Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Estructura simpléctica y simetría de norma para teorías de gravedad

Tesis presentada al

Posgrado en Ciencias

como requisito parcial para la obtención del grado de

Doctor en Ciencias (Física Aplicada)

por

Omar Rodríguez Tzompantzi

asesorado por

Dr. Alberto Escalante Hernández

Puebla, Pue.
Diciembre de 2017

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Estructura simpléctica y simetría de norma para teorías de gravedad

Tesis presentada al

Posgrado en Ciencias

como requisito parcial para la obtención del grado de

Doctor en Ciencias (Física Aplicada)

por

Omar Rodríguez Tzompantzi

asesorado por

Dr. Alberto Escalante Hernández

Puebla, Pue.
Diciembre de 2017

Título: Estructura simpléctica y simetría de norma para teorías de gravedad
Estudiante: Omar Rodríguez Tzompantzi

COMITÉ

Dr. J. Jesús Toscano Chávez
Presidente

Dr. Gilberto Tavares Velasco
Secretario

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero
Vocal

Dr. Héctor Hugo García Compeán
Vocal Externo

Dr. Roberto Cartas Fuentevilla
Vocal Externo

Dr. Arturo Fernández Telléz
Suplente

Dr. Alberto Escalante Hernández
Asesor

Índice general

Resumen

En esta tesis se realiza el análisis de Dirac y Faddeev-Jackiw para teorías de gravedad en $(3+1)$ y $(2+1)$ dimensiones, ilustrando una interesante y detallada descripción de sus propiedades y simetrías relevantes, como son, la estructura completa de las restricciones, los paréntesis de Dirac y de Faddeev-Jackiw, las transformaciones de norma con sus generadores, y los grados de libertad físicos. Este trabajo lo hemos dividido en tres partes.

En la primera parte de este trabajo, se realiza el análisis Hamiltoniano para gravedad en $(2+1)$ dimensiones con constante cosmológica en el contexto del formalismo de primer orden, la cual depende de una triada y de una conexión evaluada en algún grupo local $\mathcal{G}$ que contenga un invariante de volumen ϵ^{IJK} totalmente antisimétrico. Mediante el formalismo de Dirac, derivamos la estructura correcta de las restricciones. Mostramos que el álgebra de restricciones forma un álgebra de Poincaré, y demostramos que para tener un álgebra cerrada y consistente, el grupo interno debe ser $SO(2,1)$. Adicionalmente, con la clasificación de las restricciones en primera y segunda clase, derivamos las correctas transformaciones de norma y construimos los paréntesis de Dirac de la teoría.

En la segunda parte, se desarrolla el análisis simpléctico de Faddeev-Jackiw a la versión más simple de gravedad masiva en tres dimensiones llamada "gravedad topológicamente masiva". Con el propósito de obtener una clara descripción sobre la estructura simpléctica y la simetría de norma de ésta teoría, estudiamos en detalle las propiedades de la correspondiente matriz simpléctica y de sus cero modos. Nuestros resultados muestran que el método de Faddeev-Jackiw es más económico algebraicamente hablando, cuando la teoría bajo estudio contiene restricciones primarias, secundarias y de orden superior, tal como ocurren en teorías de gravedad masiva.

En la tercera parte, se derivan los paréntesis de Dirac y de Faddeev-Jackiw para teoría de Einstein en $(3+1)$ dimensiones en el límite $G \to 0$, en el marco teórico del método de Dirac y del formalismo simpléctico de Faddeev-Jackiw respectivamente. Primero construimos los paréntesis de Dirac usando únicamente las restricciones de segunda clase y dejando intactas las de primera clase. Posteriormente fijando la libertad de norma de la teoría, transformamos las restricciones de primera clase en segunda clase, y construimos los correspondientes nuevos paréntesis de Dirac. Finalmente, reproducimos los resulatdos obtenidos por medio del método de Dirac vía el formalismo simpléctico, y demostramos que los paréntesis de Dirac y Faddeev-Jackiw son iguales.

Introducción

Durante un siglo se ha sabido que la teoría General de la Relatividad de Einstein describe la fuerza gravitacional con un acuerdo impecable con las observaciones [1]. A pesar de todos los éxitos de Relatividad General (RG), la búsqueda de alternativas a ésta teoría ha sido un reto inminente desde su formulación. Lejos de ser un ejercicio puramente académico, la existencia de alternativas consistentes para describir la teoría de la gravitación es realmente esencial para probar la teoría de RG. Además, lo misterios que permanecen detrás de los rompecabezas en la interfase entre gravedad/cosmología tales como inflación, energía y materia oscura [2, 3], las cuales intentan explicar el origen y la aceleración en la expansión de nuestro universo, han anticipado la existencia de nueva física gravitacional más allá de la teoría de RG, tanto en el régimen ultravioleta (UV) como en el infrarrojo (IR). En el UV, es decir, a pequeñas distancias y altas energías, se sabe que RG no es renormalizable, y por tanto, no puede ser extendida a una teoría cuántica de la gravedad. Consecuentemente, RG debe ser modificada, de tal manera que a esta escala de energía la teoría pueda decir algo sobre el universo ultra temprano [4]. En este sentido, una forma de modificar RG es añadir algunos términos topológicos a la Lagrangiana de Einstein-Hilbert (E-H) [5, 6, 7, 8, 9]. Por otra parte, en el IR, i.e., grandes distancias y bajas energías, RG es teóricamente consistente, sin embargo el descubrimiento en 1998 de la expansión acelerada del universo, representa un problema para RG a distancias cosmológicas [10, 11]. La explicación matemática más sencilla para esta aceleración es también la modificación más simple de RG, ésta es, la existencia de una de constante cosmológica en la acción de E-H [12], la cual puede ser incorporada sin destruir las simetrías clásicas fundamentales de RG. Por lo tanto, es natural considerar la posibilidad que RG no sea la teoría final que describa completamente a gravedad, y por tanto, pensar en extensiones o modificaciones a ésta.

Debido a los teoremas de Lovelock [13, 14], cualquier modificación o extensión de RG debe incluir al menos uno de los siguientes ingredientes: (i) grados de libertad físicos adicionales, (ii) dimensiones adicionales, (iii) términos con derivadas de orden superior, (iv) extensiones de geometría (pseudo-) Riemanniana, (v) no-localidad. Teorías de gravedad masiva [15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22] son ejemplos del tipo (iii) (a pesar que éstas contengan grados de libertad adicionales) en la modificación infrarroja de gravedad, donde el graviton sin masa de RG es dotado de una masa distinta de cero. Lamentablemente, este tipo de teorías introducen un grado de libertad no físico, comúnmente denominado como el fantasma Boulware-Deser [23, 24], el cual hace que éste tipo de teorías sean inestables. Sin embargo, son renormalizables, lo cual es un paso crucial hacia la cuantización e implica super renormalización en tres dimensiones [25, 26, 27]. RG vista desde la perspectiva canónica es una teoría gobernada por restricciones, por esta razón, estrictamente hablando, las teorías de gravedad masiva libres de fantasmas, deben poseer las restricciones físicas necesarias para remover esta inconsistencia. Por tanto, sería interesante si de forma sistemática se pueda llegar a obtener las restricciones que eliminen tanto al campo fantasma como a su momento canónicamente conjugado. Adicionalmente, este método debería ser de gran ayuda para comprender el contenido físico y la estructura de norma en este tipo de modelos.

El procedimiento estándar para determinar estas restricciones es aplicar directamente el método de Dirac para sistemas Hamiltonianos con restricciones [28, 29]. En este formalismo, dado el conjunto completo de restricciones; éstas deben ser clasificadas en primera y segunda clase

[30, 31], y entonces, un generador de la simetría de norma puede ser construido como una sutil combinación lineal de restricciones de primera clase [32]. El número de grados de libertad físicos pueden ser explícitamente obtenidos, y un tipo de paréntesis (paréntesis de Dirac) es derivado para cuántizar sistemas con simetría de norma. Sin embargo, el análisis de Dirac para el caso de teorías de gravedad masiva, puede resultar técnicamente intrincado y obscuro [33, 34, 35, 36, 37, 38]. Particularmente, puede ser difícil identificar el conjunto completo de restricciones físicas, lo que significa que la clasificación y separación de todas las restricciones en primera y segunda clase puede resultar altamente no trivial, lo cual puede ocultar la estructura dinámica de estas teorías. Como una alternativa al formalismo de Dirac, L. D. Faddeev y R. Jackiw [39] han introducido un interesante método, el cual es geométricamente motivado y basado en la estructura simpléctica para la cuantización de sistemas degenerados (con restricciones). Este método tiene la característica principal de evitar la necesidad de clasificar las restricciones en primera y segunda clase, por tanto la ambigüedad mencionada anteriormente puede ser obviada. El formalismo es simple y no depende de una hipótesis tal como la conjetura de Dirac. Desde esta perpectiva, la naturaleza de las restricciones, la simetría de norma (y su correspondiente generador) y la estructura geométrica de espacio fase, dada por los paréntesis de Dirac/Poisson para el caso de teorías con/sin restricciones pueden ser sistemáticamente determinados, investigando las propiedades de la matriz 2-forma simpléctica y sus correspondientes cero modos [40, 41, 42, 43, 44, 45, 46]

Por otra parte, con el propósito de estudiar algunas características y propiedades relevantes en teorías de gravedad en 4 dimensiones, es usual considerar modelos de juguete que en principio están libres de muchas dificultades técnicas que pudiera tener la teoría completa. En particular, gravedad en tres dimensiones ha recibido mucha atención como una herramienta teórica que destaca los aspectos topológicos de gravedad [47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54]. Es bien sabido que la acción de E-H para gravedad en tres dimensiones es completamente topológica, es decir, que carece de grados de libertad físicos inherentes a la teoría. Sin embargo, podemos introducir grados de libertad gravitacionales elevando el orden en las ecuaciones de movimiento del campo gravitacional a tercer orden incluyendo en la acción de E-H un término de Chern-Simons lo cual nos conduce a la teoría más simple de gravedad masiva en tres dimensiones conocida en la literatura como gravedad topológicamente masiva [55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63], ó TMG por sus siglas en inglés, la cual tiene un grado de libertad de propagación masivo, i.e., un graviton tridimensional masivo. En nuestro caso estamos interesados en presentar un estudio detallado sobre la estructura simpléctica y la simetría de norma de gravedad tridimensional con constante cosmológica y TMG en la formulacion de primer orden. En primer lugar, estudiamos la estructura y dinámica de las restricciones de gravedad en (2+1) dimensiones con constante cosmológica, usando el método de Dirac. Posteriormente, nos enfocaremos en el análisis de TMG, en el contexto de formalismo simpléctico de Faddeev-Jackiw (F-J). Esta tesis está dividida en cinco capítulos dedicados a presentar los aspectos más relevantes de la estructura simpléctica y la simetría de norma de gravedad en tres dimensiones. Como parte de este trabajo se logró la publicación de cuatro artículos de investigación [64, 65, 66, 67].

La estructura de la tesis es la siguiente:

- En el **capítulo 1**, hacemos una revisión detallada de la formulación canónica Hamiltoniana de Dirac para sistemas singulares y el tratamiento de las restricciones.

- En el **capítulo 2**, presentamos el análisis de Dirac para gravedad en tres dimensiones en el formalismo de primer orden, también conocido como la formulación de Palatini. Considerando el espacio fase completo, identificamos la estructura completa de las restricciones y su correspondiente álgebra. Hemos encontrado que con el fin de obtener un álgebra bien definida entre las restricciones, el grupo interno corresponde a $SO(2,1)$. Adicionalmente, hemos obtenido la acción extendida, la Hamiltoniana extendida, la simetría de norma, y la estructura de los paréntesis de Dirac de la teoría.

- En el **capítulo 3**, presentamos brevemente el marco teórico del formalismo simpléctico de Faddeev-Jackiw para sistemas degenerados y el análisis de las restricciones. El método de F-J esta basado en Lagrangianas de primer orden. Ésta no es una restricción seria debido a que cualquier sistema puede ser escrito en un formalismo de primer orden extendiendo el espacio de configuraciones e introduciendo apropiados campos auxiliares. Como veremos, los paréntesis generalizados (paréntesis de F-J) obtenidos de las ecuaciones de movimiento son iguales a los obtenidos por medio del formalismo de Dirac. La clasificación de las restricciones en primera y segunda clase no es necesaria. Para teorías de norma, una vez que el algoritmo simpléctico a finalizado, es decir, una vez que hemos identificado todas las restricciones, los cero modos remanentes son identificados con los generadores de la simetría de norma.

- En el **capítulo 4**, presentamos un estudio sobre la simetría de norma y la estructura de las restricciones físicas en gravedad topológicamente masiva empleando el formalismo de Faddeev-Jackiw. En concreto, estudiamos la naturaleza de las restricciones físicas y obtenemos la simetría de norma (así como sus generadores), bajo la cual todas las cantidades físicas deben ser invariantes. Subsecuentemente, obtenemos los paréntesis de cuantización y el número de grados de libertad introduciendo un apropiado procedimiento de fijación de norma.

- Finalizamos este trabajo con el **capítulo 5**. Estudiamos la teoría de Einstein 4D en el límite $G \to 0$. La teoría de Einstein en el límite $G \to 0$ es una teoría interesante; ésta tiene como escenario al espacio-tiempo de Minkowski, carece de grados de libertad físicos y cuenta con restricciones irreducibles; en cierto sentido, es una copia de una teoría BF en cuatro dimensiones. Realizando el análisis de Dirac y de Faddeev-Jackiw a la teoría de Einstein 4D en el límite $G \to 0$; obtenemos los paréntesis de Dirac y de Faddeev-Jackiw para la teoría. Primero, derivamos los paréntesis de Dirac usando las restricciones de segunda clase. posteriormente introducimos condiciones de norma de tal manera que la teoría sólo contenga restricciones de segunda clase, y construimos con éste nuevo conjunto de restricciones los nuevos paréntesis de Dirac. De manera alternativa, reproducimos todos los resultados del método de Dirac empleando el formalismo simpléctico de F-J. Finalmente, demostramos que los paréntesis de Dirac y Faddeev-Jackiw para la teoría coinciden uno a uno.

Capítulo 1

Formalismo Hamiltoniano de Dirac para sistemas con restricciones

En física relativista se trabaja a menudo con sistemas descritos por un número de variables que excede el número de grados de libertad físicos del sistema. Por ejemplo, la partícula relativista (tres grados de libertad), descritas por cuatro coordenadas x^μ, y el campo electromagnético (dos grados de libertad en cada punto del espacio), descrito por un campo cuadrivectorial $A^\mu(x)$. De esta manera es posible mantener explícita la covariancia de la teoría. La presencia de variables espurias, que no corresponden a grados de libertad físicos, implica que un mismo estado físico puede ser descrito por distintos conjuntos de variables, lo cual se refleja en la invarianza de la funcional acción ante un grupo de transformaciones comúnmente llamadas "de norma". Debido al exceso de variables, las relaciones $p = p(q, \dot{q})$ no pueden ser todas invertidas para expresar las velocidades en función de las coordenadas y los momentos, dando lugar a restricciones entre las variables canónicas. Algunas de estas restricciones son precisamente los generadores de las transformaciones de simetrías locales ante las cuales es invariante la acción (invarianza de norma). El propósito de este capítulo es introducir el tratamiento clásico de sistemas con restricciones, mediante el método de Dirac [28, 29, 30, 31]. Este método de Dirac es un formalismo elegante y sofisticado con el cual podemos identificar a nivel clásico y de manera general todas las simetrías relevantes que presenta cada teoría bajo estudio, siendo este el punto de partida para poder formular la dinámica Hamiltoniana y la correspodiente descripción cuántica de algún sistema físico.

1.1. Sistemas con restricciones

Las teorías de las interacciones físicas fundamentales, tales como QCD y QED, o la RG, son teorías con simetría de norma. Una característica común de las teorías de norma es la presencia de grados de libertad no físicos en la Lagrangiana, en otras palabras, que el número de variables dinámicas en la acción es mayor que el número de variables requerido para describir la dinámica de la teoría. Los sistemas dinámicos con esta característica son sistemas singulares y su análisis requiere una generalización de los métodos usuales. En el formalismo Hamiltoniano, estos sistemas están caracterizados por la presencia de restricciones. La investigación sistemática de las teorías con restricciones se inició en la década de 1950, principalmente con el trabajo de Dirac [28, 29]. La formulación Hamiltoniana resulta en un contexto claro de los grados de libertad físicos y de las simetrías de norma, y hace posible una comprensión más profunda de las teorías con restricciones. La estructura clásica resultante es importante para las bases de los métodos canónicos de cuantización. Los principios variacionales juegan un papel importante en casi todas las áreas de la física y la RG no es la excepción. Por tanto, iniciemos diciendo que; la dinámica de un sistema clásico de N grados de libertad entre dos configuraciones, es aquella que hace que la acción

$$S[q^i(t)] = \int \mathcal{L}(q^i, \dot{q}^i)dt, \tag{1.1}$$

sea estacionaria. La solución que hace a esta acción estacionaria satisface las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} = 0, \tag{1.2}$$

que explícitamente toman la forma

$$\ddot{q}^j H_{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} + \dot{q}^j \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}, \tag{1.3}$$

con

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i}. \tag{1.4}$$

Luego puede verse de esta última ecuación que las aceleraciones a un tiempo dado están determinadas por las posiciones y velocidades a ese tiempo, si y sólo si la matriz H_{ij} (matriz Hessiana) es invertible, es decir, si el determinante no se anula lo cual correspondería al caso usual de la mecánica clásica.

Los sistemas o Lagrangianos singulares aparecen cuando ocurre que el determinante de la matriz Hessiana es cero, es decir, no es posible despejar a partir de las ecuaciones de Lagrange todas las aceleraciones en términos de las coordenadas y de las velocidades y por lo tanto no es posible integrar estas ecuaciones.

1.2. Formalismo Hamiltoniano de Dirac

El punto de partida para el formalismo Hamiltoniano de Dirac es definir, como es usual, los momentos canónicos

$$p_i := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}, \tag{1.5}$$

con esta definición el determinante de la matriz Hessiana toma la siguiente forma:

$$\det\left(\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^k}\right), \tag{1.6}$$

lo cual nos dice que en el caso cuando se anule, las velocidades no pueden obtenerse de forma única a partir de las coordenadas y momentos [30], es decir, la anulación del determinante refleja la existencia de restricciones entre los momentos y las velocidades. Si el número de grados de libertad del sistema es N y el rango de la matriz es R, de tal manera que; $R < N$, entonces existe un menor principal de orden R. Suponiendo que el menor existe, podemos reetiquetar apropiadamente las coordenadas, teniendo que

$$\det\left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^r \dot{q}^s}\right) \neq 0, \tag{1.7}$$

para $r, s = 1, ..., R$. Esto significa que las velocidades $\dot{q}^r$ pueden ser despejadas en función de las q^i, p_s y $\dot{q}^{m'}(m' = R+1, ..., N)$.

$$\dot{q}^r = \dot{q}^r(q^i, p_s, \dot{q}^{m'}). \tag{1.8}$$

Si reemplazamos las $\dot{q}^r$ en la definición para los restantes momentos $p_{m'}$ tenemos

$$p_{m'} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{m'}} = \tilde{p}_{m'}(q^i, \dot{q}^r(q^i, p_s, \dot{q}^n), \dot{q}^n) = p_{m'}(q^i, \dot{q}^r(q^i, p_s, \dot{q}^n). \tag{1.9}$$

Ahora vemos que $p_{m'}$ no puede depender de las velocidades $\dot{q}^r$, pues si así fuera se podría despejar al menos una $\dot{q}^r$ en función de las restantes, pero esto no puede ser, puesto que el rango de la matriz sea R implica que no pueden ser despejadas más velocidades, entonces $p_{m'} = p_{m'}(q^i, p_s)$ o de manera equivalente existen funciones $\phi_{m'}$, llamadas restricciones, tales que

$$\phi_{m'}(q^i, p_i) = 0. \tag{1.10}$$

Notemos que estas restricciones vienen directamente de la definición de momento, es decir, para obtenerlas no se hizo uso de las ecuaciones de movimiento, por lo tanto, se les llamará restricciones primarias.

Fijémonos ahora en el rango de la matriz Hessiana

$$\text{rango}\left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^r \dot{q}^s}\right) = N - M, \tag{1.11}$$

donde M es la nulidad de la matriz Hessiana $N \times N$. También M se puede considerar como el número correcto de restricciones primarias independientes de las M' restricciones en (1.10), con lo cual $M' \geq M$. Entonces el número de restricciones primarias independientes se puede obtener encontrando los vectores nulos de la matriz Hessiana, los cuales forman una base para la nulidad de esta matriz. Por lo tanto, si V_μ son los vectores nulos y ϕ_α las restricciones ya encontradas. Las restricciones que se esperan e independientes entre sí, se pueden obtener mediante la contracción, $\Phi_\mu = V_\mu^\alpha \phi_\alpha$. En lo consiguiente se supondrá que el rango de la matriz Hessiana es constante y que las restricciones primarias definen una subvariedad embedida en el espacio fase Γ. Esta subvariedad también se conoce como la hipersuperficie de restricciones primarias Γ_P. Al tener un espacio fase de dimensión $2N$ y M restricciones independientes que relacionan a las coordenadas del espacio fase entre sí, la dimensión de la hipersuperficie de restricciones primarias es de dimensión $2N - M$ si $M \neq 0$.

Sean las restricciones independientes

$$\phi_m(q^i, p_i) = 0, \quad m = 1, ..., M. \tag{1.12}$$

Estas restricciones además de definir una subvariedad, también restringen la dinámica del sistema a esta misma subvariedad Γ_P de dimensión $(2N - M) = N - R$, en el espacio fase que podemos describir con las N coordenadas q^i y los R momentos p_r. Dado un punto sobre esta hipersuperficie de restricciones, podemos ver que el punto correspondiente en el espacio de velocidades no está completamente determinado, en las R ecuaciones las $\dot{q}^m$ no están determinadas porque, para valores dados de q^i y p_r no queda definido un punto $(q^i, \dot{q}^i)$, sino una subvariedad en la cual las M variables arbitrarias $\dot{q}^m$ juegan el papel de parámetros, implicando que para que la transformación entre coordenadas y velocidades, y coordenadas y momentos sea biunívoca, es necesario introducir al menos M parámetros para poder así, en principio precisar la localización de $\dot{q}$ en la subvariedad, estos parámetros apareceran comos los multiplicadores de Lagrange cuando definamos el Hamiltoniano y estudiemos sus propiedades.

Para pasar al formalismo Hamiltoniano imponemos algunas condiciones de regularidad sobre las restricciones primarias, esto para librarnos de ambigüedades, ya que se puede escoger una potencia de estas funciones u otras funciones de las restricciones que conserve la igualdad a cero en la superficie de restricciones primarias. Las condiciones de regularidad son enunciadas de la siguiente manera:

1. Las funciones independientes ϕ_m, $m = 1, ..., M$ pueden ser localmente tomadas como las M primeras coordenadas de un nuevo sistema regular de coordenadas en la vecindad de la hipersuperficie de restricciones Γ_P.

2. Los gradientes $d\phi_1, ..., d\phi_M$ son, localmente linealmente independientes sobre Γ_P, es decir, $d\phi_1 \wedge, ..., \wedge d\phi_M \neq 0$ sobre Γ_P (donde $\wedge$ denota el producto wedge definido en la superficie de restricciones).

Lo anterior es equivalente a decir que para que éstas restricciones sean independientes y definan una subvariedad, es necesario que el rango de la matriz Jacobiana, $\left(\frac{\partial\phi_m}{\partial(q^i,p_i)}\right)$, sea constante e igual a M.

1.3. Igualdades fuertes y débiles

Las ecuaciones de Hamilton podrián en principio depender de las derivadas de las restricciones, por lo tanto, a pesar de que la dinámica tiene lugar sobre la superficie Γ_P definida por las restricciones, ésta diňamica recibiría en principio contribuciones de la vecindad de Γ_P. Por lo tanto, sería incorrecto colocar a las restricciones iguales a cero desde un principio dado que se perdería esta informacíon. Para tratar con esta situación es útil introducir las nociones de igualdades fuertes y débiles. Las restricciones se anulan sobre Γ_P pero no en su vecindad. Este hecho se expresa en lo siguiente:

Teorema 1. Si una función suave $F(q,p)$ se anula sobre Γ_P, entonces $F = f^m\phi_m$ para algunas funciones f^m.

Teorema 2. Si $\lambda_i\delta q^i + \mu^i\delta p_i = 0$ para variaciones arbitrarias δq^i, δp_i tangentes a la superficie de restricciones, entonces

$$\lambda_i = u^m\frac{\partial\phi_m}{\partial q^i} \quad y \quad \mu^i = u^m\frac{\partial\phi_m}{\partial p_i} \quad \mathrm{sobre}\,\Gamma_P, \tag{1.13}$$

para algunas u^m.

Definición. Una función $F(q,p)$ definida en la vecindad de Γ_P es llamada débilmente cero si

$$F\,|_{\Gamma_P} = 0 \Longleftrightarrow F \approx 0, \tag{1.14}$$

y fuertemente cero si

$$F\,|_{\Gamma_P} = 0 \quad y \quad \left(\frac{\partial F}{\partial q^i}, \frac{\partial F}{\partial p_i}\right)|_{\Gamma_P} = 0 \Longleftrightarrow F = 0. \tag{1.15}$$

Donde "$\approx$" es el símbolo de igualdad débil, el cual es diferente del símbolo de igualdad fuerte, "$=$" válido sólo sobre Γ_P. De esta manera, podría ocurrir que las restricciones puedan tener paréntesis de Poisson no nulos con las variables canónicas (dado que estos involucran derivadas). Ahora, por lo tanto, todas las cantidades dinámicas se deben definir en la vecindad de Γ_P, es decir, en forma débil, teniendo entonces que

$$\phi_m \approx 0 \quad \mathrm{pero} \quad \phi_m \neq 0, \tag{1.16}$$

debido a nuestras condiciones de regularidad sobre las restricciones.

Puesto que $\nabla_x(f^m\phi_m) \approx f^m\nabla_x\phi_m$, donde $x = (q,p)$ denota coordenadas del espacio fase, el primer teorema implica.

Lema. $F \approx 0 \Longrightarrow F - f^m\phi_m = 0$ para algunas funciones f^m.

1.4. Transformación de Legendre

La Hamiltoniana canónica es definida como es usual

$$H_C := \dot{q}^i p_i - \mathcal{L}, \tag{1.17}$$

y tiene la remarcable propiedad de que $\dot{q}i$ entra en H_C sólo por la combinación $p(q,\dot{q})$. Esto viene de

$$\begin{aligned}\delta H_C &= \dot{q}^i\delta p_i + \delta\dot{q}^i p_i - \delta\dot{q}^i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}^i} - \delta q^i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q^i} \\ &= \dot{q}^i\delta p_i - \delta q^i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q^i},\end{aligned} \tag{1.18}$$

lo cual demuestra que H_C es una función solamente de p y q, las cuales no son independientes entre si debido a las restricciones primarias. Implicando que H_C esta definida sólo sobre Γ_P. Sin embargo nos gustaría extender el formalismo a todo el espacio fase Γ.
Las ecuaciones (1.18) se pueden reescribir de la siguiente manera:

$$\left(\frac{\partial H_C}{\partial\dot{q}^i} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q^i}\right)\delta q^i + \left(\frac{\partial H_C}{\partial p_i} + \dot{q}^i\right)\delta p_i = 0, \tag{1.19}$$

con variaciones tangentes a Γ_P de δq^i y δp_i. Por otra parte, H_C podría ser restringida a la subvariedad Γ_P de una función $\tilde{H}_C$ definida sobre todo el espacio fase. Entonces de la ecuación (1.19) junto con H_C remplazada por $\tilde{H}_C$ y aplicando el teorema 2 tenemos

$$\begin{aligned}-\frac{\partial L}{\partial q^i} &\approx \frac{\partial\tilde{H}_C}{\partial q^i} + \lambda^m\frac{\partial\phi_m}{\partial q^i}, \\ \dot{q}^i &\approx \frac{\partial\tilde{H}_C}{\partial p_i} + \lambda^m\frac{\partial\phi_m}{\partial p_i}.\end{aligned} \tag{1.20}$$

El segundo conjunto de ecuaciones nos permite recuperar las velocidades de $(q,p)\epsilon\Gamma_P$ y los parámetros λ^m. Debido a las condiciones de regularidad sobre las restricciones, dos diferentes $\lambda's$ nos dan diferentes $\dot{q}$ y la segunda relación nos permite expresar los $\lambda's$ como funciones de q y $\dot{q}$. De esta manera uno puede obtener una transformación de Legendre del espacio de configuraciones de dimensión $2N$ al espacio de dimensión también $2N$, $\Gamma_P\times\{\lambda^m\}$:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}(q,\dot{q}) \qquad y \qquad \lambda^m = \lambda^m(q,\dot{q}), \tag{1.21}$$

con transformación inversa

$$\dot{q}^i = \frac{\partial\tilde{H}_C}{\partial p_i} + \lambda^m\frac{\partial\phi_m}{\partial p_i} \qquad y \qquad \phi_m(q,p) = 0. \tag{1.22}$$

aquí se ha extendido el Hamiltoniano a una vecindad de Γ_P, dado que originalmente estaba definido sólo sobre Γ_P. De acuerdo con el Teorema 1, dos posibles extensiones difieren por un término $\lambda^m\phi_m$. De esta manera el formalismo debería ser invariante bajo el reemplazo

$$\tilde{H}_C \to \tilde{H}_C + \lambda^m(q,p)\phi_m. \tag{1.23}$$

Finalmente, aún cuando el determinante de la matriz Hessiana es cero, se pueden escribir las ecuaciones de Lagrange en la equivalente forma Hamiltoniana de la siguiente manera:

$$\dot{q}^i \approx \frac{\partial H_C}{\partial p_i} + \lambda^m\frac{\partial\phi_m}{\partial p_i} \quad y \quad \dot{p}^i \approx \frac{\partial H_C}{\partial q^i} + \lambda^m\frac{\partial\phi_m}{\partial q^i}, \tag{1.24}$$

donde hemos quitado la tilde a H_C, dado que estas ecuaciones ya contiene toda la información acerca del sistema y están bien definidas en toda la variedad Γ. A una Hamiltoniana de la forma (1.23), por definición se le llamará Hamiltoniana Primaria,

$$H_P := H_C + \lambda^m(q,p)\phi_m. \tag{1.25}$$

1.5. Paréntesis de Poisson

Las ecuaciones de movimiento pueden ser expresadas en términos del formalismo de paréntesis de Poisson. Por ejemplo, para una magnitud física F definida en el espacio fase, podemos escribir en general su evolución temporal de la siguiente manera

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p}_i, \tag{1.26}$$

si F no depende explícitamente del tiempo, uno puede ver que la evolución temporal de F es

$$\begin{aligned} \dot{F} &= \frac{\partial F}{\partial q^i}\left(\frac{\partial H_C}{\partial p_i} + \lambda^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i}\right) + \frac{\partial F}{\partial p_i}\left(\frac{\partial H_C}{\partial q^i} + \lambda^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^i}\right) \\ &= \{F, H_C\} + \lambda^m\{F, \phi_m\}. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Pero, sobre la superficie de restricciones es válida la siguiente igualdad

$$\lambda^m\{F, \phi_m\} = \{F, \lambda^m \phi_m\}, \tag{1.28}$$

dado que

$$\{F, \lambda^m \phi_m\} = \lambda^m\{F, \phi_m\} + \{F, \lambda^m\}\phi_m, \tag{1.29}$$

y $\phi_m \approx 0$ en la superficie de restricciones. Implicando que podemos escribir las ecuaciones de movimiento de manera compacta en la forma

$$\dot{F} \approx \{F, H_C + \lambda^m \phi_m\} := \{F, H_P\}. \tag{1.30}$$

Examinemos ahora, las consecuencias de estas ecuaciones de movimiento. En primer lugar existen ciertas condiciones de consistencia [30, 31], dado que, la dinámica del sistema debe tener lugar sólo sobre la superficie de restricciones. Sin embargo, tal como está escrita la dinámica en (1.27), con contribuciones de la vecindad, es posible que el sistema no permanezca en Γ_P . Esto significa que el sistema se puede mover fuera de Γ_P y por lo tanto las restricciones que definen Γ_P pueden cambiar. Para que esto no ocurra es necesario que las restricciones permanezcan constantes en el tiempo, es decir, que las funciones ϕ_m sean siempre nulas. Luego, podemos aplicar la ecuación (1.27) a las restricciones, tomando F como una de las funciones ϕ_m, lo cual nos lleva a

$$\dot{\phi}_m = \{\phi_m, H_C\} + \lambda^n\{\phi_m, \phi_n\} \approx 0. \tag{1.31}$$

Obteniendo así, m ecuaciones de consistencia, una para cada restricción. Si descartamos la posibilidad de que las ecuaciones de movimiento sean inconsistentes, las m condiciones pueden ser separadas en 4 casos, que para su análisis definimos

$$h_m := \{\phi_m, H_C\} \quad y \quad F_{mn} := \{\phi_m, \phi_n\}. \tag{1.32}$$

Caso I: $\det(h_m) \neq 0$, $\det(F_{mn}) \neq 0$.

Cuando esto ocurre las ecuaciones (1.31) forman sistemas de ecuaciones inhomogéneas para las $\lambda's$ con soluciones

$$\lambda^n \approx -F^{-1}_{mn}h_m = F^{mn}h_m, \tag{1.33}$$

las $\lambda's$ son determinadas débilmente, la ecuación de movimiento para cualquier función del espacio fase $A(q,p)$ es

$$\dot{A} \approx \{A, H_C\} - \{A, \phi_n\}F^{nm}\{\phi_m, H_C\}. \tag{1.34}$$

Después de especificar los valores iniciales de las coordenadas y momentos sujetos a las restricciones $\phi_m(q,p) \approx 0$ se pueden resolver estas ecuaciones sin ambigüedad.

Caso II: $\det(h_m) \neq 0$, pero $\det(F_{mn}) = 0$.
Para que (1.31) tenga solución debe cumplirse cierta relación entre las componentes de h. Supongamos que el rango de la matriz F es K, como F es una matriz $(N-R)\times(N-R)$, esto implica la existencia de $(N-R)-K$ vectores nulos linealmente independientes, $e_m^{(\alpha)}$, tal que $e_m^{(\alpha)}(q,p)F_{mn} = 0$ $(\alpha = 1, .., N-R-K)$. Multiplicando (1.31) por estos vectores nulos obtenemos la condición

$$\begin{aligned} e_m^{(\alpha)}h_m + \lambda^n e_m^{(\alpha)}F_{mn} &\approx 0, \\ \Longrightarrow e_m^{(\alpha)}h_m &\approx 0. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Ahora, estas ecuaciones se deben cumplir o definir un número L' de nuevas restricciones independientes de las primarias ϕ_m y de ellas mismas llamadas restricciones secundarias, tales restricciones restringen el movimiento en el espacio fase a una hipersuperficie Γ_1 de dimensión menor que Γ_P. También podemos ver que sólo K multiplicadores de Lagrange podrán ser determinados, por lo que aún la teoría presenta funciones arbitrarias, lo cual es de mucho interés en las teorías de norma.

Caso III: $\det(h_m) = 0$, pero $\det(F_{mn}) \neq 0$.
Existe solamente la solución trivial $\lambda_n \approx 0$, esto es, $H_P = H_C$. Si $h \approx 0$ se origina que $H_C = 0$ y se presenta una dificultad para interpretarlo ya que un Hamiltoniano nulo no permite dinámica. Para evitar esta situación debemos imponer como restricción secundaria a $\det(F_{mn}) \approx 0$.

Caso IV: $\det(h_m) = 0$, pero $\det(F_{mn}) = 0$.
Este es el caso de un sistema de ecuaciones homogéneo para las λ's en donde existe solución no trivial. Si K es el rango de F, entonces $(N-R-K)$ multiplicadores son determinados débilmente.

A pesar de que el caso donde el Hamiltoniano es idénticamente cero no puede soslayarse, éste será dejado fuera de nuestra discusión. Consideremos entonces el Caso II, en el cual aparecen $L' = N-R-K$ restricciones secundarias, las cuales ahora definen una hipersuperficie Γ_1. Las L' nuevas restricciones son implicaciones directas de la consistencia de las primarias. El número total de L' restricciones es igual a la nulidad de la matriz formada por los paréntesis de Poisson entre las restricciones primarias y el rango nos dirá cuantos multiplicadores esperamos encontrar. Ahora con la adición de estas nuevas restricciones podemos construir un Hamiltoniano secundario el cual contiene información tanto de las restricciones primarias, como de las secundarias, es decir

$$H_2 := H_C + \lambda_i\phi_i. \tag{1.36}$$

Aquí ϕ_i son todas las restricciones tanto primarias como secundarias halladas hasta el momento. Las ecuaciones (1.31) después de ser evaluadas en Γ_P por consistencia tienen que ser revisadas en Γ_1. Por lo tanto, el rango de F puede disminuir o quedarse igual y el número de relaciones (1.35) puede permanecer igual o incrementar. Por lo tanto, podemos obtener más restricciones llamadas terciarias independientes de las primarias y de las secundarias y de ellas mismas. Implicando que todas las restricciones definen una hipersuperficie con dimensión menor que Γ_P. Este proceso continúa hasta que la siguiente situación sea obtenida. A todo el conjunto de restricciones secundarias, terciarias, etc. se les llamará por simplicidad secundarias.

1.6. Reductibilidad

En el caso donde las restricciones ϕ_i no sean todas independientes entre sí, es decir, que unas se pueden obtener mediante una transformación lineal a partir de las otras, se dice que la teoría presenta reductibilidad, de otro modo, se dice que se tiene el caso irreducible. Cabe hacer notar que la identificación de las restricciones independientes no es siempre una tarea fácil.

1.7. Condiciones sobre los multiplicadores y Hamiltoniana total

Con el conjunto completo de restricciones se procede a analizar las condiciones sobre los multiplicadores de Lagrange. Partiendo de las condiciones de consistencia tenemos

$$\dot{\phi}_m = \{\phi_m, H_T\} := \{\phi_m, H_C\} + \lambda^n \{\phi_m, \phi_n\} \approx 0, \tag{1.37}$$

con $m, n = 1, ..., J$, donde J es el número total de restricciones y se define el Hamiltoniano total H_T por la ecuación dada anteriormente.
Las relaciones de consistencia pueden ser vistas como un sistema de ecuaciones lineales para los multiplicadores $\lambda' s$, y de álgebra lineal elemental sabemos que la solución general se puede expresar de la siguiente forma

$$\lambda^n = U^n + V^n. \tag{1.38}$$

Identificando a U^n como la solución particular a las ecuaciones inhomogéneas y V^n la solución más general del sistema homogéneo, es decir

$$V^n \{\phi_m, \phi_n\} \approx 0, \tag{1.39}$$

además V^n puede ser escrita como una combinación lineal de soluciones independientes al sistema homogéneo, es decir, $V^n = \nu^i V_i^n$; $i = i, ..., I$, con I el número de soluciones independientes del sistema homogéneo, con lo cual podemos reescribir (1.38) en la siguiente forma:

$$\lambda^n = U^n + \nu^i V_i^n. \tag{1.40}$$

Teniendo en cuenta que las ν^i son totalmente arbitrarias, entonces las λ^n pueden separarse en una parte que se fija vía las condiciones de consistencia y otra que permanece indeterminada, lo cual debe verse reflejado en el Hamiltoniano total y por supuesto en las ecuaciones de movimiento. Con lo anterior tenemos que

$$\begin{aligned} H_T : &= H_C + \lambda^n \phi_n \\ &= H_C + \left(U^n + \nu^i V_i^n\right) \phi_n \\ &= H_C + U^n \phi_n + \nu^i V_i^n \phi_n \\ &= H_C + U^n \phi_n + \nu^i \phi_i, \end{aligned}$$

con $\nu^i V_i^n \phi_n = \nu^i \phi_i$, al introducir en las ecuaciones de movimiento tenemos que para cualquier función del espacio fase, su evolución temporal queda determinada por

$$\begin{aligned} \dot{F} &= \{F, H_T\} = \{F, H_C + U^n \phi_n + \nu^i \phi_i\} \\ &= \{F, H' + \nu^i \phi_i\} \\ &= \{F, H'\} + \{F, \nu^i \phi_i\} \\ &\approx \{F, H'\} + \nu^i \{F, \phi_i\}, \end{aligned} \tag{1.41}$$

con $H' := H_C + U^n \phi_n$ y $\phi_i \approx 0$.

Estas ecuaciones contienen I funciones arbitrarias y por construcción son equivalentes a las ecuaciones de Lagrange. El hecho de que aparezcan funciones arbitrarias marca una diferencia esencial, porque dadas las condiciones iniciales ya no tienen una evolución única, sino que están indeterminadas hasta funciones arbitrarias.

1.8. Restricciones de primera y segunda clase

Una función F en el espacio fase es de primera clase, si y sólo si, su paréntesis de Poisson es débilmente cero con todas las restricciones de la teoría [28, 29], es decir

$$\{F, \phi_n\} \approx 0. \tag{1.42}$$

Si F no es de primera clase, entonces es de segunda clase. Obviamente, las funciones de segunda clase son ambiguas modúlo una combinación lineal de funciones de primera clase.
La propiedad de ser de primera o segunda clase es esencial para la interpretación de las mismas restricciones. Toda cantidad que se anule débilmente es una cantidad que es fuertemente igual a una combinación lineal de restricciones. Por lo tanto, si F es una función de primera clase, entonces satisface la igualdad fuerte

$$\{F, \phi_n\} = f_n^m \phi_m. \tag{1.43}$$

Una característica importante de las funciones de primera clase es que esta propiedad se preserva bajo la operación de los paréntesis de Poisson.

Teorema 3.El paréntesis de Poisson de dos funciones de primera clase es una función de primera clase.

Demostración. Si F y G son funciones de primera clase entonces, además de (1.43) se tiene una relación similar para G, a saber

$$\{G, \phi_n\} = g_n^m \phi_m. \tag{1.44}$$

Entonces el paréntesis de Poisson de $\{F, G\}$ con las restricciones está dado por

$$\begin{aligned}
\{\{F, G\}, \phi_n\} &= \{F, \{G, \phi_n\}\} - \{G, \{F, \phi_n\}\} \\
&= \{F, g_n^m \phi_m\} - \{G, f_n^m \phi_m\} \\
&= \{F, g_n^m\}\phi_m - \{G, f_n^m\}\phi_m \\
&\quad + g_n^m\{F, \phi_m\} - f_n^m\{G, \phi_m\} \\
&= [\{F, g_n^m\} - \{G, f_n^m\} + g_n^l f_l^m - f_n^l g_l^m]\phi_m \\
&= H_n^m \phi_m \approx 0,
\end{aligned} \tag{1.45}$$

donde hemos usado reiteradamente la identidad de Jacobi.
Ahora aplicaremos la definición de funciones de primera y segunda clase a las restricciones que hemos obtenido. De la definición dada anteriormente podemos decir que una restricción es de primera clase, si su paréntesis de Poisson con todas las demás restricciones y con ella misma es débilmente cero, es decir, si consideramos a ϕ_l como una restricción particular y recordando que $\nu^l V_l^i \phi_i := \nu^l \phi_l$, tenemos

$$\begin{aligned}
\{\phi_l, \phi_n\} &= \{V_l^i \phi_i, \phi_n\} = V_l^i\{\phi_i, \phi_n\} + \{V_l^i, \phi_n\}\phi_i \\
&\approx V_l^i\{\phi_i, \phi_n\}.
\end{aligned} \tag{1.46}$$

Además debido a que V_l^i es solución al sistema homogéneo de ecuaciones para los $\lambda' s$, es decir, $V_l^i\{\phi_i, \phi_n\} \approx 0$ podemos concluir que ϕ_i es una restricción de primara clase, es decir

$$\{\phi_l, \phi_n\} \approx 0. \tag{1.47}$$

De manera similar se puede mostrar que H' también es de primara clase, para esto consideremos el paréntesis de Poisson con todas las restricciones

$$\{H', \phi_n\} = \{H_C + U^m \phi_m, \phi_n\} = \{H_C, \phi_n\} + U^m\{\phi_m, \phi_n\} + \{U^m, \phi_n\}\phi_m, \tag{1.48}$$

sumándole un cero débil, la ecuación (1.48)

$$\begin{aligned}
\{H', \phi_n\} &= \{H_C + U^m\phi_m, \phi_n\} = \{H_C, \phi_n\} + U^m\{\phi_m, \phi_n\} + \nu^l\{\phi_l, \phi_n\} \\
&= \{H_C + U^m\phi_m + \nu^l\phi_l, \phi_n\} \\
&= \{H_T, \phi_n\} = -\{\phi_n, H_T\} \approx 0. \qquad (1.49)
\end{aligned}$$

Esta última igualdad se satisface por condiciones de regularidad. A las restricciones que cumplan con (1.42) las denotaremos como γ y les llamaremos de primera clase, mientras que a aquellas restricciones que cumplan con que; el paréntesis de Poisson no sea débilmente nulo al menos con una de las J restricciones les llamaremos restricciones de segunda clase y les denotaremos por χ. Esta separación no siempre es inmediata, es decir las restricciones de primera clase no tiene porque ser directamente alguna de las restricciones primarias o secundarias [30], en general podrían ser combinación de éstas. Para hallarlas debemos fijarnos en los vectores nulos de la matriz cuyas entradas son los paréntesis de Poisson entre las restricciones, para después contraerlos con las J restricciones y finalmente hallar las restricciones de primera clase correctas. De acuerdo con lo visto anteriormente sobre las restricciones de segunda clase, éstas aparecen cuando la matriz $W'_{J\times J}$, cuyas entradas son

$$W'_{\alpha\beta} = \{\phi_\alpha, \phi_\beta\}, \qquad (1.50)$$

no se anule en la superficie de todas las restricciones. Una vez más supondremos que el rango de la matriz W' es constante en la superficie de todas las restricciones.

Teorema 4. Si $\det(W'_{\alpha\beta}) \approx 0$, entonces existe al menos una restricción de primera clase entre las ϕ_α.

Si $\det(W'_{\alpha\beta}) = 0$ (en la superficie de restricciones), entonces el rango de W' es $R' < J$ y la nulidad de W' $(J - R') \neq 0$, con el que podemos encontrar $(J - R')$ vectores nulos ω_i con $(i = 1, ..., J - R')$, tales que

$$\omega_i^\alpha\{\phi_\alpha, \phi_\beta\} \approx 0, \qquad (1.51)$$

esto de la misma definición de vectores nulos, con lo cual tenemos

$$\{\omega_i^\alpha\phi_\alpha, \phi_\beta\} \approx 0 \qquad \forall\phi_\beta \epsilon \Phi, \qquad (1.52)$$

con $\Phi = \{\phi_\beta : \phi_\beta\ es\ una\ restricción\ primaria\ o\ secundaria\}$. De esta manera podemos ver que las restricciones $\omega_i^\alpha\phi_\alpha$ forman el conjunto de restricciones de primera clase, concluyendo que las restricciones de primera clase vienen dadas por:

$$\gamma_i := \omega_i^\alpha\phi_\alpha. \qquad (1.53)$$

La matriz formada por los paréntesis de Poisson de las restricciones de primera y segunda clase $W'_{\alpha\beta}$ es

$$\begin{aligned}
W' &= \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \phi_0 & \phi_1 & \cdots & \phi_J \end{array} \\ \begin{array}{c} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_J \end{array} & \left(\begin{array}{cccc} \{\phi_0, \phi_0\} & \{\phi_0, \phi_1\} & \cdots & \{\phi_0, \phi_J\} \\ \{\phi_1, \phi_0\} & \{\phi_1, \phi_1\} & \cdots & \{\phi_1, \phi_J\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{\phi_J, \phi_0\} & \{\phi_J, \phi_1\} & \cdots & \{\phi_J, \phi_J\} \end{array}\right) \end{array}, \\
&\rightarrow \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \gamma_i & \chi_\beta \end{array} \\ \begin{array}{c} \gamma_i \\ \chi_\alpha \end{array} & \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & C_{\alpha\beta} \end{array}\right) \end{array},
\end{aligned}$$

con $C_{\alpha\beta}$ una matriz $R' \times R'$ antisimétrica e invertible sobre la superficie de restricciones. Además podemos notar que el número de restricciones de segunda clase coincide con el rango de W' que es R', el cual es par.

1.9. Restricciones de primera clase y transformaciones de norma

La presencia de multiplicadores de Lagrange arbitrarios en las ecuaciones de movimiento así como en sus soluciones, significa que las variables q^i y p_i del espacio fase no se pueden determinar de manera única a partir de las condiciones iniciales $(q^i(0), p_i(0))$, por lo tanto, no tienen significado físico. La información física acerca de un sistema se puede obtener a partir de funciones $A(q, p)$ definidas sobre la hipersuperficie de restricciones, que son independientes de los multiplicadores arbitrarios de Lagrange, tales funciones son cantidades observables del sistema. El estado físico del sistema esta determinado por el conjunto completo de cantidades observables del sistema en ese instante. Para ver esto consideremos un sistema con restricciones de primera clase y además consideremos una variable dinámica general [30], digamos $G(t)$ en $t = 0$ y su cambio en un instante de tiempo muy pequeño digamos δt. El valor de esta variable en el instante δt se puede calcular mediante las ecuaciones de movimiento, es decir

$$\begin{aligned} G(\delta t) &= G(0) + \dot{G}\delta t = G(0) + \{G, H_T\}\delta t, \\ &= G(0) + [\{G, H'\} + \nu^i\{G, \gamma_i\}]\delta t. \end{aligned} \tag{1.54}$$

Dado que los coeficientes ν^i son completamente arbitrarios, es posible elegir diferentes valores para estos coeficientes y obtener valores diferentes para $G(\delta t)$, es decir

$$G'(\delta t) = G(0) + [\{G, H'\} + \nu'^i\{G, \gamma_i\}]\delta t. \tag{1.55}$$

Por lo tanto, la diferencia es de la forma

$$\triangle G(\delta t) = \{G, \gamma_i\}\epsilon^i, \tag{1.56}$$

donde $\epsilon^i = \left(\nu^i - \nu'^i\right)\delta t$. Dado que $G(\delta t)$ y $G'(\delta t) + \triangle G(\delta t)$ corresponden al mismo estado físico, entonces llegamos a la conclusión de que las restricciones de primera clase generan transformaciones no físicas de las variables dinámicas, las cuales se conocen como transformaciones de norma. La aplicación sucesiva de dos transformaciones del tipo (1.56), con parámetros ϵ^i y ϵ'^i da un resultado que depende del orden de las transformaciones. La diferencia en los dos posibles resultados es

$$\begin{aligned} \left(\triangle\triangle' - \triangle'\triangle\right) G(\delta t) &= \epsilon^i\epsilon'^j\left[\{\{G, \gamma_j\}, \gamma_i\} - \{\{G, \gamma_i\}, \gamma_j\}\right], \\ &= \epsilon^i\epsilon'^j\{\{G, \gamma_i\}, \gamma_j\}. \end{aligned} \tag{1.57}$$

donde la última igualdad se consigue usando la identidad de Jacobi. Pero el paréntesis de dos restricciones de primera clase es fuertemente igual a una combinación lineal de restricciones de primera clase, es decir

$$\{\gamma_i, \gamma_j\} = C_{ij}^{\lambda}\gamma_\lambda. \tag{1.58}$$

Este resultado nos lleva a concluir que la cantidad $\{\gamma_i, \gamma_j\}$ es también el generador de una transformación de norma. Los $\gamma's$ son los generadores de las simetrías de norma [30].

1.10. Grados de libertad

En este momento ya contamos con lo necesario y suficiente para llevar a cabo el conteo de grados de libertad de algún sistema, pero antes definiremos el siguiente concepto.
Los grados de libertad físicos de un sistema, son el número de variables físicas independientes necesarias y suficientes para describir el sistema. Aquí se hace una extrapolación al caso de sistemas singulares, es decir el conteo se hace de la siguiente manera

$$\begin{aligned} GL &= \frac{1}{2}\left[\left(\begin{array}{c}\text{Número total de}\\ \text{variables canónicas}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{Número de restricciones de}\\ \text{segunda clase originales}\end{array}\right)\right. \\ &\quad \left. - 2\times\left(\begin{array}{c}\text{Número de restricciones de}\\ \text{primera clase}\end{array}\right)\right]. \end{aligned} \tag{1.59}$$

Se tiene que dividir por $1/2$ dado que se toma todo el conjunto de variables canónicas del espacio fase, es decir, $q's$, $p's$ y el 2 que multiplica a las restricciones de primera clase, es debido al doble papel que representan éstas; por una parte son restricciones y al mismo tiempo son también generadoras de transformaciones de norma, las cuales pueden verse como restricciones adicionales que presenta la teoría.

1.11. Hamiltoniana extendida, ecuaciones de movimiento y paréntesis de Dirac

La evolución temporal está dada ahora por una Hamiltoniana que contiene todas las restricciones primarias y secundarias, de primera y segunda clase, junto con el paréntesis de Poisson. Esta Hamiltoniana extendida ésta dada por:

$$H_E := H_C + U^{\alpha}\chi_{\alpha} + \nu^{\mu}\gamma_{\mu}, \tag{1.60}$$

donde $\alpha = 1, ..., R'$, y $\mu = 1, ..., J - R'$.

La introducción de esta Hamiltoniana extendida es una nueva característica del marco Hamiltoniano. Nótese que las ecuaciones de movimiento ahora se pueden obtener mediante la siguiente acción:

$$S_E(q, p, \nu) = \int (p_n\dot{q}^n - H' - \nu^{\mu}\phi_{\mu})dt = (p_n\dot{q}^n - H_E)dt, \tag{1.61}$$

la cual se llamará acción extendida, y que a diferencia de S, ésta contiene toda la información del sistema, así como la Hamiltoniana extendida.
La evolución temporal está dada por

$$\dot{F} := \{F, H_E\} \approx \{F, H_C\} + U^{\alpha}\{F, \chi_{\alpha}\} + \nu^{\mu}\{F, \gamma_{\mu}\}. \tag{1.62}$$

Las condiciones de consistencia son

$$\dot{\chi}_{\alpha} \approx \{\chi_{\alpha}, H_C\} + U^{\beta}\{\chi_{\alpha}, \chi_{\beta}\} \approx 0 \tag{1.63}$$

$$\dot{\gamma}_{\mu} \approx \{\gamma_{\mu}, H_C\} \approx 0 \tag{1.64}$$

Pero ahora las ecuaciones (1.63) se satisfacen automáticamente y no dan origen a nuevas restricciones. Con respecto a las ecuaciones (1.62) recordemos que ya habíamos definido la matriz

$C_{\alpha\beta}$ cuyas entradas son las restricciones de segunda clase, debido a que esta matriz es invertible, existe la inversa tal que

$$C_{\beta\alpha}C^{\alpha\gamma} = \delta^{\gamma}_{\beta}. \tag{1.65}$$

Entonces la ecuación (1.64) se puede reescribir como

$$U^{\beta} \approx -C^{\beta\alpha}\{\chi^{\alpha}, H_C\}. \tag{1.66}$$

Así la ecuación de movimiento se puede escribir como

$$\dot{F} := \{F, H_E\} \approx \{F, H_C\} - \{F, \chi_{\beta}\}C^{\beta\alpha}\{\chi^{\alpha}, H_C\} + \nu^{\mu}\{F, \gamma_{\mu}\}. \tag{1.67}$$

Los dos primeros términos están completamente determinados, por lo tanto se puede agrupar en una única expresión estandarizada. Definimos

$$\{F, G\}_D := \{F, G\} - \{F, \chi_{\beta}\}C^{\beta\alpha}\{\chi^{\alpha}, G\}. \tag{1.68}$$

Esta expresión se conoce como el paréntesis de Dirac [28, 29]. Por lo tanto, podemos reescribir las ecuaciones de movimiento de la siguiente manera:

$$\dot{F} \approx \{F, H_C\}_D + \nu^{\mu}\{F, \gamma_{\mu}\}. \tag{1.69}$$

Aparte del término asociado a las restricciones de primara clase, hemos logrado escribir la dinámica de un sistema con restricciones de una manera Hamiltoniana, sólo que esta vez, en lugar del paréntesis de Poisson se debe usar el paréntesis de Dirac. El paréntesis de Dirac posee todas las propiedades del paréntesis de Poisson, a saber

$$\{F, G\}_D = -\{G, F\}_D \longrightarrow \text{Antisimétria} \tag{1.70}$$
$$\{G, aF + bR\}_D = a\{G, F\}_D + b\{G, R\}_D \longrightarrow \text{Linealidad} \tag{1.71}$$
$$\{G, RF\}_D = \{G, F\}_D R + G\{F, R\}_D \longrightarrow \text{Regla de Leibniz} \tag{1.72}$$
$$\{\{G, F\}_D, R\}_D = \{\{R, F\}_D, G\}_D + \{\{G, R\}_D, F\}_D \longrightarrow \text{Identidad de Jacobi} \tag{1.73}$$

y las siguientes propiedades adicionales

$$\{F, G\}_D \approx \{F, G\} \longrightarrow \text{Para } G \text{ de primera clase y } F \text{ arbitraria.} \tag{1.74}$$
$$\{\{F, G\}_D, R\}_D \approx \{\{F, G\}, R\} \longrightarrow \text{Para } F\ G \text{ de primera clase y } R \text{ arbitraria.} \tag{1.75}$$

Otra propiedad importante del paréntesis de Dirac es la iteración.

1.12. Observables

Una observable (clásica) es, por definición en este formalismo una función en la subvariedad definida por las restricciones que es invariante de norma, o dicho de otra forma, una observable es una función $\mathcal{O}$ del espacio fase, cuyo paréntesis de Dirac es débilmente cero con las restricciones de primera clase, es decir

$$\{\mathcal{O}, \gamma_{\mu}\}_D \approx 0. \tag{1.76}$$

Es importante señalar que la definición aquí dada de una observable, sólo depende de la definición del principio de acción, ya que de este principio se desprende lo necesario para esta definición. Además esta definición no pretende hacer alguna conexión con el expermento. Sin embargo, uno podría esperar que todas las observables definidas por este formalismo sean susceptibles de ser medidas, es decir, ser sometidas al experimento. Finalmente, cabe mencionar que las observables clásicas no necesariamente lo serán a nivel cuántico.

Capítulo 2

Dinámica y simetrías de gravedad en $(2+1)$ dimensiones

Gravedad en $(2+1)$ dimensiones de espacio-tiempo está definida por la acción de Einstein-Hilbert tridimensional

$$S_{E-H} \equiv \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} d^3x\sqrt{-g}\,(R-2\Lambda)\,, \tag{2.1}$$

donde g es el determinante de la métrica $g_{\mu\nu}$ de signatura $(-,+,+)$. $R \equiv R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$ es la traza del tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$. Aquí, hemos usado unidades en las que pensamos que $8\pi G = 1$. $\mathcal{M}$ es la variedad tridimensional y Λ es la constante cosmológica, la cual puede ser positiva, negativa o nula; llevándonos a un espacio-tiempo de Sitter (dS), Anti-de Sitter (AdS) o plano, respectivamente. Extremizando la acción con respecto a la métrica $g_{\mu\nu}$, obtenemos las ecuaciones de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0. \tag{2.2}$$

Una propiedad importante de RG en $(2+1)$ dimensiones es que, cualquier solución a las ecuaciones de Einstein en el vacío con $\Lambda < 0$ es localmente Anti-de Sitter, con $\Lambda > 0$ es localmente de Sitter y localmente nula si $\Lambda = 0$. Lo anterior puede ser verificado observando que el tensor de curvatura en tres dimensiones es totalmente determinado por el tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}R_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}R_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}R_{\nu\rho} - \frac{1}{2}R\,(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})\,. \tag{2.3}$$

Como una consecuencia, cualquier solución de las ecuaciones (2.2) tiene curvatura constante; a saber

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \Lambda\,(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})\,. \tag{2.4}$$

Físicamente, esto significa que sobre el espacio-tiempo tridimensional no hay grados de libertad locales propagándose, es decir, no hay ondas gravitacionales en esta teoría. A priori, ésta característica puede hacer ver a la teoría demasiado trivial y muy decepcionante. Sin embargo, el caso tridimensional proporciona un terreno de juego relativamente fácil para probar ideas y realizar cálculos exactos en modelos gravitacionales clásicos (ó cuánticos). Por ejemplo, el análisis Lagrangiano/Hamiltoniano es más manejable como veremos en éste capítulo y en el capítulo 4. Por otra parte, la teoría puede ser reformulada en términos de una teoría de Chern-Simons [49, 51]. La ausencia de grados de libertad locales nos dice que la teoría sólo depende de efectos globales. Adicionalmente, existen soluciones de agujero negro con constante cosmológica negativa, encontradas por Bañados-Teitelboim-Zanelli (BTZ) [72].

En este capítulo, desarrollamos una completa descripción Hamiltoniana de la teoría de Einstein con constante cosmológica en la formulación de primer orden en $(2+1)$ dimensiones, en el marco teórico del formalismo Hamiltoniano de Dirac. Considerando el espacio fase completo, hemos identificado todas las propiedades y simetrías relevantes de la teoría, como son: la estructura de las restricciones, la acción extendida, la Hamiltoniana extendida, el álgebra de restricciones y las transformaciones de norma. En particular, con la clasificación de las restricciones en primera y segunda clase, podemos llevar a cabo el conteo de los grados de libertad físicos y la construcción de los paréntesis de Dirac.

2.1. Formalismo de primer orden para RG (2+1)

Concretamente, el formalismo de primer orden o formulación de Palatini consiste en lo siguiente: en lugar de trabajar como usualmente se hace, es decir con la métrica $g_{\mu\nu}$, usaremos una cantidad auxiliar e^I_μ (con I un índice de Lorentz y a índices latinos que denotan índices de espacio-tiempo), llamada dreibein o tríada, con la cual podemos escribir a la métrica espacio-tiempo como un objeto compuesto

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x) &= -e^0_a e^0_b + e^1_a e^1_b + e^2_a e^2_b \\ &= e^I_\mu(x)\eta_{IJ}e^J_\nu(x), \end{aligned} \tag{2.5}$$

aquí η_{IJ} es la métrica de Minkowski interna.

La relación (2.5) puede ser vista simplemente como la transformación de un tensor bajo un cambio de coordenadas descrito por la matriz e^I_μ. Debido a que e^I_μ es una matriz no singular, con $e \equiv \det e^I_\mu = \sqrt{-detg} \neq 0$, entonces existe una inversa e^μ_I de tal manera que, $e^I_\mu e^\mu_J = \delta^I_J$ y $e^\mu_I e^I_\nu = \delta^\mu_\nu$. Nótese, que para una métrica dada, el dreibein no es único; de hecho, todos los campos dreibein ralacionados por una transformacion de Lorentz local

$$\acute{e}^I_\mu = \Lambda^{-1I}_J(x)e^J_\mu \quad \text{con} \quad \eta_{IJ} = \Lambda^K{}_I\Lambda^L{}_J\eta_{KL}, \tag{2.6}$$

son equivalentes (la transformación es local dado que su efecto es sólo en los índices de Lorentz).

Ahora podemos usar el dreibein para definir una base en el espacio de formas diferenciales. Podemos definir una 1-forma $e \equiv e^I_\mu dx^\mu$, y el Levi-Civita en componentes de Lorentz ϵ_{IJK} de la siguiente manera:

$$\epsilon_{\mu\nu\rho} = e^{-1}\epsilon_{IJK}e^I_\mu e^J_\nu e^K_\rho, \tag{2.7}$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho} = e\epsilon^{IJK}e^\mu_I e^\nu_J e^\rho_K. \tag{2.8}$$

Como una consecuencia directa, tenemos que

$$d^3x\sqrt{-g} = \frac{1}{3!}\epsilon_{IJK}e^I \wedge e^J \wedge e^K. \tag{2.9}$$

En el formalismo de triadas, el papel de la conexión es adoptado por la 1-forma $A^{IJ} = A^{IJ}_\mu dx^\mu$, con $A^{IJ} = -A^{JI}$. Ésta cantidad permite construir una cantidad que transforma como un vector de Lorentz local. De hecho, además de la 2-forma de^I, la siguiente cantidad, llamada la torsión 2-forma de la conexión,

$$T^I \equiv de^I + A^I{}_J \wedge e^J, \tag{2.10}$$

transforma como un vector bajo transformaciones de Lorentz, es decir, $T^I \to \Lambda^{-1I}{}_J T^J$, siempre que la cantidad $A^I{}_J$, cuyas componentes A^{IJ}_μ llamadas conexiones de spin, transforme como

$$A^I{}_J \to \Lambda^{-1I}{}_K d\Lambda^K{}_J + \Lambda^{-1I}{}_K A^K{}_L \Lambda^L{}_J. \tag{2.11}$$

La ecuación (2.10) es llamada, la primera estructura de Cartan. La segunda estructura de Cartan esta dada por

$$dA^{IJ} + A^I{}_K \wedge A^{KI} = R^{IJ}, \tag{2.12}$$

donde

$$R^{IJ}_{\mu\nu}(A) = \partial_\mu A^{IJ}_\nu - \partial_\nu A^{IJ}_\mu + A^{IK}_\mu A^J{}_{\nu K} - A^{IK}_\nu A^J{}_{\mu K}, \tag{2.13}$$

es el tensor de curvatura,

$$R^{IJ} = \frac{1}{2} R^{IJ}_{\mu\nu}(x) dx^\mu \wedge dx^\nu, \tag{2.14}$$

$$R^{\lambda\sigma}{}_{\mu\nu} = e^\lambda_I e^\sigma_J R^{IJ}_{\mu\nu}, \tag{2.15}$$

y, usando (2.15) tenemos lo siguiente:

$$d^3x\sqrt{-g}R = \epsilon_{IJK} e^I \wedge R^{JK}. \tag{2.16}$$

En el capítulo 4, adoptaremos la llamada notación adjunta, la cual es válida sólo en tres dimensiones,

$$R_I \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{IJK} R^{JK} \quad \longleftrightarrow \quad R^{IJ} \equiv -\epsilon^{IJK} R_K, \tag{2.17}$$

$$A_I \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{IJK} A^{JK} \quad \longleftrightarrow \quad A^{IJ} \equiv -\epsilon^{IJK} A_K. \tag{2.18}$$

2.2. Análisis de Dirac

El principio de acción que describe a gravedad en $(2+1)$ dimensiones (2.1) en términos de las variables definidas anteriormente, está dado por

$$S[A, e]_P = \int_{\mathcal{M}} \epsilon^{IJK} \left[R[A]_{IJ} \wedge e_K - \frac{\Lambda}{3} e_I \wedge e_J \wedge e_K \right], \tag{2.19}$$

donde $A^{IJ} = A^{IJ}_\mu dx^\mu$ es la conexión 1-forma evaluada en el álgebra de Lie de algún grupo interno $\mathcal{G}$, que admita un tensor invariante totalmente antisimétrico ϵ^{IJK} [53]; $e^I = e^I_\mu dx^\mu$ es una triada 1-forma, la cual corresponde al campo gravitacional, y Λ es la constante cosmológica. Aquí, x^μ son las coordenadas que etiquetan los puntos de la variedad 3-dimensional $\mathcal{M}$, sobre la cual está definida la acción. En nuestra notación, los índices griegos corren de 0 a 2, mientras tanto los índices I, J corren de 0 a $\mathfrak{g} = \dim(\mathcal{G})$.

Ahora, podemos hallar las ecuaciones de movimiento a partir de la variación en la acción (2.19) con respecto a las variables independientes (A, e), es decir, la variación con respecto A^{IJ} y con respecto a e^I, nos da respectivamente

$$\epsilon^{\alpha\mu\nu}\epsilon^{IJK} D_\mu e_{\nu K} = 0, \tag{2.20}$$

$$\epsilon^{\alpha\mu\nu}\epsilon_{IJK}\left[R_{\mu\nu}{}^{JK} - \Lambda e^J_\mu e^K_\nu\right] = 0, \tag{2.21}$$

donde $D_\mu e^I_\nu = \partial_\mu e^I_\nu + A_\mu^{IJ} e_{\nu J}$. Estas ecuaciones de movimiento nos dicen que el espacio-tiempo no es plano, pero si es localmente homogéneo, con curvatura proporcional a Λ. En particular, la primera ecuación de movimiento nos da la condición de no torsión del espacio-tiempo, la cual puede ser resuelta para obtener la conexión de spin compatible con e^I_α. Insertando la solución de la primera ecuación en la segunda, es posible obtener las ecuaciones de Einstein

$$G^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = 0. \tag{2.22}$$

Recordemos que esta ecuación implica que el espacio-tiempo tiene curvatura constante proporcional a Λ, i.e., $R = 6\Lambda$. Nótese que este resultado es independiente de la signatura del espacio-tiempo, y por tanto, del grupo interno que estemos considerando. Por otra parte, con el fin de realizar el análisis Hamiltoniano, procedemos a realizar la descomposición 2+1 de la acción, para lo cual consideramos a $\mathcal{M}$ una variedad globalmente hiperbólica, es decir, que se puede foliar de tal manera que $\mathcal{M}:\Sigma\times\mathcal{R}$, donde $\mathcal{R}$ representa un parámetro de evolución y Σ es una superficie de Cauchy bidimensional sin borde ($\partial\Sigma=0$), con lo cual tenemos que

$$\begin{aligned} S[e,A]_P &= \int dx^3\Big[\epsilon^{0ab}e^K{}_b\epsilon_{IJK}\dot{A}_a{}^{IJ}-\epsilon^{0ab}e^K{}_b\epsilon_{IJK}D_aA_0{}^{IJ}+\frac{1}{2}\epsilon^{0ab}\epsilon_{IJK}e^K{}_0F^{IJ}{}_{ab}\\ &\quad -\Lambda\epsilon^{0ab}\epsilon_{IJK}e^I{}_0e^J{}_ae^Kb\Big], \end{aligned} \tag{2.23}$$

donde $D_aA_b{}^{IJ}=\partial_aA_b{}^{IJ}+A_a{}^{IK}A_{bK}{}^J+A_a{}^{JK}A_b{}^I{}_K$ y $F^{IJ}{}_{ab}=\partial_aA_b{}^{IJ}-\partial_bA_a{}^{IJ}+A_a{}^{IK}A_{bK}{}^J-A_b{}^{IK}A_{aK}{}^J$. Aquí $a,b=1,2$ son índices de espacio. De (2.23) podemos identificar la siguiente densidad Lagrangiana:

$$\mathcal{L}=\epsilon^{0ab}e^K{}_b\epsilon_{IJK}\dot{A}_a{}^{IJ}-\epsilon^{0ab}e^K{}_b\epsilon_{IJK}D_aA_0{}^{IJ}+\frac{1}{2}\epsilon^{0ab}\epsilon_{IJK}e^K{}_0F^{IJ}{}_{ab}-\Lambda\epsilon^{0ab}\epsilon_{IJK}e^I{}_0e^J{}_ae^K{}_b. \tag{2.24}$$

Es común encontrar en la literatura que el análisis Hamiltoniano para la acción (2.23) se realice en el contexto de un espacio fase reducido [53, 49]. Esto significa que sólo se consideran como variables dinámicas aquellas que aparezcan en la acción con derivada temporal. Sin embargo, en este trabajo consideramos como variables dinámicas a todo el conjunto de A^{IJ}'s $=(A_{aIJ},A_0^{IJ})$ y de e's $=(e_{aI},e_0^I)$ que definen nuestra teoría. Con el propósito de hacer uso del formalismo de Dirac, definimos los momentos $(\Pi^\alpha{}_I,\Pi^\alpha{}_{IJ})$ canónicamente conjugados a $(e^I{}_\alpha,A_\alpha{}^{IJ})$ de la siguiente manera [30, 31]:

$$\Pi^\alpha{}_{IJ}=\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{A}_\alpha{}^{IJ}},\qquad \Pi^\alpha{}_I=\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{e}^I{}_\alpha}. \tag{2.25}$$

Por otra parte, los elementos de la matriz Hessiana

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu e^I_\alpha)\partial(\partial_\mu e^I_\beta)},\quad \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu e^I_\alpha)\partial(\partial_\mu A_\beta{}^{IJ})},\quad \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha{}^{IJ})\partial(\partial_\mu A_\beta{}^{IJ})},$$

son idénticamente cero, y por lo tanto, el rango de la matriz Hessiana es cero. De la definición de los momentos (2.25), podemos identificar las siguientes restricciones primarias:

$$\begin{aligned} \phi^0{}_I &:= \Pi^0{}_I\approx 0, &\qquad \phi^a{}_I:=\Pi^a{}_I\approx 0,\\ \phi^0{}_{IJ} &:= \Pi^0{}_{IJ}\approx 0, &\qquad \phi^a{}_{IJ}:=\Pi^a{}_{IJ}-\epsilon^{0ab}\epsilon_{IJK}e_b{}^K\approx 0. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Se puede observar que, si se considera un espacio fase reducido, las restricciones $\phi^0{}_I$ y $\phi^0{}_{IJ}$ no deberían ser tomadas en cuenta [53, 49]. Sin embargo, la propuesta en este análisis es trabajar con el espacio fase completo, lo cual será crucial en nuestro estudio. Afín de saber si emergerán más restricciones a partir de las primarias, construimos el Hamiltoniano primario, el cual será de utilidad en el uso de las condiciones de consistencia. De manera similar a lo que sucede en mecánica elemental, se puede definir el Hamiltoniano canónico de la siguiente manera:

$$H_C = \int\Big[-\frac{1}{2}e^K{}_0\epsilon^{0ab}\epsilon_{IJK}F^{IJ}{}_{ab}-A_0{}^{IJ}D_a\Pi_{IJ}{}^a+\Lambda e^I{}_0e^J{}_a\Pi^a{}_{IJ}\Big]dx^2. \tag{2.27}$$

De esta forma, sumamos las restricciones primarias al Hamiltonino canónico con el fin de identificar el correspondiente Hamiltoniano primario, es decir

$$H_P=H_C+\int\left[\lambda^I{}_0\phi_I{}^0+\lambda^I{}_a\phi_I{}^a+\lambda^{IJ}{}_0\phi_{IJ}{}^0+\lambda^{IJ}{}_a\phi_{IJ}{}^a\right]dx^2, \tag{2.28}$$

aquí $\lambda^I{}_0$, $\lambda^I{}_a$, $\lambda^{IJ}{}_0$, $\lambda^{IJ}{}_\alpha$, son los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones primarias. Antes de calcular las relaciones de consistencia, definimos los paréntesis fundamentales de Poisson respecto a las variables canónicas, dados por

$$\begin{aligned} \{e_\alpha{}^I(x),\Pi^\beta{}_J(y)\} &= \delta^\beta{}_\alpha\delta^I{}_J\delta^2(x-y),\\ \{A_\alpha{}^{IJ}(x),\Pi^\beta{}_{KL}(y)\} &= \frac{1}{2}\delta^\beta{}_\alpha\left(\delta^I{}_K\delta^J{}_L-\delta^I{}_L\delta^J{}_K\right)\delta^2(x-y). \end{aligned} \tag{2.29}$$

Prosiguiendo con el formalismo de Dirac y con el fin de saber si existen restricciones secundarias y cuántas serán, conviene fijarse en la matriz (6×6) cuyas entradas son los paréntesis de Poisson entre todas las restricciones primarias, y cuyo rango es igual al número de multiplicadores de Lagrange que podremos determinar, mientras que su nulidad corresponderá al número de restricciones secundarias que emergerán de las condiciones de consistencia aplicadas a estas restricciones,

$$W^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\epsilon^{0ab}\epsilon_{IKL}\delta^2(x-y) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon^{0ab}\epsilon_{IKL}\delta^2(x-y) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.30}$$

esta matriz tiene rango=4 y nulidad=2. Por lo tanto, a partir de las condiciones de consistencia

$$\dot{\phi}^{\beta}(x) = \int d^2y\{\phi^{\beta}, \mathcal{H}_C(y)\} + \int d^2y\lambda_{\alpha}^{JK}\{\phi^{\beta},(x)\phi^{\alpha}{}_{JK}(y) + \int d^2y\lambda_{\delta}{}^{L}\{\phi^{\beta}(x),\phi^{\delta}{}_{L}(y)\} \approx 0,$$

donde $\phi^{\beta} = (\phi_I{}^0, \phi_{IJ}{}^0, \phi_I{}^a, \phi_{IJ}{}^a)$, y de los vectores nulos, es posible obtener las siguientes 2 restricciones secundarias:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_I{}^0 &= \{\phi_I{}^0(x), H_P\} \approx 0 \implies \psi_I := -\frac{1}{2}\epsilon^{0ab}\epsilon_{IKL}F^{KL}{}_{ab} + \Lambda e^J{}_a\Pi_{IJ}{}^a \approx 0, \\ \dot{\phi}_{IJ}{}^0 &= \{\phi_{IJ}{}^0(x), H_P\} \approx 0 \implies \psi_{IJ} := D_a\Pi_{IJ}{}^a \approx 0. \end{aligned} \tag{2.31}$$

El rango nos permite obtener las siguientes expresiones para los multiplicadores de Lagrange introducidos previamente:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_{IJ}{}^a = \{\phi_{IJ}{}^a(x), H_P\} \approx 0, \implies \epsilon^{0ab}\epsilon_{IJK}\lambda^K_b &= 2\epsilon^{0ab}\epsilon_{IJK}D_b e^K_0 + A_I{}^K{}_0\Pi_{JK}{}^a \\ &\quad - A_J{}^K{}_0\Pi_{IK}{}^a, \\ \dot{\phi}_I{}^a = \{\phi_I{}^a(x), H_P\} \approx 0. \implies \epsilon^{0ab}\epsilon_{IJK}\lambda^{JK}{}_b &= \Lambda\Pi_{IJ}{}^a e^J{}_0. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Debido a que la teoría presenta restricciones secundarias, es posible calcular el Hamiltoniano secundario H_2, sumándole al primario una combinación lineal de las restricciones secundarias con el propósito de calcular las relaciones de consistencia sobre éstas. Puede verse sin mayor problema, que esta teoría ya no presenta restricciones terciarias. Con el fin de seguir con el formalismo, necesitamos separar de las restricciones primarias y secundarias, las que corresponden a primera clase (generadoras de las transformaciones de norma) y a las de segunda clase (las que permitirán construir los paréntesis de Dirac), para lo cual, necesitamos calcular los paréntesis de Poisson entre las restricciones primarias y secundarias. Los paréntesis de Poisson diferentes de cero están dados por

$$\begin{aligned} \{\phi_I{}^a(x), \phi_{KL}{}^b(y)\} &= -\epsilon^{0ab}\epsilon_{IKL}\delta^2(x-y), \\ \{\phi_{IJ}{}^a(x), \psi_K(y)\} &= \epsilon^{0ab}\left[-\epsilon_{KIJ}\partial_b + \epsilon_{KIL}A_{bJ}{}^L + \epsilon_{KLJ}A_{bI}{}^L\right]\delta^2(x-y), \\ \{\phi_{IJ}{}^a(x), \psi_{KL}(y)\} &= \frac{1}{2}\left[\eta_{LJ}\Pi_{KI}{}^a - \eta_{LI}\Pi_{KJ}{}^a + \eta_{KJ}\Pi_{IL}{}^a - \eta_{KI}\Pi_{JL}{}^a\right]\delta^3(x-y), \\ \{\psi_I(x), \psi_J(y)\} &= -\Lambda\epsilon^{0ab}\epsilon_{IJH}D_a e^H{}_b\delta^2(x-y) \\ \{\psi_I(x), \psi_{KL}(y)\} &= \frac{1}{2}\left[\eta_{KI}\psi_L - \eta_{LI}\psi_K + \Lambda\left(e_{Ka}\Pi_{IL}{}^a - e_{La}\Pi_{IK}{}^a\right)\right]\delta^2(x-y) \\ \{\psi_{IJ}(x), \psi_{KL}(y)\} &= \frac{1}{2}\left[\eta_{KI}\psi_{LJ} - \eta_{LI}\psi_{KJ} + \eta_{KJ}\psi_{IL} - \eta_{JL}\psi_{IK}\right]\delta^2(x-y) \approx 0. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Estos paréntesis forman una matriz que tiene rango 4 y 4 vectores nulos. Consecuentemente, tenemos que hallar 4 restricciones de primera clase y 4 multiplicadores de Lagrange.

Recordemos que las restricciones de primera clase no tienen porque ser directamente algunas de las restricciones primarias o secundarias encontradas previamente. Lo que sucede aquí y en muchas teorías es que, estas restricciones de primera clase sean combinaciones lineales de las restricciones primarias y secundarias. Por lo tanto, es necesario calcular los vectores nulos. Una vez encontrados y contraídos con las restricciones se obtienen las siguientes 4 restricciones de primera clase:

$$\begin{aligned} \gamma^0{}_I &:= \Pi^0{}_I \approx 0, \qquad \gamma_I := -D_a\phi^a{}_I - \frac{1}{2}\epsilon^{0ab}\epsilon_{IKL}F_{ab}{}^{KL} + \Lambda e_a{}^J\Pi^a{}_{IJ} + \Lambda e_a{}^J\phi^a{}_{IJ} \approx 0, \\ \gamma^0{}_{IJ} &:= \Pi^0{}_{IJ} \approx 0, \qquad \gamma_{IJ} := D_a\Pi^a{}_{IJ} + \frac{1}{2}\epsilon^H{}_{IM}\epsilon^{MF}{}_J[\phi^a{}_F e_{aH} - \phi^a{}_H e_{aF}] \approx 0. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Nótese, que la restricción γ_I puede ser identificada como la restricción dinámica, mientras que γ_{IJ} corresponde a la restricción de Gauss, tal como ocurre en la teoría de Yang-Mills. Por otra parte, el rango de la matriz (2.33) nos lleva a identificar las siguientes restricciones de segunda clase:

$$\phi^a{}_I : \chi^a{}_I = \Pi^a{}_I \approx 0, \qquad \phi^a{}_{IJ} : \chi^a{}_{IJ} = \Pi^a{}_{IJ} - \epsilon^{0ab}\epsilon_{IJK}e_b{}^K \approx 0. \tag{2.35}$$

Es importante resaltar que la estructura completa de las restricciones γ_{IJ} y γ_I, dadas en (2.35) es dictada por los vectores nulos. De esta manera, el mismo método nos permite encontrar mediante el rango y la nulidad de la matriz (2.33) la estructura completa de las restricciones de primera y segunda clase [28, 29, 30, 31, 68, 69, 70, 71]. Este es uno de los beneficios del método de Dirac cuando es aplicado sin omitir algún paso. Cabe mencionar que la estructura completa de las restricciones de primera y segunda clase no ha sido reportada en la literatura. De hecho, con esto es posible observar que nuestras restricciones y las reportadas en [53, 49, 54] no son las mismas. Por una parte, en [53, 49] los autores trabajaron en el contexto de un espacio fase reducido. Por otra parte, en [54] se resuelven las restricciones de segunda clase antes de realizar la contracción de las restricciones primarias y secundarias con los vectores nulos, por ende, nuestras restricciones son diferentes de las resportadas en [54].

Ahora, observaremos las implicaciones obtenidas por el hecho de trabajar con el formalismo de Dirac; los paréntesis de Poisson distintos de cero entre las restricciones de primera clase con ellas mismas y con las de segunda clase, son

$$\begin{aligned} \{\gamma_I(x), \gamma_J(y)\} &= 2\Lambda\gamma_{JI}\delta^2(x\text{-}y) \approx 0, \\ \{\gamma_I(x), \gamma_{KL}(y)\} &= \frac{1}{2}[\eta_{IK}\gamma_L - \eta_{IL}\gamma_K]\,\delta^2(x\text{-}y) \approx 0, \\ \{\gamma_I(x), \chi_{KL}{}^a(y)\} &= \frac{1}{2}[\eta_{IL}\chi_K{}^a - \eta_{IK}\chi_L{}^a]\,\delta^2(x\text{-}y) \approx 0, \\ \{\gamma_I(x), \chi_J{}^a(y)\} &= 2\Lambda\chi_{IJ}{}^a\delta^2(x\text{-}y) \approx 0, \\ \{\gamma_{IJ}(x), \chi_{KL}{}^a(y)\} &= \frac{1}{2}[\eta_{KJ}\chi_{IL}{}^a - \eta_{KI}\chi_{JL}{}^a + \eta_{LI}\chi_{JK}{}^a - \eta_{LJ}\chi_{IK}{}^a]\,\delta^2(x\text{-}y) \approx 0, \\ \{\gamma_{IJ}(x), \chi_K{}^a(y)\} &= \frac{1}{2}[\eta_{KJ}\chi_I{}^a - \eta_{KI}\chi_J{}^a]\,\delta^2(x\text{-}y) \approx 0, \\ \{\gamma_{IJ}(x), \gamma_{KL}(y)\} &= \frac{1}{2}[\eta_{IK}\gamma_{LJ} - \eta_{IL}\gamma_{KJ} + \eta_{JK}\gamma_{IL} - \eta_{JL}\gamma_{IK}]\,\delta^2(x\text{-}y) \approx 0, \\ \{\chi^a{}_I(x), \chi^b{}_{KL}(y)\} &= -\epsilon^{0ab}\epsilon_{IKL}\delta^2(x-y). \end{aligned} \tag{2.36}$$

Por tanto, podemos observar que efectivamente el álgebra de las restricciones (2.34), es cerrada bajo el paréntesis de Poisson, es decir, forman un conjunto de primera clase. Es importante comentar que el conjunto (2.34) es cerrado con respecto al paréntesis de Poisson, si y sólo si

$$\epsilon^{IJK}\epsilon_{IMN} = (-1)\left(\delta^J{}_M\delta^K{}_N - \delta^J{}_N\delta^K{}_M\right). \tag{2.37}$$

Esta es la propiedad de la constante de estructura $\epsilon^I{}_{JK} = \epsilon^{IMN}\eta_{MJ}\eta_{NK}$, del álgebra de Lie para $SO(2,1)$.Por tanto, las restricciones (2.34) y (2.35) son cerradas bajo los paréntesis de Poisson,

es decir, ellas forman conjuntos de primera y segunda clase respectivamente siempre que $\mathcal{G} = SO(2,1)$.
Por otro lado, podemos observar que si tomamos $\Lambda \to 0$, el álgebra de restricciones forma un álgebra de Poincaré como fue reportado en [49], pero el grupo interno sigue siendo $SO(2,1)$ como puede ser observado del álgebra de las restricciones (2.34) y (2.35).
La correcta identificación de las restricciones de primera y segunda clase, nos permite llevar a cabo el conteo de los grados de libertad físicos locales para la teoría de la siguiente manera; hay 12 variables canónicas $\left(e^{I}{}_{\alpha}, \Pi^{\alpha}{}_{I}, A^{IJ}{}_{\alpha}, \Pi^{\alpha}{}_{IJ}\right)$, 4 restricciones de primera clase independientes $\left(\gamma^{0}{}_{I}, \gamma^{0}{}_{IJ}, \gamma_{I}, \gamma_{IJ}\right)$, y 4 restricciones de segunda clase independientes. Entonces, concluimos que la acción de Palatini para gravedad en tres dimensiones carece de grados de libertad físicos, como es de esperarse para una teoría topológica. Por otra parte, con el propósito de encontrar la acción extendida y los paréntesis de Dirac, es necesario determinar los correctos multiplicadores de Lagrange, esto porque no siempre vienen dados directamente a partir de las condiciones de consistencia sobre las restricciones, para tal propósito hacemos uso de la matriz cuyas entradas son los paréntesis de Poisson entre las restricciones de segunda clase, llamemos $C_{\alpha\beta}$ a esta matriz, por lo tanto, los multiplicadores de Lagrange serán determinados usando

$$u^{\beta} = -\int d^2x \{H_C, \chi_\alpha\} C^{-1}_{\alpha\beta},$$

donde $C^{-1}_{\alpha\beta}$ es tal que

$$\int d^2z C_{\alpha\beta}(x,z) C^{-1}_{\beta\mu}(z,y) = \delta^{\mu}_{\alpha}\delta^2(x-y).$$

Para este caso, tenemos que la matriz $C_{\alpha\beta}$ toma la siguiente forma

$$C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon^{0ab}\epsilon_{IJK}\delta^2(x-y) \\ \epsilon^{0ab}\epsilon_{IJK}\delta^2(x-y) & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.38}$$

por consiguiente, la inversa de $C_{\alpha\beta}$ es expresada como

$$C^{-1}_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -\epsilon^{IJH}\epsilon_{0ac}\delta^2(x-y) \\ \epsilon^{IJH}\epsilon_{0ac}\delta^2(x-y) & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.39}$$

De esta manera podemos hallar los correctos siguientes 12 multiplicadores de Lagrange

$$\lambda_a{}^{IJ} := \frac{\Lambda}{4}\epsilon_{0ab}\epsilon^{IJK}\Pi^{b}{}_{KL}e_0{}^{L}, \qquad \lambda_a{}^{I} := D_a e_0{}^{I} + \frac{1}{2}\epsilon_{0ab}\epsilon^{IJK}A_{0J}{}^{L}\Pi^{b}{}_{KL}. \tag{2.40}$$

Es importante comentar, que estos multiplicadores de Lagrange no se encuentran reportados en [49, 54, 53]. Con todos los resultados anteriores en mano, podemos hacer uso de los multiplicadores de Lagrange, las restricciones de primera y segunda clase, e identificar la acción extendida para nuestra teoría, la cual tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} S_E = & \int d^3x \Big[\Pi_{IJ}{}^{0}\dot{A}_0{}^{IJ} + \Pi_{IJ}{}^{a}\dot{A}_a{}^{IJ} + \Pi_I{}^{0}\dot{e}_0{}^{I} - \Pi_I{}^{a}\dot{e}_a{}^{I} - \mathcal{H} - \zeta^{I}{}_{0}\gamma_I{}^{0} - \zeta^{IJ}_{0}\gamma_{IJ}{}^{0} \\ & -\zeta^{I}\gamma_I - \zeta^{IJ}\gamma_{IJ} - \overline{\lambda}^{I}{}_{a}\chi_I{}^{a} - \overline{\lambda}^{IJ}{}_{a}\chi_{IJ}{}^{a}\Big], \end{aligned} \tag{2.41}$$

donde $\mathcal{H}$ es la Hamiltonian canónica,

$$\mathcal{H} = e_0^{I}\gamma_I - A_0^{IJ}\gamma_{IJ} \approx 0, \tag{2.42}$$

y $\zeta^{I}{}_{0}, \zeta^{IJ}_{0}, \zeta^{I}, \zeta^{IJ}, \overline{\lambda}^{I}{}_{a}, \overline{\lambda}^{IJ}{}_{a}$, son los multiplicadores de Lagrange que hacen que las restricciones de primera y segunda clase se cumplan. De la acción (2.41), podemos identificar que la Hamiltoniana extendida esta dada por

$$H_E = \int d^2x \left[\mathcal{H} + \zeta_0{}^{I}\gamma^{0}{}_{I} + \zeta_0{}^{IJ}\gamma^{0}{}_{IJ} + \zeta^{I}\gamma_I + \zeta^{IJ}\gamma_{IJ}\right], \tag{2.43}$$

por tanto, esta Hamiltoniana es una combinación lineal de restricciones como se esparaba. Por otra parte, se sabe que en Relatividad General la evolución dinámica es gobernada por las restricciones, lo que refleja la covarianza general de la teoría. Además, afín de cuántizar la teoría, no es posible construir la ecuación de Schrödinger debido a que la acción de la Hamiltoniana sobre estados físicos es aniquilada. El procedimiento para quántizar puede llevarse a cabo implementando el programa de cuantización de Dirac, para sistemas de norma con covariancia general como es realizado en Loop Quantum Gravity [52], o como es mostrado en [31]; las restricciones de primera clase son promovidas a operadores $\widehat{C}_i$ sobre el espacio de Hilbert cinemático y los estados físicos son aquellos para los cuales la condición de Dirac $\widehat{C}_i \cdot \Psi = 0$, se satisface. Por tanto es obligatorio realizar un análisis de Dirac con el próposito de indentificar la estructura completa de las restricciones, porque estas restricciones son la mejor guía para realizar la cuantización.

Prosiguiendo con el análisis Hamiltoniano, realizamos la variación de la acción extendida con respecto a todas las variables dinámicas para obtener las ecuaciones de movimiento, que representan la evolución dinámica completa de la teoría, es decir

$$
\begin{aligned}
\delta e_0^M : \dot{\Pi}^0_M &= -\gamma_M, \\
\delta e_d^M : \dot{\Pi}^d_M &= \frac{1}{2}\left(A_0^{IJ} - \zeta^{IJ}\right)\left(\Pi^d_I \eta_{JM} - \Pi^d_J \eta_{IM}\right) + \epsilon^{0ad}\epsilon_{IJM}\bar{\lambda}_a^{IJ} \\
&\quad - \frac{\Lambda}{2}\left(e_0^I + \zeta^I\right)\left(\Pi^d_{IM} + \phi^d_{IM}\right), \\
\delta A_0^{MN} : \dot{\Pi}^0_{MN} &= \gamma_{MN}, \\
\delta A_d^{MN} : \dot{\Pi}^d_{MN} &= \left(\Pi^d_N \eta_{IM} + \epsilon^{0db}\epsilon_{IML} A_{bN}{}^L + \epsilon^{0bd}\epsilon_{INL} A_{bM}{}^L + \epsilon^{0db}\epsilon_{IMN}\partial_b\right)\left(e_0^I + \zeta^I\right) \\
&\quad - \left(A_0^{IJ} - \zeta^{IJ}\right)\left(\Pi^d_{IM}\eta_{JN} + \Pi^d_{MJ}\eta_{IN}\right), \\
\delta \Pi^0_M : \dot{e}_0^M &= \zeta_0^M, \\
\delta \Pi^d_M : \dot{e}_d^M &= D_d\left(e_0^M + \zeta^M\right) + \bar{\lambda}_d^M - 2\left(A_0^{MJ} - \zeta^{MJ}\right) e_{dJ}, \\
\delta \Pi^0_{MN} : \dot{A}_0^{MN} &= \zeta_0^{MN}, \\
\delta \Pi^d_{MN} : \dot{A}_d^{MN} &= \Lambda\left(e_0^M + \zeta^M\right) e_d^N + D_d\left(A_0^{MN} - \zeta^{MN}\right) + \bar{\lambda}_d^{MN}, \\
\delta \zeta_0^M : \gamma^0_M &= 0, \\
\delta \zeta_0^{MN} : \gamma^0_{MN} &= 0, \\
\delta \zeta^M : \gamma_M &= 0, \\
\delta \zeta^{MN} : \gamma_{MN} &= 0, \\
\delta \bar{\lambda}^M : \chi_M &= 0, \\
\delta \bar{\lambda}^{MN} : \chi_{MN} &= 0.
\end{aligned}
\tag{2.44}
$$

Debido a que la teoría presenta restricciones de segunda clase, podemos entonces calcular los paréntesis de Dirac, los cuales son de gran utilidad para el estudio de observables a nivel cuántico. Definimos los paréntesis de Dirac de la siguiente manera:

$$
\{F(x), G(y)\}_D \equiv \{F(x), G(y)\} + \int d^2z d^2w \{F(x), \xi^\alpha(z)\} C^{-1}_{\alpha\beta} \{\xi^\beta(w), G(y)\}, \tag{2.45}
$$

donde $\{F(x), G(y)\}$ es el paréntesis de Poisson usual entre dos funcionales F, G, y $\xi^\alpha(z) = (\chi_I{}^a, \chi_{IJ}{}^a)$ son las restricciones de segunda clase, y $C^{-1}_{\alpha\beta}$ es la inversa de (2.38) dada por (2.39). Con lo cual obtenemos los siguientes paréntesis de Dirac:

$$
\begin{aligned}
\{e^I_a(x), \Pi^b_J(y)\}_D &= 0, \\
\{e^I_a(x), A^{JK}_b(y)\}_D &= -\frac{1}{2}\epsilon_{0ab}\epsilon^{IJK}\delta^2(x-y), \\
\{A^{IJ}_a(x), \Pi^b_{JK}(y)\}_D &= \frac{1}{2}\left(\delta^I_K\delta^J_L - \delta^I_L\delta^J_K\right)\delta^b_a\delta^2(x-y).
\end{aligned} \tag{2.46}
$$

Es bien sabido que los paréntesis de Dirac (2.46) son ingredientes esenciales en la cuantización de la teoría [52]. Usando los paréntesis dados en (2.46), podemos calcular los paréntesis entre las restricciones de primera y segunda clase, los cuales estan dados por

$$
\begin{aligned}
\{\gamma_I(x), \gamma_J(y)\}_D &= 2\Lambda\left[\gamma_{JI} + \frac{1}{2}\epsilon_{0ab}\left(\epsilon^M{}_J{}^L\chi^a{}_{IM}\chi^b{}_L - \epsilon^M{}_I{}^L\chi^a{}_{JM}\chi^b{}_L\right)\right]\delta^2(x\text{-}y) \approx 0, \\
\{\gamma_I(x), \gamma_{MN}(y)\}_D &= \frac{1}{2}\left[\eta_{IM}\gamma_N - \eta_{IN}\gamma_M + \frac{1}{2}\epsilon_{0ab}\left(\epsilon_I{}^E{}_M\chi^a{}_N\chi^b{}_E - \epsilon_I{}^E{}_N\chi^a{}_M\chi^b{}_E\right)\right. \\
&\quad \left. + 2\Lambda\epsilon_{0ab}\left(\epsilon^{KE}{}_N\chi^a{}_{IK}\chi^b{}_{ME} - \epsilon^{KE}{}_M\chi^a{}_{IK}\chi^b{}_{NE}\right)\right]\delta^2(x\text{-}y) \approx 0, \\
\{\gamma_{IJ}(x), \gamma_{MN}(y)\}_D &= \frac{1}{2}\left[\eta_{IM}\gamma_{NJ} - \eta_{IN}\gamma_{MJ} + \eta_{JM}\gamma_{IN} - \eta_{JN}\gamma_{IM}\right. \\
&\quad + \frac{1}{2}\epsilon_{0ab}\epsilon_I{}^D{}_M\left(\chi^a{}_J\chi^b{}_{ND} + \chi^a{}_N\chi^b{}_{JD}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\epsilon_{0ab}\epsilon_I{}^D{}_N\left(\chi^a{}_J\chi^b{}_{DM} + \chi^a{}_M\chi^b{}_{DJ}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\epsilon_{0ab}\epsilon_J{}^D{}_M\left(\chi^a{}_I\chi^b{}_{DN} + \chi^a{}_N\chi^b{}_{DI}\right) \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}\epsilon_{0ab}\epsilon_J{}^D{}_N\left(\chi^a{}_I\chi^b{}_{MD} + \chi^a{}_M\chi^b{}_{ID}\right)\right]\delta^2(x\text{-}y) \approx 0, \\
\{\gamma_I(x), \chi^a{}_J(y)\}_D &= 0, \\
\{\gamma_I(x), \chi^a{}_{KL}(y)\}_D &= 0, \\
\{\gamma_{IJ}(x), \chi^a{}_K(y)\}_D &= 0, \\
\{\gamma_{IJ}(x), \chi^a{}_{KL}(y)\}_D &= 0, \\
\{\chi^a{}_I(x), \chi^b{}_{KL}(y)\}_D &= 0,
\end{aligned} \tag{2.47}
$$

por tanto, el álgebra es cerrada. Es posible observar la presencia de términos cuadráticos de restricciones de segunda clase. De hecho, los paréntesis de Dirac entre restricciones de primera clase deben ser cuadráticos en restricciones de segunda clase y lineales en las de primera clase [31], por tanto, este cálculo demuestra que el álgebra (2.47) tiene la forma correcta.

2.3. Generador y transformaciones de norma

Una de las simetrías más importantes que podemos estudiar usando el formalismo de Dirac, son las transformaciones de norma. Las transformaciones de norma son una simetría importante, dado que pueden ayudarnos a identificar las observables físicas [30]. Por lo tanto, necesitamos encontrar las transformaciones de norma para esta teoría descrita por (2.19), para lo cual, aplicamos el algoritmo de Castellani [32] para construir el generador de norma usando las restricciones de primera clase (2.34).

Definimos el generador de transformaciones de norma como

$$
G = \int d^2x\left[D_0\varepsilon^I{}_0\gamma^0{}_I + \varepsilon^I\gamma_I + D_0\kappa_0{}^{IJ}\gamma^0{}_{IJ} + \kappa^{IJ}\gamma_{IJ}\right], \tag{2.48}
$$

donde los parámetros de norma se definieron, por conveniencia, como $D_0\varepsilon^I_0$, ε^I, $D_0\kappa^{IJ}_0$, κ^{IJ}. Con lo cual, las transformaciones de norma en el espacio fase, que dejan invariantes las ecuaciones de movimiento, son

$$
\begin{aligned}
\delta e_a{}^I &= D_a\varepsilon^I + \kappa^{IJ}e_{aJ},\\
\delta e_0{}^I &= D_0\varepsilon_0{}^I,\\
\delta A_a{}^{IJ} &= D_a\kappa^{JI} + \Lambda\varepsilon^I e_a{}^J - \Lambda\varepsilon^J e_a{}^I,\\
\delta A_0{}^{IJ} &= D_0\kappa_0{}^{IJ},\\
\delta\Pi^a{}_I &= 2\Lambda(\Pi^a{}_{IJ} - \epsilon^{0ab}\epsilon_{IJK}e_b{}^K)\varepsilon^J + \kappa_{IJ}\Pi^{aJ},\\
\delta\Pi^0{}_I &= 0,\\
\delta\Pi^a{}_{IJ} &= \epsilon^{0ab}\epsilon_{IJM}D_b\varepsilon^M + \frac{1}{2}\left(\varepsilon_I\Pi^a{}_J - \varepsilon_J\Pi^a{}_I\right) + \kappa_I{}^N\Pi^a{}_{NJ} - \kappa_J{}^N\Pi^a{}_{NI},\\
\delta\Pi^0{}_{IJ} &= 0. \qquad (2.49)
\end{aligned}
$$

En particular, elegimos los parámetros de la siguiente forma; $\varepsilon^I = \varepsilon^I_0 = \Theta^I$, $-\kappa^{IJ}_0 = \kappa^{IJ} = \Delta^{IJ}$ y considerando lo anterior, tenemos

$$
\begin{aligned}
e^I_\mu &\longrightarrow e^I_\mu + D_\mu\Theta^I + \Delta^{IJ}e_{J\mu}.\\
A^{IJ}_\mu &\longrightarrow A^{IJ}_\mu + D_\mu\Delta^{JI} + \Lambda\Theta^I e^J_\mu - \Lambda\Theta^J e^I_\mu. \qquad (2.50)
\end{aligned}
$$

Podemos probar mediante un cálculo relativamente fácil, que las ecuaciones de movimiento, son covariantes bajo estas transformaciones de norma. De la naturaleza de las transformaciones de norma y de la forma de la teoría descrita en (2.19) que corresponde a RG en tres dimensiones, podemos apreciar que aparentemente la simetría de difeomorfismos no esta presente en esta teoría, lo cual no es verdad en su totalidad. Podemos redefinir los parámetros convenientemente de la siguiente forma:

$$
\Theta^I = \frac{1}{2}\xi^\alpha e_\alpha{}^I \qquad \text{y} \qquad \Delta^{IJ} = \frac{1}{2}\xi^\alpha A_\alpha{}^{IJ}. \qquad (2.51)
$$

De esta manera a partir de la simetría de norma, tenemos

$$
\begin{aligned}
e^I_\mu &\longrightarrow e^I_\mu + \mathcal{L}_\xi e^I_\mu + \frac{1}{2}\xi^\alpha\left[D_\mu e^I_\alpha - D_\alpha e^I_\mu\right],\\
A^{IJ}_\mu &\longrightarrow A^{IJ}_\mu + \mathcal{L}_\xi A^{IJ}_\mu + \xi^\alpha\left[R^{IJ}_{\mu\alpha} - \frac{\Lambda}{2}\left(e^I_\mu e^J_\alpha - e^I_\alpha e^J_\mu\right)\right], \qquad (2.52)
\end{aligned}
$$

que son (*on-shell*) difeomorfismos, por tanto, esta simetría está contenida en (2.50). Es posible observar en (2.50), que si $\Lambda \to 0$, se obtiene como simetrías de norma las transformaciones de Poincaré. Entonces, concluimos que para Relatividad General en tres dimensiones sin constante cosmológica el álgebra de Poisson es cerrada si el grupo interno es $SO(2,1)$ y las simetrías de norma son las transformaciones de Poincaré. Por otra parte, para gravedad con constante cosmológica el álgebra de Poisson es cerrada si el grupo interno es $SO(2,1)$ y las simetrías de norma son las transformaciones de Poincaré deformadas por Λ.

2.4. Conclusiones

En este capítulo, hemos realizado el análisis Hamiltoniano de Dirac para la teoría de Einstein con constante cosmológica en el formalismo de primer orden. Con el próposito de obtener una mejor descripción de esta teoría, todos los pasos del formalismo de Dirac sobre el espacio fase completo fueron realizados. Por medio de los vectores nulos y el rango de la matriz, cuyas componentes son los paréntesis de Poisson entra las restricciones primarias y secundarias, hemos identificado la completa estructura de las restricciones de primera y segunda clase. Con la completa estructura de las restricciones y su álgebra, hemos concluido que el álgebra de restricciones de la teoría de Palatini en tres dimensiones con constante cosmológica λ está bien definda siempre que el grupo interno sea $SO(2,1)$. Además, si la constante cosmológica es cero, entonces el álgebra de restricciones resulta ser un álgebra de Poincaré, sin embargo, el álgebra es bien definida usando las constantes de estructura del grupo $SO(2,1)$. De hecho, podemos observar que no es necesario acoplar campos de materia a Relatividad General con el fin de concluir que el álgebra de restricciones es cerrado para el grupo interno $SO(2,1)$. Finalmente, hemos calculamos el álgebra entre las restricicones usando los paréntesis de Dirac para las variables dinámicas (2.46), y mostramos que dicha álgebra es cerrada [65].

Capítulo 3

El formalismo simpléctico de Faddeev-Jackiw para sistemas degenerados

Sistemas descritos por Lagrangianas singulares son llamados sistemas degenerados, éste tipo de sistemas contienen restricciones inherentes al modelo mismo. En este capítulo, basados en las referencias [39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46] describimos brevemente el formalismo simpléctico de Faddeev-Jackiw para sistemas degenerados, que a diferencia del tradicional formalismo de Dirac, éste evita la necesidad de identificar y clasificar todas las restricciones en primera y segunda clase [28, 30, 31]. En el formalismo de F-J, las ecuaciones de movimiento son obtenidas a partir del principio variacional mediante el uso de una Lagrangiana de primer orden en las velocidades; la estructura geométrica del espacio fase, dada por los paréntesis de Dirac o de Poisson para sistemas con o sin restricciones respectivamente, está dada por los elementos de la inversa de la matriz simpléctica. Por otra parte, para el caso de sistemas de norma, por ejemplo teorías gravitacionales, teorías supersimétricas, supergravedad, teoría de cuerdas, entre otras, la matriz simpléctica no es invertible a menos que sean incluidas nuevas condiciones (restricciones) de norma. Finalmente, todas las propiedades de simetría en un sistema degenerado son derivadas directamente de los cero modos de la matriz simpléctica.

3.1. Sistemas degenerados

Consideremos un sistema dinámico en el espacio de configuraciones, con un número finito N de grados de libertad bosónicos, cuya dinámica es gobernada por la Lagrangiana $\mathcal{L}(q^i.\dot{q}^i)$, donde q^i y $\dot{q}^i$ corresponden a las coordenadas y velocidades generalizadas respectivamente y, $i = 1, ..., N$. $\mathcal{L}(q^i.\dot{q}^i)$ no siempre es una Lagrangiana de primer orden (una Lagrangiana de primer orden significa que sólo contiene términos lineales en las velocidades generalizadas). Sin embargo, si $\mathcal{L}(q^i.\dot{q}^i)$ no es de primer orden, siempre es posible introducir algunas variables auxiliares que permitan transformar a $\mathcal{L}(q^i.\dot{q}^i)$ en una Lagrangiana de primer orden; usualmente, los momentos canónicos son elegidos como variables auxiliares.
Por lo tanto, introduciendo variables auxiliares, uno puede escribir la Lagrangiana original en una Lagrangiana de primer orden

$$\mathcal{L}(\xi, \dot{\xi}) = a_I(\xi)\dot{\xi}^I - V(\xi). \tag{3.1}$$

Esta presentación es también llamada "forma simpléctica"; aquí ξ^I representa un conjunto de variables simplécticas, las cuales definen un espacio de configuración extendido Γ, el cual es

generalmente construido con las variables canónicas originales q^i, variables auxiliares y momentos canónicos. La función $a_I(\xi)$ en (3.1) es identificada como la 1-forma canónica, $a(\xi) = a_I(\xi)d\xi^I$. Adicionalmente, se asume que el término correspondiente al potencial $V(\xi)$ no contiene derivadas temporales de las variables simplécticas ξ^I, y es fácil ver que cuando la Hamiltoniana es definida vía la transformación de Legendre, V puede ser identificada con la corresopndiente Hamiltoniana $H(\xi)$.
Las correspondientes ecuaciones de movimiento pueden ser obtenidas realizando la primera variación a la Lagrangiana $\delta\mathcal{L} = 0$, con respecto a las variables simplécticas ξ^I. La variación de (3.1) hasta términos de borde es:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}(\xi,\dot{\xi}) &= \delta\xi^J\frac{\partial a^I}{\partial\xi_J}\dot{\xi}_I + a^I\delta\dot{\xi}_I - \delta\xi^J\frac{\partial}{\partial\xi_J}V(\xi) \\
&= \delta\xi^J\frac{\partial a^I}{\partial\xi_J}\dot{\xi}_I + \frac{d}{dt}\left(a^I\delta\xi_I\right) - \dot{a}^I\delta\dot{\xi}_I - \delta\xi^J\frac{\partial}{\partial\xi_J}V(\xi) \\
&= \delta\xi^J\frac{\partial a^I}{\partial\xi_J}\dot{\xi}_I - \dot{\xi}^J\frac{\partial a^I}{\partial\xi_J}\delta\xi_I - \delta\xi^J\frac{\partial}{\partial\xi_J}V(\xi) \\
&= \delta\xi^J\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi_J}a^I - \frac{\partial}{\partial\xi_I}a^J\right)\dot{\xi}_I - \left(\frac{\partial}{\partial\xi_J}V\right)\right].
\end{aligned} \tag{3.2}$$

De tal manera que, si las variables simplécticas $\delta\xi^J$ son independientes, entonces las ecuaciones de movimiento pueden ser escritas en la siguiente forma:

$$f_{IJ}\dot{\xi}^J - \frac{\partial}{\partial\xi_I}V(\xi) = 0, \tag{3.3}$$

donde f_{IJ} es la matriz 2-forma simpléctica o simplemente matriz simpléctica (los elementos de la matriz simpléctica son las componentes de la 2-forma simpléctica $f(\xi) = da(\xi)$), la cual es definida como:

$$f_{IJ} \equiv \frac{\partial}{\partial\xi_I}a^J - \frac{\partial}{\partial\xi_J}a^I. \tag{3.4}$$

Claramente, f_{IJ} es antisimétrica y define una curvatura generalizada que satisface la siguiente identidad: $\partial_K f_{IJ} + \partial_I f_{JK} + \partial_J f_{KI} = 0$, lo cual demuestra que la 2-forma simpléctica es cerrada ($df = 0$).

Ahora, si el det $|f_{IJ}| \neq 0$, entonces es posible resolver (3.3) para dar la evolución dinámica de las variables simplécticas:

$$\dot{\xi}_I = (f)^{-1}_{IJ}\frac{\partial}{\partial\xi_J}V(\xi), \tag{3.5}$$

donde $(f)^{-1}_{IJ}$ es la matriz inversa de f_{IJ} cuya dimensión debe ser par. En este caso la Lagrangiana original (3.1) no es degenerada. Consecuentemente, no hay restricciones en este caso, debido a que todas las variables simplécticas tienen una ecuación de movimiento.

Por otra parte, sabemos que, el paréntesis de Poisson bosónico es definido por:

$$\{A,B\}_P \equiv \sum_J\left[\frac{\partial A}{\partial\xi^1_J}\frac{\partial B}{\partial\xi^2_J} - \frac{\partial A}{\partial\xi^2_J}\frac{\partial B}{\partial\xi^1_J}\right]. \tag{3.6}$$

Entonces, dentro del formalismo Hamiltoniano toda la dinámica del sistema puede ser descrita en términos de paréntesis de Poisson, de tal manera que las ecuaciones de movimiento para las variables simplécticas pueden ser escritas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \{H, \xi_I\} &= \sum_J \left[\frac{\partial H}{\partial \xi_J^1} \frac{\partial \xi_I}{\partial \xi_J^2} - \frac{\partial H}{\partial \xi_J^2} \frac{\partial \xi_I}{\partial \xi_J^1} \right] \\ &= \sum_{J,K} \left[\frac{\partial H}{\partial \xi_K^1} \frac{\partial \xi_K^1}{\partial \xi_J^1} \frac{\partial \xi_I}{\partial \xi_J^2} - \frac{\partial H}{\partial \xi_K^2} \frac{\partial \xi_K^2}{\partial \xi_J^2} \frac{\partial \xi_I}{\partial \xi_J^1} \right] \\ &= \sum_{J,K} \frac{\partial H}{\partial \xi_K} \left[\frac{\partial \xi_K}{\partial \xi_J^1} \frac{\partial \xi_I}{\partial \xi_J^2} - \frac{\partial \xi_K}{\partial \xi_J^2} \frac{\partial \xi_I}{\partial \xi_J^1} \right] \\ &= \sum_K \frac{\partial H}{\partial \xi_K} \{\xi_K, \xi_I\} \equiv \dot{\xi}_I. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Como el potencial simpléctico puede ser justamente la función Hamiltoniana $H(\xi)$ del sistema, es decir, $V = H$, entonces la Ec. (3.7) puede ser alternativamente escrita:

$$\dot{\xi}_I = \{\xi_I, \xi_J\} \frac{\partial V}{\partial \xi_J}. \tag{3.8}$$

Por tanto, comparando Eq. (3.5) y (3.7), el paréntesis de cuantización, llamado paréntesis de Faddeev-Jackiw $\{,\}_{F-J}$ entre dos elementos del conjunto de variables simplécticas ξ^I, puede ser definido de la siguiente manera:

$$\{\xi_I, \xi_J\}_{F-J} = (f)^{-1}_{IJ}, \tag{3.9}$$

donde los elementos de la matriz inversa $(f)^{-1}_{IJ}$ corresponden a los paréntesis de Dirac de la teoría. La transición a la teoría cuántica es realizada de manera usual, i.e., reemplazando las variables clásicas por operadores que actúan sobre algún espacio de Hilbert, y realizando la siguiente sustitución:

$$\{F, G\} \to \frac{-i}{\hbar} \left[\hat{F}, \hat{G}\right]. \tag{3.10}$$

Por otra parte, el caso más interesante es cuando, $\det |f_{IJ}| = 0$, es decir, cuando no existe la inversa de f_{IJ} y, por tanto no es posible obtener (3.5). En este caso el sistema es llamado "singular", la presencia de esta singularidad índica que las ecuaciones de movimiento contienen más grados de libertad de los necesarios para describir la dinámica del sistema; de manera que deben existir restricciones en el sistema, las cuales ayudarán a reducir el número de grados de libertad. Estas restricciones aparecerán en el formalismo simpléctico como relaciones algebraicas necesarias para mantener la consistencia de las ecuaciones de movimiento. Para ver esto, supongamos que el rango de f_{IJ} es R ($R < M$), entonces f_{IJ} tiene $(M - R)$ cero modos ν_k ($k = 1, ..., (M - R)$). En consecuencia, el sistema está restringido por $(M - R)$ ecuaciones, en las que no están presentes derivadas temporales para algunas variables dinámicas. Por definición estos cero modos deben satisfacer la ecuación:

$$(\nu_k)^I f_{IJ} = 0. \tag{3.11}$$

Consecuentemente, la contracción de ambos lados de la Ec. (3.3) con $(\nu_k)^I$ conduce a las siguientes condiciones:

$$\phi_k \equiv (\nu_k)^I \frac{\partial}{\partial \xi^I} V(\xi) = 0, \tag{3.12}$$

donde las cantidades ϕ_k son las restricciones primarias de la teoría en el formalismo simpléctico de Faddeev-Jackiw. Estas restricciones definen un subespacio de dimensión $(M - R)$, al cual llamaremos superficie de restricciones

$$\Sigma = \{\xi^I \in \Gamma \mid \phi_k(\xi) = 0 \ (k = 1, ..., (M - R), \ ((M - R) < M)\}. \tag{3.13}$$

La consistencia de la teoría requiere que las restricciones permanezcan sobre la superficie de restricciones durante la evolución del sistema. De esta forma y con el propósito de derivar nuevas restricciones, uno puede introducir esta condición de consistencia sobre las anteriores restricciones, equivalente a la empleada en el formalismo de Dirac para sistemas Hamiltonianos con restricciones [28, 30, 31]. La condición de consistencia de las restricciones ϕ_k es:

$$\dot{\phi}_k = \frac{\partial \phi_k}{\partial \xi^I}\dot{\xi}^I = 0. \tag{3.14}$$

Nótese que esta condición sólo depende linealmente de derivadas temporales de las variables simplécticas. Combinando la Ec. (3.3) con (3.14), podemos obtener el siguiente conjunto de ecuaciones lineales:

$$f_{IJ}\dot{\xi}^J = \frac{\partial}{\partial \xi_I}V(\xi) \quad \& \quad \frac{\partial \phi_k}{\partial \xi^I}\dot{\xi}^I = 0 \tag{3.15}$$

las cuales pueden ser reescritas en una única y compacta expresión:

$$f^{(1)}_{KJ}\dot{\xi}^J = Z^{(1)}_K(\xi), \tag{3.16}$$

donde

$$f^{(1)}_{KJ} = \begin{pmatrix} f_{IJ} \\ \frac{\partial \phi_k}{\partial \xi^J} \end{pmatrix} \quad \& \quad Z^{(1)}_K(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial \xi^I} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (K = 1, ..., 2M - R;\ I, J = 1, ..., M) \tag{3.17}$$

Es evidente que $f^{(1)}_{IJ}$, no es una matriz cuadrada, sin embargo aún contiene un grupo de cero modos linealmente independientes $(\nu^{(1)}_l)$. Multiplicando cada cero modos en ambos lados de (3.16), se obtiene la siguiente expresión:

$$\left(\nu^{(1)}{}_l\right)^K Z^{(1)}_K = 0, \tag{3.18}$$

la cual define nuevas restricciones si y sólo si, cada ecuación evaluada sobre la superficie de restricciones Σ no es idénticamente cero, i.e., $0 = 0$. En este caso tenemos que las nuevas restricciones pueden ser definidas de la siguiente manera

$$\phi^{(1)}_l \equiv \left(\nu^{(1)}{}_l\right)^K Z^{(1)}_K|_\Sigma = 0. \tag{3.19}$$

Estas restricciones $\phi^{(1)}_l$ son independientes de las restricciones primarias, debido a que las relaciones (4.12) han sido evaluadas sobre Σ, además, restringen la dinámica del sistema a un subespacio $\Sigma^{(1)}$ de Σ. Por otra parte, estas nuevas restricciones deben ser tratadas de la misma manera como lo fueron las restricciones primarias ϕ_k, es decir, debemos introducir una condición de consistencia para cada $\phi^{(1)}_l$; a saber

$$\dot{\phi}^{(1)}_l = \frac{\partial \phi^{(1)}_l}{\partial \xi^I}\dot{\xi}^I = 0. \tag{3.20}$$

Se puede mostrar que combinando está ecuación con (3.3) y (3.16), es posible construir un nuevo grupo de ecuaciones lineales como en (3.16). De esta forma, a partir del nuevo grupo de ecuaciones, se pueden identificar nuevas restricciones, si las hay. Paso a paso, este proceso debe ser repetido hasta que no haya nuevas restricciones, y así obtener la identidad antes mencionada, $0 = 0$. De esta manera, el proceso de identificar nuevas restricciones usando condiciones de consistencia habrá finalizado, dejándonos como resultado un conjunto completo de restricciones para el sistema, el cual también definirá una superficie de restricciones para la teoría .

3.2. Lagrangiana extendida

Suponiendo que después de haber obtenido un conjunto completo de l restricciones después de E pasos usando condiciones de consistencia, no se pueden generar nuevas restricciones. El siguiente paso en el análisis es incorporar estas restricciones a la Lagrangiana simpléctica (3.1) introduciendo multiplicadores de Lagrange λ^l. La Lagrangiana que describe la dinámica en el espacio de configuraciones, llamada ahora Lagrangiana extendida $\mathcal{L}^{(E)}$, puede ser escrita como:

$$\mathcal{L}^{(E)} = a_I(\xi)\dot{\xi}^I - \phi_l(\xi)\lambda^l - V(\xi)^{(E)}, \tag{3.21}$$

donde $V(\xi)^{(E)} = V(\xi)|_{\Sigma=0} = 0$.

En este punto y con el objetivo de seguir aplicando el formalismo simpléctico de F-J, uno puede redefinir los multiplicadores de la siguiente manera

$$\lambda^l \to -\dot{\eta}^l. \tag{3.22}$$

Consecuentemente, la Lagrangiana extendida esta dada por:

$$\mathcal{L}^{(E)} = a_I(\xi)\dot{\xi}^I + \phi_l(\xi)\dot{\eta}^l - V(\xi)^{(E)}. \tag{3.23}$$

El nuevo término que se ha añadido $\phi_l(\xi)\dot{\eta}^l$, ahora puede ser visto como parte de un nuevo conjunto de variables simplécticas extendidas, $\xi^{(E)I} = \left(\xi^I, \eta^l\right)$. Las restricciones ahora proporcionan algunas componentes extra a la 1-forma canónica, la cual ahora tiene la forma $a_I^{(E)} = (a_I, \phi_l)$. A partir del nuevo conjunto de variables simplécticas se puede construir la nueva 2-forma simpléctica $f_{IJ}^{(E)}$ como en (3.4), pero ahora considerando las nuevas componentes de la 1-forma canónica $a_I^{(E)}$, así como las variables simplécticas extendidas $\xi^{(E)I}$, descritas anteriormente. Entonces $f_{IJ}^{(E)}$ puede ser escrita en la forma:

$$\begin{aligned} f_{IJ}^{(E)} &= \frac{\partial}{\partial \xi^{(E)I}} a_J^{(E)} - \frac{\partial}{\partial \xi^{(E)J}} a_I^{(E)} \\ &= \begin{pmatrix} f_{IJ} & \left(\frac{\partial}{\partial \xi^I}\phi^l\right) \\ -\left(\frac{\partial}{\partial \xi^I}\phi^l\right)^T & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

En esta notación compacta f_{IJ} representa una matriz $N \times N$ definida por (5.13), sólo en términos de ξ^I. Mientras que $\left(\frac{\partial}{\partial \xi^I}\phi^l\right)$ representa una matriz rectangular $N \times M$ definida por

$$\frac{\partial}{\partial \xi^I}\phi^l = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi^1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \phi^2}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial \phi^l}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial \phi^1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \phi^2}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial \phi^l}{\partial \xi_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi^1}{\partial \xi_I} & \frac{\partial \phi^2}{\partial \xi_I} & \cdots & \frac{\partial \phi^l}{\partial \xi_I} \end{pmatrix}. \tag{3.25}$$

Como en (A.7), aquí hay dos casos para (3.24). El primero es cuando $f_{IJ}^{(E)}$ es regular, es decir, cuando $\det \mid f_{IJ}^{(E)} \mid \neq 0$, entonces todas las velocidades pueden ser determinadas, debido a que podemos invertir $f_{IJ}^{(E)}$ como en (3.5), es decir

$$\dot{\xi}_I^{(E)} = \left(f_{IJ}^{(E)}\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi_I^{(E)}} V^{(E)}. \tag{3.26}$$

El segundo caso ocurre cuando $\det \mid f_{IJ}^{(E)} \mid = 0$, lo que implica la existencia de algunos cero modos. Sin embargo, hemos supuesto que ya ha sido identificado el conjunto completo de restricciones en el sistema, consecuentemente estos modos no generan ninguna nueva restricción. Desde la perspectiva del formalismo simpléctico, este hecho índica la presencia de una simetría de norma en el sistema. Entonces, uno debería introducir condiciones de norma para evitar esta singularidad. En consecuencia, el análisis puede ser finalizado en términos de las variables originales y determinar los paréntesis de Faddeev-Jackiw como en (3.9).

3.3. Transformaciones de norma

Asumamos, que el det $\mid f_{IJ}^{(E)} \mid= 0$ y que el gradiente del potencial simpléctico es ortogonal a todos los cero modos de la matriz simpléctica, por tanto estos modos no pueden producir ninguna nueva restricción. Esto significa que la derivada direccional de $V^{(E)}$ en la dirección de $\nu_I^{(E)}$ desaparece idénticamente, o, en otras palabras, que las líneas equipotenciales del potencial simpléctico son generadas por la líneas integrales del campo vectorial $\widehat{\nu} = \nu_I^{(E)}\left(\partial/\partial\xi_I\right)$. Este es el escenario esperado para un sistema que posee simetría de norma. Como ha sido discutido en Refs. [40, 41, 42, 43], los modos cero de la matriz simpléctica singular pueden ser identificados como los generadores de dicha simetría, es decir, las componentes de estos cero modos proporcionan las propiedades de transformación para cada una de las variables simplécticas, es decir

$$\delta_G \xi_I^{(E)} = \sum_\alpha \nu_{I\alpha}^{(E)} \epsilon^\alpha, \tag{3.27}$$

donde $\{\nu_\alpha^{(E)}\}$ es el conjunto completo de cero modos de la matriz simpléctica degenerada $f_{IJ}^{(E)}$, y $\epsilon\left(\tau\right)^\alpha$ representa a los parámetros de norma arbitrarios definidos sobre el espacio de configuración extendido. Este vector genera transformaciones de norma en el espacio fase extendido, el cual esta dividido en clases de órbitas. El espacio de configuración es, consecuentemente, el cociente del espacio fase original por las órbitas de norma.

Si restringimos el conjunto de variables originales ξ^I y a_I en (3.23), de tal forma que la matriz f_{IJ} (submatriz de $f_{IJ}^{(E)}$) en Ec. (3.24) resulte ser no singular, entonces la matriz simpléctica $f_{IJ}^{(E)}$ tiene l cero modos linealmente independientes con la siguiente estructura:

$$\nu_I^{(E)l} = \begin{pmatrix} \left(f_{IJ}\right)^{-1}\nu_{\xi_J}^l \\ 1^{(l)} \end{pmatrix}, \tag{3.28}$$

donde el primer elemento es una columna $I \times 1$

$$\nu_{\xi^I}^l = -\frac{\partial\phi^l}{\partial\xi^I}, \tag{3.29}$$

y el último elemento es una columna $l \times 1$ de ceros, excepto para su l-ésima entrada, la cual es 1:

$$1^{(l)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}. \tag{3.30}$$

En este caso y como es mostrado en la Ref. [43], uno puede escribir las anteriores transformaciones de norma (3.27) en términos de componentes, es decir

$$\begin{aligned} \delta_G \xi^I &= \left(f_{IJ}\right)^{-1} \frac{\partial\phi_\alpha^l}{\partial\xi_J}\epsilon^\alpha, \\ \delta_G \eta^\alpha &= -\epsilon^\alpha, \end{aligned} \tag{3.31}$$

las cuales son simetrías de la Lagrangiana (3.23) sobre la superficie de restricciones.

Para recuperar las propiedades de transformación de los multiplicadores de Lagrange iniciales λ_l, uno debe invertir la sustitución (3.22), para obtener las siguientes leyes de transformación:

$$\begin{aligned} \delta_G \xi^I &= (f_{IJ})^{-1} \frac{\partial \phi^l_\alpha}{\partial \xi_J} \epsilon^\alpha, \\ \delta_G \lambda^\alpha &= \dot{\epsilon}^\alpha, \end{aligned} \tag{3.32}$$

las cuales ahora son simetrías de la Lagrangiana extendida original (3.21), sobre la superficie de restricciones. Esto puede ser visto de la siguiente manera: Recordemos que las ecuaciones de movimiento pueden ser obtenidas tomando la primera variación de la correspondiente acción, $S^{(E)} = \int \mathcal{L}^{(E)} dt$, igual a cero. Es decir

$$\delta S^{(E)} = \int dt \left(\frac{\partial \mathcal{L}^{(E)}}{\partial \xi^{(E)}_K} - \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}^{(E)}}{\partial \dot{\xi}^{(E)}_K} \right) \delta \xi^{(E)}_K \equiv \int dt \left(f^{(E)}_{KM} \dot{\xi}^{(E)M} - \frac{\partial V^{(E)}}{\partial \xi^{(E)}_K} \right) \delta \xi^{(E)}_K = 0. \tag{3.33}$$

Por tanto, esta expresión define la simetría de norma; si existe alguna variación particular $\delta \xi^{(E)}_K$ que satisfaga la Ec. (3.33), entonces la transformación

$$\xi^{(E)}_K \longrightarrow \xi^{(E)}_K + \delta \xi^{(E)}_K, \tag{3.34}$$

es una simería de la acción $S^{(E)}$. Consecuentemente, podemos construir una variación $\delta \xi^{(E)}_K$ que satisfaga (3.33) sobre la superficie de restricciones:

$$\delta \xi^{(E)}_K = \nu^{(E)}_{K\alpha} \epsilon^\alpha, \tag{3.35}$$

Por tanto, dado que $\nu^{(E)}_{K\alpha}$ son los cero modos sobre la superficie de restricciones, deben satisfacer las ecuaciones de movimiento, es decir

$$\int dt \left(f^{(E)}_{KM} \dot{\xi}^{(E)M} - \frac{\partial V^{(E)}}{\partial \xi^{(E)}_K} \right) \nu^{(E)\alpha}_K \epsilon_\alpha = \int dt \epsilon_\alpha (\nu^{(E)K\alpha})^T \left(f^{(E)}_{KM} \dot{\xi}^{(E)M} - \frac{\partial V^{(E)}}{\partial \xi^{(E)}_K} \right) = \epsilon_\alpha \phi^\alpha. \tag{3.36}$$

Esto muestra que la acción extendida es invariante bajo desplazamientos en direcciones ortogonales al gradiente del potencial.

3.4. Condiciones de norma

La descripción cuántica de un sistema invariante de norma puede realizarse introduciendo condiciones de fijación de norma y subsecuentemente aplicando la prescripción de cuantización a los remanentes grados de libertad clásicos. Sea Γ un espacio fase descrito por un conjunto de variables simplécticas ξ^I $(I = 1, 2, ..., N)$, y dotado con una forma simpléctica f_{IJ} degenerada como consecuencia de la presencia de una simetría de norma. Debido a la simetría de norma, hay más de un conjunto de variables canónicas que corresponden al mismo estado físico, y a fin de construir una estructura canónica compatible con el sistema, se debe introducir condiciones de fijación de norma para eliminar dicha ambigüedad. El procedimiento para fijar esta libertad de norma es llevado a cabo imponiendo restricciones adicionales en la teoría:

$$G_i(\xi), \qquad i = 1, ..., n. \tag{3.37}$$

Estas condiciones de norma deben ser preservadas en el tiempo y sus condiciones de consistencia determinan todos los multiplicadores. Las restricciones G_i son tratadas como cualquier otra restricción en la teoría, y junto con ϕ_l, forman un conjunto completo de restricciones:

$$\{\gamma_a\} = \{G_i, \phi_l\} \qquad a = 1, ..., 2n < N. \tag{3.38}$$

La elección de las funciones G_i tiene que ser tal que: (a) cualquier órbita debe interceptar la superficie definida por el conjunto $\{G_i\}$ en Γ (accesibilidad), y (b) las órbitas no pueden interceptar la superficie definida por $\{G_i\}$ más de una vez (completa fijación de norma). En otras palabras, la superficie en el espacio fase definida por las condiciones de norma (3.37) debe interceptar a cada órbita, una y sólo una vez. Cuando (a) y (b) se han cumplido satisfactoriamente, entonces el número de condiciones de norma debe ser igual al número de generadores de norma independientes y la correspondiente matriz simpléctica f_{IJ}, es ahora invertible.

La subvariedad definida por el conjunto de restricciones $\{\gamma_a\}$, corresponde al espacio fase reducido del sistema, que contiene sólo grados de libertad físicos, y el cual será denotado por Γ_0

$$\Gamma_0 \equiv \{\xi^I \ \in \ \Gamma \mid \gamma_a(\xi) = 0 \ a = 1, ..., 2n\}. \tag{3.39}$$

En Γ_0 una nueva estructura de Poisson es introducida por medio de los Paréntesis de Faddeev-Jackiw (ver Eq (3.9))

$$\{\xi_I, \xi_J\}_{F-J} \equiv (f_{IJ})^{-1}, \tag{3.40}$$

donde $(f_{IJ})^{-1}$ es la inversa de la matriz simpléctica regular construida después de fijar la libertad de norma.

Capítulo 4

Simetría de norma y estructura de restricciones de TMG: una perspectiva simpléctica

En particular, para hacer la teoría de Einstein 3D (2.1) más realista, en comparación con dimensiones superiores, en el sentido de tener grados de libertad propagándose, es posible modificar la teoría incluyendo ciertos términos de curvatura con derivadas superiores en la acción de E-H, lo cual nos conducirá a la versión más simple de gravedad masiva en tres dimensiones conocida como gravedad topológicamente masiva (TMG). Ésta teoría consiste de un término E-H, con o sin constante cosmológica Λ, más un término gravitacional de Chern-Simons (C-S) con coeficiente $\frac{1}{\mu}$[47, 48, 56]. A nivel lineal, ésta teoría describe un simple estado masivo de helicidad $+2$ o -2 (dependiendo del signo relativo entre el término de C-S y el de E-H) en un background AdS [50] y define una representación irreducible unitaria del grupo de Poincaré 3D [73, 74].

Si bien, mientras un análisis linealizado usualmente permite un conteo confiable de los grados de libertad, existen casos en los cuales esto puede conducir a resultados falsos. Una formulación Lagrangiana/Hamiltoniana debería ofrecer una forma confiable de contar el número de grados de libertad físicos sin recurrir a la linealización, es decir, tomando en cuenta todas las restricciones físicas y la invariancia de norma de la teoría. En éste sentido, la identificación de los grados de libertad físicos pueden ser abordados por la aplicación directa del método de Dirac para sistemas Hamiltonianos con restricciones, tal como lo hemos hecho en el capítulo anterior. Sin embargo, es sabido que el análisis de Dirac para TMG es una tarea larga, tediosa y complicada ya que existen restricciones secundarias, terciarias y cuárticas con una estructura compleja [57, 58, 59, 60]. Por ejemplo, en la Ref. [57] el análisis Hamiltoniano fue realizado usando el formalismo de Dirac. De hecho, los autores han obtenido la estructura de las restricciones secundarias de primera clase con ayuda del siguiente Teorema: "Si ϕ es una restricción primaria de primera clase, entonces $\{\phi, H^T\}$ es también de primera clase". No obstante, este tratamiento es bastante complicado e insatisfactorio. Por otra parte, los autores de Refs. [59, 60] presentan un análisis completamente Lagrangiano, pero para tener una teoría con el correcto número de grados de libertad físicos en el espacio de configuración, una restricción extra sobre las variables básicas debió ser impuesta a mano. Por estas razones, el análisis sobre la naturaleza de las restricciones y la simetría de norma para modelos de gravedad masiva, que aún falta en la literatura, puede ser muy importante y éste es obligatorio para realizar el análisis para cuántizar la teoría.

En este capítulo presentamos un estudio detallado de gravedad topológicamente masiva en un contexto completamente diferente al presentado en [57, 58, 59, 60]. Aquí aplicando en forma detallada el formalismo simpléctico de Faddeev-Jackiw, mostramos de manera sistemática que la simetría de norma y la estructura de las restricciones de gravedad topológicamente masiva con constante cosmológica, elegantemente codificada en los cero modos de la matriz simpléctica, pueden ser indentificados. Además, vía un apropiado proceso de fijación de norma, la norma temporal, hemos calculado la estructura de los paréntesis de cuantización para las variables dinámicas, y confirmamos que el número de grados de libertad físicos es uno.

4.1. Acción y ecuaciones de movimiento

Nuestro punto de partida es la acción de gravedad AdS topológicamente masiva escrita en el formalismo de primer orden:

$$S = \int_{\mathcal{M}} \left[2\theta e^i \wedge F[A]_i - \frac{1}{3}\Lambda f_{ijk} e^i \wedge e^j \wedge e^k + \lambda^i \wedge T_i + \frac{\theta}{\mu} A^i \wedge \left(dA_i + \frac{1}{3} f_{ijk} A^j \wedge A^k \right) \right], \quad (4.1)$$

donde μ es el parámetro de Chern-Simons, $\theta = 1/16\pi G$ con G la constante de Newton 3D, y Λ es la constante cosmológica tal que $\Lambda = -1/l^2$, donde l es el radio AdS [50]. Además, los campos fundamentales de esta acción son: el dreibein 1-forma $e^i = e^i_\mu dx^\mu$ el cual determina una métrica espacio-tiempo vía $g_{\mu\nu} = e_\mu{}^i e_\nu{}^j \eta_{ij}$; el campo auxiliar 1-forma λ^i que asegura que la torsión desaparece $T_i = 0$ [61, 62]; y la conexión de spin dualizada $A^i = A_\mu{}^i dx^\mu$ evaluada en la representación del grupo de Lie $SO(2,2)$, tal que, este admite un tensor totalmente antisimétrico f_{ijk}. La conexión actua sobre los índices internos y define un operador derivada:

$$D_\mu V^i \equiv \partial_\mu V^i + f^i{}_{jk} A_\mu{}^j V^k, \quad (4.2)$$

donde ∂ es el operador derivada. Finalmente, T_i es la torsión 2-forma, mientras tanto F_i es la curvatura 2-forma de la conexión de spin A^i, cuyas expresiones explícitas son

$$T_i \equiv de_i + f_{ijk} A^j \wedge e^k, \qquad F_i \equiv dA_i + \frac{1}{2} f_{ijk} A^j \wedge A^k. \quad (4.3)$$

La convención adoptada es la estándar, es decir, los índices griegos $\mu, \nu, \alpha, \ldots$ refieren a las coordenadas espacio-tiempo mientras las letras latinas $i, j, k, \ldots$ corresponden a índices de Lorentz. Las ecuaciones de movimiento que pueden ser extraídas variando la acción (4.1) con respecto a e^i, A^i y λ^i, respectivamente, además de algunos términos de borde, están dadas por

$$\begin{aligned} (\delta e)^{\alpha i} &= \epsilon^{\alpha\nu\rho} \left(2\theta F_{\nu\rho}{}^i + D_\nu \lambda_\rho{}^i - \Lambda f^i{}_{jk} e_\nu{}^j e_\rho{}^k \right) = 0, & (4.4) \\ (\delta A)^{\alpha i} &= \epsilon^{\alpha\nu\rho} \left(2\theta T_{\nu\rho}{}^i + f^i{}_{jk} \lambda_\nu{}^j e_\rho{}^k + 2\theta\mu^{-1} F_{\nu\rho}{}^i \right) = 0, & (4.5) \\ (\delta\lambda)^{\alpha i} &= \epsilon^{\alpha\nu\rho} T_{\nu\rho}{}^i = 0, & (4.6) \end{aligned}$$

uno puede notar que la Ec. (4.6) es la condición para la compatibilidad de $A_\mu{}^i$ y $e_\mu{}^i$, la cual implica que

$$A_\mu{}^{ij} = -e^{\nu j} \partial_\mu e_\nu{}^i + \Gamma^\beta_{\alpha\mu} e^i_\beta e^{\alpha j}, \quad (4.7)$$

con $\Gamma^\beta_{\alpha\mu}$ el símbolo the Christoffel de la métrica $g_{\mu\nu}$. Además, insertando Ec. (4.6) en la Ec. (4.5), podemos resolver para el multiplicador de Lagrange $\lambda_\mu{}^i$ en términos del tensor Schouten 3D de la variedad $\mathcal{M}$:

$$\lambda_\mu{}^i = 2\theta\mu^{-2} S_{\mu\nu} e^{i\nu} \quad \text{with} \quad S_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R. \quad (4.8)$$

Después de incluir el resultado en Ec. (4.4) y de un largo cálculo, es posible encontrar las ecuaciones de campo de TMG [55] en el formalismo de segundo orden como sigue:

$$G_{\mu\nu} + \frac{1}{\mu} C_{\mu\nu} = 0, \quad (4.9)$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein (modificado por la constante cosmológica) definido como

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu}, \tag{4.10}$$

y $C_{\mu\nu}$ es el tensor Cotton simétrico y sin traza dado por

$$C_{\mu\nu} \equiv \epsilon_{\mu}{}^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} \left(R_{\beta\nu} - \frac{1}{4} g_{\beta\nu} R \right), \tag{4.11}$$

aquí ∇ es la derivada covariante definida con Γ. Considerando pequeñas perturbaciones alrededor de un fondo anti-de Sitter, la teoría describe la existencia de un simple gravitón masivo [55, 50, 56]. Sin embargo, desde el punto de vista teórico, es mejor corroborar la veracidad de esto con argumentos formales, mediante un meticuloso análisis Hamiltoniano o Lagrangiano a nivel no lineal.

4.2. La naturaleza de restricciones

Con el propósito de aplicar el formalismo simpléctico de Faddeev-Jackiw [39], vamos a considerar que el espacio-tiempo $\mathcal{M}$ es globalmente hiperbólico de manera que este puede ser foliado como $\mathcal{M} \simeq \Sigma \times \mathfrak{R}$, donde Σ corresponde a una superficie de Cauchy sin frontera $(\partial\Sigma = 0)$ y $\mathfrak{R}$ representa una parámetro de evolución. Realizando una división $2+1$ de nuestros campos sin romper la simetría interna, la acción de TMG (4.1) adquiere la forma,

$$\begin{aligned} S[A, e, \lambda] \quad = \quad & \int_{\Sigma} \Big[\epsilon^{ab} \theta \left(\frac{1}{\mu} A_{bi} + 2 e_{bi} \right) \dot{A}^{i}{}_{a} + \epsilon^{ab} \lambda_{ib} \dot{e}^{i}{}_{a} + \frac{1}{2} \epsilon^{ab} \lambda^{i}{}_{0} T_{abi} \\ & + \epsilon^{ab} A^{i}{}_{0} \left(\theta T_{abi} + \frac{1}{\mu} \theta F_{abi} + f_{ijk} \lambda^{j}{}_{a} e^{k}{}_{b} \right) \\ & + \epsilon^{ab} e^{i}{}_{0} \left(\theta F_{abi} + D_{a} \lambda_{bi} - \Lambda f_{ijk} e_{a}{}^{j} e_{b}{}^{k} \right) \Big] \, d^{3}x, \end{aligned} \tag{4.12}$$

hasta un término de frontera. Aquí $F_{ab}{}^{i} = \partial_a A^i_b - \partial_b A^i_a + f^{i}{}_{jk} A_a{}^{j} A_b{}^{k}$ es el tensor de esfuerzos de $A_a{}^{i}$, $T_{ab}{}^{i} = D_a e_b{}^{i} - D_b e_a{}^{i}$ y $D_a \lambda_b{}^{i} = \partial_a \lambda_b{}^{i} + f^{i}{}_{ij} A_a{}^{j} \lambda_b{}^{k}$. Además $a, b, c, \ldots$ son coordenadas de espacio y el punto denota derivadas con respecto al parámetro de evolución. Nosotros podemos leer la densidad Lagrangian a partir de (4.12) como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(0)} \quad = \quad & \epsilon^{ab} \theta \left(\frac{1}{\mu} A_{bi} + 2 e_{bi} \right) \dot{A}^{i}{}_{a} + \epsilon^{ab} \lambda_{ib} \dot{e}^{i}{}_{a} + \epsilon^{ab} e^{i}{}_{0} (\theta F_{abi} + D_a \lambda_{bi} - \Lambda f_{ijk} e_a{}^{j} e_b{}^{k}) \\ & + \frac{1}{2} \epsilon^{ab} \lambda^{i}{}_{0} T_{abi} + \epsilon^{ab} A^{i}{}_{0} \left(\theta T_{abi} + \frac{1}{\mu} \theta F_{abi} + f_{ijk} \lambda^{j}{}_{a} e^{k}{}_{b} \right). \end{aligned} \tag{4.13}$$

En particular, esta densidad Lagrangiana puede ser expresada en una forma compacta:

$$\mathcal{L}^{(0)} = a^{(0)}_{I} \dot{\xi}^{(0)I} - V^{(0)}, \tag{4.14}$$

introduciendo un conjunto de variables simplécticas dadas por:

$$\xi^{(0)I} = (A^{i}{}_{a}, A^{i}{}_{0}, e^{i}{}_{a}, e^{i}{}_{0}, \lambda^{i}{}_{a}, \lambda^{i}{}_{0}), \tag{4.15}$$

las cuales nos permiten identificar la correspondiente 1-forma simpléctica

$$a^{(0)}{}_{I} = (\epsilon^{ab} \theta \left(\frac{1}{\mu} A_{bi} + 2 e_{bi} \right), 0, \epsilon^{ab} \lambda_{bi}, 0, 0, 0), \tag{4.16}$$

mientras tanto el potencial simpléctico tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} V^{(0)} &= -\epsilon^{ab}e^{i}{}_{0}(\theta F_{abi} + D_a\lambda_{bi} - \Lambda f_{ijk}e_a{}^{j}e_b{}^{k}) - \frac{1}{2}\epsilon^{ab}\lambda^{i}{}_{0}T_{abi}. \\ & -\epsilon^{ab}A^{i}{}_{0}\left(\theta T_{abi} + \frac{1}{\mu}\theta F_{abi} + f_{ijk}\lambda^{j}{}_{a}e^{k}{}_{b}\right). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Por otra parte, las correspondientes ecuaciones de movimiento que emergen de la anterior Lagrangiana (4.14) pueden ser escritas de la siguiente manera:

$$f^{(0)}_{IJ}\dot{\xi}^{(0)J} - \frac{\delta}{\delta\xi^{(0)I}}V(\xi)^{(0)} = 0, \tag{4.18}$$

con $f^{(0)}_{IJ} \equiv \frac{\delta}{\delta\xi^{(0)I}}a^{(0)}_{J} - \frac{\delta}{\delta\xi^{(0)J}}a^{(0)}_{I}$ la 2-forma simpléctica asociada a $\mathcal{L}^{(0)}$, la cual es claramente antisimétrica. Usando las variables simplécticas (4.15) y (4.16), encontramos que la correspondiente matriz simpléctica $f^{(0)}_{IJ}(x,y)$ puede ser escrita como:

$$\begin{pmatrix} 2\frac{\theta}{\mu}\epsilon^{ab}\eta_{ij} & 0 & -2\theta\epsilon^{ab}\eta_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\theta\epsilon^{ab}\eta_{ij} & 0 & 0 & 0 & -\epsilon^{ab}\eta_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon^{ab}\eta_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\delta^2(x-y). \tag{4.19}$$

No es difícil ver que la matriz $f^{(0)}_{IJ}$ es degenerada en el sentido que hay más grados de libertad en las ecuaciones de movimiento (4.18) que grados de libertad en la teoría. En esta caso, hay restricciones que deben remover los grados de libertad no físicos. Las restricciones aparecen en este formalismo como relaciones álgebraicas necesarias para mantener la consistencia de las ecuaciones de movimiento. Además, es directo determinar que los cero modos de la matriz singular (4.19) son $(v^{(0)}_1)^I = (0, v^{A^i{}_0}, 0, 0, 0, 0)$, $(v^{(0)}_2)^I = (0, 0, 0, v^{e^i{}_0}, 0, 0)$ y $(v^{(0)}_3)^I = (0, 0, 0, 0, 0, v^{\lambda^i{}_0})$, con componentes distintas de cero $v^{A^i{}_0}, v^{e^i{}_0}$ y $v^{\lambda^i{}_0}$, respectivamente. Los cero modos satisfacen la ecuación $(v^{(0)}_{1,2,3})^I f^{(0)}_{IJ} = 0$, por tanto, a partir de las euaciones de movimiento (4.18), tenemos las siguientes relaciones:

$$\int dx^2 (v^{(0)}_1)^T_J \frac{\delta}{\delta\xi^J}\int dy^2 V^{(0)} = v^{A^i_0}\epsilon^{ab}\left(\theta T_{abi} + \frac{\theta}{\mu}F_{abi} + f_{ijk}\lambda^{j}{}_{a}e^{k}{}_{b}\right) = 0, \tag{4.20}$$

$$\int dx^2 (v^{(0)}_2)^T_J \frac{\delta}{\delta\xi^J}\int dy^2 V^{(0)} = v^{e^i_0}\epsilon^{ab}\left(\theta F_{abi} + D_a\lambda_{bi} - \Lambda f_{ijk}e_a{}^{j}e_b{}^{k}\right) = 0, \tag{4.21}$$

$$\int dx^2 (v^{(0)}_3)^T_J \frac{\delta}{\delta\xi^J}\int dy^2 V^{(0)} = v^{\lambda^i_0}\left(\frac{1}{2}\epsilon^{ab}T_{abi}\right) = 0, \tag{4.22}$$

debido a que $v^{A^i_0}, v^{e^i_0}$ and $v^{\lambda^i_0}$ son funciones arbitrarias. Las restricciones resultan ser las siguientes:

$$\Xi^{(0)}_i = \theta\epsilon^{ab}T_{abi} + \frac{\theta}{\mu}\epsilon^{ab}F_{abi} + \epsilon^{ab}f_{ijk}\lambda^{j}{}_{a}e^{k}{}_{b} = 0, \tag{4.23}$$

$$\Theta^{(0)}_i = \theta\epsilon^{ab}F_{abi} + \epsilon^{ab}D_a\lambda_{bi} - \Lambda\epsilon^{ab}f_{ijk}e_a{}^{j}e_b{}^{k} = 0, \tag{4.24}$$

$$\Sigma^{(0)}_i = \frac{1}{2}\epsilon^{ab}T_{abi} = 0. \tag{4.25}$$

Ahora, de acuerdo con la metodología del formalismo simpléctico, analizaremos si existen nuevas restricciones. Para este propósito, demandamos estabilidad (condición de consistencia) de las restricciones (4.23), (4.24) y (4.25), que garantiza su independencia temporal. Como Ξ_i, Θ_i y Σ_i

únicamente dependen del conjunto de variables simplécticas $\xi^{(0)I}$, la condición de consistencia puede ser escrita de la siguiente manera

$$\dot{\Omega}^{(0)} = \frac{\delta\Omega^{(0)}}{\delta\xi^{(0)I}}\dot{\xi}^{(0)I} = 0 \quad \text{con} \quad \Omega^{(0)} = \Xi_i^{(0)}, \Theta_i^{(0)}, \Sigma_i^{(0)}. \tag{4.26}$$

Por tanto la consistencia de las restricciones $\Omega^{(0)}$, junto con las ecuaciones de movimiento (4.18) pueden ser generalmente reescritas como:

$$f_{KJ}^{(1)}\dot{\xi}^{(0)J} = Z_K^{(1)}(\xi), \tag{4.27}$$

con

$$f_{KJ}^{(1)} = \begin{pmatrix} f_{IJ}^{(0)} \\ \frac{\delta}{\delta\xi^{(0)I}}\Omega^{(0)} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Z_K^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta\xi^{(0)I}}V^{(0)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.28}$$

Así mismo, la nueva matriz $f_{KJ}^{(1)}$ toma la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} 2\frac{\theta}{\mu}\eta_{ij} & 0 & -2\theta\eta_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\theta\eta_{ij} & 0 & 0 & 0 & -\eta_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\frac{\theta}{\mu}(\eta_{ij}\partial_a - f_{ijk}A^k{}_a - \mu f_{ijk}e^k{}_a) & 0 & 2\theta(\eta_{ij}\partial_a - f_{ijk}A^k{}_a - \frac{1}{2\theta}f_{ijk}\lambda^k{}_a) & 0 & -f_{ijk}e^k{}_a & 0 \\ 2\theta(\eta_{ij}\partial_a - f_{ijk}A^k{}_a - \frac{1}{2\theta}f_{ijk}\lambda^k{}_a) & 0 & 2\Lambda f_{ijk}e_a{}^k & 0 & (\eta_{ij}\partial_a - f_{ijk}A^k{}_a) & 0 \\ -f_{ijk}e^k{}_a & 0 & \left(\eta_{ij}\partial_a - f_{ijk}A^k{}_a\right) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\times\epsilon^{ab}\delta^2(x-y). \tag{4.29}$$

Es claro ver que $f_{KJ}^{(1)}$ no es una matriz cuadrada, sin embargo, esta tiene cero modos linealmente independientes, los cuales resultan ser

$$(v_1^{(1)})^K = \left(-\partial_a\eta^j_m - f^j{}_{lm}A^l{}_a, 0, -f^j{}_{lm}e^l{}_a, 0, -f^j{}_{lm}\lambda_a{}^l, 0, \eta^j_m, 0, 0\right), \tag{4.30}$$

$$(v_2^{(1)})^K = \left(-\frac{\mu}{2\theta}f^j{}_{lm}\lambda^l{}_a, 0, -\partial_a\eta^j_m - f^j{}_{lm}A^l{}_a, 0, f^j{}_{lm}\left(\mu\lambda^l{}_a + 2\Lambda e^l{}_a\right), 0, 0, \eta^j_m, 0\right), \tag{4.31}$$

$$(v_3^{(1)})^K = \left(-\frac{\mu}{2\theta}f^j{}_{lm}e^l{}_a, 0, 0, 0, -\partial_a\eta^j_m - f^j{}_{lm}A^l{}_a + \mu f^j{}_{lm}e^l{}_a, 0, 0, 0, \eta^j_m\right), \tag{4.32}$$

tal que $(v_{1,2,3}^{(1)})^K f_{KJ}^{(1)} = 0$. Usando el ponencial simpléctico, encontramos que la matriz $Z_K^{(1)}$ esta dada por

$$\begin{pmatrix} -2\theta\left(D_a e_{0j} + \frac{1}{\mu}D_a A_{0j}\right) + f_{jlm}\left(e_0{}^l\lambda_a{}^m + \left(\lambda_0{}^l + 2\theta A_0{}^l\right)e_a{}^m\right) \\ \Xi_i^{(0)} \\ -D_a\lambda_{0j} - 2\theta D_a A_{0j} + f_{jlm}A^l{}_0\lambda^m{}_a - 2\Lambda f_{jlm}e^l{}_0 e^m{}_a \\ \Theta_i^{(0)} \\ -D_a e_{0j} + f_{jlm}A^l{}_0 e^m{}_a \\ \Sigma_i^{(0)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \epsilon^{ab}\delta^2(x-y). \tag{4.33}$$

Multiplicando ambos lados de Ec. (4.27) por los cero modos de la matriz $f^{(1)}_{KJ}$, y evaluando en $\Omega^{(0)} = 0$, tenemos las siguientes relaciones en forma covariante (los símbolos integrales $\int$ son omitidos por simplicidad):

$$
\begin{aligned}
(\nu_1^{(1)})^K Z_K^{(1)} \,|_{\Omega^{(0)}=0} &= 0, && (4.34)\\
(\nu_2^{(1)})^K Z_K^{(1)} \,|_{\Omega^{(0)}=0} &= -\frac{1}{2\theta}\mu\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\lambda_{\alpha i}e_\beta{}^j\lambda_{\gamma j}, && (4.35)\\
(\nu_3^{(1)})^K Z_K^{(1)} \,|_{\Omega^{(0)}=0} &= \frac{1}{2\theta}\mu\epsilon^{\alpha\beta\gamma}e_{\alpha i}e_\beta{}^j\lambda_{\gamma j}. && (4.36)
\end{aligned}
$$

La sustitución $\Omega^{(0)} = 0$ garantiza que esas restricciones desaparecerán del resto del análisis de restricciones. Entonces, de (4.35) y (4.36), junto con la invertibilidad de $e_{\alpha i}$ y $\lambda_{\alpha i}$, finalmente encontramos

$$\Phi^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta\gamma}e_\beta{}^j\lambda_{\gamma j} = 0, \tag{4.37}$$

la cual es conocida como condición de simetría [21] y juega un papel crucial en la relación de las formulaciones métrica tetrada en teorías de gravedad masiva y multi-gravedad. Adicionalmente, uno encuentra que la ecuación (4.37) puede ser dividida en dos ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
\Phi^a &= \epsilon^{ab}\left(e^i{}_0\lambda_{ib} - e^i{}_b\lambda_{i0}\right) = 0, && (4.38)\\
\Phi^0 &= \epsilon^{ab}e^i{}_a\lambda_{ib} = 0, && (4.39)
\end{aligned}
$$

de donde podemos ver que la Ec. (4.38) fija los campos e^i_0 y λ^i_0, mientras tanto Ec. (4.39) nos da nueva restricción. Esto esta completamente de acuerdo con lo que fue encontrado en [57] empleando el método de Dirac, no obstante, en el formalismo de Dirac las restricciones (4.38) y (4.39) emergen como restricciones terciarias, mientras tanto en [59, 60] las restricciones (4.39) han sido introducidas a mano. Ahora, imponiendo la condición de estabilidad sobre las nuevas restricciones (4.39), tenemos la siguiente ecuación:

$$f^{(2)}_{KJ}\dot{\xi}^{(0)J} = Z^{(2)}_K(\xi), \tag{4.40}$$

aquí las matrices $f^{(2)}_{KJ}$ y $Z^{(1)}_K$ pueden ser expresadas como sigue

$$f^{(2)}_{KJ} = \begin{pmatrix} f^{(1)}_{IJ} \\ \frac{\delta}{\delta\xi^{(0)I}}\Phi^0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad Z^{(2)}_K = \begin{pmatrix} Z^{(1)}_K \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.41}$$

Consecuentemente, la nueva matriz $f^{(2)}_{IJ}$ esta dada por

$$
\begin{pmatrix}
2\frac{\theta}{\mu}\eta_{ij} & 0 & -2\theta\eta_{ij} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
2\theta\eta_{ij} & 0 & 0 & 0 & -\eta_{ij} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \eta_{ij} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
2\frac{\theta}{\mu}(\eta_{ij}\partial_a - f_{ijk}A^k{}_a - \mu f_{ijk}e^k{}_a) & 0 & 2\theta(\eta_{ij}\partial_a - f_{ijk}A^k{}_a - \frac{1}{2\theta}f_{ijk}\lambda^k{}_a) & 0 & -f_{ijk}e^k{}_a & 0\\
2\theta(\eta_{ij}\partial_a - f_{ijk}A^k{}_a - \frac{1}{2\theta}f_{ijk}\lambda^k{}_a) & 0 & 2\Lambda f_{ijk}e_a{}^k & 0 & (\eta_{ij}\partial_a - f_{ijk}A^k{}_a) & 0\\
-f_{ijk}e^k{}_a & 0 & \left(\eta_{ij}\partial_a - f_{ijk}A^k{}_a\right) & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \lambda_{aj} & 0 & e_{aj} & 0
\end{pmatrix}
$$

$$\times\epsilon^{ab}\delta^2(x-y), \tag{4.42}$$

fácilmente se puede verifica que $f^{(2)}_{IJ}$ es también una matriz singular. Asimismo, ahora $f^{(2)}_{IJ}$ tiene los siguientes cero modos linealmente independientes:

$$
\begin{aligned}
(\nu_1^{(2)})^J &= \left(-\partial_a\eta^j_m - f^j{}_{lm}A^l{}_a, 0, -f^j{}_{lm}e^l{}_a, 0, -f^j{}_{lm}\lambda_a{}^l, 0, \eta^j_m, 0, 0, 0\right), && (4.43)\\
(\nu_2^{(2)})^J &= \left(-\frac{\mu}{2\theta}f^j{}_{lm}\lambda^l{}_a, 0, -\partial_a\eta^j_m - f^j{}_{lm}A^l{}_a, 0, f^j{}_{lm}\left(\mu\lambda^l{}_a + 2\Lambda e^l{}_a\right), 0, 0, \eta^j_m, 0, 0\right), && (4.44)\\
(\nu_3^{(2)})^J &= \left(-\frac{\mu}{2\theta}f^j{}_{lm}e^l{}_a, 0, 0, 0, -\partial_a\eta^j_m - f^j{}_{lm}A^l{}_a + \mu f^j{}_{lm}e^l{}_a, 0, 0, 0, \eta^j_m, 0\right), && (4.45)\\
(\nu_4^{(2)})^J &= \left(\mu e_a{}^j, 0, e_a{}^j, 0, -\left(\lambda_a{}^j + 2\theta\mu e_a{}^j\right), 0, 0, 0, 0, \eta^j_m\right). && (4.46)
\end{aligned}
$$

Después de realizar la contracción por ambos lados de (4.40) con los nuevos cero modos, no es difícil ver que los cero modos (4.43), (4.44) y (4.45) no generan ningúna nueva restricción, mientras que el cero modo $(\nu_4^{(2)})^J$ nos permite obetener la siguiente relación de constricción:

$$(\nu_4^{(2)})^K Z_K^{(2)}\mid_{\Omega^{(0)},\Omega^{(1)}=0} = \epsilon^{\alpha\beta\nu} f_{ijk} e_\alpha^i e_\beta^j \left(\Lambda e_\nu^k + \mu\lambda_\nu^k\right) = -2\mathbf{e}\,(3\Lambda + \mu\lambda) = 0, \tag{4.47}$$

donde hemos usado $\epsilon^{\alpha\beta\nu} e_\alpha{}^i e_\beta{}^j e_\nu{}^k = \mathbf{e} f^{ijk}$ con $\mathbf{e} = \det \mid e_\alpha{}^i \mid$ y $\lambda = e_\alpha{}^i \lambda^\alpha{}_i$. Consecuentemente, a partir de Ec. (4.47) es posibe identificar la siguiente restricción escalar:

$$\Upsilon = 3\Lambda + \mu\lambda = 0, \tag{4.48}$$

esto también esta de acuerdo con lo que fue obtenido en Ref. [57] vía el método de Dirac, mientras que en [59, 60] esta restriccíon no aparece. Una vez más, podemos introducir la condición de consistencia sobre (4.48) y explorar si hay nuevas restricciones en la teoría. Con este objetivo, estudiamos la ecuación

$$f_{KJ}^{(3)} \dot{\xi}^{(0)J} = Z_K^{(3)}(\xi). \tag{4.49}$$

Es fácil comprobar que después de insertar la anterior restricción en la matriz $f_{KJ}^{(3)}$ y calcular sus cero modos, no se obtienen nuevas restricciones. Por consiguiente, no hay más restriccones en la teoría y entonces nuestro proceso de obtener nuevas restricciones vía la condición de consistencia ha finalizado. Con los anteriores resultados y el método de F-J, ahora podemos introducir las restricciones (4.23), (4.24), (4.25), (4.39) y (4.48) en la densidad Lagrangiana (4.13) por medio de los correspondientes multiplicadores de Lagrange a fin de construir una nueva Lagrangiana. La nueva Lagrangiana simpléctica puede ser escrita como:

$$\mathcal{L} \;=\; \epsilon^{ab}\theta\left(\frac{1}{\mu}A_{bi} + 2e_{bi}\right)\dot{A}^i{}_a + \epsilon^{ab}\lambda_{ib}\dot{e}^i{}_a - \Xi_i\dot{\beta}^i - \Theta_i\dot{\alpha}^i - \Sigma_i\dot{\gamma}^i - \Phi^0\dot{\varphi}_0 - \Upsilon\dot{\varphi} - V, \tag{4.50}$$

con $\dot{\alpha}^i$, $\dot{\beta}^i$, $\dot{\gamma}^i$, $\dot{\varphi}_0$ y $\dot{\varphi}$ los multiplicadores de Lagrange relativos a las restricciones obtenidas. Mientras tanto, uno puede notar que el potencial simpléctico desaparece sobre la superficie de restriciciones porque este resulta ser una combinación lineal de restricciones reflejando la covariancia general de la teoría; es decir, $V = V^{(0)}\mid_{\Omega^{(0)},\Omega^{(1)},\Phi^0,\Upsilon=0} = 0$. Además, de la densidad Lagrangiana (4.50), el nuevo conjunto de variables simplécticas es tomado como:

$$\xi^I = \left(A^i{}_a, \beta^i, e^i{}_a, \alpha^i, \lambda^i{}_a, \gamma^i, \varphi^0, \varphi\right), \tag{4.51}$$

cuya correspondiente 1-forma esta dada por:

$$a_I = \left(\epsilon^{ab}\theta\left(\frac{1}{\mu}A_{bi} + 2e_{bi}\right), -\Xi_i, \epsilon^{ab}\lambda_{bi}, -\Theta_i, 0, -\Sigma_i, -\Phi_0, -\Upsilon\right). \tag{4.52}$$

A continuación, usaremos la variables simplécticas (4.51) y (4.52) para construir la correspondiente matriz cuadrada simpléctica $f_{IJ} \equiv \frac{\delta}{\delta\xi^I}a_J - \frac{\delta}{\delta\xi^J}a_I$, la cual resulta ser

$$\begin{pmatrix}
2\frac{\theta}{\mu}\eta_{ij} & -2\frac{\theta}{\mu}\nabla_{aij} & -2\theta\eta_{ij} & -2\theta\triangle_{aij} & 0 & E_{aij} & 0 & 0 \\
2\frac{\theta}{\mu}\nabla_{aij} & 0 & 2\theta\triangle_{aij} & 0 & -E_{aij} & 0 & 0 & 0 \\
2\theta\eta_{ij} & -2\theta\triangle_{aij} & 0 & -2\Lambda E_{aij} & -\eta_{ij} & -D^x_{aij} & -\lambda_{aj} & -\mu\epsilon_{ad}\lambda^d{}_j \\
2\theta\triangle_{aij} & 0 & 2\Lambda E_{aij} & 0 & D^y_{aij} & 0 & 0 & 0 \\
0 & E_{aij} & \eta_{ij} & -D^x_{aij} & 0 & 0 & -e_{aj} & -\mu\epsilon_{ad}e^d{}_j \\
-E_{aij} & 0 & D^y_{aij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda_{aj} & 0 & e_{aj} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \mu\epsilon_{ad}\lambda^d{}_j & 0 & \mu\epsilon_{ad}e^d{}_j & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$
$$\times\epsilon^{ab}\delta^2(x-y). \tag{4.53}$$

aquí, ha sido definido $\nabla_{aij} = (D_{aij} - \mu E_{aij})$ y $\triangle_{aij} = \left(D_{aij} - \frac{1}{2\theta}L_{aij}\right)$ con $D_{aij} = \partial_a\eta_{ij} - f_{ijk}A^k{}_a$, $E_{aij} = f_{ijk}e^k{}_a$ y $L_{aij} = f_{ijk}\lambda^k{}_a$ respectivamente. Es importante notar que la matriz simpléctica f_{IJ} permanece singular sobre la superficie de restricciones, y por tanto esta aún tiene cero modos linealmente independientes. No obstante, hemos demostrado que no pueden ser obtenidas más restricciones mediante las relaciones de consistencia. Consecuentemente, la no invertibilidad de f_{IJ} es señal de la presencia una simetría de norma que debería ser fijada usando condiciones adicionales (condiciones de norma) para remover la singularidad. De este modo la estructura de los paréntesis de cuantización puede ser determinada y el análisis puede ser finalizado en términos de los grados de libertad físicos.

4.3. Transformaciones de norma

Por una parte, se sabe que el concepto de simetría de norma juega un rol esencial en el desarrollo de las teorías fundamentales de las leyes físicas. Además, la necesidad de describir las interacciones de la naturaleza en la línea de una dinámica relativista nos lleva a construir un lenguage covariante con la simetría de norma [75]. Por tanto, aquí realizamos una discusión sobre la simetría de norma en el formalismo simpléctico. Es importante hacer notar que, cuando todas las restricciones han sido consideradas y la matriz simpléctica aún tiene cero modos, uno puede deducir que la teoría debe tener una simetría de norma. En consecuencia, los cero modos actúan como los generadores de la correspondiente simetría de norma 'δ_G', es decir, las componentes de los cero modos proporcionan las propiedades de transformación relacionadas a la simetría de norma [41, 42, 43]. Las transformaciones locales infinitesimales de las variables simplécticas generadas por $(\nu)^I$ pueden ser expresadas por

$$\delta_G \xi^I = (\nu_A)^I \epsilon^A, \tag{4.54}$$

donde $\{\nu_A\}$ son los cero modos independientes de la matriz simpléctica singular f_{IJ}, y ϵ^A son parámetros de norma. Para la matriz singular (4.53), estos cero modos resultan ser

$$\begin{aligned}
(\nu_1)^I &= \left(-\partial_a \eta^j{}_k - f^j{}_{lk} A_a{}^l, \eta^j{}_k, -f^j{}_{lk} e^l_a, 0, -f^j{}_{lk}\lambda_a{}^l, 0, 0, 0, 0\right), && (4.55)\\
(\nu_2)^I &= \left(-\frac{\mu}{2\theta} f^j{}_{lk}\lambda_a{}^l, 0, -\partial_a \eta^j{}_k - f^j{}_{lk} A_a{}^l, \eta^j{}_k, f^j{}_{lk}\left(\mu\lambda_a{}^l + 2\Lambda e_a{}^l\right), 0, 0, 0, 0\right), && (4.56)\\
(\nu_3)^I &= \left(-\frac{\mu}{2\theta} f^j{}_{lk} e_a{}^l, 0, 0, 0, -\partial_a \eta^j{}_k - f^j{}_{lk} A_a{}^l + \mu f^j{}_{lk} e_a{}^l, \eta^j{}_k, 0, 0, 0\right), && (4.57)
\end{aligned}$$

los cuales son ortogonales del gradiente del potencial simpléctico, al mismo tiempo que genera desplazamientos locales sobre la superficie isopotencial. Como se puede ver de (4.54), las transformaciones de norma infinitesimales que dejan la Lagrangiana original invariante están dadas por

$$\begin{aligned}
\delta_G A_\alpha{}^i(x) &= -D_\alpha \zeta^i - \frac{\mu}{2\theta} f^i{}_{jk}\left(e_\alpha{}^j \sigma^k + \lambda_\alpha{}^j \kappa^k\right), && (4.58)\\
\delta_G e_\alpha{}^i(x) &= -D_\alpha \kappa^i - f^i{}_{jk} e^j_a \zeta^k, && (4.59)\\
\delta_G \lambda_\alpha{}^i(x) &= -D_\alpha \sigma^i - f^i{}_{jk}\lambda_\alpha{}^j \zeta^k + \mu f^i{}_{jk}\left(\lambda_a{}^j \kappa^k + e_a{}^j \sigma^k\right) + 2\Lambda f^i{}_{jk} e_a{}^j \kappa^k, && (4.60)
\end{aligned}$$

donde ζ^i, κ^i y σ^i son parámetros dependentes del tiempo. Es importante resaltar que (4.58), (4.59) y (4.60) corresponden a las simetrías de norma fundamentales de la teoría, aunque los difeomorfismos no han sido encontrados. Sin embargo, se sabe que una apropiada elección de los parámetros de norma genera los difeomorfismos (on-shell) [75, 76, 77]. Si redefinimos los parámetros de norma como:

$$\zeta^i = -A^i{}_\mu \varepsilon^\mu, \qquad \kappa^i = -e^i{}_\mu \varepsilon^\mu, \qquad \sigma^i = -\lambda^i{}_\mu \varepsilon^\mu, \tag{4.61}$$

con ε^{μ} un vector arbitrario. Por tanto, de la simetría fundamental (4.60) y el mapeo (4.61), obtenemos

$$\begin{aligned}
\delta_G A_\alpha{}^i &= \mathfrak{L}_\varepsilon A_\alpha{}^i + \mu\varepsilon^\mu \epsilon_{\alpha\mu\nu}\left[\frac{1}{2\theta}(\delta A)^{\nu i} + (\delta\lambda)^{\nu i}\right], \\
\delta_G e_\alpha{}^i &= \mathfrak{L}_\varepsilon e_\alpha{}^i - \varepsilon^\mu \epsilon_{\alpha\mu\nu}(\delta\lambda)^{\nu i}, \\
\delta_G \lambda_\alpha{}^i &= \mathfrak{L}_\varepsilon \lambda_\alpha{}^i + 2\mu\theta\varepsilon^\mu \epsilon_{\alpha\mu\nu}\left[\frac{1}{2\mu\theta}(\delta e)^{\nu i} - \frac{1}{2\theta}(\delta A)^{\nu i} + (\delta\lambda)^{\nu i}\right].
\end{aligned} \tag{4.62}$$

que son precisamente (on-shell) los difeomorfismos. Adicionalmente, TMG (3.1) es también invariante bajo transformaciones de Poincaré por construcción [76, 75]. Entonces, a fin de recuperar la simetría de Poincaré, necesitamos mapear los parámetros de norma de la simetría fundamental 'δ_G' (4.60) en los parámetros de la simetría de Poincaré. Esto se puede conseguir a través del siguiente mapeo [77, 63, 76], e.g.:

$$\zeta^i = A^i{}_\mu \varepsilon^\mu + \omega^i, \qquad \kappa^i = e^i{}_\mu \varepsilon^\mu, \qquad \sigma^i = \lambda^i{}_\mu \varepsilon^\mu \tag{4.63}$$

donde ε^μ y ω^i están relacionados a las translaciones y rotaciones locales de Lorentz, respectivamente, los cuales juntos constituyen los seis parámetros de norma independientes de la simetría de Poincaré en 3D. Usando este mapeo, las transformaciones de norma reproducen las simetrías de Poincaré modúlo términos proporcionales a las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned}
\delta_G e_\alpha{}^i &= -\varepsilon^\mu \partial_\mu e_\alpha{}^i - e_\mu{}^i \partial_\alpha \varepsilon^\mu - f^i{}_{jk} e_\alpha{}^j \omega^k + \varepsilon^\gamma \epsilon_{\alpha\gamma\nu}(\delta\lambda)^{\nu i}, \\
\delta_G A_\alpha{}^i &= -\partial_\alpha \omega^i - f^i{}_{jk} A_\alpha{}^j \omega^k - \varepsilon^\mu \partial_\mu A_\alpha{}^i - A_\mu{}^i \partial_\alpha \varepsilon^\mu \\
&\quad -\mu\varepsilon^\gamma \epsilon_{\alpha\gamma\nu}\left[\frac{1}{2\theta}(\delta A)^{\nu i} + (\delta\lambda)^{\nu i}\right], \\
\delta_G \lambda_\alpha{}^i &= -\varepsilon^\mu \partial_\mu \lambda_\alpha{}^i - \lambda_\mu{}^i \partial_\alpha \varepsilon^\mu - f^i{}_{jk} \lambda_\alpha{}^j \omega^k \\
&\quad -2\mu\theta\varepsilon^\gamma \epsilon_{\alpha\gamma\nu}\left[\frac{1}{2\mu\theta}(\delta e)^{\nu i} - \frac{1}{2\theta}(\delta A)^{\nu i} + (\delta\lambda)^{\nu i}\right],
\end{aligned} \tag{4.64}$$

donde las ecuaciones de movimiento $(\delta e)^{\nu i}$, $(\delta A)^{\nu i}$ y $(\delta\lambda)^{\nu i}$ están definidas en (4.4)-(4.6). Entonces, nosotros concluimos que la simetrías de Poincaré (4.64) así como los difeomorfismos (4.61) no son simetrías independientes: ellas están contenidas en la simetría de norma fundamental (4.60) como simetrías on-shell, es decir, sólo cuando las ecuaciones de movimiento son impuestas. Además, los generadores de dichas transformaciones pueden ser representados en términos de los cero modos, haciendo evidente que los cero modos de la matriz simpléctica codifican toda la información acerca de la estructura de norma de esta teoría.

4.4. Paréntesis de Faddeev-Jackiw y el conteo de grados de libertad

Como mencionamos previamenten en Cap. 3, para teorías con simetría de norma la matriz simpléctica obtenida al final del análisis es aún singular. Empero, con la finalidad de obtener una matriz regular y determinar la estructura de los paréntesis de cuantización (F-J paréntesis) entre los campos dinámicos, imponemos un procedimiento de fijación de norma para la teoría, es decir, nuevas restricciones de norma. En este caso, ahora fijamos parcialmente la norma imponiendo la norma temporal, en particular, $A^i{}_0 = 0$, $e^i{}_0 = 0$, $\lambda^i{}_0 = 0$ y $\varphi_0 = $ cte (i.e. $\dot{\varphi}_0 = 0$). De esta manera, también introducimos nuevos multiplicadores de Lagrange que hacen valer las condiciones de norma, en concreto, $\dot{\rho}_i$, $\dot{\omega}_i$, $\dot{\tau}_i$ y $\dot{\sigma}^0$. Entonces, la Lagrangiana simpléctica final después de fijar la norma puede ser escrita como

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \epsilon^{ab}\theta\left(\frac{1}{\mu}A_{bi}+2e_{bi}\right)\dot{A}^{i}{}_{a}+\epsilon^{ab}\lambda_{ib}\dot{e}^{i}{}_{a}-\left(\Xi_{i}-\rho_{i}\right)\dot{\beta}^{i}-\left(\Theta_{i}-\omega_{i}\right)\dot{\alpha}^{i}\\ &\quad-\left(\Sigma_{i}-\tau_{i}\right)\dot{\gamma}^{i}-\left(\Phi^{0}-\sigma^{0}\right)\dot{\varphi}_{0}. \end{aligned} \tag{4.65}$$

A partir de la densidad Lagrangiana (4.65) uno puede finalmente leer el conjunto final de variables dinámicas

$$\xi^{I}=\left(A^{i}{}_{a},\beta^{i},e^{i}{}_{a},\alpha^{i},\lambda^{i}{}_{a},\gamma^{i},\varphi^{0},\rho^{i},\omega^{i},\tau^{i},\sigma_{0}\right), \tag{4.66}$$

de forma que, la correspondiente 1-forma simpléctica esta dada por:

$$a_{I}=\left(\epsilon^{ab}\theta\left(\frac{1}{\mu}A_{bi}+2e_{bi}\right),-\Xi_{i}+\rho_{i},\epsilon^{ab}\lambda_{bi},-\Theta_{i}+\omega_{i},0,-\Sigma_{i}+\tau_{i},-\Phi_{0}+\sigma_{0},0,0,0,0\right). \tag{4.67}$$

Después de algunos cálculos de algebraicos, obtenemos la forma explícita de la matriz simpléctica f_{IJ}

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}
2\frac{\theta}{\mu}\eta_{ij} & -2\frac{\theta}{\mu}\nabla_{aij} & -2\theta\eta_{ij} & -2\theta\triangle_{aij} & 0 & E_{aij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
2\frac{\theta}{\mu}\nabla_{aij} & 0 & 2\theta\triangle_{aij} & 0 & -E_{aij} & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\epsilon_{ab}\eta_{ij} & 0 & 0 & 0\\
2\theta\eta_{ij} & -2\theta\triangle_{aij} & 0 & -2\Lambda E_{aij} & -\eta_{ij} & -D^{x}_{aij} & -\lambda_{aj} & 0 & 0 & 0 & 0\\
2\theta\triangle_{aij} & 0 & 2\Lambda E_{aij} & 0 & D^{y}_{aij} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\epsilon_{ab}\eta_{ij} & 0 & 0\\
0 & E_{aij} & \eta_{ij} & -D^{x}_{aij} & 0 & 0 & -e_{aj} & 0 & 0 & 0 & 0\\
-E_{aij} & 0 & D^{y}_{aij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\epsilon_{ab}\eta_{ij} & 0\\
0 & 0 & \lambda_{aj} & 0 & e_{aj} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\epsilon_{ab}\\
0 & \frac{1}{2}\epsilon_{ab}\eta_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\epsilon_{ab}\eta_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\epsilon_{ab}\eta_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\epsilon_{ab} & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}\\ &\times\epsilon^{ab}\delta^{2}(x-y),\end{aligned} \tag{4.68}$$

donde hemos podido observar que ésta es regular. En consecuencia existe la inversa $f_{IJ}{}^{-1}$, la cual puede ser calculada y escrita formalmente como:

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}
\frac{\mu}{2\theta}\eta_{ij} & 0 & 0 & 0 & -\mu\eta_{ij} & 0 & 0 & D^{x}_{aij} & -\frac{\mu}{2\theta}L_{aij} & -\frac{\mu}{2\theta}E_{aij} & \mu e_{ai}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_{ij} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \eta_{ij} & 0 & 0 & -E_{aij} & D_{aij} & 0 & e_{ai}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_{ij} & 0 & 0\\
\mu\eta_{ij} & 0 & -\eta_{ij} & 0 & -2\theta\mu\eta_{ij} & 0 & 0 & L_{aij} & -\diamond_{aij} & -\nabla_{aij} & -\lambda_{ai}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_{ij} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
-D^{y}_{aij} & -\eta_{ij} & E_{aij} & 0 & -L_{aij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\frac{\mu}{2\theta}L_{aij} & 0 & -D^{y}_{aij} & -\eta_{ij} & \diamond_{aij} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\mu}{2\theta}L_{aik}L_{b}{}^{k}{}_{j} & 0 & 0\\
\frac{\mu}{2\theta}E_{aij} & 0 & 0 & 0 & \nabla_{aij} & -\eta_{ij} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\mu}{2\theta}E_{aik}E_{b}{}^{k}{}_{j} & e^{aj}\nabla_{aij}\\
-\mu e_{ai} & 0 & -e_{ai} & 0 & \lambda_{ai} & 0 & -1 & 0 & 0 & -e^{aj}\nabla_{aij} & 0
\end{pmatrix}\\ &\times\epsilon^{ab}\delta^{2}(x-y),\end{aligned} \tag{4.69}$$

con $\diamond_{aij}=(\mu L_{aij}+2\Lambda E_{aij})$. De este modo, el paréntesis de cuantización, denominado paréntesis generalizado de Faddeev-Jackiw, $\{,\}_{F-J}$ entre dos elementos del conjunto de variables simplécticas (4.66), está defenido como:

$$\{\xi_{I}(x),\xi_{J}(y)\}_{F-J}\equiv\left(f_{IJ}\right)^{-1}. \tag{4.70}$$

Los paréntesis de Faddeev-Jackiw diferentes de cero para gravedad AdS topológicamente masiva puden ahora ser fácilmente extraidos usando (4.69) y (4.70). De esta manera tenemos

$$\{A^{i}{}_{a}(x),A^{j}{}_{b}(y)\}_{F-J} = \frac{\mu}{2\theta}\eta^{ij}\delta^{2}(x-y), \tag{4.71}$$

$$\{A^{i}{}_{a}(x),\lambda^{j}{}_{b}(y)\}_{F-J} = -\mu\epsilon_{ab}\eta^{ij}\delta^{2}(x-y), \tag{4.72}$$

$$\{\lambda^{i}{}_{a}(x),\lambda^{j}{}_{b}(y)\}_{F-J} = 2\theta\mu\epsilon_{ab}\eta^{ij}\delta^{2}(x-y), \tag{4.73}$$

$$\{e^{i}{}_{a}(x),\lambda^{j}{}_{b}(y)\}_{F-J} = \epsilon_{ab}\eta^{ij}\delta^{2}(x-y). \tag{4.74}$$

Estos paréntesis de F-J corresponden a los paréntesis de Dirac reportados en [57]. La cuantización canónica $\left(\{\xi_I, \xi_J\}_{F-J} \rightarrow \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{\xi}_I, \hat{\xi}_J\right]\right)$ puede llevarse a cabo usando los mencionados paréntesis dados por (4.71)-(4.74). Asimismo, ahora podemos llevar a cabo el conteo del número de grados de libertad: comenzando con 18 variables canónicas $(e^i{}_a, \lambda^i{}_a, A^i{}_a)$, finalizamos con 17 restricciones independientes $(\Xi_i^{(0)}, \Theta_i^{(0)}, \Sigma_i^{(0)}, \Phi^0, e^i{}_0 = 0, A^i{}_0 = 0, \varphi_0 = \text{cte})$ después de imponer los términos de fijación de norma. Por consiguiente, el número de grados de libertad por punto del espacio para gravedad AdS topológicamente masiva es uno, independientemente del valor de μ, como se afirma en [59, 60].

4.5. Conclusiones

En esta sección, la naturaleza de las restricciones y estructura de norma en la teoría de gravedad Ads topológicamente masiva desde la perspectiva del formalismo de Faddeev-Jackiw ha sido estudiada. El conjunto completo de restricciones físicas en la teoría fueron identificadas a través de condiciones de consistencia y los cero modos. Posteriormente, se demostró que cuando todas las restricciones físicas han sido encontradas pero la matriz simpléctica aún tiene cero-modos, es decir, cuando los cero modos son ortogonales al gradiente del potencial sobre la superficie de restricciones, se puede deducir que la teoría tiene una simetría de norma, y por tanto, los cero modos (4.55)-(4.57) fácilmente generan la simetría de norma bajo la cual todas las cantidades fisícas son invariantes. Mapeando los parámetros de norma apropiadamente también obtenemos las transformaciones de Poincaré y la simetría de difeomorfismos. Adicionalmente, hemos demostrado que fijando la norma temporal de la densidad Lagrangiana (4.50) la correspondiente matriz simpléctica f_{IJ} resalta ser no degenerada, por consiguiente hemos identificado la estructura de los paréntesis de cuantización (paréntesis de F-J) y hemos comprobado que número de grados de libertad físicos es uno.

Capítulo 5

Paréntesis de Dirac y Faddeev-Jackiw para Einstein 4D en el límite $G \longrightarrow 0$

En este capítulo, la formulación de Dirac y Faddeev-Jackiw para la teoría de Einstein en el límite $G \longrightarrow 0$ es desarrollada; obtenemos los paréntesis fundamentales de Dirac y Faddeev-Jackiw para la teoría. Primero, los paréntesis de Dirac son construidos eliminando las restricciones de segunda clase y dejando intactas las de primera clase. Posteriormente, fijando el norma y transformando las restricciones de primera clase en segunda clase calculamos los correspondientes paréntesis de Dirac. Alternativamente, reproducimos todos los resultados del método de Dirac por medio del formalismo simpléctico. En síntesis identificamos las restricciones y probamos que los paréntesis de Dirac y Faddeev-Jackiw coinciden uno a uno.

5.1. Análisis Hamiltoniano

Nuestro punto de partida es la acción escrita en el formalismo de primer orden para gravedad [71, 78]

$$S[A, e] = \frac{1}{8} \int \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon^{IJKL} (e_{\alpha I} e_{\beta J} R_{\gamma\delta KL}) dx^4, \tag{5.1}$$

donde ϵ^{IJKL} es un objeto completamente anti-simétrico con $\epsilon^{0123} = 1$, e^I_α es el campo tétrada y $R_{\gamma\delta KL} = \partial_\gamma A_{\delta KL} - \partial_\delta A_{\gamma KL} + G\left(A_{\gamma K}{}^J A_{\delta JL} - A_{\delta K}{}^J A_{\gamma JL}\right)$ es la curvatura para la $SO(3,1)$ conexión $A_\alpha{}^{IJ}$. Además, G es la constante gravitacional, $\mu, \nu = 0, 1, ..., 3$ son índices espacio-tiempo, x^μ son las coordenadas que etiquetan los puntos de la variedad 4-dimensional $\mathcal{M}$, e $I, J = 0, 1, ..., 3$ son índices internos, que uno puede subir y bajar con una métrica de Minkowski $\eta^{IJ} = (1, -1, -1, -1)$.

En la Ref. [71] se ha reportado que tomando $G \longrightarrow 0$ y definiendo un nuevo conjunto de variables, la acción (5.1) puede ser expresada como cuatro copias de una teoría BF

$$S[e, B] = \frac{1}{2} \int \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} B^I_{\alpha\beta} \left(\partial_\gamma e_{\delta I} - \partial_\delta e_{\gamma I}\right) dx^4, \tag{5.2}$$

donde $B^I_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\epsilon^{IJKL} e_{[\alpha J} A_{\beta]KL}$. Ahora, los campos e^I_α son una colección de cuatro campos vectoriales de $U(1)$. Variando la acción con respecto a $B^I_{\alpha\beta}$, es posible obtener la siguiente ecuación de movimiento: $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_\gamma e^I_\delta = 0$, lo cual implica que $e^I_\alpha = \partial_\alpha f^I$, y por tanto la métrica $g_{\mu\nu} = \partial_\mu f^I \partial_\nu f^J \eta_{IJ}$ corresponde localmente a un espacio-tiempo de Minkowski. Este resultado será usado en las siguientes secciones. Por una parte, en la Ref. [71] se ha realizado el análisis Hamiltoniano de la acción (5.2), usando variables ADM y trabajando en un espacio fase reducido. En ese trabajo sólo han sido identificadas restricciones de primera clase, consecuentemente la construcción de los paréntesis de Dirac no pudo ser reportada. Por otra parte, en la Ref. [78] se reportó un nuevo análisis Hamiltoniano usando el espacio fase completo, en este trabajo se han identificado restricciones de primera y segunda clase. Adicionalmente, la acción extendida y el álgebra entre restricciones también han sido reportados. Usando los resultados de la Ref. [78], se puede ver que existen dos maneras de construir los paréntesis de Dirac; fijando o no la libertad de norma. En este capítulo, vamos a usar el conjunto completo de restricciones halladas en la Ref. [78] para construir los paréntesis de Dirac, posteriormente realizaremos un estudio de la teoría en el formalismo simpléctico de Faddeev-Jackiw, y mostraremos que los paréntesis de Dirac y de Faddeev-Jackiw son los mismos.

Aplicando el formalismos Hamiltoniano de Dirac a la acción (5.2), se puede derivar la siguiente acción extendida para este modelo [78]

$$S\left[e^I_\mu, \Pi^\mu_I, B^I_{\mu\nu}, \Pi^{\mu\nu}_I, u^I_0, u^I, u^I_{0a}, u^I_a, v^I_a, v^I_{ab}\right] = \int \left(\dot{e}^I_\mu \Pi^\mu_I - H_E - v^I_a \chi^a_I - v^I_{ab}\chi^{ab}_I\right), \tag{5.3}$$

donde v^I_a y v^I_{ab} son multiplicadores de Lagrange para las restricciones de segunda clase, dadas por:

$$\begin{aligned} \chi^a{}_I &= \Pi^a{}_I - \eta^{abc}B_{Ibc} \approx 0, \\ \chi^{ab}{}_I &= \Pi^{ab}{}_I \approx 0, \end{aligned} \tag{5.4}$$

mientras tanto, la correspondiente Hamiltoniana extendida H_E es expresada como:

$$H_E = -B^I_{0a}\left(\eta^{abc}(\partial_b e_{Ic} - \partial_c e_{Ib}) - 2\partial_b \Pi^{ab}{}_I\right) - e^I_0 \partial_a \Pi^a_I - u^I_0 \gamma^0_I - u^I \gamma_I - u^I_a \gamma^a_I - u^I_{0a}\gamma^{0a}_I, \tag{5.5}$$

con u^I_0, u^I, u^I_{0a} y u^I_a los multiplicadores de Lagrange para las siguientes restricciones de primera clase:

$$\begin{aligned} \gamma^0{}_I &= \Pi^0{}_I \approx 0, \\ \gamma^{0a}{}_I &= \Pi^{0a}{}_I \approx 0, \\ \gamma_I &= \partial_a \Pi^a_I, \\ \gamma^a{}_I &= \eta^{abc}(\partial_b e_{Ic} - \partial_c e_{Ib}) - 2\partial_b \Pi^{ab}{}_I \approx 0. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Nótese que una consecuencia directa de trabajar en el espacio fase completo, es la existencia de restricciones de segunda clase, las cuales hacen una diferencia respecto a los resultados obtenidos en la Ref. [71], donde sólo se han encontrado restricciones de primer clase. Adicionalmente, se puede observar que esas restricciones no son independentes, debido a que existe reductibilidad entre ellas, dada por $\partial_a \gamma^a{}_I = 0$. Este hecho, complica la construcción de los paréntesis de Dirac para el sistema, sin embargo, este problema puede ser resuelto extendiendo el espacio fase. Por tanto, con el propósito de construir los paréntesis de Dirac sin fijar la libertad de norma, calculamos el álgebra entre las restricciones de segunda clase, es decir

$$\begin{aligned} \{\chi^a{}_I(x), \chi^b{}_J(y)\} &= 0, \\ \{\chi^a{}_I(x), \chi^{bc}{}_J(y)\} &= -\eta^{aij}\frac{\delta^{bc}{}_{ij}}{2}\eta_{IJ}, \\ \{\chi^{ef}{}_I, \chi^{ab}{}_J(y)\} &= 0. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Por otra parte, la matriz $C_{\alpha\beta}$ cuyas componentes son los paréntesis entre las restricciones de segunda clase toma la siguiente forma

$$C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\eta^{abc}\eta_{IJ} \\ \eta^{abc}\eta_{IJ} & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.8}$$

y su inversa es dada por

$$(C^{\alpha\beta})^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \eta_{abc}\eta^{IJ} \\ -\eta_{abc}\eta^{IJ} & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

Los paréntesis de Dirac $\{,\}_D$ entre dos funcionales F, G definidas sobre el espacio fase, es expresado como:

$$\{F(x), G(z)\}_D \equiv \{F(x), G(z)\} - \int d^2u d^2w \{F(x), \xi_\alpha(u)\}(C^{\alpha\beta})^{-1}\{\xi_\beta(w), G(z)\},$$

donde $\{F(x), G(z)\}$ es el usual paréntesis de Poisson entre F, G, y $\xi_\alpha = (\chi^a_I, \chi^{ab}_I)$ representa el conjunto completo de restricciones de segunda clase. Usando este hecho, se pueden obtener los siguientes paréntesis de Dirac:

$$\begin{aligned}
\{e^I{}_a(x), \Pi^b{}_J(y)\}_D &= \delta^b{}_a\delta^I{}_J\delta^3(x-y), \\
\{\Pi^a{}_I(x), \Pi^b{}_J(y)\}_D &= 0, \\
\{e^I{}_a(x), e^J{}_b(y)\}_D &= 0, \\
\{e^I{}_a(x), \Pi^{gd}{}_J(y)\}_D &= 0, \\
\{\Pi^a{}_I(x), B^J{}_{cd}(y)\}_D &= 0, \\
\{\Pi^a{}_I(x), \Pi^{cd}{}_J(y)\}_D &= 0, \\
\{e^I{}_a(x), B^J{}_{gd}(y)\}_D &= \frac{\eta_{agd}}{2}\eta^{IJ}\delta^3(x-y), \\
\{B^I{}_{ab}(x), \Pi^{gd}{}_J(y)\}_D &= 0.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Usando estas expresiones, es trivial mostrar que el álgebra entre restricciones es idénticamente cero. Este resultado no fue reportado en [71]. En esta sección, hemos trabajado en el espacio fase completo sin emplear funciones auxiliares. Adicionalmente, hemos eliminado sólo las restricciones de segunda clase sin la necesidad de tomar en cuenta las condiciones de reductibilidad; sin embargo, si se fija la norma, las restricciones de primaria clase se convertirían en segunda clase, subsecuentemente las condiciones de reductibilidad deben ser tomadas en cuenta. Esto escenario será considerado en los siguientes capítulos.

5.2. Formalismo Faddeev-Jackiw en la norma temporal

En esta sección, analizaremos la acción (5.2) usando el formalismos simpléctico. Se puede notar que la Lagrangiana para (5.2) puede ser escrita de la siguiente manera

$$\mathcal{L}^{(0)} = \eta^{abc}B_{Ibc}\dot{e}^I{}_a - V^{(0)}, \tag{5.11}$$

donde el potencial simpléctico es dado por $V^{(0)} = -\eta^{abc}B_{I0a}(\partial_b e^I{}_c - \partial_c e^I{}_b) - \partial_c(\eta^{abc}B_{Iab})e^I{}_0$. Las correspondientes ecuaciones de movimiento son dadas como [39]

$$f^{(0)}_{ij}\dot{\xi}^j = \frac{\partial V^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^i}, \tag{5.12}$$

donde las matriz simpléctica $f^{(0)}_{ij}$ toma la siguiente forma

$$f^{(0)}_{ij}(x,y) = \frac{\delta a^{(0)}_j(y)}{\delta \xi^{(0)i}(x)} - \frac{\delta a^{(0)}_i(x)}{\delta \xi^{(0)j}(y)}, \tag{5.13}$$

aquí $\xi^{(0)i}$ y $a^{(0)}{}_i$, representan el conjunto de variables simplécticas. Por tanto, de (5.11) es posible identificar la forma explícita para el conjunto de variables simplécticas $\xi^{(0)i} =$

$(e^I{}_a, B_{I0a}, e^I{}_0, B^I{}_{ab})$ y para la correspondiente 1-forma $a^{(0)}{}_i = (\eta^{abc}B_{Ibc}, 0, 0, 0)$. De esta manera, usando estas variables simplécticas, uno puede construir de forma explícita la matrix simpléctica

$$f^{(0)}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\eta^{abc}\eta_{IJ} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \eta^{abc}\eta_{IJ} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y). \tag{5.14}$$

Obviamente la matriz (5.14) no es invertible, por tanto, existen restricciones. Es fácil ver que $f^{(0)}_{ij}$ tiene los siguientes cero modos: $v^{(0)}_1 = (0, v^{B^I_{0a}}, 0, 0)$ y $v^{(0)}_2 = (0, 0, u^{e^I{}_0}, 0)$, aquí $v^{B^I_{0a}}$ y $u^{e^I{}_0}$ son funciones arbitrarias. Usando estos cero modos, se pueden obtener las siguientes restricciones:

$$\Omega^{aI} = \int d^2x (v^{(0)})^T_i(x) \frac{\delta}{\delta\xi^{(0)i}(x)} \int d^2y V^{(0)}(\xi) = \eta^{abc}(\partial_b e^I{}_c - \partial_c e^I{}_b) = 0, \tag{5.15}$$

$$\Omega_I = \int d^2x (v^{(0)})^T_i(x) \frac{\delta}{\delta\xi^{(0)i}(x)} \int d^2y V^{(0)}(\xi) = \partial_c(\eta^{abc}B_{Iab}) = 0. \tag{5.16}$$

Nótese que (5.15) es una restricción reducible, debido a que $\partial_a\Omega^{aI} = 0$.

Ahora, analizaremos si hay más restricciones en el sistema. Para este propósito, escribimos en forma matricial el siguiente sistema [39, 41]

$$f_{kj}\dot{\xi}^j = Z_k(\xi), \tag{5.17}$$

donde

$$Z_k(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5.18}$$

y

$$f_{kj} = \begin{pmatrix} f^{(0)}_{ij} \\ \frac{\partial \Omega^{aI}}{\partial \xi^i} \\ \frac{\partial \Omega^I}{\partial \xi^i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\eta^{abc}\eta_{IJ} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \eta^{abc}\eta_{IJ} & 0 & 0 & 0 \\ 2\eta^{abc}\delta^J_I\partial_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta^{abc}\delta^J_I\partial_b \end{pmatrix} \delta^3(x-y). \tag{5.19}$$

Es fácil ver que la matriz (5.19) no es cuadrada, sin embargo, ésta tiene cero modos linealmente independientes, $(v^{(1)})^T_k$, y de la contracción $(v^{(1)})^T_k Z_k = 0$, es fácil ver que no existen nuevas restricciones. Ahora, es necesario introducir las restricciones halladas a la Lagrangiana simpléctica original y construir una nueva con la información de todas las restricciones. Para este fin, se pueden usar los multiplicadores de Lagrange λ_{aI} y ρ^I asociados a las restricciones Ω^{aI} y Ω_I, respectivamente. Entonces, la nueva Lagrangiana simpléctica es dada por

$$\mathcal{L}^{(1)} = \eta^{abc}B_{Ibc}\dot{e}^I{}_a - \Omega^{aI}\dot{\lambda}_{aI} - \Omega_I\dot{\rho}^I - V^{(1)}, \tag{5.20}$$

donde $V^{(1)} = V^{(0)} |_{\Omega^{aI},\Omega_I=0} = 0$. De esta forma, la Lagrangiana adopta la siguiente forma:

$$\mathcal{L}^{(1)} = \eta^{abc}B_{Ibc}\dot{e}^I{}_a - \Omega^{aI}\dot{\lambda}_{aI} - \Omega_I\dot{\rho}^I, \tag{5.21}$$

de (5.21) es fácil identificar el nuevo conjunto de variables simplécticas $\xi^{i(1)} = (e^I{}_a, \lambda_{aI}, B_{Ibc}, \rho^I)$ y la correspondiente 1-forma $a_i^{(1)} = (\eta^{abc}B_{Ibc}, -\Omega^{aI}, 0, -\Omega_I)$. Usando estas variables, se puede obtener la forma explícita para la matriz simpléctica

$$f_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -2\delta^I{}_J\eta^{abc}\partial_b & -\eta^{abc}\delta^I{}_J & 0 \\ 2\delta^I{}_J\eta^{abc}\partial_b & 0 & 0 & 0 \\ \eta^{abc}\delta^I{}_J & 0 & 0 & -\delta^I{}_J\eta^{abc}\partial_c \\ 0 & 0 & \eta^{abc}\delta^I{}_J\partial_c & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y). \tag{5.22}$$

Nótese que la matriz $f_{ij}^{(1)}$ es singular con 40 cero modos, los cuales podrían darnos nuevas restricciones, sin embargo, ya hemos mostrado que no hay nuevas restricciones en la teoría. Por tanto, la teoría contiene grados de libertad de norma. Con el propósito de invertir la matriz (5.22), es necesario fijar ésta libertad de norma, usamos la norma temporal, es decir, $e^I{}_0 = 0$ y $B_{I0a} = 0$, subsecuentemente ρ^I y λ_{aI} son constantes. Ahora, tomando en cuenta estas condiciones, la Lagrangiana simpléctica adquiere la forma

$$\mathcal{L}^{(2)} = \eta^{abc}B_{Ibc}\dot{e}^I{}_a - (\Omega^{aI} - \alpha^{aI})\dot{\lambda}_{aI} - (\Omega_I - \rho_I)\dot{\phi}^I, \tag{5.23}$$

de aquí, podemos identificar el conjunto final de variables simplécticas $\xi^i = (e^I{}_a, \lambda_{aI}, \phi^I, B_{Ibc}, \alpha^{aI}, \rho_I)$ y la 1-forma $a_i = (\eta^{abc}B_{Ibc}, -(\Omega^{aI} - \alpha^{aI}), -(\Omega_I - \rho_I), 0, 0, 0)$. Usando estas variables, la correspondiente matriz simpléctica esta dada por:

$$f_{ij}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -2\delta^I{}_J\eta^{abc}\partial_b & 0 & -\eta^{abc}\delta^I{}_J & 0 & 0 \\ 2\delta^I{}_J\eta^{abc}\partial_b & 0 & 0 & 0 & -\delta^a{}_b\delta^I{}_J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta^I{}_J\eta^{abc}\partial_c & 0 & \delta^I{}_J \\ \eta^{abc}\delta^I{}_J & 0 & \delta^I{}_J\eta^{abc}\partial_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta^a{}_b\delta^I{}_J & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta^I{}_J & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times\delta^3(x-y). \tag{5.24}$$

Nótese que $f_{ij}^{(2)}$ es ahora regular, por tanto es posible construir la inversa de ésta matriz, la cual toma la siguiente forma:

$$(f_{ij}^{(2)})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\eta_{abc}}{2}\delta^I{}_J & 0 & \delta^I{}_J\partial_a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta^I{}_J\delta^a{}_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta^I{}_J \\ -\frac{\eta_{abc}}{2}\delta^I{}_J & 0 & 0 & 0 & -\delta^I{}_J\delta^{ad}_{bc}\partial_d & 0 \\ 0 & -\delta^I{}_J\delta^a{}_b & 0 & \delta^I{}_J\delta^{ad}_{bc}\partial_d & 0 & 0 \\ -\delta^I{}_J\partial_a & 0 & \delta^I{}_J & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times\delta^3(x-y). \tag{5.25}$$

De esta manera, identificamos los paréntesis básicos de F-J.

$$\begin{aligned} \{e^I{}_a, B_{Jbc}\}_{F-J} &= \frac{1}{2}\delta^I{}_J\eta_{abc}\delta^3(x-y), \\ \{e^I{}_a, \rho_J\}_{F-J} &= \delta^J{}_I\partial_a\delta^3(x-y), \\ \{\lambda_{aI}, \alpha^{bJ}\}_{F-J} &= \delta^b{}_a\delta^J{}_I\delta^3(x-y), \\ \{\phi^I, \rho_J\}_{F-J} &= -\delta^I{}_J\delta^3(x-y), \\ \{B_{Iab}, \alpha^{cJ}\}_{F-J} &= -\delta^J_I\delta^{cd}{}_{ab}\partial_d\delta^3(x-y), \end{aligned} \tag{5.26}$$

Con esto, se puede ver que estos paréntesis coinciden con los paréntesis de Dirac encontrados en la sección previa.

5.3. Paréntesis de Dirac fijando la norma

Es bien sabido que en Relatividad General las coordenadas de espacio y tiempo carecen de significado físico, por tanto la relevancia física de RG esta dada por la relación de campos respecto a otros campos [79]. En este sentido, no se puede localizar el campo gravitacional en el espacio-tiempo (fijar la norma) porque el espacio-tempo es un sistema dinámico, sin embargo, como comentamos anteriormente para la teoría bajo estudio, una de las ecuaciones de movimiento, nos dice que el espacio es localmente Minkowskiano. Por tanto, es posible fijar la norma y así obtener un conjunto completo de restricciones de segunda clase, con el cual podemos construir los paréntesis de Dirac a fin de realizar la cuantización de la teoría. Para este propósito, se pueden introducir las siguientes condiciones de norma: $e^I{}_0 \approx 0$, $B^I{}_{0a} \approx 0$, $\partial^a e^I{}_a \approx 0$ y $-\partial^b B_{ab}{}^I \approx 0$. Aquí, es posible observar que la condición $-\partial^b B_{ab}{}^I$ es también reductible, por tanto, este hecho no permite calcular los paréntesis de Dirac, sin embargo, se puede introducir campos auxiliares a fin de trasformar las restricciones reducibles a constricciones irreductibles [80, 81]. Así, obtenemos el siguiente conjunto de restricciones de segunda clase:

$$
\begin{aligned}
\chi_1 &= e^I{}_0 \approx 0, & \chi_6 &= \partial_a \Pi^a{}_I \approx 0,\\
\chi_2 &= \Pi^0{}_I \approx 0, & \chi_7 &= -\partial^b B_{ab}{}^I + \partial_a q^J \approx 0,\\
\chi_3 &= B^I{}_{0a} \approx 0, & \chi_8 &= 2\eta^{abc}\partial_b e_{Ic} - 2\partial_b \Pi^{ab}{}_I + \partial^a P_I \approx 0,\\
\chi_4 &= \Pi^{0a}{}_I \approx 0, & \chi_9 &= \Pi^a{}_I - \eta^{abc} B_{Ibc} \approx 0,\\
\chi_5 &= \partial^a e^I{}_a \approx 0, & \chi_{10} &= \Pi^{ab}{}_I \approx 0,
\end{aligned}
\tag{5.27}
$$

donde q^I y P_J son campos auxiliares, que satisfacen $\{q^I(x), P_J(y)\} = \delta^I{}_J \delta^3(x-y)$. De esta manera, la matriz $C_{\alpha\beta}$ cuyas entradas son los paréntesis de Poisson entre las restricciones (5.27) es dada por

$$
\begin{pmatrix}
0 & \delta^I{}_J & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\delta^I{}_J & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \frac{\delta^a{}_b}{2}\delta^I{}_J & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -\frac{\delta^a{}_b}{2}\delta^I{}_J & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta^I{}_J\nabla^2 & 0 & 0 & \delta^I{}_J\partial^a & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \delta^I{}_J\nabla^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta^a_b\delta^I{}_J\nabla^2 & 0 & -\frac{\delta^{gd}_{ab}\delta^I{}_J\partial^b}{2}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla^2\delta^a_b\delta^I{}_J & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -\delta^I{}_J\partial^a & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta^{abc}\eta_{IJ}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\delta^{gd}_{ab}\delta^I{}_J\partial^b}{2} & 0 & \eta^{abc}\eta_{IJ} & 0
\end{pmatrix}
\times\delta^3(x-y),
\tag{5.28}
$$

y su inversa $(C_{\alpha\beta})^{-1}$, dada por

$$
\begin{pmatrix}
0 & -\delta^I{}_J & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\delta^I{}_J & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -2\delta^a{}_b\delta^I{}_J & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 2\delta^a{}_b\delta^I{}_J & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\delta^I{}_J}{\nabla^2} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\delta^I{}_J}{\nabla^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta^{IJ}\frac{\eta_{bac}\partial^a}{2\nabla^2}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\delta^a{}_b}{\nabla^2}\delta^I{}_J & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\delta^a{}_b}{\nabla^2}\delta^I{}_J & 0 & \frac{\eta^{IJ}\eta_{acb}\partial^c}{2\nabla^2} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\eta^{IJ}\eta_{acb}\partial^c}{2\nabla^2} & 0 & \frac{\eta_{abc}}{2}\eta^{IJ}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta^{IJ}\frac{\eta_{bac}\partial^a}{2\nabla^2} & 0 & 0 & -\frac{\eta_{abc}}{2}\eta^{IJ} & 0
\end{pmatrix}
\times\epsilon^{ab}\delta^3(x-y),
\tag{5.29}
$$

Es importante mencionar, que los campos auxiliares q^I y P_J han sido incorporados con el objetivo de encontrar la matriz inversa de $C_{\alpha\beta}$. De hecho, sin esos campos es imposible construir la matriz inversa, este es un problema común en teorías con reductibilidad [80, 81]. Por otra parte, estos campos auxiliares no contribuyen a la dinámica del sistema porque los paréntesis de Dirac entre los campos auxiliares y las variables dinámicas son cero, es decir

$$
\begin{array}{ccc}
\{q^I(x), P_J(y)\}_D = 0, & \{q^I(x), e^J{}_0(y)\}_D = 0, & \{q^I(x), \Pi^0{}_J(y)\}_D = 0, \\
\{q^I(x), B^J{}_{0a}\}_D = 0, & \{q^I(x), \Pi^{0a}{}_J(y)\}_D = 0, & \{q^I(x), e^J{}_a(y)\}_D = 0, \\
\{q^I(x), \Pi^{ab}{}_J(y)\}_D = 0, & \{q^I(x), \Pi^a{}_J(y)\}_D = 0, & \{q^I(x), B^J{}_{ab}(y)\}_D = 0, \\
\{P_I(x), e^J{}_0(y)\}_D = 0, & \{P_i(x), \Pi^0{}_J(y)\}_D = 0, & \{P_I(x), B^J{}_{0a}(y)\}_D = 0, \\
\{P_I(x), \Pi^{0a}{}_J(y)\}_D = 0, & \{P_I(x), e^J{}_a(y)\}_D = 0, & \{P_I(x), \Pi^a{}_J(y)\}_D = 0, \\
\{P_I(x), \Pi^{ab}{}_J(y)\}_D = 0. & &
\end{array}
$$

Después de algunos cálculos, ha sido posible obtener los paréntesis de Dirac entre las variables dinámicas

$$
\begin{aligned}
\{e^I{}_a, \Pi^b{}_J\}_D &= \delta^I{}_J \left(\delta^b{}_a - \frac{\partial_a \partial^b}{\nabla^2}\right) \delta^3(x-y), \\
\{e^I{}_a, B_{Jbc}\}_D &= \frac{\delta^I{}_J}{2} \left(\eta_{abc} - \eta_{dbc} \frac{\partial_a \partial^d}{\nabla^2}\right) \delta^3(x-y).
\end{aligned} \tag{5.30}
$$

Es importante comentar que todos estos resultados no fueron reportados en las Refs. [78, 71]. Por otra parte, con todos estos resultados en mano, tenemos ahora las herramientas necesarias para comparar a nivel Hamiltoniano la teoría bajo estudio con las teorías BF para RG 4D. De hecho, ya hemos comentado que la acción (5.1) es una copia de una teoría BF, sin embargo, el contexto de estas dos teorías no es el mismo. Para el primer modelo, tenemos un espacio-tiempo Minkowskiano como escenario, mientras que las teorías BF son background independent.

5.4. Paréntesis de Faddeev-Jackiw usando el espacio fase como variables simplécticas

Finalmente, en esta sección, reproduciremos los resultados obtenidos en la sección previa donde los paréntesis de Dirac han sido derivados fijando la norma. En particular, con esta fijación de norma, lo que hemos hecho es elegir una configuración específica de los campos. En este caso y dentro del formalismo de F-J, vamos a trabajar con el espacio fase como variables simplécticas. Por tanto, a partir de (5.11), es fácil leer la siguiente Lagrangiana

$$
\mathcal{L}^{(0)} = \Pi^a{}_I \dot{e}^I{}_a - V^{(0)}, \tag{5.31}
$$

donde $\Pi^a{}_I = \eta^{abc} B_{Ibc}$ y $V^{(0)} = -\eta^{abc} B_{I0a}(\partial_b e^I{}_c - \partial_c e^I{}_b) - \partial_a \Pi^a{}_I e^I{}_0$. Entonces, las coordenadas simpléctias son $\xi^{(0)i} = (e^I{}_a, \Pi^a{}_I, e^I{}_0, B_{I0a})$, mientras tanto $a_i^{(0)} = (\Pi^a{}_I, 0, 0, 0)$, por consiguiente, la matriz simpléctica adopta la siguiente forma:

$$
f_{ij}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & \delta^b{}_a \delta^I{}_J & 0 & 0 \\ -\delta^b{}_a \delta^I{}_J & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y),
$$

ésta matriz tiene los siguientes cero modos: $v_1^{(0)i} = (0, 0, v^{e^J{}_0}, 0)$ y $v_2^{(0)i} = (0, 0, 0, v^{B_{I0a}})$, donde $v^{B_{I0a}}$ y $v^{e^J{}_0}$ son funciones arbitrarias. De esta forma, realizando la contracción de los cero modos con el gradiente del potencial, es decir

$$
v^{(0)i}{}_{1,2} \frac{\delta V^{(0)}}{\delta \xi^{(0)i}} = 0, \tag{5.32}
$$

no es díficil identificar las sucesivas restricciones: $\Omega_I = \partial_a \Pi^a{}_I = 0$ y $\Omega_I^a = \eta^{abc}\partial_b e_{Ic} = 0$. Estas restricciones son las restricciones secundarias encontradas vía el formalismo de Dirac. Además, Ω_I^a es reductible, porque $\partial_a \Omega_I^a = 0$, por tanto, esta condición será tomada en cuenta. Por otra parte, es necesario calcular lo siguiente:

$$f_{ij} = \begin{pmatrix} f_{ij}^{(0)} \\ \frac{\delta \Omega_I}{\delta \xi_j} \\ \frac{\delta \Omega_I^a}{\delta \xi_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \delta^b{}_a \delta^I{}_J & 0 & 0 \\ -\delta^b{}_a \delta^I{}_J & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \eta^{acd}\partial_c \delta^I{}_J & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_a \delta^I{}_J & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y). \tag{5.33}$$

Aquí, podemos observar que ésta matriz no es cuadrada, sin embargo, ésta tiene los siguientes dos cero modos: $v_1^{(1)i} = (\partial_b V^\lambda{}_I, 0, V^{A_0}, V_a^{B0a}, 0, -V^\lambda{}_I)$ y $v_2^{(1)i} = (0, \eta^{bcd}\partial_c V_{dJ}, V^{A_0}, V^{B0a}{}_a, V_{dJ}, 0)$. Haciendo la contracción de estos cero modos, se encuentra que la siguiente ecuación: $v_{1,2}^{(1)k} Z_k = 0$, se satisface idénticamente. Por tanto, no hay más restricciones en la teoría. De esta manera, toda información sobre las restricciones halladas debe ser incorporada y construir una nueva Lagrangiana simpléctica

$$\mathcal{L}^{(1)} \;=\; \Pi^a{}_I \dot{e}^I{}_a - 2\dot{\lambda}^I{}_a(\eta^{abc}\partial_b e_{Ic}) - \dot{\rho}^I(\partial_a \Pi^a{}_I) - \dot{\theta}_I \partial^a \lambda^I{}_a, \tag{5.34}$$

debido a que Ω_I^a es una restricción reducible en (5.34), entonces es necesario anexar otro multiplicador de Lagrange θ_I adicional a λ^I [40]. Entonces, a partir de la Ec. (5.34), es fácil identificar el siguiente conjunto de variables simplécticas $\xi^{(1)i} = \left(e^I{}_a, \Pi^a{}_I, \lambda^I{}_a, \rho^I, \theta_I\right)$ y la 1-forma $a_i^{(1)} = (\Pi^a{}_I, 0, -2\eta^{abc}\partial_b e_{Ic}, -\partial_a \Pi^a{}_I, \partial^a \lambda^I{}_a)$, con esto la correspondiente matriz simpléctica toma la forma

$$f_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta^b{}_a \delta^I{}_J & -2\eta^{abc}\eta_{IJ}\partial_b & 0 & 0 \\ \delta^a{}_b \delta^I{}_J & 0 & 0 & -\delta^I{}_J \partial_a & 0 \\ 2\eta_{IJ}\eta^{abc}\partial_b & 0 & 0 & 0 & -\delta^I{}_J \partial_a \\ 0 & \delta^I{}_J \partial_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta^I{}_J \partial^a & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y). \tag{5.35}$$

Obviamente $f_{ij}^{(1)}$ es singular, sin embargo, ya hemos mostrado que no hay más restricciones, por tanto, la no invertibilidad de $f_{ij}^{(1)}$ significa que la teoría posee una simetría de norma. De esta forma, debemos imponer las siguientes condiciones de norma: $\overline{\Omega}^I = \partial^a e^I{}_a = 0$ y $\overline{\Omega}_{Ia} = \frac{1}{2}\eta_{abc}\partial^b \Pi^c{}_I$, esta información necesita ser adicionada a la Lagrangiana simpléctica mediante nuevos multiplicadores de Lagrange, por ejemplo, η_I y α^{aI}. Nótese, sin embargo que $\overline{\Omega}_{Ia}$ es una constricción reducible, de esta manera en la Lagrangiana simpléctica, incorporamos un multiplicador más, β_I [40]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(2)} \;=\;& \Pi^a{}_I \dot{e}^a{}_I - 2\dot{\lambda}^I{}_a(\eta^{abc}\partial_b e_{Ic}) - \dot{\rho}^I(\partial_a \Pi^a{}_I) - \dot{\theta}_I \partial^a \lambda^I{}_a - (\frac{1}{2}\eta_{abc}\partial^b \Pi^c{}_I)\dot{\alpha}^{aI} \\ & -(\partial^a e^I{}_a)\dot{\eta}_I - (\partial^a \alpha^I{}_a)\dot{\beta}_I. \end{aligned} \tag{5.36}$$

Ahora, de la Ec. (5.36), es posible identificar el nuevo conjunto de variables simplécticas; $\xi^{(2)i} = (e^a{}_I, \Pi^I{}_a, \lambda^I{}_a, \rho^I, \theta_I, \alpha^{aI}, \eta_I, \beta_I)$ y la correspondiente 1-forma $a_i^{(2)} = (\Pi^a{}_I, 0, -2\eta^{abc}\partial_b e_{Ic}, -\partial_a \Pi^a{}_I, -\partial^a \lambda^I{}_a, \frac{1}{2}\eta_{abc}\partial^b \Pi^c{}_I, -\partial^a e^I{}_a, \partial^a \alpha^I{}_a)$. De esta manera, la matriz simpléctica $f^{(2)}_{ij}$ es dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & -\delta^{b}{}_{a}\delta^{I}{}_{J} & -2\eta^{abc}\eta_{IJ}\partial_{b} & 0 & 0 & 0 & -\delta^{I}{}_{J}\partial^{a} & 0 \\ \delta^{b}{}_{a}\delta^{I}{}_{J} & 0 & 0 & -\delta^{I}{}_{J}\partial_{a} & 0 & -\frac{\delta^{I}{}_{J}}{2}\eta_{abc}\partial^{c} & 0 & 0 \\ 2\eta_{IJ}\eta^{abc}\partial_{b} & 0 & 0 & 0 & -\delta^{I}{}_{J}\partial^{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta^{I}{}_{J}\partial_{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta^{I}{}_{J}\partial^{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\delta^{I}{}_{J}}{2}\eta_{abc}\partial^{c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_{IJ}\partial^{a} \\ \delta^{I}{}_{J}\partial^{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta_{IJ}\partial^{a} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\times\delta^{3}(x-y). \tag{5.37}$$

Finalmente, se puede mostrar que esta matriz es regular, y por consiguiente, calcular su inversa. La inversa de $f^{(2)}_{ij}$, es dada como:

$$\begin{pmatrix} 0 & \delta^{I}{}_{J}\left(\delta^{a}{}_{b}-\frac{\partial^{a}\partial_{b}}{\nabla^{2}}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\delta^{I}{}_{J}\partial_{a}}{\nabla^{2}} & 0 \\ -\delta^{I}{}_{J}\left(\delta^{a}{}_{b}-\frac{\partial^{a}\partial_{b}}{\nabla^{2}}\right) & 0 & 0 & \frac{\delta^{I}{}_{J}\partial^{a}}{\nabla^{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\delta^{I}{}_{J}\partial^{a}}{\nabla^{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\delta^{I}{}_{J}\partial_{a}}{\nabla^{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\delta^{I}{}_{J}}{\nabla^{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\delta^{I}{}_{J}\partial^{a}}{\nabla^{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\delta^{I}{}_{J}\partial_{a}}{\nabla^{2}} \\ \frac{-\delta^{I}{}_{J}\partial_{a}}{\nabla^{2}} & 0 & 0 & \frac{-\delta^{I}{}_{J}}{\nabla^{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\delta^{I}{}_{J}\partial_{a}}{\nabla^{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\times\delta^{3}(x-y). \tag{5.38}$$

Consecuentemente, a partir de (5.38), es posible identificar los siguientes paréntesis generalizados de F-J:

$$\{\xi^{(2)}_{i}(x),\xi^{(2)}_{j}(y)\}_{F-J}=[f^{(2)}_{ij}(x,y)]^{-1}, \tag{5.39}$$

entonces,

$$\{e^{a}_{I}(x),\Pi^{J}_{b}(y)\}_{F-J}=[f^{(2)}_{12}(x,y)]^{-1}=\delta^{I}{}_{J}\left(\delta^{a}{}_{b}-\frac{\partial^{a}\partial_{b}}{\nabla^{2}}\right)\delta^{3}(x-y), \tag{5.40}$$

corresponde al paréntesis de Dirac encontrado en la sección anterior.

5.5. Conclusiones

En este capítulo se realizó un análisis a la teoría de Einstein en el límite $G \to 0$. Trabajando en el espacio fase completo se construyeron los correspondientes paréntesis de Dirac de dos formas distintas; una fijando la norma y la otra sin fijarlo. Primero, se hizo una revisión sobre el análisis Hamltoniano á la Dirac del modelo, con la finalidad de derivar los correspondientes paréntesis de cuantización, todo esto fijando la norma. En este caso, demostramos que es necesario extender el espacio fase por medio de variables auxiliares, sin embargo, este procedimiento es largo y tedioso. Lo anterior nos ha motivado a explorar la dinámica del sistema en el contexto del formalismo simpléctico de F-J. En este análisis mostramos que no es necesario extender el espacio fase, consecuentemente no es necesario emplear variables auxiliares.

Apéndice A

Faddeev-Jackiw para TMG sin constante cosmológica

A.1. Dinámica

La acción para TMG puede ser escrita como [58, 57, 59]

$$S[A, e, \lambda] \quad = \quad \int_{\mathcal{M}} \left[2\theta e^i \wedge F[A]_i + \lambda^i \wedge T_i + \frac{\theta}{\mu} A^i \wedge \left(dA_i + \frac{1}{3} f_{ijk} A^j \wedge A^k \right) \right], \qquad \text{(A.1)}$$

donde μ es el parámetro de Chern-Simons, $\theta = 1/16\pi G$, y $A^i = A_\mu{}^i dx^\mu$ es la conexión 1-forma evaluada en la representación adjunta del grupo de Lie $SO(2,1)$, el cual admite un tensor totalmente antisimétrico f_{ijk}. Además $e^i = e^i_\mu dx^\mu$ es una triáda 1-forma que representa al campo gravitacional y F^i es la 2-forma de curvatura para la conexión A^i, i.e., $F_i \equiv dA_i + \frac{1}{2} f_{ijk} A^j \wedge A^k$. Finalmente λ^i es un multiplicador de Lagrange 1-forma que asegura que la torsión desaparece $T_i \equiv de_i + f_{ijk} A^j \wedge e^k = 0$.
Las ecuaciones de movimiento que emergen de la variación de la acción (A.1) con respecto a las variables dinámicas $e_\alpha{}^i$, $A_\alpha{}^i$ y $\lambda_\alpha{}^i$ estan dadas, además de algunos términos de derivadas totales, por:

$$\begin{aligned} (\delta e)^{\alpha i} &= \epsilon^{\alpha\nu\rho} \left(2\theta F_{\nu\rho}{}^i + D_\nu \lambda_\rho{}^i \right) = 0, \\ (\delta A)^{\alpha i} &= \epsilon^{\alpha\nu\rho} \left(2\theta T_{\nu\rho}{}^i + f^i{}_{jk} \lambda_\nu{}^j e_\rho{}^k + 2\theta\mu^{-1} F_{\nu\rho}{}^i \right) = 0, \\ (\delta\lambda)^{\alpha i} &= \epsilon^{\alpha\nu\rho} T_{\nu\rho}{}^i = 0. \end{aligned} \qquad \text{(A.2)}$$

A partir de la segunda y tercera ecuación en (A.2), el multiplicador de Lagrange $\lambda_\mu{}^i$ puede ser resuelto en términos del tensor de Schouten de la variedad $\mathcal{M}$

$$\lambda_\mu{}^i = 2\theta\mu^{-1} S_{\mu\nu} e^{i\nu}, \qquad \text{con} \qquad S_{\mu\nu} = (Ric)_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R. \qquad \text{(A.3)}$$

La variedad esta codificada con una métrica espacio-tiempo, $g_{\mu\nu} = e_\mu{}^i e_\nu{}^j \eta_{ij}$. Por otra parte, debido a que la torsión desaparece, la conexión de spin $A_\mu{}^i$ es una función de $e_\mu{}^i$

$$A_\mu{}^{ij} = -e^{\nu j} \partial_\mu e_\nu{}^i + \Gamma^\beta_{\alpha\mu} e^i_\beta e^{\alpha j}, \qquad \text{(A.4)}$$

donde $\Gamma^\beta_{\alpha\mu}$ es el símbolo de Christoffel. Insertando la relación (A.3) en la primera ecuación de (A.2), uno obtiene las ecuaciones de campo usuales de TMG [56, 60] en el formalismo de segundo orden

$$G_{\mu\nu} + \frac{1}{\mu} C_{\mu\nu} = 0, \qquad \text{(A.5)}$$

donde $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$, es el tensor de Einstein, y $C_{\mu\nu} \equiv \epsilon_{\mu}{}^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}S_{\beta\nu}$ es esencialmente el tensor de (symmetric traceless) Cotton obtenido de la variación del término gravitacional de Chern-Simons con respecto a la métrica, con $\nabla = \partial + \Gamma$ la derivada covariante para la conexión de Christoffel. Además, el contenido de partícula de esta teoría puede ser obtenido realizando una aproximación lineal de las ecuaciones de movimiento alrededor de un background de Minkowski [56].
Para realizar el análisis simpléctico, asumiremos que la variedad $\mathcal{M}$ es topológicamente $\Sigma \times \mathfrak{R}$, donde Σ corresponde a una superficie de Cauchy sin borde ($\partial\Sigma = 0$) y $\mathfrak{R}$ representa un parámetro de evolución. Aquí, x^{μ} son las coordenadas que etiquetan los puntos de la variedad tridimensional $\mathcal{M}$. En nuestra notación, los índices griegos corren de 0 a 2, mientras la mitad de las letras alfabéticas $(i, j, k, ...)$ corren de 1 a 3.
Realizando la descomposición $2+1$ de nuestros campos sin romper la simetría interna, podemos escribir la acción (A.1) como:

$$\begin{aligned} S[A,e,\lambda] &= \int_{\Sigma}\Big[\theta\epsilon^{ab}\left(2e_{bi}+\frac{1}{\mu}A_{bi}\right)\dot{A}^{i}{}_{a}+\epsilon^{ab}\lambda_{ib}\dot{e}^{i}{}_{a}+\epsilon^{ab}e^{i}{}_{0}\left(\theta F_{abi}+D_{a}\lambda_{bi}\right) \\ &\quad +\frac{1}{2}\epsilon^{ab}\lambda^{i}{}_{0}T_{abi}+\epsilon^{ab}A^{i}{}_{0}\left(\theta T_{abi}+\frac{1}{\mu}\theta F_{abi}+f_{ijk}\lambda^{j}{}_{a}e^{k}{}_{b}\right)\Big]\, d^{3}x, \end{aligned} \tag{A.6}$$

donde $F_{ab}{}^{i} = \partial_{a}A_{b}{}^{i} - \partial_{b}A_{a}{}^{i} + f^{i}{}_{jk}A_{a}{}^{j}A_{b}{}^{k}$, $T_{ab}{}^{i} = D_{a}e_{b}{}^{i} - D_{b}e_{a}{}^{i}$, y la derivada covariante de $\lambda_{a}{}^{i}$ es definida como $D_{a}\lambda_{b}{}^{i} = \partial_{a}\lambda_{b}{}^{i} + f^{i}{}_{jk}A_{a}{}^{j}\lambda_{b}{}^{k}$. Aquí $a, b = 1, 2$ son índices para las coordenadas espaciales (el punto representa una derivada con respecto al parámetro de evolución). De (A.6) podemos identificar la siguiente densidad Lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(0)} &= \theta\epsilon^{ab}\left(2e_{bi}+\frac{1}{\mu}A_{bi}\right)\dot{A}^{i}{}_{a}+\epsilon^{ab}\lambda_{ib}\dot{e}^{i}{}_{a}+\epsilon^{ab}e^{i}{}_{0}(\theta F_{abi}+D_{a}\lambda_{bi})+\frac{1}{2}\epsilon^{ab}\lambda^{i}{}_{0}T_{abi} \\ &\quad +\epsilon^{ab}A^{i}{}_{0}\left(\theta T_{abi}+\frac{1}{\mu}\theta F_{abi}+f_{ijk}\lambda^{j}{}_{a}e^{k}{}_{b}\right). \end{aligned} \tag{A.7}$$

Del principio variacional aplicado a la densidad Lagrangiana (A.7), es posible escribir las ecuaciones de movimiento simplécticas como:

$$f^{(0)}_{ij}\dot{\xi}^{(0)j} = \frac{\delta V^{(0)}(\xi)}{\delta\xi^{(0)i}}, \tag{A.8}$$

donde $f^{(0)}_{ij} = \frac{\delta}{\delta\xi^{(0)i}}a^{(0)}_{j}(\xi) - \frac{\delta}{\delta\xi^{(0)j}}a^{(0)}_{i}(\xi)$, la cual es claramente antisimétrica, es conocida como la 2-forma simpléctica, la cual nos lleva al siguiente conjunto de variables simplécticas $\xi^{(0)i} = (A^{i}{}_{a}, A^{i}{}_{0}, e^{i}{}_{a},\ e^{i}{}_{0}, \lambda^{i}{}_{a}, \lambda^{i}{}_{0})$, la correspondiente 1-forma $a^{(0)}{}_{i} = (2\theta\epsilon^{ab}e_{bi} + \frac{\theta}{\mu}\epsilon^{ab}A_{bi}, 0, \epsilon^{ab}\lambda_{bi}, 0, 0, 0)$, y el potencial simpléctico $V^{(0)}$ dado por:

$$V^{(0)} = \epsilon^{ab}e^{i}{}_{0}(\theta F_{abi}+D_{a}\lambda_{bi})+\frac{1}{2}\epsilon^{ab}\lambda^{i}{}_{0}T_{abi}+\epsilon^{ab}A^{i}{}_{0}\left(\theta T_{abi}+\frac{1}{\mu}\theta F_{abi}+f_{ijk}\lambda^{j}{}_{a}e^{k}{}_{b}\right). \tag{A.9}$$

Usando las variables simplécticas, encontramos que la matriz simpléctica $f^{(0)}_{ij}$ puede ser escrita como

$$f^{(0)}_{ij}(x,y) = \begin{pmatrix} 2\frac{\theta}{\mu}\epsilon^{ab}\eta_{ij} & 0 & -2\theta\epsilon^{ab}\eta_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\theta\epsilon^{ab}\eta_{ij} & 0 & 0 & 0 & -\epsilon^{ab}\eta_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon^{ab}\eta_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\delta^{2}(x-y). \tag{A.10}$$

Claramente $f^{(0)}_{ij}$ es degenerada, esto significa que hay más grados de libertad en las ecuaciones de movimiento (A.8) que grados de libertad físicos en la teoría. Entonces, tenemos una teoría singular, con restricciones que deben remover los grados de libertad no físicos. Los cero modos de esta matriz resultan ser $(v^{(0)}_1)^T_i = (0, v^{A^i{}_0}, 0, 0, 0, 0)$, $(v^{(0)}_2)^T_i = (0, 0, 0, v^{e^i{}_0}, 0, 0)$ y $(v^{(0)}_3)^T_i = (0, 0, 0, 0, 0, v^{\lambda^i{}_0})$, donde $v^{A^i{}_0}, v^{e^i{}_0}$ y $v^{\lambda^i{}_0}$ son funciones arbitrarias. Multiplicando ambos lados de (A.8) por esos cero modos, podemos obtener las siguientes restricciones primarias:

$$
\begin{aligned}
\Xi^{(0)}_i &= \int dx^2 (v^{(0)}_1)^T_j \frac{\delta}{\delta \xi^{(0)j}} \int dy^2 V^{(0)} = \theta \epsilon^{ab} T_{abi} + \frac{\theta}{\mu} \epsilon^{ab} F_{abi} + \epsilon^{ab} f_{ijk} \lambda^j{}_a e^k{}_b = 0, \\
\Theta^{(0)}_i &= \int dx^2 (v^{(0)}_2)^T_j \frac{\delta}{\delta \xi^{(0)j}} \int dy^2 V^{(0)} = \theta \epsilon^{ab} F_{abi} + \epsilon^{ab} D_a \lambda_{bi} = 0, \\
\Sigma^{(0)}_i &= \int dx^2 (v^{(0)}_3)^T_j \frac{\delta}{\delta \xi^{(0)j}} \int dy^2 V^{(0)} = \frac{1}{2} \epsilon^{ab} T_{abi} = 0.
\end{aligned} \tag{A.11}
$$

Siguiendo la prescripción del formalismo simpléctico, analizaremos si existen nuevas restricciones. Para este fin, imponemos una condición de consistencia sobre las restricciones (A.11) como en el método de Dirac:

$$
\dot{\Omega}^{(0)} = \frac{\delta \Omega^{(0)}}{\delta \xi^{(0)i}} \dot{\xi}^{(0)i} = 0 \quad \text{con} \quad \Omega^{(0)} = \Xi^{(0)}_i, \Theta^{(0)}_i, \Sigma^{(0)}_i, \tag{A.12}
$$

la cual significa que esas restricciones deben ser preservadas en el tiempo. Esta condición sobre las restricciones primarias (A.12) y (A.8) puede ser reescrita como:

$$
f^{(1)}_{kj} \dot{\xi}^{(0)j} = Z^{(1)}_k(\xi), \tag{A.13}
$$

donde

$$
f^{(1)}_{kj} = \begin{pmatrix} f^{(0)}_{ij} \\ \frac{\delta \Omega^{(0)}}{\delta \xi^{(0)j}} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad Z^{(1)}_k = \begin{pmatrix} \frac{\delta V^{(0)}}{\delta \xi^{(0)j}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{A.14}
$$

Por tanto la nueva matriz simpléctica $f^{(1)}_{kj}$ esta dada por:

$$
\begin{pmatrix}
2\frac{\theta}{\mu}\eta_{ij} & 0 & -2\theta\eta_{ij} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2\theta\eta_{ij} & 0 & 0 & 0 & -\eta_{ij} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \eta_{ij} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2\frac{\theta}{\mu}(\eta_{ij}\partial_a - f_{ijk}A^k{}_a - \mu f_{ijk}e^k{}_a) & 0 & 2\theta(\eta_{ij}\partial_a - f_{ijk}A^k{}_a - \frac{1}{2\theta} f_{ijk}\lambda^k{}_a) & 0 & -f_{ijk}e^k{}_a & 0 \\
2\theta(\eta_{ij}\partial_a - f_{ijk}A^k{}_a - \frac{1}{2\theta} f_{ijk}\lambda^k{}_a) & 0 & 0 & 0 & (\eta_{ij}\partial_a - f_{ijk}A^k{}_a) & 0 \\
-f_{ijk}e^k{}_a & 0 & (\eta_{ij}\partial_a - f_{ijk}A^k{}_a) & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
\times \epsilon^{ab} \delta^2(x-y). \tag{A.15}
$$

Aunque $f^{(1)}_{kj}$ no es una matriz cuadrada, esta aún posee los siguientes cero modos

$$
\begin{aligned}
(v^{(1)}_1)^{jT} &= \left(\partial_a v^j - f^j{}_{lm} A^l{}_a v^m, v^{e^j{}_0}, -f^j{}_{lm} e^l{}_a v^m, 0, f^j{}_{lm} \lambda_a{}^l v^m, 0, v^j, 0, 0 \right), \\
(v^{(1)}_2)^{jT} &= \left(-\frac{\mu}{2\theta} f^j{}_{lm} e^l{}_a v^m, 0, 0, v^{A^j{}_0}, \partial_a v^j - f^j{}_{lm} A^l{}_a v^m - \mu f^j{}_{lm} e^l{}_a v^m, 0, 0, 0, v^j \right), \\
(v^{(1)}_3)^{jT} &= \left(-\frac{\mu}{2\theta} f^j{}_{lm} \lambda^l{}_a v^m, 0, \partial_a v^j - f^j{}_{lm} A^l{}_a v^m, 0, -\mu f^j{}_{lm} \lambda^l{}_a v^m, v^{\lambda^j{}_0}, 0, v^j, 0 \right),
\end{aligned} \tag{A.16}
$$

donde $\nu^{m}, \nu^{e^{j}_{0}}, \nu^{A^{j}_{0}}, \nu^{\lambda^{j}_{0}}$ son funciones arbitrarias. Por otra parte, la matriz $Z^{(1)}_{k}$ esta dada por:

$$\begin{pmatrix} -2\theta D_{a}e_{0j} + f_{jlm}e_{0}{}^{l}\lambda_{a}{}^{m} + f_{jlm}\lambda_{0}{}^{l}e_{a}{}^{m} + 2\theta f_{jlm}A_{0}{}^{l}e_{a}{}^{m} - 2\frac{1}{\mu}\theta D_{a}A_{0j} \\ 0 \\ -D_{a}\lambda_{0j} - 2\theta D_{a}A_{0j} + f_{jlm}A^{l}{}_{0}\lambda^{m}{}_{a} \\ 0 \\ -D_{a}e_{0j} + f_{jlm}A^{l}{}_{0}e^{m}{}_{a} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\epsilon^{ab}\delta^{2}(x-y). \tag{A.17}$$

Efectuando la contracción de ambos lados de (A.13) con los cero modos (A.16), podemos obtener las siguientes restricciones:

$$(\nu^{(1)})^{T}_{k}Z^{(1)}_{k}\mid_{\Omega^{(0)}=0}= 0. \tag{A.18}$$

La sustitución $\Omega^{(0)} = 0$ garantiza que esas restricciones no aparecerán en los siguientes cálculos. Después de un largo cálculo, de (A.18) obtenemos la forma explícita de las restricciones secundarias

$$\Lambda = 2\epsilon^{ab}e^{i}{}_{a}\lambda_{ib}, \qquad \Lambda_{0a} = e^{i}{}_{0}\lambda_{ia} - e^{i}{}_{a}\lambda_{i0}. \tag{A.19}$$

Esto está completamente de acuerdo con lo que fue encontrado en [57] usando el método de Dirac. Por otra parte, podemos imponer la condición de consistencia sobre (A.19) para obtener el siguiente sistema:

$$f^{(2)}_{kj}\dot{\xi}^{(0)j} = Z^{(2)}_{k}(\xi), \tag{A.20}$$

donde ahora tenemos

$$f^{(2)}_{kj} = \begin{pmatrix} f^{(1)}_{ij} \\ \frac{\delta\Omega^{(1)}}{\delta\xi^{(0)j}} \end{pmatrix}, \qquad \Omega^{(1)} = \Lambda, \Lambda_{0a} \quad \text{y} \quad Z^{(2)}_{k} = \begin{pmatrix} Z^{(1)}_{k} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{A.21}$$

Es fácil ver que, aún después de calcular la matriz simpléctica $f^{(2)}_{kj}$ e insertar las anteriores restricciones (A.19), los cero modos no nos conducen a ninguna nueva restricción, lo cual significa que no hay más restricciones en la teoría, y por tanto, nuestro procedimiento ha llegado a su fin. Ahora, podemos introducir los multiplicadores de Lagrange para las restricciones (A.11) y (A.19) en la densidad Lagrangiana (A.7) a fin de construir una nueva Lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(3)} &= \theta\epsilon^{ab}\left(2e^{i}{}_{b} + \frac{1}{\mu}A_{bi}\right)\dot{A}^{i}{}_{a} + \epsilon^{ab}\lambda_{ib}\dot{e}^{i}{}_{a} - \epsilon^{ab}(\theta F_{abi} + D_{a}\lambda_{bi})\dot{\alpha}^{i} - \frac{1}{2}\epsilon^{ab}T_{abi}\dot{\Gamma}^{i} \\ &\quad -\epsilon^{ab}(\theta T_{abi} + \frac{\theta}{\mu}F_{abi} + f_{ijk}\lambda^{j}{}_{a}e^{k}{}_{b})\dot{\beta}^{i} - \Lambda\dot{\varphi} - \Lambda_{0a}\dot{\varphi}^{0a}, \end{aligned} \tag{A.22}$$

donde el nuevo potencial simpléctico $V^{(3)}$ desaparece debido a que este es una combinación lineal de restricciones, lo que refleja la covariancia general de la teoría, es decir, $V^{(3)} = V^{(0)}\mid_{\Omega^{(0)},\Omega^{(1)}=0}= 0$. Por otra parte, los nuevos multiplicadores de Lagrange para las restricciones son $\dot{\alpha}^{i} = e^{i}_{0}$, $\dot{\beta}^{i} = A^{i}_{0}$, $\dot{\Gamma}^{i} = \lambda^{i}_{0}$, $\dot{\varphi}$ y $\dot{\varphi}^{0a}$. Por tanto, el nuevo conjunto de variables simplécticas es tomado como:

$$\xi^{(3)i} = \left(A^{i}{}_{a}, \beta^{i}, e^{i}{}_{a}, \alpha^{i}, \lambda^{i}{}_{a}, \Gamma^{i}, \varphi, \varphi^{0a}\right). \tag{A.23}$$

Entonces, la correspondiente 1-forma es

$$a_i^{(3)} = \left(\theta\epsilon^{ab}\left(2e_{bi} + \frac{1}{\mu}A_{bi}\right), -\Xi^{(0)}{}_i, \epsilon^{ab}\lambda_{bi}, -\Theta_i^{(0)}, 0, -\Sigma_i^{(0)}, -\Lambda, -\Lambda_{0a}\right). \tag{A.24}$$

Usando estas variables, un cálculo explícito nos lleva a una matriz simpléctica singular $f_{ij}^{(3)} = \frac{\delta}{\delta\xi^{(3)i}} a_j^{(3)}(\xi) - \frac{\delta}{\delta\xi^{(3)j}} a_i^{(3)}(\xi)$. Sin embargo, ya hemos mostrado que no hay más restricciones, por tanto, la teoría debe tener una simetría de norma. Los cero modos de $f_{ij}^{(3)}$ resultan ser

$$\begin{aligned}
\left(\nu_1^{(3)}\right)^{iT} &= \left(-\partial_a\zeta^i - f^i{}_{jk}A_a{}^j\zeta^k, \zeta^i, -f^i{}_{jk}e_a^j\zeta^k, 0, -f^i{}_{jk}\lambda_a{}^j\zeta^k, 0, 0, 0\right), \\
\left(\nu_2^{(3)}\right)^{iT} &= \left(-\frac{\mu}{2\theta}f^i{}_{jk}\lambda_a{}^j\kappa^k, 0, -\partial_a\kappa^i - f^i{}_{jk}A_a{}^j\kappa^k, \kappa^i, +\mu f^i{}_{jk}\lambda_a{}^j\kappa^k, 0, 0, 0\right), \\
\left(\nu_3^{(3)}\right)^{iT} &= \left(-\frac{\mu}{2\theta}f^i{}_{jk}e_a{}^j\sigma^k, 0, 0, 0, -\partial_a\sigma^i - f^i{}_{jk}A_a{}^j\sigma^k + \mu f^i{}_{jk}e_a{}^j\sigma^k, \sigma^i, 0, 0\right).
\end{aligned} \tag{A.25}$$

Es bien sabido que la simetría de norma determina el contenido físico de cualquier teoría de las interacciones fundamentales, por tanto necesitamos conocer explícitamente la forma de las transformaciones de norma de esta teoría. De acuerdo con la prescripción del formalismo simpléctico [40, 42, 46], los cero modos corresponden a los generadores de la simetría de norma de la teoría original (A.1), i.e.

$$\delta_G\xi^{(3)i} = \left(\nu_l^{(3)}\right)^{iT}\epsilon^l, \tag{A.26}$$

donde $\{\left(\nu_l^{(3)}\right)^{iT}\}$ es el conjunto completo de cero modos de la matriz singular $f_{ij}^{(3)}$ y ϵ^l representan parámetros arbitrarios infinitesimales. Usando este hecho, los generadores (A.25) producen las siguientes transformaciones de norma fundamentales para los campos básicos

$$\begin{aligned}
\delta_G A_\alpha{}^i(x) &= -D_\alpha\zeta^i - \frac{\mu}{2\theta}f^i{}_{jk}\left(e_\alpha{}^j\sigma^k + \lambda_\alpha{}^j\kappa^k\right), \\
\delta_G e_\alpha{}^i(x) &= -D_\alpha\kappa^i - f^i{}_{jk}e_a^j\zeta^k, \\
\delta_G\lambda_\alpha{}^i(x) &= -D_\alpha\sigma^i - f^i{}_{jk}\lambda_\alpha{}^j\zeta^k + \mu f^i{}_{jk}\left(\lambda_a{}^j\kappa^k + e_a{}^j\sigma^k\right),
\end{aligned} \tag{A.27}$$

donde ζ^i, κ^i y σ^i son los parámetros de norma independientes del tiempo. Es importante remarcar que (A.27) corresponde a la simetría de norma de la teoría, pero no a los difeomorfismos. No obstante, se sabe que una apropiada elección de los parámetros de norma genera los difeomorfismos (on-shell) [59, 77]. Por tanto, podemos redefinir los parámetros de norma como:

$$\zeta^i = -A^i{}_\mu\varepsilon^\mu, \qquad \kappa^i = -e^i{}_\mu\varepsilon^\mu, \qquad \sigma^i = -\lambda^i{}_\mu\varepsilon^\mu, \tag{A.28}$$

donde ε^μ es un tres-vector arbitrario. De esta forma, a partir de la simetría de norma fundamental (A.27) y el mapeo (A.28), obtenemos

$$\begin{aligned}
\delta_G e_\alpha{}^i &= \mathfrak{L}_\varepsilon e_\alpha{}^i - \varepsilon^\mu\epsilon_{\alpha\mu\nu}(\delta\lambda)^{\nu i}, \\
\delta_G A_\alpha{}^i &= \mathfrak{L}_\varepsilon A_\alpha{}^i + \mu\varepsilon^\mu\epsilon_{\alpha\mu\nu}\left[\frac{1}{2\theta}(\delta A)^{\nu i} + (\delta\lambda)^{\nu i}\right], \\
\delta_G\lambda_\alpha{}^i &= \mathfrak{L}_\varepsilon\lambda_\alpha{}^i + 2\mu\theta\varepsilon^\mu\epsilon_{\alpha\mu\nu}\left[\frac{1}{2\mu\theta}(\delta e)^{\nu i} - \frac{1}{2\theta}(\delta A)^{\nu i} + (\delta\lambda)^{\nu i}\right].
\end{aligned} \tag{A.29}$$

los cuales son (on-shell) difeomorfismos. Por otra parte, por construcción las teorías invariantes bajo difeomorfismos tienen también a las transformaciones de Poincaré, como simetría (off-shell) [76, 75]. Entonces, con el propósito de recuperar la simetría de Poincaré, necesitamos mapear los parámetros de norma de la simetría fundamental 'δ_G' (A.27) en los correspondientes a la simetría de Poincaré. Esto es logrado mediante el mapeo independiente entre los parámetros de norma (A.27) y los de Poincaré [77]:

$$\zeta^i = A^i{}_\mu \varepsilon^\mu + \omega^i, \qquad \kappa^i = e^i{}_\mu \varepsilon^\mu, \qquad \sigma^i = \lambda^i{}_\mu \varepsilon^\mu, \tag{A.30}$$

donde ε^μ y ω^i son los parámetros de traslación y rotación de Lorentz, respectivamente, los cuales juntos constituyen los 6 parámetros de norma de las transformaciones de Poincaré en 3D. Usando este mapeo, se puede ver que la simetrías de norma reproducen las transformaciones de Poincaré, pero módulo términos proporcionales a las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned}
\delta_G e_\alpha{}^i &= -\varepsilon^\mu \partial_\mu e_\alpha{}^i - e_\mu{}^i \partial_\alpha \varepsilon^\mu - f^i{}_{jk} e_\alpha{}^j \omega^k + \varepsilon^\gamma \epsilon_{\alpha\gamma\nu} (\delta\lambda)^{\nu i}, \\
\delta_G A_\alpha{}^i &= -\partial_\alpha \omega^i - f^i{}_{jk} A_\alpha{}^j \omega^k - \varepsilon^\mu \partial_\mu A_\alpha{}^i - A_\mu{}^i \partial_\alpha \varepsilon^\mu - \mu \varepsilon^\gamma \epsilon_{\alpha\gamma\nu} \left[\frac{1}{2\theta} (\delta A)^{\nu i} + (\delta\lambda)^{\nu i} \right], \\
\delta_G \lambda_\alpha{}^i &= -\varepsilon^\mu \partial_\mu \lambda_\alpha{}^i - \lambda_\mu{}^i \partial_\alpha \varepsilon^\mu - f^i{}_{jk} \lambda_\alpha{}^j \omega^k - 2\mu\theta \varepsilon^\gamma \epsilon_{\alpha\gamma\nu} \left[\frac{1}{2\mu\theta} (\delta e)^{\nu i} - \frac{1}{2\theta} (\delta A)^{\nu i} + (\delta\lambda)^{\nu i} \right],
\end{aligned} \tag{A.31}$$

donde las ecuaciones de movimiento $(\delta e)^{\nu i}$, $(\delta A)^{\nu i}$ y $(\delta\lambda)^{\nu i}$ estan definidas en (A.2). Entonces, concluimos que la simetría de Poincaré (A.31) así como los difeomorfismos (A.28) estan contenidos en la simetría de norma fundamental (A.27) sólo on-shell. Además, los generadores de las transformaciones de norma pueden ser representados en términos de los cero modos, haciendo evidente que los cero modos de la 2-forma simpléctica codifican toda la información acerca de la estructura de norma de la teoría.

A.2. Paréntesis de Faddeev-Jackiw

Finalmente, con el objetivo de invertir la matriz simpléctica y obtener los paréntesis generalizados de Faddeev-Jackiw e identificar los grados de libertad físicos, debemos introducir condiciones de fijación de norma, es decir, nuevas "restricciones de norma". Por conveniencia, usamos la norma temporal, es decir, $A^i{}_0 = 0$, $e^i{}_0 = 0$, $\lambda^i{}_0 = 0$ y $\varphi = cte$ (i.e. $\dot\varphi = 0$). Como una consecuencia directa, el término Λ_{0a} desaparece de la densidad Lagrangiana. De esta manera, también introducimos nuevos multiplicadores de Lagrange para las condiciones de norma, es decir, ρ_i, ω_i, τ_i y σ. Entonces, la densidad Lagrangiana se reduce a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(4)} &= \theta \epsilon^{ab} \left(2e_{bi} + \frac{1}{\mu} A_{bi} \right) \dot{A}^i{}_a + \epsilon^{ab} \lambda_{ib} \dot{e}^i{}_a - \left(\Xi_i^{(0)} - \rho_i \right) \dot\beta^i - \left(\Theta_i^{(0)} - \omega_i \right) \dot\alpha^i \\
&\quad - \left(\Sigma_i^{(0)} - \tau_i \right) \dot\Gamma^i - (\Lambda - \sigma) \dot\varphi.
\end{aligned} \tag{A.32}$$

Por tanto, podemos identificar el conjunto final de variables simplécticas

$$\xi^{(4)i} = (A^i{}_a, \beta^i, e^i{}_a, \alpha^i, \lambda^i{}_a, \Gamma^i, \varphi, \rho_i, \omega_i, \tau_i, \sigma), \tag{A.33}$$

con la correspondiente 1-forma simpléctica

$$a_i^{(4)} = \left(\theta \epsilon^{ab} \left(2e_{bi} + \frac{1}{\mu} A_{bi} \right), -\Xi_i^{(0)} + \rho_i, \epsilon^{ab} \lambda_{bi}, -\Theta_i^{(0)} + \omega_i, 0, -\Sigma_i^{(0)} + \tau_i, -\Lambda + \sigma, 0, 0, 0, 0 \right). \tag{A.34}$$

Después de alguna álgebra, obtenemos la forma explícita de la 2-forma simpléctica $f^{(4)}_{ij}$

$$\begin{pmatrix}
\frac{2\theta}{\mu}F & -2\frac{\theta}{\mu}(A+\mu C) & -2\theta F & -2\theta(A+\frac{D}{2\theta}) & 0 & -C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2\frac{\theta}{\mu}(A+\mu C) & 0 & 2\theta(A+\frac{D}{2\theta}) & 0 & C & 0 & 0 & -\eta_{ij} & 0 & 0 & 0 \\
2\theta F & -2\theta(A+\frac{D}{2\theta}) & 0 & 0 & -F & -A & 2I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2\theta(A+\frac{D}{2\theta}) & 0 & 0 & 0 & -A & 0 & 0 & 0 & -\eta_{ij} & 0 & 0 \\
0 & -C & F & A & 0 & 0 & -2H & 0 & 0 & 0 & 0 \\
C & 0 & A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta_{ij} & 0 \\
0 & 0 & -2I & 0 & 2H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & \eta_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \eta_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\times\delta^2(x-y), \tag{A.35}$$

la cual es regular y tiene la siguiente inversa ${f^{(4)}}_{ij}{}^{-1}$

$$\begin{pmatrix}
\frac{\mu}{2\theta}\overline{F} & 0 & 0 & 0 & -\mu\overline{F} & 0 & 0 & -\overline{A} & -\frac{\mu}{2\theta}\overline{D} & -\frac{\mu}{2\theta}\overline{C} & 2\mu e_b{}^j \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta^i{}_j & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\overline{F} & 0 & 0 & -\overline{CF} & -\overline{A} & 0 & 2e_a{}^l \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta^i_j & 0 & 0 \\
\mu\overline{F} & 0 & \overline{F} & 0 & 2\theta\mu\overline{F} & 0 & 0 & \overline{D} & \mu\overline{D} & 2(\overline{A}-\mu\overline{C}) & -2G \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta^i{}_j & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\overline{A} & \eta^i_j & C\overline{F} & 0 & \overline{D} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\mu}{2\theta}D & 0 & A & -\eta^i_j & \mu\overline{D} & 0 & 0 & 0 & \frac{\mu}{2\theta}E & 0 & 0 \\
\frac{\mu}{2\theta}\overline{C} & 0 & 0 & 0 & (2\overline{A}-\mu\overline{C}) & -\eta^{ij} & 0 & 0 & 0 & \frac{\mu}{\theta}B & 2\mu\overline{H} \\
-2\mu e_b{}^i & 0 & -2e_a{}^l & 0 & 2G & 0 & 1 & 0 & 0 & -2\mu\overline{H} & 0
\end{pmatrix}$$

$$\times\delta^2(x-y), \tag{A.36}$$

donde

$$A = \epsilon^{ab}\left(\partial_a\eta_{ij} + f_{ikj}A_a{}^k\right),\; C = \epsilon^{ab}f_{ikj}e_a{}^k,\; D = \epsilon^{ab}f_{ikj}\lambda_a{}^k,\; F = \epsilon^{ab}\eta_{ij},\; H = \epsilon^{ab}e_{aj},\; I = \epsilon^{ab}\lambda_{aj},$$

$$\overline{A} = \left(\partial_a\eta_{ij} + f_{ikj}A_a{}^k\right),\; B = \epsilon^{ab}f_{ijk}f^k{}_{lm}e_a{}^je_b{}^l,\; \overline{C} = f_{ikj}e_a{}^k,\; \overline{D} = f_{ikj}\lambda_a{}^k,\; E = \epsilon^{ab}f_{ijk}f^k{}_{lm}\lambda_a{}^j\lambda_b{}^m,$$

$$\overline{F} = \epsilon_{ab}\eta^{ij}, \quad G = 2\theta\mu e_b{}^l + \lambda_b{}^l, \quad \overline{H} = \epsilon^{ab}f_{ijk}e^j_ae^k_b.$$

Los paréntesis generalizados de Faddeev-Jackiw $\{,\}_{F-J}$ entre dos elementos del conjunto de variables simplécticas (A.33), estan definidos como

$$\{\xi^{(4)}_i(x), \xi^{(4)}_j(y)\}_{F-J} \equiv \left(f^{(4)}_{ij}\right)^{-1}. \tag{A.37}$$

Entonces, llegamos a los paréntesis de Faddeev-Jackiw diferentes de cero para TMG

$$\{A^i{}_a(x), A^j{}_b(y)\}_{F-J} = \frac{\mu}{2\theta}\eta^{ij}\delta^2(x-y), \tag{A.38}$$

$$\{A^i{}_a(x), \lambda^j{}_b(y)\}_{F-J} = \mu\epsilon_{ab}\eta^{ij}\delta^2(x-y), \tag{A.39}$$

$$\{\lambda^i{}_a(x), \lambda^j{}_b(y)\}_{F-J} = 2\theta\mu\epsilon_{ab}\eta^{ij}\delta^2(x-y), \tag{A.40}$$

$$\{e^i{}_a(x), \lambda^j{}_b(y)\}_{F-J} = \epsilon_{ab}\eta^{ij}\delta^2(x-y). \tag{A.41}$$

Esos paréntesis coinciden con los paréntesis de Dirac reportados en [57]. Además, podemos llevar acabo el conteo de los grados de libertad como sigue. Hay 18 variables canónicas $(e^i{}_a, \lambda^i{}_a, A^i{}_a)$ y 17 restricciones independientes $(\Xi^{(0)}_i, \Theta^{(0)}_i, \Sigma^{(0)}_i, \Lambda, e^i{}_0, A^i{}_0, \varphi)$. Por tanto, concluimos que TMG tiene un grado de libertad, correspondiente al gravitón masivo, como se esperaba.

A.3. Análisis linealizado en la formulación métrica

Usando la formulación métrica de TMG dada por la Ec. (A.5), estudiamos la teoría linealizada como una perturbación de la métrica alrededor de un background de Minkowski, es decir

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{A.42}$$

donde $\bar{g}_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski y $h_{\mu\nu}$ es la perturbación. A primer orden en ésta perturbación, el tensor de Ricci y el escalar de Ricci, estan dados por

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(-\bar{\nabla}^2 h_{\mu\nu} - \bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu h + \bar{\nabla}^\sigma\bar{\nabla}_\nu h_{\sigma\mu} + \bar{\nabla}^\sigma\bar{\nabla}_\mu h_{\sigma\nu}\right), \tag{A.43}$$

$$R^{(1)} = \bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu h^{\mu\nu} - \bar{\nabla}^2 h, \tag{A.44}$$

aquí $h \equiv \bar{g}^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$, y $\bar{\nabla}$ es la derivada covariante construida con la métrica de fondo (background). Usando estas expresiones es posible construir correcciones a primer orden del tensor de Einstein y del tensor Cotton como sigue:

$$G^{(1)}_{\mu\nu} = R^{(1)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}R^{(1)}, \tag{A.45}$$

$$C^{(1)}_{\mu\nu} = \epsilon_\mu{}^{\alpha\beta}\bar{\nabla}_\alpha\left(R^{(1)}_{\beta\nu} - \frac{1}{4}\bar{g}_{\beta\nu}R^{(1)}\right). \tag{A.46}$$

Por otra parte, la identidad de Bianchi linealizada es

$$C^{(1)}_{\mu\nu} - C^{(1)}_{\nu\mu} = 0. \tag{A.47}$$

El último término del lado derecho de (A.46) es totalmente antisimétrico en μ y ν, y por lo tanto simplemente nos quedamos con la parte antisimétrica del primer término en el lado derecho de (A.46). Obteniendo de manera alternativa

$$C^{(1)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_\mu{}^{\alpha\beta}\bar{\nabla}_\alpha R^{(1)}_{\beta\nu} + \epsilon_\nu{}^{\alpha\beta}\bar{\nabla}_\alpha R^{(1)}_{\beta\mu}\right). \tag{A.48}$$

Nótese también que no es complicado verificar que

$$\bar{\nabla}^\mu C^{(1)}_{\mu\nu} = 0, \quad \text{y} \quad C^{(1)\mu}{}_\mu = 0. \tag{A.49}$$

Entonces, la corrección a primer orden de Ec. (A.5), esta dada por:

$$G^{(1)}_{\mu\nu} + \frac{1}{\mu}C^{(1)}_{\mu\nu} = 0. \tag{A.50}$$

Por tanto a partir de la traza de ésta ecuación podemos encotrar que: $R^{(1)} = 0$, independiente de μ. Sustituyendo esto en (A.50), podemos encontrar que la Ec. (A.50) puede ser escrita como:

$$G^{(1)}_{\mu\nu} + \frac{1}{\mu}\epsilon_\mu{}^{\alpha\beta}\bar{\nabla}_\alpha G^{(1)}_{\beta\nu} = 0. \tag{A.51}$$

Ahora, consideremos las condiciones de transversalidad y de la traza sobre el fondo de Minkowski, es decir,

$$\bar{\nabla}^\mu h_{\mu\nu} = 0, \quad \text{and} \quad h^\mu{}_\mu = 0. \tag{A.52}$$

Haciendo uso de estas condiciones (A.52), la ecuación (A.51) puede ser expresada de la siguiente forma:

$$\bar{\nabla}^2\left(\delta^\beta_\mu + \frac{1}{\mu}\epsilon_\mu{}^{\alpha\beta}\bar{\nabla}_\alpha\right)h_{\beta\nu}. \tag{A.53}$$

Consecuentemente, ésta ecuación puede ser escrita de forma compacta como:

$$\left[\mathcal{O}(0)^2\mathcal{O}(\mu)h\right]_{\mu\nu} = 0, \tag{A.54}$$

si introducimos los siguientes dos operadores que conmuten

$$\mathcal{O}(0)_\mu^\beta \equiv \epsilon_\mu{}^{\alpha\beta}\bar{\nabla}_\alpha, \quad \text{and} \quad \mathcal{O}(\mu)_\mu^\beta \equiv \delta_\mu^\beta + \frac{1}{\mu}\epsilon_\mu{}^{\alpha\beta}\bar{\nabla}_\alpha. \tag{A.55}$$

entonces la Ec. (A.54) tiene dos soluciones. La primera, el graviton masivo $h_{\mu\nu}^M$, dado por:

$$\left[\mathcal{O}(\mu)h^M\right]_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^M + \frac{1}{\mu}\epsilon_\mu{}^{\alpha\beta}\bar{\nabla}_\alpha h_{\beta\nu}^M = 0. \tag{A.56}$$

La otra solución es un gravito sin masa $\check{h}_{\mu\nu}$, dada por:

$$\left[\mathcal{O}(0)\check{h}\right]_{\mu\nu} = \epsilon_\mu{}^{\alpha\beta}\bar{\nabla}_\alpha\check{h}_{\beta\nu} = 0, \tag{A.57}$$

la cual es también solución para Einstein: $G_{\mu\nu} = 0$. Ahora, definamos el operador lineal $\mathcal{O}(-\mu)_\mu^\beta \equiv \delta_\mu^\beta - \frac{1}{\mu}\epsilon_\mu{}^{\alpha\beta}\bar{\nabla}_\alpha$, de tal manera que conmuta con $\mathcal{O}(\mu)$. Actuando sobre (A.56) con $\mathcal{O}(-\mu)$, es posible tener la ecuación de segundo orden para el graviton con masa

$$\left[\bar{\nabla}^2 - \mu^2\right] h_{\mu\nu}^M = 0, \tag{A.58}$$

Similarmente, en el caso no masivo, la ecuación de segundo orden esta dada por

$$\bar{\nabla}^2\check{h}_{\mu\nu} = 0. \tag{A.59}$$

Entonces la masa del graviton masivo puede ser identificada comparando la ecuación de segundo orden del graviton masivo con la del graviton sin masa, por tanto, la masa del graviton masivo es $m = \sqrt{\mu^2}$. Adicionalmente, la ecuación (A.56) propaga un simple modo, que tiene spin-2, porque h es un dos-tensor simétrico y sin traza, por tanto, la ecuación (A.58) es exactamente la ecuación de Fierz-Pauli que describe a un campo masivo de Spin-2 en un espacio-tiempo de Minkowski.

A.4. Observaciones

En esta sección, la estructura dinámica de TMG ha sido estudiada vía el formalismo simpléctico de Faddeev-Jackiw. Nosotros hemos obtenido las transformaciones de norma fundamentales así como el contenido físico de esta teoría en una forma alternativa a la reportada en [58, 57, 59]. Además mostramos que en el metódo de F-J no es necesario clasificar las restricciones en primera y segunda clase. En este sentido, todas las restricciones son tratadas al mismo nivel. La correcta identificación de las restricciones de TMG nos ha permitido mostrar que hay un grado de libertad físico, y obtener los generadores de norma que conducen a las simetrías de Poincaré y a los difeomorfismos mapeando los parámetros de norma apropiadamente. Posteriormente, los paréntesis de cuantización (F-J paréntesis) fueron obtenidos. Nuestros resultados coinciden con lo que se ha obtenido previamente vía el algoritmo de Dirac [57]. Es importante comentar que no hay una correspondencia uno a uno entre las restricciones que hemos obtenido mediante el formalismo de F-J y las que han sido encontradas vía el formalismo de Dirac [57], sin embargo ambos métodos nos conducen a los mismos resultados. Nuestro análisis sugiere que el método de F-J resulta ser más económico, menos ambiguo y más directo que el formalismo de Dirac.

Bibliografía

[1] C. M. Will, *The Confrontation between General Relativity and Experiment*, *Living Rev. Relativ.* **17**, 4 (2014).

[2] Supernova Search Team Collaboration, A. G. Riess et. al., *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*, Astron. J. 116 (1998) 10091038.

[3] R. Durrer and R. Maartens, *Dark Energy and Dark Gravity*, Gen. Rel. Grav. 40 (2008) 301328.

[4] T. Tsuneyama, *Quantum gravity and property of the very early universe*, 2004, hep-th/0401110.

[5] S. Deser, M. J. Duff and C. J. Isham, Phys. Lett. 93B, 419 (1980).

[6] L. Freidel, D. Minic and T. Takeuchi, Phys. Rev. D72, 104002 (2005).

[7] A. Ashtekar, *Lectures on Non-perturbative Canonical Gravity*, Notes prepared in collaboration with R. S. Tate, World Scientific, Singapore (1991).

[8] S. Holst, Phys. Rev. D53, 5966 (1996).

[9] G. Immirzi, Class. Quant. Grav. 14, L177 (1997).

[10] Supernova Search Team Collaboration, A.G.Riessetal., *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*, Astron. J. 116 (1998) 1009-1038, [astro-ph/9805201].

[11] Supernova Cosmology Project Collaboration, S. Perlmutteretal., *Measurementsof Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae*, Astrophys. J. 517 (1999) 565-586, [astro-ph/9812133].

[12] P. J. E. Peebles and B. Ratra, *The cosmological constant and dark energy*, Rev. Mod. Phys., vol. 75, pp. 559-606, 2003, astro-ph/0207347.

[13] D. Lovelock, *The Einstein tensor and its generalizations*, *J. Math. Phys.* **12** (1971) 498501.

[14] D. Lovelock, *The four-dimensionality of space and the einstein tensor*, *J. Math. Phys.* **13** (1972) 874-867.

[15] M. Fierz and W. Pauli, *On relativistic wave equation for paticles of arbitrary spin in an electromagnetic field*, *Proc. Roy. Soc. Lon.* **A 173** (1939) 211-232.

[16] W. Pauli and M. Fierz, *On Relativistic Field Equations of Particles With Arbitrary Spin in an Electromagnetic Field*, *Helv. Phys. Acta* **12** (1939) 297300.

[17] C. de Rham and G. Gabadadze, *Generalization of the Fierz-Pauli action*, *Phys. Rev.* **D 82** (2010) 044020.

[18] C. de Rham, G. Gabadadze and A.J. Tolley, *Resummation of massive gravity*, *Phys. Rev.* **Lett. 106** (2011) 231101

[19] S. Hassan and R.A. Rosen, *Resolving the ghost problem in non-linear massive gravity*, arXiv:1106.3344 [INSPIRE].

[20] C. de Rham, *Massive Gravity*, *Living Rev. Rel* **17** (2014) 7.

[21] K. Hinterbichler and R. A. Rosen, *Interacting Spin-2 Fields*, *JHEP* **07** (2012) 047.

[22] K. Hinterbichler, *Theoretical Aspects of Massive Gravity*, *Rev. Mod. Phys.* **84** (2012) 671.

[23] V.A. Rubakov and P.G. Tinyakov, *Infrared-modified gravities and massive gravitons*, *Phys. Usp.* **51** (2008) 759.

[24] D. Boulware and S. Deser, *Can gravity have a finite range?*, *Phys. Rev.* **D 6** (1972) 3368.

[25] K.S. Stelle, *Phys. Rev.* **D16**, 953 (1977)

[26] S. Deser and Z. Yang, *Is topologically massive gravity renormalizable?*, *Classical Quantum gravity* **7**, 1603 (1990).

[27] B. Keszthelyi and G. Kleppe, *Renormalizability of* $\mathrm{D} = 3$ *topologically massive gravity, Phys. Lett* **B 281**, 33 (1992)

[28] P.A.M. Dirac, *Lectures Notes on Quantum Mechanics*, Yeshiva University, New York, NY (1964).

[29] P.A.M. Dirac, *Generalized Hamiltonian dynamics*, *Can. J. Math.* **2** (1950) 129

[30] T. Hanson, A., Egge and C. Teitelboim, *Constraints Hamiltonian Systems*, Roma: Accademia Nazionale dei Lincei **1978**.

[31] M. Henneaux and C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton, New Jersey:Princeton University Press **1991**.

[32] L. Castellani, *Symmetries in the contrained Hamiltonian system ,Ann. Phys.* **143** (1982) 357.

[33] C. Deffayet, J. Mourad and G. Zahariade, *Covariant Constraints in ghost free massive gravity*, JCAP 01 (2013) 032.

[34] S. Hassan and R.A. Rosen, *Resolving the ghost problem in non-linear massive gravity*, Phys. Rev. Lett. 108 (2012) 041101.

[35] S. Hassan, R.A. Rosen and A. Schmidt-May, *Ghost-free massive gravity with a general reference metric*, JHEP 02 (2012) 026.

[36] S. Hassan and R.A. Rosen, *Bimetric gravity from ghost-free massive gravity*, JHEP 02 (2012) 126 .

[37] J. Kluson, *Note about hamiltonian structure of non-linear massive gravity*, JHEP 01 (2012) 013 .

[38] S. F. Hassan and Rachel A. Rosen, *Confirmation of the secondary constraint and absence of ghost in massive gravity and bimetric gravity*, JHEP 04 (2012) 123.

[39] L. D. Faddeev and R. Jackiw, *Hamiltonian Reduction of Unconstrained and Constrained Systems*, *Phys. Rev.* **Lett 60**(1988) , 1692.

[40] Barcelos-Neto, J. et al., *Symplectic quantization of constrained systems*, *Mod.Phys.Lett.* **A 7** (1992) 1737.

[41] J. Barcelos-Neto, C. Wotzasek, *Faddeev-Jackiw quantization and constraints*, *Int.J.Mod.Phys.* **A 7** (1992) 4981.

[42] H.Montani and R. Montemayor, *Lagrangian approach to a symplectic formalism for singular systems*, *Phys. Rev.* **D 58** (1998) 125018.

[43] H. Montani and C. Wotzasek, *Faddeev-Jackiw quantization of nonabelian systems*, *Mod.Phys.Lett.* **A 8** (1993) 3387.

[44] J.Antonio Garcia, Josep M. Pons *Equivalence of Faddeev-Jackiw and Dirac approaches for gauge theories*, *Int.J.Mod.Phys.* **A12** (1997) 451.

[45] E.M.C. Abreu, A.C.R. Mendes, C. Neves, W. Oliveira, R.C.N: Silva and C. Wotzasek, *Obtaining non-Abelian field theories via the Faddeev-Jackiw symplectic formalism*, *Phys.Lett.* **A 375** (2010) 3603.

[46] Wotzasek, Clovis, *Faddeev-Jackiw approach to hidden symmetries*, *Annals Phys.* **243** (1995) 73.

[47] S. Deser, R. Jackiw, and G. 't Hooft, *Three-dimensional Einstein gravity: Dynamical of flat space*, Ann. Phys. (N. Y.) 152, 220 (1984)

[48] S. Deser, R. Jackiw, and G. 't Hooft, *Three-dimensional cosmological gravity: Dynamical of constant curvature*, Ann. Phys. (N. Y.) 153, 405 (1984)

[49] E. Witten, *(2+1)-dimensional gravity as an exactly soluble system*, Nucl. Phys. B311, 46 (1988)

[50] W. Li, W. Song, A. Strominger, *Chiral gravity in three dimensions*. *JHEP* **0804**, 082 (2008)

[51] A. Achucarro and P. Townsend, *A Chern-Simons Action for Three-Dimensional anti-DeSitter Supergravity Theories*, *Phys.Lett.***B**180 (1986) 89

[52] A. Ashtekar, Lectures on non perturbative canonical gravity, Word Scientific, 1991. A. Perez, Introduction to Loop Quantum Gravity and Spin Foams; [arXiv:gr-qc/0409061]. C. Rovelli, Quantum Gravity, Cambridge, UK: Univ. Pr. (2004). T. Thiemann, Modern canonical quantum general relativity, Cambridge, UK: Cambridge Univ. Pr. (2007); [arXiv:gr-qc/0110034].

[53] J. D. Romano. Gen. Rel. Grav. 25, 759 (1993).

[54] A.M. Frolov, N. Kiriushcheva, S.V. Kuzmin, Grav.Cosmol. 16 (2010) 181-194.

[55] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, *Topologically Massive Gauge Theories*, Annals Phys. 140 (1982) 372 [Annals Phys. 281 (2000) 409] [Annals Phys. 185 (1988) 406] [INSPIRE].

[56] S. S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, *Three-Dimensional Massive Gauge Theories*, Phys. Rev. Lett. 48 (1982) 975 [INSPIRE].

[57] M. Blagojevic and B. Cvetkovic, *Canonical structure of topologically massive gravity with a cosmological constant*, *JHEP* **05** (2009) 073.

[58] Mu-In Park, *Constraint Dynamics and Gravitons in Three Dimensions*, *JHEP* **0809** (2008) 084.

[59] S. Carlip, *Constraint Algebra of Topologically Massive AdS Gravity*, *JHEP* **0810** (2008) 078.

[60] D. Grumiller, R. Jackiw and N. Johansson, *Canonical analysis of cosmological topologically massive gravity at the chiral point*, **MIT-CTP 3957, UUITP-12/08**, (2008).

[61] S. Carlip, *Inducing Liouville theory from topologically massive gravity*, *Nucl. Phys.* **B 362** (1991) 111-124.

[62] S. Carlip, S. Deser, A. Waldron, and Wise, D. K., *Cosmological Topologically Massive Gravitons and Photons*, *class. Quantum Grav* **26** (2009) 075008.

[63] R. Banerjee, S. Gangopadhyay, P. Mukherjee and D. Roy, *Symmetries of the general topologically massive gravity in the hamiltonian and lagrangian formalisms, JHEP* **1002**, 075 (2010).

[64] Alberto Escalante and Omar Rodriguez Tzompantzi, *Diracs and generalized Faddeev-Jackiw brackets for Einsteins theory in the* $G \to 0$, Annals of Physics 364 (2016) 136147.

[65] Alberto Escalante and Omar Rodriguez Tzompantzi, *Hamiltonian dynamics and gauge symmetry for three-dimensional Palatini theory with cosmological constant*, JHEP 1405 (2014) 073 .

[66] Alberto Escalante and Omar Rodriguez Tzompantzi, *On the Faddeev-Jackiw symplectic framework for topologically massive gravity*, Eur.Phys.J. C76 (2016) no.10, 577

[67] Omar Rodriguez Tzompantzi and Alberto Escalante, *Gauge symmetry and constraints structure in topologically massive AdS gravity: A symplectic viewpoint*, [arXiv:1702.0554]

[68] A. Escalante and L. Carbajal, *Hamiltonian study for Chern-Simons and Pontryagin theories*, Annals Phys. 326 (2011) 323.

[69] A. Escalante and I. Rubalcava-Garcia, *A Pure Diracs canonical analysis for four-dimensional BF theories*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 09 (2012) 1250053.

[70] A. Escalante, *The Chern-Simons state for topological invariants*, Phys. Lett. B 676 (2009) 105.

[71] A. Escalante, *The Hamiltonian dynamics for Einsteins action in* $G \to 0$, Int. J. Theo. Phys. 48 (2009) 2473.

[72] M. Bañados, C. Teitelboim and J. Zanelli, Phys. Rev. Lett 69, 1849 (1992).

[73] E. P. Wigner, *On Unitary Representations of the In homogeneous Lorentz Group*, *AnnalsMath* .40(1939) 149204

[74] S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1996, Vols I-II.

[75] R. Utiyama, *Invariant theoretical interpretation of interaction*, *Phys. Rev*. 101 (1956) 1597.

[76] T. W. B. Kibble, *Lorentz invariance and the gravitational field*, *J. Math. Phys* 2, 212 (1961)

[77] M. Blagojevic, *Gravitation and Gauge Symmetries*, (IOP, Bristol, United Kingdom, 2002).

[78] N.e Sa. Barros, I. Bengtsson, Phys. Rev. D 59 (1999) 107502.

[79] C. Rovelli, Quantum Gravity, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[80] E. Harikumar, M. Sivakumar, Modern Phys. Lett. A 15 (2000) 121132.

[81] A. Escalante, A. Lopez-Villanueva, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 12 (04) (2015) 1550039.