sekä keskiarvon määritelmä, pitää osata muodostaa näistä yhtälöt ja ratkaista ne. Ratkaisut pitää osata saattaa sellaiseen muotoon, että nähdään $-5n + 1$ olevan aritmeettisen jonon yleinen jäsen sekä lukujen a_{n+1} ja a_{n-1} keskiarvo. Todistuksen rakenne on oltava sisäistetty, jotta voidaan loogisesti osoittaa kysytyt asiat. Selvästi todistamisessa pitää olla strategista tietoa todistamisesta, missä järjestyksessä todistaminen tapahtuu sekä luottamusta todistusmenetelmään ja sen osiin. Yleisellä tasolla olevat tehtävät vaativat tietoisuutta meneillään olevista kognitiivisista prosesseista, todistusta täytyy pystyä tarkastelemaan kriittisesti ja arvioimaan sen oikeellisuutta samaan aikaan, kun täytyy proseduraalisesti ja käsitteellisesti käsitellä tehtävää. Kun tehtävän todistamiseen kuluu aikaa, niin pitää pystyä selittämään itselleen miksi tehtävää yleensä edes tekee, joten tarvitaan itsetietoisuutta ja tunteiden säätelyn sekä ajankäytön taitoja, jotta tehtävän ratkaiseminen onnistuu. Näiden perusteella tehtävä luokitellaan käsitteelliseen, proseduraaliseen ja metakognitiiviseen tiedon kategoriaan.

Voi tulla kysymykseen tarkastella myös kuuluuko tehtävä faktuaalisen tiedon kategoriaan. Tehtävän ratkaisemiseen katsotaan kuitenkin kuuluvan sellaista matemaattista rakennetta ja laajempaa tietämystä, että pelkät yksittäiset tiedot eivät vie tehtävän ratkaisemista eteenpäin. Siksi tehtävä ei kuulu faktuaalisen tiedon kategoriaan.

5.4.2 Kvantifiointi

Tehtävien luokittelussa on kvantifioivia piirteitä. Tehtävissä vaadittu matemaattisen osaamisen ja tiedon kategoria tai kategoriat valitaan tehtävänannon sekä ajatellun malliratkaisun perusteella. Tehtävänannossa ja ajatellussa malliratkaisussa tietyt sanamuodot, matemaattiset rakenteet ja kysymykset antavat perusteita sille, että tutkija voi asettaa tehtävän tiettyyn kategoriaan kuuluvaksi.

Taulukko 5.4. Osaamisen kategorian kvantifioivia piirteitä.

Osaamisen kategoria	Sanamuodot, rakenteet ja kysymykset
Analyysi	1. Tehtävänannossa sanotaan, todista, osoita, näytä tai tutki. 2. Tehtävässä pitää keksiä kuviolle, lukujonolle tai summalle sääntö tai yleistys. 3. Tehtävä ei ratkea pelkällä algoritmisella ratkaisulla vaan tarvitaan heuristista lähestymistapaa. Tehtävä pitää purkaa osiin ja suunnitella ratkaisuprosessi, jossa joskus pitää sulkea pois vääriä ratkaisuvaihtoehtoja. 4. Pyydetään muokkaamaan sääntöä, jotta voidaan laskea haluttu asia tai pitää johtaa uusia kaavoja jo tunnettujen kaavojen perusteella.
Soveltaminen	1. Pyydetään vertailemaan, annetaan tietoaineisto, josta pitää nähdä sääntö. Pitää luoda tietoaineisto osana tehtävää. 2. Tehtävässä pitää vertailla lainojen edullisuutta. 3. Tehtävässä kysytään, miten sijoituskohteet ovat tuottaneet, kun on ollut useita sijoituskohteita. 4. Tehtävät, joissa lainan korko muuttuu kesken laina-ajan tai on useita sijoituskohteita.
Ymmärtäminen	1. Matemaattisia käsitteitä ja kaavoja on niin useita, että voidaan puhua matemaattisen rakenteen ymmärtämisestä. 2. Ongelman ratkaiseminen voi vaatia kuvan piirtämistä tai tietojen esittämistä toisessa muodossa. 3. Tehtävässä käytetään esimerkiksi lukujonon summan kaavaa tai tasaerälainan tilanteessa, jossa ei tarvitse vertailla useita lukujonoja tai lainoja tai lainan korko ei muutu laina-aikana.
Laskutaito	1. Tehtävänannossa lukee laske. 2. Pitää täydentää puuttuva sanat tai kaavat. 3. Ratkaisussa muistettava yksittäinen sana tai kaava, jota ei käytetä laajemmassa yhteydessä. 4. Sovellettava yksinkertaista ja lyhyttä algoritmia. Esimerkiksi arvojen sijoittaminen valmiiksi annettuun kaavaan.

Taulukoissa 5.4 ja 5.5 kerrotaan millaiset sanamuodot, tehtävän rakenteet ja kysymyksenasettelut antavat perusteita, että tehtävä täytyy luokitella kuuluvaksi tiettyyn matemaattisen osaamisen tai tiedon kategoriaan. On huomattava, että tehtävää tar-

kastellaan aina kokonaisuutena, joten yksittäisen sanan löytyminen tehtävänannosta tai ajatellusta malliratkaisusta ei vielä riitä perusteeksi sille, että tehtävä voidaan luokitella tiettyyn kategoriaan.

Taulukko 5.5. Tiedon kategorian kvantifioivia piirteitä.

Tiedon kategoria	Sanamuodot, rakenteet ja kysymykset
Metakognitiivinen	1. Tehtävänanto tai ratkaisu on poikkeuksellisen laaja. 2. Todistustehtävät. Näissä vaaditaan usein strategista tietoa ja pitää pystyä käsittelemään useita vaiheita sekä säätelemään ajankäyttöä. 3. Yhtälön muodostus usealle muuttujalle. 4. Tehtävät, joiden vastauksena ei ole yhtä selkeää oikeaa vastausta. Tutkimistehtävät.
Proseduraalinen	1. Tehtävät, joissa ratkaisuun pääseminen edellyttää useiden vaiheiden yhdistelyä, näiden laittamista oikeaan järjestykseen ja järjestyksen noudattamista oikeaan ratkaisuun pääsemiseksi. 2. Sanalliset yhtälönmuodostustehtävät. 3. Vertailutehtävät.
Käsitteellinen	1. Tehtävän ratkaisemisessa tarvitaan laajempaa matemaattisen rakenteen ymmärtämistä ja pitää pystyä yhdistelemään useita tehtävänosia keskenään. 2. Tehtävät, joissa pitää tunnistaa esimerkiksi lukujonon sääntö tai lainan laskukaava mahdollisesti tietoaineistosta, kaaviosta tai kuvasta ja muokattava näitä muodosta toiseen ratkaisuun pääsemiseksi. 3. Tehtävät, joissa pitää muodostaa yhtälö sanallisen tehtävänannon pohjalta. 4. Vertailutehtävät.
Faktuaalinen	1. Lyhyet laskemistehtävät. 2. Tehtävässä pitää pystyä täydentämään puuttuvat kaavat. Ratkaisussa pitää muistaa yksittäinen sana tai määritelmä, jota ei käytetä tehtävässä laajemmassa yhteydessä. 3. Yksittäisen laskusäännön tai kaavan muistaminen.

Taulukoissa 5.4 ja 5.5 esitellyt sanamuodot, rakenteet ja kysymyksenasettelu ovat sellaisia tehtävänannoissa tai tehtävien ratkaisuissa olevia piirteitä, jotka vastaavat luokittelumallin kategorioita ja tarkempia piirteitä. Luokittelumallin tarkemmat piirteet, jotka löytyvät taulukoista 5.1 ja 5.2 ovat edelleen voimassa tehtävien luokittelussa ja niitä käytetään ensisijaisesti.

5.5 Tutkimuksen kulku

Tutkielman teoreettisessa osassa käsiteltiin lukujonojen, sarjojen ja summien teoriaa. Siksi empiiriseen osuuteen valittiin tutkittavaksi sisältöalueeksi lukion matematiikan kirjojen lukujonoihin ja summiin liittyvien kappaleiden tehtäviä. Havaittiin LOPS 2015 perusteella, että erityisesti MAY1 -kurssilla ja MAB6 -kurssilla käsitellään lukujonoja ja summia, joten valittiin tutkimukseen näitä kursseja vastaavia kirjoja, joiden tehtäviä tutkimuksessa tutkittiin. Tutustuttiin aikaisempiin aiheeseen liittyviin tutkimuksiin sekä teorioihin ja valittiin teoreettinen lähestymistapa sekä menetelmät. Vielä ennen luokittelun aloittamista muodostettiin tehtävien piirteiden luokitteluun soveltuva malli kategorioineen erityisesti Wilsonin taksonomian ja Krathwolin uudistetun Bloomin taksonomian pohjalta. Muodostettiin myös tehtävien luokittelun kriteerit, joiden perusteella tehtävä voidaan asettaa kuuluvaksi tiettyyn kategoriaan.

Sopivan mallin muodostamisessa käytettiin koeotoksena pientä joukkoa kirjojen tehtäviä, joiden avulla testattiin mallin toimivuutta ja soveltuvuutta tarkoitukseensa. Tämän jälkeen malliin tehtiin vielä joitain muutoksia, jonka jälkeen se oli valmis systemaattisempaan käyttöön. Jokaisen tutkimukseen valitun kirjan tehtävät luokiteltiin erikseen. Kun tehtäviä luokiteltiin, ne sijoittuivat Excel-taulukkoon, jossa taulukon soluihin saatiin lukumäärät havaituista tehtävistä, joissa vaaditaan tietynlaista matemaattista tietoa ja osaamista. Tämän jälkeen soluissa olevat havaintojen lukumäärät jaettiin vielä kirjan tehtävistä tehtyjen kaikkien havaintojen lukumäärällä ja muodostettiin näistä prosentuaaliset frekvenssit kuvaamaan tietynlaista matemaattista osaamista ja tietoa vaativien tehtävien prosentuaalista osuutta kaikista kirjan luokitelluista tehtävistä kaavan 5.2.3 avulla. Muodostettujen taulukkojen pohjalta muodostettiin kolmiulotteinen pylväskaavio kunkin kirjan tehtäville erikseen. Esimerkki tällaisesta taulukosta ja kaaviosta on kuvassa 6.1.

5.5.1 Kirjasarjojen valinta

Tutkimukseen valittiin Otavan matematiikka kirjasarja sekä Sanoma Pron Yhteinen tekijä kirjasarja. Näistä kirjasarjoista löytyi MAY1 -kurssia ja MAB6 -kurssia vastaavat kirjat, joista löytyi tutkimukseen soveltuva lukumäärä lukujonoihin ja summiin liittyviä tehtäviä. Yhteensä tutkimukseen valikoitui molemmista kirjasarjoista kaksi kirjaa eli yhteensä neljä kirjaa.

Neljän kirjan valitseminen kahteen eri lukion kurssiin liittyen oli sopiva määrä tutkimuksen tarkoitukseen nähden, koska tämä antoi mahdollisuuden kirjojen ja kurssien väliseen vertailuun.

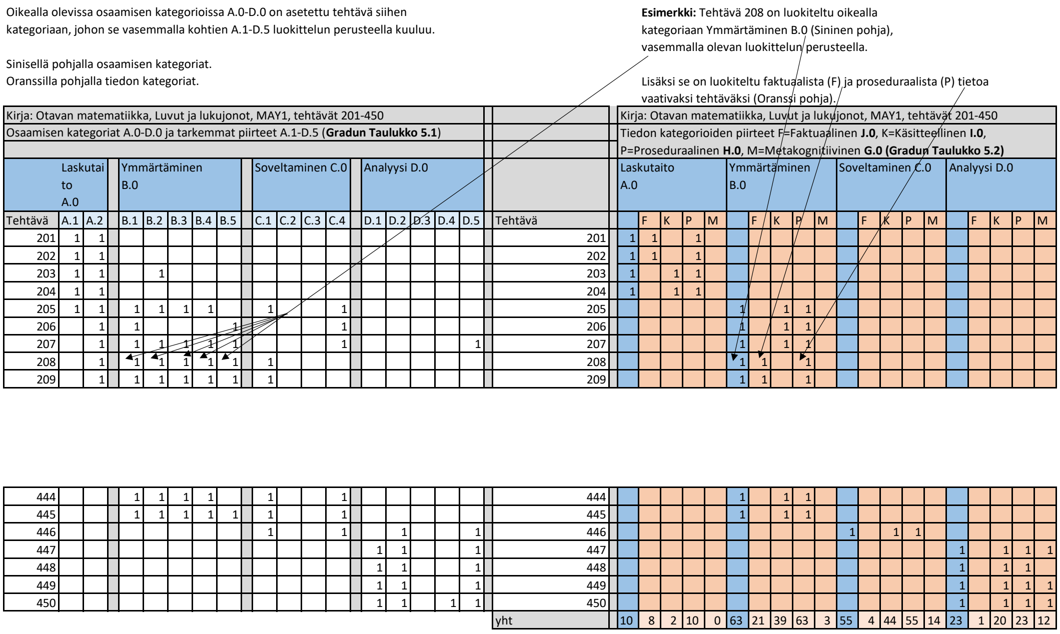
5.5.2 Tutkittavien tehtävien sisältöalue

Sisältöalueiksi valittiin molemmista tutkimukseen mukaan otetuista kirjasarjoista MAY1 -kurssia ja MAB6 -kurssia vastaavista kirjoista sellaisia tehtäviä, joiden ratkaisemisessa pitää jollain tavalla hyödyntää lukujonoja tai summia. Tehtävät rajattiin kappaleiden mukaan. Siis, jos jossain kirjojen kappaleissa vielä olikin yksittäisiä lukujonoihin ja summiin liittyviä tehtäviä, niitä ei otettu mukaan tutkimukseen, koska muiden kappaleiden katsottiin sisältävän niin vähän yksittäisiä lukujonoihin ja summiin liittyviä tehtäviä, että niiden ottamien mukaan tutkimukseen ei vaikuttaisi olennaisesti tutkimuksen tuloksiin.

Lukujonoja ja summia vastaavat sisältöalueet olisi voitu tutkimuksessa korvata, jollakin toisellakin sisältöalueella. Tutkielman empiiristä osuutta edeltävässä osassa käsiteltiin lukujonoa, sarjoja ja summia teoreettisesta näkökulmasta. Siksi empiiriseen osuuteen valittiin tutkittavaksi samaan matemaattiseen aihepiiriin liittyviä tehtäviä lukiokirjoista.

5.5.3 Aineiston hankinta

Kun oli valittu, mitkä tehtävät tutkimukseen valituista kirjoista tutkitaan, alettiin tehtäviä luokitella ensin tehtävässä vaaditun matemaattisen osaamisen kategorioihin. Luotiin Exceliin kuvan 5.1 kaltaiset taulukot. Luettiin läpi jokainen valittu tehtävä ja valittiin, mikä on korkein osaamistaso, jota tehtävän ratkaisemisessa vaaditaan.



Oikealla olevissa osaamisen kategorioissa A.0-D.0 on asetettu tehtävä siihen kategoriaan, johon se vasemmalla kohtien A.1-D.5 luokittelun perusteella kuuluu.

Sinisellä pohjalla osaamisen kategoriat.
Oranssilla pohjalla tiedon kategoriat.

Esimerkki: Tehtävä 208 on luokiteltu oikealla kategoriaan Ymmärtäminen B.0 (Sininen pohja), vasemmalla olevan luokittelun perusteella.

Lisäksi se on luokiteltu faktuaalista (F) ja proseduraalista (P) tietoa vaativaksi tehtäväksi (Oranssi pohja).

Kirja: Otavan matematiikka, Luvut ja lukujonot, MAY1, tehtävät 201-450
Osaamisen kategoriat A.0-D.0 ja tarkemmat piirteet A.1-D.5 (**Gradun Taulukko 5.1**)

	Laskutaito A.0		Ymmärtäminen B.0					Soveltaminen C.0				Analyysi D.0				
Tehtävä	A.1	A.2	B.1	B.2	B.3	B.4	B.5	C.1	C.2	C.3	C.4	D.1	D.2	D.3	D.4	D.5
201	1	1														
202	1	1														
203	1	1		1												
204	1	1														
205	1	1	1	1	1	1		1			1					
206		1	1				1				1					
207		1	1	1	1	1	1				1					1
208		1	1	1	1	1	1	1								
209		1	1	1	1	1	1	1								
444			1	1	1	1		1			1					
445			1	1	1	1	1	1			1					
446								1			1		1			1
447												1	1			1
448												1	1			1
449												1	1			1
450												1	1		1	1

Kirja: Otavan matematiikka, Luvut ja lukujonot, MAY1, tehtävät 201-450
Tiedon kategorioiden piirteet F=Faktuaalinen **J.0**, K=Käsitteellinen **I.0**, P=Proseduraalinen **H.0**, M=Metakognitiivinen **G.0 (Gradun Taulukko 5.2)**

	Laskutaito A.0					Ymmärtäminen B.0					Soveltaminen C.0					Analyysi D.0				
Tehtävä		F	K	P	M		F	K	P	M		F	K	P	M		F	K	P	M
201	1	1		1																
202	1	1		1																
203	1		1	1																
204	1		1	1																
205						1		1	1											
206						1		1	1											
207						1		1	1											
208						1	1		1											
209						1	1		1											
444						1		1	1											
445						1		1	1											
446											1		1	1						
447																1		1	1	1
448																1		1	1	
449																1		1	1	1
450																1		1	1	1
yht	10	8	2	10	0	63	21	39	63	3	55	4	44	55	14	23	1	20	23	12

Kuva 5.1. Alku- ja loppuosa taulukosta, jossa on luokiteltu tehtäviä vaaditun osaamisen ja tiedon tason mukaan. Kaikki taulukot löytyvät tutkimuksen liitteistä. Liite A ja B.

Taulukossa 5.1 on osaamisen kategoriat A.0-D.0 sekä vasemmalla että oikealla ja osaamisen kategorioiden tarkemmat piirteet A.1-D.5 vasemmalla. Tarkempi piirre saa taulukossa arvon 1, jos sitä vaaditaan tehtävän ratkaisemiseksi. Muussa tapauksessa piirrettä vastaava solu säilyy tyhjänä. Kun enemmän, kuin puolet osaamisen kategorian tarkemmista piirteistä saa arvon 1 vasemmanpuoleisessa osassa taulukkoa, tehtävässä vaaditaan tätä matemaattista osaamista. Kuitenkin, jos useammissa osaamisen kategoriassa täyttyy tämä ehto, katsotaan, että tehtävässä vaaditaan hierarkiassa korkeimmalla olevaa osaamista, joille ehto täyttyy. Siis esimerkiksi, jos tehtävä täyttää ymmärtämisen kategorian piirteistä yli puolet ja soveltamisen kategorian piirteistä yli puolet, tehtävän katsotaan kuuluvan soveltamisen kategoriaan. Kun tehtävä luokitellaan taulukon vasemman puolen perusteella johonkin osaamisen kategoriaan, merkitään taulukon oikealle puolelle vastaavan kategorian kohdalle arvo 1. Mikäli tehtävää ei luokitella johonkin kategoriaan, vastaava solu säilyy tyhjänä.

On korostettava, että tehtävässä voidaan vaatia myös muunlaista osaamista kuin, mihin kategoriaan se tässä tutkimuksessa valikoituu. Osaamistaso, johon tehtävä valikoituu, on vaativin osaamisen taso, jota tehtävän ratkaisemisessa vaaditaan. Yleensä matematiikassa korkeammalla tasolla toimittaessa vaaditaan myös korkeampaa tasoa alempien tasojen osaamista, mikä johtuu matemaattisen tiedon ja osaamisen kumulatiivisesta luonteesta. Uusi tieto ja osaaminen perustuu aikaisemman tiedon ja osaamisen pohjalle.

Tehtävissä vaadittavaa matemaattista tietoa alettiin luokitella sen jälkeen, kun tehtävät oli luokiteltu vaadittavan matemaattisen osaamisen kategorioihin. Samaan kuvan 5.1 taulukkoon osaamisen kategorioiden kanssa luotiin Exceliin taulukko myös matemaattisen tiedon kategoriointiin taulukon oikealle puolelle matemaattisen osaamisen kategorioiden viereen oranssille alustalle. Sama tehtävä voitiin luokitella useisiin vaadittavan matemaattisen tiedon kategorioihin samaan aikaan. Jos vaadittavan matemaattisen tiedon kategorian tarkemmista piirteistä täyttyi yli puolet, tehtävä asetettiin tiettyyn matemaattisen tiedon kategoriaan. Tiedon kategorian kohdalle merkittiin taulukkoon arvo 1, jos tehtävässä vaadittiin tätä matemaattista tietämistä. Jos tehtävässä ei vaadittu kyseistä matemaattista tietämistä vastaava solu jäi taulukossa tyhjäksi.

Esimerkiksi, jos tehtävässä vaadittiin algoritmien ja tekniikoiden tietämistä sekä samaan aikaan luokitteluiden ja periaatteiden tietämistä, tehtävä valikoitui sekä proseduraalisen tiedon että konseptuaalisen tiedon kategoriaan. Tällaiseen luokitteluun vaaditun matemaattisen tiedon suhteen päädyttiin, koska havaittiin luokittelun aloitusvaiheessa, että jos tehtävä vaikutti selkeästi olevan sellainen, että se täytyi luokitella kahteen tai useampaan vaaditun matemaattisen tiedon kategoriaan oli mahdoton sanoa, mihin kategoriaan se kuului eniten.

Tehtävän ratkaiseminen saattoi vaatia esimerkiksi proseduraalisen ja käsitteellisen tiedon hallitsemista samaan aikaan. Nämä saattoivat olla niin toisiinsa kietoutuneita tehtävän ratkaisun kannalta, että ei voitu erottaa kumpaa tietämistä tehtävässä vaaditaan enemmän. Siksi päädyttiin siihen, että tehtävä voi kuulua useampaan vaadittavan tiedon kategoriaan samanaikaisesti. Tiedon kategorioiden tarkemmista piirteistä piti kuitenkin täyttyä vähintään puolet, jotta voitiin katsoa tehtävän kuuluvan kyseiseen kategoriaan.

Siis, jos tehtävä luokiteltiin osaamisen kategorioista laskemisen kategoriaan, merkittiin arvo 1 laskemisen kategorian kohdalle taulukon oikealla olevaan osaan siniselle alustalle. Tehtävässä vaadittavien tiedon kategorioiden kohdalle merkittiin arvo 1 laskemisen kategorian vieressä oikealla puolella olevalle oranssille alueelle. Samoin, mikäli tehtävä luokiteltiin osaamisen kategorioista ymmärtämisen kategoriaan, merkittiin ymmärtämisen kategorian kohdalle taulukon oikeanpuoleiseen osaan siniselle alustalle arvo 1 ja tehtävässä vaadittavien tiedon kategorioiden kohdalle merkittiin arvo 1 soveltamisen kategorian vieressä oikealla puolella olevalle oranssille alueelle. Samoin toimittiin soveltamisen sekä analyysin kategorioihin luokiteltujen tehtävien kohdalla, luokiteltaessa nämä edelleen vaadittavan tiedon kategorioihin.

Lopulta saatiin taulukkolaskennan avulla lukumäärä tehtäville, joiden ratkaiseminen vaatii tietynlaista matemaattista osaamista ja matemaattista tietämistä. Näistä muodostettiin kuvien 6.1, 6.2, 6.3 ja 6.4 kaksiulotteiset taulukot, jossa riveillä ovat tiedon tasot ja sarakkeissa osaamisen tasot. Jokaisen kirjan tehtäville muodostettiin oma taulukko ja kaavio. Osaamisen ja tiedon tason yhdistetyissä 2-ulotteisissa taulukoissa on 16 kategoriaa: yksi taulukon solu vastaa yhtä kategoriaa. Tiettyä osaamista ja tietoa vaativien tehtävien havaintojen lukumäärää verrattiin kirjan tehtävistä tehtyjen kaikkien havaintojen kokonaismäärään ja muodostettiin näistä prosenttiluku, joka sijoitettiin taulukon soluun sitä vastaavan osaamisen ja tiedon yhdistetyn kategorian kohdalle. Kunkin kategorian kohdalla oleva prosenttiluku on kategoriaa vastaava prosentuaalinen frekvenssi. 2-ulotteisen taulukon ja prosentuaalisten frekvenssien perusteella muodostettiin kuvissa 6.1, 6.2, 6.3 ja 6.4 olevat kaaviot.

6 Tutkimustulokset

Kirjojen tehtävien luokittelun tuloksena saatiin yhteensä neljä kaaviota, joista kutakin tutkimukseen valittua kirjaa vastaa yksi kaavio. Käsitellään ensin jokaista kirjaa vastaava kaavio erikseen. Puretaan kuhunkin kirjaan liittyvä kaavio sanallisesti ja kerrotaan, millaiset prosentuaaliset frekvenssit matemaattisen osaamisen ja tiedon kategorioita vastaavat. Lisäksi kerrotaan jakaumien moodit ja variaatiosuhteet.

Tarkastellaan sen jälkeen asettuvatko tehtävät joihinkin kategorioihin useammin kuin toisiin ja miten merkitseviä erot ovat. Tarkastellaan myös millaisia samankaltaisuuksia ja eroavaisuuksia eri kirjoja vastaavien kaavioiden välillä on ja pohditaan millaiset tekijät voivat olla näiden taustalla ja miten merkitseviä samankaltaisuudet ja eroavaisuudet ovat. Tutkitaan vielä, onko eri kursseja vastaavien kirjojen kaavioissa samankaltaisuuksia tai eroavaisuuksia sekä, mitkä tekijät voivat olla näiden taustalla ja miten merkitseviä samankaltaisuudet ja eroavaisuudet ovat.

Jokaisessa neljässä kaaviossa on yhteensä 16 matemaattisen osaamisen ja tiedon kategoriaa ja jokaista kategoriaa vastaa pylväs, jonka korkeuden kategoriaa vastaava suhteellinen frekvenssi kertoo. Pylvään kohdalle on merkitty suhteellista frekvenssiä vastaava prosenttiluku.

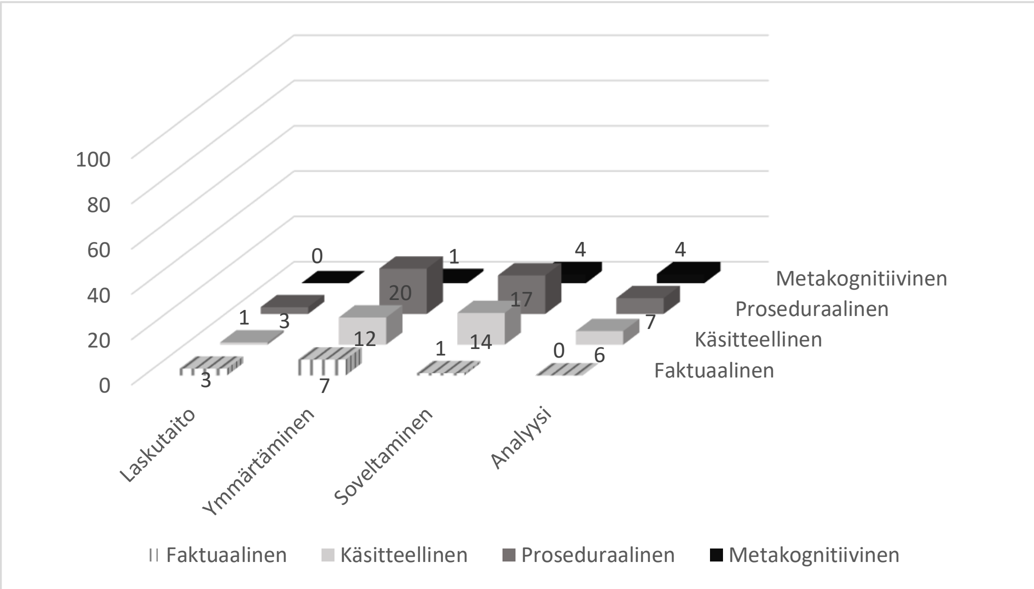
6.1 Tuloksena saadut kaaviot

6.1.1 Otavan Luvut ja lukujonot

Kuvan 6.1 kaavio vastaa Otavan Luvut ja lukujonot kirjaa. Otavan Luvut ja lukujonot kirjasta tutkimukseen valikoitui yhteensä $N_1 = 177$ tehtävää, joita luokiteltaessa tehtiin kokonaisuudessaan $N_{h,1} = 319$ havaintoa matemaattisen osaamisen ja tiedon kategorioihin. Laskemiskategorian tehtävät on luokiteltu tiedon kategorioissa faktuaalisiksi (3%), käsitteellisiksi (1%) tai proseduraalisiksi(3%). Metakognitiivista tietämistä vaativien laskutaitotehtävien (0%) prosentuaalinen frekvenssi on pyöristynyt nollaan. Ymmärtämistä vaativat tehtävät saattoivat kuulua mihin tahansa tiedon kategoriaan. Kuitenkin metakognitiivisia ymmärtämistehtäviä on vain (1 %), joten niitä on vähän. Hieman enemmän on faktuaalisia ymmärtämistehtäviä (7%). Eniten tehtävistä on joko proseduraalisia ymmärtämistehtäviä (20%) tai käsitteellisiä ymmärtämistehtäviä (12%).

Metakognitiivisia soveltamistehtäviä (4%) on enemmän kuin metakognitiivisia ymmärtämistehtäviä. Toisaalta faktuaalisia soveltamistehtäviä (1%) on vähemmän kuin faktuaalisia ymmärtämistehtäviä. Edelleen soveltamista vaativista tehtävistä suurin osa on käsitteellisiä soveltamistehtäviä (14 %) tai proseduraalisia soveltamistehtäviä (17 %). Analyysin kategorioissa pylväät eivät ole aivan yhtä korkeita kuin soveltamisen ja ymmärtämisen kategorioissa. Faktuaalisten analyysitehtävien (0 %) prosentuaalinen frekvenssi on pyöristynyt nollaan ja metakognitiivisten analyysitehtävien osuus (4 %) on metakognitiivisten sovellustehtävien tasolla. Käsitteellisten analyysitehtävien (6%) ja proseduraalisten analyysitehtävien (7%) prosentuaaliset frekvenssit ovat lähes samalla tasolla faktuaalisten ymmärtämistehtävien prosentuaalisen frekvenssin kanssa.

Merkittävin huomio Otavan Luvut ja lukujonot kirjaa vastaavasta kaaviosta on proseduraalisten tai käsitteellisten ymmärtämistehtävien ja proseduraalisten tai käsitteellisten soveltamistehtävien suuri osuus verrattuna muiden kategorioiden tehtäviin.



Otava; Luvut ja lukujonot (MAY1)				
	Laskutaito	Ymmärtäminen	Soveltaminen	Analyysi
Faktuaalinen	3	7	1	0
Käsitteellinen	1	12	14	6
Proseduraalinen	3	20	17	7
Metakognitiivinen	0	1	4	4

Kuva 6.1. Taulukko ja kaavio Otavan Luvut ja lukujonot kirjan tehtävien luokittelusta. Taulukossa ja kaaviossa kategorioiden prosentuaaliset frekvenssit, joiden summa ≈ 100%

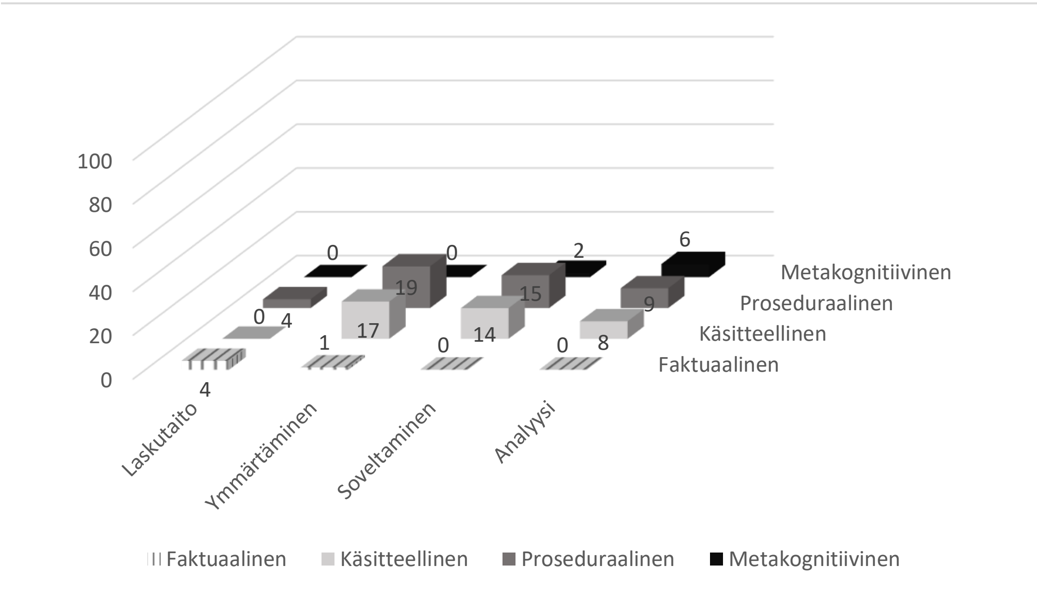
Kategorioiden moodi kuvan 6.1 taulukon arvojen perusteella on proseduraaliset ymmärtämistehtävät (20%), koska sillä on korkein prosentuaalinen frekvenssi. Variaatiosuhteeksi saatiin $0,8$ kaavalla 5.1.

6.1.2 Sanoma Pron Luvut ja lukujonot

Sanoma Pron Luvut ja lukujonot kirjasta tutkimukseen otettiin mukaan yhteensä $N_2 = 128$ tehtävää. Havaintojen kokonaismääräksi saatiin $N_{h,2} = 273$. Sanoma Pron Luvut ja lukujonot kirjaa vastaa kaavio 6.2. Kirjassa laskutaitotehtävät ovat faktuaalisia (4%) tai proseduraalisia (4%). Kaavion mukaan käsitteellisiä tai metakognitiivisia laskutaitotehtäviä ei kirjassa ole tai ainakin niiden prosentuaaliset frekvenssit ovat pyöristyneet nollaan. Ymmärtämisen kategoriassa tehtävät ovat painottuneet käsitteellisiin ymmärtämistehtäviin (17%) ja proseduraalisiin ymmärtämistehtäviin

(19%). Faktuaalisia ymmärtämistehtäviä (1%) ja metakognitiivisia ymmärtämistehtäviä (0%) on prosentuaalisesti hyvin vähän tai ei ollenkaan.

Faktuaalisia soveltamistehtäviä on prosentuaalisesti (0%) ja metakognitiivisia soveltamistehtäviä (2%). Soveltamisen kategoriassa tehtävät ovat painottuneet käsitteellisiin soveltamistehtäviin (14%) ja proseduraalisiin soveltamistehtäviin (15%). Edelleen faktuaalisten analyysitehtävien (0%) prosentuaalinen frekvenssi on pyöristynyt nollaan, mutta metakognitiiviset analyysitehtävät yltävät (6%) prosentuaaliseen frekvenssin. Proseduraalisia analyysitehtäviä (9%) ja käsitteellisiä analyysitehtäviä (8%) on keskenään lähes yhtä suuret prosentuaaliset osuudet.



Sanoma Pro: Yhteinen tekijä lukion matematiikka 1; Luvut ja lukujonot (MAY1)				
	Laskutaito	Ymmärtäminen	Soveltaminen	Analyysi
Faktuaalinen	4	1	0	0
Käsitteellinen	0	17	14	8
Proseduraalinen	4	19	15	9
Metakognitiivinen	0	0	2	6

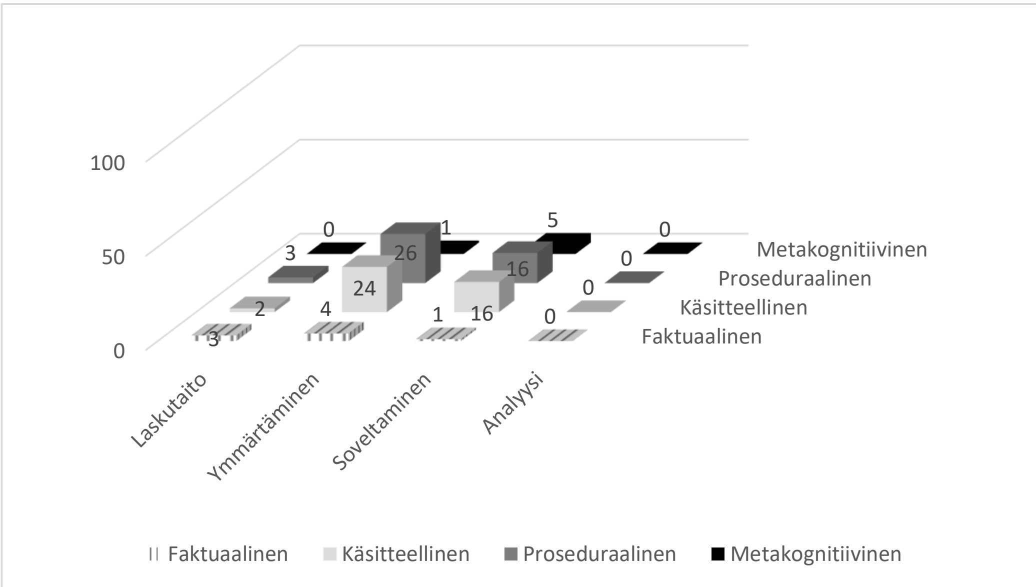
Kuva 6.2. Taulukko ja kaavio Sanoma Pron Luvut ja lukujonot kirjan tehtävien luokittelusta. Taulukossa ja kaaviossa kategorioiden prosentuaaliset frekvenssit, joiden summa $\approx 100\%$

Moodiksi kategorioille saatiin kuvan 6.2 taulukon perusteella proseduraaliset ymmärtämistehtävät, joiden frekvenssi on 19%. Variaatiosuhteeksi saatiin $0,81$ kaavalla 5.1.

6.1.3 Otavan Talousmatematiikka

Kirjasta Otavan Talousmatematiikka tutkimukseen valittiin $N_3 = 132$ tehtävää. Näille tehtäville kertyi yhteensä $N_{h,3} = 258$ havaintoa matemaattisen osaamisen ja tiedon kategorioihin. Otavan Talousmatematiikka kirjan tehtävien luokittelua vastaa kaavio 6.3. Faktuaalisten laskemistehtävien (3%), käsitteellisten laskemistehtävien (2%) ja proseduraalisten laskemistehtävien (3%) prosentuaaliset frekvenssit ovat lähes yhtä suuret. Metakognitiivisten laskutehtävien (0%) prosentuaalinen frekvenssi on tässäkin kaaviossa pyöristynyt nollaan. Faktuaalisia ymmärtämistehtäviä (4%) ja metakognitiivisia ymmärtämistehtäviä (1%) on paljon pienemmät prosentuaaliset osuudet kuin käsitteellisiä ymmärtämistehtäviä (24%) tai proseduraalisia ymmärtämistehtäviä (26%). Käsitteellisten ymmärtämistehtävien ja proseduraalisten ymmärtämistehtävien frekvenssit ovat lähellä toisiaan kuten ovat myös käsitteellisten soveltamistehtävien (16%) ja proseduraalisten soveltamistehtävien (16%) frekvenssit lähellä toisiaan. Faktuaalisten soveltamistehtävien (1%) ja metakognitiivisten soveltamistehtävien (5%) frekvenssit jäävät kauas käsitteellisten soveltamistehtävien ja proseduraalisten soveltamistehtävien frekvensseistä.

Analyysin kategorioissa prosentuaaliset frekvenssit ovat (0%) Otavan Talousmatematiikka kirjassa, mikä täytyy ottaa huomioon ja pohtia mistä tämä johtuu. On myös huomattava, että käsitteellisen ymmärtämisen ja proseduraalisen ymmärtämisen kategorioissa on tässä kaaviossa suuremmat frekvenssit kuin kahdessa aikaisemmassa kaaviossa, joten täytyy tarkastella tämän merkittävyyttä ja mistä tämä johtuu.



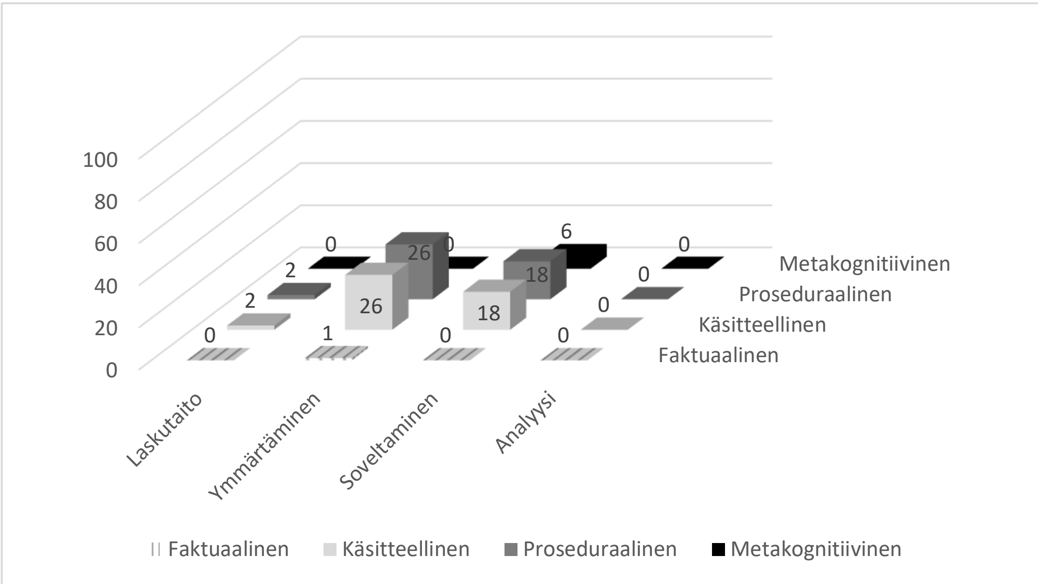
Otava: Huippu 6; Talousmatematiikka (MAB6)				
	Laskutaito	Ymmärtäminen	Soveltaminen	Analyysi
Faktuaalinen	3	4	1	0
Käsitteellinen	2	24	16	0
Proseduraalinen	3	26	16	0
Metakognitiivinen	0	1	5	0

Kuva 6.3. Taulukko ja kaavio Otavan Talousmatematiikka kirjan tehtävien luokittelusta. Taulukossa ja kaaviossa kategorioiden prosentuaaliset frekvenssit, joiden summa ≈ 100%

Kuvan 6.3 taulukon perusteella kategorioiden moodi on proseduraaliset ymmärtämistehtävät, joiden frekvenssi on 26%. Variaatiosuhteeksi laskettiin 0, 74 kaavan 5.1 mukaisesti.

6.1.4 Sanoma Pron Talousmatematiikka

Sanoma Pron Talousmatematiikka kirjasta tutkittiin $N_4 = 96$ tehtävää. Tehtäville kertyi havaintoja matemaattisen osaamisen ja tiedon kategorioihin yhteensä $N_{h,4} = 208$. Kyseisen kirjan tehtävien luokittelua vastaa kuvan 6.4 kaavio. Kuten muissakin kaavioissa myös tässä kaaviossa laskemisen kategorioihin on luokiteltu melko vähän tehtäviä. Tällä kertaa faktuaalisten laskutaitotehtävien prosentuaalinen frekvenssi (0%) ja metakognitiivisten laskemistehtävien (0%). Metakognitiivisten laskutehtävien prosentuaalinen frekvenssi on 0% jokaisessa kirjassa kaavioiden mukaan. Käsitteellisten laskutehtävien (2%) ja proseduraalisten laskutehtävien (2%) frekvenssit eivät tässäkään kaaviossa kasva kovin suuriksi.



Sanoma Pro: Tekijä Lyhyt Matematiikka 6; Talousmatematiikka (MAB6)				
	Laskutaito	Ymmärtäminen	Soveltaminen	Analyysi
Faktuaalinen	0	1	0	0
Käsitteellinen	2	26	18	0
Proseduraalinen	2	26	18	0
Metakognitiivinen	0	0	6	0

Kuva 6.4. Taulukko ja kaavio Sanoma Pron Talousmatematiikka kirjan tehtävien luokittelusta. Taulukossa ja kaaviossa kategorioiden prosentuaaliset frekvenssit, joiden summa $\approx 100\%$

Faktuaalisten ymmärtämistehtävien (1%) ja metakognitiivisten ymmärtämistehtävien (0%) frekvenssit ovat vähäiset, mutta jälleen suuri osuus tehtävistä on luokiteltu käsitteellisiksi ymmärtämistehtäviksi (26%) tai proseduraalisiksi ymmärtämistehtäviksi (26%). Jonkin verran pienempi osuus tehtävistä on käsitteellisiä soveltamistehtäviä (18%) tai proseduraalisia soveltamistehtäviä (18%). Metakognitiivisten soveltamistehtävien (6%) frekvenssi on jälleen korkeammalla tasolla kuin faktuaalisten soveltamistehtävien (0%) frekvenssi kuten kaaviossa 6.3.

Analyysitason tehtävien prosentuaaliset frekvenssit ovat kaikki (0%) tässäkin kaaviossa kuten kaaviossa 6.3. Edelleen tehtävät näyttävät tässäkin kirjassa kaavion mukaan painottuneen käsitteellisen ymmärtämisen, proseduraalisen ymmärtämisen, käsitteellisen soveltamisen ja proseduraalisen soveltamisen kategorioihin.

Proseduraaliset ymmärtämistehtävät tai käsitteelliset ymmärtämistehtävät voivat olla molemmat kategorioiden moodeja tästä kirjasta muodostetulle havaintoaineistolle. Moodi on kahta suurinta prosentuaalista frekvenssiä vastaavista kategorioista toinen, koska niiden frekvenssit (26%) ovat yhtä suuret. Variaatiosuhde tässä havaintojoukossa on $0,74$ kaavalla 5.1 .

6.2 Vertailua

6.2.1 Eroja ja samankaltaisuuksia kirjojen ja kurssien välillä

Kaavioista on havaittavissa, että lukiokirjojen lukujonoihin ja summiin liittyvistä tehtävistä huomattavasti suurimmat prosentuaaliset frekvenssit kaikissa tutkituissa kirjoissa ovat ymmärtämisen ja käsitteellisen tiedon, ymmärtämisen ja proseduraalisen tiedon, soveltamisen ja käsitteellisen tiedon tai soveltamisen ja proseduraalisen tiedon kategorioissa. Sama kuvio toteutuu jokaista neljää kirjaa vastaavassa kaaviossa. Edellä mainittuihin kategorioihin kuuluu Otavan Luvut ja lukujonot kirjassa ($12\% + 20\% + 14\% + 17\% = 63\%$), Sanoma Pron luvut ja lukujonot kirjassa ($17\% + 19\% + 14\% + 15\% = 65\%$), Otavan Talousmatematiikka kirjassa ($24\% + 26\% + 16\% + 16\% = 82\%$) ja Sanoma Pron Talousmatematiikka kirjassa ($26\% + 26\% + 18\% + 18\% = 88\%$) osuudet. Kaikissa kirjoissa kategorioiden moodi on proseduraaliset ymmärtämistehtävät, joiden prosentuaaliset frekvenssit vastaavasti 20%, 19%, 26% ja 26%. Lisäksi Sanoma Pron Talousmatematiikka kirjassa moodi voi olla myös käsitteelliset ymmärtämistehtävät, jonka prosentuaalinen frekvenssi on 26%.

Havainnot eivät ole painottuneet ainoastaan moodikategorioihin missään kirjassa, vaan havainnoissa voidaan sanoa olevan enemmän hajontaa kuin painottumista moodikategoriaan, koska variaatiosuhteet $0,8$, $0,81$, $0,74$ ja $0,74$ ovat lähempänä lukua 1 kuin lukua 0. MAB6 -kurssia vastaavissa kirjoissa havainnot ovat enemmän painottuneet moodikategoriaan kuin MAY1 -kurssia vastaavissa kirjoissa.

Erityisesti molemmissa talousmatematiikan kirjoissa tehtävät ovat enemmän joko soveltamisen tai ymmärtämisen kategorioihin painottuvia käsitteellisiä tai proseduraalisia tehtäviä (88% ja 82%), kuin MAY1 -kurssia vastaavissa Luvut ja lukujonot kirjoissa (63% ja 65%). Painottuminen näkyy variaatiosuhteista ja edellä mainituista prosenttiluvuista.

Kummassakin talousmatematiikan kirjassa analyysin kategorioihin luokiteltujen tehtävien prosentuaaliset frekvenssit ovat 0%. Liitteestä B nähdään taulukkojen oranssien osuuksien viimeiseltä riviltä, että yhtään tehtävää ei ole luokiteltu kuuluvaksi faktuaalisen analyysin, käsitteellisen analyysin, proseduraalisen analyysin tai metakognitiivisen analyysin kategorioihin. Tämän vuoksi kategorioiden suhteellisten frekvenssien täytyy olla 0%. Luokiteltaessa Huippu Talousmatematiikan ja Tekijä Talousmatematiikan kirjojen tehtäviä, tehtävä saattoi saada joitain kategorian D.0 tarkempia piirteitä, mutta ei kuitenkaan niin monta, että se olisi luokittelumallin perusteella voitu luokitella kategorian D.0 tehtäväksi. Tämän vuoksi tehtävät, jotka kuuluivat lähes kategoriaan D.0 sijoittuivat luokittelussa lopulta joko ymmärtämisen kategoriaan B.0 tai soveltamisen kategoriaan C.0 ja näin kategorian D.0 tehtäviä ei kertynyt talousmatematiikan kirjojen tehtävien luokittelussa.

MAB6 -kurssin kirjojen tehtävät eivät liitteen B mukaan sisällä ollenkaan analyysin kategorian D.0 tarkempia piirteitä D.5, D.4 ja D.3, joissa pitää muodostaa tai vahvistaa yleistyksiä, rakentaa todistuksia tai arvioida ja tarkastella todistuksia kriittisesti. Tämä on tarkempi syy, miksi tehtäviä ei ole luokiteltu kategoriaan D.0. MAB6 -kurssin tehtävissä on tehtäviä, joissa vaaditaan ei-rutiinitehtävän ratkaisemista ja suunnittelua D.1 ja relaation löytämistä D.2. Näiden kahden piirteen täyttyminen ei kuitenkaan vielä riitä, että tehtävä kuuluisi kategoriaan D.0. Koska todistuksen rakentamista ja suunnittelua D.3, todistuksen kriittistä tarkastelua ja arviointia D.4 sekä yleistyksen muotoilua, vahvistamista ja tuottamista D.5 ei ole MAB6 -kurssin tehtävissä, eivät tehtävät tästä syystä yllä aivan analyysin kategorioiden tehtäviksi.

MAY1 -kurssin kirjoissa analyysin kategorioita vastaavia tehtäviä esiintyy. Otavan kirjassa niitä on $(0\% + 6\% + 7\% + 4\% = 17\%)$ ja Sanoma Pron kirjassa $(0\% + 8\% + 9\% + 6\% = 23\%)$ osuudet. Laskemisen kategorioiden tehtäviä näissä kirjoissa on vastaavasti $(0\%+3\%+1\%+3\% = 7\%)$ ja $(4\%+0\%+4\%+0\% = 8\%)$ osuudet. Kuitenkin sekä D.0 että A.0 tehtäviä on huomattavasti vähemmän kuin ymmärtämisen kategorian B.0 ja soveltamisen kategorian C.0 tehtäviä.

Sekä MAB6 -kurssin että MAY1 -kurssin kirjoissa laskutaidon kategorian A.0 tehtäviä on hyvin vähän. Otavan Luvut ja lukujonot kirjassa laskutaidon tehtäviä havaittiin olevan $(3\% + 1\% + 3\% + 0\% = 7\%)$, Sanoma Pron Luvut ja lukujonot kirjassa $(4\% + 0\% + 4\% + 0\% = 8\%)$, Otavan Talousmatematiikka kirjassa $(3\% + 2\% + 3\% + 0\% = 8\%)$ ja Sanoma Pron Talousmatematiikka kirjassa $(0\% + 2\% + 2\% + 0\% = 4\%)$ osuudet. Kaikkia kirjoja yhdistää se, että metakognitiivisten laskemistehtävien prosentuaalinen frekvenssi on 0% . Muuten kategorian A.0 tehtävät ovat jakautuneet melko tasaisesti faktuaalisiin laskemistehtäviin, käsitteellisiin laskemistehtäviin ja proseduraalisiin laskemistehtäviin. Erot näiden frekvensseissä ovat korkeintaan 4 prosenttiyksikön luokkaa, joten on vaikea sanoa, onko havaittavissa jonkinlaista säännönmukaisuutta näissä kategorioissa olevien frekvenssien välillä. Jos jonkinlaista säännönmukaisuutta olisi, tehtävät saattaisivat olla useammin faktuaalisia laskemistehtäviä tai proseduraalisia laskemistehtäviä kuin käsitteellisiä laskemistehtäviä.

6.2.2 Proseduraalisuuden ja käsitteellisyyden osuudet suuret

Tehtävien jakautumisessa on havaittavissa, että huomattavan suuressa osuudessa tehtävistä täytyy käyttää proseduraalista tai käsitteellistä tietoa olivatpa nämä sitten osaamisen tasolla laskemis-, ymmärtämis-, soveltamis- tai analyysitehtäviä. Otavan Luvut ja lukujonot kirjassa edellä mainittuihin kategorioihin kuuluu 80% Sanoma

Pron Luvut ja lukujonot kirjassa 86% Otavan Talousmatematiikka kirjassa 87% ja Sanoma Pron Talousmatematiikka kirjassa 92% tehdyistä havainnoista.

Proseduraalista ja käsitteellistä tietoa vaativien tehtävien piirteet ovat keskenään hyvin paljon samankaltaisia tai toinen toistaan tukevia. Algoritmien, tekniikoiden ja määrittelyjen kriteerien tietämisessä on paljon samankaltaisia piirteitä kuin luokittelujen ja periaatteiden sekä teorioiden ja mallien tietämisessä. Määrittelyjen kriteerit sisältyvät usein teorioihin, malleihin tai periaatteisiin. Teorioiden, mallien, rakenteiden tai periaatteiden tietäminen, joissain tapauksissa implisiittisesti sisältää määrittelyjen kriteerien tietämisen. Algoritmit ja ratkaisemisen tekniikat ovat tapa käyttää määrittelyjen kriteerejä, luokitteluja, periaatteita, teorioita, malleja ja rakenteita oikeassa järjestyksessä tehtävän ratkaisemisen kannalta. Selvästi suuressa osassa luokitelluista tehtävistä näitä käsitteellisen ja proseduraalisen tiedon piirteitä vaaditaan usein.

6.3 Tiedon ja osaamisen kategorioiden yhteyksiä sisällöllisesti

Analysoidaan sisällöllisesti syitä, joiden vuoksi Otavan ja Sanoma Pron Luvut ja lukujonot kirjoissa (63% ja 65%) sekä Otavan ja Sanoma Pron Talousmatematiikka kirjoissa (82% ja 88%) on prosentuaalisesti suuret osuudet käsitteellisiä ymmärtämistehtäviä, käsitteellisiä soveltamistehtäviä, proseduraalisia ymmärtämistehtäviä ja proseduraalisia soveltamistehtäviä.

Tehtävässä, joka on luokiteltu ymmärtämisen kategoriaan, vaaditaan tehtävien loogisuuden seuraamista, ongelman tunnistamista ja tehtävän osien muokkaamista muodosta toiseen, matemaattisen rakenteen ymmärtämistä, periaatteiden sääntöjen ja yleistysten ymmärtämistä sekä käsitteiden ymmärtämistä. Intuitiivisesti ajatellen näyttää, että tällöin tehtävässä saatetaan vaatia myös tietoa luokitteluista ja kategorioista, tietoa periaatteista ja yleistyksistä sekä tietoa teorioista malleista ja rakenteista. Toisaalta edelleen näyttää intuitiivisesti, että ymmärtämisen kategoriaan luokitetussa tehtävässä saatettaisiin myös vaatia tietoa algoritmeista, tekniikoista, metodeista sekä määrittelyjen kriteereistä. Edelliset ovat käsitteellisen tiedon kategorian piirteitä ja jälkimmäiset ovat proseduraalisen tiedon kategorian piirteitä. Matemaattiset rakenteet ovat loogisia, sisältävät periaatteita sääntöjä ja yleistyksiä, matemaattista käsitteistöä, kriteereitä ja määrittelyjä. Siis näyttää intuitiivisesti siltä, että käsitteellisyys ja proseduraalisuus olisivat implisiittisesti osa tehtävää, jossa vaaditaan ymmärtämistä.

Toisaalta voidaan nähdä intuitiivisesti yhteys myös soveltamisen kategorian ja käsitteellisen sekä proseduraalisen tietämisen välillä. Soveltamisen kategoriaan luokitellussa tehtävässä vaaditaan erityisesti kaavojen tai kuvioiden tunnistamista, tietoaineistojen analysointia, vertailua sekä rutiiniongelmien ratkaisemista. Toisaalta osaamisen kumulatiivisen luonteen takia myös ymmärtämistason osaamista vaaditaan tehtävissä, joissa pitää lisäksi pystyä soveltamaan. Rutiiniongelma merkitsee, että tehtävätyyppi on tuttu ja sitä on harjoiteltu esimerkeissä muissa tehtävissä. Rutiiniongelma voidaan ratkaista soveltaen tuttua algoritmia ja tuttuja teorioita, malleja, rakenteita, määrittelyjä, tekniikoita, metodeja sekä muita proseduraalisen ja käsitteellisen tiedon kohtia. Kaavojen ja kuvioiden tunnistus edellyttää, että tiedossa on laaja valikoima tuttuja kaavoja ja kuvioita, joista osataan valita tehtävän ratkaisemiseen soveltuva kaava. Kaavat voivat olla peräsin matemaattisista teorioista tai rakenteista tai niiden havaitsemiseen pitää pystyä soveltamaan algoritmia. Kaavan tunnistamista vaativassa tehtävässä on käsitteellisen ja proseduraalisen tietämisen piirteitä. Vertailemisessa täytyy pystyä ajattelemaan mielessään käsitteellisesti ja proseduraalisesti erilaisia vaihtoehtoja ja näkemään vaihtoehtojen välillä yhtäläisyyksiä tai eroavaisuuksia. Esimerkiksi pitää pystyä muodostamaan vertailualgoritmi, jossa verrataan ovatko vertailtavien asioiden matemaattiset rakenteet samanlaiset tai millaisia eroja rakenteissa on.

Jos tehtävä luokitellaan joko ymmärtämistä vaativaksi tehtäväksi tai soveltamista vaativaksi tehtäväksi, siinä voisi siis edellisten kappaleiden sisällöllisen analyysin perusteella odottaa vaadittavan proseduraalista tietämistä tai käsitteellistä tietämistä. Tämä näyttää tulosten mukaan myös toteutuvan usein, koska käsitteellisiä ymmärtämistehtäviä, käsitteellisiä soveltamistehtäviä, proseduraalisia ymmärtämistehtäviä ja proseduraalisia soveltamistehtäviä on kirjoissa (63% ja 65%) sekä (82% ja 88%) prosentuaaliset osuudet.

7 Tutkimuksen luotettavuuden arviointi

Arvioidaan tutkimuksen luotettavuutta reflektoivasti koko tutkimusprosessi huomioon ottaen: reflektoidaan, miten hyvin tutkimus mittaa juuri sitä ilmiötä, jota tutkitaan ja mikä on tutkimuksessa käytettyjen mittarien kyky mitata aina samaa asiaa. Pohditaan tutkimusta vaihe vaiheelta, mitkä ovat olleet onnistuneita valintoja ja mitä voisi mahdollisesti muuttaa. Onko päästy haluttuun päämäärään eli vastattu tutkimuskysymyksiin ja millainen on tulosten yleistettävyys.

Tutkimuksessa käytettävä luokittelumalli on muodostettu aikaisempien osaamisen ja tiedon teorioiden [17] ja [9] pohjalta ja siten tieteellisesti hyväksyttyjen teorioiden perusteella. Samankaltaista tehtävien luokittelua on tehty lähteiden [17] ja [9] tutkimuksissa, mutta ilman prosentuaalisten frekvenssien muodostamista. Wilsonin taksonomia on erityisesti kehitetty matemaattisen osaamisen tutkimiseen ja Krathwolin taksonomiaa on käytetty tehtävänantojen ja tehtävän ohjeiden perusteella tapahtuvaan luokitteluun. Krathwolin taksonomia ei ole erityisesti matematiikan tehtävien luokitteluun kehitetty, mutta taksonomioiden esittelyssä luvussa 4 siinä havaittiin olevan matematiikan tehtävien luokitteluun soveltuvia piirteitä.

Tutkielmassa luokitteluun käytetyn mallin alkuehdot on selitetty perusteellisesti ja on kerrottu, miten tehtävä luokitellaan tiettyyn kategoriaan. Lisäksi on annettu sanoja, kysymyksenasetteluja ja rakenteita tehtävänannoissa, jotka liittyvät tiettyyn kategoriaan luokiteltaviin tehtäviin ja tiettyä matemaattista osaamista ja tietoa vaativista tehtävistä on annettu esimerkkejä. Tutkimuksessa kerrottiin yksityiskohtaisesti, miten tehtävä luokitellaan tiettyyn kategoriaan, jotta voitiin vähentää satunnaisuuden vaikutusta luokittelun tuloksiin. Luokittelumalli ei ole kuitenkaan täysin yksikäsitteinen, joten luokiteltaessa samaa aineistoa useita kertoja, saataisiin hieman toisistaan poikkeavia jakaumia.

Prosentuaaliset frekvenssit on tunnettu tilastotieteellinen tapa kertoa luokitellun aineiston suhteellisesta jakautumisesta. Sanallisen luokitteluasteikon keskilukuna ei voida käyttää moodin sijasta muita keskilukuja eikä variaatiosuhteen sijasta muita hajontalukuja. [11] [10]

Tehtävät on valittu neljästä kirjasta ja kahdesta eri kirjasarjasta. Tehtävät ovat kahteen eri lukion kurssiin MAY1 ja MAB6 liittyviä. Tämä tuo tutkimuksen aineistoon lisää laajuutta ja pyrkii tuomaan tulosten yleistettävyydelle lisää perusteita. Kaikissa kirjoissa jakaumista tehdyt havainnot tukevat toisiaan ja moodi on jokaisessa jakaumassa proseduraaliset ymmärtämistehtävät. Käytetty malli näyttää ainakin tässä tutkimuksessa tuottavan samansuuntaisia tuloksia kaikkien kirjojen luokiteltujen tehtävien jakaumaksi. Tutkimuksen perusteella ei kuitenkaan voida yleistää tuloksia koskemaan kaikkia lukiokirjoja, koska ei olla tehty tilastotieteellistä testiä kuten χ^2-testiä, jonka perusteella voitaisiin tilastollisesti perustella yleistyvyys tai yleistymättömyys perusjoukkoon. Tuloksista voidaan saada vertailukohtia ja olettamuksia, miten tehtävät saattaisivat muissa kirjoissa olla jakautuneita. Tutkimus vastaa tutkimuskysymyksiin luvussa 6. Kaikkiin tutkimuskysymyksiin saadaan vastaus.

8 Johtopäätökset

Luokittelumallin muodostus

Tutkimuksen ensimmäisenä tavoitteena oli muodostaa luokittelumalli, jolla voidaan luokitella matematiikan tehtäviä niiden ratkaisemisessa vaadittavan matemaattisen osaamisen ja matemaattisen tiedon kategorioihin. Kun malli oli muodostettu, seuraavana tavoitteena oli esitellä malli ja miten luokittelu sen avulla tapahtuu. Tässä yhteydessä esiteltiin esimerkkitehtäviä, jotka luokiteltiin tiettyihin kategorioihin ja lisäksi millaiset sanavalinnat, rakenteet ja kysymyksenasettelut tehtävänannossa vaikuttavat siihen mihin kategoriaan tehtävä luokitellaan. Pyrittiin tuomaan mahdollisimman yksityiskohtaisesti näkyväksi, miten mallin avulla tehtäviä luokitellaan.

Kun tehtäviä luokitteleva havaitsija käyttää kyseistä luokittelumallia sekä tilastollisia tunnuslukuja ja sisällöllistä analyysia saman aineiston tutkimiseen, jota käytettiin tässä tutkimuksessa, hänen voidaan odottaa päätyvän samankaltaisiin tuloksiin kuin tässä tutkimuksessa. Ei voida kuitenkaan täysin yksiselitteisesti määritellä, miten tehtävät luokitellaan osaamisen ja tiedon kategorioihin, joten kahta täysin identtistä luokittelua tuskin on mahdollista saada aikaan. Tämän tutkimuksen mukaan ei kuitenkaan ole syytä, miksi tehtäessä samalle aineistolle useita luokitteluja useiden havaitsijoiden toimesta, ei saataisi samansuuntaisia tuloksia kaikissa tapauksissa. Tulosten yleistyvyydestä perusjoukkoon kaivattiin lisää tietoa ja todettiin, että yleistyvyyttä voitaisiin mahdollisesti tutkia χ^2 -testillä.

Tulokset

Tutkimuksen tulokset näyttävät, että suurin osa tutkimukseen valikoituneista tehtävistä eri kirjoissa kuvien 6.1, 6.2, 6.3 ja 6.4 perusteella on matemaattista osaamista ja tietoa luokiteltaessa joko ymmärtämistehtäviä tai soveltamistehtäviä, joissa vaaditaan käsitteellistä tai proseduraalista tietoa.

Näyttää myös intuitiivisesti ajatellen, että tämäntyyppisiä tehtäviä pitää olla kirjoissa eniten. Proseduraalisuus ja käsitteellisyys vaikuttavat olevan sisäänrakennettuja ominaisuuksia soveltamisen ja ymmärtämisen kategorioiden tehtävissä.

Ymmärtämisen ja soveltamisen tehtävät ovat algoritmisen ja rutiininomaisen luonteensa vuoksi sellaisia, että monipuolinen ja runsas harjoittelu saattaa lisätä tehtävissä suoriutumisen nopeutta ja sujuvuutta. Analyysin kategorian tehtävät ovat vaativimpia. Niissä vaaditaan enemmän ei-rutiininomaista lähestymistapaa, jossa pitää pystyä keksimään sopiva ratkaisustrategia ja keksimään jotain uutta. Tällaiset tehtävät voivat olla aikaa vieviä ja niissä ratkaisua on vaikeampi löytää pelkkien vanhojen toimintamallien avulla.

On loogista, että sellaisia tehtäviä, joihin on helpompi löytää ratkaisu, kuin analyysitehtäviin, on tehtävistä enemmän, jolloin onnistumiset ruokkivat itseluottamusta. Ymmärtämis- ja soveltamistehtävät ovat sopivan vaativia, mutta eivät kuitenkaan liian helppoja, joten on loogista, että tällaisia tehtäviä on eniten. Analyysin kategorian tehtäviä pitää olla, jotta olisi vielä mahdollisuus lisätä vaativuutta, jos muiden tasojen tehtävät ovat liian helppoja.

MAY1 -kurssia vastaavien kirjojen tehtävissä on enemmän analyysin kategoriaan luokiteltuja tehtäviä kuin MAB6 -kurssia vastaavissa kirjoissa. MAB6 -kurssia vastaavissa kirjoissa ei ole prosentuaalisesti ollenkaan analyysitason tehtäviä. Yhtenä syynä tähän voi olla se, että ymmärtämistä tai soveltamista vaativien proseduraalisten tai käsitteellisten tehtävien harjoitteleminen nähdään lukiolaisen lyhyenmatematiikan opiskelijan tavoitteiden kannalta olennaisemmaksi kuin vaativien analyysitehtävien harjoitteleminen. Analyysitehtävät voivat viedä paljon aikaa ja niihin kulutettu aika olisi siten pois harjoittelemisesta edellä mainituissa tehtävätyypeissä. Analyysitason tehtävät saatetaan mieltää myös liian teoreettisiksi ja niiden yhteys käytännöllisempään matematiikkaan voidaan nähdä ohuena, joten myös se voi olla yksi syy ymmärtämistä tai soveltamista vaativien proseduraalisten tai käsitteellisten tehtävien vähäiseen määrään, etenkin lyhyessä matematiikassa, jota ei yleensä mielletä niin teoreettiseksi kuin pitkää matematiikkaa.

Myös laskutaitotehtävien vähäinen prosentuaalinen osuus tulee esille tutkimustuloksista. Yksi mahdollinen syy laskutaitotehtävien vähäiseen määrään on se, että olennaisimmaksi nähdään soveltamis- ja ymmärtämistehtävien, joissa vaaditan proseduraalista ja käsitteellistä tietoa, harjoittelemisen. Tällöin on loogista, että laskutaitotehtäviä ei ole niin paljon kuin soveltamis-, ja ymmärtämistehtäviä. Toki laskutaitoa tarvitaan jokaisella osaamisen tasolla edelleen, vaikka tehtävää ei puhtaasti laskutaitotehtäväksi luokiteltukaan tutkimuksessa.

Kaikkien kirjojen kuvio on samantapainen eli käsitteellisiä tai proseduraalisia ymmärtämistehtäviä sekä käsitteellisiä tai proseduraalisia soveltamistehtäviä on suurimmat prosentuaaliset osuudet. MAB6 -kurssia vastaavissa kirjoissa tehtävien puuttuminen analyysin tasoilta näyttää kasvattava niiden tehtävien prosentuaalista osuutta, jotka kuuluvat ymmärtämisen ja soveltamisen tasolle. Laskemistason tehtäviä on edelleen hyvin vähän myös MAB6 -kurssin tehtävissä, kuten MAY1 -kurssin tehtävissä.

Lähteet

[1] Adams, R. A.; Essex, C. *Calculus: A Complete Course*. Canada: Pearson Education Limited, 2013.

[2] Ekonen, M.; Hassinen, S.; Heiskanen, P.; Hemmo, K.; Kaakinen, P.; Tahvanainen, J.; Taskinen, T. *Yhteinen tekijä: Lukion matematiikka 1*. Helsinki, Sanoma Pro Oy, 2017.

[3] Hollanti, C. *Analyysi 2 luennot*. [Verkkojulkaisu]. Tampereen yliopisto, 2010. [Viitattu 20.3.2020]. Saatavilla: www.sis.uta.fi/matematiikka/analyysi-2/Analyysi2.pdf

[4] Hassinen, S.; Taskinen, T. *Yhteinen tekijä: Lyhyt matematiikka 6, Talousmatematiikka*. Helsinki, Sanoma Pro Oy, 2018.

[5] Häkkinen, K. *Matematiikan peruskurssi, talousmatematiikan osio*. [Verkkojulkaisu]. Jyväskylän yliopisto, 2002. [Viitattu 20.3.2020]. Saatavilla: http://www.math.jyu.fi/matyl/peruskurssi/talousmatematiikkaa/korkor3.8.htm#pgfId-1219609

[6] Koivisto, P. *Analyysi 1 luennot*. [Verkkojulkaisu]. Tampereen yliopisto, 2016. [Viitattu 20.3.2020]. Saatavilla: https://trepo.tuni.fi/bitstream/handle/10024/99677/978-952-03-0222-1.pdf?sequence=1&isAllowed=y

[7] Koivisto, P.; Merikoski, J.; Virtanen, A. *Johdatus diskreettiin matematiikkaan*. [Verkkojulkaisu]. Tampere, 2004. [Viitattu 20.3.2020]. Saatavilla: www.sis.uta.fi/ maarvi/MTTMY1/dm.pdf

[8] Kurvinen, S.; Ottelin, J.; Parmanen, K.; Santavuori, T.; Tauriainen, T.; Vallineva, S. *Huippu Talousmatematiikka*. Helsinki, Kustannusosakeyhtiö Otava, 2017.

[9] Krathwol, D. R. *Revision of Bloom's Taxonomy: An Overview*. [Verkkojulkaisu]. Ohio State University, 2002. [Viitattu 13.4.2020]. Saatavilla: https://pdfs.semanticscholar.org/b479/833ef239f84f904085089b8a434c6346cd48.pdf

[10] KvantiMOTV verkkosivusto. *Kvantitatiivisten menetelmien tietovaranto*. [Verkkojulkaisu]. Yhteiskuntatieteellinen tietoarkisto, 2013. [Viitattu 13.4.2020]. Saatavilla: https://www.fsd.tuni.fi/menetelmaopetus/hajontaluvut/hajontaluvut.html

[11] KvantiMOTV verkkosivusto. *Kvantitatiivisten menetelmien tietovaranto*. [Verkkojulkaisu]. Yhteiskuntatieteellinen tietoarkisto, 2013. [Viitattu 13.4.2020]. Saatavilla: https://www.fsd.tuni.fi/menetelmaopetus/keskiluvut/keskiluvut.html

[12] Lehtinen, M. *Matematiikan historia*. [Verkkojulkaisu]. Suomi: Matematiikkalehti Solmu 2014. [Viitattu 20.3.2020]. Saatavilla: https://matematiikkalehtisolmu.fi/2000/mathist/index.html

[13] Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015. [Verkkojulkaisu] Suomi: Opetushallituksen verkkosivu. [Viitattu 20.3.2020] Saatavilla: https://www.oph.fi/fi/tilastot-ja-julkaisut/julkaisut/lukion-opetussuunnitelman-perusteet-2015.

[14] Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019. [Verkkojulkaisu]. Suomi: Opetushallituksen verkkosivu: eperusteet. [Viitattu 20.3.2020] Saatavilla: https://eperusteet.opintopolku.fi/beta/#/fi/lukiokoulutus/6828810/tiedot

[15] Joutsenlahti, J.; Räsänen, P. ja Silfverberg, H. *Matematiikan opetus ja oppiminen*. Niilo Mäki Instituutti, 2018.

[16] Salas; Hille, E.; Etgen, G. J. *One and several variable calculus, ninth edition*. New York: John Wiley & Sons, Inc, 2003.

[17] Wilson, J. W. *Evaluation of Learning in Secondary School Mathematics*. Teoksessa; Bloom, B. S.; Hastings, J. T.; Madaus, G. F. *Handbook on formative and summative evaluation of student learning*. New York: McGraw-Hill, 1971. 643–696.

Liite A: Luokittelujen taulukot

Oikealla olevissa osaamisen kategorioissa A.0-D.0 on asetettu tehtävä siihen kategoriaan, johon se vasemmalla kohtien A.1-D.5 luokittelun perusteella kuuluu.

Sinisellä pohjalla osaamisen kategoriat.
Oranssilla pohjalla tiedon kategoriat.

Esimerkki: Tehtävä 208 on luokiteltu oikealla kategoriaan Ymmärtäminen B.0 (Sininen pohja), vasemmalla olevan luokittelun perusteella.

Lisäksi se on luokiteltu faktuaalista (F) ja proseduraalista (P) tietoa vaativaksi tehtäväksi (Oranssi pohja).

Kirja: Otavan matematiikka, Luvut ja lukujonot, MAY1, tehtävät 201-450

Osaamisen kategoriat A.0-D.0 ja tarkemmat piirteet A.1-D.5 (**Gradun Taulukko 5.1**)

	Laskutaito A.0		Ymmärtäminen B.0					Soveltaminen C.0				Analyysi D.0				
Tehtävä	A.1	A.2	B.1	B.2	B.3	B.4	B.5	C.1	C.2	C.3	C.4	D.1	D.2	D.3	D.4	D.5
201	1	1														
202	1	1														
203	1	1		1												
204	1	1														
205	1	1	1	1	1	1		1			1					
206		1	1				1				1					
207		1	1	1	1	1	1				1					1
208		1	1	1	1	1	1	1								
209		1	1	1	1	1	1	1								
210		1	1	1	1	1	1	1								1
211		1					1	1			1					1
212		1	1		1	1	1	1			1					
213	1	1	1		1	1	1	1			1					
214		1	1		1	1	1	1	1		1					
215		1	1	1	1	1	1	1	1		1					
216	1	1	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1			
217		1	1	1	1	1	1	1								
218			1	1	1			1		1	1					1
219			1	1	1	1	1	1		1	1					1
220			1		1	1	1	1		1	1					1
221			1	1	1	1	1	1	1	1	1					1
222								1				1	1			1
223	1	1														
224		1	1	1	1	1										
225			1	1	1	1		1								
226			1	1	1			1								
227			1	1		1	1	1								
228				1	1	1	1	1								
229			1		1	1	1	1								
230	1	1														
231			1	1	1	1	1	1			1					
232			1	1	1	1	1	1			1					
233			1	1	1	1	1	1			1					
234			1		1	1		1								
235			1	1	1	1	1	1			1					
236			1	1	1	1		1			1					
237			1	1	1	1		1			1					
238			1	1	1	1	1	1	1		1					
239			1	1	1	1	1	1			1					
240			1	1	1	1	1	1			1					
241		1	1	1	1	1	1	1			1					
242			1	1	1	1		1			1					
243			1	1	1	1		1	1		1					
244			1	1	1	1		1	1		1					1
245			1	1	1	1	1	1			1					1
246												1	1			1
247									1		1	1	1			1
248								1	1		1					
249			1	1	1	1		1			1					
250			1	1	1	1		1			1					
251	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	1				
252								1		1	1					1
253			1	1	1	1			1		1	1				1
254			1	1	1	1					1	1	1			1
255									1	1	1					
256	1	1														
257	1	1	1	1	1	1										
258			1	1	1	1		1	1		1					
259			1	1	1	1		1			1					
260			1	1	1	1	1	1	1		1					
261			1	1	1	1	1	1	1		1					
262			1	1	1	1	1	1	1		1					
263			1	1	1	1		1			1					
264			1	1	1	1	1		1		1	1				
265			1	1	1	1	1		1		1	1				1
266			1	1	1	1	1					1	1			1
267			1	1	1	1	1	1	1		1					
268			1		1	1	1	1			1					
269			1	1	1	1	1									
270			1	1	1	1	1	1			1					
271			1	1	1	1	1	1			1					
272			1	1	1	1	1	1	1		1					
273			1	1	1	1	1	1			1					1
274			1	1	1	1	1		1		1	1				
275								1	1		1					
276									1		1	1	1			1

Kirja: Otavan matematiikka, Luvut ja lukujonot, MAY1, tehtävät 201-450

Tiedon kategorioiden piirteet F=Faktuaalinen **J.0**, K=Käsitteellinen **I.0**, P=Proseduraalinen **H.0**, M=Metakognitiivinen **G.0 (Gradun Taulukko 5.2)**

	Laskutaito A.0					Ymmärtäminen B.0					Soveltaminen C.0					Analyysi D.0				
Tehtävä		F	K	P	M		F	K	P	M		F	K	P	M		F	K	P	M
201	1	1		1																
202	1	1		1																
203	1		1	1																
204	1		1	1																
205						1		1	1											
206						1		1	1											
207						1		1	1											
208						1	1		1											
209						1	1		1											
210						1		1	1											
211											1		1	1						
212						1	1		1											
213						1		1	1											
214											1		1	1						
215											1		1	1						
216											1		1	1	1					
217						1			1											
218											1		1	1	1					
219											1		1	1						
220											1		1	1						
221											1		1	1	1					
222																1		1	1	1
223	1	1		1																
224						1		1	1											
225						1	1		1											
226						1		1	1											
227						1	1		1											
228						1		1	1											
229						1	1		1											
230	1	1		1																
231						1		1	1											
232						1		1	1											
233						1		1	1											
234						1	1		1											
235						1		1	1											
236						1		1	1											
237						1		1	1											
238											1			1						
239						1		1	1											
240						1	1		1											
241						1	1		1											
242						1	1		1	1										
243											1		1	1						
244											1			1						
245						1		1	1											
246																1		1	1	
247																1		1	1	
248											1		1	1						
249						1		1	1	1										
250											1		1	1						
251											1	1		1						
252											1		1	1						
253						1		1	1											
254																1		1	1	1
255											1		1	1	1					
256	1	1		1																
257						1	1		1											
258											1	1		1						
259						1		1	1											
260											1	1		1						
261											1		1	1						
262											1		1	1						
263						1	1		1											
264											1		1	1						
265											1		1	1						
266																1		1	1	
267											1	1		1						
268						1		1	1											
269						1		1	1											
270						1		1	1											
271						1		1	1											
272											1		1	1						
273											1		1	1						
274											1		1	1						
275											1		1	1	1					
276																1		1	1	1

Tehtävä	A.1	A.2	B.1	B.2	B.3	B.4	B.5	C.1	C.2	C.3	C.4	D.1	D.2	D.3	D.4	D.5
277												1	1			1
278									1		1	1	1	1		
352								1	1		1					
353			1	1	1			1			1					
354			1	1	1			1			1					
355								1	1		1					1
356									1		1	1	1			
357			1	1	1	1	1	1	1							
358								1	1							1
359								1	1	1	1					1
360								1	1							1
361								1			1					1
362								1			1					1
363									1		1	1				1
364								1			1					1
365								1			1					1
366								1	1	1	1					1
367									1		1	1				
368									1		1	1				
369								1			1					1
370									1		1	1	1		1	1
371									1		1	1				
372								1			1					1
373									1	1	1	1				
374									1		1	1		1	1	
401	1	1	1		1											
402	1	1	1													
403			1	1	1	1	1	1	1		1					
404	1	1	1	1	1	1		1			1					
405			1	1	1	1	1	1		1	1					
406			1	1	1	1		1			1					
407			1	1	1	1					1	1				
408			1	1	1	1		1			1					
409								1			1					1
410			1		1	1		1			1					
411			1	1	1	1		1			1					
412			1	1	1	1		1			1					
413											1	1	1			
414												1	1			1
415			1	1	1	1	1	1								1
416			1	1	1	1	1	1			1					
417												1	1			1
418												1	1			1
419			1	1	1	1		1			1					
420			1	1	1	1						1	1			
421												1	1			1
422												1	1			1
423												1	1			1
424												1	1			1
425												1	1			1
426	1	1														
427		1	1	1		1		1			1					
428		1	1	1		1										
429			1	1		1										
430				1		1						1				
431			1	1		1										
432			1	1		1		1			1					
433			1	1	1	1		1			1					
434			1	1	1	1		1			1					
435	1	1	1	1		1		1			1					
436								1	1		1					
437			1	1	1	1		1			1					
438			1	1	1	1		1			1					
439								1			1					1
440									1		1	1				1
441								1			1					1
442												1	1			1
443								1			1					1
444			1	1	1	1		1			1					
445			1	1	1	1	1	1			1					
446								1			1		1			1
447												1	1			1
448												1	1			1
449												1	1			1
450												1	1		1	1

Tehtävä	A.0	F	K	P	M	B.0	F	K	P	M	C.0	F	K	P	M	D.0	F	K	P	M
277																1	1		1	1
278																1		1	1	1
352											1		1	1						
353						1	1		1											
354						1	1		1											
355											1		1	1						
356											1		1	1	1					
357						1		1	1											
358											1		1	1						
359											1		1	1	1					
360											1		1	1						
361											1		1	1						
362											1		1	1						
363											1		1	1	1					
364											1		1	1						
365											1		1	1						
366											1		1	1						
367											1		1	1	1					
368											1		1	1						
369											1		1	1						
370																1		1	1	1
371											1			1	1					
372											1			1						
373											1		1	1	1					
374																1		1	1	1
401	1	1		1																
402	1	1		1																
403											1		1	1						
404						1	1		1											
405											1			1	1					
406						1	1		1											
407						1		1	1											
408						1			1											
409											1		1	1						
410						1		1	1											
411						1		1	1											
412						1		1	1	1										
413											1		1	1	1					
414																1		1	1	
415						1		1	1											
416						1			1											
417																1			1	
418																1			1	
419						1	1		1											
420						1	1		1											
421																1		1	1	1
422																1		1	1	1
423																1		1	1	
424																1		1	1	
425																1		1	1	
426	1	1		1																
427						1	1		1											
428						1	1		1											
429						1		1	1											
430						1		1	1											
431						1	1		1											
432						1		1	1											
433						1		1	1											
434						1		1	1											
435						1		1	1											
436											1		1	1						
437						1		1	1											
438						1		1	1											
439											1			1						
440											1		1	1	1					
441											1		1	1						
442																1		1	1	
443											1			1						
444						1		1	1											
445						1		1	1											
446											1		1	1						
447																1		1	1	1
448																1		1	1	
449																1		1	1	1
450																1		1	1	1
yht	10	8	2	10	0	63	21	39	63	3	55	4	44	55	14	23	1	20	23	12

Kirja: Sanoma, Yhteinen tekijä, Luvut ja lukujonot, MAY1, Tehtävät 230-357

Osaamisen kategoriat A.0-D.0 ja tarkemmat piirteet A.1-D.5 (**Gradun Taulukko 5.1**)

Tehtävä	Laskutaito A.0		Ymmärtäminen B.0					Soveltaminen C.0				Analyysi D.0				
Tehtävä	A.1	A.2	B.1	B.2	B.3	B.4	B.5	C.1	C.2	C.3	C.4	D.1	D.2	D.3	D.4	D.5
230	1	1														
231	1	1														

Kirja: Sanoma, Yhteinen tekijä, Luvut ja lukujonot, MAY1, Tehtävät 230-357

Tiedon kategorioiden piirteet F=Faktuaalinen **J.0**, K=Käsitteellinen **I.0**, P=Proseduraalinen **H.0**, M=Metakognitiivinen **G.0** (**Gradun Taulukko 5.2**)

Tehtävä	Laskutaito A.0					Ymmärtäminen B.0					Soveltaminen C.0					Analyysi D.0				
Tehtävä		F	K	P	M		F	K	P	M		F	K	P	M		F	K	P	M
230	1	1		1																
231	1	1		1																

232	1	1														
233					1	1		1								
234					1	1		1								
235					1	1		1								
236					1	1		1	1							
237					1	1		1	1							
238					1	1		1	1							
239			1	1	1	1		1								
240					1	1							1			
241												1	1			1
242												1	1			1
243											1	1	1			
244											1	1	1			
245											1	1	1			
246											1	1	1			
247												1	1			1
248												1	1			1
249	1	1														
250	1	1														
251	1	1														
252				1	1		1									1
253			1	1	1											
254	1	1														
255	1	1														
256	1	1														
257								1	1		1					
258				1	1	1										
259			1	1	1	1										
260			1	1	1	1										
261								1			1					1
262												1	1			1
263				1	1	1										
264												1	1			1
265												1	1			1
266												1	1			1
267												1	1			1
268	1	1		1		1		1								1
269	1	1		1		1		1								1
270	1	1		1		1		1								1
271								1	1		1					1
272			1	1	1	1		1			1					
273								1	1		1					
274				1	1	1		1			1					
275				1	1	1										
276				1	1	1		1	1		1					
277				1	1	1		1			1					
278				1	1	1										
279				1	1	1										
280				1	1	1										
281												1		1	1	
282												1	1			1
283				1	1	1						1	1			
284			1	1	1	1	1					1	1			1
285			1	1	1	1	1	1			1					
286			1	1	1	1		1	1		1					
287								1	1		1					
288			1	1	1	1										
289												1	1	1		
290												1	1	1		
291				1	1	1		1			1					
292				1	1	1										
293				1	1	1										
294				1	1	1										
295				1	1	1										
296				1	1	1										
297				1	1	1										
298								1	1		1					
299								1	1		1					
300				1	1	1										
301				1	1	1		1			1					
302								1		1	1					
303								1		1	1					
304								1		1	1					
305								1		1	1					
306								1		1	1					
307								1	1		1					
308								1		1	1					
309											1	1	1			
310								1		1	1					
311												1	1			1
312												1	1			1
313												1	1			1
314												1	1			1
315	1	1					1									
316	1	1														
317			1	1	1	1										
318			1	1	1	1										
319			1	1	1	1	1									
320			1	1	1	1										
321			1	1	1	1	1									
322			1	1	1	1										

232	1	1		1																
233						1		1	1											
234						1		1	1											
235						1		1	1											
236						1		1	1											
237						1		1	1											
238						1		1	1											
239						1		1	1											
240						1		1	1											
241																1	1		1	
242																1		1	1	1
243											1		1	1						
244											1		1	1						
245											1		1	1						
246											1		1	1						
247																1		1	1	
248																1		1	1	1
249	1	1		1																
250	1	1		1																
251	1	1		1																
252						1		1	1											
253						1		1	1											
254	1	1		1																
255	1	1		1																
256	1	1		1																
257											1		1	1						
258						1		1	1											
259						1		1	1											
260						1		1	1											
261											1		1	1						
262																1		1	1	1
263						1		1	1											
264																1		1	1	
265																1		1	1	
266																1		1	1	1
267																1		1	1	1
268						1		1	1											
269						1		1	1											
270						1		1	1											
271											1		1	1						
272						1		1	1											
273											1		1	1						
274						1		1	1											
275						1		1	1											
276											1		1	1						
277						1		1	1											
278						1		1	1											
279						1		1	1											
280						1		1	1											
281																1		1	1	1
282																1		1	1	1
283						1		1	1	1										
284																1		1	1	1
285						1		1	1											
286											1		1	1						
287											1		1	1						
288						1		1	1											
289																1		1	1	1
290																1		1	1	1
291						1	1		1											
292						1	1		1											
293						1	1		1											
294						1		1	1											
295						1		1	1											
296						1		1	1											
297						1		1	1											
298											1		1	1	1					
299											1		1	1	1					
300						1		1	1											
301						1		1	1											
302											1		1	1						
303											1		1	1						
304											1		1	1						
305											1		1	1						
306											1		1	1						
307											1		1	1						
308											1		1	1	1					
309											1		1	1	1					
310											1		1	1						
311																1		1	1	
312																1		1	1	
313																1		1	1	
314																1		1	1	1
315	1	1		1																
316	1	1		1																
317						1		1	1											
318						1		1	1											
319						1		1	1											
320						1		1	1											
321						1		1	1											
322						1			1											

323										1	1		1							
324										1	1		1							
325										1	1		1							
326				1	1	1	1	1		1			1							
327				1	1	1	1	1		1			1							
328										1	1		1							
329															1	1			1	
330										1		1	1						1	
331										1		1	1			1			1	
332										1		1	1							
333										1		1	1							
334															1	1			1	
335															1	1			1	
336				1	1	1	1	1		1			1						1	
337								1							1		1	1		
338				1	1	1	1													
339				1	1	1	1													
340				1	1	1	1													
341				1	1	1	1													
342				1	1	1	1													
343				1	1	1	1													
344										1		1	1							
345										1		1	1							
346										1		1	1							
347										1	1	1	1							
348										1		1	1							
349										1		1	1							
350										1		1	1							
351										1		1	1							
352												1	1		1	1				
353										1		1	1							
354				1	1	1	1	1		1			1							
355				1	1	1	1			1			1			1				
356															1	1			1	
357								1							1	1	1			

323												1			1						
324												1			1						
325												1		1	1						
326							1		1	1											
327							1			1											
328												1		1	1						
329																	1		1	1	1
330												1		1	1						
331												1			1						
332												1		1	1						
333												1		1	1						
334																	1		1	1	1
335																	1		1	1	
336							1		1	1											
337																	1		1	1	1
338							1		1	1											
339							1	1		1											
340							1		1	1											
341							1		1	1											
342							1		1	1											
343							1		1	1											
344												1		1	1						
345												1		1	1						
346												1		1	1						
347												1		1	1						
348												1		1	1						
349												1		1	1						
350												1		1	1						
351												1		1	1						
352												1		1	1	1					
353												1		1	1						
354							1		1	1											
355							1		1	1											
356																	1		1	1	1
357																	1		1	1	1
yht.		11	11	0	11	0	53	4	47	53	1	40	0	37	40	5	24	1	23	24	16

Liite B: Luokittelujen taulukot

Oikealla olevissa osaamisen kategorioissa A.0-D.0 on asetettu tehtävä siihen kategoriaan, johon se vasemmalla kohtien A.1-D.5 luokittelun perusteella kuuluu.

Sinisellä pohjalla osaamisen kategoriat.
Oranssilla pohjalla tiedon kategoriat.

Esimerkki: Tehtävä 208 on luokiteltu oikealla kategoriaan Ymmärtäminen B.0 (Sininen pohja), vasemmalla olevan luokittelun mukaan.

Lisäksi se on luokiteltu konseptuaalista (K) ja proseduraalista (P) tietoa vaativaksi tehtäväksi (Oranssi pohja).

Kirja: Otavan matematiikka, Huippu MAB6, tehtävät 201-355

Osaamisen kategoriat A.0-D.0 ja tarkemmat piirteet A.1-D.5 (**Gradun Taulukko 5.1**)

	Laskutaito A.0		Ymmärtäminen B.0					Soveltaminen C.0				Analyysi D.0				
Tehtävät	A.1	A.2	B.1	B.2	B.3	B.4	B.5	C.1	C.2	C.3	C.4	D.1	D.2	D.3	D.4	D.5
201	1	1														
202	1	1														
203	1	1														
204	1	1	1			1										
205	1	1	1	1	1	1										
206	1	1				1										
207	1	1				1										
208			1		1	1										
209			1		1	1										
210			1		1	1										
211			1		1	1		1			1		1			
212			1		1	1		1								
213			1		1	1		1								
214			1		1	1		1								
215			1		1	1		1								
216			1		1	1		1								
217			1		1	1		1								
218			1	1	1	1		1								
219			1	1	1	1		1								
220			1	1	1	1		1								
221								1	1		1					
222			1	1	1	1		1			1					
223								1	1		1					
224			1	1	1	1										
225			1	1	1	1		1			1					
226			1	1	1	1		1			1					
227			1	1	1	1		1	1		1					
228			1	1	1	1		1			1					
229								1	1		1					
230								1		1	1					
231								1	1		1					
232			1	1	1	1										
233			1	1	1	1										
234			1	1	1	1	1	1		1						
235			1	1	1	1		1			1					
236	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1					
237			1	1	1											
238			1	1	1	1						1	1			
239								1		1	1					
240			1	1	1	1										
241			1	1	1	1	1									
242			1	1	1	1	1									
243			1	1	1	1	1					1	1			
244			1	1	1	1	1	1								
245								1		1	1					
246								1		1	1					
247								1		1	1					
248			1	1	1	1	1	1	1		1					
249			1	1	1	1		1								
250			1	1	1	1	1	1		1	1					
251								1			1		1			
252			1	1	1	1	1	1			1					
253								1	1		1		1			
254								1	1		1		1			
255								1	1		1		1			
256			1	1	1	1		1			1					
257								1	1		1		1			
258								1	1		1		1			
259								1	1		1		1			
260			1	1	1	1	1					1				
261			1	1	1	1	1									
262			1	1	1	1						1				
263			1	1	1	1						1				
264			1	1	1	1	1	1	1		1	1				
265								1	1		1	1				
301			1	1		1										
302			1	1		1										
303			1	1		1										
304			1	1	1	1										
305	1	1														
306			1	1	1	1	1	1								
307			1	1	1	1	1	1								
308			1	1	1	1	1	1								
309								1	1	1	1					
310	1	1	1													
311								1		1	1					
312								1		1	1					
313			1	1	1	1	1	1			1					
314			1	1	1	1	1	1			1					
315								1	1		1					
316			1	1	1	1		1			1					
317			1	1	1	1		1								
318								1		1	1					
319			1	1	1	1	1	1			1					
320			1	1	1	1	1	1			1					
321								1	1		1	1				
322			1	1	1	1	1	1			1					

Kirja: Otavan matematiikka, Huippu MAB6, tehtävät 201-355

Tiedon kategorioiden piirteet F=Faktuaalinen **J.0**, K=Käsitteellinen **I.0**, P=Proseduraalinen **H.0**, M=Metakognitiivinen **G.0 (Gradun Taulukko 5.2)**

	Laskutaito A.0					Ymmärtäminen B.0					Soveltaminen C.0					Analyysi D.0				
Tehtävät		F	K	P	M		F	K	P	M		F	K	P	M		F	K	P	M
201	1	1		1																
202	1	1		1																
203	1	1		1																
204	1	1		1																
205						1	1		1											
206	1		1	1																
207	1		1	1																
208						1		1	1											
209						1	1													
210						1			1											
211						1		1	1											
212						1		1	1											
213						1	1	1	1											
214						1		1	1											
215						1		1	1											
216						1		1	1											
217						1		1	1											
218						1		1	1											
219						1		1	1											
220						1		1	1											
221											1		1	1						
222						1	1	1	1											
223											1		1	1						
224						1		1	1											
225						1	1	1	1											
226						1		1	1											
227											1		1	1						
228						1		1	1											
229											1		1	1						
230											1	1	1	1	1					
231											1		1	1	1					
232						1		1	1											
233						1	1	1	1											
234						1			1											
235						1		1	1											
236											1		1	1						
237						1	1		1											
238						1		1	1	1										
239											1		1	1						
240						1		1	1											
241						1		1	1											
242						1		1	1	1										
243						1		1	1											
244						1		1	1											
245											1		1	1	1					
246											1		1	1						
247											1		1	1						
248											1		1	1						
249						1		1	1											
250											1		1	1						
251						1		1	1											
252						1		1	1											
253											1		1	1						
254											1		1	1						
255											1		1	1						
256						1		1	1											
257											1		1	1						
258											1		1	1	1					
259											1		1	1						
260						1		1	1											
261						1		1	1											
262						1		1	1											
263						1		1	1											
264											1		1	1	1					
265											1		1	1						
301						1	1													
302						1		1	1											
303						1		1	1											
304						1	1	1	1											
305	1	1																		
306						1		1	1											
307						1	1		1											
308						1		1	1											
309											1		1	1	1					
310	1	1	1																	
311											1		1	1						
312											1		1	1						
313						1		1	1											
314						1		1	1											
315											1		1	1						
316						1		1	1											
317						1		1	1											
318											1	1	1	1						
319						1		1	1											
320						1		1	1											
321											1		1	1						
322						1		1	1											

323								1	1		1					
324			1	1	1	1	1	1			1	1	1			
325								1	1		1					
326								1	1		1	1	1			
327	1	1														
328	1	1														
329			1	1	1	1	1									
330	1	1	1													
331			1	1	1	1	1									
332			1	1	1	1	1									
333								1	1		1					
334			1	1	1	1	1									
335			1	1	1	1	1	1								
336			1	1	1	1	1	1								
337								1	1		1	1				
338			1	1	1	1	1	1			1					
339			1	1	1	1	1	1								
340			1	1	1	1	1	1								
341								1	1		1					
342								1	1		1					
343								1	1		1	1				
344			1	1	1	1	1	1			1					
345			1	1	1	1	1	1			1					
346								1		1	1					
347			1	1	1	1	1	1			1					
348			1	1	1	1	1	1			1					
349								1	1		1					
350								1	1		1					
351								1	1		1					
352			1	1	1	1	1	1			1		1			
353								1	1		1	1	1			
354			1	1	1	1	1	1			1					
355								1	1		1	1	1			

323											1		1	1						
324						1		1	1											
325											1	1	1	1	1					
326											1		1	1	1					
327	1		1	1																
328	1		1	1																
329						1		1	1											
330	1	1	1																	
331						1		1	1											
332						1		1	1											
333											1		1	1						
334						1		1	1											
335						1		1	1											
336						1		1	1											
337											1		1	1	1					
338						1		1	1											
339						1		1	1											
340						1		1	1											
341											1		1	1						
342											1		1	1						
343											1		1	1	1					
344						1		1	1											
345						1		1	1											
346											1		1	1						
347						1		1	1											
348						1		1	1											
349											1		1	1	1					
350											1		1	1						
351											1		1	1						
352						1		1	1											
353											1		1	1	1					
354						1		1	1											
355											1		1	1	1					
yht	11	7	6	8	0	68	10	61	66	2	41	3	41	41	13	0	0	0	0	0

Kirja: Sanoma, Yhteinen tekijä MAB6, tehtävät 154-249

Osaamisen kategoriat A.0-D.0 ja tarkemmat piirteet A.1-D.5 (**Gradun Taulukko 5.1**)

	Laskutaito A.0		Ymmärtäminen B.0					Soveltaminen C.0				Analyysi D.0				
Tehtävät	A.1	A.2	B.1	B.2	B.3	B.4	B.5	C.1	C.2	C.3	C.4	D.1	D.2	D.3	D.4	D.5
154	1	1														
155			1	1		1										
156			1	1		1										
157			1	1		1										
158			1	1		1										
159			1	1		1										
160			1	1	1	1										
161			1	1	1	1										
162			1	1	1	1										
163			1	1	1	1										
164			1	1	1	1		1								
165			1	1	1	1		1	1		1					
166			1	1	1	1	1	1								
167			1	1	1	1		1								
168			1	1	1		1	1								
169			1	1	1	1		1					1			
170			1	1	1	1	1	1					1			
171			1	1	1	1										
172			1	1	1	1	1									
173			1	1	1	1	1	1								
174			1	1	1	1	1									
175			1	1	1	1	1	1								
176			1	1	1	1	1									
177			1	1	1	1	1									
178			1	1	1	1	1									
179			1	1	1	1	1	1								
180			1	1	1	1	1	1								
181			1	1	1	1	1	1								
182			1	1	1	1	1	1								
183	1	1														
184			1	1		1										
185								1	1		1					
186			1	1	1	1	1	1								
187			1	1	1	1		1								
188			1	1	1	1		1								
189			1	1	1	1										
190			1	1	1	1										
191			1	1	1	1										
192			1	1	1	1	1									
193			1	1	1	1	1									
194			1	1	1	1	1									
195			1	1	1	1	1									
196			1	1	1	1	1									
197			1	1	1	1	1									
198			1	1	1	1	1									
199			1	1	1	1	1									
200			1	1	1	1	1									
201			1	1	1	1	1									
202			1	1	1	1	1									
203								1	1		1					
204			1	1	1	1	1									
205			1	1	1	1	1									
206			1	1	1	1	1									
207			1	1	1	1	1									
208			1	1	1	1	1									
209			1	1	1	1	1									
210			1	1	1	1	1									
211			1	1	1	1	1									

Kirja: Sanoma, Yhteinen tekijä MAB6, tehtävät 154-249

Tiedon kategorioiden piirteet F=Faktuaalinen **J.0**, K=Käsitteellinen **I.0**, P=Proseduraalinen **H.0**, M=Metakognitiivinen **G.0** (**Gradun Taulukko 5.2**)

	Laskutaito A.0					Ymmärtäminen B.0					Soveltaminen C.0					Analyysi D.0				
Tehtävät		F	K	P	M		F	K	P	M		F	K	P	M		F	K	P	M
154	1		1	1																
155						1		1	1											
156						1		1	1											
157						1		1	1											
158						1		1	1											
159						1		1	1											
160						1		1	1											
161						1		1	1											
162						1	1	1	1											
163						1		1	1											
164						1	1	1	1											
165											1		1	1	1					
166						1		1	1											
167						1		1	1											
168						1		1	1											
169						1		1	1											
170											1		1	1						
171						1		1	1											
172						1		1	1											
173						1		1	1											
174											1		1	1						
175											1		1	1						
176						1		1	1											
177						1		1	1											
178						1		1	1											
179						1		1	1											
180											1		1	1						
181						1		1	1											
182						1		1	1											
183	1		1	1																
184	1		1	1																
185											1		1	1	1					
186						1		1	1											
187						1		1	1											
188						1		1	1											
189						1		1	1											
190						1		1	1											
191						1		1	1											
192											1		1	1						
193											1		1	1	1					
194											1		1	1						
195											1		1	1	1					
196											1		1	1						
197											1		1	1						
198											1		1	1						
199											1		1	1						
200						1		1	1											
201											1	1	1	1						
202											1		1	1						
203											1		1	1						
204											1		1	1						
205											1		1	1	1					
206						1		1	1											
207						1		1	1											
208						1		1	1											
209						1		1	1											
210						1		1	1											
211						1		1	1											

212				1	1	1	1	1												
213				1	1	1	1	1												
214				1	1	1	1	1												
215				1	1	1	1	1												
216				1	1	1	1	1												
217				1	1	1	1	1												
218				1	1	1	1	1												
219				1	1	1	1	1												
220				1	1	1	1	1												
221				1	1	1	1	1												
222				1	1	1	1	1												
223				1	1	1	1	1												
224										1	1		1							
225										1	1		1							
226										1	1		1							
227				1	1	1	1	1												
228				1	1	1	1	1												
229										1	1		1							
230				1	1	1	1	1												
231										1	1		1							
232	1	1																		
233				1	1	1	1	1												
234										1	1		1							
235										1	1		1							
236										1	1		1							
237										1	1		1							
238				1	1	1	1	1												
239										1	1		1							
240										1	1		1							
241										1	1		1							
242										1	1		1							
243				1	1	1	1	1												
244				1	1	1	1	1												
245										1	1		1							
246										1	1		1							
247				1	1	1	1	1												
248				1	1	1	1	1												
249				1	1	1	1	1												

212						1		1	1											
213						1		1	1											
214						1		1	1											
215						1		1		1										
216						1		1	1											
217						1		1	1											
218						1		1	1											
219						1		1	1											
220						1		1	1											
221						1		1	1											
222											1		1	1						
223						1		1	1											
224											1		1	1	1					
225											1		1	1	1					
226											1		1	1	1					
227						1		1	1											
228											1		1	1						
229											1		1	1						
230						1		1	1											
231											1		1	1	1					
232	1		1	1																
233						1		1	1											
234											1		1	1						
235											1		1	1						
236											1		1	1						
237											1		1	1	1					
238											1		1	1						
239											1		1	1						
240											1		1	1	1					
241											1		1	1	1					
242											1		1	1	1					
243						1		1	1											
244						1		1	1											
245											1		1	1						
246											1		1	1						
247						1		1	1											
248						1		1	1											
249						1		1	1											
yhteensä	4	0	4	4	0	55	2	55	54	1	37	1	37	37	13	0	0	0	0	0